Table des Matières

Notations

On donne ci-dessous l'ensemble des diverses notations employées tout au long de ce mémoire. Les notations les plus spécifiques sont rappelées là où elles apparaissent.

- $N \in \mathbb{N}$
- Ω : désigne un ouvert borné de de $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$.
- $\Gamma = \partial\Omega$: frontière de Ω.
- Pour E un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^N$, $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E .
- $|.|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.
- Si $x \in \mathbb{R}^N$, on désigne par x_i ses coordonnées :$x = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i e_i$.
- On munit $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire usuel . défini par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad x.y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

- $C^0(\Omega)$: l'espace des fonctions continues sur Ω.
- $C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continuement différentiables sur Ω $(k \in \mathbb{N})$.
- $C^\infty(\Omega) = \underset{k \geq 0}{\cap} C^k(\Omega)$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des disributions.
- $L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ intégrable tel que } \int\limits_{\Omega} |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$.
- $L^1_{loc}(\Omega)$: l'espace des fonctions localement intégrables sur Ω.

- $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\},\ 1 < p < \infty.$
- $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^N \text{ t.q. } f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},\ 1 \le p < +\infty$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

- $L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N)$:l'espace des fonctions mesurables tq $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$.
- $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } c \text{ tel que } |f(x)| \le c \ \ p.p \text{ sur } \Omega\}$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c;\ |f(x)| \le c \ \ p.p \text{ sur } \Omega\}.$$

- $L^2_0(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / \int_\Omega f(x) dx = 0 \right\}.$
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)\}$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left[\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

- $W^{1,p}_0(\Omega)$: la fermeture de $D(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.
- $W^{-1,q}(\Omega)$: l'espace dual de $W^{1,p}_0(\Omega)$.
- $H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = \overline{1, N} \right\}$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1(\Omega)}} = \left[\int_\Omega \left(v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right]^{1/2}.$$

- $H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega} = 0\}$, où γ_0 est l'application trace.
- $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H^1_0(\Omega)$.
- Y : la période de réference définie par:

$$Y = \prod_{i=1}^N]0, l_i[\quad \text{avec} \quad l_i > 0 \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

- $|Y|$: mesure de Y (mesure de Lebesgue).
- $L^2_\sharp(Y) = \left\{ f \text{ t.q. } f \in L^2(Y) \text{ et } f \text{ est } Y\text{-périodique} \right\}$.
- $H^1_{per}(Y) = \left\{ f \text{ t.q. } f \in H^1(Y) \text{ et } f \text{ est } Y\text{-périodique} \right\}$.
- $W_{per}(Y) = \left\{ f \text{ t.q. } f \in H^1_{per}(Y) \text{ et } M(f) = 0 \right\}$.
- ∇f : le gradiant de la fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^t = \nabla f.$$

- Δf : le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f.$$

- $\operatorname{div}(u)$: la divergence d'un vecteur u est

$$divu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

- $M(f)$: La moyenne de la fonction f sur Y est notée par

$$M(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy$$

- $\{e_i\}_{i=\overline{1,N}}$: la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
- δ_{ij} : symbole de Kronecker.
- $(.,.)$: le produit scalaire.
- $\langle .,. \rangle$: le produit de dualité.
- u : un vecteur de $\mathbb{R}^N$.
- A : une matrice carrée d'ordre N.

Introduction

Ces dernières années ont vu un développement considérable dans l'étude et l'utilisation des matériaux composites, principalement dans les branches à technologie avancée (matériaux nouveaux, industrie nucléaire, aérospatiale...). La structure de ces matériaux peut être très diverse (structures stratifiée, fibrée, matériaux poreux...). Leur point commun étant d'être composés de divers constituants intimement mélangés et imbriqués. Une difficulté majeure rencontrée dans l'étude des équations de la physique de ces matériaux est que les divers paramètres physiques (coefficients de conductivité, d'élasticité...) sont discontinus et variant très vite d'un constituant à l'autre.

La théorie de l'homogénéisation repose sur la remarque suivante: lorsque les constituants sont intimement mêlés, la structure *microscopique* du matériau devient très complexe. En contre-partie d'un point de vue *macroscopique* le matériau tend à se comporter comme un matériau idéal, homogène. La théorie de l'homogénéisation se propose de déterminer ce problème homogénéisé.

Il y a plusieurs méthodes pour déterminer ce problème, dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de la méthode de Tartar des fonctions tests oscillantes. Cette méthode a été redécouverte par Leon Simon, un mathématicien Australien, et puis elle a été suivie par George Papanicolaou et Raghu Varadhan, qui sont des probabilistes, pour faire leur démonstration dans un cadre probabiliste. En fait ce qui est plus important pour Luc Tartar est de comprendre la physique caché derrière les les équations.

Le but de notre travail est de résoudre une équations à coefficients escillants dans un domaine caractéristique par deux échelles d'espace:*macroscopique* $\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ et *microscopique* x.

Le problème à homogénéisé est défini comme suit

$$\begin{cases} -\text{div }\left(A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P^{\varepsilon})$$

Homogénéisé ce problème (P^{ε}) revient à détèrminer le problème limite $\left(P^{0}\right)$.

Dans ce mémoire il y a trois chapitres organisés de la manière suivante :

Le **chapitre I** est consacré aux rappels de quelques théorèmes fondamentaux basés surtout sur la convergence faible et sur le théorème de Lax-Miligram qui nous donne l'existence et l'unicité de la solution de quelques problèmes variationnels sous certaines conditions. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux [1, 2, 3, 4, 10, 11].

Le **chapitre II**, intitulé **«L'homogénéisation des équations elliptiques: Résultats de convergence»**. On se donne un cas modèle du problème de Dirichlet pour des équations elliptiques. On énonce le résultat général d'homogénéisation, ce résultat sera prouvé dans le prochain chapitre par <<**la méthode de Tartar des fonctions tests oscillantes**>> et on prouve quelques propriétés des coefficients homogénéisés. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux [3, 5, 6, 7].

Le **chapitre III** est consacré au traitement de <<**la méthode de Tartar des fonctions tests oscillantes**>>. On commence ce chapitre par la preuve d'un théorème important énoncé dans le chapitre précédant consernant le résultat général d'homogénéisation. Ceci est fait en employant la méthode présentée par L.Tartar (1977a, 1978). Dans la suite on prouve la convergence de l'énergie associée au problème modèle c.-à-d. le problème de Dirichlet .Cette convergence nous permet de donner dans la section qui suit un résultat de correcteur. Les deux sections qui vont venir après contiennent quelques résultats de comparaison et des propriétés de convergence. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux [3, 5, 6, 7, 8, 9].

Chapitre 1

Préliminaires

On va introduire des notions, définitions et des théorèmes qu'on utilisera plus tard.

1.1 La convergence faible et faible * dans un Banach

Définition 1.1 *Soit E un espace de Banach, E^* son dual et $\langle .,. \rangle$ le produit de dualité sur $E^* \times E$.*

- On dit que la suite (x_n) de E converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\langle x^*, x_n \rangle \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \langle x^*, x \rangle, \forall x^* \in E^*, \tag{1.1}$$

  et on écrit:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ faib. dans } E. \tag{1.2}$$

- On dit que la suite (x_n^*) de E^* converge faiblement $*$ vers $x^* \in E^*$ si et seulement si :

$$\langle x_n^*, x \rangle \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \langle x^*, x \rangle, \forall x \in E, \tag{1.3}$$

  et on écrit:

$$x_n^* \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^* \text{ faib.} * \text{ dans } E^*. \tag{1.4}$$

Théorème 1.1 *Soit E un espace de Banach, E^* son dual. Soient (x_n) et (x_n^*) deux suites de E et de E^* respectivement.*

- Soit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E, alors:

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_E \leq k \\ \|x\|_E \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_E \end{cases} \tag{1.5}$$

- Soit $x_n^* \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$ faib.$*$ dans E^*, alors:

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n^*\|_{E^*} \leq k \\ \|x^*\|_{E^*} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n^*\|_{E^*} \end{cases} \tag{1.6}$$

- Si $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ (fortement dans E), alors $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E.
- Si $x_n^* \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$ (fortement dans E^*), alors $x_n^* \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$ faib.$*$ dans E^*.
- Si $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ faib. dans E et $x_n^* \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$ (fortement dans E^*), alors $\langle x_n^*, x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \langle x^*, x\rangle$.

Définition 1.2 (Espace réflexif) *Soit E un espace de Banach, soit E^* son dual (muni de la norme duale $\|f\|_{E^*} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle f, x\rangle|$).*
Soit E^{**} son bidual (muni de la norme $\|f\|_{E^*} = \sup\limits_{\substack{f\in E^* \\ \|x\|_{E^*} \leq 1}} |\langle g, f\rangle|$)
On a une injection canonique $J : E \to E^{**}$ définie comme suit: Soit $x \in E$ fixé, l'application $f \to \langle f, x\rangle$ de E^* dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E^* i.e. un élément de E^{**} noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E^{**},E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*,E}\ , \ \forall x \in E, \forall f \in E^*$$

Il est clair que j est linéaire et J est une isométrie i.e. $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$;en effet

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|x\|_{E^*} \leq 1}} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E$$

Lorsque J est surjective on dit que E est réfléxif.

Définition 1.3 (Espace séparable) *On dit que un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui dense dans E.*

Théorème 1.2 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée de E, alors :*
•Il existe une sous suite $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ de (x_n) et $x \in E$ tel.que.

$$x_{\sigma(n)} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ faib.dans } E.$$

•Si chaque sous suite converge faiblement vers la même limite x, alors:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \ \text{ faib. dans } E. \tag{1.7}$$

Proposition 1.1 *Soit* $(x_n) \subset E$ *et* $(y_n) \subset E'$ *tq*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \quad faib.\ dans\ E$$
$$y_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} y \quad fort.\ dans\ E'$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n, x_n \rangle_{E',E} = \langle y, x \rangle_{E',E}\,.$$

1.2 La convergence faible et faible * dans les espaces L^p

Définition 1.4 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$.
i) *Soit* $1 \leq p < +\infty$.*On note par* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *l'ensemble des fonctions mesurables* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *tel que:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.8}$$

où $\|.\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$*est une norme sur* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$.
ii) *Soit* $p = +\infty$.*On note par* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *l'ensemble des fonctions mesurables* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *tel que:*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \ p.p\ x \in \Omega\} < +\infty. \tag{1.9}$$

où $\|.\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ *est une norme sur* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$.
iii) $L^p_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N) = \left\{f \ / \ f \in L^p(\Omega');\mathbb{R}^N) \text{ pour tout ensemble ouvert borné } \Omega' \text{ avec } \overline{\Omega'} \subset \Omega\right\}$.

Remarque 1.1 *a) Soit* $1 \leq p \leq +\infty$.*On désigne par q l'exposant conjugué de p c-à-d :* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
b) Soit $1 \leq p < +\infty$.*Alors l'espace dual de* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *est* $L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder) *Soient* $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors* $(f, g) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\int_\Omega |(f(x), g(x))| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)}\,. \tag{1.10}$$

La notion de convergence faible dans $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ devient donc comme suit:

- Si $1 \leq p < +\infty$, alors $f_n \rightharpoonup f$ faib. dans $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ si :

$$\int_\Omega (f_n(x), g(x)) \, dx \to \int_\Omega (f(x), g(x)) \, dx, \ \forall g \in L^q\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right). \tag{1.11}$$

- Si $p=+\infty$, alors $f_n \rightharpoonup f$ faib.$*$ dans $L^{\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ si:

$$\int_{\Omega} \left(f_n(x), g(x)\right) dx \to \int_{\Omega} \left(f(x), g(x)\right) dx,\ \forall g \in L^1\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right), \tag{1.12}$$

avec $(.,.)$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 1.4 *L'espace $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ est reflexif pour $1<p<+\infty$ .De plus $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire définit par :*

$$(f,g)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \int_{\Omega} \left(f(x), g(x)\right) dx. \tag{1.13}$$

Proposition 1.2 *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^P(\Omega)$, $1\leq p \leq +\infty$, alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous-suite faiblement convergente ,c'est-à-dire*

$$\exists (u_n)_k, \exists u \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega} u_{n_k}\varphi dx = \int_{\Omega} u\varphi dx.$$

D'aprés le théorème de Banach-Steinhaus, on a le résultat suivant:

Corollaire 1.1 *Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans $L^P(\Omega)$ alors on a*

$$\|u\|_{L^P} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{L^P}$$

Ce résultat est faux dans $L^1(\Omega)$ (car cet espace n'est pas réfléxif), en revanche on a un résultat similaire dans $L^{\infty}(\Omega)$ à condition de considérer la topologie faible * sur cet espace , qui est le dual de l'espace séparable $L^1(\Omega)$.

Proposition 1.3 *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^{\infty}(\Omega)$, alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$une sous-suite faiblement * convergente, c'est-à-dire*

$$\exists (u_n)_k, \exists u \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega} u_{n_k}\varphi dx = \int_{\Omega} u\varphi dx.$$

Le produit de deux suites faiblement convergente ne converge pas nécessairement faiblement vers le produit des limites. En revanche, si l'une des convergences est forte, le résultat est vrai.

Proposition 1.4 *Soient p, q et r trois réels dans $[1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.*
Si $(u_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$, $(v_n)_n$ est une suite de $L^q(\Omega)$ qui converge faiblement vers v dans $L^q(\Omega)$, alors la suite produit $(u_n v_n)_n$ converge faiblement vers uv dans $L^r(\Omega)$.

Remarque 1.2 *Il y a en fait un résultat plus général qui dit que si B est une application bilinéaire continue de $E\times F$ dans G et que u_n converge fainlement vers u dans E et v_n converge fortement vers v dans F, alors $B(u_n, v_n)$ converge faiblement vers $B(u, v)$ dans G.*

On a enfin le critère suivant de convergence forte.

Proposition 1.5 *Soient $1 < p < +\infty$, et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$ .Si on suppose*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|u_n\|_{L^P} \leq \|u\|_{L^P},$$

Alors la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u

D'aprés le théorème (1.1), l'hypothèse est equivalent à dire que la suite des normes $(\|u_n\|_{L^P})_n$ converge vers $\|u\|_{L^P}$.

La preuve dans le cas $p = 2$ découle immédiatement de l'identité du parallèlogramme, elle est en revanche plus délicate dans le cas $p \neq 2$. Par ailleurs, cette propriété est fausse dans L^1(le cas da la suite régularisante!) et dans L^∞ (le cas d'un tan $h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ également tronqué).

1.3 Les espaces de Sobolev

Définition 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq +\infty$.L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)\right\}, \tag{1.14}$$

où $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ représente la $1^{\text{ère}}$ dérivée au sens des distributions de la fonction réelle u.
On définit dans cet espace la norme suivante:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \tag{1.15}$$

ou parfois sa norme équivalente:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}\right)^{1/p} \quad \text{(si } 1 \leq p < +\infty\text{)}. \tag{1.16}$$

Définition 1.6 *Soit $1 \leq p < +\infty$.L'espace $W^{1,p}_0(\Omega)$ est défini comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.*
L'espace dual de $W^{1,p}_0(\Omega)$ est noté par $W^{-1,q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.3 *Si $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est noté par $H^{1,2}(\Omega)$ ou bien $H^1(\Omega)$.*
Même chose pour $W^{1,p}_0(\Omega)$; on le note par $H^{1,2}_0(\Omega)$ ou bien $H^1_0(\Omega)$.

Proposition 1.6 ***i)*** *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
ii) *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace réflexif pour* $1 < p < +\infty$.
iii) *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < +\infty$.
iv) *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour* $1 < p < +\infty$.
v) *Les espaces* $H^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega)$ *sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire suivant:*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \tag{1.17}$$

Remarque 1.4 *La quantité* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ *définie une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$*,on la note par* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ *,qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *.(pour* $1 \leq p < +\infty$*).*

Remarque 1.5 *A partir du théorème précédent on conclut que* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *notée par* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ *qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *.*

Remarque 1.6 $D(\Omega) \subset D(\bar{\Omega})$ *où* $D(\bar{\Omega})$ *désigne l'ensemble des réstrictions de* $\overline{\Omega}$ *des fonctions de* $D\left(\mathbb{R}^N\right)$*.*

Les fonctions de $D(\bar{\Omega})$ *ne nécessitent pas d'être nulles sur la frontière* $\partial\Omega$*.*

Théorème 1.5 (Théorème de densité) *Soit* $1 < p < \infty$*, alors* $D\left(\mathbb{R}^N\right)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\Omega)$*. De plus, si* $\partial\Omega$ *est lipschitz continue alors* $D(\bar{\Omega})$ *est dense dans* $W^{1,p}(\Omega)$*.*

1.3.1 Théorème des injections

Théorème 1.6 (l'injection compacte) *: Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\partial\Omega$ *est Lipschitzienne.*

- *Si* $1 \leq p < n$*, alors :*
  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$ *avec injection compacte pour* $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right[$.
- *Si* $p = n$*, alors :*
  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$ *et l'injection est compacte.*
- *Si* $p > n$*, alors :*
  $W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ *avec injection compacte.*

Remarque 1.7 *L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte comme suit : Soit* $u_n \rightharpoonup u$ *faib. dans* $W^{1,p}(\Omega)$*.*
• *Si* $1 \leq p < n$*, alors* $u_n \to u$ *fortement dans* $L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$.
• *Si* $p = n$*, alors* $u_n \to u$ *fortement dans* $L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq q < +\infty$.
• *Si* $p > n$*, alors* $u_n \to u$ *fortement dans* $L^\infty(\Omega)$*.*

1.4 L'espace $H_0^1(\Omega)$ et la notion de trace

Théorème 1.7 (Théorème de trace) ***i)*** *Il existe une unique application linéaire continue* $\gamma : H^1\left(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}_+^*\right)\to L^2\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$ *tq pour tout* $u\in H^1\left(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}_+^*\right)\cap C^0\left(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}_+^*\right)$*.On a*

$$\gamma(u)=u|_{\mathbb{R}^{N-1}}$$

ii) *Supposons maintenant que* γ *un ensemble ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*;* $\Omega\subset\mathbb{R}^N,\partial\Omega$ *est lipschitz continue, alors il existe une unique application lineaire continue* $\gamma : H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ *tq pour tout* $u\in H^1(\Omega)\cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *: On a*

$$\gamma(u)=u|_{\partial\Omega}\ \text{ la foncion } \gamma \text{ est appelée la trace de } u \text{ sur } \partial\Omega$$

Proposition 1.7 (Inégalité de Poincaré) *Il existe une constante* C_Ω *(dépendante de* Ω*) tq*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}\le C_\Omega\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\forall u\in H_0^1(\Omega)$$

Proposition 1.8 *Soit* Ω *un domaine convexe, supposons que* $\partial\Omega$ *est lipschitzienne tq* $\partial\Omega=\Gamma_1\cap\Gamma_2$ *ou* Γ_1 *et* Γ_2 *sont deux ensembles fèrmés disjoints et mes*$(\Gamma_1)>0$*. Alors il existe une constante* C_Ω *(dépendante de* Ω*) et de* Γ_1*.*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}\le C_\Omega\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\forall u\in H^1(\Omega)$$

Avec $\gamma(u)=0$ *sur* Γ_1*.*

Proposition 1.9 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) *Supposons que* Ω *est connexe, alors il existe une constante* $C(\Omega)$ *tel que*

$$\|u-M_Y(\Omega)\|_{L^2(\Omega)}\le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\forall u\in H^1(\Omega)$$

Remarque 1.8 *On a les inclusions compactes suivantes*

$$H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega).$$

On note aussi que si $u\in H_0^1(\Omega)$ *et* $v\in L^2(\Omega)$ *alors on a le produit de dualité*

$$\langle v,u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

Définition 1.7 *Supposons que* $\partial\Omega$ *est lipschitz continue. On note par* $H^{-\frac12}(\partial\Omega)$ *l'espace de Banach définit par*

$$H^{-\frac12}(\partial\Omega)=\left(H^{\frac12}(\partial\Omega)\right)'$$

équipé de la norme

$$\|F\|_{H^{-\frac12}(\partial\Omega)}=\sup_{u\in H^{\frac12}(\partial\Omega)\backslash\{0\}}\frac{\left|\langle F,u\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)}\right|}{\|u\|_{H^{\frac12}(\partial\Omega)}}$$

Proposition 1.10 *L'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ a les propriétés suivantes:*
i) *Supposons que $\partial\Omega$ est lipschitz continue. Alors on a $L^2(\partial\Omega) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ avec injection compacte.*
ii) *Supposons que $\partial\Omega$ est lipschitz continue,*

$$H(\Omega, \mathrm{div}) = \left\{ v \backslash v \in \left(L^2(\Omega)\right)^N,\ \mathrm{div}\, v \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Alors $v.n \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et l'application

$$v \in H(\Omega, \mathrm{div}) \mapsto v.n \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

est linéaire continue.
De plus: Si $v \in H(\Omega, \mathrm{div})$ et $w \in H^1(\Omega)$, alors

$$-\int_\Omega (\mathrm{div}\, v)\, w dx = \int_\Omega v \nabla w dx + \langle v.n, w \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

1.5 Les fonctions périodiques rapidement oscillantes

Nous introduisons une classe de fonctions périodiques oscillantes, qui jouent un role essentiel dans la théorie de l'homogénéisation. En particulier, on considère les fonctions de la forme:

$$a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

1.5.1 Les fonctions périodiques dans L^1

Dans la suite Y représente un intervalle dans $\mathbb{R}^N$ (c-à-d $Y \subset \mathbb{R}^N$) par

$$Y =]0, l_1[\times]0, l_2[... \times]0, l_N[, \forall i = 1, ..., N.$$

On désignera Y comme étant la période de référence.

