

- Si $\lambda > 0$, il ya trois points d'équilibre $x = \pm\sqrt{\lambda}$ et $x = 0$

$$f_x(\pm\sqrt{\lambda}, \lambda) = -2\lambda < 0, f_x(0, \lambda) = \lambda > 0.$$

alors les points d'équilibres $x = \pm\sqrt{\lambda}$ sont stables et le point fixe $x = 0$ est instable.

- Si $\lambda < 0$, le point fixe $x = 0$ est stable.

Bifurcation de Hopf:

Considérons maintenant le système paramétré suivant :

$$\dot{l} = f(l, \nu), l(t) \in \mathbb{R}^n, \nu \text{ paramètre réel} \quad (18)$$

On suppose que $l = l^*(\nu)$ est un point fixe de (18) et que:

(H₄): la matrice Jacobienne $A(\nu) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial l_j}\right)_{l=l^*}$ possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées λ_1, λ_2 ,

$$\lambda_{1,2}(\nu) = \alpha(\nu) \pm iw(\nu)$$

telles que:

1/ pour une certaine valeur de $\nu = \nu_0$, $\alpha(\nu_0) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} \alpha(\nu)|_{\nu=\nu_0} \neq 0$

2/ Les $n - 2$ autres valeurs propres de $A(\nu_0)$ ont leur parties réelles strictement négatives.

Au point $l = l^*(\nu_0)$, on a donc une variété centre de dimension deux et une variété stable de dimension $n - 2$.

On cherche, par des transformations de coordonnées à ramener (18) à la forme (5).

On effectue tout d'abord dans (18) le changement de coordonnées $l = u + l^*, \nu = \nu_0 + \mu$.

et ceci pour ramener le point fixe à l'origine et la valeur ν_0 à 0, alors (18) s'écrit sous la forme

$$\dot{u} = A(\mu)u + \hat{F}(u, \mu) \quad (19)$$

où $\hat{F}(u, \mu)$ est le terme non linéaire.

Soit $v_1(\mu)$ (resp $v_2(\mu) = \bar{v}_1(\mu)$) le vecteur propre de $A(\mu)$ correspondant à la valeur propre $\lambda_1(\mu) = \alpha(\mu) + iw(\mu)$ (resp $\lambda_2(\mu) = \alpha(\mu) - iw(\mu)$) considérons la base suivante $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où $e_1 = \text{Re } v_1, e_2 = \text{Im } v_2$ et $\{e_3, \dots, e_n\}$ est une base réelle de l'union des espaces propres associés à $\lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Soit T la matrice de passage de la base initiale à la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

On pose $u = Tx$, on remplaçant dans (19), on obtient:

$$\dot{x} = A'(\mu)x + F(x, \mu) \quad (20)$$

avec:

$$A'(\mu) = T^{-1}A(\mu)T = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & -w(\mu) & 0 \\ w(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & B(\mu) \end{bmatrix}$$

où $B(\mu)$ est une matrice $(n-2) \times (n-2)$ et $F(x, \mu) = T^{-1}\hat{F}(Tx, \mu)$.

On pose $z = x_1 + ix_2, y = (x_3, x_4, \dots, x_n)^T$.

(20) s'écrit alors:

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda(\mu)z + G(z, \bar{z}, y, \mu). & (a) \\ \dot{y} = B(\mu)y + H(z, \bar{z}, y, \mu). & (b) \end{cases} \quad (21)$$

avec:

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + iw(\mu), G(z, \bar{z}, y, \mu) = F^1(x_1, x_2, y, \mu) + iF^2(x_1, x_2, y, \mu) \text{ et } H(z, \bar{z}, y, \mu) = (F^3(x_1, x_2, y, \mu) \cdots F^n(x_1, x_2, y, \mu))^T$$

soit $y = w(z, \bar{z})$ l'équation de la variété centre:

L'étape suivante consiste à transformer (21-a) en:

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + c_1(\mu)\bar{\xi}\xi^2 + \dots + c_k(\mu)\bar{\xi}^k\xi^{k+1} + \dots, \text{ où } c_k(\mu) \in \mathbb{C} \quad (22)$$

et ensuite par une transformation du type $x = \xi + \chi(\xi, \bar{\xi})$, l'équation (22) s'écrit en coordonnées polaires $\xi = re^{i\theta}$

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha(\mu) + a_1r^2 + \dots) \\ \dot{\theta} = w(\mu) + b_1r^2 + \dots \end{cases} \quad (23)$$

Où $a_i = \text{Re } c_i, b_i = \text{Im } c_i$, en première approximation on a $w(\mu) = w(0) + \dots$ et $\alpha(\mu) = \alpha'(0)\mu + \dots$
 $r = cst$ si $\alpha'(0)\mu + a_1r^2 = 0$ et on a alors le théorème suivant:

Théorème 0.7 [1]

Si les hypothèses (H_4) sont satisfaites et si $a_1 \neq 0$, $\frac{\alpha'(0)\mu}{a_1} < 0$, alors $(l^*(\nu_0), \nu_0)$ est un point de bifurcation de l'état d'équilibre $l^*(\nu_0)$ vers un cycle limite de rayon

$$r = \sqrt{\frac{-\alpha'(0)\mu}{a_1}} \text{ avec } \alpha'(0) = \frac{d\alpha(0)}{d\mu} \quad (24)$$

et de période $T = \frac{2\pi}{w_0}$ avec $w_0 = w(0)$.

Commentaire:

On pose $\delta = \frac{-a_1}{\alpha'(0)}$, (24) montre que les orbites périodiques apparaissent du côté $\mu < 0$ si $\delta < 0$ ou du côté $\mu > 0$ si $\delta > 0$.

Si $a_1 = 0$, le développement d'ordre 1 de (23) donne:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{w_0} (\alpha'(0)\mu + a_1 r^2 +)$$

On a quatre cas possibles :

- a) $\alpha'(\nu_0) > 0$ et $a_1 > 0$, dans ce cas l'origine est un point d'équilibre instable si $\mu > 0$ et est un point d'équilibre asymptotiquement stable si $\mu < 0$ avec une orbite périodique instable si $\mu < 0$ (voir figure 12-a)
- b) $\alpha'(\nu_0) > 0$ et $a_1 < 0$, dans ce cas l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement instable si $\mu < 0$ et est un point d'équilibre instable si $\mu > 0$ avec une orbite périodique asymptotiquement stable si $\mu > 0$; voir figure (12-b).
- c) $\alpha'(\nu_0) < 0$ et $a_1 > 0$, dans ce cas l'origine est un point d'équilibre instable si $\mu < 0$ et est un point d'équilibre asymptotiquement stable si $\mu > 0$ avec une orbite périodique instable si $\mu > 0$; voir figure (12-c).
- d) $\alpha'(\nu_0) < 0$ et $a_1 < 0$, dans ce cas l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable si $\mu > 0$ et est un point d'équilibre instable si $\mu < 0$ avec une orbite périodique asymptotiquement

stable si $\mu < 0$); voir figure (12-d).

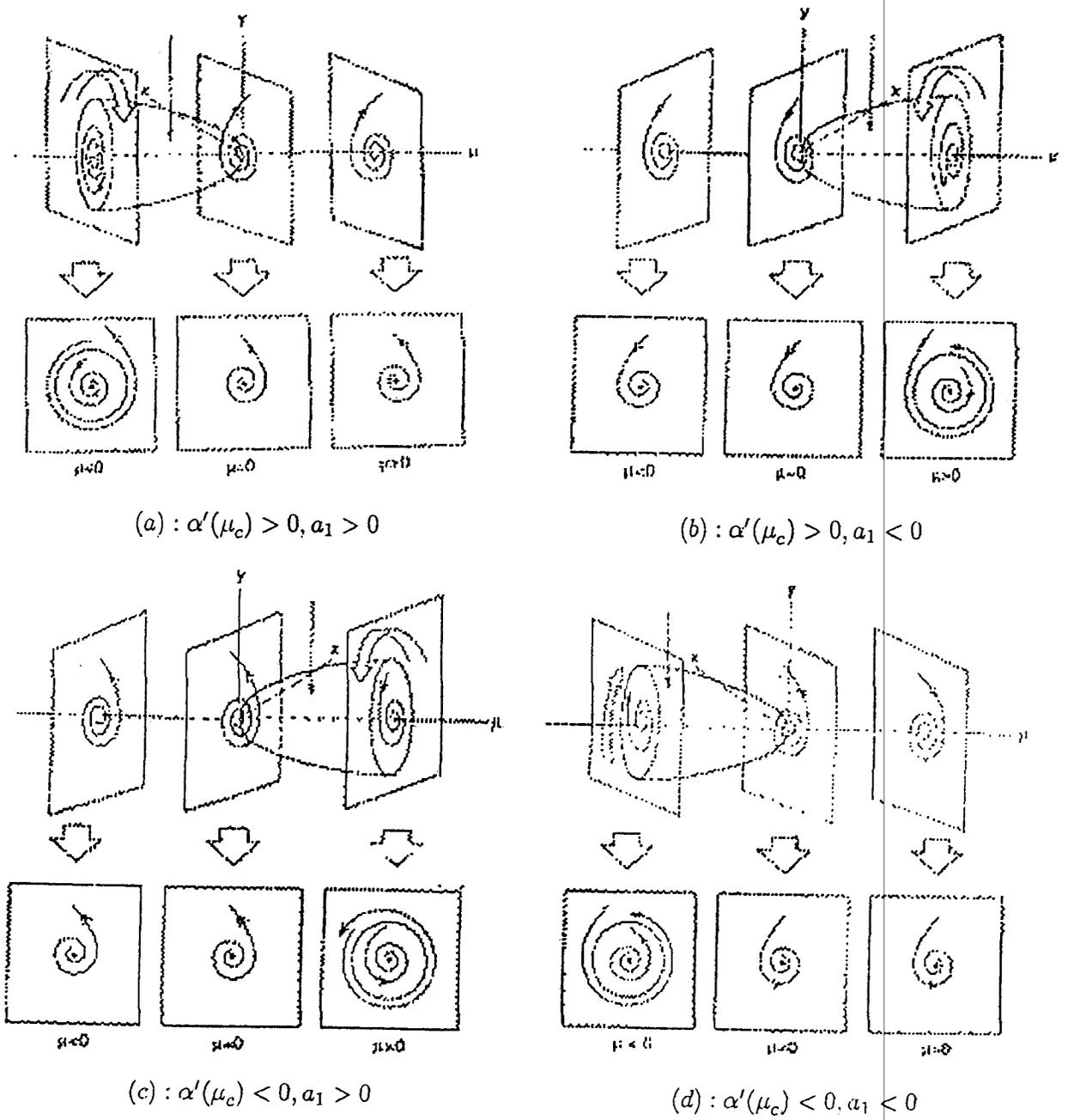


Figure 12: diagrammes de bifurcation de Hopf

0.3.2 Bifurcation pour les applications

Considérons l'application:

$$v \mapsto g(v, \lambda), \quad v(t) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^n \quad (25)$$

avec $g \in C^r (r \geq 5)$, on suppose $(v, \lambda) = (v_0, \lambda_0)$ un point fixe de (25) c'est à dire $g(v_0, \lambda_0) = 0$.

Soit l'application du linéarisé associé:

$$\xi \mapsto D_v g(v_0, \lambda_0) \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

On suppose que (v_0, λ_0) est non hyperbolique alors on a 3 cas à étudier:

- $D_v g(v_0, \lambda_0)$ admet une seule valeur propre égale à 1.
- $D_v g(v_0, \lambda_0)$ admet une seule valeur propre égale à -1.
- $D_v g(v_0, \lambda_0)$ admet deux valeurs propres complexes conjugués de module égale à 1.

De même que pour les champs de vecteurs continus on définit la variété centre associée à (25) et dans ce cas on considère l'application suivante:

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad \text{avec } x(t) \in \mathbb{R}, \mu = \lambda - \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad (26)$$

Le cas 1:(une valeur propre égale à 1)

Le système (26) vérifie:

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$$

et 3 types de bifurcation peuvent se produire:

bifurcation noeud-col: Une bifurcation noeud-col au point $(x, \mu) = (0, 0)$ correspond aux conditions:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

L'équation générique de la bifurcation noeud-col est donnée par:

$$x \mapsto f(x, \mu) = x + \mu \mp x^2$$

On a :

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \pm 2x \big|_{(0,0)} = 1, \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \pm 2 \neq 0.$$

bifurcation transcritique: Une bifurcation transcritique au point $(x, \mu) = (0, 0)$ correspond aux conditions:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

et son équation générique est donnée par:

$$x \mapsto f(x, \mu) = x + \mu x \pm x^2$$

On a:

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \pm 2x + \mu \big|_{(0,0)} = 1, \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \pm 2 \neq 0.$$

bifurcation fourche: Une bifurcation fourche correspond aux conditions suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$$

et son équation générique est donnée par :

$$x \mapsto f(x) = x + \mu x \pm x^3$$

On a :

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \pm 3x + \mu \big|_{(0,0)} = 1, \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6x \big|_{(0,0)} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 6 \neq 0.$$

Le cas 2: (une valeur propre égale à -1)

Le système (26) vérifie :

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$$

et en ajoutant les conditions suivantes:

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \frac{\partial f^2}{\partial \mu}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(0,0) \neq 0.$$

La bifurcation apparaît, elle est appelée bifurcation flip ou bifurcation de doublement de période.

On considère l'application

$$x \mapsto f(x, \mu) = -x + x^3 - \mu x$$

On a :

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \pm 3x^2 + \mu \Big|_{(0,0)} = -1$$

f a deux courbes de point fixe $x = 0$ et $x^2 = 2 + \mu$ tq

$$x = 0 \text{ est } \begin{cases} \text{instable} & \text{si } \mu \leq -2 \\ \text{stable} & \text{si } -2 < \mu < 0 \\ \text{instable} & \text{si } \mu \geq -2 \end{cases}$$

et :

$$x^2 = 2 + \mu \text{ est } \begin{cases} \text{instable} & \text{si } \mu \geq -2 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } \mu < -2 \end{cases}$$

On considère la deuxième itération de f , alors on a:

$$x \mapsto f^2(x, \mu) = x + \mu(2 + \mu)x - 2x^3 + o(4)$$

On a :

$$f^2(0,0) = 0, \frac{\partial f^2}{\partial x}(0,0) = 1, \frac{\partial f^2}{\partial \mu}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(0,0) = -12., \frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 2$$

Donc le point fixe $(0,0)$ est un point de bifurcation fourche pour f^2 et une bifurcation de doublement de période pour f .

Le cas 3: (deux valeurs propres conjuguées de module 1)

Considérons l'application :

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}$$

telle que :

$$f(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ a deux valeurs propres conjuguées } \lambda(0), \bar{\lambda}(0) \text{ avec } |\lambda(0)| = 1;$$

$$\lambda^n(0) \neq 1, n = 1, 2, 3, 4$$

La bifurcation dans ce cas est appelée bifurcation de Naimark-saker (ou bifurcation de Hopf pour les applications) et elle est donnée par sa forme normale:

$$z \mapsto \lambda(\mu)z + c(\mu)z^2\bar{z} + o(4), \quad z \in \mathbb{C} \quad (27)$$

En passant aux coordonnées polaires c'est à dire $z = re^{2\pi i\theta}$, (27) s'écrit

$$r \mapsto |\lambda(\mu)| (r + \operatorname{Re}(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)})r^3 + o(r^4)) \quad (28)$$

$$\theta \mapsto \theta + \phi(\mu) + \frac{1}{2\pi} (\operatorname{Im}(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}))r^2 + o(r^3)$$

avec :

$$\phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{w(\mu)}{\alpha(\mu)}$$

et

$$c(\mu) = \alpha(\mu) + iw(\mu)$$

et en développant les coefficients de (28) autour de $\mu = 0$, on obtient:

$$r \mapsto (1 + \frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)| \Big|_{\mu=0} \mu) r + \operatorname{Re}(\frac{c(0)}{\lambda(0)}) r^3 + o(\mu^2 r, \mu r^3, r^4)$$

$$\theta \mapsto \theta + \phi(0) + \frac{d}{d\mu} \phi(\mu) \Big|_{\mu=0} \mu + \frac{1}{2\pi} (\operatorname{Im}(\frac{c(0)}{\lambda(0)})) r^2 + o(\mu^2, r^2 \mu, r^3)$$

$$(|\lambda(0)| = 1, \phi(0) \neq 0)$$

pour simplifier on note : $d = \frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)| \Big|_{\mu=0}$, $a = \operatorname{Re}\left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right)$, $\phi_0 = \phi(0)$, $\phi_1 = \frac{d}{d\mu} \phi(\mu) \Big|_{\mu=0}$,
 $b = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \frac{c(0)}{\lambda(0)}$ et on trouve :

$$\begin{aligned} r &\mapsto r + (d\mu + ar^2)r + o(\mu^2 r, \mu r^3, r^4) \\ \theta &\mapsto \theta + \phi_0 + \phi_1 \mu + br^2 + o(\mu^2, r^2 \mu, r^3) \end{aligned}$$

La dynamique pour r et μ suffisamment petit devient approximativement:

$$\begin{aligned} r &\mapsto r + (d\mu + ar^2)r \\ \theta &\mapsto \theta + \phi_0 + \phi_1 \mu + br^2 \end{aligned} \tag{29}$$

$r = 0$ est un point fixe pour (29) et il est :

- asymptotiquement stable si $d\mu < 0$.
- instable si $d\mu > 0$.
- instable si $\mu = 0, a > 0$
- asymptotiquement stable si $\mu = 0, a < 0$.

Lemme 0.1 .

$\left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 / r = \sqrt{\frac{-\mu d}{a}} \right\}$ est un cercle invariant par le système dynamique (29).

La stabilité du cercle est déterminée par le signe de a (c'est un nouveau type de stabilité qui s'appelle la stabilité des ensembles invariants).

Lemme 0.2 .

Le cercle invariante est asymptotiquement stable pour $a < 0$ et instable pour $a > 0$.

on a alors 4 possibilité pour un cercle invariant.

- **Cas 1:** $d > 0; a > 0$, alors dans ce cas l'origine est un point fixe instable pour $\mu > 0$, et asymptotiquement stable pour $\mu < 0$ avec un cercle invariante instable pour $\mu < 0$ (voir figure 13.a).

- **Cas 2:** $d > 0$; $a < 0$: l'origine est un point fixe instable pour $\mu > 0$; et asymptotiquement stable pour $\mu < 0$ avec un cercle invariante stable pour $\mu > 0$ (voir figure 13.b).
- **Cas 3:** $d < 0$; $a > 0$, alors dans ce cas l'origine est un point fixe asymptotiquement stable pour $\mu > 0$, et instable pour $\mu < 0$ avec un cercle invariante instable pour $\mu > 0$ (voir figure 13.c).

Cas 4: $d < 0$; $a < 0$, alors dans ce cas l'origine est asymptotiquement stable pour $\mu > 0$, et instable pour $\mu < 0$ avec un cercle invariante asymptotiquement stable pour $\mu < 0$ (voir figure

13.d).

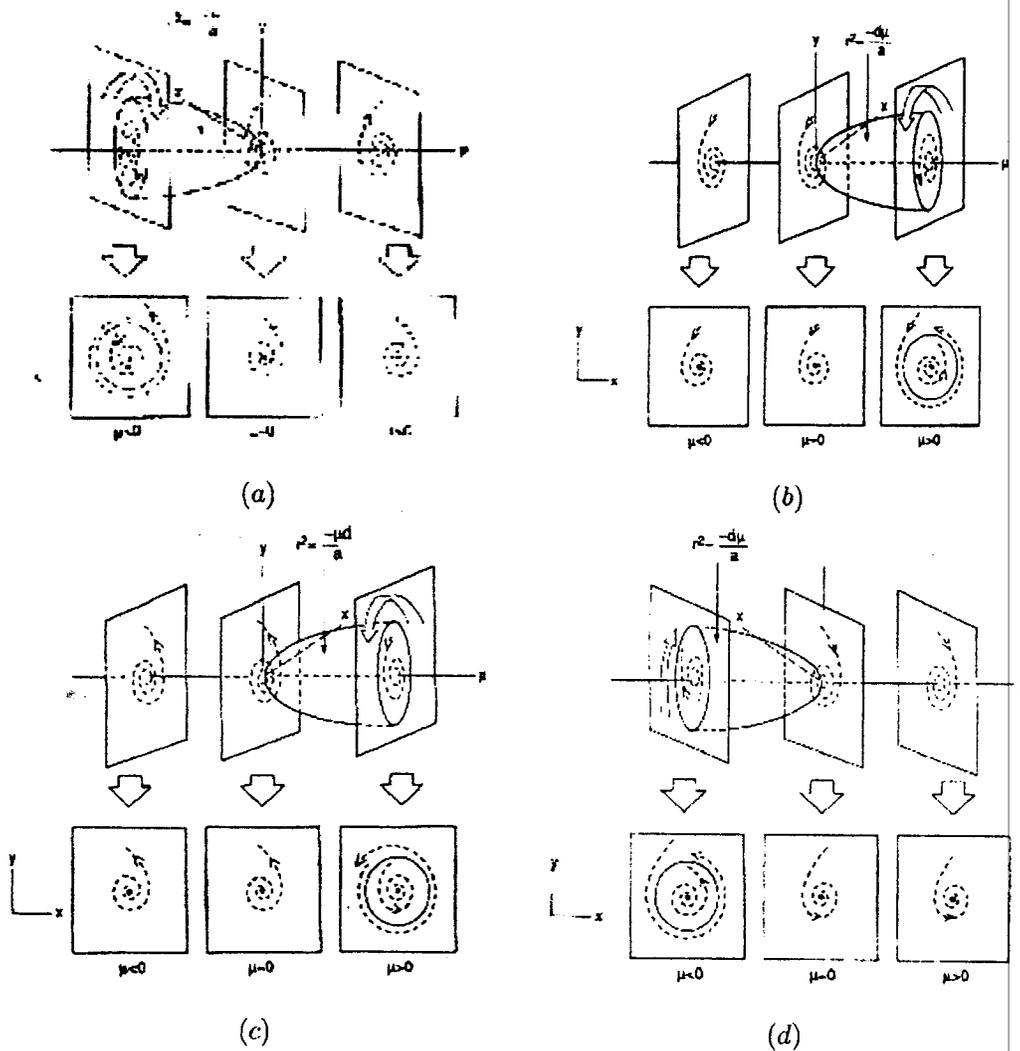


Figure 13

Remarque 0.1 On remarque que les bifurcations de doublement de période et celle de Naimark-saker sont spécifiques au cas discret.

Chapitre 1

L'application de Poincaré associée aux systèmes différentiels continus:

Henri-Poincaré (1854-1912) est le premier mathématicien qui a utilisé l'idée de transporter l'étude d'un système dynamique en temps continu à un système dynamique associé au temps discret et ceci en étudiant le problème des trois corps en mécanique [1].

La construction de l'application de Poincaré permet en particulier l'élimination d'une variable du système considéré, d'autre part l'étude de la stabilité orbitale se ramène à l'étude de la stabilité des points fixes de l'application de Poincaré correspondante. Il n'existe pas de méthode générale précise pour construire l'application de Poincaré associée à une certaine équation différentielle car cette construction nécessite quelques propriétés sur la structure géométrique du portrait de phase du système [13], [16].

Il existe cependant trois cas pour les quels une construction spécifique de l'application de Poincaré est possible:

1. Construction au voisinage d'une orbite périodique.
2. Construction lorsque l'espace de phase du système est périodique.
3. Construction au voisinage des orbites hétéroclines et homoclines.

1.1 Construction de l'application de Poincaré:

1.1.1 L'application de Poincaré associée à une orbite périodique:

On considère le système autonome suivant:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , $r \geq 1$, sur $U \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $\phi(t, \cdot)$ le flot associé à (1.1)

On suppose que (1.1) admet une solution périodique de période T notée $\phi(t, x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ c'est à dire tq:

$$\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0)$$

Définition 1.1 [1]

On appelle section de Poincaré un **hyperplan** Σ de dimension $(n-1)$, transverse au champ de vecteurs f en x_0 i.e $f(x_0).n(x_0) \neq 0$ où "." désigne le produit scalaire et $n(x_0)$ la normale à Σ en x_0 .

Soit x un point du voisinage V de x_0 , l'application de Poincaré (appelée aussi l'application de premier retour) est alors définie par:

$$\begin{aligned} P & : V \rightarrow \Sigma \\ x & \mapsto \phi(\tau(x), x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $\tau = \tau(x)$ est le temps mis par la trajectoire ayant pour point initial x , pour retourner à Σ pour la première fois, le temps $\tau(x)$ doit être proche de T et par construction on a $\tau(x_0) = T$

et $P(x_0) = x_0$ (Point fixe de P) (voir figure 14)

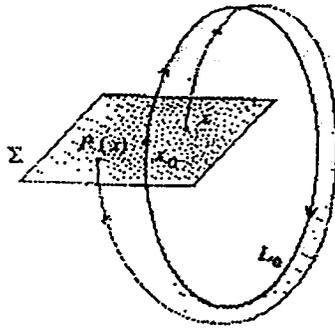


Figure 14: L'application de premier retour

La stabilité du point fixe x_0 est décrite par la matrice Jacobiéenne $J = DP(x_0)$ en utilisant le résultat suivant:

Théorème 1.1 [1].

- Si toutes les valeurs propres de J ont leur module < 1 ; alors le point fixe x_0 de (1.2) est asymptotiquement stable et la solution périodique de (1.1) est aussi stable.
- Si une valeur propre de J a son module > 1 ; alors le point fixe x_0 de (1.2) est instable et la solution périodique de (1.1) est aussi instable.
- Si J n'a pas de valeurs propres de module > 1 mais au moins une des valeurs propre de J a un module $= 1$; alors le point x_0 est un point stable ou instable et la solution périodique de (1.1) est aussi stable ou instable.