La définition suivante introduit la notion de périodicité pour les fonctions définies presque par tout.

Définition 1.8 (La fonction périodique) *Soit $Y =]0, l_1[\times]0, l_2[...\times]0, l_N[$ et g une fonction définie presque par tout sur $\mathbb{R}^N$.Alors la fonction g est appelée $Y-$périodique si et seulement si*

$$g(x + kl_ie_i) = g(x) \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}^N, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

Avec $\{e_i\}_{i=1}^N$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
Dans le cas $N = 1$, on dit simplement que f est l_1-périodique au lieu de f est $]0, l_1[-$périodique.

La valeur moyenne d'une fonction périodique est essentielle quand on étudie les fonctions qui oscillent périodiquement.

Rappellons sa définition:

Définition 1.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$) et $f \in L^1(\Omega)$ la valeur moyenne de f sur Ω est le nombre*

$$M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y)\, dy$$

Le lemme suivant montre que la valeur moyenne d'une fonction périodique peut être calculer sur n'importe quelle ensemble translaté d'une période de référence.

Lemme 1.1 *f $Y-$périodique dans $L^1(Y)$ .Soit y_0 point fixe de $\mathbb{R}^N$ et notons par Y_0 l'ensemble translaté de Y par $y_0 = y_0 + Y$.*
Posons $f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ p.p sur $\mathbb{R}^N$ alors

$$\begin{cases} \textbf{i)} \int\limits_{Y_0} f(y)\, dy = \int\limits_{Y} f(y)\, dy \\ \textbf{ii)} \int\limits_{\varepsilon Y_0} f_\varepsilon(x)\, dx = \int\limits_{\varepsilon Y} f_\varepsilon(x)\, dx = \varepsilon^N \int\limits_{Y} f(y)\, dy \end{cases}$$

Soit $1 < p < +\infty$, on note par $W^{1,p}_{\#}(Y)$ le sous ensemble de $W^{1,p}(Y)$ contenant les fonctions de valeur moyenne nulle et qui ont la même trace sur les faces opposées de Y. Dans lae cas $p = 2$ on le note par $H^1_{\#}(Y)$.

Lemme 1.2 *Soit $f \in W^{1,p}_{\#}(Y)$, alors f peut être prolongée par périodicité à un élément de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Lemme 1.3 *Soit $g \in L^q(Y; \mathbb{R}^N)$ tq*

$$\int\limits_Y (g, \nabla v)\, dy = 0 \quad \forall v \in W^{1,p}_{\#}(Y).$$

Alors g est prolongeable par périodicité à un élément de $L^q(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, notons cet élément toujours par g t.q

$$-\operatorname{div}\ g = 0 \quad \textit{dans } D\prime\left(\mathbb{R}^N\right)$$

1.5.2 Les limites faibles et faibles* des fonctions périodiques rapidements oscillantes

Soit le résultat suivant:

Théorème 1.8 *$f \in L^p(\Omega)$ une fonction $Y-$périodique et $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M(f) \quad \text{dans } L^q(\Omega) \text{ faible si } q < \infty \text{ et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible* (si } q = +\infty),$$

$$\text{où } M_Y(f) = \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)\,dy.$$

Remarque 1.9 *On générale*

$$M_Y(fg) \neq M_Y(f)\, M_Y(g)$$

Remarque 1.10 *La convergence faible donnée par le théorème précédente ne sont pas forte, a moins que f est une constante et la mésure de Y vaut 1.La convergence forte implique*

$$M_Y(f^p) = [M_Y(f)]^p$$

Ceci n'est pas vrais pour $p > 1$.

Remarque 1.11 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, et $Y-$périodique dans $L^p(Y)$ .Posons $f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ p.p sur $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante c (independante de N) tq pour tout I intervalle $\subset Y$.*
On a

$$\|f_\varepsilon\|^p_{L^p(I)} \leq c\frac{|I|}{|Y|}\|f\|^p_{L^p(Y)} \quad (\varepsilon \text{ petit})$$

1.6 Problèmes variationnels elliptique

1.7 Théorème d'existence

Définition 1.10 (Forme linéaire) *: Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est une forme linéaire sur E si est seulement si:*

$$\forall u, v \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \tag{1.18}$$

Définition 1.11 (Forme bilinéaire) *: Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que a est une forme bilinéaire sur E si est seulement si pour tout $u \in E$ fixé, les applications suivantes:*

$$\begin{array}{l} a(u,.) : v \in E \to a(u,v) \in \mathbb{R}, \\ a(.,u) : v \in E \to a(v,u) \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{1.19}$$

sont linéaires.

Définition 1.12 (Forme bilinéaire continue) *: Soit E un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire sur E, alors a est continue sur E si $\exists c > 0$ tel que*

$$\forall u \in E, \quad |a(u,v)| \leq c\|u\|_E \|v\|_{E^*} \quad \forall v \in E^*. \tag{1.20}$$

Définition 1.13 (Forme bilinéaire coercive) *Soit E un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire sur E, alors a est coercive sur E si $\exists\alpha > 0$ tel que*

$$a(u, v) \geq \alpha \|u\|, \forall u \in E. \tag{1.21}$$

Soit a une forme bilinéaire sur l'espce E et $f \in E^*$. Considérons le problème:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in E \ \text{ tel que} \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle_{E^*,E} \quad \forall v \in E \end{cases} \tag{1.22}$$

Cette formulation s'appelle formultion variationnelle et v est souvent appelé fonction test.

Le théoréme suivant donne sous certaines hypothèses sur a l'éxistence et l'unicité de la solution du problème (**1.23**).

Théorème 1.9 (Lax–Milgram) *Soit a une forme biliniére continue et coercive sur l'espace de Hilbert E. Alors pour toute fonction linéaire bornée f dans E^*, il existe un unique élément dans E qui vérifie:*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{E^*,E} \quad \forall v \in E. \tag{1.23}$$

De plus on a:

$$\|u\|_E \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{E^*} \tag{1.24}$$

Théorème 1.10 (Formule de Green) *Supposons que $\partial\Omega$ est lipschitz continue. Soient $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega}\gamma(u)\,\gamma(v)\,n_i ds, \quad \forall i = 1, ..., N,$$

Définition 1.14 *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tq $0 < \alpha < \beta$. On note par $M(\alpha, \beta, Y)$ l'ensemble des matrices d'ordre $N \times N$. $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N} \in (L^\infty(Y))^{N\times N}$ tel que*

$$\begin{cases} \textbf{i)} \quad (A(x)\lambda, \lambda) \geq \alpha|\lambda|^2 \\ \textbf{ii)} \quad |A(x)\lambda| \leq \beta|\lambda| \end{cases}, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}^N \quad p.p \text{ sur } Y \tag{1.25}$$

Oncosidère le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{dans } Y \\ u \quad Y - \text{périodique} \\ M_Y(u) = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

avec $f \in (W_{per}(Y))'$.

La formulation variationnelle du problème (1.26) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W_{per}(Y) \text{ tel que} \\ \int_Y A\nabla u\nabla v dy = \langle f, v\rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} \\ \forall v \in W_{per}(Y) \end{cases} \tag{1.27}$$

Théorème 1.11 *Soit* $A \in M(\alpha, \beta, Y)$ *avec des coefficients* $Y-$*périodiques et* $f \in (W_{per}(Y))\prime$. *Alors le problème (1.27) a une solution unique. De plus*

$$\|u\|_{W_{per}(Y)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{(W_{per}(Y))\prime} .$$

Chapitre 2

Homogénéisation des équations elliptiques: Les résultats de convergence

Le but de ce chapitre est de décrire le comportement asymptotique du problème suivant

$$\begin{cases} -\text{div } (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où f est donnée dans $H^{-1}(\Omega)$ et la matrice A^ε est $\varepsilon Y-$périodique définie par

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}^N, \forall i,j = 1...N \tag{2.2}$$

et

$$A^\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon}) = \left(a_{ij}^\varepsilon(x)\right)_{1\leq i,j\leq N} \qquad p.p\ sur\ \mathbb{R}^N \tag{2.3}$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ est } Y - \text{périodique}, \quad \forall i,j = 1...N \\ A = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N} \in M(\alpha,\beta,Y) \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \beta$ et $M(\alpha,\beta,Y)$ est donnée par la définition(**??**).

On note par Y la cellule de référence définie par:

$$Y =]0,l_1[\times]0,l_2[...\times]0,l_N[, \forall i = 1,...,N.$$

La $Y-$périodicité est pris de la définition(1.8).

Pour étudier le cas générale $N-$dimension, on a besoin d'introduire quelques fonctions auxiliaires que sont des solutions du problème périodique dans la cellule de référence Y. Ceci est donnée dans la section **(2.1)** et cet résultat sera prouvé dans ce qui suit.

2.1 Les problèmes auxilaires périodiques

Dans cette section on introduit deux familles de problèmes auxiliaires périodiques définient sur la cellule de référence Y.
La première implique A

$$\underset{\sim}{A} = -div(A\nabla)$$

La seconde famille implique la matrice transposé $\left(A^t\right)$

$$\underset{\sim}{A}^\star = -div({}^tA\nabla)$$

2.1.1 Les fonctions $\overset{\wedge}{\chi}_\lambda$ et $\hat{w}_\lambda$

On considere, pour $\forall\lambda \in \mathbb{R}^N$ la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(y\right)\nabla\widehat{\chi}_\lambda\right) = -\operatorname{div}\left(A\left(y\right)\lambda\right) \quad \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_\lambda \quad Y-\text{pèriodique} \\ M_Y\left(\widehat{\chi}_\lambda\right) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

La formulation variationnelle du problème (2.5) est la suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widehat{\chi}_\lambda \in W_{per}(Y) \;\; \text{tel que} \\ a_Y\left(\widehat{\chi}_\lambda, v\right) = \int\limits_Y A\lambda\nabla v \; dy \\ \forall v \in W_{per}(Y), \end{cases} \tag{2.6}$$

où

$$a_Y\left(u,v\right) = \int\limits_Y A\nabla u\nabla v dy \quad \forall u,v \in W_{per}(Y) \tag{2.7}$$

et

$$W_{per}\left(Y\right) = \left\{v \in H^1_{per}\left(Y\right); M_Y\left(v\right) = 0\right\}$$

D'aprés le théorème (1.11), on sait que (2.6) admet une solution unique $\widehat{\chi}_\lambda \in W_{per}(Y)$ puisque $(A\lambda) \in \left(W_{per}(Y)\right)'$.

Le prolongement par périodicité de $\widehat{\chi}_\lambda$ dans tous $\mathbb{R}^N$, implique aussi que $\widehat{\chi}_\lambda$ est la solution unique du problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(y\right)\nabla\widehat{\chi}_\lambda\right) = -\operatorname{div}\left(A\left(y\right)\lambda\right) \quad \text{dans } D'\left(\mathbb{R}^N\right) \\ \widehat{\chi}_\lambda \quad Y-\text{pèriodique} \\ M_Y\left(\widehat{\chi}_\lambda\right) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Posons maintenant

$$\widehat{w}_\lambda = -\widehat{\chi}_\lambda + \lambda.y, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}^N \tag{2.9}$$

ce qui de (2.5) et de (2.6) satisfait

$$a_Y\left(\widehat{w}_\lambda, v\right) = 0 \;, \forall v \in W_{per}(Y) \tag{2.10}$$

et est la solution unique de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(y\right)\nabla\widehat{w}_{\lambda}\right)=0 \qquad \text{dans } Y \\ \widehat{w}_{\lambda}-\lambda.y \quad Y-\text{pèriodique} \\ M_{Y}\left(\widehat{w}_{\lambda}-\lambda.y\right)=0, \end{cases} \tag{2.11}$$

où sa formulation variationnelle est

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widehat{w}_{\lambda} \text{ tel que } \ \widehat{w}_{\lambda}-\lambda.y\in W_{per}(Y) \ \text{ et} \\ a_{Y}\left(\widehat{w}_{\lambda},v\right)=0 \\ \forall v\in W_{per}(Y). \end{cases} \tag{2.12}$$

Remarquons que d'aprés (2.8) et (2.9). On a aussi que $\widehat{w}_{\lambda}$ satisfait

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(y\right)\nabla\widehat{w}_{\lambda}\right)=0 \quad \text{dans } D'\left(\mathbb{R}^{N}\right) \\ \widehat{w}_{\lambda}-\lambda.y \quad Y-\text{pèriodique} \\ M_{Y}\left(\widehat{w}_{\lambda}-\lambda.y\right)=0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Dans la suite on utilisera les fonctions $\widehat{w}_{\lambda}$ et $\widehat{\chi}_{\lambda}$ pour le choix $\lambda=e_{i}$ où $(e_{i})_{i=1}^{N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{N}$. Alors pour simplifier, on pose

$$\begin{cases} \widehat{\chi}_{i}=\widehat{\chi}_{e_{i}} \\ \widehat{w}_{i}=\widehat{w}_{e_{i}}=y_{i}-\widehat{\chi}_{i} \qquad \forall i=1...N \end{cases} \tag{2.14}$$

Elles vérifient évidemment et respectivement les problèmes suivants

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widehat{\chi}_{i}\in W_{per}(Y) \ \text{ tel que} \\ a_{Y}\left(\widehat{\chi}_{i},v\right)=\int\limits_{Y}Ae_{i}\nabla v\ dy \\ \forall v\in W_{per}(Y) \end{cases} \tag{2.15}$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widehat{w}_{i} \text{ tel que } \ \widehat{w}_{i}-y_{i}\in W_{per}(Y) \ \text{ et} \\ a_{Y}\left(\widehat{w}_{i},v\right)=0 \\ \forall v\in W_{per}(Y). \end{cases} \tag{2.16}$$

Il est facile de voir que, par linéarité de a_{Y} des deux problèmes (2.15) et (2.16) par rapport à chaque variable, on a:

$$\widehat{\chi}_{\lambda}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i}\widehat{\chi}_{i} \ \text{ et } \ \widehat{w}_{\lambda}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i}\widehat{w}_{i} \ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}^{N},\forall i=1...N.$$

car on a

$$
\begin{aligned}
a_Y\left(\widehat{\chi}_i, v\right) &= \int_Y Ae_i \nabla v \; dy \\
&\Leftrightarrow \quad a_Y\left(\lambda_i \widehat{\chi}_i, v\right) = \int_Y A(\lambda_i e_i) \nabla v \;\; dy \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \text{ pour } i = 1, ..., N \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} a_Y\left(\lambda_i \widehat{\chi}_i, v\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_Y A(\lambda_i e_i) \nabla v \;\; dy. \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} a_Y\left(\lambda_i \widehat{\chi}_i, v\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_Y A(\lambda_i e_i) . \nabla v \;\; dy. \\
&\Longleftrightarrow \quad a_Y\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \widehat{\chi}_i, v\right) = \int_Y A(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i) \nabla v \;\; dy, \text{ d'aprés la continuitée du produit scalaire.}
\end{aligned}
$$

Posons

$$
z = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \widehat{\chi}_i
$$

alors on aura

$$
a_Y\left(z, v\right) = \int_Y A\lambda \nabla v \;\; dy \quad \forall v \in W_{per}(Y).
$$

et d'aprés l'unicité de la solution du problème (2.15), on conclut que

$$
z = \widehat{\chi}_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \widehat{\chi}_i.
$$

Même chose pour la deuxième égalitée, il suffit de prendre le deuxième problème et suit les même démarche de la preuve précédante.

2.1.2 Les fonctions χ_λ et w_λ

Maintenant, on considère la matrice transposée notée ${}^tA$ définit par

$$
{}^tA(y) = \left(a_{ji}\left(y\right)\right)_{1 \leq i,j \leq N} \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}^N
$$

où ${}^tA$ satsfaite les mêmes hypothese que A c'est-à-dire ${}^tA \in M\left(\alpha, \beta, \Omega\right)$.

Par conséquent, si on remplace A par ${}^tA$ dans le problème (2.5) et si on définit une autre fonction notée χ_λ.

On a :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left({}^{t}A\left(y\right)\nabla\chi_{\lambda}\right) = -\operatorname{div}\left({}^{t}A\left(y\right)\lambda\right) \quad \text{dans } Y \\ \chi_{\lambda} \quad Y-\text{périodique} \\ M_{Y}\left(\chi_{\lambda}\right)=0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Ainsi, pour $\forall\lambda \in \mathbb{R}^{N}$, χ_{λ} est la solution unique du problème variationnel donné par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi_{\lambda} \in W_{per}(Y) \ \text{ tel que} \\ a_{Y}\left(\chi_{\lambda}, v\right) = \int\limits_{Y} {}^{t}A\lambda\nabla v \ \ dy \\ \forall v \in W_{per}(Y) \end{cases} \tag{2.18}$$

où

$$a_{Y}^{\star}\left(u,v\right) = \int {}^{t}A\nabla u\nabla v dy, \quad \forall u,v \in W_{per}(Y) \tag{2.19}$$

D'ailleurs,cette extention par périodicité de tous $\mathbb{R}^{N}$, ceci est noté par x_{λ}, la solution unique du probleme suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left({}^{t}A\left(y\right)\nabla\chi_{\lambda}\right) = -\operatorname{div}\left({}^{t}A\left(y\right).\lambda\right) \quad \text{dans } D'\left(\mathbb{R}^{N}\right) \\ \chi_{\lambda} \quad Y-\text{périodique} \\ M_{Y}\left(\chi_{\lambda}\right)=0 \end{cases} \tag{2.20}$$

On a aussi

$$w_{\lambda} = -\chi_{\lambda} + \lambda.y, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}^{N} \tag{2.21}$$

Alors, de (2.17) et (2.18), w_{λ} satisfait

$$a_{Y}^{\star}\left(w_{\lambda}, v\right) = 0, \forall v \in W_{per}(Y) \tag{2.22}$$

et est la solution unique de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left({}^{t}A\left(y\right)\nabla w_{\lambda}\right) = 0 \quad \text{dans } Y \\ w_{\lambda} - \lambda.y \quad Y-\text{périodique} \\ M_{Y}\left(w_{\lambda} - \lambda.y\right)=0 \end{cases} \tag{2.23}$$

La formulation variationnelle correspondante a ce problème est

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_{\lambda} \text{ tel que } \ w_{\lambda} - \lambda.y \in W_{per}(Y) \ \text{ et} \\ a_{Y}^{\star}\left(w_{\lambda}, v\right) = 0 \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \tag{2.24}$$

De (2.15) et (2.16),w_{λ} satisfait

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left({}^{t}A\left(y\right)\nabla w_{\lambda}\right) = 0 \quad \text{dans } D'\left(\mathbb{R}^{N}\right) \\ w_{\lambda} - \lambda.y \quad Y-\text{périodique} \\ M_{Y}\left(w_{\lambda} - \lambda.y\right)=0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Comme avant on introduit aussi les fonctions x_i et w_i définit par

$$\begin{cases} \chi_i = \chi_{e_i} \\ w_i = w_{e_i} = y_i - \chi_i \quad \forall i = 1...N \end{cases} \tag{2.26}$$

Elles verifient évidemment et réspectivement le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi_i \in W_{per}(Y) \ \text{ tel que} \\ a^{\star}_{Y}\left(\chi_i, v\right) = \int\limits_{Y} Ae_i \nabla v \ \ dy \\ \forall v \in W_{per}(Y) \end{cases} \tag{2.27}$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_i \text{ tel que } \ w_i - y_i \in W_{per}(Y) \ \text{ et} \\ a^{\star}_{Y}\left(w_i, v\right) = 0 \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases} \tag{2.28}$$

Par linéarité de $a^{\star}_{y}$ par rapport à chaque variable
On a

$$\chi_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \chi_i$$

et

$$w_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i w_i \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \ \ \forall i = 1, ..., N.$$

Les fonctions $\widehat{w}_\lambda$, $\widehat{\chi}_\lambda, \chi_\lambda$ et w_λ, jouent un rôle essentiel dans l'homogéneisation du problème (2.1). En plus la matrice homogénéisé A^0 du système

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^0 \nabla u^0\right) = f \quad \text{ dans } \Omega \\ u^0 = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est exprimée en terme de ces fonctions. Dans les sections suivantes, on donne la formule explicite pour ses coefficient a^0_{ij}.