Exemple 1.1 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu x - \mu x \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x + \mu y - \mu y \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (1.3)$$

En passant aux coordonnées polaires, le système (1.3) devient:

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r(1 - r) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

la solution de (1.4) est :

$$\phi_t(r_0, \theta_0) = \left(\frac{r_0}{r_0 - (r_0 - 1)e^{-\mu t}}, t + \theta_0 \right)$$

le cercle $r = 1$ est un cycle limite de période 2π .

Comme section de Poincaré, on prend:

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0; x > 0\} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 / \theta = 0\}$$

avec :

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

L'application de Poincaré est alors définie par:

$$P(x) = \frac{x}{x - (x - 1)e^{-2\pi\mu}}$$

La linéarisation de P au point $x_0 = 1$ est :

$$\frac{dP}{dx}|_{x=1} = e^{-2\pi\mu} \begin{cases} < 1 \text{ pour } \mu > 0 \\ > 1 \text{ pour } \mu < 0 \\ = 1 \text{ pour } \mu = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

- Si $\mu > 0$, le point fixe x_0 est stable (donc la solution périodique de (1.4) est aussi stable).
- Si $\mu < 0$, le point fixe x_0 est instable (donc la solution périodique de (1.4) est aussi instable).

- Si $\mu = 0$, le point fixe x_0 est stable (la solution de (1.4) est un cercle)

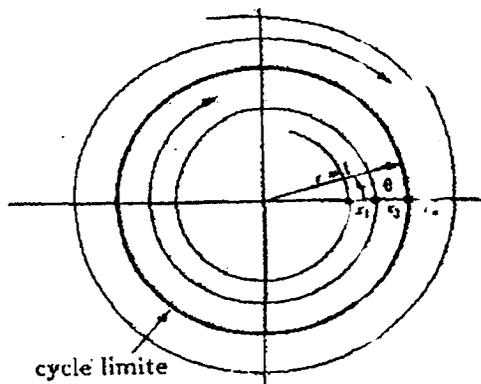


Figure 15: Stabilité du cycle limite

1.1.2 L'application de Poincaré associée à un système dynamique non autonome ayant un portrait de phase périodique:

On considère le système dynamique suivant:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.5)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, f est une fonction périodique par rapport à t c'est-à-dire:

$$f(x, t) = f(x, t + T) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$$

On écrit le système (1.5) sous la forme d'une équation autonome en dimension $n + 1$, et on définit la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, avec $t \rightarrow \theta(t) = \omega t \pmod{2\pi}$, où:

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

alors l'équation (1.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}, (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 \quad (1.6)$$

On note $\phi(t) = (x(t), \omega t + \theta_0 \pmod{2\pi})$ le flot associé à (1.6) et

$$\Sigma^{\bar{\theta}_0} = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1, \theta = \bar{\theta}_0 \in (0, 2\pi]\}.$$

Un vecteur unité normal de $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ dans $\mathbb{R}^n \times S^1$ est donné par $(0, 1)$; le produit scalaire $(f(x, \theta); \omega) \cdot (0, 1)$ est non nul, donc $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ est transverse avec le champ de vecteurs $(f(x, \theta); \omega)$ pour tout $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et on définit alors l'application de Poincaré de $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ par :

$$P_{\bar{\theta}_0} : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_0}$$

$$\left(x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{\omega}\right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{\omega}\right), \bar{\theta}_0 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_0 \right).$$

ou encore:

$$\left(x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta}{\omega}\right) \right) \rightarrow x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta + 2\pi}{\omega}\right).$$

Illustrons ceci par un exemple:

Exemple 1.2 On considère l'équation différentielle:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \cos \omega t \tag{1.7}$$

avec $\omega, \delta, \omega_0, \gamma$ sont des constantes, telle que $\delta > 0$.

- Résolution de l'équation sans second membre:

on a trois cas possibles suivant le signe de $\delta^2 - 4\omega_0^2$

1)

$$\delta^2 - 4\omega_0^2 > 0 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

avec :

$$r_{1,2} = \frac{-\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 - 4\omega_0^2}$$

2)

$$\delta^2 - 4\omega_0^2 = 0 \Rightarrow x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\frac{-\delta}{2} t}$$

3)

$$\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow x(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t)$$

avec :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$$

Dans les trois cas c_1 et c_2 sont des constantes et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

- Résolution de l'équation avec second membre:

La solution particulière x_p est donnée par:

$$x_p(t) = A \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

avec :

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2} \text{ et } B = \frac{\delta\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2}$$

Maintenant on passe à la construction de l'application de Poincaré; on considère par exemple le cas $(\delta^2 - 4\omega_0^2) < 0$ (les autres cas peuvent se traiter de manière similaire), l'équation (1.7) s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \delta y + \gamma \cos \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.8)$$

$\phi_t(x_0, y_0, \theta_0) = (x(t), y(t), \omega t + \theta)$ est le flot associé à (1.8) avec:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\frac{-\delta t}{2}} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t + A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ y(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

On pose $x(0) = x_0, y_0 = y(0)$, donc:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_0 - A \\ c_2 &= \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\delta}{2} x_0 + y_0 - \frac{\delta}{2} A - \omega B \right) \end{aligned}$$

On pose $\theta_0 = 0$ et $\bar{\theta}_0 = 0$ et :

$$\Sigma^0 = \Sigma = \{(x, y, \theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times S^1, \theta = 0 \in [0, 2\pi]\}$$

donc l'application de Poincaré est donnée par:

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}} \begin{pmatrix} c + \frac{\delta}{2\omega_1}s & \frac{1}{\omega_1}s \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_1}s & c - \frac{\delta}{2\omega_1}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}} [-AC + (-\frac{\delta}{2\omega_1}A - \frac{\omega}{\omega_1}B)S] + A \\ e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}} [-\omega BC + (\frac{\omega_0^2}{\omega_1}A + \frac{\delta\omega}{2\omega_1}B)S] + \omega B \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } c = \cos 2\pi \frac{\omega_1}{\omega}, s = \sin 2\pi \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Le point $(x, y) = (A, \omega B)$ est le point fixe de P.

La stabilité de ce point est déterminée par la matrice Jacobienne

$$DP(A, \omega B) = e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}} \begin{pmatrix} c + \frac{\delta}{2\omega_1}s & \frac{1}{\omega_1}s \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_1}s & c - \frac{\delta}{2\omega_1}s \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $DP(A, \omega B)$ sont:

$$\lambda_{1,2} = e^{\frac{-\delta\pi}{\omega} \pm i 2\pi \frac{\omega_1}{\omega}}$$

et donc le point fixe est asymptotiquement stable.

Cas particulier; Si $\omega_1 = \omega$; alors l'application de Poincaré s'écrit:

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(1 - e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}}) \\ \omega B(1 - e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}}) \end{pmatrix}$$

le point $(x, y) = (A, \omega B)$ reste toujours le point fixe de P, avec $\lambda = e^{\frac{-\delta\pi}{\omega}}$, donc $(A, \omega B)$ est asymptotiquement stable.

1.1.3 L'application de Poincaré associée à une orbite homocline:

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + f_1(x, y, \mu) \\ \dot{y} = \beta y + f_2(x, y, \mu) \end{cases} \quad (1.9)$$

$(x, y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, f_1, f_2 sont quadratiques en x et y et de classe C^r ($r \geq 2$), μ est un paramètre réel et tq les hypothèses suivantes soient vérifiées :

$H_1)$ $\alpha < 0, \beta > 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$

$H_2)$ pour $\mu = 0$; le système possède une orbite homocline reliant le point fixe hyperbolique $(x_0, y_0) = (0, 0)$ à lui même et l'orbite est brisée dans les deux régions associées à $\mu > 0$ et $\mu < 0$ d'une manière transverse avec les deux variétés stable et instable et qu'ils possèdent différentes orientations sur les deux régions ($\mu > 0$ et $\mu < 0$) et pour $\mu < 0$ la variété stable se place à l'intérieur du variété instable (voir figure 16.a) et pour $\mu > 0$ la variété stable se place à l'extérieur du variété instable (voir figure 16.c), et finalement pour $\mu = 0$ les deux variétés coïncident (voir figure 16.b).

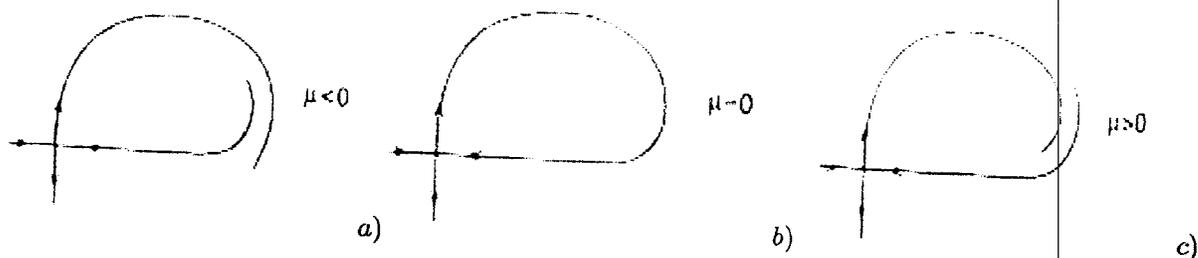


Figure 16

En fait; l'hypothèse $H_1)$ caractérise la nature des valeurs propres du flot linéarisé au point fixe et l'hypothèse $H_2)$ suppose l'existence d'une orbite homocline et décrit la nature de la dépendance de (1.9) par rapport au paramètre μ .

La question qui se pose maintenant est la suivante: quelle est la nature des orbites au voisinage d'une orbite homocline pour μ au voisinage de 0? pour répondre à cette question, il faut d'abord construire l'application de Poincaré autour de l'orbite homocline puis étudier la structure de l'orbite associée à cette application, ici la construction de l'application de Poincaré

est différente du 1^{er} et du 2^{ème} cas: c'est une composition de deux applications l'une P_0 construite au voisinage de 0, et l'autre P_1 construite en dehors du voisinage du point fixe et dans ce cas alors l'application de Poincaré P est définie par $P = P_1 \circ P_0$. La construction de P se fait en quatre étapes:

Etape 1: Le domaine de définition de l'application de Poincaré (choix des sections):

Pour P_0 , on considère la section:

$$\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon > 0, y > 0\}$$

et pour P_1 , on considère la section:

$$\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y = \varepsilon > 0\}$$

avec ε suffisamment petit (voir figure 17)

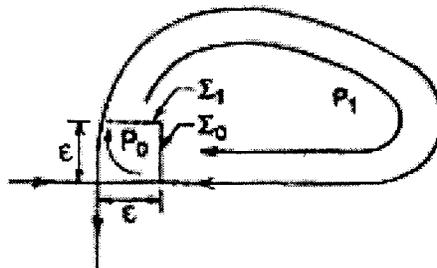


Figure 17: La construction de l'application de Poincaré $P = P_1 \circ P_0$

Etape 2: La construction de P_0 :

Pour calculer P_0 , on utilise le système linéarisé du système (1.9) autour du point (0,0) donné par:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = \beta y \end{cases} \quad (1.10)$$

le flot associé à (1.10) est alors donné par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\alpha t} \\ y(t) = y_0 e^{\beta t} \end{cases}$$

le temps T nécessaire pour déplacer le point (ε, y_0) de Σ_0 à Σ_1 est donné par la solution de l'équation:

$$\varepsilon = y_0 e^{\beta t}$$

ceci implique que $T = \frac{1}{\beta} \log \frac{\varepsilon}{y_0}$ et pour que T soit bien défini, il faut que $y_0 < \varepsilon$ et donc on considère l'application :

$$\begin{aligned} P_0 : \Sigma_0 &\rightarrow \Sigma_1 \\ (\varepsilon, y_0) &\mapsto \left(\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{y_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Etape 3: La construction de P_1 :

On prend U un ouvert de Σ_1 et P_1 est définie par :

$$P_1 : U \underset{\text{ouvert}}{\subset} \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$$

$$P_1(x, \varepsilon, \mu) = (P_{11}(x, \varepsilon, \mu), P_{12}(x, \varepsilon, \mu))$$

avec $P_1(0, \varepsilon, 0) = (\varepsilon, 0)$, P_{11}, P_{12} sont à déterminer.

Le développement de Taylor de P_1 autour $(0, \varepsilon, 0)$ à l'ordre 1 est donné par

$$P_1(x, \varepsilon, \mu) = (\varepsilon, ax + b\mu) + o(2)$$

où $o(2)$ représente la partie non linéaire en (x, μ, ε) d'ordre supérieure ou égale à 2, pour x, ε, μ suffisamment petits on peut négliger ce terme, et donc l'expression de P_1 devient:

$$P_1 : U \underset{\text{ouvert}}{\subset} \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$$

$$(x, \varepsilon) \mapsto (\varepsilon, ax + b\mu)$$

avec $a, b > 0$

Etape 4: L'application $P = P_1 \circ P_0$:

$$P = P_1 \circ P_0 : V \underset{\text{ouvert}}{\subset} \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$$

$$(\varepsilon, y_0) = (\varepsilon, \varepsilon a \left(\frac{\varepsilon}{y_0}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} + b\mu)$$

avec $V = (P_0)^{-1}(U)$ i.e $P(y, \mu) : y \rightarrow Ay^{\frac{\alpha}{|\beta|}} + b\mu$ avec $A = a\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{\beta}} > 0$.

En prenant U suffisamment petit, on aura $P^{-1}(U) \subset \Sigma_0$.

On pose $\delta = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$, comme $\alpha + \beta \neq 0$ par l'hypothèse $\delta \neq 1$.

Un point fixe de P vérifie $Ay^\delta + b\mu = y$, géométriquement ce point est l'intersection entre le graphe de $P(y, \mu)$ et la droite d'équation $y = P(y, \mu)$ avec μ fixé, alors on a deux cas distincts:

• 1^{er} cas:

$|\alpha| > |\beta|$, i.e $\delta > 1$,

On a $D_y P(0, 0) = 0$, le graphe de P pour $\mu = 0$, $\mu > 0$ et $\mu < 0$ (μ suffisamment très petit) est donné par la figure 18.

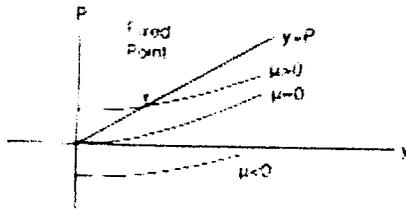


Figure 18 : Le graphe de P pour $\delta > 1$

on a : $D_y P < 1$, et donc le point fixe est stable.

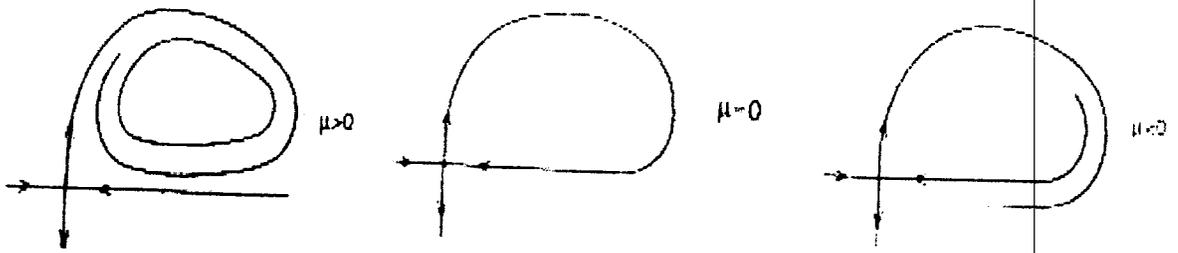


Figure 19 :Le portrait de phase du système (1.9) pour $\delta > 1$

• 2^{ème} cas:

$|\alpha| < |\beta|$, i.e $\delta < 1$,

Dans ce cas $D_y P(0, 0) = \infty$ (car $Ay \frac{\alpha}{|\beta|} + b\mu \rightarrow \infty$ lorsque $(y; \mu) \rightarrow (0, 0)$), le graphe de P pour $\mu = 0, \mu > 0$ et $\mu < 0$ est donné par la figure 20, et le point fixe est instable



Figure 20 :Le graphe de P pour $\delta < 1$

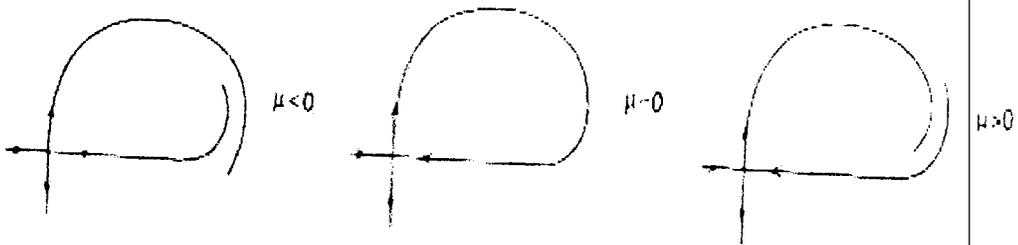


Figure 21 :Le portrait de phase du système (1.9) pour $\delta > 1$

1.2 Étude de la variation de la section de Poincaré:

On remarque de ce qui précède que la détermination de l'application de Poincaré dépend de la section de Poincaré choisie, analysons alors cet aspect et rappelons pour cela quelques notions

Définition 1.2 [13].

Soit f et g deux difféomorphismes de classe C^r , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit h un C^k difféomorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

f et g sont dite C^k conjugués ($k \leq r$), s'il existe un difféomorphisme de classe C^k , $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $g \circ h = h \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Si $k = 0$, f et g sont dite topologiquement conjugués.

proposition 1.1 [13]

Si f et g sont C^k conjugués, $k \geq 1$, et x_0 est un point fixe de f alors $Df(x_0)$ et $Dg(h(x_0))$ ont les même valeurs propres.

proposition 1.2 [13]

Si f et g sont C^k conjugués, alors h transforme les orbites de f en orbite de g .

Preuve: Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'orbite de f en x_0 est donnée par:

$$O(x_0) = \{\dots, f^{-n}(x_0), f^{-(n-1)}(x_0), \dots, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

$f = h^{-1} \circ g \circ h$. et par récurrence, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= \underbrace{(h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h)}_{n \text{ fois}}(x_0) \\ &= h^{-1} \circ g^n \circ h(x_0) \end{aligned}$$

et alors :

$$h \circ f^n(x_0) = g^n \circ h(x_0)$$

$f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h \circ f^{-n}(x_0) = g^{-n} \circ h(x_0).$$

Alors l'orbite de f en x_0 est transformée par h en g au point $h(x_0)$. ■

1.2.1 Variation de la section de Poincaré associée à une orbite périodique:

Soient x_0 et x_1 deux points de la solution périodique de l'équation (1.1) et Σ_0 et Σ_1 deux surfaces de dimension $(n-1)$ et $x_0 \in \Sigma_0$ et $x_1 \in \Sigma_1$ sont des points pour lesquels le champ de vecteurs f est transversal à Σ_0 et Σ_1 respectivement. On suppose qu'on a choisi les sections de Poincaré de tel sorte que Σ_1 est l'image de Σ_0 par un difféomorphisme h de classe C^r , $h : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$

(voir figure 22)

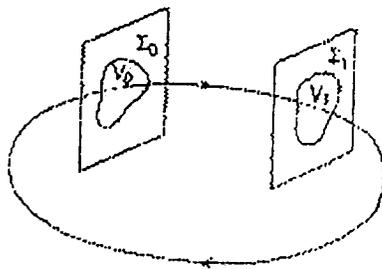


Figure 22

l'application de Poincaré correspondant à la section Σ_0 est donnée par:

$$P_0 : V_0 \rightarrow \Sigma_0$$

$$\bar{x}_0 \rightarrow \phi(\tau(\bar{x}_0), \bar{x}_0)$$

$$\bar{x}_0 \in V_0 \subset \Sigma_0,$$

et l'application de Poincaré correspondant à la section Σ_1 est donnée par:

$$P_1 : V_1 \rightarrow \Sigma_1$$

$$\bar{x}_1 \rightarrow \phi(\tau(\bar{x}_1), \bar{x}_1),$$

$$\bar{x}_1 \in V_1 \subset \Sigma_1$$

On a le résultat suivant reliant P_0 à P_1 .

proposition 1.3 [13]

P_0 et P_1 sont localement C^r conjuguées.

Preuve:

On a $h(\Sigma_0) = \Sigma_1$

$P_0(V_0) \subset \Sigma_0$ et $P_1(V_1) \subset \Sigma_1$.

et donc P_1 et P_0 sont localement conjuguées en choisissant Σ_1 tq $V_1 = h(V_0)$. ■

1.2.2 Variation de la section de Poincaré associée à un système périodique:

On considère l'application de Poincaré $P_{\bar{\theta}_0}$ définie sur la section $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ tq:

$$\Sigma^{\bar{\theta}_0} = \{(x, \theta) \in R^n \times S^1, \theta = \bar{\theta}_0 \in (0, 2\pi]\}$$

et on construit une autre application de Poincaré $P_{\bar{\theta}_1}$ définie sur la section $\Sigma^{\bar{\theta}_1}$ tq

$$\Sigma^{\bar{\theta}_1} = \{(x, \theta) \in R^n \times S^1, \theta = \bar{\theta}_1 \in (0, 2\pi]\}$$

On a alors le résultat suivant :

proposition 1.4 [13].

$P_{\bar{\theta}_1}$ et $P_{\bar{\theta}_0}$ sont C^r conjuguées.

Preuve: Soit $h : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$ un difféomorphisme de classe C^r qui transforme les points de $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ en les points sur $\Sigma^{\bar{\theta}_1}$, un point sur $\Sigma^{\bar{\theta}_1}$ à l'instant $t_0 = \frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w}$ atteint $\Sigma^{\bar{\theta}_1}$ en $t = \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0}{w}$.

Donc h est défini par:

$$h : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$$

$$\left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_1 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_1 \right)$$

On a :

$$h \circ P_{\bar{\theta}_0} : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$$

$$\left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_1 - \theta_0 + 2\pi}{w} \right), \bar{\theta}_1 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_1 \right)$$

et

$$P_{\bar{\theta}_1} \circ h : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$$

$$\left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_1 - \theta_0 + 2\pi}{w} \right), \bar{\theta}_1 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_1 \right)$$

et donc $P_{\bar{\theta}_1} \circ h = h \circ P_{\bar{\theta}_0}$. ■

1.2.3 Variation de la section de Poincaré associée à une orbite homocline:

On considère l'application de Poincaré P définie sur la section:

$$\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon > 0, y > 0\}$$

et on construit une autre application de Poincaré P^* définie sur la section

$$\Sigma_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon_* > 0, y > 0\}$$

De la même manière que pour les deux autres cas précédemment, on peut montrer le résultat suivant:

proposition 1.5 [13]

P et P^ sont C^r conjuguées.*

1.3 Quelques méthodes numériques pour déterminer l'application de Poincaré:

Le calcul analytique de l'application de Poincaré est souvent difficile et on a recours dans ce cas aux méthodes numériques.

1^{er} cas:

Considérons d'abord le cas simple où l'application de Poincaré est définie par

$$P(x_0) = x(x_0, t_0, t_0 + T)$$

où $x(x_0, t_0, t)$ désigne la solution de (1.1) qui passe par le point x_0 au temps $t = t_0$, les points $x_0, P(x_0), P^2(x_0), \dots$ correspondant aux intersections de la trajectoire $x(x_0, t_0, t)$ avec les temps $t = t_0, t_0 + T, t_0 + 2T$ respectivement (voir figure 23)

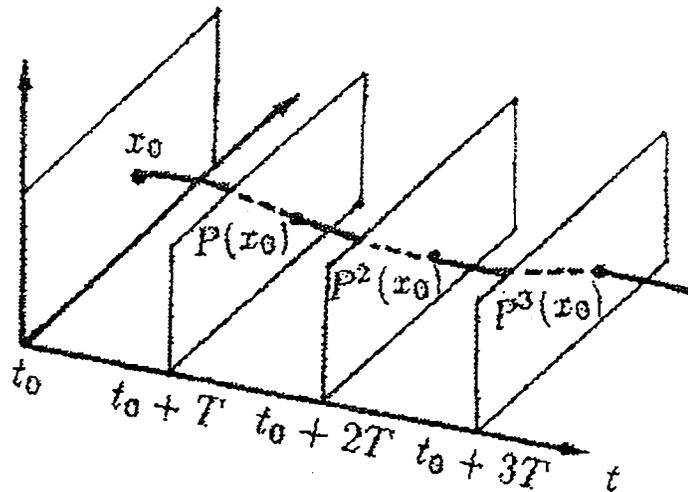


Figure 23

Ces points forment une suite d'images stroboscopiques de la solution à l'intervalle de temps régulier $\Delta t = T$. Dans ce cas il suffit de choisir le pas de temps d'intégration $h = \frac{T}{N_0}$, pour un certain entier N_0 et on retombe sur la section de Poincaré à tous les intervalles de temps $N_0 h$.