2.2 Le résultat principal de la convergence

Théorème 2.1 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et u^ε est la solution de (2.1) avec A^ε définit par (2.2) et (2.4), alors*

$$\begin{cases} i)\ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega) \\ ii)\ A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \end{cases}$$

où u^0 est la solution unique dans $H^1_0(\Omega)$ du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a^0_{ij} \dfrac{\partial u^0}{\partial x_j}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.29}$$

La matrice $A^0 = \left(a^0_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq N}$ *est constante elliptique et donneé par*

$$A^0\lambda = M_Y\left(A\nabla\widehat{w}_\lambda\right), \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^N \tag{2.30}$$

où elle est équivalente à

$${}^tA^0\lambda = M_Y\left({}^tA\nabla w_\lambda\right), \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^N \tag{2.31}$$

Preuve: Voir la démonstration, **chapitre III.** ■

Théorème 2.2 *Soit* $f\in H^{-1}(\Omega)$ *et* u^ϵ *est la solution de (2.1) avec* A^ε *definit par (2.2) et (2.6),alors* u^ε *admet un développement asymptotique suivant*

$$u^\varepsilon = u^0 - \varepsilon\sum_{k=1}^N\widehat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k} + \varepsilon^2\sum_{k=1}^N\widehat{\theta}^{kl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_l} + ...\text{où } u^0 \text{ est la solution de (2.29)}$$

$\widehat{x}_k\in W_{per}(Y)$ *est définie par (2.15), et* $\widehat{\theta}^{kl}$ *par*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A(y)\nabla\widehat{\theta}^{kl}\right) = -a^0_{kl} - \sum\limits_{i,j=1}^N\left(\dfrac{a_{ij}\delta_{ki}\widehat{\chi}_l}{\partial y_i}\right) - \sum\limits_{j=1}^N a_{kj}\dfrac{\partial\left(\widehat{\chi}_l - y_l\right)}{\partial y_j} & \text{dans } Y \\ \widehat{\theta}^{kl} \quad Y - \text{périodique} \\ M_Y\left(\widehat{\theta}^{kl}\right) = 0 \end{cases}$$

En général, si $f\in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \partial\Omega$ *est de classe*C^∞ *et ,de plus* $\widehat{\chi}_k, \widehat{\theta}^{kl}\in W^{1,\infty}(Y), \forall k,l = 1,...,N.$ *alors il existe une constante c independante de* ε *telle que*

$$\left\|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon\sum_{k=1}^N\widehat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k} + \varepsilon^2.\sum_{k=1}^N\widehat{\theta}^{kl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k\partial x_l}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq c.\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 2.1 *Trouver* u^0 *revient à résoudre les N problèmes de (2.15) dont le but est de détèrminer* $\widehat{x}_i$*, la matrice* A^0 *et résoudre (2.20) pour calculer* u^0*.*

Proposition 2.1 *Soit* B^0 *la matrice définit par*

$$B^0\lambda = M_Y\left({}^tA\nabla w_\lambda\right), \forall\lambda\in\mathbb{R}^N \tag{2.32}$$

et A^0 *définit par (2.30). Alors* $A^0 = {}^tB^0$*, c'est à dire*

$${}^tA^0\lambda = M_Y\left({}^tA\nabla w_\lambda\right) \tag{2.33}$$

Preuve: Pour montrer (2.33), il suffit de montrer que

$$B^0\lambda\mu = A^0\mu\lambda, \forall\lambda \in \mathbb{R}^N,$$

par la définition de B^0 et la forme (2.21) ie

$$(w_\lambda = -\chi_\lambda + \lambda.y)$$

on a

$$\begin{aligned}
B^0\lambda\mu &= M_Y\left({}^tA\nabla\left(-\chi_\lambda + \lambda y\right)\right)\mu \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y {}^tA\lambda\mu dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y {}^tA\nabla\chi_\lambda\mu dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left\langle\ {}^tA\lambda, \mu\ \right\rangle dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y \left\langle\ {}^tA\nabla\chi_\lambda, \mu\ \right\rangle dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y \langle\lambda, A\mu\rangle\, dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y \langle\nabla\chi_\lambda, A\mu\rangle\, dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y \langle A\mu\ ,\lambda\ \rangle\, dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y \langle\ A\mu\ ,\nabla\chi_\lambda\rangle\, dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y A\mu\nabla\chi_\lambda dy
\end{aligned}$$

Choisissons $v = \chi_\lambda$ dans

$$\begin{cases}
\text{Trouver } \widehat{\chi}_\lambda \in W_{per}(Y) \quad \text{telque} \\
a_Y\left(\widehat{\chi}_\lambda, v\right) = \int_Y A\lambda\nabla v \quad dy \\
\forall v \in W_{per}(Y)
\end{cases}$$

c-à-d

$$a_Y\left(\widehat{\chi}_\lambda, \chi_\lambda\right) = \int_Y A\mu\nabla\chi_\lambda dy.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
B^0\lambda\mu &= \frac{1}{|Y|}\int_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y A\nabla\widehat{\chi}_\mu\nabla\chi_\lambda dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y \left\langle A\nabla\widehat{\chi}_\mu, \nabla\chi_\lambda\right\rangle dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y \left\langle \nabla\widehat{\chi}_\mu, {}^tA\nabla\chi_\lambda\right\rangle dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int_Y {}^tA\nabla\chi_\lambda\nabla\widehat{\chi}_\mu, dy.
\end{aligned}$$

A partir de cette résultat, et utilisons $v = \widehat{\chi}_\lambda$ comme fonction test dans la relation (2.18), on obtient finalement d'aprés (2.9) et (2.30)

$$\begin{aligned}
B^0\lambda\mu &= \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y {}^tA\lambda\nabla\widehat{\chi}_\mu dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y \left\langle {}^tA\lambda, \nabla\widehat{\chi}_\mu \right\rangle dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y \left\langle A\nabla\widehat{\chi}_\mu, \lambda \right\rangle dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\mu\lambda dy - \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\nabla\widehat{\chi}_\mu\lambda dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\nabla\left(\mu y - \widehat{\chi}_\mu\right)\lambda dy \\
&= \frac{1}{|Y|}\int\limits_Y A\nabla\widehat{w}_\mu.\lambda dy \\
&= M_Y\left(A\nabla\widehat{w}_\mu\right)\lambda \\
&= A^0\mu\lambda \\
&\Rightarrow B^0\lambda\mu = A^0\mu\lambda
\end{aligned}$$

d'où le résultat de la proposition

$$A^0 = {}^tB^0$$

■

Corollaire 2.1 *Soit A une matrice tq $A \in M(\alpha, \beta, Y)$ et A^0 la matrice homogénéisé donnée par le théorème (2.1). Alors, la matrice homogénéisé $\left({}^tA^0\right)$ correspondante à ${}^tA$, est donnée par*

$$\left({}^tA\right)^0 = {}^t\left(A^0\right).$$

Preuve: Si on pose

$$\begin{aligned}
B &= {}^tA \\
\left({}^tA\right)^0 &= {}^t\left(A^0\right) \\
&\Rightarrow B^0 = {}^t\left(A^0\right) ={}^t A^0.
\end{aligned}$$

d'aprés la proposition précédante.

$$\Rightarrow B^0 ={}^t A^0 \quad (vrai)$$

Donc, on obtient

$$\left({}^tA\right)^0 = {}^t\left(A^0\right) \quad \text{cqfd}$$

■

2.3 L'ellipticité de la matrice homogènéisée

Dans cette section , on donne quelques formules explicites pour les coefficients a_{ij}^0 de la matrice A^0 et on prouve qu'elles sont élliptique.

Observons que d'aprés (2.30) et (2.14) on a immédiatement

$$A^0 e_j = M_Y \left(A \nabla \widehat{w}_j\right), \forall j = 1, ..., N \tag{2.34}$$

car

$$A^0 \lambda = M_Y \left(A \nabla \widehat{w}_\lambda\right)$$

et on a

$$\begin{cases} \widehat{\chi}_i = \widehat{\chi}_{e_i} \\ \widehat{w}_i = \widehat{w}_{e_i} = y_i - \widehat{\chi}_i \ , \forall i = 1, ..., N \end{cases}.$$

Pour $\lambda = e_j$ on a

$$A^0 e_i = M_Y \left(A \nabla \widehat{w}_j\right) = M_Y \left(A \nabla \widehat{w}_j\right).$$

Donc

$$\left(A \nabla \widehat{w}_j\right)_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_k}$$

De (2.14) et (2.34). On obtient

$$a_{ij}^0 = M_Y \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_k} \right)$$

Et comme

$$\widehat{w}_\lambda = -\widehat{\chi}_\lambda + \lambda y,$$

on a

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &= M_Y \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \left(\lambda y - \widehat{\chi}_\lambda\right)}{\partial y_k} \right) \\ &= M_Y \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} \lambda - \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \widehat{\chi}_\lambda}{\partial y_k} \right) \end{aligned}$$

et puisque on a mis $\lambda = e_j$ alors on a

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &= M_Y \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} e_j - \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \widehat{\chi}_{e_j}}{\partial y_k} \right) \\ &= M_Y \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial y_k} \right), \ \forall i, j = 1, ..., N \end{aligned}$$

par consequent

$$\begin{cases} a^0_{ij} & = & M_Y\ (a_{ij}) - M_Y\left(\sum\limits_{k=1}^{N} a_{ik}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}\right),\ \forall i,j=1,...,N \\ & = & \dfrac{1}{|Y|}\int\limits_Y a_{ij}dy - \dfrac{1}{|Y|}\sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_Y a_{ik}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}dy,\ \forall i,j=1,...,N \end{cases} \tag{2.35}$$

d'autre part de (2.31) on a:

$$\begin{aligned} {}^tA^0\lambda &= M_Y\left({}^tA\nabla w_\lambda\right) \\ {}^tA^0 e_j &= M_Y\left({}^tA\nabla w_j\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^0_{ij} &= M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{kj}\frac{\partial w_j}{\partial y_k}\right) \\ &= M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{kj}\frac{\partial\left(\lambda y-\chi_j\right)}{\partial y_k}\right) \\ &= M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{kj}e_j\right) - M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{kj}\frac{\partial\chi_{e_j}}{\partial y_k}\right) \quad \text{car } \lambda=e_j. \\ \Rightarrow\ & a^0_{ij} = M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ij}\right) - M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{kj}\frac{\partial\chi_j}{\partial y_k}\right),\ \forall i,j=1,...,N \end{aligned}$$

Donc on obtient finalement:

$$\begin{cases} a^0_{ij} = M_Y\left(a_{ij}\right) - M_Y\left(\sum\limits_{k=1}^{N} a_{kj}\dfrac{\partial\chi_j}{\partial y_k}\right),\ \forall i,j=1,...,N \\ = \dfrac{1}{|Y|}\int\limits_Y a_{ij}dy - \dfrac{1}{|Y|}\sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_Y a_{kj}\dfrac{\partial\chi_j}{\partial y_k}dy,\ \forall i,j=1,...,N \end{cases} \tag{2.36}$$

Proposition 2.2 *Soit A^0la matrice définit par (2.30) et $\widehat{w}_i$ définit par (2.16), $\forall i=1,...,N$. Alors*

$$a^0_{ij} = \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int\limits_Y a_{kl}\frac{\partial\widehat{w}_j}{\partial y_l}\frac{\partial\widehat{w}_i}{\partial y_k}dy,\ \forall i,j=1,...,N \tag{2.37}$$

Preuve: Il résulte que $\widehat{\chi}_j$ est solution du problème suivant:

$$a_Y\left(\widehat{\chi}_j, v\right) = \int\limits_Y Ae_i\nabla v dy,\ \forall v\in W_{per}(Y)$$

Choisissons $v=\widehat{\chi}_i$ comme fonction test

$$\int\limits_Y A\nabla\widehat{\chi}_j\nabla\widehat{\chi}_i dy = \int\limits_Y Ae_j\nabla\widehat{\chi}_i\ dy$$

c-à-d

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_l}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_k}dy &= \sum_{k=1}^{N}\int_Y a_{kj}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_k}dy \\ &= \sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial y_j}{\partial y_l}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_k}dy.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\left(\frac{\partial y_j}{\partial y_l}-\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_l}\right)\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_k}dy &= 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_k}dy = 0.\end{aligned} \tag{2.39}$$

D'un autre côté puisque

$$\begin{aligned}\int_Y a_{ij}dy &= \sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial y_j}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_k}dy \\ \sum_{l=1}^{N}\int_Y a_{il}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_l}dy &= \sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_k}dy\end{aligned}$$

La formule (2.35) c-à-d

$$a_{ij}^0 = M_Y\left(a_{ij}\right) - M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}\right)$$

peut être s'écrit comme se suit

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial y_j}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_k}dy - \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_k}dy,\ \forall i,j=1,...,N$$

$$\Rightarrow a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_k}dy, \forall i,j=1,...,N \tag{2.40}$$

on fait soustraire (2.39) de (2.40). On obtient

$$\begin{aligned}a_{ij}^0 &= \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_k}dy - \sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_k}dy \\ \Rightarrow a_{ij}^0 &= \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}\frac{\partial\left(y_i-\widehat{\chi}_i\right)}{\partial y_l}dy.\end{aligned}$$

Par ailleur, on a

$$\widehat{w}_i = -\widehat{\chi}_i + y_i$$

et

$$\widehat{w}_j = -\widehat{\chi}_j + y_j.$$

Donc, on obtient finalement

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \sum_{k,l=1}^{N} \int_Y a_{kl} \frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_l} \frac{\partial \widehat{w}_i}{\partial y_k} dy \quad \text{cqfd} \tag{2.41}$$

■

Proposition 2.3 *Soit A^0définit par (2.30) c-à-d*

$$A^0 \lambda = M_Y \left(A \nabla \widehat{w}_\lambda \right), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$$

et w_i par (2.28) c-à-d

$$\begin{cases} \textit{Trouver } w_i \textit{ tel que } \ w_i - y_i \in W_{per}(Y) \quad \textit{et} \\ a_Y^\star \left(w_i, v \right) = 0, \ \textit{Pour } i = 1, ..., N \\ \forall v \in W_{per}(Y). \end{cases}$$

Alors

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \sum_{k,l=1}^{N} \int_Y a_{kl} \frac{\partial w_j}{\partial y_l} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} dy = \frac{1}{|Y|} a_Y^\star \left(w_i, w_j \right)$$

$$a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} a_Y^\star \left(w_i, w_j \right) \left(y_i - \chi_i, y_j - \chi_j \right), \ \forall i, j = 1, ..., N \tag{2.42}$$

où $a_Y^\star$ est définie par (2.19).

Preuve: La preuve est immédiate car il suffit de suivre les mêmes démarches de celle que la preuve précédente.

Corollaire 2.2 *Suppons que la matrice A est symétrique alors A^0 est aussi symétrique.*

■

Preuve: On a

$$\begin{aligned} A^{\varepsilon}(x) &= A(\frac{x}{\varepsilon}) \\ &= \left(a^{\varepsilon}_{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq N} \\ &= \left(a^{\varepsilon}_{ji}(x)\right)_{1\leq i,j\leq N} \quad p.p \ sur \ \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

c-à-d A^{ε} est symétrique. Or on a montré que

$$a^0_{ij} = M_Y\left(a_{ij}\right) - M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}\right)$$

Calculons $a^0_{ji} =?$

$$a^0_{ji} = M_Y\ \left(a_{ji}\right) - M_Y\ \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ki}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}\right)$$

et puisque A^{ε} est symétrique on aura que

$$a^0_{ji} = M_Y\left(a_{ij}\right) - M_Y\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}\right) = a^0_{ij}$$

donc A^0 est symétrique. ■

Remarque 2.2 *On considère une case particulière des matériaux posés traités dans ce chapitre. Les expressions explicites des coefficients a^0_{ij} du problème homogénéisé prouvent que si A est diagonal, la matrice A^0 est aussi diagonal. On le voit facilement que dans le cas général la matrice A^0 n'est pas diagonal même si A est diagonal. En effet, quand les coefficients dépendent de toutes les variables, si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, d'aprés (2.30),on a*

$$a^0_{ij} = -\frac{1}{|Y|}\int_Y a_{jj}\frac{\partial\chi_i}{\partial y_j}dy \neq 0,\ \forall i,j=1,...,N, i\neq j$$

Puisque,par définition x_i dépend de toutes les variables y_i.

Proposition 2.4 *Soit A^0 une matrice définit par (2.30) c-à-d*

$$A^0\lambda = M_Y\left(A\nabla\widehat{w}_{\lambda}\right), \forall\lambda \in \mathbb{R}^N.$$

Il existe $\alpha_0 \geq 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^0_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha_0\left|\xi\right|^2,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N. \tag{2.43}$$

Preuve: Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$ alors d'aprés (2.41), il suit que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{0}\xi_i\xi_j &= \frac{1}{|Y|}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial\left(y_i-\widehat{\chi}_i\right)}{\partial y_k}\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}\xi_i\xi_j dy \\ &= \frac{1}{|Y|}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{N} a_{ij}\xi_i\frac{\partial\left(y_i-\widehat{\chi}_i\right)}{\partial y_k}\xi_j\frac{\partial\left(y_j-\widehat{\chi}_j\right)}{\partial y_l}dy.\end{aligned}$$

Posons

$$\xi = \sum_{i=1}^{N}\xi_i\left(y_i-\widehat{\chi}_i\right)$$

et utilisons l'éllipticité de A, on obtient

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{0}\xi_i\xi_j = \frac{1}{|Y|}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{N}\int_Y a_{kl}\left|\nabla\xi\right|^2 dy \tag{2.44}$$

$$\geq \frac{\alpha}{|Y|}\int_Y \left|\nabla\xi\right|^2 dy \tag{2.45}$$

$$\geq 0,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N \tag{2.46}$$

Il resulte de cette inégalité que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{0}\xi_i\xi_j > 0, \forall\xi\in\mathbb{R}^N;\ \xi\neq 0.$$

En effet, si ce n'est pas vraie, de (2.44), on aurait quelque

$$\xi \neq 0$$

tel que

$$|\nabla\xi| = 0.$$

Sa signifie que :

$$\xi = \sum_{i=1}^{N}\xi_i.\left(y_i-\widehat{\chi}_i\right) = constante.$$

c-à-d

$$\sum_{i=1}^{N}\xi_i.y_i = \sum_{i=1}^{N}\xi_i.\widehat{\chi}_i + constante$$

et ca est impossible parce que d'un côté la fonction $\widehat{\chi}_i$ est périodique et $\xi\neq 0$.
Maintenant on montre une autre caractérisation intéréssante de la matrice homogénéisé. D'aprés (2.35) et (2.36). On peut écrire que

$$A^0 = M_Y\left(A\right) - M_Y\left(X^0\right)$$

où la matrice $X^0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $X^0 = \left(x^0_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq N}$ est définie par

$$X^0_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} \frac{\partial \chi_i}{\partial y_k}$$

A^0 est la difference entre deux matrice constante. De plus $M_Y(A)$ est élliptique et $M_Y\left(X^0\right)$ est positive. ■

Proposition 2.5 *Soit X^0 est definie par (2.38) alors*

$$\sum_{i,j=1}^{N} M_Y\left(X^0_{ij}\right)\xi_i\xi_j \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.47}$$

Preuve: Remarquons que de (2.38), il résulte que

$$M_Y\left(X^0_{ij}\right) = \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^{N} a_{kl} \frac{\partial \widehat{\chi}_i}{\partial y_k}\frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial y_l} dy.$$

Donc, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{N} M_Y\left(X^0_{ij}\right)\xi_i\xi_j = \frac{1}{|Y|}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{N} a_{kl}\xi_i \frac{\partial \widehat{\chi}_i}{\partial y_k}\xi_j \frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial y_l} dy.$$

Suivant la preuve de la proposition (2.4), on pose

$$\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_{i\widehat{\chi}i}$$

et en utilisant l'ellipticité de A (voir (2.4). On aura

$$\sum_{i,j=1}^{N} M_Y\left(X^0_{ij}\right)\xi_i\xi_j \geq \frac{\alpha}{|Y|}\int_Y |\nabla \xi|^2 dy \geq 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

qui montre (2.47). ■

2.4 Autres formule pour la matrice homogénéisée

Les formules (2.35) et (2.36) donnent les coefficients homogénéisés dans le terme de $N-$dimension et intégrale sur tous le domaine Y.

Proposition 2.6 *Soit* $\theta = (\theta_1, ..., \theta_N) \in L^2(Y)$ *une fonction* $Y-$*périodique satisfait:*

$$div\theta = 0 \quad dans\ Y \tag{2.48}$$

Posons $Y_i =]0, l_1[\times .... \times]0, l_{i-1}[\times]0, l_{i+1}[\times ... \times]0, l_N[$.
Alors $\theta_i = (y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ...y_N) \in H^{-\frac{1}{2}}(Y_i)\,; \forall i = 1, ..., N$
En plus, on a

$$M_Y(\theta_i) = \frac{1}{|Y|} \langle \theta_i(y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ...y_N), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(Y_i), H^{\frac{1}{2}}(Y_i)}\,;\ \forall i = 1, ..., N \tag{2.49}$$

où $Y_i =]0, l_1[\times ... \times]0, l_{i-1}[\times]0, l_{i+1}[\times ... \times]0, l_N[$.

Preuve: Soit $\tau \in]0, l_i[$.On introduit l'ensemble suivante

$$Y_i^\tau = \{y \in Y | 0 \leq y_i \leq \tau\}$$

Par définition, $\theta \in H(\Omega, \mathrm{div})$.D'aprés l'equation (2.48)et la proposition(1.10); il résulte que

$$\int_{Y_i^\tau} \theta \nabla \varphi dy + \langle \theta.n, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial Y_i^\tau), H^{\frac{1}{2}}(\partial Y_i^\tau)} = 0, \forall \varphi \in H^1(Y) \tag{2.50}$$

En particulier $\varphi = 1$ dans cette identité, on a

$$\langle \theta.n, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial Y_i^\tau), H^{\frac{1}{2}}(\partial Y_i^\tau)} = 0.$$

On remarque que $n = -e_i$ sur $Y_i \cap \{y_i = 0\}$ et $n = e_i$ sur $Y_i \cap \{y_i = \tau\}$ où $\{e_1, ...e_N\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Donc,

$$\begin{aligned} & \langle \theta_i(y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ...y_N), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(Y_i \cap \{y_i=0\}), H^{\frac{1}{2}}(Y_i \cap \{y_i=\tau\})} \\ = \ & \langle \theta_i(y_1, ..., y_{i-1}, \tau, y_{i+1}, ...y_N), 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(Y_i \cap \{y_i=0\}), H^{\frac{1}{2}}(Y_i \cap \{y_i=\tau\})}, \end{aligned}$$

$\forall \tau \in]0, l_i[$.
Maintenant ,on donne une preuve directe dont le cas où φ est une fonction régulière (par exemple dans $L^2(Y_i)$) donc on intégre (2.48) sur tous Y_i^τ. Nous avons , par périodicité

$$0 = \int_{Y_i^\tau} \mathrm{div}\, \theta \varphi dy = \int_{Y_i \cap \{y_i=0\}} \mathrm{div}\ \ \theta.nds + \int_{Y_i \cap \{y_i=\tau\}} \mathrm{div}\ \ \theta.nds.$$

Donc, utilisons le fait que $n = -e_i$ sur $Y_i \cap \{y_i = 0\}$ et $n = e_i$ sur $Y_i \cap \{y_i = \tau\}$, on obtient

$$0 = \int_{Y_i \cap \{y_i=0\}} \mathrm{div}\ \ \theta_i ds - \int_{Y_i \cap \{y_i=\tau\}} \mathrm{div}\ \ \theta_i ds.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Y_i}\theta_i\left(y_1,...,y_{i-1},0,y_{i+1},...y_N\right)dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_N\\ =\;&\int\limits_{Y_i}\theta_i\left(y_1,...,y_{i-1},\tau,y_{i+1},...y_N\right)dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_N.\end{aligned}$$

En intégrant ce qui conserne τ sur $(0,l_i)$, on obtient

$$l_i\int\limits_{Y_i}\theta_i\left(y_1,...,y_{i-1},0,y_{i+1},...y_N\right)dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_N=\int\limits_{Y}\theta_i\left(y\right)dy$$

On multiplie cette identité par $\frac{1}{|Y|}$. Donc $l_i\ |Y_i|=|Y|$, on a finalement

$$M_Y\left(\theta_i\right)=\frac{1}{|Y_i|}\int\limits_{Y_i}\theta_i\left(y_1,...,y_{i-1},0,y_{i+1},...y_N\right)dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_N$$

Ceci exactement (2.49) où θ est dans $L^2\left(Y_i\right)$. ■

Corollaire 2.3 *Supposons que* $\sum\limits_{h=1}^{N}a_{ih}\frac{\partial\widehat{w}_j}{\partial y_h}\in L^2\left(Y_i\right)$. *Alors,* $\forall i,j=1,...N$. *On a*

$$a_{ij}^0=\frac{1}{|Y_i|}\int\limits_{Y_i}\left[a_{ij}-\sum_{h=1}^{N}a_{ih}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_h}\right]_{y_i}dy',$$

où $dy\prime=dy_1...dy_{i-1}dy_{i+1}...dy_N$.
Si, $\sum\limits_{h=1}^{N}a_{hj}\frac{\partial w_i}{\partial y_h}\in L^2\left(Y_i\right)$, *alors,* $\forall i,j=1,...N$, *On a*

$$a_{ij}^0=\frac{1}{|Y_i|}\int\limits_{Y_i}\left[a_{ij}-\sum_{h=1}^{N}a_{hj}\frac{\partial\chi_i}{\partial y_h}\right]_{y_i=0}dy'.$$

2.5 Les cas du dimension 1 et 2

Dans cette section on va voir les coefficients homogénéisés comment se sont présentés dans le cas de dimension 1 et 2.

Proposition 2.7 *On a*

$$\frac{1}{M_{]0,l_1[}\left(\frac{1}{a}\right)}=M_{]0,l_1[}\left(a-a\frac{d\widehat{\chi}}{dy}\right)\tag{2.51}$$

où $\widehat{\chi}$ est la solution du probleme (2.15) écrite pour $N = 1$ c-à-d

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{d\widehat{\chi}}{dy}\right) = -\dfrac{d}{dy}(a(y)) & \textit{dans} \quad]0,l_1[\\ \widehat{\chi} \quad l_1 - \textit{périodique} \\ M_{]0,l_1[}(\widehat{\chi}) = 0 \end{cases} \tag{2.52}$$

et est donnée par

$$\widehat{\chi}(y) = \frac{1}{M_{]0,l_1[}\left(\frac{1}{a}\right)}\int_0^y \frac{1}{a(t)}dt + y + c_0 \tag{2.53}$$

Preuve: On a

$$-\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{d\widehat{\chi}}{dy}\right) = -\frac{d}{dy}(a(y)) \ldots . (1)$$

$$(1) \Rightarrow a(y)\frac{d\widehat{\chi}}{dy} = a(y) + c$$

où c une constante à détèrminé

$$(1) \Rightarrow \frac{d\widehat{\chi}}{dy} = 1 + \frac{c}{a(y)}$$

$$\Rightarrow \widehat{\chi}(y) = y + c\int_0^y \frac{1}{a(t)}dt + c_0 \ldots\ldots . (2)$$

Or $\widehat{\chi}$ est l_1-périodique c-à-d $\widehat{\chi}(0) = \widehat{\chi}(l_1)$, donc

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Rightarrow \quad \widehat{\chi}(0) = c_0 \text{ et } \widehat{\chi}(l_1) = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt + l_1 + c_0 \\ \widehat{\chi}(0) \quad &= \quad \widehat{\chi}(l_1) \Rightarrow c_0 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt + l_1 + c_0 \\ &\Rightarrow \quad -l_1 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{-1}{\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{-1}{M_{(0,l_1)}\left(\dfrac{1}{a}\right)}$$

on sait que $M_{(0,l_1)}(\widehat{\chi}(y)) = 0$.
Calculons la moyenne de $\widehat{x}(y)$ on obtient

$$\begin{aligned}
M_{(0,l_1)}(\widehat{\chi}(y)) &= \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1}\left[c\int_0^y \frac{1}{a(t)}dt + l_1 + c_0\right]dy \\
&= \frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^y \frac{1}{a(t)}dtdy + \frac{l_1}{2} + c_0 = 0 \\
&\Rightarrow \; c_0 = -\frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^y \frac{1}{a(t)}dtdy - \frac{l_1}{2}
\end{aligned}$$

Romplaçons dans la solution $\widehat{\chi}(y)$, on obtient

$$\widehat{\chi}(y) = y + c\int_0^y \frac{1}{a(t)}dt - \frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^y \frac{1}{a(t)}dtdy - \frac{l_1}{2}$$

Maintenant on a

$$\frac{d\widehat{\chi}(y)}{dy} = 1 + \frac{c}{a\,(y)}$$

$$\begin{aligned}
a(y)\frac{d\widehat{\chi}(y)}{dy} &= a(y) + c \\
&\Rightarrow \; a(y) - a(y)\frac{d\widehat{\chi}(y)}{dy} = -c \\
&\Rightarrow \; a(y) - a(y)\frac{d\widehat{\chi}(y)}{dy} = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} \\
&\Rightarrow \; \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} = M_{(0,l_1)}\left(a(y) - a(y)\frac{d\widehat{\chi}(y)}{dy}\right)
\end{aligned}$$

■

Soit $Y =]0, l_l[\times]0, l_2[$, où l_l, l_2 sont deux nombres positifs.
$A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq 2}$ est une matrice carrée t.q

$$a_{ij}(y) = a_{ij}(y_1, y_2) = a_{ij}(y_1), \quad \forall i, j \in \{1, 2\},$$

satisfait

$$\begin{cases} a_{ij} \quad \text{est } l_l - \text{périodique} \quad \forall i,j \in \{1,2\} \\ A = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq 2} \in M(\alpha,\beta,Y) \end{cases} \tag{2.54}$$

En plus

$$\begin{cases} a^{\varepsilon}_{ij}(x) = a^{\varepsilon}_{ij}(x_1) = a_{ij}(\dfrac{x_1}{\varepsilon}) \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}^2, \quad \forall i,j \in \{1,2\} \\ A^{\varepsilon}(x) = A^{\varepsilon}(x_1) = A^{\varepsilon}\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\right)\left(a^{\varepsilon}_{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq 2} \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.55}$$

$u^{\varepsilon} \in H^1_0(\Omega)$ est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{\varepsilon}_{ij}(x_1)\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.56}$$

Proposition 2.8 *Supposons que les hypothèses (2.54),(2.55) et (2.56) sont satisfaits et $\breve{A}$ est la limite de la matrice du problème homogénéisé; alors*

$$\breve{A} = A^0$$

où A^0 est la matrice homogénéisé donnée par (2.35) et

$$\breve{a}_{ij} = M_Y(a_{ij}) - M_Y\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\frac{\partial\widehat{\chi}_j}{\partial y_k}\right)$$

Les fonctions $\widehat{\chi}_1(y) = \widehat{\chi}_1(y_1)$ et $\widehat{\chi}_2(y) = \widehat{\chi}_2(y_1)$ sont des solutions du problème (2.15) donnée pour $N = 2$. Ils sont respectivement donnée par

$$\begin{cases} \widehat{\chi}_1(y_1) = \dfrac{-1}{M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)} \displaystyle\int_0^y \dfrac{1}{a(t)}dt + y_1 + c_1 \\ \widehat{\chi}_2(y_1) = \displaystyle\int_0^y \dfrac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt - \dfrac{1}{M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)} M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)\displaystyle\int_0^y \dfrac{1}{a_{11}(t)}dt + c_2 \end{cases}$$

où c_1, c_2 sont respectivement les constantes pour que $M_Y(\widehat{\chi}_1) = 0$ et $M_Y(\widehat{\chi}_2) = 0$.

Preuve: On a $\widehat{x}_i$ solution du problème

$$\begin{cases} a_Y(\widehat{\chi}_i, v) = \displaystyle\int_Y Ae_i\nabla v \, dy \\ \forall v \in W_{per}(Y) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_Y A\nabla\widehat{\chi}_i\nabla v dy &= \int_Y A e_i \nabla v \ dy \\ &\Rightarrow \sum_{k,l=1}^{2}\int_Y a_{kl}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_l}\frac{\partial v}{\partial y_k}dy = \int_Y \sum_{k,l=1}^{2} a_{ki}\frac{\partial v}{\partial y_k}dy, \forall i=1,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \int_Y -\sum_{k,l=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kl}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_l}\right)vdy = \int_Y -\sum_{k,l=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{ki}\right)vdy \ ;\forall i=1,2 \\ &\Rightarrow -\sum_{k,l=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kl}\frac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_l}\right) = -\sum_{k,l=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{ki}\right);\forall i=1,2\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k,l=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kl}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_i}{\partial y_l}\right) = -\sum\limits_{k,l=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{ki}\right), \ \forall i=1,2 \quad \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_i \ \ Y-\text{périodique} \\ M_Y(\widehat{\chi}_i)=0 \end{cases}$$

Pour $i=1$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) = -\sum\limits_{k,l=1}^{2}\dfrac{\partial a_{k1}}{\partial y_k} \quad \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_1 \ \ Y-\text{périodique} \\ M_Y(\widehat{\chi}_1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) = -\dfrac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \quad \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_1 \ \ Y-\text{périodique} \\ M_Y(\widehat{\chi}_1)=0 \end{cases}$$

Pour $i=2$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) = -\sum\limits_{k,l=1}^{2}\dfrac{\partial a_{k2}}{\partial y_k} \quad \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_2 \ \ Y-\text{périodique} \\ M_Y(\hat{x}_2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) = -\dfrac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \ \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_2 \ \ Y-\text{périodique} \\ M_Y(\widehat{\chi}_2)=0 \end{cases}$$

Pour $i=1$, on a

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) = -\dfrac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \quad \text{dans } Y \\ \widehat{\chi}_1 \quad Y-\text{périodique} \\ M_Y(\widehat{\chi}_1) = 0. \end{cases}$$

On développe la somme, on aura

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{1j}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2j}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) &= -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{21}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{12}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_2}\right) \\ -\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{22}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_2}\right) &= -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) = -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \end{aligned}$$

car $\widehat{\chi}_1$et les a_{ij} dépendent que de y_1. Donc on a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) &= -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \\ &\Rightarrow a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1} = a_{11}(y) + c \\ &\Rightarrow \frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1} = 1 + \frac{c}{a_{11}(y)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{\chi}_1(y_1) = y_1 + c\int_0^{y_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt + c_1 ... (*)$$

or $\widehat{\chi}_1$ est $Y-$périodique c-à-d $\widehat{\chi}_1(0) = \widehat{\chi}_1(l_1)$, donc

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_1(0) &= c_1 \text{ et } \widehat{\chi}_1(l_1) = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt + l_1 + c_1 \\ \widehat{\chi}_1(0) &= \widehat{\chi}_1(l_1) \Rightarrow c_1 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt + l_1 + c_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -l_1 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt \Rightarrow c = \frac{-1}{\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt}$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}.$$

On sait que $M_Y\left(\widehat{\chi}_1\left(y_1\right)\right) = 0$. Calculons la moyenne de $\widehat{\chi}_1\left(y\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
M_Y(\widehat{\chi}(y_1)) &= \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1}\left[c\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt + l_1 + c_1\right]dy_1 \\
&= \frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dtdy_1 + \frac{l_1}{2} + c_1 = 0 \\
\Rightarrow\quad & c_1 = -\frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dtdy_1 - \frac{l_1}{2}.
\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}
(*) \quad \Rightarrow\quad & \frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1} = 1 + \frac{c}{a_{11}\left(y_1\right)} \\
\Rightarrow\quad & a_{11}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy} = a_{11}(y_1) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & a_{11}(y_1) - a_{11}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy} = -c \\
\Rightarrow\quad & a_{11}(y_1) - a_{11}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} \\
\Rightarrow\quad & a_{11}^0 = M_{(0,l_1)}(a_{11}(y_1)) - M_{(0,l_1)}\left(a_{11}(y)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1}\right) \\
= \quad & \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} = \breve{a}_{11}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy} = 1 + \frac{c}{a_{11}(y1)} \\
&\Longrightarrow \quad a_{21}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy} = a_{21}(y_1)\frac{c}{a_{11}(y_1)} \\
&\Longrightarrow \quad a_{21}(y_1) - a_{21}(y1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy1} = -a_{21}(y1)\frac{c}{a_{11}(y_1)} \\
&\Longrightarrow \quad a_{21}(y_1) - a_{21}(y1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\frac{a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \\
&\Rightarrow \quad a_{21}^0 = M_{(0,l_1)}(a_{21}(y_1)) - M_{(0,l_1)}\left(a_{21}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{21}^0 &= a_{11}^0 M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \\
&= \breve{a}_{21}.
\end{aligned}
$$

Pour $i = 2$, on a

$$
\begin{cases}
-\sum\limits_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial a_{21}}{\partial y_1} \quad \text{dans Y} \\
\widehat{\chi}_2 \quad Y-\text{périodique} \\
M_Y(\widehat{\chi}_2) = 0.
\end{cases}
$$

On développe la somme, on aura

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{1j}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2j}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) &= -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \\
&\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{21}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right) \\
-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{12}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_2}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{22}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_2}\right) &= -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \\
&\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right) = -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1}
\end{aligned}
$$

car $\widehat{\chi}_2$et les a_{ij} dépend que de y_1. Donc on a

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right) &= -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \\
&\Rightarrow a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1} = a_{12}(y_1) + c \\
&\Rightarrow \frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1} = \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{c}{a_{11}(y_1)} \\
&\Rightarrow \widehat{\chi}_2(y_1) = \int_0^{y_1}\frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt + c\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt + c_2.
\end{aligned}
$$