2^{ème} cas:

Si la section de Poincaré choisie Σ est définie par: $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) = 0\}$ où "." désigne le produit scalaire pour un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et telle que Σ soit transverse à l'orbite passant par x_0 , c'est-à-dire Σ est le plan orthogonal en x_0 à l'orbite passant par x_0 , alors on peut calculer l'application de Poincaré par l'algorithme suivant:

- On définit la fonction

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow (x - x_0).f(x_0)$$

Ainsi $x \in \Sigma \Leftrightarrow h(x) = 0$

- L'hyperplan Σ divise \mathbb{R}^n en deux parties:

$$\Sigma_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) > 0\}$$

et :

$$\Sigma_- = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) < 0\}$$

avec $f(x_0) \in \Sigma_+$

- A partir de x_0 , on calcule le flot $\phi_t(x)$ en utilisant un schéma numérique (par exemple, Runge-Kutta-Felkberg,...), ce qui produit une suite x_0, x_1, \dots, x_k , qui sont des approximations de $x(0), x(t_1), \dots, x(t_k)$, si on utilise un pas constant Δt , on obtient des approximations de $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(k\Delta t)$. A chaque pas de temps, on calcule:

$$h(x_i) = (x - x_i).f(x_0)$$

- On observe un premier changement de signe de + à - des valeurs de h , on continue jusqu'au changement de signe de - à +, supposons que ce changement de signe s'est produit entre $x_k = x(t_k)$ et $x_{k+1} = x(t_{k+1})$
- On détermine le temps \hat{t} entre t_k et t_{k+1} pour lequel $\hat{x} = x(\hat{t}) \in \Sigma$ (voir figure 24)

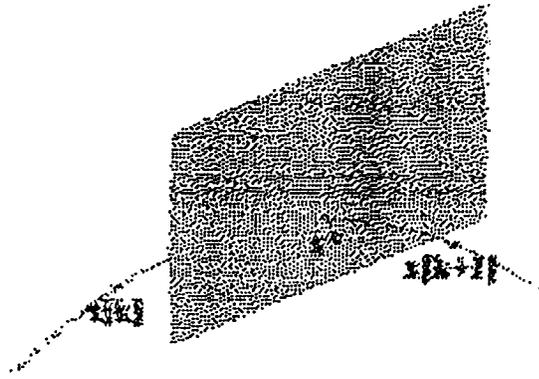


Figure 24

Voici deux méthodes numériques permettant de déduire ce résultat:

Première méthode: Interpolation linéaire

On peut utiliser une interpolation linéaire pour obtenir des approximations de \hat{x} et \hat{t} du type :

$$\hat{x} \simeq \frac{h(x_{k+1})}{h(x_{k+1}) - h(x_k)} \cdot x_k + \frac{h(x_k)}{h(x_k) - h(x_{k+1})} \cdot x_{k+1}$$

$$\hat{t} \simeq \frac{h(x_{k+1})}{h(x_{k+1}) - h(x_k)} \cdot t_k + \frac{h(x_k)}{h(x_k) - h(x_{k+1})} \cdot t_{k+1}$$

et si x_k et x_{k+1} sont assez près, l'un de l'autre ces approximations convergent rapidement.

Deuxième méthode: Méthode de Henon

On introduit la variable $u = h(x)$. Ainsi si $x(t)$ est une solution de (1,1) on a : $u(t) = h(x(t))$

et donc :

$$\begin{aligned} u'(t) &= Dh(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= Dh(x(t)) \cdot f(x(t)) \\ &= f(x(t)) \cdot f(x_0) \end{aligned}$$

Considérons le nouveau système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{du}{dt} = f(x) \cdot f(x_0) \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Le développement de Taylor de u au voisinage de 0 à l'ordre 1 est donné par:

$$u = u_0 + u_1 t + o(t^2) \quad \text{avec} \quad u_0 = u(0), u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}(0) \neq 0$$

Ceci implique que $t \simeq \frac{u - u_0}{u_1}$ et donc $\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{u_1}$

On suppose que dans le domaine considéré on ait: $f(x) \cdot f(x_0) \neq 0$, alors la dernière équation du système (1.10) permet d'inverser et d'écrire le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{du} = \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{f(x) \cdot f(x_0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{du} = \frac{dx_n}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{f_n(x_1, \dots, x_n)}{f(x) \cdot f(x_0)} \\ \frac{dt}{du} = \frac{1}{f(x) \cdot f(x_0)} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Soit x_k et x_{k+1} les deux points obtenus pour lesquels h passe de signe - à signe +.

Puisque l'hyperplan Σ correspond à l'équation $u = 0$ (car $u = h(x)$). On intègre numériquement (1.11) en partant de $u_0 = h(x_{k+1})$ en prenant un pas de temps $\Delta t = -u_0$. Ainsi; en un seul pas de temps, on arrive à $u = 0$ et \hat{x} (on pourrait aussi utiliser un pas de temps $\Delta t = \frac{-u_0}{N}$ et faire N pas de temps pour arriver à $u = 0$ et \hat{x}).

Remarque 1.1 On peut choisir d'une autre façon l'hyperplan Σ transverse à l'orbite passant par x_0 , par exemple on pourrait prendre $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot \xi = 0\}$ où ξ est un vecteur qui

n'est pas orthogonal à $f(x_0)$ (ce qui assure que l'hyperplan Σ est transverse à l'orbite passant par x_0 , on prend alors la fonction h définie par $h(x) = (x - x_0) \cdot \xi$ et on procède de la même manière. Dans la méthode de Henon on aurait alors:

$$\dot{u} = Dh(x) \cdot \dot{x} = Dh(x) \cdot f(x) = \xi \cdot f(x)$$

et on modifie le système (1.11) en conséquence.

1.4 Localisation numérique d'une solution périodique à partir de l'application de Poincaré:

1.4.1 Méthode de Tir :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot du système (1.1) et $P(x) = \varphi(x, \tau(x))$ une application de Poincaré par rapport à un hyperplan Σ . Considérons le système d'équations:

$$H \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) - x \\ t - \tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Soit (\hat{x}, T) une solution de (1.12), i.e: $\varphi_\tau(\hat{x}) = \hat{x}$ et $T = \tau(\hat{x})$, alors \hat{x} est un point d'une solution de période T , il suffit alors d'intégrer numériquement (1.1) à partir de \hat{x} pour obtenir l'orbite de cette solution périodique.

Pour résoudre (1.12) on peut utiliser la méthode de Newton:

- (x_0, t_0) donné.
- Pour k de 1 à k_{\max}
- Calcul de la correction $(\delta x_k, \delta t_k)$ et résolution de

$$DH(x_{k-1}, t_{k-1}) \begin{pmatrix} \delta x_k \\ \delta t_k \end{pmatrix} = -H \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ t_{k-1} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

- Correction

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + \delta x_k \\ t_k = t_{k-1} + \delta t_k \end{cases}$$

- Critère d'arrêt.

Remarque 1.2 Si (t_0, x_0) est assez près d'une solution (\hat{x}, T) , les (x_k, t_k) convergent vers cette solution, mais en général il est difficile de calculer les coefficients de la matrice $(n+1) \times (n+1)DH(x, y)$,

En effet, on a :

$$DH(x, t) = \begin{pmatrix} D_x \varphi(x, t) - I & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \\ -D_x \tau(x) & 1 \end{pmatrix}$$

et le calcul du terme $D_x \tau(x)$ pose problème, les autres termes $D_x \varphi(x, t)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$ peuvent s'obtenir (comme on le verra, par intégration d'un système approprié) alors au lieu de résoudre (1.13), on procède comme suit pour obtenir une correction $(\delta x_k, \delta t_k)$ le système (1.13) s'écrit :

$$\begin{cases} D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta x_k - \delta x_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta t_k = x_{k-1} - \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ -D_x \tau(x_{k-1}) \delta x_k + \delta t_k = \tau(x_{k-1}) - t_{k-1} \end{cases} \quad (1.14)$$

On choisit alors pour simplifier de remplacer la deuxième équation de (1.14) par $f(x_{k-1}) \cdot \delta x_k = 0$ c'est-à-dire on prend une correction δx_k orthogonal en x_{k-1} à l'orbite passant par x_{k-1} (voir figure 25)

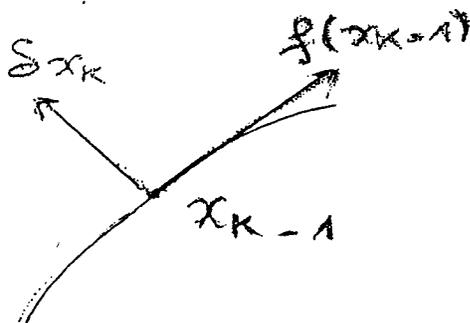


Figure 25

Ainsi plutôt que de résoudre (1.13), on résoud

$$\begin{cases} D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta x_k - \delta x_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta t_k = x_{k-1} - \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ f(x_{k-1}) \cdot \delta x_k = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Donc h est défini par:

$$h : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$$

$$\left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_1 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_1 \right)$$

On a :

$$h \circ P_{\bar{\theta}_0} : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$$

$$\left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_1 - \theta_0 + 2\pi}{w} \right), \bar{\theta}_1 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_1 \right)$$

et

$$P_{\bar{\theta}_1} \circ h : \Sigma^{\bar{\theta}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_1}$$

$$\left(x \left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{w} \right), \bar{\theta}_0 \right) \rightarrow \left(x \left(\frac{\bar{\theta}_1 - \theta_0 + 2\pi}{w} \right), \bar{\theta}_1 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_1 \right)$$

et donc $P_{\bar{\theta}_1} \circ h = h \circ P_{\bar{\theta}_0}$. ■

1.2.3 Variation de la section de Poincaré associée à une orbite homocline:

On considère l'application de Poincaré P définie sur la section:

$$\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon > 0, y > 0\}$$

et on construit une autre application de Poincaré P^* définie sur la section

$$\Sigma_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon_* > 0, y > 0\}$$

De la même manière que pour les deux autres cas précédemment, on peut montrer le résultat suivant:

proposition 1.5 [13]

P et P^* sont C^r conjuguées.

1.3 Quelques méthodes numériques pour déterminer l'application de Poincaré:

Le calcul analytique de l'application de Poincaré est souvent difficile et on a recours dans ce cas aux méthodes numériques.

1^{er} cas:

Considérons d'abord le cas simple où l'application de Poincaré est définie par

$$P(x_0) = x(x_0, t_0, t_0 + T)$$

où $x(x_0, t_0, t)$ désigne la solution de (1.1) qui passe par le point x_0 au temps $t = t_0$, les points $x_0, P(x_0), P^2(x_0), \dots$ correspondant aux intersections de la trajectoire $x(x_0, t_0, t)$ avec les temps $t = t_0, t_0 + T, t_0 + 2T$ respectivement (voir figure 23)

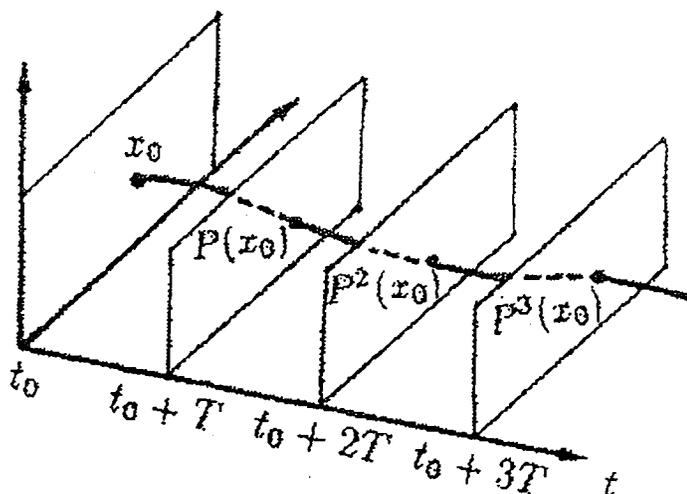


Figure 23

Ces points forment une suite d'images stroboscopiques de la solution à l'intervalle de temps régulier $\Delta t = T$. Dans ce cas il suffit de choisir le pas de temps d'intégration $h = \frac{T}{N_0}$, pour un certain entier N_0 et on retombe sur la section de Poincaré à tous les intervalles de temps $N_0 h$.

2^{ème} cas:

Si la section de Poincaré choisie Σ est définie par: $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) = 0\}$ où " \cdot " désigne le produit scalaire pour un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et telle que Σ soit transverse à l'orbite passant par x_0 , c'est-à-dire Σ est le plan orthogonal en x_0 à l'orbite passant par x_0 , alors on peut calculer l'application de Poincaré par l'algorithme suivant:

- On définit la fonction

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow (x - x_0).f(x_0)$$

Ainsi $x \in \Sigma \Leftrightarrow h(x) = 0$

- L'hyperplan Σ divise \mathbb{R}^n en deux parties:

$$\Sigma_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) > 0\}$$

et :

$$\Sigma_- = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) < 0\}$$

avec $f(x_0) \in \Sigma_+$

- A partir de x_0 , on calcule le flot $\phi_t(x)$ en utilisant un schéma numérique (par exemple, Runge-Kutta-Felkberg,...), ce qui produit une suite x_0, x_1, \dots, x_k , qui sont des approximations de $x(0), x(t_1), \dots, x(t_k)$, si on utilise un pas constant Δt , on obtient des approximations de $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(k\Delta t)$. A chaque pas de temps, on calcule:

$$h(x_i) = (x - x_i).f(x_0)$$

- On observe un premier changement de signe de $+$ à $-$ des valeurs de h , on continue jusqu'au changement de signe de $-$ à $+$, supposons que ce changement de signe s'est produit entre $x_k = x(t_k)$ et $x_{k+1} = x(t_{k+1})$
- On détermine le temps \hat{t} entre t_k et t_{k+1} pour lequel $\hat{x} = x(\hat{t}) \in \Sigma$ (voir figure 24)

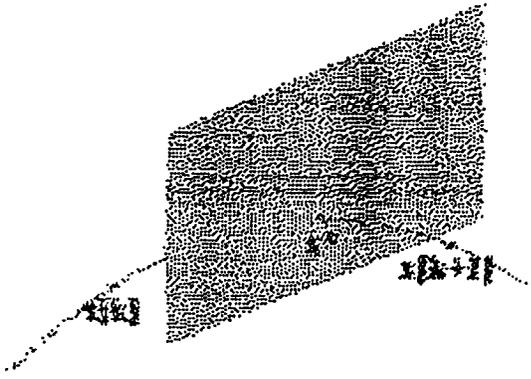


Figure 24

Voici deux méthodes numériques permettant de déduire ce résultat:

Première méthode: Interpolation linéaire

On peut utiliser une interpolation linéaire pour obtenir des approximations de \hat{x} et \hat{t} du type :

$$\hat{x} \simeq \frac{h(x_{k+1})}{h(x_{k+1}) - h(x_k)} x_k + \frac{h(x_k)}{h(x_k) - h(x_{k+1})} x_{k+1}$$

$$\hat{t} \simeq \frac{h(x_{k+1})}{h(x_{k+1}) - h(x_k)} t_k + \frac{h(x_k)}{h(x_k) - h(x_{k+1})} t_{k+1}$$

et si x_k et x_{k+1} sont assez près, l'un de l'autre ces approximations convergent rapidement.

Deuxième méthode: Méthode de Henon

On introduit la variable $u = h(x)$. Ainsi si $x(t)$ est une solution de (1,1) on a : $u(t) = h(x(t))$

et donc :

$$\begin{aligned} u'(t) &= Dh(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= Dh(x(t)) \cdot f(x(t)) \\ &= f(x(t)) \cdot f(x_0) \end{aligned}$$

Considérons le nouveau système:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{du}{dt} = f(x) \cdot f(x_0) \end{cases} \quad (1.10)$$

Le développement de Taylor de u au voisinage de 0 à l'ordre 1 est donné par:

$$u = u_0 + u_1 t + o(t^2) \quad \text{avec} \quad u_0 = u(0), u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}(0) \neq 0$$

Ceci implique que $t \simeq \frac{u - u_0}{u_1}$ et donc $\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{u_1}$

On suppose que dans le domaine considéré on ait: $f(x) \cdot f(x_0) \neq 0$, alors la dernière équation du système (1.10) permet d'inverser et d'écrire le nouveau système :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{du} = \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{f(x) \cdot f(x_0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{du} = \frac{dx_n}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{f_n(x_1, \dots, x_n)}{f(x) \cdot f(x_0)} \\ \frac{dt}{du} = \frac{1}{f(x) \cdot f(x_0)} \end{cases} \quad (1.11)$$

Soit x_k et x_{k+1} les deux points obtenus pour lesquels h passe de signe - à signe +.

Puisque l'hyperplan Σ correspond à l'équation $u = 0$ (car $u = h(x)$). On intègre numériquement (1.11) en partant de $u_0 = h(x_{k+1})$ en prenant un pas de temps $\Delta t = -u_0$. Ainsi; en un seul pas de temps, on arrive à $u = 0$ et \hat{x} (on pourrait aussi utiliser un pas de temps $\Delta t = \frac{-u_0}{N}$ et faire N pas de temps pour arriver à $u = 0$ et \hat{x}).

Remarque 1.1 On peut choisir d'une autre façon l'hyperplan Σ transverse à l'orbite passant par x_0 , par exemple on pourrait prendre $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot \xi = 0\}$ où ξ est un vecteur qui

n'est pas orthogonal à $f(x_0)$ (ce qui assure que l'hyperplan Σ est transverse à l'orbite passant par x_0 , on prend alors la fonction h définie par $h(x) = (x - x_0) \cdot \xi$ et on procède de la même manière. Dans la méthode de Henon on aurait alors:

$$\dot{u} = Dh(x) \cdot \dot{x} = Dh(x) \cdot f(x) = \xi \cdot f(x)$$

et on modifie le système (1.11) en conséquence.

1.4 Localisation numérique d'une solution périodique à partir de l'application de Poincaré:

1.4.1 Méthode de Tir :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot du système (1.1) et $P(x) = \varphi(x, \tau(x))$ une application de Poincaré par rapport à un hyperplan Σ . Considérons le système d'équations:

$$H \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) - x \\ t - \tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Soit (\hat{x}, T) une solution de (1.12), i.e: $\varphi_\tau(\hat{x}) = \hat{x}$ et $T = \tau(\hat{x})$, alors \hat{x} est un point d'une solution de période T , il suffit alors d'intégrer numériquement (1.1) à partir de \hat{x} pour obtenir l'orbite de cette solution périodique.

Pour résoudre (1.12) on peut utiliser la méthode de Newton:

- (x_0, t_0) donné.
- Pour k de 1 à k_{\max}
- Calcul de la correction $(\delta x_k, \delta t_k)$ et résolution de

$$DH(x_{k-1}, t_{k-1}) \begin{pmatrix} \delta x_k \\ \delta t_k \end{pmatrix} = -H \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ t_{k-1} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

- Correction

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + \delta x_k \\ t_k = t_{k-1} + \delta t_k \end{cases}$$

- Critère d'arrêt.

Remarque 1.2 Si (t_0, x_0) est assez près d'une solution (\hat{x}, T) , les (x_k, t_k) convergent vers cette solution, mais en général il est difficile de calculer les coefficients de la matrice $(n+1) \times (n+1) DH(x, y)$,

En effet, on a :

$$DH(x, t) = \begin{pmatrix} D_x \varphi(x, t) - I & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \\ -D_x \tau(x) & 1 \end{pmatrix}$$

et le calcul du terme $D_x \tau(x)$ pose problème, les autres termes $D_x \varphi(x, t)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$ peuvent s'obtenir (comme on le verra, par intégration d'un système approprié) alors au lieu de résoudre (1.13), on procède comme suit pour obtenir une correction $(\delta x_k, \delta t_k)$ le système (1.13) s'écrit :

$$\begin{cases} D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta x_k - \delta x_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta t_k = x_{k-1} - \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ -D_x \tau(x_{k-1}) \delta x_k + \delta t_k = \tau(x_{k-1}) - t_{k-1} \end{cases} \quad (1.14)$$

On choisit alors pour simplifier de remplacer la deuxième équation de (1.14) par $f(x_{k-1}) \cdot \delta x_k = 0$ c'est-à-dire on prend une correction δx_k orthogonal en x_{k-1} à l'orbite passant par x_{k-1} (voir figure 25)

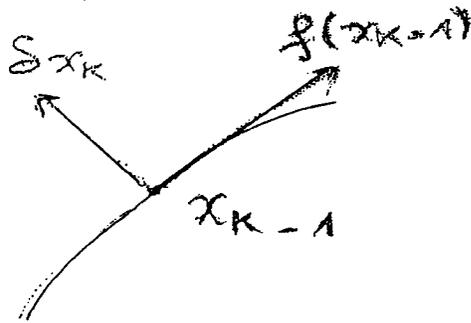


Figure 25

Ainsi plutôt que de résoudre (1.13), on résoud

$$\begin{cases} D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta x_k - \delta x_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1}) \delta t_k = x_{k-1} - \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ f(x_{k-1}) \cdot \delta x_k = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) - I & \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ (f(x_{k-1}))^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_k \\ \delta t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k-1} - \varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Et pour obtenir $D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1})$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1})$ et $\varphi(x_{k-1}, t_{k-1})$ lorsque x_{k-1} et t_{k-1} sont connus, on procède comme suit:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(\varphi(x, t)), \quad \forall x, \forall t$$

et donc /

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1}) = f(\varphi(x_{k-1}, t_{k-1}))$$

Ainsi, puisque f est connu pour obtenir $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{k-1}, t_{k-1})$, il suffit de connaître $\varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) = x(x_{k-1}, t_{k-1})$ où $x(x_{k-1}, t_{k-1})$ est la solution de (1.1) telle que $x(0, x_{k-1}) = x_{k-1}$, par conséquent $\varphi(x_{k-1}, t_{k-1}) = x(x_{k-1}, t_{k-1})$ s'obtient en intégrant numériquement entre 0 et t_{k-1} , le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_{k-1} \end{cases} \quad (1.17)$$

Il reste à calculer $D_x \varphi(x_{k-1}, t_{k-1})$, on a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = f(\varphi(t, x))$$

d'où $D_x(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y)) = Df(\varphi(x, t))D_x \varphi(x, t)$; en permutant l'ordre de dérivation à gauche, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_x \varphi(x, t)|_{x=x_{k-1}}) = Df(\varphi(x_{k-1}, t))D_x \varphi(x, t)$$

Ainsi $D_x \varphi(x, t)|_{x=x_{k-1}}$ est solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} \dot{X} = Df(\varphi(x_{k-1}, t))X \\ X(0) = I \end{cases}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \dot{X} = Df(\varphi(t, x_{k-1}))X \\ X(0) = I \end{cases} \quad (1.18)$$

Où $x(t, x_{k-1})$ est la solution de (1.17).

Ainsi pour obtenir $D_x\varphi(x_{k-1}, t_{k-1})$, il suffit d'intégrer (1.18) entre 0 et t_{k-1} (il n'est pas nécessaire d'intégrer (1.17) en premier puis (1.18) ensuite). En pratique, on intègre simultanément les deux systèmes c'est à dire on intègre le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{X} = Df(x)X \\ x(0) = x_{k-1} \\ X(0) = I \end{cases} \quad (1.19)$$

qui est un système de $n + n^2$ équations différentielles et alors $x(t_{k-1}) = \varphi(x_{k-1}, t_{k-1})$ et $X(t_{k-1}) = D_x\varphi(x_{k-1}, t_{k-1})$. Cette méthode converge si x_0 est choisi près de la solution périodique et si t_0 est près de la période de la solution périodique.

1.4.2 Méthode de recherche d'un point fixe de l'application de Poincaré

Ici, on suppose que l'on sait calculer une application de Poincaré par rapport à un hyperplan Σ donné par $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot \xi = 0\}$ où ξ est un vecteur convenablement choisi.

L'application de Poincaré P est donnée par:

$$P(x) = \varphi(x, \tau(x))$$

Où τ est définie implicitement par $G(x, t) = 0$ avec $G(x, t) = h(\varphi(x, t))$, il s'agit de calculer un point fixe de P c'est-à-dire résoudre l'équation :

$$p(x) - x = 0$$

Utilisons l'une des méthodes les plus connus pour effectuer ceci la méthode de Newton :

- x_0 donné
- Pour $k \geq 0$:
- Calcul de la correction c'est-à-dire résoudre:

$$DP(x_k)\delta x_{k+1} - \delta x_{k+1} = x_k - P(x_k)$$

- Correction :

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_{k+1}$$

- Critère d'arrêt.

Remarque 1.3 .

1/ Si x_0 est assez près du point fixe cherché, cette méthode converge rapidement.

2/Pour le calcul de la correction, il faut déterminer $DP(x_k)$ connaissant x_k , la procédure est la suivante: ayant $P(x) = \varphi(x, \tau(x))$, on a $DP(x) = D_x\varphi(x, \tau(x)) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, \tau(x)).D\tau(x)$ et donc

$$DP(x_k) = D_x\varphi(x_k, \tau(x_k)) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_k, \tau(x_k)).D\tau(x_k)$$

On a vu comment obtenir $D_x\varphi(x_k, \tau(x_k))$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_k, \tau(x_k)) = f(\varphi(x_k, \tau(x_k)))$ au paragraphe précédent et puisque l'on sait ici calculer $\tau(x_k)$, il reste à calculer $D\tau(x_k)$.

Puisque $G(x, \tau(x)) = h(\varphi(x, \tau(x))) = 0$, on a :

$$D_xG(x, \tau(x)) + \frac{\partial G}{\partial t}(x, \tau(x)).D\tau(x) = 0$$

et en supposant que $\frac{\partial G}{\partial t}(x, \tau(x)) \neq 0$ pour $(x, \tau(x))$ dans un voisinage de $(x_k, \tau(x_k))$:

$$D\tau(x) = \frac{-D_xG(x, \tau(x))}{\frac{\partial G}{\partial t}(x, \tau(x))} \tag{1.20}$$

Et comme $G(x, t) = h(\varphi(x, t))$, donc :

$$D_xG(x, t) = Dh(\varphi(x, t)).D_x\varphi(x, t)$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= Dh(\varphi(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \\ &= Dh(\varphi(x, t)) f(\varphi(x, t))\end{aligned}$$

Car $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = f(\varphi(x, t))$.

$$h(x) = (x - x_0) \cdot \xi = \xi^t \cdot (x - x_0)$$

On a : $\forall x, Dh(x) = \xi^t$; il en découle donc que $D_x G(x, t) = \xi^t D_x \varphi(x, t)$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = \xi^t f(\varphi(x, t))$$

En supposant qu'à l'itération k , on ait $\xi^t f(\varphi(x_k, \tau(x_k))) \neq 0$ et (1.20) devient :

$$D\tau(x) = \frac{-\xi^t D_x \varphi(x, \tau(x))}{\xi^t f(\varphi(x_k, \tau(x_k)))}$$

Comme précédemment, pour obtenir simultanément $\varphi(x_k, \tau(x_k))$ et $D_x \varphi(x_k, \tau(x_k))$, si on connaît déjà $\tau(x_k)$, on intègre entre 0 et $\tau(x_k)$, le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{X} = Df(x)X \\ x(0) = x_k \\ X(0) = I \end{cases}$$

Remarque 1.4 .

- *Le même raisonnement se fait pour les systèmes non autonome, T -périodique en t en choisissant $\Sigma = \mathbb{R}^n$.*
- *Nous avons présenté le principe de calcul de l'application de Poincaré et les solutions périodiques en se basant sur la méthode de Newton mais il existe des méthodes plus élaborées permettent de faire converger le système de manière plus rapide, pour plus de détail Voir [2].*

Chapitre 2

L'application de Poincaré pour les systèmes continus par morceaux (p.w.s)

Dans ce chapitre, on détermine les formes normales de l'application de Poincaré pour les systèmes continus par morceaux (piecewise smooth systems notés *p.w.s*) dans deux cas:

Le premier cas correspond aux systèmes présentant un point de frôlement ou de "grazing" à la frontière, le deuxième cas correspond aux systèmes présentant des surfaces en corne ou "corner-collision" [2], [3], [4], [5].

2.1 Application de Poincaré pour les systèmes p.w.s présentant un point de frôlement ou point de "grazing"

Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } H(x) > 0, \\ F_2(x), & \text{si } H(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec $x(t) \in D \underset{\text{ouvert}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction au moins de classe C^4 .

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, H(x) = 0\}.$$

Posons :

$$S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n, H(x) > 0\}$$

$$S^- = \{x \in \mathbb{R}^n, H(x) < 0\}$$

On note $\phi_i(x, t), i = 1, 2$ les flots associé à (2.1) dans S^+ et S^- respectivement

(i.e. $\frac{\partial}{\partial t} \phi_i(x, t) = F_i(\phi_i(x, t))$ avec $\phi_i(x, 0) = x$ et $i = 1, 2$)

L'ensemble des points $x \in S$, ont des normales de même signe est défini par :

$$S_c = \{x \in S, \sigma(x) > 0\}$$

Où $\sigma(x) = \langle H_x(x), F_1(x) \rangle \langle H_x(x), F_2(x) \rangle$ et \langle, \rangle désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n

L'ensemble complémentaire de S_c noté S_s est :

$$S_s = \{x \in S, \sigma(x) \leq 0\}$$

rappelons que les points $x \in S_s$ pour lesquels $F_1(x), F_2(x)$ sont tangents à S sont dits "sliding singular point". La méthode de convexité de Filipov définit la fonction convexe $g(x)$ par:

$g(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda) F_2(x)$ pour $x \in S_s$ avec :

$$\lambda = \frac{\langle H_x(x), F_2(x) \rangle}{\langle H_x(x), F_2(x) - F_1(x) \rangle} \Big|_{x=0}$$

et $\langle H_x(x), g(x) \rangle = 0$ c'est-à-dire $g(x)$ est tangente à S_s (voir figure 26) et dans ce cas, on définit le nouveau système comme:

$$\dot{x} = g(x) \tag{2.2}$$

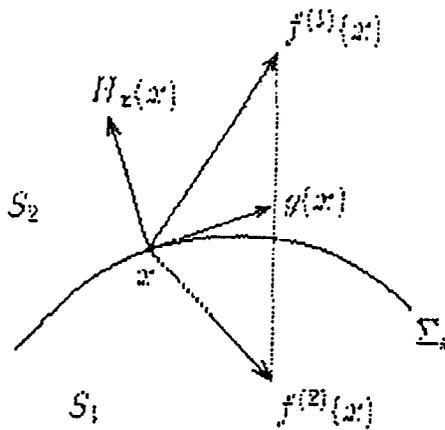


Figure 26

Les solutions de l'équation (2.2) sont dites "sliding solutions".

Si $\langle H_x(x), F_1(x) \rangle > 0, \langle H_x(x), F_2(x) \rangle < 0$, ces solutions sont stables.

Si $\langle H_x(x), F_1(x) \rangle < 0, \langle H_x(x), F_2(x) \rangle > 0$, ces solutions sont instables [15].

Pour notre part, on s'intéresse au cas où il n'existe pas de "sliding solution" mais un frôlement est possible.

Définition 2.1 On dit que le point $x = x_0$ (on prendra $x_0 = 0$ pour simplifier) est un point de "grazing bifurcation" si pour $i = 1, 2$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1) \quad H(0) = 0 \\ H_2) \quad \nabla H(0) \neq 0 \\ H_3) \quad \langle \nabla H(0), \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(0, 0) \rangle = \langle \nabla H(0), F_i(0) \rangle = 0 \\ H_4) \quad \frac{d^2 H(\phi_i(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \langle \nabla H(0), \frac{\partial F_i}{\partial x}(0) F_i(0) \rangle + \langle \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0) F_i(0), F_i(0) \rangle > 0 \end{array} \right.$$

Les deux premières conditions impliquent que H est bien choisie.

La troisième condition signifie que le champ de vecteurs $(F_1(x), F_2(x))^T$ est tangent à S en $x_0 = 0$.

La quatrième condition signifie que les courbes trajectoires dans S^+ et S^- sont de même signe

respectivement à H

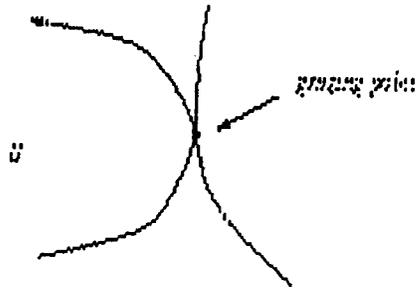


Figure 27

On définit les ensembles des points de "grazing" par :

$$G_i = \{x \in S / \langle \nabla H(x), F_i(x) \rangle = 0\} \quad i = 1, 2$$

une trajectoire associée à un flot $\phi_i(t, x)$ vérifie les conditions $H_1), H_2), H_3), H_4)$ en $t = 0$ s'appelle trajectoire de frôlement ou "grazing trajectory".

On suppose donc que le système (2.1) possède un point de frôlement $x_0 = 0$, et que dans un voisinage de ce point, S n'est pas simultanément attractive ou répulsive pour les deux régions S^+ et S^- , c'est-à-dire :

$$\langle \nabla H(x), F_1(x) \rangle \langle \nabla H(x), F_2(x) \rangle > 0 \quad \forall x \in v_{x_0} \subset S. \quad (2.3)$$

et dans ce cas il n'existe pas de solution au sens de Filippov.

Remarquons que (2.3) implique que :

$$G_1 = G_2 := G \quad (H_5)$$

En effet si on suppose que $G_1 \neq G_2$ c'est-à-dire $\exists x_0 \in S$ tel que :

par exemple $x_0 \in G_1$ et $x_0 \notin G_2$ c'est-à-dire $\langle \nabla H(x_0), F_1(x_0) \rangle = 0$ et $\langle \nabla H(x_0), F_2(x_0) \rangle \neq 0$ Dans ce cas :

$$\langle \nabla H(x_0), F_1(x_0) \rangle \langle \nabla H(x_0), F_2(x_0) \rangle = 0$$

contradiction avec (2.3) alors (2.3) \Rightarrow (H₅).

Ceci implique que G_1 et G_2 coïncident en l'absence de "sliding solution", on définit la variété invariante par le flot ϕ_1 correspondant aux trajectoires qui passent par G l'ensemble G_ρ (l'ensemble des trajectoires de frôlement), on note G_ρ^+ la région au dessus de G_ρ et G_ρ^- la région au dessous de G_ρ

(voir figure 28)

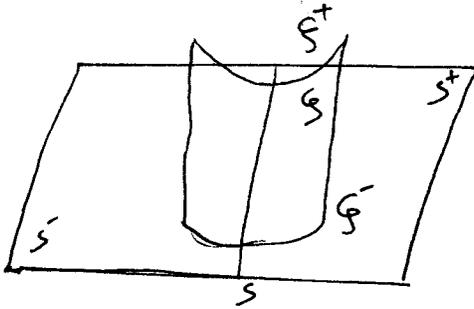


Figure 28

En effectuant le changement de variables suivant:

$$\tilde{x} = x + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j \frac{\nabla H(0)}{|\nabla H(0)|^2}; \tilde{H}(\tilde{x}) = H(x), \tilde{F}(\tilde{x}) = F(x) \quad (2.4)$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 H}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_k}(0) \tilde{x}_i \tilde{x}_j \tilde{x}_k \frac{\nabla H(0)}{|\nabla H(0)|^2}; \tilde{\tilde{H}}(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{H}(\tilde{x}), \tilde{\tilde{F}}(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{F}(\tilde{x})$$

Et...

On aura: (en se débarassant des $\tilde{\tilde{}}$ pour simplifier)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^i} (0) = 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (2.5)$$

pour un certain N et donc la condition (H₄) devient :

$$\frac{d^2 H(\phi(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \langle \nabla H(0), \frac{\partial F_i}{\partial x}(0) F_i(0) \rangle > 0 \quad (H_4')$$

D'autre part, soit L le vecteur normal de G au point $x = 0$ (vecteur unité) perpendiculaire à $\nabla H(0)$, alors on peut simplifier (2.3) en considérant la condition suivante au point de "grazing"

$$\langle L, F_1(0) \rangle \langle L, F_2(0) \rangle > 0 \quad (H_6)$$

c'est-à-dire G n'est pas attractive au point de "grazing".

Pour étudier la dynamique autour du point de "grazing", on considère une trajectoire qui coupe deux sections de Poincaré notées respectivement Σ_1 et Σ_2 en $t_s < 0$ et $t_f > 0$. En fait l'application discontinue (discontinuity map) notée D.M est définie en prenant les deux sections Σ_1 et $\Sigma_2 \rightarrow \Pi$ pour plus de clarté (voir figure 29). On introduit une variable ε sur Σ_1 (ε assez petit) telle que:

Pour $\varepsilon = 0$ l'orbite de frôlement passant par le point $(0, 0)$, est contenue dans S^+ , et pour $\varepsilon \neq 0$ l'orbite coupe S si $\varepsilon > 0$ ou bien reste dans S^+ si $\varepsilon < 0$.

On a alors trois étapes différentes à étudier:

- Déplacement des trajectoires avant l'intersection avec S en $x = \bar{x}$ à l'instant $t_1 < 0$
- Déplacement des trajectoires dans S^- avant la deuxième intersection avec S en $x = \bar{x}$ à l'instant $t_2 > 0$
- Déplacement des trajectoires dans S^+ après la deuxième intersection avec S (voir figure 29).

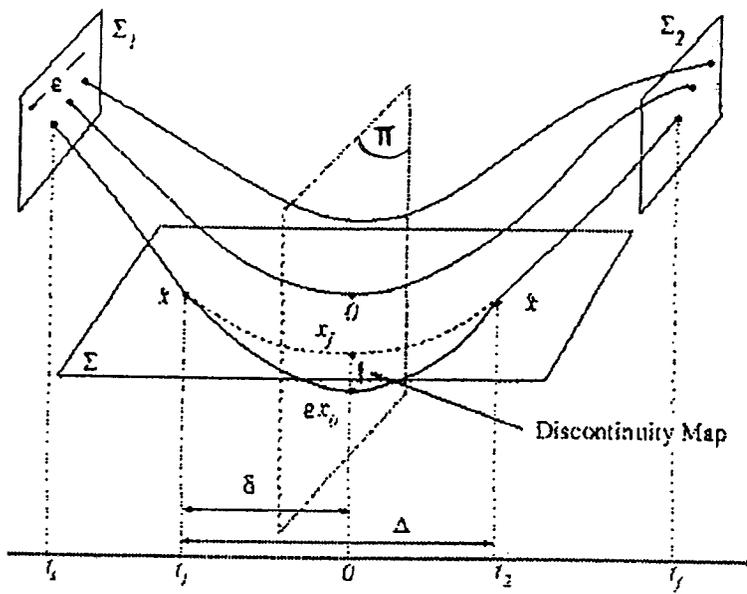


Figure 29

Etape 1

Soit $x_{g(t)} = \phi_1(0, t)$; la trajectoire de frôlement (correspondant à $\varepsilon = 0$), considérons une perturbation de $x_{g(t)}$: $x(t) = \phi_1(\varepsilon x_0, t)$, avec $x_0 \in S^-$ i.e.

$$\langle \nabla H, x_0 \rangle < 0$$

En $t = -\delta$, $x(t)$ coupe S en \bar{x} c'est-à-dire $\bar{x} = \phi_1(\varepsilon x_0, -\delta)$

Déterminons δ :

Pour $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, le développement de Taylor autour du point $(0, 0)$ pour les deux flots $\phi_i(x, t)$ est donné par :

$$\phi_i(x, t) = \sum_{|i|=0} \frac{\partial^{|i|} \phi_i(x, t)}{i_1! i_2! \dots i_{n+1}! \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n} \partial t^{i_{n+1}}} \Big|_{(x,t)=(0,0)} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} t^{i_{n+1}}$$

avec $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{n+1}$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \phi_i(x, t) = & \phi_i^o + \frac{\partial \phi_i^o}{\partial x} x + \frac{\partial \phi_i^o}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i^o}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i^o}{\partial t^2} t^2 + \\ & \frac{\partial^2 \phi_i^o}{\partial x \partial t} xt + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi_i^o}{\partial x^3} x^3 + \frac{\partial^3 \phi_i^o}{\partial t^3} t^3 + 3 \frac{\partial^3 \phi_i^o}{\partial x \partial t^2} xt^2 + 3 \frac{\partial^3 \phi_i^o}{\partial x^2 \partial t} x^2 t \right) + \\ & \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 \phi_i^o}{\partial x^4} x^4 + \frac{\partial^4 \phi_i^o}{\partial t^4} t^4 + 4 \frac{\partial^4 \phi_i^o}{\partial x^3 \partial t} x^3 t + 6 \frac{\partial^4 \phi_i^o}{\partial x^2 \partial t^2} x^2 t^2 + 4 \frac{\partial^4 \phi_i^o}{\partial x \partial t^3} x t^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

La notation "o" désigne la valeur de l'application au point $(0, 0)$; avec $i = 1, 2$ et

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(x, t) = F_i(\phi_i(x, t)); \phi_i(x, 0) = x; \phi_i(0, 0) = 0$$

En $(x, t) = (0, 0)$ on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i^o}{\partial x} &= 1, \frac{\partial^2 \phi_i^o}{\partial x^2} = 0, \dots, \frac{\partial^4 \phi_i^o}{\partial x^4} = 0, \frac{\partial \phi_i^o}{\partial t}(x, t) \Big|_{(0,0)} = F_i(0) = F_i^o \\ \frac{\partial \phi_i^o}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (F_i(\phi_i(x, t))) \Big|_{(0,0)} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x}(\phi(x, t)) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) \right] \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial F_i^o}{\partial x} F_i^o \\ &\text{et} \dots \end{aligned}$$

L'indice "o" étant ignoré (pour simplifier) donc:

$$\begin{aligned} \phi_i(x,t) = & x + F_i t + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i t^2 + \frac{\partial F_i}{\partial x} x t + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i^2 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^2 F_i \right) t^3 + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^2 \right) x t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} x^2 t + \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} F_i^3 + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \left(F_i \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i \right) + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \right) F_i + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^3 F_i \right] t^4 + \\ & \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} x^3 t + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \right) x^2 t^2 + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} F_i^2 + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i \frac{\partial F_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i \right) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^3 \right] x t^3 + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\phi_i(x,t) = x + F_i t + a_i t^2 + b_i x t + c_i t^3 + d_i x^2 t + e_i x t^2 + f_i t^4 + g_i x^3 t + h_i x^2 t^2 + j_i x t^3 + o(5)$$

$$\text{avec : } a_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i; \quad b_i = \frac{\partial F_i}{\partial x}; \quad c_i = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i^2 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^2 F_i \right);$$

$$d_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2}; \quad e_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$f_i = \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} F_i^3 + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \left(F_i \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i \right) + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \right) F_i + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^3 F_i \right]$$

$$g_i = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3}; \quad h_i = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \right)$$

$$j_i = \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3} F_i^2 + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i + 2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i \frac{\partial F_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)^3 \right]; \quad i=1,2, \quad (2.6)$$

et $o(5)$ comporte tous les binôme (x,t) d'ordre supérieur ou égal à 5.

On a: $\bar{x} = \phi_1(\varepsilon x_0, -\delta)$, utilisons (2.6), alors \bar{x} s'écrit:

$$\bar{x} = \varepsilon x_0 - \delta F_1 + \delta^2 a_1 - \varepsilon \delta b_1 x_0 - \delta^3 c_1 - \varepsilon^2 \delta d_1 x_0^2 + \varepsilon \delta^2 e_1 x_0 +$$

$$\delta^4 f_1 - \varepsilon^3 \delta g_1 x_0^3 + \varepsilon^2 \delta^2 h_1 x_0^2 - \varepsilon \delta^3 j_1 x_0 + o(5). \quad (2.7)$$

En fait, on cherche le temps δ tel que: $H(\bar{x}) = 0$ puisque $H(0) = 0$ et H vérifie (2.5), alors

$$\langle \nabla H, \bar{x} \rangle = o(|\bar{x}|^5). \quad (2.8)$$

On remplace \bar{x} par son expression (2.7) dans (2.8), on obtient::

$$\begin{aligned} & (\varepsilon x_0)_H - (\delta F_1)_H + (\delta^2 a_1)_H - (\varepsilon \delta (b_1 x_0))_H - (\delta^3 c_1)_H - \varepsilon^2 \delta (d_1 x_0^2)_H + \\ & \varepsilon \delta^2 (e_1 x_0)_H + \delta^4 (f_1)_H - \varepsilon^3 \delta (g_1 x_0^3)_H + \varepsilon^2 \delta^2 (h_1 x_0^2)_H - \varepsilon \delta^3 (f_1 x_0)_H + o(5) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $:(y)_H := \langle \nabla H, y \rangle$

Remarquons que $(-\delta F_1)_H = -\delta \langle \nabla H, F_1 \rangle = 0$ (d'après la condition (H₃)).

Maintenant on résoud l'équation (2.9), pour δ en fonction de $\sqrt{\varepsilon}$ i.e. de la forme $:\delta = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^2)$ où $:\gamma_1, \gamma_2$ et γ_3 sont des coefficients à déterminer, les calculs donnent :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}})^2 = \gamma_1^2 \varepsilon + 2\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + (2\gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2^2) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \\ \delta^3 &= (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}})^3 = \gamma_1^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3\gamma_1^2 \gamma_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \\ \delta^4 &= (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}})^4 = \gamma_1^4 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} & (\varepsilon x_0)_H + (\gamma_1^2 \varepsilon + 2\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) + (2\gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2^2) \varepsilon^2 + \dots (a_1)_H - (b_1 x_0)_H (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \\ & + \gamma_2 \varepsilon^2 + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{5}{2}}) - (c_1)_H (\gamma_1^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3\gamma_1^2 \gamma_2 \varepsilon^2 + \dots) - (d_1 x_0^2)_H (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{5}{2}} \\ & + \gamma_2 \varepsilon^3 + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{7}{2}} + \dots) + (e_1 x_0)_H (\gamma_1^2 \varepsilon^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon^{\frac{5}{2}} + \dots) + (f_1)_H (\gamma_1^4 \varepsilon^2 + \dots) - \\ & (g_1 x_0^3)_H (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{2}} + \dots) + (h_1 x_0^2)_H (\gamma_1^2 \varepsilon^3 + \dots) - (j_1 x_0)_H (\gamma_1^3 \varepsilon^{\frac{5}{2}} + \dots) \\ & = \varepsilon [(x_0)_H + \gamma_1^2 (a_1)_H] + \varepsilon^{\frac{3}{2}} [2\gamma_1 \gamma_2 (a_1)_H - \gamma_1 (b_1 x_0)_H - \gamma_1^3 (c_1)_H] + \\ & \varepsilon^2 [(2\gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2^2) (a_1)_H - (b_1 x_0)_H \gamma_2 - 3(c_1)_H \gamma_1^2 \gamma_2 + (e_1 x_0)_H \gamma_1^2 + (f_1)_H \gamma_1^4] + \dots \\ & = 0 \end{aligned}$$

et donc:

$$(x_0)_H + \gamma_1^2 (a_1)_H = 0$$

$$2(a_1)_H \gamma_2 - (b_1 x_0)_H - \gamma_1^2 (c_1)_H = 0$$

$$2\gamma_3 \gamma_1 (a_1)_H + 2\gamma_2^2 (a_1)_H - (b_1 x_0)_H \gamma_2 - 3(c_1)_H \gamma_1^2 \gamma_2 + (e_1 x_0)_H \gamma_1^2 + (f_1)_H \gamma_1^4 = 0$$

Alors:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{(x_0)_H}{(a_1)_H}} = \sqrt{\frac{2 \langle \nabla H, x_0 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle}}. \quad (2.10)$$

$$\gamma_2 = \frac{(b_1 x_0)_H + \gamma_1^2 (c_1)_H}{2(a_1)_H}. \quad (2.11)$$

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_2^2 (a_1)_H - (b_1 x_0)_H \gamma_2 - 3(c_1)_H \gamma_2 \gamma_1^2 + (e_1 x_0)_H \gamma_1^2 + (f_1)_H \gamma_1^4}{2\gamma_1 (a_1)_H}. \quad (2.12)$$

Et donc :

$$\delta = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad (2.13)$$

avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont données par (2.10), (2.11), (2.12) respectivement.

En remplaçant $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par leurs expressions (2.10), (2.11), (2.12) respectivement dans (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \varepsilon x_0 - (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots) F_1 + (\gamma_1^2 \varepsilon + 2\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) + \\ & (2\gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon^2 + \dots a_1 - \varepsilon b_1 x_0 (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots) - \\ & (\gamma_1^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3\gamma_1^2 \gamma_2 \varepsilon^2 + \dots) c_1 - \varepsilon^2 d_1 x_0^2 (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots) + \\ & \varepsilon (\gamma_1^2 \varepsilon + 2\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots) e_1 x_0 + \gamma_1^4 \varepsilon^4 + 4\gamma_1^3 \gamma_2 \varepsilon^{\frac{5}{2}} + \dots f_1 - \\ & \varepsilon^3 g_1 x_0^3 (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) + \varepsilon^2 (\gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots)^2 h_1 x_0 - \\ & \varepsilon (\gamma_1^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3\gamma_1^2 \gamma_2 \varepsilon^2) j_1 x_0 + o(5) \end{aligned}$$

et donc : $\bar{x} = -F_1 \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + (x_0 - \gamma_2 F_1 + a_1 \gamma_1^2) \varepsilon + (-b_1 x_0 \gamma_1 + 2a_1 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 F_1 - c_1 \gamma_1^3) \varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^2)$

Posons:

$$\chi_1 = -F_1 \gamma_1. \quad (2.14)$$

$$\chi_2 = x_0 - \gamma_2 F_1 + a_1 \gamma_1^2. \quad (2.15)$$

$$\chi_3 = -b_1 x_0 \gamma_1 + 2a_1 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 F_1 - c_1 \gamma_1^3. \quad (2.16)$$

et alors \bar{x} s'écrit:

$$\bar{x} = \chi_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \chi_2 \varepsilon + \chi_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^2) \quad (2.17)$$

Où χ_1, χ_2, χ_3 sont données par (2.14), (2.15), (2.16) respectivement et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont données par

(2.10), (2.11), (2.12) respectivement .

Etape 2

La trajectoire définie dans S^- commence en \bar{x} et arrive au point \hat{x} après un temps $t_2 = t_1 + \Delta$ tel que:

$$H(\hat{x}) = H(\phi_2(\bar{x}, \Delta))$$

De la même manière que pour calculer δ , en utilisant le fait que H vérifie (H_1) et (2.5) on a:

$$\langle \nabla H, \hat{x} \rangle = \langle \nabla H, \phi_2(\bar{x}, \Delta) \rangle = o(|\bar{x}|^5). \quad (2.18)$$

Remplaçons $\phi_2(\bar{x}, \Delta)$ par son développement de Taylor dans l'équation (2.18), on obtient:

$$\begin{aligned} & (\bar{x})_H + (F_2)_H \Delta + (a_2)_H \Delta^2 + (b_2 \bar{x})_H \Delta + (c_2)_H \Delta^3 + (d_2 \bar{x}^2)_H \Delta \\ & + (e_2 \bar{x})_H \Delta^2 + (f_2)_H \Delta^4 + (g_2 (\bar{x})^3)_H \Delta + (h_2 \bar{x}^2)_H \Delta^2 + (j_2 \bar{x})_H \Delta^3 \\ & = o(5) \end{aligned} \quad (2.19)$$

On a: $(F_2)_H = \langle \nabla H, F_2 \rangle$ (d'après la condition (H_3) de "grazing", $(\bar{x})_H = o(5)$ car $\bar{x} \in S$).