Or $\widehat{\chi}_2$ est $Y-$périodique c-à-d $\widehat{\chi}_2(0)=\widehat{\chi}_2(l_1)$, donc

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}_2(0) &= c_2 \\
\text{et } \widehat{\chi}_2(l_1) &= \int_0^{l_1}\frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt + c\int_0^{l_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt + c_2 \\
\widehat{\chi}_2(0) &= \widehat{\chi}_2(l_1) \Rightarrow c_2 = \int_0^{l_1}\frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt + c\int_0^{l_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt + c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -\int_0^{l_1}\frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt = c\int_0^{l_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt \Rightarrow c = \frac{-\int_0^{l_1}\frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt}{\int_0^{l_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt} \\
&\Rightarrow \quad c = \frac{\underset{(0,l_1)}{M}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)}{\underset{(0,l_1)}{M}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}.
\end{aligned}$$

On sait que

$$M_Y\left(\widehat{\chi}_2\left(y_1\right)\right)=0.$$

Calculons la moyenne de $\widehat{\chi}_2\left(y_1\right)$

$$\begin{aligned}
M_Y(\widehat{\chi}_2(y_1)) &= \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1}\left[c\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt + l_1 + c_1\right]dy \\
&= \frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dtdy_1 + \frac{l_1}{2} + c_1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad c_1 = -\frac{c}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dtdy_1 - \frac{l_1}{2}.
\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$
\begin{aligned}
\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy_1} &= \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{c}{a_{11}\,(y_1)} \ldots\ldots (2) \\
(2) \Rightarrow &\ a_{11}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy} = a_{12}(y_1) + c \\
\Rightarrow &\ a_{12}(y_1) - a_{11}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy_1} = -c \\
\Rightarrow &\ a_{12}(y_1) - a_{11}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy_1} = \frac{M_{(0,l_1)}\left(\dfrac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)}\right)}{M_{(0,l_1)}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)} \\
\Rightarrow &\ M_{(0,l_1)}(a_{12}) - M_{(0,l_1)}\left(a_{11}\frac{d\widehat{\chi}_2}{dy_1}\right) = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)} M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &\ a_{12}^0 = M_{(0,l_1)}(a_{12}) - M_{(0,l_1)}\left(a_{11}\frac{d\widehat{\chi}_2}{dy_1}\right) \\
= &\ a_{11}^0 M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = \breve{a}_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy_1} = \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{c}{a_{11}\,(y_1)} \ldots\ldots (2) \\
(2) &\Rightarrow a_{21}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy} = a_{21}(y_1)\frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + a_{21}(y_1)\frac{c}{a_{11}\,(y_1)} \\
&\Rightarrow a_{22}(y_1) - a_{21}(y_1)\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy} = a_{22}(y_1) - a_{21}(y_1)\frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} - a_{21}(y_1)\frac{c}{a_{11}\,(y_1)} \\
&\Rightarrow a_{22} - a_{21}\frac{d\widehat{\chi}_2}{dy} = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{M_{(0,l_1)}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)}{M_{(0,l_1)}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\
&\Rightarrow a_{22}^0 = M_{(0,l_1)}\,(a_{22}) - M_{(0,l_1)}\left(a_{21}\frac{d\widehat{\chi}_2}{dy}\right) \\
&= a_{11}^0 M_{(0,l_1)}(\frac{a_{12}}{a_{11}})M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) + M_{(0,l_1)}\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \\
&= \breve{a}_{22}
\end{aligned}
$$

■

Chapitre 3

La méthode de Tartar des fonctions tests oscillantes

Introduction:

On commence ce chapitre par la preuve du théorème (2.1). Dans la **section 3.2** on prouve la convergence de l'énergie associée au problème (3.1). A l'aide de cette convergence, on donne dans la **section 3.3** un résultat de correcteur. Les sections 3.4 et 3.5 contiennent quelques autres propriétés de convergence de u^ε de solution du problème modèle (3.1). Rappelons notre problème modèle:

$$(P^\varepsilon): \quad \begin{cases} -\text{div } (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où f est donnée dans $H^{-1}(\Omega)$ et la matrice A^ε est $\varepsilon Y-$périodique définit par

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \quad p.p \text{ sur } \mathbb{R}^N, \forall i,j = 1...N \tag{3.2}$$

et

$$A^\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon}) = \left(a_{ij}^\varepsilon(x)\right)_{1\leq i,j\leq N} \quad \text{p.p sur } \mathbb{R}^N \tag{3.3}$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ est } Y-\text{périodique} \quad \forall i,j = 1...N \\ A = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N} \in M(\alpha,\beta,Y) \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \beta$ et $M(\alpha,\beta,Y)$ est donnée par la définition(1.14).

3.1 La preuve du résultat principal de la convergence

Dans cette section,on donne une preuve rigoureuse du théorème (**2.1**)suivant une méthode générale de Tartar (1997a,1978).

Rappelons l'énoncé du théorème:

Théorème 3.1 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et u^ε est la solution de (2.1) avec A^ε définit par (2.2) et (2.4), alors*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{i)}}\ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ \textbf{\textit{ii)}}\ A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \end{cases}$$

où u^0 est la solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ du problème homogénéisé

$$\left(P^0\right): \quad \begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^N \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^0 \dfrac{\partial u^0}{\partial x_j}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La matrice $A^0 = \left(a_{i,j}^0\right)_{1 \le i,j \le N}$ est constante elliptique et donneé par

$$A^0 \lambda = M_Y\left(A \nabla \widehat{w}_\lambda\right), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$$

où elle est équivalente à

$${}^t A^0 \lambda = M_Y\left({}^t A . \nabla w_\lambda\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$$

Preuve: *Si on arrive à montrer (3.5), (3.7) et (3.9) c-à-d soit u^ε la solution de (3.1). On sait qu'il existe une sous suite (notée aussi $(u^\varepsilon)_\varepsilon$) telle que*

$$\begin{cases} \textbf{i)}\ \ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ \textbf{ii)}\ \ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \text{fortement dans } L^2(\Omega) \\ \textbf{iii)}\ \ \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 & \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \end{cases} \tag{3.5}$$

avec

$$\xi^\varepsilon = \left(\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon, ..., \xi_N^\varepsilon\right) = \left(\sum_{j=1}^N a_{1j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^N a_{2j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^N a_{Nj}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \tag{3.6}$$

satisfait

$$\int_\Omega \xi^\varepsilon \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Montrons également que ξ^0 satisfait

$$-\operatorname{div} \xi^0 = f$$

c-à-d

$$\int_\Omega \xi^0 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.8}$$

donc le théorème (3.1) est prouvé si on montre que

$$\xi^0 = A^0 \nabla u^0. \tag{3.9}$$

•*Etape* 1 :
On commence la démonstration par la preuve d'existance et l'unicité de la solution (Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram).
•*Etape* 2 :
Estimation à priori
La formulation faible du problème (3.1) est donnée par la formule suivante

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \forall f \in H^{-1}(\Omega)$$

Choisissons $v = u^\varepsilon$ *comme fonction test et remplaçons* v *dans la formule précédante. On obtient*

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx &= \int_\Omega f u^\varepsilon dx.... (1) \\ (1) \quad \Leftrightarrow \quad & \int_\Omega A^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 dx = \int_\Omega f u^\varepsilon dx \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \int_\Omega A^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 dx = \int_\Omega f u^\varepsilon dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & \alpha \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \\ \leq \quad & \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha \|u^\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega A^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ \Rightarrow \quad & \|u^\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha} \leq c \end{aligned}$$

Donc (u^ε) *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$, *or* $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *qui est réfléxif donc on peut extraire une sous suite notée*$(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *qui converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *,c-à-d*

$$\textbf{i)}\ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \textit{faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

Et puisque

$$H_0^1(\Omega) \underset{\substack{inj \\ cpt}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \Rightarrow u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \textit{fortement dans } L^2(\Omega) ... (ii)$$

Donc

$$\begin{cases} \textbf{i)}\ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \textit{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ \textbf{ii)}\ u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 & \textit{fortement dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

Maintenant, montrons que

$$\textbf{iii)}\ \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 \textit{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N$$

$$\begin{aligned}
\xi^\varepsilon &= A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon = (\xi_1^\varepsilon, \xi_2^\varepsilon, ..., \xi_N^\varepsilon) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{N} a_{2j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\xi^\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 &= \left[\int_\Omega |\xi^\varepsilon|^2 \, dx\right] \\
&= \left[\int_\Omega |A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon|^2 \, dx\right] \\
&\leq \beta^2 \left[\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx\right] \\
&= \beta^2 \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

donc

$$\|\xi^\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq \beta \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_1$$

Donc on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $\left[L^2(\Omega)\right]^N$ *c-à-d*

$$\textbf{iii)}\ \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 \textit{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N$$

d'où (3.5) est prouvé.
Or on a

$$\int_\Omega \xi^\varepsilon \nabla v dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Passons à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \langle \xi^\varepsilon, \nabla v\rangle_{[L^2(\Omega)]^N, [L^2(\Omega)]^N} dx &= \int_\Omega \left\langle \xi^0, \nabla v\right\rangle_{[L^2(\Omega)]^N, [L^2(\Omega)]^N} dx \\
&= \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\
&\Rightarrow -\int_\Omega \operatorname{div}\left(\xi^0\right) v dx = \int_\Omega f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\
&\Rightarrow -\operatorname{div} \xi^0 = f \qquad \textit{dans } \Omega
\end{aligned}$$

d'où la preuve de (2.8).
Etape 3 :
Montrons que

$$\xi^0 = A^0 \nabla u^0.$$

$\left(P^0\right)$ *admet une solution unique c'est à dire limite unique.*
Posons

$$w_\lambda^\varepsilon(x) = \varepsilon w_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \langle \lambda, x\rangle - \varepsilon\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}^N \tag{3.10}$$

On montre que $w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda x$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \left[w_\lambda^\varepsilon(x) + \varepsilon\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] v dx = \int_\Omega \lambda\chi v dx$$

Or on a

$$\chi_\lambda \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} M_Y(\chi_\lambda) = 0$$

Donc

$$\int_\Omega w_\lambda^\varepsilon(x) v dx = \int_\Omega \lambda\chi v dx.$$

$$\Rightarrow w_\lambda^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \lambda x \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

D'aprés (2.21) on a

$$w_\lambda^\varepsilon(x) = \langle \lambda, x\rangle - \varepsilon\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$$

$$\begin{aligned} \nabla_x w_\lambda^\varepsilon(x) &= \lambda - \varepsilon\nabla_x\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \nabla_y\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\Rightarrow \nabla_x w_\lambda^\varepsilon(x) = \lambda - \nabla_y\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

$\nabla_x \omega_\lambda^\varepsilon(x)$ *est* $Y-$*périodique puisque* $\omega_\lambda^\varepsilon(x)$ *est* $Y-$*périodique donc d'aprés le théorème (1.8) on obtient:*

$$\nabla_x w_\lambda^\varepsilon(x) \rightharpoonup M_Y\left(\lambda - \nabla_y\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \frac{1}{|Y|}\int_\Omega (\lambda - \nabla_y\chi_\lambda)\, dy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{|Y|}\int_\Omega 1 dy - \frac{1}{|Y|}\int_\Omega (\nabla_y\chi_\lambda)\, dy \\ &= \frac{\lambda}{|Y|}|Y| - \frac{1}{|Y|}\int_\Omega (\nabla_y\chi_\lambda)\, dy \\ &= \lambda - M_Y(\nabla_y\chi_\lambda) \end{aligned}$$

D'aprés le théorème (1.10),appliquée sur Y *pour* $u = 1$,*et* $v = \chi_\lambda$ *on aura:*

$$\begin{aligned}
\int_Y \nabla_y \chi_\lambda (y)\, dy &= \int_Y 1.\nabla_y \chi_\lambda (y)\, dy \\
&= -\int_Y \nabla (1)\, \chi_\lambda (y)\, dy + \int_Y \chi_\lambda (y)\, ds_y \\
&= \int_{\partial Y} \chi_\lambda (y)\, .n.ds_y \\
&\Rightarrow \int_Y \nabla_y \chi_\lambda (y)\, dy = \int_{\partial Y} \chi_\lambda (y)\, .n.ds_y = 0. \ \textit{(d'aprés le théorème de trace)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_Y (\nabla_y \chi_\lambda) = 0.$$

Par consequent, on a les convergence suivantes:

$$\begin{cases} i) \ \ w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda x \ \ \textit{faiblement dans } H^1(\Omega) \\ i) \ \ w_\lambda^\varepsilon \to \lambda x \ \ \textit{fortement dans } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.11}$$

On introduit le vecteur de fonction:

$$\eta_\lambda^\varepsilon = (\eta_1^\varepsilon, \eta_2^\varepsilon, ..., \eta_N^\varepsilon) = \left(\sum_{j=1}^N a_{1j}^\varepsilon \frac{\partial \omega_\lambda^\varepsilon}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^N a_{2j}^\varepsilon \frac{\partial \omega_\lambda^\varepsilon}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^N a_{Nj}^\varepsilon \frac{\partial \omega_\lambda^\varepsilon}{\partial x_j} \right) = \ {}^t A^\varepsilon \nabla \omega_\lambda^\varepsilon.$$

D'aprés (2.3) et (2.10), on voit que

$$\eta_\lambda^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left[{}^t A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\nabla_y (\varepsilon w_\lambda)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] = \left({}^t A \nabla_y \varepsilon w_\lambda \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \tag{3.12}$$

De plus ${}^t A$ *est* $Y-$*périodique, evidemment* ${}^t A \nabla_y \varepsilon \omega_\lambda$ *est* $Y-$*périodique aussi puis en appliquant le théorème (1.8)*, *on obtient la convergence suivante*

$$\eta_\lambda^\varepsilon = \ {}^t A \nabla_y \varepsilon w_\lambda \rightharpoonup M_Y \left({}^t A \nabla_y \varepsilon w_\lambda \right) = \ {}^t A^0 \lambda \ \ \textit{faiblement dans } \left(L^2(\Omega) \right)^N \tag{3.13}$$

Avec A^0 *est définie par(2.31) .*
Maintenant, on montre que η_λ^ε *satisfait*

$$\int_\Omega \eta_\lambda^\varepsilon \nabla v \ dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.14}$$

Soit $\varphi \in D(\Omega)$ *et soit* $\varphi^\varepsilon(y) = \varphi(\varepsilon y)$ *p.p sur* $\mathbb{R}^N$,*donc* $\varphi^\varepsilon \in D(\mathbb{R}^N)$.
D'aprés (2.25), on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left({}^t A \nabla w_\lambda \right) \nabla \varphi^\varepsilon (y) \ dy = 0.$$

Par un changement de variable $x = \varepsilon y$ il resulte que:

$$\int_{\Omega} \left({}^t A \nabla w_\lambda\right) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \varphi(x) \ d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Puisque le supp $\varphi \subset \Omega$, et à l'aide de définition (1.6) de $H_0^1(\Omega)$, on a immediatement le résultat (3.14) c-à-d

$$\int_{\Omega} \eta_\lambda^\varepsilon \nabla v \ dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Soit $\varphi \in D(\Omega)$, on choisissent $\varphi w_\lambda^\varepsilon$ et φu^ε respectivement comme des fonctions test dans (3.7) et (3.14).
On obtient:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \xi^\varepsilon \nabla w_\lambda^\varepsilon \varphi dx + \int_{\Omega} \xi^\varepsilon \nabla \varphi w_\lambda^\varepsilon dx = \langle f, \varphi w_\lambda^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \ldots (1) \\ \int_{\Omega} \eta_\lambda^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx + \int_{\Omega} \eta_\lambda^\varepsilon \nabla \varphi u^\varepsilon dx = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \ldots . (2) \end{cases}$$

Or on a d'aprés (3.6) et (3.12)

$$\xi^\varepsilon \nabla w_\lambda^\varepsilon = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla w_\lambda^\varepsilon = {}^t A^\varepsilon \nabla w_\lambda^\varepsilon \nabla u^\varepsilon = \eta_\lambda^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$$

et par soustraction de (1) *de* (2), *on a*

$$\int_{\Omega} \xi^\varepsilon \nabla \varphi w_\lambda^\varepsilon dx + \int_{\Omega} \eta_\lambda^\varepsilon \nabla \varphi u^\varepsilon dx = \langle f, \varphi w_\lambda^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \ , \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{3.15}$$

Et à l'aide de résultat de convergence obtenu dans (3.5)(iii)et (3.5)(ii) on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \xi^\varepsilon \nabla \varphi w_\lambda^\varepsilon dx = \int_{\Omega} \xi^0 \nabla \varphi(\lambda x) dx$$

En suite, d'aprés la convergence vue dans (3.13) et (3.5)(i),on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \eta_\lambda^\varepsilon \nabla \varphi u^\varepsilon dx = \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla \varphi u^0 dx$$

Puis, par (3.15) et (3.11)(i), on aura finalement

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla \varphi(\lambda x) dx - \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla \varphi u^0 dx = \langle f, (\lambda x) \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \ , \forall \varphi \in D(\Omega)$$

On peut la réécrire sous la forme

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla [\varphi(\lambda x)] dx - \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla \varphi u^0 dx - \int_{\Omega} \xi^0 \lambda \varphi dx = \langle f, (\lambda x) \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \ , \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Posons $v = \varphi(\lambda x)$ *comme fonction test dans la forme (3.8), il résulte:*

$$\int_\Omega \xi^0 \lambda \varphi dx = -\int_\Omega {}^t A^0 \lambda \nabla \varphi u^0 dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

D'aprés la définition de dérivation au sens des distriution et le fait que le facteur ${}^t A^0 \lambda$ *est constant, il résulte que:*

$$\int_\Omega \xi^0 \lambda \varphi dx = \int_\Omega {}^t A^0 \lambda \nabla u^0 \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Donc

$$\xi^0 \lambda = \left\langle {}^t A^0 \lambda, \nabla u^0 \right\rangle = \left\langle \lambda, A^0 \nabla u^0 \right\rangle = A^0 \nabla u^0 \lambda.$$
$$\Rightarrow \xi^0 = A^0 \nabla u^0, \forall \lambda \in \mathbb{R}^N \qquad cqfd$$

Donc $\left(P^0\right)$ *est le problème limite associé au problème* (P^ε) *donné par (3.5)* ■

3.2 La convergence de l'énergie

Dans cette section, on a une conséquence intéressante du théorème (2.1), c'est la convergence de l'énergie associe au problème (3.1).

On note cette quantité par

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon) = \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx$$

Maintenant, on prouve quelques résultats qui sont originalement prouvés par De Giorgi et Spagnolo (1973) dans le conteste de la $G-$convergence.

Proposition 3.1 *Soit* u^ε *la solution de (3.1) alors*

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon) \to E^0\left(u^0\right) = \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 dx$$

où u^0*et* A^0 *sont données par le théoème (2.1).*

Preuve: D'aprés la formulation variationnelle du problème (2.29), où $v = u^\varepsilon$ est la fonction test, on a

$$\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx = \langle f, u^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

La convergence (3.5)(i) implique que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx = \left\langle f, u^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

d'un autre côté choisissons u^0 comme une fonction test dans la formulation varitionnelle de (3.1), on obtient

$$\int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 dx = \left\langle f, u^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

D'où le résultat

$$E^\varepsilon \left(u^\varepsilon\right) \rightarrow E^0 \left(u^0\right) = \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 dx.$$

■

On a aussi la convergence au sens des distribution. En effet :

Proposition 3.2 *Soit u^ε la solution de (3.1) alors*

$$A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightarrow A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 \quad dans\ D'(\Omega)$$

où u^0 et A^0 sont données par le théoème (2.1).