On cherche une solution Δ en fonction de $\sqrt{\varepsilon}$ du type :

$$\Delta = \nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \nu_2 \varepsilon + \nu_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^2)$$

$\nu_i, i = 1, 2, 3$ à déterminer. En remplaçant \bar{x} par l'expression (2.17) dans (2.19), on obtient:

$$\begin{aligned}
& (a_1)_H [\nu_1^2 \varepsilon + 2\nu_1 \nu_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + (2\nu_3 \nu_1 + \nu_2) \varepsilon^2 + \dots] + (\nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \nu_2 \varepsilon + \nu_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) + (d_2(\chi_1^2 \varepsilon + 2\chi_1 \chi_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
& + (2\chi_3 \chi_1 + \chi_2) \varepsilon^2)_H (\nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \nu_2 \varepsilon + \nu_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) + (e_2(\chi_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \chi_2 \varepsilon + \chi_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}))_H (\nu_1^2 \varepsilon + 2\nu_1 \nu_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \\
& + (2\nu_3 \nu_1 + \nu_2) \varepsilon^2) + (f_2)_H (\nu_1^4 \varepsilon^2 + 4\nu_1^3 \nu_2 \varepsilon^{\frac{5}{2}}) + (g_2(\chi_1^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3\chi_1^2 \chi_2 \varepsilon^2 + \dots))_H (\nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \nu_2 \varepsilon + \nu_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
& + (h_2(\chi_1^2 \varepsilon + 2\chi_1 \chi_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \chi_3^2 \varepsilon^2 + \dots))_H (\nu_1^2 \varepsilon + 2\nu_1 \nu_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \nu_2^2 \varepsilon^2 + \dots) \\
& + (j_2(\chi_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \chi_2 \varepsilon + \chi_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}))_H (\nu_1^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3\nu_1^2 \nu_2 \varepsilon^2 + \dots) \\
= & \varepsilon((a_2)_H \nu_1^2 + \nu_1(b_2 \chi_1)_H) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}[(a_2)_H 2\nu_1 \nu_2 + \nu_1(b_2 \chi_2)_H + \nu_2(b_2 \chi_1)_H \\
& + (c_2)_H \nu_1^3 + (d_2 \chi_1^2)_H + (e_2 \chi_1)_H \nu_1^2] + \varepsilon^2[(a_2)_H (2\nu_3 \nu_1 + \nu_2) + \nu_2(b_2 \chi_2)_H \\
& + \nu_3(b_2 \chi_1)_H + \nu_1(b_2 \chi_3)_H + 3(c_2)_H \nu_1^2 \nu_2 + (d_2 \chi_1^2)_H \nu_2 + 2d_2(\chi_1 \chi_2)_H \nu_1 + \\
& (e_2 \chi_2)_H \nu_1^2 + (e_2 \chi_1)_H 2\nu_1 \nu_2 + \nu_1^2 (f_2)_H + (g_2 \chi_1^3)_H \nu_1 + (h_2 \chi_1^2)_H \nu_1^2 + \\
& (j_2 \chi_1)_H \nu_1^3] + o(\varepsilon^3) \\
= & 0
\end{aligned}$$

$$(e_2 \chi_2)_H \nu_1^2 + (e_2 \chi_1)_H 2\nu_1 \nu_2 + \nu_1^2 (f_2)_H + (g_2 \chi_1^3)_H \nu_1 + (h_2 \chi_1^2)_H \nu_1^2 +$$

Ceci implique:

$$\begin{aligned}
& \cdot (a_2)_H \nu_1^2 + \nu_1(b_2 \chi_1)_H = 0. \\
& \cdot 2(a_2)_H \nu_1 \nu_2 + \nu_1(b_2 \chi_2)_H + \nu_2(b_2 \chi_1)_H + \nu_1(d_2 \chi_1^2)_H + (c_2)_H \nu_1^3 + (e_2 \chi_1)_H \nu_1^2 = 0. \\
& \cdot (a_2)_H (2\nu_3 \nu_1 + \nu_2) + \nu_2(b_2 \chi_2)_H + \nu_3(b_2 \chi_1)_H + \nu_1(b_2 \chi_3)_H + 3(c_2)_H \nu_1^2 \nu_2 \\
& + (d_2 \chi_1^2)_H \nu_2 + (2b_2 \chi_1 \chi_2)_H \nu_1 + (e_2 \chi_2)_H \nu_1^2 + 2(e_2 \chi_1)_H \nu_1 \nu_2 + \nu_1^2 (f_2)_H \\
& + (g_2 \chi_1^3)_H \nu_1 + (h_2 \chi_1^2)_H \nu_1^2 + (j_2 \chi_1)_H \nu_1^3 = 0
\end{aligned}$$

et donc :

$$\nu_1 = \frac{-(b_2 \chi_1)_H}{(a_2)_H} = \frac{\langle \nabla H, b_2 F_1 \rangle \gamma_1}{\langle \nabla H, a_2 \rangle} \quad (2.20)$$

$$\nu_2 = \frac{-\nu_1[(d_2 \chi_1^2)_H + (c_2)_H \nu_1^2 + (b_2 \chi_2)_H + (e_2 \chi_1)_H \nu_1]}{2(a_2)_H \nu_1 + (b_2 \chi_1)_H} \quad (2.21)$$

$$\nu_3 = \frac{-(j_2\chi_1)H\nu_1^3 + (b_2\chi_3)H\nu_1 + (a_2)H\nu_2^2 + 2(b_2\chi_1\chi_2)H\nu_1 + (b_2\chi_2)H\nu_2 + (f_2)H\nu_1^4}{2(a_2)H\nu_1 + (b_2\chi_1)H} \quad (2.22)$$

$$+ \frac{(d_2\chi_1^2)H\nu_2 + (g_2\chi_1^3)H\nu_1 + 2(e_2\chi_1)H\nu_1\nu_2 + 3(c_2)H\nu_1^2\nu_2 + (e_2\chi_2)H\nu_1^2 + (h_2\chi_1)H\nu_1^2}{2(a_2)H\nu_1 + (b_2\chi_1)H}$$

Donc

$$\Delta = \nu_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \nu_2\varepsilon + \nu_3\varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad (2.23)$$

avec $\nu_i, i = 1, 2, 3$ sont donnés par (2.20), (2.21), (2.22) respectivement.

Etape 3:

A l'instant $t_2 = \Delta - \delta$ la trajectoire coupe S une deuxième fois au point \hat{x} , et on a trois manières pour construire l'application discontinue:

1^{ère} possibilité

On compare la trajectoire $x(t)$ qui coupe S en \hat{x} avec la trajectoire donnée par l'expression du flot $\phi_1 : x_u(t) = \phi_1(\bar{x}, t)$ dans le même intervalle du temps c'est-à-dire :

$$\xi = x(t_2) - x_u(t_2) = \phi_2(\bar{x}, \Delta) - \phi_1(\bar{x}, \Delta)$$

d'après l'expression (2.6), ξ s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi = & (F_2 - F_1)\Delta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}F_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x}F_1\right)\Delta^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right)\bar{x}\Delta \quad (2.24) \\ & + \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}F_2^2 + 2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2F_2\right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}F_1^2 + 2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2F_1\right)\right]\Delta^3 \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right)\bar{x}^2\right)\Delta + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}F_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2\right) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}F_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2\right]\bar{x}\Delta^2 + \dots \right. \end{aligned}$$

l'application discontinue peut être considéré comme une approximation de ξ donné par l'expression (2.24).

Si $F_1^0 \neq F_2^0$:

En remplaçant \bar{x} et Δ par leurs expressions donnés en (2.17) et (2.23), une approximation linéaire d'ordre 1 de ϕ_i donne:

$$\begin{aligned} \xi &= (F_2 - F_1)\nu_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon) \\ &= 2(F_2 - F_1)\frac{\langle \nabla H, b_2F_1 \rangle}{\langle \nabla H, a_1 \rangle} \sqrt{\frac{-2\langle \nabla H, x_0 \rangle}{\langle \nabla H, a_1 \rangle}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Si $F_1^0 = F_2^0 := F$

Dans ce cas le terme linéaire dans (2.24) est nul, et le terme quadratique noté

$$\theta := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right) \Delta^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \bar{x} \Delta$$

et donc :

$$\theta = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right) \nu_1^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 - \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right) \nu_1 \gamma_1 \right] \varepsilon + o(\varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

et puisque $F_1^0 = F_2^0 := F$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x} F. \\ \nu_1 &= 2 \frac{\left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F \right\rangle}{\left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F \right\rangle} \gamma_1 = 2\gamma_1. \end{aligned}$$

Donc θ devient :

$$\begin{aligned} \theta &= \left(2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F \right) - 2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F \gamma_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} \\ &= 0 + o(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

On remarque alors que dans ce cas les deux termes linéaire et quadratique de (2.24) disparaissent, et alors l'expression de ξ dans (2.24) varie en fonction de $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ i.e $\xi = o(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} + \dots$

2^{ème} possibilité:

On définit l'application ZDM à l'instant $-t_2 = \delta - \Delta$, l'application qui permet de déplacer le point εx_0 à x_f tq $x_f = \phi_1(\hat{x}, \delta - \Delta)$.

Utilisons (2.6), x_f s'écrit:

$$x_f = \hat{x} + F_1(\delta - \Delta) + a_1(\delta - \Delta)^2 + b_1 \hat{x}(\delta - \Delta) + c_1(\delta - \Delta)^3 + d_1 \hat{x}^2(\delta - \Delta) + e_1 \hat{x}(\delta - \Delta)^2 + o(4) \quad (2.25)$$

avec :

$$\hat{x} = \phi_2(\bar{x}, \Delta) = \bar{x} + F_2 \Delta + a_2 \Delta^2 + b_2 \bar{x} \Delta + e_2 \Delta + e_2 \Delta^3 + d_2 \bar{x}^2 \Delta + e_2 \bar{x} \Delta^2 + o(4) \quad (2.26)$$

En remplaçant δ , \bar{x} , Δ et \hat{x} par leurs expressions (2.13), (2.17), (2.23), (2.26) respectivement dans

(2.25) on a:

· Si $F_1^0 \neq F_2^0$:

$$\begin{aligned} x_f &= x_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \hat{x} + (F_2 - F_1) \nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + F_1 \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon) \\ &= (F_2 - F_1) \nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

· Si $F_1^0 = F_2^0 = F$

$$\begin{aligned} x_f &= 0\varepsilon^{\frac{1}{2}} + x_0\varepsilon + [(8c_2 - c_1 + (e_1 - 4e_2)F \\ &\quad + (2d_2 - d_1)F^2]\gamma_1^3 + [(2b_2 - b_1)\chi_2 + 2(a_2 - a_1)\nu_2]\gamma_1 + F_1\gamma_3 + \chi_3]\varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc on obtient : $o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 0\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $o(\varepsilon) = x_0\varepsilon$ et

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) &= [(8c_2 - c_1) + (e_1 - 4e_2)F + (2d_2 - d_1)F^2]\gamma_1^3 \\ &\quad + [(2b_2 - b_1)\chi_2 + 2(a_2 - a_1)\nu_2]\gamma_1 + F_1\gamma_3 + \chi_3]\varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On note :

$$o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = E_{ZDM} = (\eta_1\gamma_1^3 + \eta_2\gamma_1 + \eta_3)\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

avec :

$$\cdot \eta_1 = 8c_2 - c_1 + (e_1 - 4e_2)F + (2d_2 - d_1)F^2.$$

$$\cdot \eta_2 = (2b_2 - b_1)\chi_2 + 2(a_2 - a_1)\nu_2.$$

$$\cdot \eta_3 = F\gamma_3 + \chi_3.$$

Puisque $F_1^0 = F_2^0$; on a aussi:

$$e_i F = d_i F^2 + b_i a_i; c_i = \frac{1}{3} d_i F^2 + \frac{1}{3} b_i a_i$$

Utilisons (2.11),(2.14),(2.15),(2.16),(2.21) on a:

$$\eta_1 = \frac{8}{3}d_2F^2 + \frac{8}{3}b_2a_2 - \frac{1}{3}d_1F^2 - \frac{1}{3}b_1a_1 + b_1a_1 + d_1F^2 - 4d_2F^2 - 4b_2a_2 + 2d_2F^2 - d_1F^2.$$

Alors :

$$\eta_1 = \frac{2}{3}d_2F^2 - \frac{1}{3}d_1F^2 - \frac{4}{3}b_2a_2 + \frac{2}{3}b_1a_1 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= (2b_2 - b_1)(x_0 - F \frac{(b_1x_0)_H + (c_1)_H\gamma_1^2}{2(a_1)_H} + a_1\gamma_1^2) \\ &\quad + 2(a_2 - a_1) \left[-\frac{2\gamma_1((d_2F^2)_H\gamma_1^2 + 4(c_2)_H\gamma_1^2 - 2e_2F\gamma_1^2)}{4(a_2)_H\gamma_1 - 2(a_2)_H\gamma_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(b_2x_0)_H}{(a_2)_H} - \frac{(b_2a_1)_H\gamma_1^2}{(a_2)_H} + \frac{(b_2F)_H}{(a_2)_H} \frac{(b_1x_0)_H + (c_1)_H\gamma_1^2}{2(a_1)_H} \right] \\ &= \left\{ (2b_2 - b_1) \left(a_1 - \frac{(c_1)_HF}{2(a_1)_H} \right) - 2(a_2 - a_1) \left[\frac{1}{(a_2)_H} (4(c_2)_H - 2(b_2a_2)_H \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (b_2a_1)_H - (d_2F^2)_H \right) - \frac{(c_1)_H}{(a_1)_H} \right\} \gamma_1^2 + (2b_2 - b_1) \left(x - \frac{(b_1x_0)_H}{2(a_1)_H} F \right) \\ &\quad - 2(a_2 - a_1) \left(\frac{(b_2x_0)_H}{(a_2)_H} - \frac{(b_1x_0)_H}{2(a_1)_H} \right) \end{aligned}$$

Si on note:

$$\alpha_1 = (2b_2 - b_1) \left(a_1 - \frac{(c_1)_HF}{2(a_1)_H} \right) - 2(a_2 - a_1) \left[\frac{1}{(a_2)_H} (4(c_2)_H - 2(b_2a_2)_H + (b_2a_1)_H - (d_2F^2)_H) - \frac{(c_1)_H}{(a_1)_H} \right] \quad (2.28)$$

$$\alpha_2 = (2b_2 - b_1) \left(x - \frac{(b_1x_0)_H}{2(a_1)_H} F \right) - 2(a_2 - a_1) \left(\frac{(b_2x_0)_H}{(a_2)_H} - \frac{(b_1x_0)_H}{2(a_1)_H} \right) \quad (2.29)$$

Alors :

$$\eta_2 = \alpha_1\gamma_1^2 + \alpha_2 \quad (2.30)$$

avec α_1, α_2 donnés par (2.28) et (2.29) respectivement :

$$\begin{aligned} \eta_3 &= F\gamma_3 + 2a_1\gamma_1 \frac{(b_1x_0)_H + (c_1)_H\gamma_1^2}{2(a_1)_H} - b_1x_0\gamma_1 - \gamma_3F - c_1\gamma_1^3 \\ &= \left(\frac{a_1(c_1)_H}{(a_1)_H} - c_1 \right) \gamma_1^3 + \left(\frac{a_1}{(a_1)_H} (b_1x_0)_H - b_1x_0 \right) \gamma_1. \end{aligned}$$

Si on note:

$$\beta_1 = \left(\frac{a_1(c_1)_H}{(a_1)_H} - c_1 \right) \quad (2.31)$$

$$\beta_2 = \left(\frac{a_1}{(a_1)_H} (b_1x_0)_H - b_1x_0 \right) \quad (2.32)$$

Alors :

$$\eta_3 = \beta_1 \gamma_1^3 + \beta_2 \gamma_1 \quad (2.33)$$

avec β_1, β_2 sont donnés par (2.31) et (2.32) respectivement.

Donc:

$$E_{ZDM} = (\xi_1 \gamma_1^3 + 2(b_2 - b_1)x_0 \gamma_1 - 2(a_2 - a_1) \frac{b_2 x_0}{(a_2)_H} \gamma_1) \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

avec:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 + \alpha_1 + \beta_1 \\ &= \frac{2}{3}(d_2 - d_1)F^2 + 2b_2 a_1 - \frac{2}{3}(b_1 a_1 + 2b_2 a_2) \\ &\quad - \frac{2}{(a_2)_H}(a_2 - a_1)(4(c_2)_H) + (b_2 a_1)_H - 2(b_2 a_2)_H - (d_2 F^2)_H \end{aligned} \quad (2.34)$$

et d'après (2.10), on a:

$$F_{ZDM} = \frac{1}{\sqrt{(a_1)_H}} \left[\frac{\xi_1}{(a_1)_H} |(x_0)_H|^{\frac{3}{2}} + 2(b_2 - b_1)x_0 |(x_0)_H|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{(a_2)_H}(a_2 - a_1)(b_2 x_0)_H |(x_0)_H|^{\frac{1}{2}} \right] \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad (2.35)$$

Remarquons que si $F_1^0 = F_2^0$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} = \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$, alors $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ et (2.35) s'écrit :

$$E_{ZDM} = \frac{2}{3}((a_1)_H)^{-\frac{3}{2}} (d_2 - d_1) F^2 |(\varepsilon x_0)_H|^{\frac{3}{2}}$$

Les expressions de d_1 et d_2 dans (2.6) donnent que le terme $o(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ est non nul si on a:

$F_1^0 = F_2^0$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} = \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$ mais $\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}$. Ces résultats sont alors regroupés dans la proposition suivante:

proposition 2.1 .

Sous les hypothèses $(H_1), (H_4), (H_4)', (H_5), (H_6)$ l'application discontinue notée Π_{ZDM} autour du point de "grazing" est définie par:

· Si $F_1^0 \neq F_2^0$:

$$\Pi_{ZDM} : x \mapsto (F_2 - F_1) \frac{\langle \nabla H, b_2 F_1 \rangle}{\langle \nabla H, a_2 \rangle} \left(\frac{|(x)_H|}{(a_1)_H} \right)^{\frac{1}{2}}$$

· Si $F_1^0 = F_2^0$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} \neq \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$:

$$\Pi_{ZDM} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_1)_H}} \left[\frac{\xi_1}{(a_1)_H} |(x)_H|^{\frac{3}{2}} + 2(b_2 - b_1)x |(x)_H|^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{(a_2)_H} (a_2 - a_1)(b_2 x)_H |(x)_H|^{\frac{1}{2}} \right].$$

avec ξ_1 donné par (2.34)

· Si $F_1^0 = F_2^0$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} = \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2 F_2^0}{\partial x^2}$:

$$\Pi_{ZDM} : x \mapsto \frac{2}{3} ((a_1)_H)^{-\frac{3}{2}} (d_2 - d_1) F^2 |(x)_H|^{\frac{3}{2}}$$

Avec ξ_1 donné par (2.34) et a_i, b_i, d_i sont donnés dans (2.6).

3^{eme} possibilité:

Maintenant, on considère que εx_0 appartient à une section de Poincaré Π définie par son vecteur normal π i.e. $\varepsilon x_0 \in \Pi$ avec $\Pi = \{x / \langle \pi, x \rangle = 0\}$ transverse au champ de vecteurs c'est-à-dire :

$$\langle \pi, F_i \rangle \neq 0, i = 1, 2$$

On note $\mathcal{Y}_\pi := \langle \pi, y \rangle$ la projection de y selon π (voir figure 29). Considérons $x_f \in \Pi$ au temps t^* c'est-à-dire $x_f = \phi_1(\hat{x}, t^*)$ avec la condition :

$$x_{f_\pi} = \phi_1(\hat{x}, t^*)_\pi = 0 \tag{2.36}$$

Cherchons les solutions t^* de (2.36) de la forme: $t^* = \tau_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \tau_2 \varepsilon + \tau_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}$

Le développement de Taylor de ϕ_1 au voisinage de 0 à l'ordre 4 donne:

$$\begin{aligned} x_f = \phi_1(\hat{x}, t^*) &= \hat{x} + F_1 t^* + a_1 (t^*)^2 + b_1 \hat{x} t^* + c_1 (t^*)^3 \\ &+ b_1 \hat{x}^2 t^* + e_1 \hat{x} (t^*)^2 + o(4) \end{aligned}$$

et comme $x_{f_x} = 0$, alors:

$$(\hat{x} + F_1 t^* + a_1 (t^*)^2 + b_1 \hat{x} t^*)_\pi + o(3) = 0 \quad (2.37)$$

En remplaçant $\delta, \bar{x}, \Delta, \hat{x}$ par leurs expressions (2.13), (2.17), (2.23), (2.26) respectivement dans l'équation (2.37), on obtient:

• Si $F_1^\circ \neq F_2^\circ$:

$$\begin{aligned} & (\bar{x} + F_2 \Delta + a_2 \Delta^2 + b_2 \bar{x} \Delta + F_1 (\tau_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \tau_2 \varepsilon) + (a_1 \tau_1^2 \\ & + b_1 (\bar{x} + F_2 \Delta) \tau_1))_\pi \varepsilon + o(3) = \left[(-F_1 \gamma_1 + F_2 \nu_1 + F_1 \tau_1) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + (\chi_2 \right. \\ & \left. + F_2 \nu_2 + F_1 \tau_2 + a_2 \nu_1^2 - b_2 F_1 \gamma_1 \nu_1 + a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1 (F_2 \nu_1 - F_1 \gamma_1)) \varepsilon \right]_\pi \\ & + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = 0 \end{aligned}$$

Ceci implique:

- $\tau_1 = \gamma_1 - \frac{F_{2\pi}}{F_{1\pi}} \nu_1$ ($F_{1\pi} \neq 0$)
- $\tau_2 = \frac{-x_{0\pi} - F_{1\pi} \gamma_2 - a_{1\pi} \gamma_1^2 - F_2 \gamma_2 - a_2 \nu_1^2 + b_2 F_1 \gamma_1 \nu_1 - a_1 \tau_1^2 - b_1 \tau_1 (F_2 \nu_1 - F_1 \gamma_1)}{F_{1\pi}}$

Où a $x_{0\pi} = 0$ donc:

$$\tau_2 = \gamma_2 - \frac{1}{F_{1\pi}} (a_{1\pi} \gamma_1^2 + F_{2\pi} \nu_2 + a_{2\pi} \nu_1^2 - (b_2 F_1)_\pi \gamma_1 \nu_1 + a_{1\pi} \tau_1^2 + (b_1 F_2)_\pi \nu_1 \tau_1 - (b_1 F_1)_\pi \gamma_1 \tau_1).$$

Et alors:

$$x_f = \nu_1 (F_2 - \frac{F_{2\pi}}{F_{1\pi}}) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon)$$

Si $F_1^\circ = F_2^\circ := F$:

$$\nu_1 = 2\gamma_1; b_i F_j = b_j F_i = 2a_i; \tau_1 = \gamma_1 - \nu_1; \tau_2 = \gamma_2 - \nu_2$$

Le même type de calculs que pour le paragraphe précédent permet de trouver que:

$$o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 0; \quad o(\varepsilon) = x_0 \varepsilon$$

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = E_{PDM} = & \left[(8c_2 - c_1 + (e_1 - 4e_2)F + (2d_2 - d_1)F^2) \gamma_1^3 + \right. \\ & \left. (2(a_2 - a_1)\nu_2 + (2b_2 - b_1)\chi_2) \gamma_1 + F\tau_3 + \chi_3 + F\nu_3 \right] \varepsilon^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Avec τ_3 vérifie $(E_{PDM})_\pi = 0$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\tau_3 &= -\nu_3 - \frac{1}{F_\pi} \{ [8c_2 - c_1 + (e_1 - 4e_2)F + (2d_2 - d_1)F^2]_\pi \gamma_1^3 \\ &\quad + [2(a_2 - a_1)\nu_2 + (2b_2 - b_1)\chi_2]_\pi \gamma_1 + \chi_{3\pi} \} \\ \tau_3 &= -\nu_3 - \frac{1}{F_\pi} \{ [8c_2 - c_1 + (e_1 - 4e_2)F + (2d_2 - d_1)F^2 + 2(b_2 - b_1)a_1]_\pi \\ &\quad \gamma_1^3 + [2(a_2 - a_1)\nu_2 + 2(a_2 - a_1)\gamma_2 + (2b_2 - b_1)\chi_2]_\pi \gamma_1 + \chi_{3\pi} \}\end{aligned}$$

Et alors :

$$t^* = (\gamma_1 - \nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (\gamma_2 - \nu_2)\varepsilon + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$$

D'après (2.27),(2.30), E_{PDM} s'écrit :

$$E_{PDM} = (\eta_1\gamma_1^3 + \eta_2\gamma_1 + F\tau_3 + \chi_3 + F\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

avec:

$$\begin{aligned}F\tau_3 + F\nu_3 &= -\frac{F}{F_\pi} \{ \eta_{1\pi}\gamma_1^3 + \eta_{2\pi}\gamma_1 + \chi_{3\pi} + F_\pi\gamma_3 - F_\pi\gamma_3 \} \\ &= -\frac{F}{F_\pi} (\eta_{1\pi}\gamma_1^3 + \eta_{2\pi}\gamma_1 + \chi_{3\pi} + F_\pi\gamma_3) + \frac{F_\pi F}{F_\pi} \gamma_3\end{aligned}$$

Et alors $E_{PDM} = (\eta_1\gamma_1^3 + \eta_2\gamma_1 + \chi_3 + F\gamma_3 - \frac{F}{F_\pi}(\eta_{1\pi}\gamma_1^3 + \eta_{2\pi}\gamma_1 + \chi_{3\pi} + F_\pi\gamma_3))\varepsilon^{\frac{3}{2}}$

Donc :

$$E_{PDM} = E_{ZDM} - \frac{F}{F_\pi} (E_{ZDM})_\pi$$

d'après (2.27), (2.30),(2.33),(2.34) on remarque que :

$$E_{PDM} = E_{ZDM} + \eta_4\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (2.38)$$

avec : $\eta_4 = \frac{-F}{F_\pi} (\xi_\pi \gamma_1^3 + 2((b_2 - b_1)x_0)_\pi \gamma_1 - \frac{2}{(a_2)_H} (a_{2\pi} - a_{1\pi})(b_2 x_0)_H \gamma_1)$

et où :

$$\xi_\pi = \frac{2}{3}((d_2 - d_1)F^2)_\pi + 2(b_2a_1)_\pi - \frac{2}{3}(b_1a_1 + 2b_2a_2)_\pi - \frac{2}{(a_2)_H}(a_{2\pi} - a_{1\pi})(4(c_2)_H + (b_2a_1 - 2b_2a_2)_H - (d_2F^2)_H) \quad (2.39)$$

Dans le cas où le champ de vecteurs est de classe C^1 i.e: $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ l'application s'écrit de manière plus simple:

$$E_{PDM} = \frac{2}{3}((a_1)_H)^{-\frac{3}{2}}((d_2 - d_1)F^2 - \frac{F}{F_\pi}((d_2 - d_1)F^2)_\pi)|\varepsilon x_0|^{\frac{3}{2}}$$

et E_{PDM} est non nul si : $\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}$.

Ces résultats sont regroupés dans la proposition suivante:

proposition 2.2 .

Sous les hypothèses $H_1), H_4), H_4)', H_5), H_6)$, l'application discontinu Π_{PDM} au voisinage de point de "grazing" est donnée par

- Si $F_1^0 \neq F_2^0$:

$$\Pi_{PDM} : x \mapsto (F_2 - \frac{F_{2\pi}}{F_{1\pi}}) \frac{\langle \nabla H, b_2 F_1 \rangle}{\langle \nabla H, a_2 \rangle} \left(\frac{|(x)_H|}{(a_1)_H} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Si $F_1^0 = F_2^0 := F$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} \neq \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$:

$$\Pi_{PDM} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_1)_H}} \left[\frac{1}{\sqrt{(a_1)_H}} (\xi_1 - \frac{F}{F_\pi} \xi_\pi) |(x)_H|^{\frac{3}{2}} + [2(b_2 - b_1)x - \right.$$

$$\left. \frac{F}{F} (2(b_2 - b_1)x)_\pi |(x)_H|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{(a_2)_H} ((a_2 - a_1) - (a_{2\pi} - a_{1\pi}) \frac{F}{F_\pi}) (b_2 x)_H |(x)_H|^{\frac{1}{2}} \right]$$

avec ξ_1 donné par (2.34).

- Si $F_1^0 = F_2^0$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} = \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2 F_2^0}{\partial x^2}$:

$$\Pi_{PDM} : x \mapsto \frac{2}{3}((a_1)_H)^{-\frac{3}{2}}((d_2 - d_1)F^2 - \frac{F}{F_\pi}(d_2 - d_1)F^2)|(x)_H|^{\frac{3}{2}}$$

Les a_i, b_i, d_i sont donnés dans (2.6).

On en déduit alors :

proposition 2.3 .

Sous les hypothèses $(H_1), (H_4), (H_4)', (H_5), (H_6)$ l'application discontinue locale définie au voisinage du point de "grazing" possède:

- Une singularité de type $\frac{3}{2}$ si $F_1^0 = F_2^0$ et $\frac{\partial F_1^0}{\partial x} \neq \frac{\partial F_2^0}{\partial x}$ ou bien $\frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2 F_2^0}{\partial x^2}$.
- Une singularité de type $\frac{1}{2}$ si $F_1^0 \neq F_2^0$.

2.1.1 Application de Poincaré pour les systèmes p.w.S autonomes dépendant d'un paramètre et présentant un point de frôlement ou point de grazing

Supposons maintenant que le système (2.1) dépend d'un paramètre μ , tel que pour $\mu = 0$, le système (2.1) admet une orbite périodique $x(t) = p(t)$ possédant un point de "grazing"

$x = p(0) = 0$ et supposons de plus que $p(t)$ est hyperbolique et isolé et en particulier pour $\mu = 0$, $p(t)$ coupe une section de Poincaré Π transversalement (c'est-à-dire $x = 0$ est un point fixe hyperbolique pour l'application de Poincaré $P : V \underset{\text{ouvert}}{\subset} \Pi \rightarrow \Pi$).

Les hypothèses qu'on a supposé sur $p(t)$ donnent une approximation de l'application de Poincaré exacte notée Π_{per} au voisinage du point $x = 0, \mu = 0$ i.e.

$$\Pi_{per} : x \rightarrow Nx + M\mu + o(|x|, \mu). \quad (2.40)$$

La dimension de cette application se réduit à $(n-1)$. Pour simplifier, on suppose que l'application Π_{PDM} ne dépend pas de μ alors on obtient l'application de Poincaré globale en composant Π_{per} avec Π_{PDM} on a deux cas:

- Si $F_1^0 \neq F_2^0$, alors pour $\langle \nabla H, x \rangle < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{per} \circ \Pi_{PDM}(x) &= N(F_2 - \frac{F_{2\pi}}{F_{1\pi}}) \frac{\langle \nabla H, b_2 F_1 \rangle}{\langle \nabla H, a_2 \rangle} \left(\frac{|(x)_H|}{(a_1)_H} \right)^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|, \mu) \\ &= 2N(F_2 - \frac{F_{2\pi}}{F_{1\pi}}) \frac{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 \rangle} \left(2 \frac{|(\nabla H, x)|}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|, \mu) \end{aligned}$$

Notons :

$$w_\pi := 2(F_2 - \frac{F_{2\pi}}{F_{1\pi}} F_1) \frac{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 \rangle} \left(\frac{2}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.41)$$

Alors:

$$\Pi_{per} \circ \Pi_{PDM} : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ Nw_\pi |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

• Si $F_1^\circ = F_2^\circ := F$, Alors :

$$\begin{aligned} \Pi_{per} \circ \Pi_{PDM}(x) &= N \left(x + \frac{1}{\sqrt{(a_1)_H}} \left\{ \frac{1}{(a_1)_H} (\xi_1 - \frac{F}{F_\pi} \xi_\pi) |(x)_H|^{\frac{3}{2}} + [2(b_2 - b_1)x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{F}{F_\pi} (2(b_2 - b_1)x)_\pi |(x)_H|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{(a_2)_H} ((a_2 - a_1) - (a_{2\pi} - a_{1\pi}) \frac{F}{F_\pi}) (b_2 x)_H |(x)_H|^{\frac{1}{2}} \right\} \right) \\ &\quad + M\mu + o(|x|^2, \mu) \\ &= N \left[x + ((a_1)_H)^{\frac{-3}{2}} \xi_1 - \frac{F}{F_\pi} (a_1)_H^{\frac{-3}{2}} \xi_\pi \right] |(x)_H|^{\frac{3}{2}} + (2(b_2 - b_1)(a_1)_H)^{\frac{-1}{2}} x - \frac{2F}{F_\pi} ((b_2 - b_1)x)_\pi (a_1)_H^{\frac{-1}{2}} |(x)_H|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (-2(a_2 - a_1)(a_2)_H^{-1} (a_1)_H^{\frac{-1}{2}} + \frac{2F}{F_\pi} (a_2 - a_1)_\pi (a_2)_H^{-1} (a_1)_H^{\frac{-1}{2}}) |(x)_H|^{\frac{1}{2}} \langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} x \rangle \\ &\quad + M\mu + o(|x|^2, \mu) \end{aligned}$$

Avec ξ_1, ξ_π sont données par les expressions (2.34), (2.39) respectivement. Notons :

$$v_1 = (a_1)_H^{\frac{-3}{2}} \xi_1 \quad (2.42)$$

$$v_{1\pi} = v_1 - \frac{F}{F_\pi} (a_1)_H^{\frac{-3}{2}} \xi_\pi \quad (2.43)$$

$$v_2 = 2(b_2 - b_1)(a_1)_{\frac{1}{H}}^{-1} \quad (2.44)$$

$$v_{2\pi}x = v_2x - \frac{2F}{F_\pi}((b_2 - b_1)x)_\pi(a_1)_{\frac{1}{H}}^{-1} \quad (2.45)$$

$$v_3 = -2(a_2 - a_1)(a_2)_{\frac{1}{H}}^{-1}(a_1)_{\frac{1}{H}}^{-1} \quad (2.46)$$

$$v_{3\pi} = v_3 + \frac{2F}{F_\pi}(a_2 - a_1)_\pi(a_2)_{\frac{1}{H}}^{-1}(a_1)_{\frac{1}{H}}^{-1} \quad (2.47)$$

Donc :

$$\Pi_{\text{per}} \circ \Pi_{PDM} : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ N(x + v_{1\pi} |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{3}{2}} + v_{2\pi}x |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} \\ + v_{3\pi} \langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} x \rangle |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}}) + M\mu + o(|x|^2, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

Le théorème suivant regroupe ces résultats :

Théorème 2.1 .

Sous les hypothèses $(H_1), (H_4), (H_4)', (H_5), (H_6)$, si la trajectoire de "grazing" est une partie d'une orbite périodique hyperbolique $p(t)$ pour $\mu = 0$; alors l'application globale de Poincaré défini dans un voisinage de $p(t)$ s'écrit de la manière suivante:

- Si $F_1^\circ \neq F_2^\circ$:

$$P : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ Nw_\pi |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

Avec N, M sont données par (2.40), et w_π par (2.41).

- Si $F_1^\circ = F_2^\circ := F$,

$$P : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ Nx + v_{1\pi} |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{3}{2}} + v_{2\pi}x |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} \\ + v_{3\pi} \langle \nabla H, \frac{\partial f_2}{\partial x} x \rangle |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|^2, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

avec $v_{1\pi}, v_{2\pi}, v_{3\pi}$ sont données par les expressions (2.43), (2.45), (2.47) respectivement.

2.1.2 Application de Poincaré pour les systèmes p.w.s non autonomes dépendant d'un paramètre et présentant un point de frôlement ou point de grazing

Maintenant, on considère que le système (2.1) est non autonome dépendant d'un paramètre avec des coefficients périodiques de période T c'est-à-dire :

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, t, \mu), & \text{si } H(x) > 0 \\ F_2(x, t, \mu), & \text{si } H(x) < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Et supposons que (2.48) admet une orbite périodique hyperbolique $p(t)$ de période mT avec $m > 0$ pour $\mu = 0$, dans ce cas une approximation de l'application de Poincaré exacte est donnée aussi par la même forme (2.40) mais N une matrice $n \times n$, et M un vecteur de dimension n , et pour simplifier on suppose que l'application Π_{ZDM} ne dépend pas de μ , alors l'application de Poincaré globale est obtenue en composant Π_{ZDM} avec Π_{per} alors on a

*) Si $F_1^0 \neq F_2^0$ et $\langle \nabla H, x \rangle < 0$, on a:

$$\Pi_{per} \circ \Pi_{ZDM}(x) = 2N(F_2 - F_1) \frac{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 \rangle} \frac{(2|\langle \nabla H, x \rangle|)^{\frac{1}{2}}}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle^{\frac{1}{2}}} + M\mu + o(|x|, \mu)$$

Notons:

$$w = 2(F_2 - F_1) \frac{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 \rangle} \left(\frac{2}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

Donc:

$$\Pi_{per} \circ \Pi_{ZDM} : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ Nw|\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|^2, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

*) Si $F_1^o = F_2^o := F$ et $\langle \nabla H, x \rangle < 0$; on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{per}} \circ \Pi_{ZDM} = N(x + \frac{1}{\sqrt{(a_1)_H}} [\frac{\xi_1}{(a_1)_H} |(x)_H|^{\frac{3}{2}} \\ + 2(b_2 - b_1)x|(x)_H|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{(a_2)_H} (a_2 - a_1)(b_2x)_H |(x)_H|^{\frac{1}{2}}]) + M\mu + o(|x|^2, \mu) \end{aligned}$$

Avec ξ_1 donnée par (2.34), et dans ce cas:

$$\Pi_{\text{per}} \circ \Pi_{ZDM} : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ N(x + v_1 |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{3}{2}} + v_2 x |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} \\ + v_3 \langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} x \rangle |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}}) + M\mu + o(|x|^2, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

avec v_1, v_2, v_3 sont données respectivement par (2.42), (2.44), (2.46).

Regroupons maintenant ces résultats dans le théorème suivant

Théorème 2.2 .

Sous les hypothèses $H_1), H_4), H_4)', H_5), H_6)$, si la trajectoire de "Grazing" est une partie d'une orbite périodique hyperbolique $p(t)$ de période $mT, m > 0$; pour $\mu = 0$, Alors l'application de Poincaré globale s'écrit localement de la manière suivante :

*) Si $F_1^o \neq F_2^o$

$$P : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ Nw |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} + M\mu + o(|x|^2, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

Avec w est donnée par (55).

*) Si $F_1^o = F_2^o := F$

$$P : x \rightarrow \begin{cases} Nx + M\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle > 0 \\ N(x + v_1 |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{3}{2}} + v_2 x |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}} \\ + v_3 \langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} x \rangle |\langle \nabla H, x \rangle|^{\frac{1}{2}}) + M\mu + o(|x|^2, \mu), & \text{si } \langle \nabla H, x \rangle < 0 \end{cases}$$

Avec :

$$v_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F \rangle^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right) F^2 + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} F - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \right)^2 \right) F \right.$$

$$- \frac{1}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F \rangle^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F \left[\frac{1}{3} \langle \nabla H, \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} F^2 \rangle + \langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} F \rangle \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2}{3} \langle \nabla H, \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \right)^2 F \rangle \right] \right\}$$

$$+ \langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} F \rangle - \frac{2}{3} \langle \nabla H, \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \right)^2 F \rangle \Big\}$$

$$v_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)$$

et :

$$v_3 = \frac{-2\sqrt{2}}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F \rangle \langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F$$

Exemple 2.1 Considérons le système autonome suivant

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{si } x_2 < 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{si } x_2 > 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\text{Avec } F_1(x, \mu) = \begin{pmatrix} -(x_2 + 1) + \varepsilon(x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + \mu - 1)(-x_1) \\ x_1 + \varepsilon(x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + \mu - 1)(-x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$F_2(x, \mu) = \begin{pmatrix} -2(x_2 + \frac{1}{2}) + \varepsilon(x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2 + \mu - \frac{1}{4})(-x_1) \\ 2x_1 + \varepsilon(x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2 + \mu - \frac{1}{4})(-x_2 - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Choisissons $S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, H(x_1, x_2) = 0\}$ avec $H(x_1, x_2) = -x_2$

$$S^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 < 0\}, S^- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 > 0\}.$$

1/ Vérifions les hypothèses $(H_1), (H_4), (H_4)', (H_5), (H_6)$ de "Grazing" au point $(0,0)$:

$$H(0,0) = 0$$

$$\nabla H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \nabla H(0,0), F_i(0,0) \rangle = 0, \text{ avec } F_i(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2 H(\phi_i(0,t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \langle \nabla H(0,0), \frac{\partial F_i(0,0)}{\partial x} F_i(0,0) \rangle + \langle \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_i(0,0), F_i(0,0) \rangle$$

$$\text{On a : } \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\varepsilon \end{pmatrix}, \frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2}\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) F_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) F_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2 H(\phi_1(0,t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = 1 > 0, \frac{d^2 H(\phi_2(0,t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = 2 > 0$$

Alors le point $(0,0)$ est un point de "Grazing", les conditions permettant d'éviter les solutions de "sliding" sont aussi vérifiées en effet:

$$\text{Soit } L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \langle L, \nabla H(0,0) \rangle = 0 \text{ et}$$

$$\langle L, F_1(0,0) \rangle \cdot \langle L, F_2(0,0) \rangle = \langle L, F_1(0,0) \rangle^2 = (-1)^2 = 1 > 0.$$

2/ Determinons l'application de Poincaré associé au système (2.50) :

- Calculons tout d'abord une solution du système (2.50) dans S^+ :

On a

$$\dot{x} = F_1(x, \mu) \tag{2.51}$$

passons aux coordonnées polaires et posons :

$x_1 = r \cos \theta$, $x_2 + 1 = r \sin \theta$, alors le système (2.51) s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{r} = r\varepsilon(1 - \mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (2.52)$$

Une solution de ce système est :

$$\phi_{t,\mu}(r_0, \theta_0) = \left(\left(\frac{1}{1-\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{1-\mu} \right) e^{-2\varepsilon(1-\mu)t} \right)^{\frac{-1}{2}}, t + \theta_0 \right)$$

D'autre part, pour $\mu = 0$, le système (2.50) devient:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, 0), & \text{si } x_2 < 0 \\ F_2(x, 0), & \text{si } x_2 > 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

et la solution de (2.53) est :

$$\phi_{t,0}(r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2\varepsilon t} \right)^{\frac{-1}{2}}, t + \theta_0 \right) = (r(t), \theta(t))$$

- Calculons maintenant M et N pour le système (2.51):

Le système (2.51) possède pour $\mu = 0$ un cycle limite $r = 1$ stable si $\varepsilon > 0$.

Pour $r_0 = x_{2,0} + 1$, $\theta_0 = 0$ et $t = 2\pi$, $r(t)$ doit définir l'application de Poincaré exacte notée P' donnée par:

$$x \rightarrow P'(x) = \left(\frac{1}{1-\mu} + \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1-\mu} \right) e^{-4\pi\varepsilon(1-\mu)} \right)^{\frac{-1}{2}}$$

On a :

$$\frac{\partial P'}{\partial x} \Big|_{x=0, \mu=0} = e^{-4\pi\varepsilon} = N$$

$$\frac{\partial P'}{\partial \mu} \Big|_{x=0, \mu=0} = \frac{1}{2}(e^{-4\pi\varepsilon} - 1) = M$$

- Calculons alors les coefficients v_i , $v_{i\pi}$, $i = 1, 2, 3$, défini dans le théorème 2.2 on a :

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2\varepsilon \\ 0 & -6\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 0 & -3\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(0,0)\right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2-\varepsilon \\ -2\varepsilon & -1+4\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(0,0)\right)^2 = \begin{pmatrix} -4 & \varepsilon \\ -\varepsilon & -4+\frac{1}{4}\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) \cdot F(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 4\varepsilon \\ -\frac{1}{2}\varepsilon & -2+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)\right)^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0)\right)^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(0,0) F^2(0,0) = 2f_1^o f_2^o \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) + (f_1^o)^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0,0) + (f_2^o)^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2}(0,0)$$

avec : $f_1^o = -1, f_2^o = 0$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(0,0) F^2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\varepsilon \end{pmatrix}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(0,0) F^2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

et donc :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ (\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{4}{3})\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On choisit la section de poincaré $\Pi = \{(x_1, x_2)/x_1 = 0\}$ avec $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire
 $(\langle \pi, F_i^o \rangle \neq 0)$

Alors:

$$v_{1\pi} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} + 3 \\ (\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{4}{3})\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_{2\pi} = \begin{pmatrix} (1 - 2\sqrt{2})x_2 \\ 3\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}, v_{3\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et donc l'application de Poincaré globale est :

$$P : x \rightarrow \begin{cases} e^{-4\pi\varepsilon} x + \frac{1}{2}(e^{-4\pi\varepsilon} - 1)\mu + o(|x|, \mu), & \text{si } x < 0 \\ e^{-4\pi\varepsilon}(x + \sqrt{2}(2\varepsilon + \frac{5}{3})x^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{2}(e^{-4\pi\varepsilon} - 1) + o(|x|^2, \mu), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2.2 L'application de Poincaré pour les systèmes p.w.s définis de part et d'autre de surface en corne ou "corner-collision"

Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_2(x), & \text{si } H_1(x) < 0, H_2(x) < 0 \text{ (région } S_2) \\ F_1(x), & \text{ailleurs i.e (région } S_1) \end{cases} \quad (2.54)$$

Avec $x(t) \in D \underset{\text{ouvert}}{\subset} \mathbb{R}^n$. F_1, F_2 sont deux fonctions vectorielles (au moins C^2), H_1, H_2 sont deux fonctions définissant les ensembles Σ_1, Σ_2 telle que:

$$\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / H_1(x) = 0\}$$

et :

$$\Sigma_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / H_2(x) = 0\}$$

L'intersection entre Σ_1 et Σ_2 forme une corne noté C telle que l'angle entre Σ_1 et Σ_2 est différent de 0 c'est-à-dire tel que :

$$\nabla H_1 \wedge \nabla H_2 \neq \vec{0} \quad (H_7)$$

Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces de codimension 1, et C est de codimension 2 (Voir figure 30)

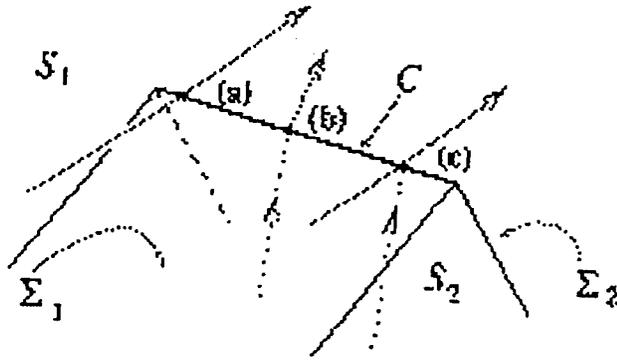


Figure 30

Le passage des trajectoires entre les deux régions S_1 et S_2 se fait de deux manières: extérieur et intérieur par rapport à C . Ces trajectoires sont donc topologiquement distinctes, ce qui veut dire qu'en réalité on a deux types de collision: collision interne et collision externe.

Supposons que le système (2.54) possède une orbite périodique notée $p(t)$ dans S_1 qui coupe C en un point c , et telle que les champs de vecteurs F_1, F_2 sont tangents à C (i.e tangents à Σ_1 et Σ_2 au point d'intersection c).

Calculons maintenant l'application de Poincaré dans ces deux cas :

2.2.1 Application de Poincaré pour les systèmes P.W.S correspondant à une collision externe (ou "External corner collision")

Etudions la dynamique du système (2.54) autour du point d'intersection c (Voir figure 31) (on ramène pour simplifier le point c en 0; en effectuant un changement de variables).

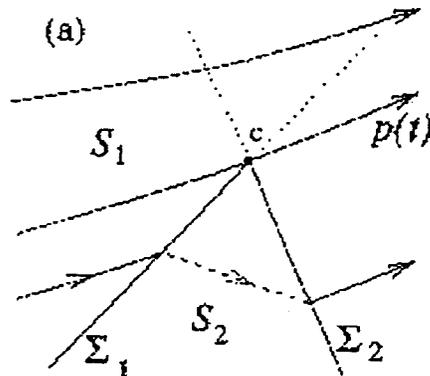


Figure 31

Pour éviter les solutions où il se produit un glissement sur la surface on impose les conditions

$$\langle \nabla H_1(x), F_i(x) \rangle < 0, \quad \langle \nabla H_2(x), F_i(x) \rangle > 0, \quad i = 1, 2. \quad \forall x \in v_c \subset C \quad (H_8)$$

Et en appliquant le même raisonnement que pour le cas du "Grazing", on calcule les applications ZDM et PDM.

1^{ère} étape: Calcul de l'application ZDM:

Utilisons alors une approximation du flot $\phi_i(x, t)$ associé au système (2.54) au voisinage du point $x = 0$, c'est-à-dire :

$$\phi_i(x, t) = x + F_i^o t + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)^o \left(xt + F_i^o \frac{t^2}{2}\right) + o(\|x\|^2, \|x\|t, t^2); i = 1, 2 \quad (S_I)$$

telle que : $\phi_i(x, 0) = x$

alors la construction de la ZDM qui permet de déplacer le point x_0 à x_3 (illustré sur figure 32),

se fait en 3 étapes :

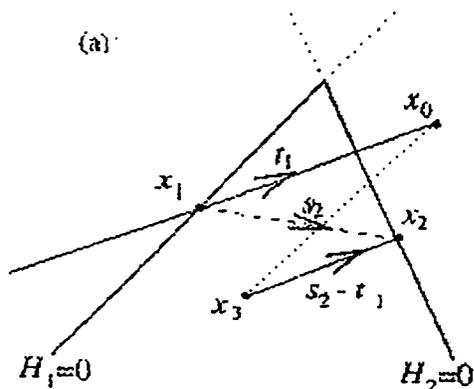


Figure 32

- Résoudre le système (S_1) : en partant de x_0 pour arriver à x_1 pendant un temps $(-t_1)$ avec $H_1(x_1) = 0$
- Résoudre le système (S_2) : en partant de x_1 pour arriver à x_2 pendant un temps s_2 avec $H_2(x_2) = 0$.
- Résoudre le système (S_1) : en partant de x_2 pour arriver à x_3 en un temps $t_1 - s_2$.