Preuve: On montre que

$$\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx \rightarrow \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 \varphi dx \tag{3.16}$$

En utilisant $u^\varepsilon \varphi$ comme une fonction test dans la formulation varitionnelle de (3.1), on obtient:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx &= \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \left(u^\varepsilon \varphi\right) dx - \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi u^\varepsilon dx \\ &= \left\langle f, u^\varepsilon \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi u^\varepsilon dx \\ &= \left\langle f, u^\varepsilon \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \xi^\varepsilon \nabla \varphi u^\varepsilon dx \end{aligned} \right. \tag{3.17}$$

On remarque que à partir de (3.5)(i), on a

$$u^\varepsilon \varphi \rightharpoonup u^0 \varphi \text{ converge faiblement dans } H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in D(\Omega)$$

A partir de cette convergence et les deux résultas (3.5), (3.9) et la proposition(1.1), on peut passer à la limite dans (3.17). Donc

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx &= \left\langle f, u^0 \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \xi^0 \nabla \varphi u^0 dx \\ &= \left\langle f, u^0 \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \xi^0 \nabla \left(\varphi u^0\right) dx + \int_\Omega \xi^0 \nabla u^0 \varphi dx \end{aligned} \right. \tag{3.18}$$

Maintenant on prend $u^0 \varphi$ comme fonction test dans (3.8).On aura

$$\int_\Omega \xi^0 \nabla \left(\varphi u^0\right) dx = \left\langle f, u^0 \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

Remplaçons dans (3.18). Il resulte que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx & = \langle f, u^\varepsilon\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int\limits_\Omega \xi^0 \nabla\varphi u^0 dx \\ & = \langle f, u^\varepsilon\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle f, u^\varepsilon\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int\limits_\Omega \xi^0 \nabla u^0 \varphi dx \\ & \int\limits_\Omega \xi^0 \nabla u^0 \varphi dx \end{cases}$$

D'où le résultat

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx = \int\limits_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 \varphi dx, \forall\varphi \in D(\Omega)$$

■

On a montré dans la proposition(2.4) qu'il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que la matrice A^0 satisfait la condition d'ellipticité avec cette constante. Puisque A^0 est constante. On a alors

$$A^0 \in M(\alpha_0, \beta_0, \Omega)$$

où

$$\beta_0 = \max_{i,j} a^0_{ij}.$$

Rappelons que nous avons commencé avec la matrice $A^\varepsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega)$.
Une question naturelle est de préciser la constante α_0 et β_0.
La réponse est donné par le résultat suivant

Proposition 3.3 *On a*

$$A^0 \in M\left(\alpha_0, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega\right) \tag{3.19}$$

Preuve: A l'aide de définition (1.14), on montre que A^0 satisfait les deux inégalités suivantes

$$\begin{cases} \textbf{i)} & \left(A^0\lambda, \lambda\right) \geq \alpha\, |\lambda|^2 \\ \textbf{ii)} & \left|A^0\lambda\right| \leq \dfrac{\beta^2}{\alpha}\, |\lambda| \end{cases} \tag{3.20}$$

•On montre **(i)** :Soit $z^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $z^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla z^\varepsilon) = -\operatorname{div}\left(A^0 \nabla z^0\right) \quad \text{dans } \Omega \\ z^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

On peut appliquer le théorème (2.1) dans ce problème, on obtient

$$z^\varepsilon \rightharpoonup Z^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \tag{3.22}$$

où Z^0 est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^0 \nabla Z^0\right) = -\operatorname{div}\left(A^0 \nabla z^0\right) \quad \text{dans } \Omega \\ Z^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par unicité de la solution Z^0 de ce problème, on conclut que

$$Z^0 = z^0.$$

De la proposition (3.2), on sait que

$$A^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \to A^0 \nabla z^0 \nabla z^0 \quad \text{dans } D\prime(\Omega).$$

En particulier pour toute fonction non-négative $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega A^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \varphi dx \to \int_\Omega A^0 \nabla z^0 \nabla z^0 \varphi dx \tag{3.23}$$

puisque $A^\varepsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega)$, on a

$$\int_\Omega A^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \varphi dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla z^\varepsilon|^2 \varphi dx \tag{3.24}$$

D'aprés (3.22), il résulte que

$$\sqrt{\varphi} \nabla z^\varepsilon \rightharpoonup \sqrt{\varphi} \nabla z^0 \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N$$

La semi-continuité par rapport à la convergence faible théorème (1.1) implique que

$$\underset{\varepsilon \to 0}{liminf} \int_\Omega |\nabla z^\varepsilon|^2 \varphi dx \geq \alpha \int_\Omega \left|\nabla z^0\right|^2 \varphi dx$$

Ceci, avec (3.22) permet de passer à la limite inférieur dans (3.24), pour obtenir

$$\int_\Omega A^0 \nabla z^0 \nabla z^0 \varphi dx \geq \alpha \int_\Omega \left|\nabla z^0\right|^2 \varphi dx.$$

Puisque z^0 est arbitraire et le support de φ est compact inclue dans Ω on peut choisir z^0 telle que $z^0 = \lambda x$ sur supp φ.
Alors, si A^0 est constante, on aura

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^0 \nabla(\lambda x) \nabla(\lambda x) \varphi dx \quad &\geq \quad \alpha \int_\Omega |\nabla(\lambda x)|^2 \varphi dx. \\ &\Rightarrow \quad \int_\Omega A^0 \nabla \lambda \nabla \lambda \varphi dx \geq \alpha \int_\Omega |\lambda|^2 \varphi dx \\ &\Rightarrow \quad \left(A^0 \lambda, \lambda\right) \int_\Omega \varphi dx \geq \alpha |\lambda|^2 \int_\Omega \varphi dx \end{aligned}$$

Et puisque φ est une fonction non négative alors

$$\left(A^0\lambda, \lambda\right) \geq \alpha \left|\lambda\right|^2$$

D'où le résultat (3.20)(i)
•Maintenant, on prouve (3.20)(ii).
On premier lieu, on montre que

$$\left(\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\lambda, \lambda\right) \geq \frac{\alpha}{\beta^2}\left|\lambda\right|^2, \forall\lambda \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p sur } \Omega$$

où $\left(A^\varepsilon\left(x\right)\right)^{-1}$ est la matrice inversse de $A^\varepsilon\left(x\right)$.
On montre que $\left(A^\varepsilon\right)^{-1}$ est définie d'aprés A^ε où

$$A^\varepsilon \in M\left(\alpha, \beta, \Omega\right), \forall\lambda \text{ fixé dans } \mathbb{R}^N$$

et soit $\mu = \left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda$ p p sur Ω.
Alors, on utilise le fait que $A^\varepsilon \in M\left(\alpha, \beta, \Omega\right)$, on aura

$$\left(\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda, \lambda\right) = \left(\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\mu, \mu\right) \geq \alpha\left|\mu\right|^2 = \alpha\left|\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda\right|^2. \tag{3.25}$$

Rappelons que

$$\left\|A^\varepsilon\left(x\right)\right\|_2 = \sup_{\mu\neq 0}\frac{\left|A^\varepsilon\left(x\right)\mu\right|}{\left|\mu\right|}.$$

Donc ,$\forall\mu \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\left|A^\varepsilon\left(x\right)\mu\right| \leq \left|\mu\right|\left\|A^\varepsilon\left(x\right)\right\|_2.$$

Pour

$$\mu = \left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} \left|A^\varepsilon\left(x\right)\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\lambda\right| &\leq \left|\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda\right|\left\|A^\varepsilon\left(x\right)\right\|_2 \\ &\Rightarrow \left|\lambda\right| \leq \left|\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda\right|\left\|A^\varepsilon\left(x\right)\right\|_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda\right| \geq \frac{\left|\lambda\right|}{\left\|A^\varepsilon\left(x\right)\right\|_2}. \tag{3.26}$$

On déduit que

$$\left|\left(A^\varepsilon\right)^{-1}\left(x\right)\lambda\right| \geq \frac{\left|\lambda\right|}{\beta}, \text{ car } \left\|A^\varepsilon\left(x\right)\right\|_2 \leq \beta.$$

Remplaçons dans (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
\left((A^{\varepsilon})^{-1}(x)\,\lambda,\lambda\right) &\geq \alpha\left|(A^{\varepsilon})^{-1}(x)\,\lambda\right|^{2} \\
&\geq \alpha\frac{|\lambda|^{2}}{\beta^{2}} \\
&\Rightarrow \left((A^{\varepsilon})^{-1}(x)\,\lambda,\lambda\right) \geq \frac{\alpha}{\beta^{2}}|\lambda|^{2}.
\end{aligned}$$

Soit $z^{0} \in H_{0}^{1}(\Omega)$ et $z^{\varepsilon} \in H_{0}^{1}(\Omega)$ la solution de (3.20) et φ une fonction non négative dans $D(\Omega)$. Choisisoons $\lambda = A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}$ dans (3.22), on obtient facilement

$$\begin{aligned}
\left((A^{\varepsilon})^{-1}(x)\,A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon},A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}\right) &\geq \alpha\left|(A^{\varepsilon})^{-1}(x)\,A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}\right|^{2} \\
&\geq \alpha\frac{|\lambda|^{2}}{\beta^{2}} \\
&\Rightarrow \int_{\Omega}(A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon},\nabla z^{\varepsilon})\,\varphi dx \geq \alpha\frac{|\lambda|^{2}}{\beta^{2}}\int_{\Omega}|A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}|^{2}\,\varphi dx \\
&\Rightarrow \int_{\Omega}A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}\varphi dx \geq \alpha\frac{|\lambda|^{2}}{\beta^{2}}\int_{\Omega}|A^{\varepsilon}\nabla z^{\varepsilon}|^{2}\,\varphi dx
\end{aligned}$$

Le même argument utilisé pour passé à la limite dans (3.24) donne:

$$\left(\lambda,A^{0}\lambda\right)\int_{\Omega}\varphi dx \geq \frac{\alpha}{\beta^{2}}\left|A^{0}\lambda\right|^{2}\int_{\Omega}\varphi dx$$

donc puisque φ est une fonction non-négative, il résulte que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta^{2}}\left|A^{0}\lambda\right|^{2} &\leq \left(\lambda,A^{0}\lambda\right) \\
&\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta^{2}}\left|A^{0}\lambda\right|^{2} \leq |\lambda|\left|A^{0}\lambda\right| \\
&\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta^{2}}\left|A^{0}\lambda\right| \leq |\lambda| \\
&\Rightarrow \left|A^{0}\lambda\right| \leq \frac{\alpha}{\beta^{2}}|\lambda|
\end{aligned}$$

D'où le résultat (3.20)(ii), et par suite la proposition est prouvé. ■

3.3 Les correcteurs

Soit u^{ε} la solution du problème (3.1) et u^0 la solution correspondante au problème homogénéisé.

D'aprés le théorèrme (2.1), en particulier la convergence suivante

$$A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon} - \nabla u^0 \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \tag{3.27}$$

Dans la théorie de l'homogénéisation, on est souvent affronté à convergence (3.27)

Amélioré cette convergence c'est la transformé à une convergence forte. Pour cela, on introduit un opérateur qui ajuste la limite, a fin d'obtenir une convergence forte cet operateur d'ajustement s'appelle correcteur.

On introduit la matrice de correcteur $C^{\varepsilon} = C^{\varepsilon}_{ij}(x)_{1\leq i,j\leq N}$ définit par

$$\begin{cases} C^{\varepsilon}_{ij}(x) & = C_{ij}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \quad p.p \text{ sur } \Omega \\ C_{ij}(y) & \delta_{ij} - \dfrac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial y_i}(y) = \dfrac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_i}(y) \quad p.p \text{ sur } Y \end{cases} \tag{3.28}$$

où $\widehat{\chi}_j$et $\widehat{w}_j$ sont données par (2.14),(2.15) et (2.16).

Quelques propriétés intéréssantes de la matrice de correcteur C^{ε} sont donnés par les propositions suivantes:

Proposition 3.4 *Soit C^{ε} définie par (3.28) alors*

$$\begin{cases} i) \;\; C^{\varepsilon} \rightharpoonup I & \textit{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^{N\times N} \\ ii) \;\; A^{\varepsilon}C^{\varepsilon} \rightharpoonup A^0 & \textit{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \end{cases} \tag{3.29}$$

où I est la matrice unité d'ordre $N \times N$

Preuve: On introduit les fonctions

$$\widehat{w}^{\varepsilon}_i(x) = \varepsilon \widehat{w}_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = x_i - \varepsilon \widehat{\chi}_{\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ pour } i = 1, ..., N. \tag{3.30}$$

Le même argument utilisé pour prouvé (3.11) donne

$$\begin{cases} i) \; \widehat{w}^{\varepsilon}_i \rightharpoonup x_i & \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \\ ii) \; \widehat{w}^{\varepsilon}_i \rightarrow x_i & \text{fortement dans } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.31}$$

D'aprés (3.28) il est facile de voir que

$$C^{\varepsilon}_{ij}(x) = \frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial \widehat{w}^{\varepsilon}_j}{\partial x_i}(x)$$

car

$$C^{\varepsilon}_{ij}(x) = C_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}(x) &= \varepsilon \frac{\partial y_i}{\partial x_i}\frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\\ &= \varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\\ &= \frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

Maintenant ,on calcule $\dfrac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}$ =?
On a pour $i = 1, ..., N$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j - \varepsilon \widehat{\chi}_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial x_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\\ &= \delta_{ij} - \frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial x_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

or on a

$$\frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial x_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M_Y\left(\frac{\partial \widehat{\chi}_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

Car on a

$$\int_Y \nabla_x \chi_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dy = \int_{\partial Y} \chi_j n \; ds_y = 0$$

Donc il résulte que

$$\frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup \delta_{ij} \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^{N\times N}$$

D'où le resultat

$$C_{ij}^{\varepsilon}(x) = \frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup \delta_{ij} = I \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^{N\times N} \ (i)$$

On introduit le vecteur de fonction

$$\overset{\wedge}{\eta}{}_i^{\varepsilon} = \left(\overset{\wedge}{\eta}{}_1^{\varepsilon}, \overset{\wedge}{\eta}{}_2^{\varepsilon}, ..., \overset{\wedge}{\eta}{}_N^{\varepsilon}\right) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j}^{\varepsilon}\frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{N} a_{2j}^{\varepsilon}\frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}, ..., \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}^{\varepsilon}\frac{\partial \widehat{w}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right) \tag{3.32}$$

$$= A^{\varepsilon}\nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon}. \tag{3.33}$$

D'aprés la propriété de A^{ε} (3.3) et (3.30) on aura

$$\overset{\wedge}{\eta}{}_i^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left[A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla_y\left(\varepsilon \widehat{w}_i\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] = \left(A\nabla_y \widehat{w}_i\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Suivant les mêmes étapes de la preuve de (3.14) ,on montre que $\overset{\wedge}{\eta}_i^{\varepsilon}$ satisfait

$$\int_{\Omega} \overset{\wedge}{\eta}_i^{\varepsilon} \nabla v dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.34}$$

D'aprés (2.14) ,on a

$$\nabla_y \widehat{w}_i = -\nabla_y \widehat{\chi}_i + e_i$$

où $\nabla_y \widehat{w}_i$ est $Y-$périodique, puisque $\widehat{\chi}_i$ est $Y-$périodique et e_i est une constante.
Donc on obtient

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{\eta}_i^{\varepsilon} &\rightharpoonup M_Y(A\nabla\widehat{w}_i) = M_Y(-A\nabla_y\widehat{w}_i) + M_Y(Ae_i) \\ &= M_Y(Ae_i) = A^0 e_i \end{aligned}$$

$$\overset{\wedge}{\eta}_i^{\varepsilon} \rightharpoonup M_Y(A\nabla\widehat{w}_i) = A^0 e_i \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \tag{3.35}$$

On utilise (2.34), on conclut que

$$\overset{\wedge}{\eta}_i^{\varepsilon} = A^{\varepsilon} C^{\varepsilon} e_i.$$

■

Théorème 3.2 *Soit u^{ε} la solution du problème (3.1) et u^0, A^0 sont donnés par le théorème (2.1). Alors*

$$\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\nabla u^0 \to 0 \ \textit{ fortement dans } \left(L^1(\Omega)\right)^N. \tag{3.36}$$

En plus, si $C \in (L^r(\Omega))^{N\times N}$, tel que $2 \le r \le \infty$ et $\nabla u^0 \in (L^s(\Omega))^N$; $\forall s$ tq $2 \le s < \infty$, alors

$$\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\nabla u^0 \to 0 \ \textit{ fortement dans } \left(L^t(\Omega)\right)^N.$$

où $t = min\left\{2, \frac{rs}{r+s}\right\}$.

Proposition 3.5 *Soit u^{ε} la solution du problème (3.1) et u^0, A^0 sont donnés par le théorème (2.1). Alors, il existe $c > 0$ independant de ε telle que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\Phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \le c\left\|\nabla u^0 - \Phi\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve: Soit $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ...\Phi_N) \in (D(\Omega))^N$.
D'aprés (3.3) et (3.4) on obtient

$$\begin{aligned} \alpha\|\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\Phi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le \int_{\Omega} \langle A^{\varepsilon}(\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\Phi), (\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\Phi)\rangle \ dx \\ &= \int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}(C^{\varepsilon}\Phi) dx \\ &\quad -\int_{\Omega} A^{\varepsilon}(C^{\varepsilon}\Phi)\nabla u^{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} A^{\varepsilon}(C^{\varepsilon}\Phi)(C^{\varepsilon}\Phi) dx \end{aligned} \tag{3.37}$$

Calculons la limite de chaque terme.D'aprés la proposition (3.4), on a

$$\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}dx \to \int_{\Omega} A^{0}\nabla u^{0}\nabla u^{0}dx \tag{3.38}$$

Le second tèrme donne:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\left(C^{\varepsilon}\Phi\right)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{\varepsilon}\Phi_j\right)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\left(C_{ij}^{\varepsilon}\Phi_j\right)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}C_{ij}^{\varepsilon}\Phi_j dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\left(\nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i\right)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\nabla\left(\widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i\right)dx \\
&\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u_i^{\varepsilon}\widehat{w}_i^{\varepsilon}\nabla\Phi_i dx
\end{aligned}$$

Choisissons $\widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i$ comme fonction test dans le problème (3.1),on aura:

$$\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\nabla\left(\widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i\right)dx = \left\langle f, \widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

Maintenant, utilisons la convergence (3.5) et (3.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \left(C^\varepsilon \Phi\right) dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^N \langle f, \widehat{w}_i^\varepsilon \Phi_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^N \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi_i \widehat{w}_i^\varepsilon dx \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\langle f, x_i \Phi_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \right) - \sum_{i=1}^N \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla \Phi_i x_i dx \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\langle f, x_i \Phi_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \right) - \sum_{i=1}^N \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla \left(\Phi_i x_i\right) dx \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla x_i \Phi_i dx
\end{aligned}$$

Choisissons $x_i\Phi_i$ comme fonction test, on aura donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \left(C^\varepsilon \Phi\right) dx &= \left\langle f, \sum_{i=1}^N x_i \Phi_i \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla \left(\sum_{i=1}^N \Phi_i x_i \right) dx \\
&\quad + \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \left(\sum_{i=1}^N e_i \Phi_i \right) dx \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \left(C^\varepsilon \Phi\right) dx &= \left\langle f, \sum_{i=1}^N x_i \Phi_i \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla \left(\sum_{i=1}^N \Phi_i x_i \right) dx \\
&\quad + \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \left(\sum_{i=1}^N e_i \Phi_i \right) dx \\
&= \langle f, x\Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla \left(\Phi x\right) dx + \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \Phi dx \\
&= \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \Phi dx
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \left(C^\varepsilon \Phi\right) dx = \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \Phi dx \tag{3.39}$$