Par construction, t_1 est solution de l'équation:

$$H_1(x_1) = 0 \quad \text{i.e.} \quad H(\phi_1(x_0, -t_1(x_0))) = 0. \quad (2.55)$$

le développement de Taylor d'ordre 1 de H_1 autour du point $x = 0, t = 0$ est donné par:

$$\begin{aligned} & -t_1(x_0) \frac{\partial H_1}{\partial t_1}(\phi_1(x_0, -t_1(x_0)))|_{(x_0, t_1)=(0,0)} + \frac{\partial H_1}{\partial x_0}(\phi_1(x_0, -t_1(x_0)))|_{(x_0, t_1)=(0,0)} x_0 \\ & + o(|x_0|, t_1) = -t_1(x_0) \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}(x_0, -t_1(x_0)) \right) (0, 0) + \\ & \frac{\partial H_1}{\partial x_0}(\phi_1(x_0, -t_1(x_0))) (0, 0) x_0 + o(|x_0|, t_1) = -t_1(x_0) \langle \nabla H_1^0, F_1^0 \rangle + \end{aligned}$$

$$\langle \nabla H_1^0, x_0 \rangle + o(|x_0|, t_1). \quad (2.56)$$

$$(2.56) \Rightarrow t_1(x_0) = \frac{\langle \nabla H_1^0, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^0, F_1^0 \rangle} + o(|x_0|). \quad (2.57)$$

D'autre part, à partir de (S_1) , x_1 s'écrit:

$$x_1 = \phi_1(x_0, -t_1(x_0)) = x_0 - F_1^\circ t_1(x_0) + o(|x_0|). \quad (2.58)$$

De la même manière, déterminons le temps s_2 solution de l'équation:

$$H_2(x_2) = H_2(\phi_2(x_1, s_2(x_1))) = 0,$$

On trouve:

$$s_2(x_1) = -\frac{\langle \nabla H_2^\circ, x_1 \rangle}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle}. \quad (2.59)$$

x_2 s'écrit aussi:

$$x_2 = \phi_2(x_1, s_2(x_1)) = x_1 + F_2^\circ s_2(x_1) + o(|x_1|). \quad (2.60)$$

et finalement, on obtient:

$$\begin{aligned} x_3 &= \phi_1(x_2, t_1 - s_2) & (2.61) \\ &= x_2 + F_1^\circ(t_1(x_0) - s_2(x_1)) + o(|x_2|) \\ &= x_1 + F_2^\circ s_2(x_1) + F_1^\circ(t_1(x_0) - s_2(x_1)) + o(|x_1|) \\ &= x_0 - F_1^\circ t_1(x_0) + F_2^\circ s_2(x_1) + F_1^\circ t_1(x_0) - F_1^\circ s_2(x_1) + o(|x_0|) \\ &= x_0 + \frac{(F_1^\circ - F_2^\circ)}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle} \langle \nabla H_2^\circ, x_1 \rangle + o(|x_0|) \\ &= x_0 + \frac{(F_1^\circ - F_2^\circ)}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle} \langle \nabla H_2^\circ, (x_0 - F_1^\circ \frac{\langle \nabla H_1^\circ, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^\circ, F_1^\circ \rangle}) \rangle + o(|x_0|) \\ &= x_0 + \frac{(F_1^\circ - F_2^\circ)}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle} (\langle \nabla H_2^\circ, x_0 \rangle - \langle \nabla H_2^\circ, F_1^\circ \frac{\langle \nabla H_1^\circ, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^\circ, F_1^\circ \rangle} \rangle) + o(|x_0|) \\ &= x_0 + \frac{(F_1^\circ - F_2^\circ)}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle} (\langle \nabla H_2^\circ, x_0 \rangle - \langle \nabla H_2^\circ, F_1^\circ \rangle (\frac{\langle \nabla H_1^\circ, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^\circ, F_1^\circ \rangle})) + o(|x_0|) \\ &= x_0 + (F_1^\circ - F_2^\circ) [\langle \frac{\nabla H_2^\circ}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle}, x_0 \rangle - \langle \frac{\nabla H_2^\circ}{\langle \nabla H_2^\circ, F_2^\circ \rangle}, F_1^\circ \rangle (\frac{\langle \nabla H_1^\circ, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^\circ, F_1^\circ \rangle})] + o(|x_0|). \end{aligned}$$

On note :

$$J_i := \frac{\nabla H_i^\circ}{\langle \nabla H_i^\circ, F_i^\circ \rangle}, i = 1, 2, a_2 = J_2 - \langle J_2, F_1^\circ \rangle J_1 \quad (2.62)$$

alors (2.61) devient:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_0 + (F_1^o - F_2^o)(\langle J_2, x_0 \rangle - \langle J_2, F_1^o \rangle \langle J_1, x_0 \rangle) + o(|x_0|) \\
 &= x_0 + (F_1^o - F_2^o) \langle J_2 - \langle J_2, F_1^o \rangle J_1, x_0 \rangle + o(|x_0|) \\
 &= x_0 + (F_1^o - F_2^o) \langle a_2, x_0 \rangle + o(|x_0|)
 \end{aligned}$$

Alors on a:

proposition 2.4 *Sous les hypothèses (H₇) et (H₈), l'application ZDM notée Π_{ZDM} au voisinage du point de frôlement est définie localement par:*

$$\Pi_{ZDM} : x \rightarrow \begin{cases} x, & \text{avant l'intersection} \\ x + (F_1^o - F_2^o) \langle a_2, x \rangle + o(|x_0|), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

avec a_2 est donnée par (2.62).

2^{ème} étape: Calcul de l'application PDM:

Posons $x = (y, z)$ avec $y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^{n-1}$.

On choisi une section de Poincaré notée Γ , telle que :

$$\Gamma = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n, y = 0\}$$

transverse au champ de vecteurs $(F_1, F_2)^T$, la construction de l'application PDM qui permet de

déplacer le point x_0 à x_3 (voir figure 33) se fait de la manière suivante:

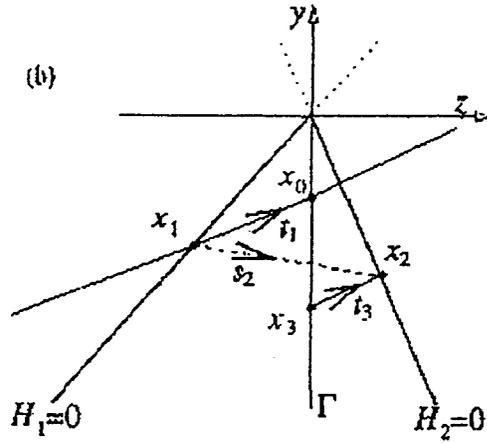


Figure 33

- Résoudre le système (S_1) , en partant de $x_0 = (0, z_0)$ pour arriver à $x_1 = (y_1, z_1)$ en un temps $(-t_1)$ avec $H_1(x_1) = 0$.
- Résoudre le système (S_2) , en partant de x_1 pour arriver à x_2 en un temps s_2 avec $H_2(x_2) = 0$
- Résoudre le système (S_1) , en partant de x_2 pour arriver à x_3 en un temps $(-t_3)$.

On fait les mêmes calculs que le cas de ZDM et pour simplifier on note $F_i = (f_i, g_i)$

Où f_i est la 1^{ère} composante de F_i et g_i regroupe les $(n-1)$ autres composantes de F_i ; et on obtient :

$$\phi_i((y, z), t) = (y + f_i^o t + o(y, |z|); z + g_i^o t + o(y, |z|))$$

$f_i^o \neq 0, i = 1, 2$ par la condition de transversalité.

En particulier: $y_1 = -f_1^o t_1(0, z_0) + o(z_0)$ et :

$$x_3 = (0, z) = \phi_1(x_2, -t_3(x_2)) = (y_2 - f_1^o t_3(x_2) + o(y_2, |z_2|); z_2 - g_1^o t_3(x_2) + o(y_2, |z_2|))$$

ceci implique:

$$0 = y_2 - f_1^o t_3(x_2) + o(y_2, |z_2|) \Rightarrow t_3(x_2) = \frac{y_2}{f_1^o} + o(y_2, |z_2|)$$

et :

$$z_3 = z_2 - g_1^o t_3(x_2) + o(y_2, |z|). \quad (2.63)$$

Utilisons (2.57), (2.58), (2.59), (2.60), alors (2.63) s'écrit:

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + g_2^o s_2(y_1, z_1) - g_1^o t_3(y_2, z_2) + o(y_1, |z_1|) \\ &= z_0 - g_1^o t_1(0, z_0) + g_2^o s_2(y_1, z_1) - g_1^o t_3(y_2, z_2) + o(y_0, |z_0|) \\ &= z_0 - g_1^o t_1(0, z_0) + t_3(y_2, z_2) + g_2^o s_2(y_1, z_1) + o(y_0, |z_0|) \\ &= z_0 - g_1^o \left(\frac{\langle \nabla H_1^o, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^o, F_1^o \rangle} + \frac{-f_1^o t_1(0, z_0) + f_2^o s_2(y_1, z_1)}{f_1^o} \right) + g_2^o \frac{\langle \nabla H_2^o, x_1 \rangle}{\langle \nabla H_2^o, F_2^o \rangle} + o(y_0, |z_0|) \\ &= z_0 - g_1^o \frac{f_2^o}{f_1^o} s_2(y_1, z_1) + g_2^o s_2(y_1, z_1) + o(y_0, |z_0|) \\ &= z_0 + (-g_2^o + g_1^o \frac{f_2^o}{f_1^o}) \frac{\langle \nabla H_2^o, x_1 \rangle}{\langle \nabla H_2^o, F_2^o \rangle} + o(z_0) \\ &= z_0 + \frac{(-g_2^o + g_1^o \frac{f_2^o}{f_1^o})}{\langle \nabla H_2^o, F_2^o \rangle} (\langle \nabla H_2^o, x_0 \rangle - \langle \nabla H_2^o, F_1^o \rangle \frac{\langle \nabla H_1^o, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^o, F_1^o \rangle}) + o(|z_0|) \\ &= z_0 + (-g_2^o + g_1^o \frac{f_2^o}{f_1^o}) (\langle \frac{\nabla H_2^o}{\langle \nabla H_2^o, F_2^o \rangle}, x_0 \rangle - \langle \frac{\nabla H_2^o}{\langle \nabla H_2^o, F_2^o \rangle}, F_1^o \rangle \frac{\langle \nabla H_1^o, x_0 \rangle}{\langle \nabla H_1^o, F_1^o \rangle}) + o(z_0) \end{aligned}$$

alors on a:

proposition 2.5 Sous les hypothèses (H_7) et (H_8) , l'application PDM, notée Π_{PDM} au voisinage du point de frolement est définie localement par:

$$\Pi_{PDM} : z \rightarrow \begin{cases} z, & \text{avant l'intersection} \\ z + (\frac{g_1^o}{f_1^o} f_2^o - g_2^o) \langle a_2^*, z \rangle + o(|z|), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

Où $a_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ est le vecteur composé de $(n-1)$ composantes de a_2 donné par l'expression (2.62).

Application de Poincaré pour les systèmes P.W.S autonomes dépendant d'un paramètre correspondant à une collision externe

On suppose maintenant que le système (2.54) dépend d'un paramètre μ et que pour $\mu = 0$. Ce système possède une orbite périodique $x(t) = p(t)$ telle que $x = 0 = p(0)$ est le point d'intersection de $p(t)$ avec C et supposons de plus que $p(t)$ est hyperbolique et isolé. Dans ce cas, on utilise la section de Poincaré Γ et on donne une approximation de l'application de Poincaré exacte notée Π_{per}^* par :

$$\Pi_{per}^* : z \rightarrow p^* z + q^* \mu + o(|z|, \mu) \quad (2.64)$$

avec p^* une matrice $(n-1)(n-1)$ et q^* un vecteur non nul de dim $(n-1)$.

Pour simplifier on suppose que l'application Π_{PDM} ne dépend pas de μ , alors on obtient l'application de Poincaré globale, en composant Π_{PDM} avec Π_{per}^* et alors on a :

$$\Pi_{per}^* \circ \Pi_{PDM} : z \rightarrow \begin{cases} p^* z + q^* \mu + o(|z|, \mu), & \text{avant l'intersection} \\ p^* (z + (g_1^o \frac{f_2^o}{f_1^o} - g_2^o) < a_2^*, z >) \\ + q^* \mu + o(|z|, \mu), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

Regroupons ces résultats dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 .

Sous les hypothèses H_7) et H_8); si la trajectoire de frôlement ou "corner-colliding trajectory" est une partie d'une orbite périodique hyperbolique $p(t)$, pour $\mu = 0$, alors l'application de Poincaré globale associée dans un voisinage de $p(t)$ s'écrit localement pour le système (2.54):

$$z \rightarrow \begin{cases} p^* z + q^* \mu + o(|z|, \mu), & \text{avant l'intersection} \\ p^* (z + (g_1^o \frac{f_2^o}{f_1^o} - g_2^o) < a_2^*, z >) \\ + q^* \mu + o(|z|, \mu), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

avec p^* et q^* sont donnés par (2.64) et a_2^* est le vecteur composé de $(n-1)$ première composante de a_2 donnée en (2.62).

Application de Poincaré pour les systèmes P.W.S non autonomes dépendant d'un paramètre correspondant à une collision externe

Maintenant, on considère que le système (2.54) dépend d'un paramètre μ et est non autonome avec des coefficients périodiques de période T i.e:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_2(x, t, \mu) & \text{si } H_1(x) < 0, H_2(x) < 0 \text{ (région } S_2) \\ F_1(x, t, \mu) & \text{ailleurs (région } S_1) \end{cases} \quad (2.65)$$

On suppose que (2.65) admet une orbite périodique et hyperbolique $p(t)$ de période mT , avec $m > 0$ pour $\mu = 0$ telle que le point de frôlement $x = 0 = p(0)$ est unique dans un voisinage de $p(t)$, et donc une approximation locale de l'application de Poincaré exacte notée Π_{per} au voisinage du point $x = 0, \mu = 0$ est donnée par:

$$\Pi_{per} : x \rightarrow px + q\mu + o(|x|, \mu). \quad (2.66)$$

avec p une matrice $n \times n$ et q un vecteur non nul de dim n .

Pour simplifier, on suppose que l'application Π_{ZDM} ne dépend pas de μ . Alors l'application de Poincaré globale est obtenue en composant Π_{ZDM} avec Π_{per} et alors on a:

$$\Pi_{per} \circ \Pi_{PDM} : x \rightarrow \begin{cases} px + q\mu + o(|x|, \mu), & \text{avant l'intersection} \\ p(x + (F_1^o - F_2^o) < a_2; x >) \\ +q\mu + o(|x|, \mu), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

Et donc on a le résultat suivant:

Théorème 2.4 .

Sous les hypothèses H_7) et H_8) ;si la trajectoire de frôlement est une partie d'une orbite périodique et hyperbolique $p(t)$ de période mT avec $m > 0$ pour $\mu = 0$, alors l'application de Poincaré globale dans un voisinage de $p(t)$ pour le système (2.65) s'écrit localement de la manière suiv-

ante:

$$z \rightarrow \begin{cases} pz + q\mu + o(|z|, \mu), & \text{avant l'intersection} \\ p(z + (F_1^o - F_2^o) \langle a_2, z \rangle) \\ + q\mu + o(|z|, \mu), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

avec p, q donnés par (2.66), a_2 est donnée par (2.62).

2.2.2 Application de Poincaré pour les systèmes P.W.S correspondant à une collision interne (ou "Internal corner collision")

Pour étudier la dynamique du système (2.54), dans ce cas (voir figure 34), les conditions pour éviter les solutions de glissement sont:

$$\langle \nabla H_1(x), F_i(x) \rangle > 0, \langle \nabla H_2(x), F_i(x) \rangle > 0, i=1, 2, \forall x \in v_c \subset C \quad (H_9)$$

Ces conditions sont choisies de manière que les champs de vecteurs F_1, F_2 sont choisis de la manière illustrée sur la figure suivante:

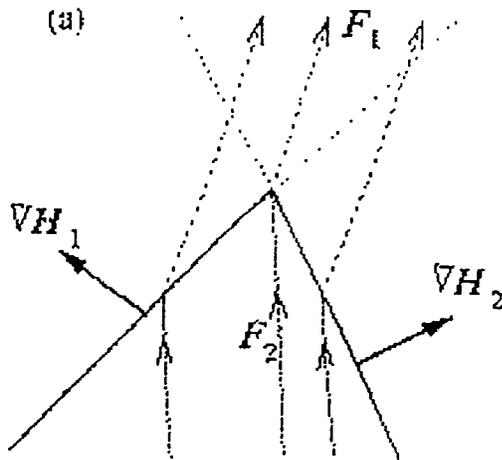


Figure 34

Les mêmes type de calculs sont faits que pour le paragraphe précédent, mais en effectuant cette fois une rotation de $\frac{-\pi}{2}$ ce qui se ramène à remplacer $-\nabla H_2$ par ∇H_1 et ∇H_1 par ∇H_2 .

(Voir figure 35)

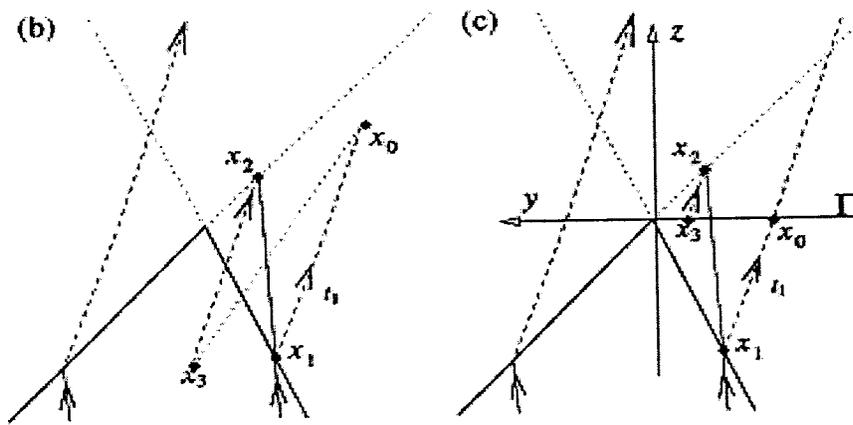


Figure 35

Et donc on a pour le système non autonome (2.65) le résultat suivant:

Théorème 2.5 .

Sous les hypothèses H_7) et H_9); si la trajectoire de frôlement du système (2.65) est une partie d'une orbite périodique hyperbolique $p(t)$ de période mT avec $m > 0$ pour $\mu = 0$, alors l'application de Poincaré est donnée localement par:

$$x \rightarrow \begin{cases} px + q\mu + o(|x|, \mu), & \text{avant l'intersection} \\ p(x + (F_2^o - F_1^o) < a_1, x >) \\ +q\mu + o(|x|, \mu), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

Avec $a_1 = J_1 - \langle J_1, F_2^o \rangle > J_2$ telle que $J_i = \frac{\nabla H_i}{\langle \nabla H_i, F_i \rangle}$ et p et q sont donnés en (2.66).

Et pour le système autonome (2.54) on a:

Théorème 2.6 .

Sous les hypothèses H_7, H_9); si la trajectoire de frôlement du système (2.54) est une partie d'une orbite périodique et hyperbolique $p(t)$ pour $\mu = 0$, alors l'application de Poincaré globale s'écrit localement :

$$z \rightarrow \begin{cases} p^*z + q^*\mu + o(|z|, \mu), & \text{avant l'intersection} \\ p^*(z + (g_2^o \frac{f_1^o}{f_2^o} - g_1^o) < a_1^*, z >) \\ + q^*\mu + o(|z|, \mu), & \text{après l'intersection} \end{cases}$$

avec a_1^* est le vecteur composé de $(n - 1)$ composantes de a_1 , et p^*, q^* sont donnés en (2.64).

Illustrons ceci par un exemple:

Exemple.

Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma, \\ \dot{y} = \delta, \\ \dot{r} = \varepsilon(a - r), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } x > 0, y > 0, y < x \tan\beta & \text{(région } S_2) \\ \text{ailleurs} & \text{(région } S_1) \end{cases} \quad (2.67)$$

Avec $x + 1 = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \gamma, \delta, \beta, \varepsilon$ et a sont des constantes réelles telle que :

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad \delta > \gamma \tan\beta$$

1. Vérifions les hypothèses de corner collision:

Ecrivant le 2^{ème} sous système de (2.67) en fonction de $X = (x, y)^T$, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon(x + 1)(a - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}) - y \\ \dot{y} = \varepsilon y(a - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}) + (x + 1) \end{cases}$$

On choisit: $H_1(x, y) = -y, \quad H_2(x, y) = y \cos\beta - x \sin\beta$

Pour $r_0 = x_0 + 1, \theta = 0$ et $t = 2\pi$, $r(t)$ défini l'application de Poincaré c'est-à-dire :

$$x_0 \rightarrow P(x_0) = \frac{\alpha(x_0 + 1)e^{2\varepsilon\alpha\pi}}{\alpha(x_0 + 1)e^{2\varepsilon\alpha\pi} + \alpha - (x_0 + 1)}$$

Alors pour $x_0 > 0$, on a :

$$t_1 = 0 + o(|x_0|), \quad s_2 = \frac{x_0 \tan \beta}{\gamma \tan \beta - \delta}, \quad \hat{t} = t_1 - s_2 = \frac{x_0 \tan \beta}{\delta - \gamma \tan \beta}$$

Et en coordonnées polaire au temps \hat{t} , on a :

$$\hat{r} \cos \hat{\theta} = x_0 + \gamma \hat{t} + 1; \quad \hat{r} \sin \hat{\theta} = \delta \hat{t}$$

L'expression de l'application de Poincaré pour $x_0 > 0$ est obtenue en remplaçant t par $2\pi - \hat{t}$ et (r_0, θ_0) par $(\hat{r}, \hat{\theta})$ dans $r(t)$, on a alors :

$$x_0 \rightarrow \frac{\alpha \hat{r} e^{-\varepsilon\alpha(2\pi - \hat{t})}}{\hat{r} e^{-\varepsilon\alpha(2\pi - \hat{t})} + \alpha - \hat{t}}, \quad x_0 > 0$$

avec \hat{r}, \hat{t} sont en fonction de x_0 .

Cette application exacte, nous donne l'application globale PDM, on prend $\mu = \alpha - 1$, et on note

$$P_\mu(r) = \frac{(\mu + 1)e^{2\varepsilon(\mu+1)\pi}}{r e^{2\varepsilon(\mu+1)\pi}}$$

$$\frac{\partial P_\mu(r)}{\partial r} \Big|_{r=1, \mu=0} = e^{-2\varepsilon\pi} = N, \quad \frac{\partial P_\mu(r)}{\partial r} \Big|_{r=1, \mu=0} = 1 - e^{-2\varepsilon\pi} = M$$

Ainsi, on a $f_1^o = 1, g_1^o, g_2^o = \gamma, f_2^o = \delta$.

Calculons a_2^* , on utilise (2.62), alors on a :

$$a_2 = \left(\frac{-\sin \beta}{-\gamma \sin \beta + \delta \cos \beta}, 0 \right)^T$$

et donc $a_2^* = \frac{\tan \beta}{\gamma \tan \beta - \delta}$

Alors l'application de Poincaré globale du système (2.67) est donnée par

$$x_0 \rightarrow \begin{cases} e^{-2\varepsilon\pi}x_0 + (1 - e^{-2\varepsilon\pi})(a - 1), & \text{si } x_0 < 0 \\ \delta\left(\frac{e^{-2\varepsilon\pi}}{\delta - \gamma\tan\beta}x_0\right) + (1 - e^{-2\varepsilon\pi})(a - 1), & \text{si } x_0 > 0 \end{cases}$$

Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté, une classe spéciale d'application de Poincaré associées à des systèmes hybrides continus par morceaux, ces résultats seront utilisés dans le chapitre suivant pour étudier des bifurcations spécifiques correspondant à ce type de systèmes

Chapitre 3

C_bifurcations et Contrôle d'un cycle limite

Dans la première partie de ce chapitre, les C_bifurcations concernant les orbites associées aux systèmes continus par morceaux (appelés C_bifurcations) sont présentées. Dans la deuxième partie, un contrôle de cette bifurcation est proposé pour les systèmes définis dans \mathbb{R}^2 . [6], [7].

3.1 C_bifurcations

Considérons le système paramétré suivant :

$$\dot{x} = f(x, t, \mu). \quad (3.1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux, $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur paramètre.

On suppose que l'espace de phase de (3.1) est séparé par plusieurs régions G_i pour lesquelles f est continue.

Définition 3.1 *Si une partie des trajectoires de (3.1) est continue et non dérivable sur l'un des bords de G_i noté ϕ_0 et que pour une certaine valeur de μ il existe une trajectoire tangente à ce bord, alors on appelle cet événement la C-bifurcation ou "border-collision bifurcation"*

(Voir figure 37).

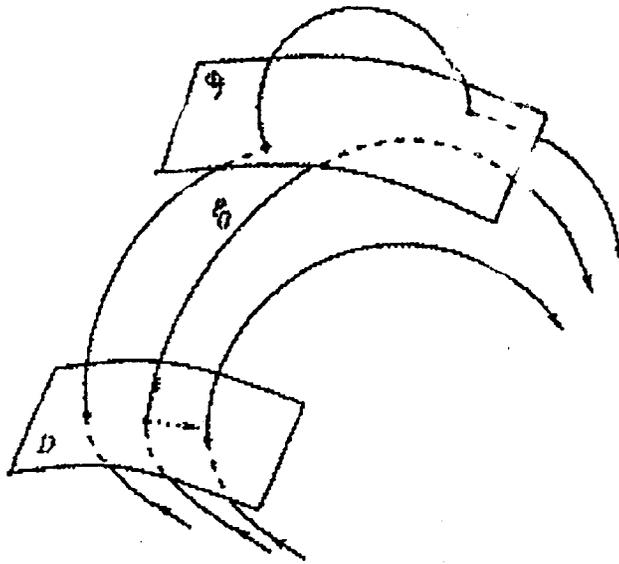


Figure 37

Soit L_0 une orbite périodique tangente à ϕ_0 pour $\mu = \mu_0$ (pour simplifier on prend $\mu_0 = 0$).