Maintenant calculons

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon\left(C^\varepsilon\Phi\right)\nabla u^\varepsilon dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon\left(\sum_{i=1}^N \nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\Phi_i\right)\nabla u^\varepsilon dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left(A^\varepsilon\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\right)\nabla u^\varepsilon\Phi_i dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^N\int_\Omega\overset{\wedge\varepsilon}{\eta_i}\nabla u^\varepsilon\Phi_i dx \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon\left(C^\varepsilon\Phi\right)\nabla u^\varepsilon dx &= \sum_{i=1}^N\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\overset{\wedge\varepsilon}{\eta_i}\nabla u^\varepsilon\Phi_i dx \\
&= \sum_{i=1}^N\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\Omega\overset{\wedge\varepsilon}{\eta_i}\nabla\left(u^\varepsilon\Phi_i\right)dx-\int_\Omega\overset{\wedge\varepsilon}{\eta_i}\nabla\Phi_i u^\varepsilon dx\right] \\
&= \sum_{i=1}^N\left(\int_\Omega A^0 e_i\nabla\left(u^0\Phi_i\right)dx-\int_\Omega A^0 e_i\nabla\Phi_i u^0 dx\right) \\
&= \sum_{i=1}^N\int_\Omega A^0 e_i\nabla u^0\Phi_i dx \\
&= \int_\Omega A^0\nabla u^0\left(\sum_{i=1}^N e_i\Phi_i\right)dx \\
&= \int_\Omega A^0\nabla u^0\Phi dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon\left(C^\varepsilon\Phi\right)\nabla u^\varepsilon dx=\int_\Omega A^0\Phi\nabla u^0 dx \tag{3.40}$$

Le dèrnier tèrme vaut

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon\left(C^\varepsilon\Phi\right)\left(C^\varepsilon\Phi\right)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^\varepsilon\nabla\left(\sum_{i=1}^N\widehat{w}_i^\varepsilon\Phi_i\right)\nabla\left(\sum_{j=1}^N\widehat{w}_i^\varepsilon\Phi_j\right)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j=1}^N\int_\Omega A^\varepsilon\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\nabla\widehat{w}_j^\varepsilon\Phi_i\Phi_j dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j=1}^N\int_\Omega\overset{\wedge\varepsilon}{\eta_i}\nabla\widehat{w}_j^\varepsilon\Phi_i\Phi_j dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\left(C^{\varepsilon}\Phi\right)\left(C^{\varepsilon}\Phi\right)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j=1}^{N}\left[\int_{\Omega}\overset{\wedge}{\eta}{}_i^{\varepsilon}\nabla\left(\widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i\Phi_j\right)dx - \int_{\Omega}\overset{\wedge}{\eta}{}_i^{\varepsilon}\nabla\left(\Phi_i\Phi_j\right)\widehat{w}_j^{\varepsilon}dx\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\overset{\wedge}{\eta}{}_i^{\varepsilon}\nabla\left(\widehat{w}_i^{\varepsilon}\Phi_i\Phi_j\right)dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\overset{\wedge}{\eta}{}_i^{\varepsilon}\nabla\left(\Phi_i\Phi_j\right)\widehat{w}_j^{\varepsilon}dx\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\left[\int_{\Omega}A^{0}e_i\nabla\left(x_j\Phi_i\Phi_j\right)dx - \int_{\Omega}A^{0}e_i\nabla\left(\Phi_i\Phi_j\right)x_jdx\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\left[\int_{\Omega}A^{0}e_i\nabla x_j\Phi_i\Phi_jdx + \int_{\Omega}A^{0}e_i\nabla\left(\Phi_i\Phi_j\right)x_jdx\right] \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}A^{0}e_i\nabla\left(\Phi_i\Phi_j\right)x_jdx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}A^{0}e_ie_j\Phi_i\Phi_jdx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}A^{0}\left(\Phi_ie_i\right)\left(\Phi_je_j\right)dx \\
&= \int_{\Omega}A^{0}\left(\sum_{i=1}^{N}\Phi_ie_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\Phi_je_j\right)dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} A^{\varepsilon}\left(C^{\varepsilon}\Phi\right)\left(C^{\varepsilon}\Phi\right)dx = \int_{\Omega}A^{0}\Phi\Phi dx \tag{3.41}$$

D'aprés (3.38),(3.39),(3.40) et (3.41) et remplaçons dans (3.37). On obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\left\langle A^{\varepsilon}\left(\nabla u^{\varepsilon}-C^{\varepsilon}\Phi\right),\left(\nabla u^{\varepsilon}-C^{\varepsilon}\Phi\right)\right\rangle\ dx &= \int_{\Omega}A^{0}\nabla u^{0}\nabla u^{0}dx - \int_{\Omega}A^{0}\nabla u^{0}\Phi dx - \int_{\Omega}A^{0}\Phi\nabla u^{0}dx \\
&\quad + \int_{\Omega}A^{0}\Phi\Phi dx \\
&= \int_{\Omega}A^{0}\left(\nabla u^{0}-\Phi\right)\left(\nabla u^{0}-\Phi\right)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \alpha \underset{\varepsilon\to 0}{lim} \sup \|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \Phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \quad \int_\Omega A^0 \left(\nabla u^0 - \Phi\right)\left(\nabla u^0 - \Phi\right) dx \\
&\Rightarrow \quad \underset{\varepsilon\to 0}{lim} \sup \|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \Phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \quad \left[\frac{1}{\alpha}\int_\Omega A^0 \left|\nabla u^0 - \Phi\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left\|\nabla u^0 - \Phi\right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

On pose $c = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$
Donc, il résulte que

$$\underset{\varepsilon\to 0}{lim} \sup \|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \Phi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\|\nabla u^0 - \Phi\right\|_{L^2(\Omega)}$$

■

Maintenant, on prouve le théorème (3.2)

Preuve: Montrons (3.36):
Soit $\delta > 0$ et $\Phi_\delta \in (D(\Omega))^N$ tel que $\left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$.
D'aprés la densité de $(D(\Omega))^N$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^N$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup \left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \left[\begin{array}{c} \|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \Phi_\delta\|_{L^1(\Omega)} \\ + \left\|C^\varepsilon \Phi_\delta - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^1(\Omega)} \end{array}\right]$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^1(\Omega)} \overset{L^2(\Omega)\subset L^1(\Omega)}{\leq} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup c_1 \|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \Phi_\delta\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \lim_{\varepsilon\to 0} \sup c_2 \left\|C^\varepsilon \Phi_\delta - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^1(\Omega)} \leq c\ c_1 \left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\
= \quad & (cc_1 + c_2) \left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \delta
\end{aligned}
$$

Quand $\delta \to 0$, on aura :

$$\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^1(\Omega)} \leq 0 \text{ donc } \left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

D'où le résultat

$$\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0 \to 0 \text{ fortement dans } \left(L^1(\Omega)\right)^N$$

Maintenant ,on montre le second résultat ie

$$\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0 \to 0 \quad \text{fortement dans} \quad \left(L^t(\Omega)\right)^N.$$

Soit $\delta > 0$ et $\Phi_\delta \in (D(\Omega))^N$ tel que $\left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^s(\Omega)} \leq \delta$.
on a

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left[\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\Phi_\delta\right\|_{L^t(\Omega)} + \left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)}\right]$$

or on a

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t \leq \frac{rs}{r+s} \end{cases},$$

et on a

$$2 \leq s < \infty \Rightarrow t \leq 2 \leq s.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left[\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\Phi_\delta\right\|_{L^t(\Omega)} + \left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)}\right] \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left[c_1'\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + c_2'\left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}(\Omega)}\right]
\end{aligned}$$

Posons $c_1 = \max\left(c_1', c_2'\right)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup c_1\left[\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}(\Omega)}\right]$$

et d'aprés la proposition précédante ie proposition (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} &\leq cc_1\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + \lim_{\varepsilon\to 0}\sup c_1\left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}(\Omega)} \\
&\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq c_2\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\Phi_\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}\sup c_1\left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}(\Omega)} \\
&\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq c_2\delta \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}\sup c_1\left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}(\Omega)} \ldots(1)
\end{aligned}$$

Et puisque, on a $C \in (L^r(\Omega))^{N\times N}$,et à l'aide de l'inégalité de Holder pour $p = \frac{r+s}{s}, p' = \frac{r+s}{r}$, on obtient:

$$\left\|C^\varepsilon\Phi_\delta - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^{\frac{rs}{r+s}}(\Omega)} \leq \left\|C^\varepsilon\right\|_{L^r(\Omega)}\left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^s(\Omega)}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq c_2\delta + \lim_{\varepsilon\to 0}\sup c_1\left[\left\|C^\varepsilon\right\|_{L^r(\Omega)}\left\|\nabla u^0 - \Phi_\delta\right\|_{L^s(\Omega)}\right] \\
&\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq c_2\delta + c_1c_3\delta = C\delta \\
\text{Quand}\delta \quad &\rightarrow 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} \leq 0 \\
&\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0\right\|_{L^t(\Omega)} = 0 \Rightarrow \nabla u^\varepsilon - C^\varepsilon\nabla u^0 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

D 'où le résultat chèrché

$$\nabla u^{\varepsilon} - C^{\varepsilon}\nabla u^{0} \to 0 \quad \text{fortement dans } \left(L^{t}(\Omega)\right)^{N}$$

■

Si on prend les cas de dimension 1 et 2 on aura:

Remarque 3.1 *En dimension 1 on a* $C(y) = \dfrac{1}{M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{1}{a}\right)} \dfrac{1}{a(y)} = \dfrac{a^0(y)}{a(y)}$.

En dimension 2 on a $C(y) = C(y_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}^{0}(y_1)}{a_{11}(y1)} & -\dfrac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \dfrac{a_{12}^{0}}{a_{11}(y_1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Preuve: On a définie la matrice C par

$$\begin{cases} C_{ij}^{\varepsilon}(x) & = C_{ij}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) & p.p \text{ sur } \Omega \\ C_{ij}(y) & \delta_{ij} - \dfrac{\partial \overset{\wedge}{\chi}_j}{\partial y_i}(y) = \dfrac{\partial \overset{\wedge}{\omega}_j}{\partial y_i}(y) & p.p \text{ sur } Y \end{cases}$$

En dimension 1, et d'aprés la proposition (2.7) du **chapitre 2**, on a

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{d\widehat{\chi}}{dy}\right) = -\dfrac{d}{dy}(a(y)) \qquad \text{dans }]0,l_1[\\ \widehat{\chi} \quad l_1 - \text{périodique} \\ M_{]0,l_1[}(\widehat{\chi}) = 0 \end{cases}$$

On a

$$-\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{d\widehat{\chi}}{dy}\right) \quad = \quad -\frac{d}{dy}(a(y)) \,......... (1)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad a(y)\frac{d\widehat{\chi}}{dy} = a(y) + c$$

, où c une constante à détèrminé

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\widehat{\chi}}{dy} = 1 + \frac{c}{a(y)}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\chi}(y) = y + c\int_{0}^{y} \frac{1}{a(t)}dt + c_0 .... (2)$$

Or $\widehat{\chi}$ est l_1-périodique c-à-d $\widehat{\chi}(0) = \widehat{\chi}(l_1)$, donc

$$(2) \Rightarrow \widehat{\chi}(0) = c_0 \ et \ \ \widehat{\chi}(l_1) = c\int_{0}^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt + l_1 + c_0$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\chi}(0) &= \widehat{\chi}(l_1) \Rightarrow c_0 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt + l_1 + c_0 \\
&\Rightarrow -l_1 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt \\
&\Rightarrow c = \frac{-1}{\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} \frac{1}{a(t)}dt} \\
&\Rightarrow c = \frac{-1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} \\
(1) &\Rightarrow \frac{d\widehat{\chi}}{dy} = 1 + \frac{c}{a(y)} = 1 - \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{1}{a(y)} \\
&\Rightarrow 1 - \frac{d\widehat{\chi}}{dy} = \frac{d\widehat{w}}{dy} = C(y) = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{1}{a(y)} \\
&\Rightarrow C(y) = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{1}{a(y)} = \frac{a^0(y)}{a(y)}
\end{aligned}
$$

En dimension 2 ,on determine les coefficients de la matrice de correcteur c-à-d $C_{11}(y_1), C_{12}(y_1), C_{21}(y_1), C_{22}(y_1)$;
Calculons $C_{11}(y_1) =?$

$$
C_{11}(y_1) = \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial y_1}(y) = \delta_{11} - \frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}(y) = 1 - \frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}(y)
$$

On a :

$$
\begin{cases}
\widehat{\chi}_1(y_1) = \dfrac{-1}{M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)}\int_0^y \dfrac{1}{a(t)}dt + y_1 + c_1 \\
\widehat{\chi}_2(y_1) = \int_0^y \dfrac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}dt - \dfrac{1}{M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)}M_{]0,l_1[}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)\int_0^y \dfrac{1}{a_{11}(t)}dt + c_2
\end{cases}
$$

$\widehat{\chi}_1\,(y_1)$ est donnée par :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) = -\dfrac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \quad \text{dans Y} \\ \widehat{\chi}_1 \quad Y-\text{périodique} \\ M_Y(\widehat{\chi}_1) = 0 \end{cases}$$

On développe la somme, on aura

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{1j}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2j}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_j}\right) &= -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{21}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{12}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_2}\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{22}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_2}\right) \\ &= -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) = -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1}, \\ &\quad \text{car } \widehat{\chi}_1 \text{et les } a_{ij} \text{ dépend que de } y_1 \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1}\right) &= -\frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} \\ &\Rightarrow a_{11}\frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1} = a_{11}\,(y) + c \\ &\Rightarrow \frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_1} = 1 + \frac{c}{a_{11}\,(y)} \\ &\Rightarrow \widehat{\chi}_1\,(y) = y + c\int_0^y \frac{1}{a_{11}(t)}dt + c_1 \end{aligned}$$

Or $\widehat{\chi}_1$ est $Y-$périodique c à d $\widehat{\chi}_1(0) = \widehat{\chi}_1(l_1)$, donc

$$\widehat{\chi}_1(0) = c_1 \text{ et } \widehat{\chi}(l_1) = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt + l_1 + c_1$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\chi}_1(0) &= \widehat{\chi}_1(l_1) \Rightarrow c_1 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt + l_1 + c_1 \\
&\Rightarrow -l_1 = c\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt \Rightarrow c = \frac{-1}{\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)}dt} \\
&\Rightarrow c = \frac{-1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}
\end{aligned}
$$

Maintenant on a

$$
\begin{aligned}
\frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1} &= 1 + \frac{c}{a_{11}\left(y_1\right)} \\
&\Rightarrow \frac{d\widehat{\chi}_1(y)}{dy_1} = 1 - \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\frac{1}{a_{11}\left(y_1\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 - \frac{d\widehat{\chi}_1(y_1)}{dy_1} = \frac{d\widehat{w}_1}{dy_1} = C_{11}\left(y_1\right) = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\frac{1}{a\left(y_1\right)} \\
&\Rightarrow C_{11}\left(y_1\right) = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\frac{1}{a\left(y_1\right)} = \frac{a_{11}^0}{a\left(y_1\right)}
\end{aligned}
$$

Calculons $C_{12}\left(y_1\right) =?$

$$
C_{12}\left(y_1\right) = \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial y_1}\left(y\right) = \delta_{12} - \frac{\partial \widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\left(y\right) = -\frac{\partial \widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\left(y\right)
$$

D'aprés la proposition (2.8)

$$
\widehat{\chi}_2\left(y_1\right) = \int_0^{y} \frac{a_{12}\left(t\right)}{a_{11}\left(t\right)}dt - \frac{1}{M_{]0,l_1[}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}M_{]0,l_1[}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\int_0^{y} \frac{1}{a_{11}\left(t\right)}dt + c_2
$$

$\widehat{\chi}_2\left(y_1\right)$ est donnée par :

$$
\begin{cases}
-\sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial \widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) = -\dfrac{\partial a_{21}}{\partial y_1} & \text{dans } Y \\
\widehat{\chi}_2 \quad Y - \text{périodique} \\
M_Y(\widehat{\chi}_2) = 0
\end{cases}
$$

On développe la somme; on aura:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{1j}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right)-\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2j}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_j}\right) &= -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \\
&\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right)-\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{21}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right) \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{12}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_2}\right)-\frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{22}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_2}\right) \\
&= -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \\
&\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right)=-\frac{\partial a_{21}}{\partial y_1}, \\
&\quad \text{car } \widehat{\chi}_1 \text{et les } a_{ij} \text{ dépend que de } y_1
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}\right) &= -\frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} \\
&\Rightarrow a_{11}\frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}=a_{12}\left(y_1\right)+c \\
&\Rightarrow \frac{\partial\widehat{\chi}_2}{\partial y_1}=\frac{a_{12}\left(y_1\right)}{a_{11}\left(y_1\right)}+\frac{c}{a_{11}\left(y_1\right)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{\chi}_2\left(y_1\right)=\int_0^{y_1}\frac{a_{12}\left(t\right)}{a_{11}\left(t\right)}dt+c\int_0^{y_1}\frac{1}{a_{11}(t)}dt+c_1$$

Or $\widehat{\chi}_2$ est $Y-$périodique c-à-d $\widehat{\chi}_2(0) = \widehat{\chi}_2(l_1)$, donc

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}_2(0) &= c_2 \text{ et } \widehat{\chi}_2(l_1) = \int_0^{l_1} \frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)} dt + c \int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)} dt + c_2 \\
\widehat{\chi}_2(0) &= \widehat{\chi}_2(l_1) \Rightarrow c_2 = \int_0^{l_1} \frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)} dt + c \int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)} dt + c_2 \\
&\Rightarrow -\int_0^{l_1} \frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)} dt = c \int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)} dt \\
&\Rightarrow c = \frac{-\int_0^{l_1} \frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)} dt}{\int_0^{l_1} \frac{1}{a_{11}(t)} dt} \\
&\Rightarrow c = -\frac{M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}
\end{aligned}$$

On a dit que

$$\begin{aligned}
C_{12}(y_1) &= \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial y_1}(y) \\
&= \delta_{12} - \frac{\partial \widehat{\chi}_2}{\partial y_1}(y) = -\frac{\partial \widehat{\chi}_2}{\partial y_1}(y)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{\chi}_2(y_1)}{dy_1} &= \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + a_{11}^0 M_{(0,l_1)}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\frac{1}{a_{11}(y_1)} \\
&= \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + a_{12}^0 \frac{1}{a_{11}(y_1)}
\end{aligned}$$

Donc

$$C_{12}(y_1) = -\frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{a_{12}^0}{a_{11}(y_1)}$$

Maintenant ,on calcule $C_{21}(y_1)$

$$C_{21}(y_1) = \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial y_2}(y) = \delta_{21} - \frac{\partial \widehat{\chi}_1}{\partial y_2}(y_1) = 0$$

Car $\widehat{\chi}_1$ depand que de y_1 et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.Donc

$$C_{21}(y_1) = 0$$

Finalement

$$C_{22}(y_1) = \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial y_2}(y) = \delta_{22} - \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial y_2}(y) = 1$$

Car $\widehat{\chi}_2$ depand que de y_1 et $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$.Donc

$$C_{21}(y_1) = 1$$

D'où la matrice chérché

$$C(y) = C(y_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}^0(y_1)}{a_{11}(y1)} & -\dfrac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \dfrac{a_{12}^0}{a_{11}(y_1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

3.4 Quelques résultats de comparaison

Définition 3.1 *Soient B et D deux matrices d'ordre $N \times N$.*
On dit que B est inférieur ou égale à D au sense des matrices et on note

$$B \leq D \text{ ssi } (B\lambda, \lambda) \leq (D\lambda, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}^N$$

Théorème 3.3 *Soient B et D deux matrices $Y-$périodique dans $M(\alpha, \beta, Y)$ d'ordre $N \times N$ tel que*

$$B \leq D. \tag{3.42}$$

Par ailleurs, on suppose que B est symétrique, alors

$$B^0 \leq D^0$$

où sont deux matrices homogénéisées correspondantes au problème $\left(P^0\right)$ et données par le théorème(2.1). (Toutes les définitions sont pris au sens de définition (3.1)).

Preuve: Soient $w_{\lambda,B}$ et $w_{\lambda,D}$ sont donnés par le problème (2.25).
On écrit respectivement pour $w_{\lambda,B}B$ et D par le théorème (2.1) et utilisons la symétrie de B. On a

$$\begin{cases} {}^tD^0\lambda = M_Y\left({}^tD\nabla w_{\lambda,D}\right) \\ B^0\lambda = M_Y\left({}^tD\nabla w_{\lambda,B}\right) \end{cases} \tag{3.43}$$

Soit (3.10)et (3.12)

$$\begin{cases} w_{\lambda,D}^\varepsilon(x) = \varepsilon w_{\lambda,D}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right); w_{\lambda,B}^\varepsilon(x) = \varepsilon w_{\lambda,B}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \\ \eta_{\lambda,D}^\varepsilon = \ {}^tD\nabla w_{\lambda,D}; \eta_{\lambda,B}^\varepsilon = \ D^\varepsilon\nabla w_{\lambda,B} \end{cases} \tag{3.44}$$

où $D^{\varepsilon}(x) = D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); B^{\varepsilon}(x) = B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ p.p sur $\mathbb{R}^N$.

D'aprés (3.43) et la **section 3.1**, on a les convergences suivantes (voir (3.11)) et (3.13)

$$\begin{cases} \textbf{i)}\ w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \rightharpoonup \lambda x \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \\ \textbf{ii)}\ w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \to \lambda x \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \\ \textbf{iii)}\ \eta^{\varepsilon}_{\lambda,D} \rightharpoonup {}^tD^0\lambda \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \end{cases} \tag{3.45}$$

et

$$\begin{cases} \textbf{i)}\ w^{\varepsilon}_{\lambda,B} \rightharpoonup \lambda x \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \\ \textbf{ii)}\ w^{\varepsilon}_{\lambda,B} \to \lambda x \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \\ \textbf{iii)}\ \eta^{\varepsilon}_{\lambda,B} \rightharpoonup B^0\lambda \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N \end{cases} \tag{3.46}$$

D'aprés l'assumption (3.42), on montre que B est dans $M(\alpha, \beta, Y)$ et est symétrique. Il suit que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq B^{\varepsilon}\nabla\left(w^{\varepsilon}_{\lambda,B} - w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\right)\nabla\left(w^{\varepsilon}_{\lambda,B} - w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\right) \\ &= B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} - 2B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} w^{\varepsilon}_{\lambda,D} + B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \end{aligned}$$

Donc d'aprés (3.42), on a

$$B^{\varepsilon} \leq D^{\varepsilon}.$$

On obtient

$$0 \leq B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} - 2B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} w^{\varepsilon}_{\lambda,D} + B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D}.$$

Par consequent, $\forall\varphi \in D(\Omega), \varphi \geq 0$, on a

$$0 \leq \int_{\Omega} B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\varphi dx - 2\int_{\Omega} B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\varphi dx + \int_{\Omega} B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D}\varphi dx \tag{3.47}$$

Maintenant, passons à la limite pour $\varepsilon \to 0$ pour chaque terme de cette inégalité.
On prend le premier terme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B^{\varepsilon}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\varphi dx &= \int_{\Omega} \eta^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\varphi dx \\ &= \int_{\Omega} \eta^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla\left(w^{\varepsilon}_{\lambda,B}\varphi\right) dx - \int_{\Omega} \eta^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla\varphi w^{\varepsilon}_{\lambda,B} dx \\ &= -\int_{\Omega} \eta^{\varepsilon}_{\lambda,B}\nabla\varphi w^{\varepsilon}_{\lambda,B} dx \end{aligned}$$

D'aprés la convergence (3.46)(ii) et par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega B^\varepsilon\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B}\varphi dx &= -\int_\Omega B^0\lambda\nabla\varphi\left(\lambda x\right)\ dx \\
&= -\int_\Omega B^0\lambda\nabla\left(\varphi\lambda x\right)\ dx + \int_\Omega B^0\lambda\varphi\nabla\left(\lambda x\right)\ dx \\
&= \int_\Omega \left(B^0\lambda,\lambda\right)\varphi\ dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega B^\varepsilon\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B}\varphi dx = \int_\Omega \left(B^0\lambda,\lambda\right)\varphi\ dx \tag{3.48}$$

Puisque B^0 est une matrice constante.
Même chose pour le deuxieme terme, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega B^\varepsilon\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B} w^\varepsilon_{\lambda,D}\varphi dx &= \int_\Omega \eta^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla w^\varepsilon_{\lambda,D}\varphi dx \\
&= \int_\Omega \eta^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla\left(w^\varepsilon_{\lambda,B}\varphi\right)dx - \int_\Omega \eta^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla\varphi w^\varepsilon_{\lambda,B}dx \\
&\Rightarrow \int_\Omega B^\varepsilon\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B} w^\varepsilon_{\lambda,D}\varphi dx \\
&= -\int_\Omega \eta^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla\varphi w^\varepsilon_{\lambda,B}dx
\end{aligned}$$

D'aprés la convergene (3.45)(ii) et (3.46)(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega B^\varepsilon\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B} w^\varepsilon_{\lambda,D}\varphi dx &= -\int_\Omega B^0\lambda\nabla\varphi\lambda x\ dx \\
&= -\int_\Omega B^0\lambda\nabla\left(\varphi\lambda x\right)\ dx + \int_\Omega B^0\lambda\nabla\varphi\left(\lambda x\right)\ dx \\
&= \int_\Omega B^0\lambda\nabla\varphi\left(\lambda x\right)\ dx \\
&= \int_\Omega \left(B^0\lambda,\lambda\right)\varphi\ dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega B^\varepsilon\nabla w^\varepsilon_{\lambda,B}\nabla w^\varepsilon_{\lambda,D}\varphi dx = \int_\Omega \left(B^0\lambda,\lambda\right)\varphi\ dx \tag{3.49}$$

Finalement , puisque

$$\int_{\Omega} D^{\varepsilon} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \varphi dx = \int_{\Omega} {}^{t}D^{\varepsilon} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \varphi dx$$

D'aprés (3.14) et (3.44)

$$\int_{\Omega} D^{\varepsilon} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \varphi dx = -\int_{\Omega} \eta^{\varepsilon}_{\lambda,D} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \varphi dx$$

Par consequant , D'aprés (3.45)(ii) et (3.45)(iii)

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\Omega} D^{\varepsilon} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \varphi dx = \int_{\Omega} \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\Omega} D^{\varepsilon} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,B} \nabla w^{\varepsilon}_{\lambda,D} \varphi dx = \int_{\Omega} \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx \tag{3.50}$$

Par passage à la limite dans la formule (3.47) et utilisons (3.48),(3.49) et (3.50), on obient

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} \left(B^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx - 2 \int_{\Omega} \left(B^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx + \int_{\Omega} \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq -\int_{\Omega} \left(B^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx + \int_{\Omega} \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \varphi \, dx \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq -\left(B^{0} \lambda, \lambda \right) \int_{\Omega} \varphi \, dx + \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \int_{\Omega} \varphi \, dx \\
0 &\leq \Rightarrow 0 \leq -\left(B^{0} \lambda, \lambda \right) + \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \\
&\qquad \Rightarrow \left(B^{0} \lambda, \lambda \right) \leq \left(D^{0} \lambda, \lambda \right) \quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.1 *Supposons que la matrice A est symétrique et soit A^{0} donné par le théorème (2.1), alors $A^{0} \in M\left(\alpha, \beta, \Omega\right)$.*

Preuve: Le résultat est une consequence immédiate de théorème (3.3) appliqué pour $B = A$ et $D = BI$; où I est la matrice d'identité d'ordre $N \times N$. Puisque $A \in M\left(\alpha, \beta, \Omega\right)$, $\left(BI\right)^{0} = BI$, on a $A^{0} \leq BI$. Sa se resulte à l'aide de la proposition (3.3). ■

Remarque 3.2 *On remarque que la condition d'éllipticité (3.20)(i) prouvé dans la proposition (3.3), peut être obtenu par le théorème (3.3) appliqué pour $B = \alpha I$ et $D = A$.*

Théorème 3.4 *Soient B et D deux matrices $Y-$périodique dans $M(\alpha,\beta,\Omega)$ d'ordre $N\times N$, et B^0, D^0 les deux matrices homogénéisé correspondantes données par le théorèm (2.1), alors il existe une constante c et $q\in\mathbb{R}_+$, dépendante de α,β,N et Y tel que*

$$\left|b_{ij}^0-d_{ij}^0\right|\leq c\left(\int\limits_Y\left|a_{ij}-b_{ij}\right|dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve: On a posé dans la preuve du théorème (3.3) que

$$D^\varepsilon(x)=D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right);B^\varepsilon(x)=B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\quad\text{p.p sur }\mathbb{R}^N.$$

Et soit C_B^ε et $C_{^tD}^\varepsilon$ les deux matrices de correcteurs correspondantes respectivement au B et ${}^tD$; elles sont définis par (3.28) et (3.44) ecrites pour $\lambda=e_i,\ \forall i=1,...,N$.
Les élements des matrices ${}^tC_{^tD}^\varepsilon B^\varepsilon C_B^\varepsilon$ et ${}^tC_{^tD}^\varepsilon D^\varepsilon C_B^\varepsilon$ sont respectivement donnés par

$$\left\{\begin{array}{l}\left({}^tC_{^tD}^\varepsilon B^\varepsilon C_B^\varepsilon\right)_{ij}=\nabla w_{i,t_D}^\varepsilon B^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon=B^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon\nabla w_{i,t_D}^\varepsilon\\ \left({}^tC_{^tD}^\varepsilon D^\varepsilon C_B^\varepsilon\right)_{ij}=\nabla w_{i,^tD}^\varepsilon D^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon=D^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon\nabla w_{i,^tD}^\varepsilon\end{array}\right.\tag{3.51}$$

On utilise le même chemin que la preuve (3.49), on aura

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\int\limits_I B^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon\nabla w_{i,t_D}^\varepsilon\varphi dx &= \int\limits_I\left(B^0e_j,e_i\right)\varphi dx,\forall\varphi\in D(I)\\ &= \int\limits_I b_{i,j}^0\varphi dx\\ \lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\int\limits_I {}^tD^\varepsilon\nabla w_{i,^tD}^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon\varphi dx &= \int\limits_I\left({}^tD^0e_j,e_i\right)\varphi dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\int\limits_I {}^tD^\varepsilon\nabla w_{i,^tD}^\varepsilon\nabla w_{j,B}^\varepsilon\varphi dx=\int\limits_I d_{i,j}\varphi dx,\forall i,j=1,...,N,\forall\varphi\in D(I).$$

D'où,(3.51) est prouvé.
D'aprés la remarque (3.1), on sait qu'il existe $r>0$(dépend de a,B,N et Y) tel que C_B et $C_{^tD}\in(L^r(Y))^{N\times N}$. Par conséquent, D'aprés le théorème (1.8) et la remarque (1.11). Il résulte que

$$\left\|C_B^\varepsilon\right\|_{L^r(I)}^r\leq c|I|;\left\|{}^tC_{^tD}^\varepsilon\right\|_{L^r(I)}^r\leq c|I|$$

On a dit que

$$\left\{\begin{array}{ll}{}^tC_{^tD}^\varepsilon B^\varepsilon C_B^\varepsilon\rightarrow B^0 & \text{dans }D'(I)\\ {}^tC_{^tD}^\varepsilon D^\varepsilon C_B^\varepsilon\rightarrow D^0 & \text{dans }D'(I)\end{array}\right.$$

$$\int_I \left|{}^tC^\varepsilon_{{}^tD} B^\varepsilon C^\varepsilon_B -^t C^\varepsilon_{{}^tD} D^\varepsilon C^\varepsilon_B\right|^\eta dx = \int_I \left|{}^tC^\varepsilon_{{}^tD} \left(B^\varepsilon - D^\varepsilon\right) C^\varepsilon_B\right|^\eta dx$$

Soit η tel que $1 < \eta < r$, appliquons l'inégalité de Holder, on a

$$\begin{aligned}
\int_I \left|{}^tC^\varepsilon_{{}^tD} B^\varepsilon C^\varepsilon_B -^t C^\varepsilon_{{}^tD} D^\varepsilon C^\varepsilon_B\right|^\eta dx &\leq \left\|\left({}^tC^\varepsilon_{{}^tD}\right)^\eta\right\|_{L^{\frac{r}{\eta}}(I)} \left\|(B^\varepsilon - D^\varepsilon)^\eta\right\|_{L^s(I)} \left\|(C^\varepsilon_B)^\eta\right\|_{L^{\frac{r}{\eta}}(I)} \\
&= \left\|{}^tC^\varepsilon_{{}^tD}\right\|^\eta_{L^r(I)} \left\|(B^\varepsilon - D^\varepsilon)^\eta\right\|_{L^s(I)} \left\|C^\varepsilon_B\right\|^\eta_{L^r(I)} \\
&\leq c\,|I|^{\frac{\eta}{r}} \left\|(B^\varepsilon - D^\varepsilon)^\eta\right\|_{L^s(I)} c\,|I|^{\frac{\eta}{r}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_I \left|{}^tC^\varepsilon_{{}^tD} B^\varepsilon C^\varepsilon_B -^t C^\varepsilon_{{}^tD} D^\varepsilon C^\varepsilon_B\right|^\eta dx \leq c\,|I|^{\frac{2\eta}{r}} \left\|B^\varepsilon - D^\varepsilon\right\|^\eta_{L^s(I)}$$

Parce que

$$\begin{aligned}
\left\|\left({}^tC^\varepsilon_{{}^tD}\right)^\eta\right\|_{L^{\frac{r}{\eta}}(I)} &= \left[\int_I \left[\left({}^tC^\varepsilon_{{}^tD}\right)^\eta\right]^{\frac{r}{\eta}} dx\right]^{\frac{\eta}{r}} = \left[\left[\int_I \left[\left({}^tC^\varepsilon_{{}^tD}\right)^r\right] dx\right]^{\frac{1}{r}}\right]^\eta \\
&= \left\|{}^tC^\varepsilon_{{}^tD}\right\|^\eta_{L^r(I)} \\
\left\|(B^\varepsilon - D^\varepsilon)^\eta\right\|_{L^{\frac{r}{\eta}}(I)} &= \left[\int_I \left[(B^\varepsilon - D^\varepsilon)^\eta\right]^s dx\right]^{\frac{\eta}{\eta s}} \\
&= \left[\left[\int_I \left[(B^\varepsilon - D^\varepsilon)^{\eta s}\right] dx\right]^{\frac{1}{\eta s}}\right]^\eta = \left\|B^\varepsilon - D^\varepsilon\right\|^\eta_{L^{\eta s}(I)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|(C^\varepsilon_B)^\eta\right\|_{L^{\frac{r}{\eta}}(I)} &= \left[\int_I \left[(C^\varepsilon_B)^\eta\right]^{\frac{r}{\eta}} dx\right]^{\frac{\eta}{r}} = \left[\left[\int_I \left[(C^\varepsilon_B)^r\right] dx\right]^{\frac{1}{r}}\right]^\eta \\
&= \left\|C^\varepsilon_B\right\|^\eta_{L^r(I)}.
\end{aligned}$$

Avec

$$\frac{1}{s} + \frac{2\eta}{r} = 1. \tag{3.52}$$

A l'aide de la remarque (1.11), on a

$$\left(\left\|B^\varepsilon - D^\varepsilon\right\|^\eta_{L^{\eta s}(I)} \leq c\,|I|^{\frac{1}{\eta s}} \left\|B - D\right\|_{L^{\eta s}(I)}\right).$$

En suite, utilisons (3.53), il resulte que

$$\int_I \left|{}^tC^\varepsilon_{tD}B^\varepsilon C^\varepsilon_B -{}^t C^\varepsilon_{tD}D^\varepsilon C^\varepsilon_B\right|^\eta dx \leq c\,|I|\,\|B-D\|_{L^{\eta s}(I)} \tag{3.53}$$

Ceci montre que ${}^tC^\varepsilon_{tD}\left(B^\varepsilon - D^\varepsilon\right)C^\varepsilon_B$ est borné dans $\left(L^\eta\left(I\right)\right)^{N\times N}$, donc il existe une matrice P telle que

$${}^tC^\varepsilon_{tD}\left(B^\varepsilon - D^\varepsilon\right)C^\varepsilon_B \rightharpoonup P \quad \text{faiblement dans} \ \left(L^\eta\left(I\right)\right)^{N\times N}$$

D'aprés (3.51) on identifie la limite P par $B^0 - D^0$. Il résulte que la suite entière converge c-à-d

$${}^tC^\varepsilon_{tD}\left(B^\varepsilon - D^\varepsilon\right)C^\varepsilon_B \rightharpoonup B^0 - D^0 \quad \text{faiblement dans} \ \left(L^\eta\left(I\right)\right)^{N\times N}$$

Indiquant que B^0et D^0 sont constantes, la semi continuité inférieure de la norme dans L^η, donne

$$|I|\left|B^0 - D^0\right| = \left\|B^0 - D^0\right\|^\eta_{L^\eta(I)} \leq \liminf \left\|{}^tC^\varepsilon_{tD}\left(B^\varepsilon - D^\varepsilon\right)C^\varepsilon_B\right\|^\eta_{L^1(I)}$$

Ceci à l'aide (3.45), implique

$$\left|B^0 - D^0\right| \leq c_1\,\|B-D\|_{L^\eta(Y)} \leq c_1\,\|B-D\|^{\frac{1}{\eta s}}_{L^1(Y)}$$

Où c_2 dépend de α, β, N et Y. Ceci ce qui falait démontrer avec $q = \eta s$ ■

Conclusion

La méthode de Luc Tartar des fonctions tests oscillante a fait partir la notion de convergence du produit des deux suites qui converge faiblement dans $L^2(\Omega)$.

D'où l'introduction de la compacité par compensation qui donne une limite au sens des distributions et qui permet d'introduire la notion de correcteur pour mieux voir la physique des oscillations de ∇u^{ε}.

Cette méthode utilise les fonctions auxiliaires pour déterminer les coefficients homogénéisés a_{ij}^0.

Le cas présenté est le cas linéaire, reste à vérifier le cas non linéaire.

Bibliographie

[1] **Haïm Brezis**, *Analyse fonctionnelle (Théorie et applications), Edition DUNOD − Paris*, 1999.

[2] **K.Yosida,** *Functional Analysis*, 6 *editions, Springer − Verlag, BerlinHeidel − berg*, 1995.

[3] **Doina Cioranescu** and **Patrizia Donato**, *An Introduction to Homogenization, OXFORD University Press Inc, NewYork*, 1999.

[4] **J.L.Lions**, *Quelque méthodes de résolution des problèmes aux limites non linaire, DUNOD Gauthier − Villars, Paris* (1969).

[5] **Cioranescu, Damlamian,** and **Grio,** The Periodic Unfolding Method in Homogenization, *C.R, Acad.Sci.Paris, Ser.*1, 335 (2002), *pp.*99 − 104.

[6] **François Murat**, *H-convergence, Séminaire d'Analyse fonctionnelle et numérique, Université d'Alger, Département des mathématiques*, 1977/1978).

[7] **Luc Tartar**, *The General Theory of Homogenization, A personalized Introduction, Lecture Notes, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.*

[8] **Luc Tartar,** An Introduction to the Homogenization Method in Optimal Design*. In A. Cellina, A. Ornelas, editors, Optimal Shape Design. Lectures given at the joint C.I.M/C.I.M.E. Summer School held in Troina, Portugal*, volume 1740 of Lecture Notes in Mathematics, pages 47-156. Springer, Berlin 1998**.**

[9] **Annelliese Defranceschi**, *An introduction to Homogenization and G- convergence, September 6-8.1993, school on homogenization at the ICTP.*

[10] **G.Senouci Bereksi**, *Homogénéisation, support de cours de poste graduation, Master en Analyse Numrique, 2009-2010.*

[11] **R.Bentifour,** *Homogénéisation et controle optimale de problèmes Stokes, Thèse de Magister, 2006-2007.*