Soit D une section de Poincaré convenablement choisie transverse au champ de vecteurs dans un côté de ϕ_0 et soit M_0 le point fixe sur D correspondant au cycle limite L_0 , on note par S une droite sur D qui passe par M_0 et on suppose qu'elle comporte aussi les points des autres trajectoires tangents à ϕ_0 . S divise l'espace de phase en deux régions D^- et D^+ telle que les trajectoires qui émergent de D^- coupent ϕ_0 mais les trajectoires qui passent par D^+ ne coupent

pas ϕ_0 (voir figure 38)

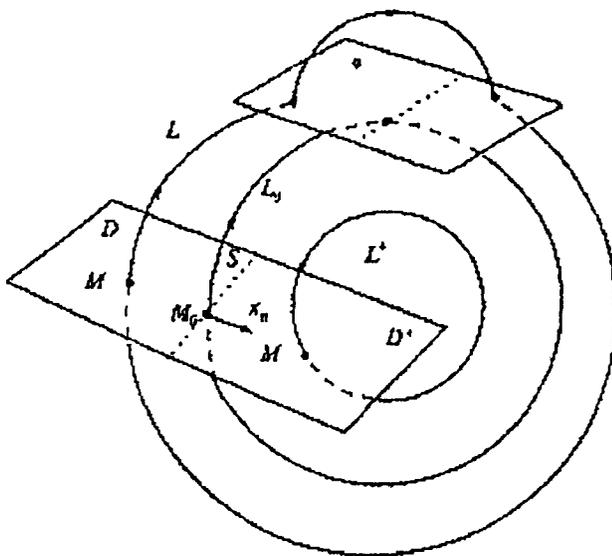


Figure 38

On introduit les applications $\Pi^- : D^- \rightarrow D$ et $\Pi^+ : D^+ \rightarrow D$ et on considère sur D les coordonnées $x_i, i = 1, \dots, n$. en supposant que le point fixe M_0 est l'origine telle que:

$$\begin{cases} \text{Si } x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D^- \Leftrightarrow x_n^* < 0 \\ \text{Si } x^* \in D^+ \Leftrightarrow x_n^* > 0 \\ \text{Si } x^* = 0 \Leftrightarrow x_n^* \in S. \end{cases}$$

Dans un voisinage de M_0 l'application de Poincaré s'écrit localement :

$$x^{(k+1)} = \begin{cases} A_1 x^{(k)} + c\mu, & \text{si } x_n^{(k)} > 0 \\ A_2 x^{(k)} + c\mu, & \text{si } x_n^{(k)} < 0 \end{cases}$$

Avec $A_1 = \frac{\partial \Pi^+}{\partial x} \Big|_{x=0}; A_2 = \frac{\partial \Pi^-}{\partial x} \Big|_{x=0}; C = \frac{\partial \Pi^-}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = \frac{\partial \Pi^+}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$ telle que $A_1 = [a_{ij}^{(1)}]; A_2 = [a_{ij}^{(2)}]$.

vérifiant :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} \text{ si } j \neq n$$

Soient $p^*(\lambda); p^{**}(\lambda)$ les polynômes caractéristiques correspondant aux applications $\Pi^-; \Pi^+$ i.e

$$p^*(\lambda) = |A_2 - \lambda I|, p^{**}(\lambda) = |A_1 - \lambda I|$$

Alors une classification de C-bifurcations est donné par :

proposition 3.1 .

$C_1/$ Si $p^*(1)p^{**}(1) > 0$, alors, il existe une orbite périodique définie dans une des deux parties de l'ensemble (correspondant au point fixe M^*) et qui se transforme au point de la C-bifurcation $\mu = 0$ en une orbite définie dans l'autre partie du domaine (correspondant au point M^{**})

$C_2/$ Si $p^*(1)p^{**}(1) < 0$, alors il existe deux orbites périodiques correspondant aux points fixes M^* et M^{**} définies dans un côté seulement de la frontière. Ces orbites se heurtent sur la frontière au point de bifurcation $\mu = 0$ et disparaissent alors en passant de l'autre côté au point de la C-bifurcation.

$C_3/$ Si $p^*(-1)p^{**}(-1) < 0$. alors une nouvelle solution périodique apparaît.

Preuve: Soient M^* et M^{**} deux points fixes de Π^- et Π^+ respectivement c'est-à-dire :

$$M^* = A_2 M^* + c\mu, m_n^* < 0.$$

$$M^{**} = A_1 M^{**} + c\mu, m_n^{**} > 0$$

avec: $m_k^* = [M^*]_k, m_k^{**} = [M^{**}]_k$.

On considère que les matrices $A_1 - I, A_2 - I$ sont inversibles alors on a :

$$M^* = -(A_2 - I)^{-1} c\mu = -\frac{\text{adj}(A_2 - I)}{p^*(1)} c\mu.$$

$$M^{**} = -(A_1 - I)^{-1} c\mu = -\frac{\text{adj}(A_1 - I)}{p^{**}(1)} c\mu.$$

c'est -à- dire :

$$m_k^* = \frac{b_k^*}{p^*(1)} \mu, m_k^{**} = \frac{b_k^{**}}{p^{**}(1)} c\mu$$

avec :

$$b_k^* = [-adj(A_2 - I)c]_k \text{ et } b_k^{**} = [-adj(A_1 - I)c]_k$$

On note que $b_n^* = b_n^{**} := b_n$, ainsi :

$$m_n^* = \frac{b_n}{p^*(1)}\mu, m_n^{**} = \frac{b_n}{p^{**}(1)}\mu$$

On a $m_n^* < 0$ et m_n^{**} pour que chaque solution existe; et donc les deux solutions coexiste pour $\mu < 0$ ($\mu > 0$) et aussi pour $\mu > 0$ ($\mu < 0$) si :

$$p^*(1)p^{**}(1) < 0$$

et aussi existe pour signes opposé de μ si :

$$p^*(1)p^{**}(1) > 0$$

Maintenant on suppose qu'on a un doublement de période qui suit une C_bifurcation (voir figure 39) ici on a une solution deux fois périodique caractérisé par deux points fixes d'un deuxième itération de l'application $M^* = (m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*)$ et $M^{**} = (m_1^{**}, m_2^{**}, \dots, m_n^{**})$ situés dans les deux régions D^- et D^+ respectivement c'est -à- dire : $m_n^* < 0, m_n^{**} > 0$.

On peut écrire dans un voisinage du point M_0 :

$$M^* = A_1 M^{**} + c\mu. \quad (3.2)$$

$$M^{**} = A_2 M^* + c\mu \quad (3.3)$$

On note par :

$$\Delta M = M^{**} - M^* = (\delta m_1, \dots, \delta m_n) = A_2 M^* - A_1 M^{**} \quad (3.4)$$

la différence entre les deux points fixes.

l'équation (3.4) sous forme scalaire s'écrit :

$$\delta m_k = \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}^{(2)} m_j^* + a_{kn}^{(2)} m_n^* - \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}^{(1)} m_j^{**} - a_{kn}^{(1)} m_n^{**}, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

puisque $a_{kj}^{(1)} = a_{kj}^{(2)} = a_{kj}$ si $j \neq n$, (3.5) devient :

$$\delta m_k = \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} (m_j^* - m_j^{**}) + a_{kn}^{(2)} m_n^* - a_{kn}^{(1)} m_n^{**}$$

On ajoute et enleve le terme $a_{kn}^{(2)} m_n^{**}$ dans (3.5) on a :

$$\delta m_k + \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(2)} \delta m_j = [a_{kn}^{(2)} - a_{kn}^{(1)}] m_n^{**} \quad (3.6)$$

On ajoute et enleve encore le terme $a_{kn}^{(1)} m_n^*$ dans (3.5) on a :

$$\delta m_k + \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(1)} \delta m_j = [a_{kn}^{(2)} - a_{kn}^{(1)}] m_n^* \quad (3.7)$$

Apartir de (3.6) et (3.7) on a :

$$\Delta M + A_1 \Delta M = [A_2 - A_1]_n m_n^* \quad (3.8)$$

$$\Delta M + A_2 \Delta M = [A_2 - A_1]_n m_n^{**} \quad (3.9)$$

tel que $[A_2 - A_1]_n$ indique la $n^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $(A_2 - A_1)$.

Si $(I + A_2)$ soit inversible (3.9) donne:

$$\begin{aligned} \Delta M &= (I + A_2)^{-1} [A_2 - A_1]_n m_n^{**} \\ &= \frac{B^{**}}{p^{**}(-1)} m_n^{**} \end{aligned}$$

avec :

$$B^{**} = \text{adj}(I + A_2) [A_2 - A_1]_n \text{ et } p^{**}(-1) = |I + A_2|$$

De manière similaire (3.8) donne :

$$\Delta M = \frac{B^*}{p^*(-1)} m_n^*$$

avec :

$$B^* = \text{adj}(I + A_1)[A_2 - A_1]_n \text{ et } p^*(-1) = |I + A_1|$$

ou bien sous forme scalaire pour $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \delta m_k &= \frac{b_k^*}{p^*(-1)} m_n^* \\ &= \frac{b_k^{**}}{p^{**}(-1)} m_n^{**} \end{aligned} \quad (3.10)$$

La dernière composante de (3.10) s'écrit

$$\begin{aligned} \delta m_n &= \frac{b_n^*}{p^*(-1)} m_n^* \\ \delta m_n &= \frac{b_n^{**}}{p^{**}(-1)} m_n^{**}. \end{aligned}$$

Comme $b_n^* = b_n^{**}$, on obtient:

$$p^*(-1)m_n^{**} = p^{**}(-1)m_n^* \quad (3.11)$$

donc (3.10) donne :

$$\begin{aligned} b_k^* &= \delta m_k \frac{p^*(-1)}{m_n^*} \\ &= \delta m_k \frac{p^{**}(-1)}{m_n^{**}} = b_k^{**} \\ &: = b_k \end{aligned}$$

l'équation (3.10) implique :

$$m_k^{**} = m_k^* + \frac{b_k}{p^*(-1)} m_n^* \quad (3.12)$$

En remplaçant (3.12) dans (3.3) on obtient :

$$m_k^* = \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} m_j^* + (a_{kn}^{(2)} - \frac{b_k}{p^*(-1)}) m_n^* + c_k \mu$$

ou bien sous forme matricielle :

$$M^* = \hat{A} M^* + c \mu$$

avec :

$$\hat{A} = A_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \frac{1}{p^*(-1)}$$

on suppose que $I - \hat{A}$ soit inversible alors utilisons (3.11) on obtient :

$$m_n^* = A_n p^*(-1) \mu$$

$$m_n^{**} = A_n p^{**}(-1) \mu$$

avec A_n une fonction des paramètres $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$ donc pour que $m_n^* < 0$ et $m_n^{**} > 0$ il faut :

$$p^*(-1)p^{**}(-1) < 0$$

■

Remarque 3.1 soient M et N deux $n \times n$ matrices ont leurs composantes égues sauf les composantes de la $n^{\text{ème}}$ colonne; et ν un vecteur de \mathbb{R}^n , alors on a :

$$[\text{adj}(M) \nu]_n = [\text{adj}(N) \nu]_n$$

où $[\dots]_n$ indique la $n^{\text{ème}}$ colonne et $\text{adj}(M)$ est la matrice transposé de cofacteur M .

Soient $\{\alpha_i\}, i = 1, \dots, n$ et $\{\beta_i\}, i = 1, \dots, n$ les valeurs propres de A_1 et A_2 respectivement alors: les conditions $C_i), i = 1, 2, 3$ peuvent être utilisés en se basant sur les valeurs propres de chacun des polynomes caractéristiques :

$$p^*(\lambda) = (\lambda - \beta_1) \dots (\lambda - \beta_n).$$

$$p^{**}(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_n).$$

alors le signe de $p^*(1)$ et $p^{**}(1)$ dépend du nombre des valeurs propres plus grand que 1 et le signe de $p^*(-1)$ et $p^{**}(-1)$ du nombre de valeurs propres plus petit que -1.

On définit alors :

- σ_α^+ : nombre de valeurs propres α_i de $A_1 > 1$
- σ_β^+ : nombre de valeurs propres β_i de $A_2 > 1$
- σ_α^- : nombre de valeurs propres α_i de $A_1 < -1$
- σ_β^- : nombre de valeurs propres β_i de $A_2 < -1$.

Alors les conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ deviennent:

a/ $p^*(1)p^{**}(1) > 0 \Leftrightarrow \sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ est pair (transition "smooth" d'une orbite à une autre)

b/ $p^*(1)p^{**}(1) < 0 \Leftrightarrow \sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ est impair (disparition d'orbite au bord)

c/ $p^*(-1)p^{**}(-1) > 0 \Leftrightarrow \sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$ est impair (doublement de période)

Supposons maintenant qu'une orbite périodique (de période 2 pour simplifier) "subit" une C-bifurcation.

On note par A le point fixe stable de Π^+ et par a le point fixe instable de Π^+ ; B le point fixe stable de Π^- et par b le point fixe instable de Π^- , on note aussi par \rightarrow l'événement de C-bifurcation lorsque μ proche de 0 et par $A.b \rightarrow \emptyset$ une fusion entre deux cycles limites stable et instable, et on note par AB le point fixe stable de $\Pi^+ \circ \Pi^-$ (voir figure 39)

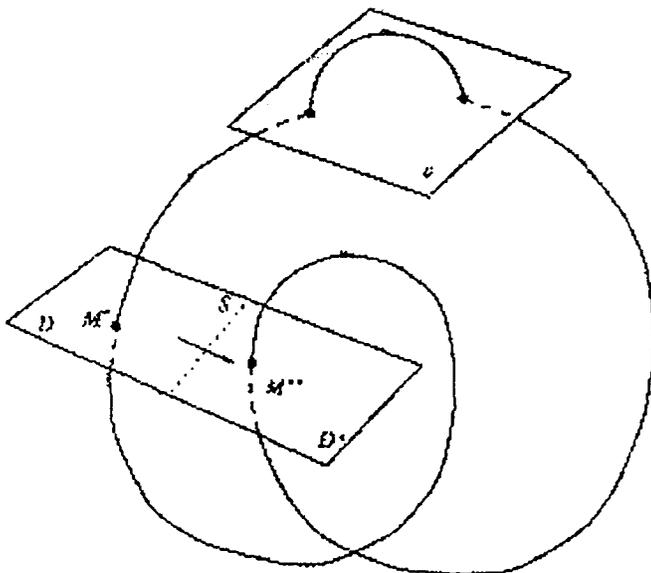


Figure 39

et par $\sigma_{\alpha\alpha}^+, \sigma_{\alpha\beta}^+$ le nombre de valeurs propres de A_1A_1 et A_1A_2 respectivement. En particulier si:

- 1 • $\sigma_{\alpha}^- + \sigma_{\beta}^-$ est pair alors pas de doublement de période et donc si:
- $\sigma_{\alpha}^+ + \sigma_{\beta}^+$ est pair (transition "smooth" d'une orbite à une autre):

$$A \rightarrow B$$

$$A \rightarrow b$$

$$a \rightarrow b$$

- $\sigma_{\alpha}^+ + \sigma_{\beta}^+$ est impair (fusion et disparition de l'une des deux orbites):

$$A.b \rightarrow \emptyset$$

$$a.b \rightarrow \emptyset$$

$$a.B \rightarrow \emptyset$$

- 2 • $\sigma_{\alpha}^- + \sigma_{\beta}^-$ est impair un doublement de période apparait et donc si:

*) $\sigma_{\alpha}^+ + \sigma_{\beta}^+$ est pair on a si:

* $\sigma_{\alpha\alpha}^+ + \sigma_{\alpha\beta}^+$ est pair (transition d'une orbite à une autre orbite de période 2).

$$A \rightarrow b, AB$$

* $\sigma_{\alpha\alpha}^+ + \sigma_{\alpha\beta}^+$ est impair (fusion et disparition d'une orbite de période 2).

$$A, ab \rightarrow b$$

$$A, ab \rightarrow B$$

$$a, AB \rightarrow b$$

$$a, AB \rightarrow B$$

*) $\sigma_{\alpha}^+ + \sigma_{\beta}^+$ est impair ,on a si:.

* $\sigma_{\alpha\alpha}^+ + \sigma_{\alpha\beta}^+$ est pair (transition d'une orbite de période 2).

$$A, b \rightarrow AB$$

$$A, b \rightarrow ab$$

$$a, b \rightarrow AB$$

$$a, b \rightarrow ab$$

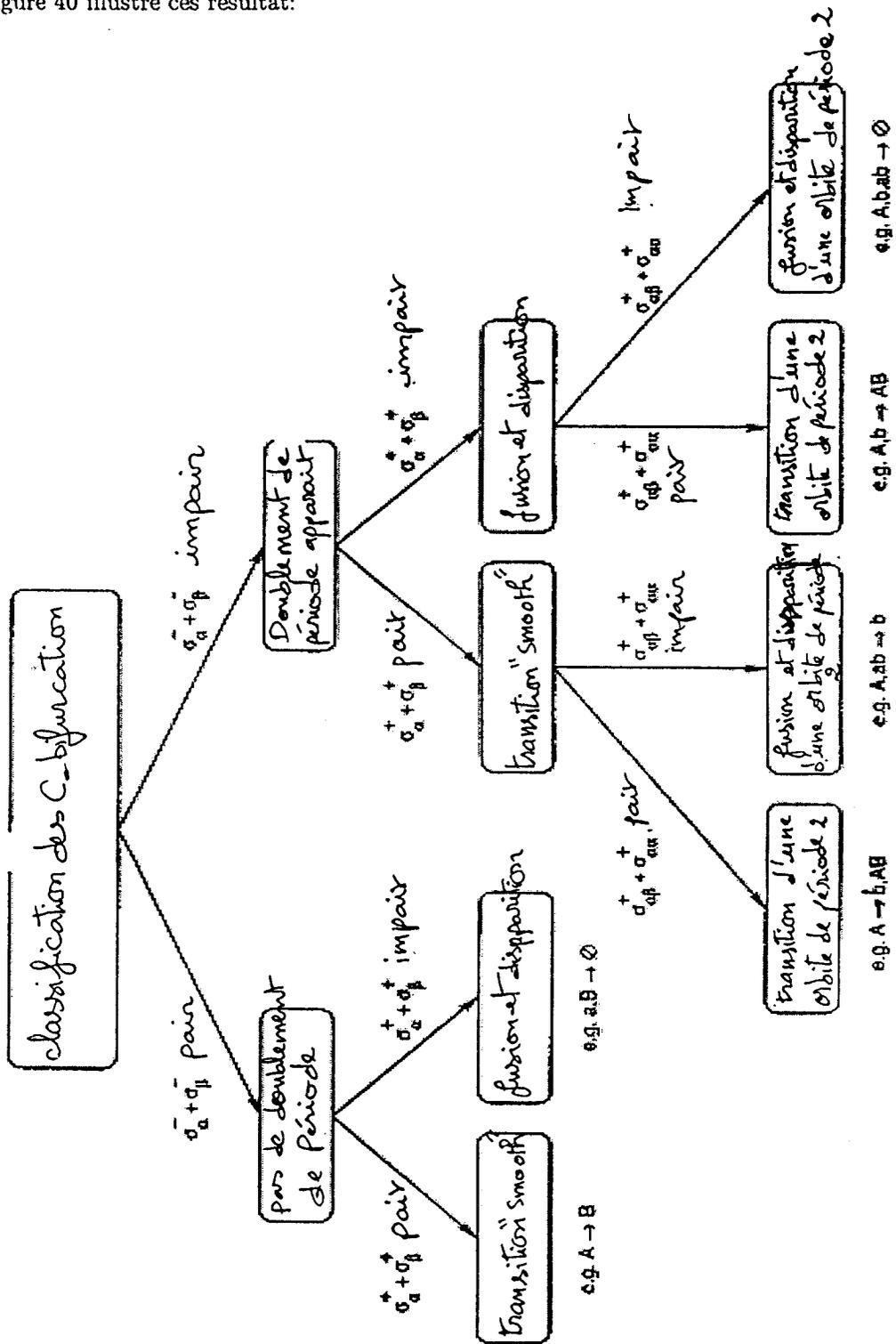
* $\sigma_{\alpha\alpha}^+ + \sigma_{\alpha\beta}^+$ est impair (fusion et disparition d'une orbite de période 2).

$$A, b, ab \rightarrow \phi$$

$$a, b, ab \rightarrow \phi$$

$$a, b, AB \rightarrow \phi$$

La figure 40 illustre ces résultats:



3.2 Application: Contrôle d'un cycle limite:

On étudie dans cette partie l'effet d'un contrôle sur les cycles limites des systèmes définis dans \mathbb{R}^2 au voisinage d'une collision externe avec un corne C ou "external-corner-collision".

Considérons alors le système suivant défini dans le plan:

$$\dot{x} = \begin{cases} G(x, \mu), & \text{si } x \in S_1 \\ F(x, \mu), & \text{si } x \in S_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

On se propose de déterminer en première étape l'application de Poincaré d'un système (3.13).

On associe ensuite un contrôle à ce système soumis à une collision externe de type "Corner-Collision" et enfin on choisit un contrôle de telle sorte à déterminer le cycle limite ou encore s'éloigner du voisinage de la bifurcation et éviter la destruction de ce cycle.(voir figure 41)

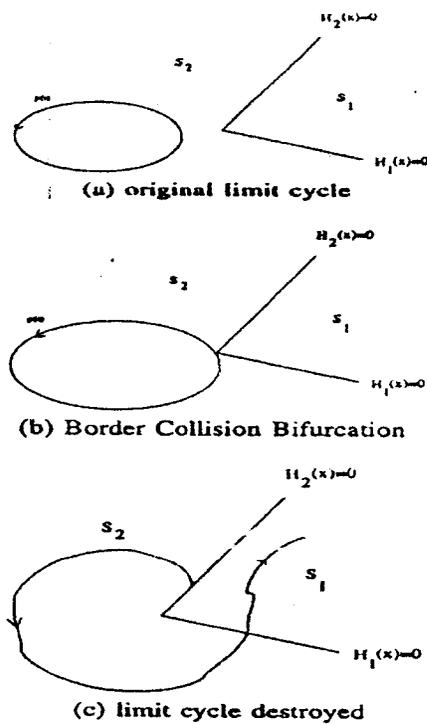


Figure 41

C'est un type de bifurcation spécifique aux systèmes P.W.S.

On considère dans ce cas une corne C limitée par Σ_1 et Σ_2 telle que:

$$\Sigma_1 : \{x \in \mathbb{R}^2, H_1(x) = -x_2 = 0\}$$

$$\Sigma_2 := \{x \in \mathbb{R}^2, H_2(x) = x_2 - mx_1 + b = 0\}$$

avec b et m fixés dans \mathbb{R}^2 et telle que S_2 est la région intérieure de C et S_1 la région extérieure.

Le point d'intersection entre Σ_1 et Σ_2 noté $x_{cc} = (\frac{b}{m}, 0)$ (voir figure 42)

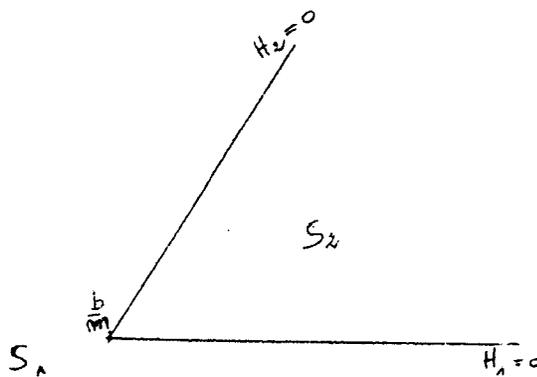


Figure 42

Remarque 3.2 .

On choisit b et m de telle sorte que $x_{cc} = \frac{b}{m}$ soit le point fixe du cycle limite qui nous intéresse. On considère que pour $\mu = 0$ le point x_{cc} est le point de frolement avec C . Pour utiliser la deuxième partie du chapitre II; On ramène x_{cc} à l'origine, en effectuant le changement de variable suivant :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{b}{m} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et donc le système (3.13) devient :

$$z = \begin{cases} \tilde{G}(z, \mu), & \text{si } z \in S_1 \\ \tilde{F}(z, \mu), & \text{si } z \in S_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

avec $\tilde{G}(z, \mu) = G(z_1 + \frac{b}{m}; z_2; \mu)$ et $\tilde{F}(z, \mu) = F(z_1 + \frac{b}{m}; z_2; \mu)$

Calculons maintenant l'application de Poincaré exacte au champ de vecteurs \tilde{F} à partir du flot associé $\phi_{\tilde{F}}$; prenons Σ_1 la section de Poincaré (choisie) qui est transverse au champ de vecteur \tilde{F} .

• Pour $x_1 \leq \frac{b}{m}$ (i.e $z_1 \leq 0$), une approximation linéaire de cette application est donnée par :

$$z_1 \rightarrow pz_1 + q\mu$$

p et q correspondent aux coefficients de la linéarisation de cette application.

• Maintenant pour $x_1 > \frac{b}{m}$ (i.e $z_1 > 0$)

Les conditions permettant d'éviter les solutions de glissement sont satisfaites au point $(0, 0)$ en effet:

$$- \langle \nabla H_1^0, \tilde{F}^0 \rangle < 0 \text{ c'est -à- dire : } -\tilde{F}_2^0 < 0$$

$$- \langle \nabla H_1^0, \tilde{G}^0 \rangle < 0 \text{ c'est -à- dire : } -\tilde{G}_2^0 < 0$$

$$- \langle \nabla H_2^0, \tilde{F}^0 \rangle > 0 \text{ c'est -à- dire : } -m\tilde{F}_1^0 + \tilde{F}_2^0 > 0$$

$$- \langle \nabla H_2^0, \tilde{G}^0 \rangle > 0 \text{ c'est -à- dire : } -m\tilde{G}_1^0 + \tilde{G}_2^0 > 0$$

Avec $\tilde{F}_i^0, \tilde{G}_i^0, i = 1, 2$ sont les composantes des champs de vecteurs \tilde{F}, \tilde{G} respectivement au point $(0, 0)$, alors d'après la proposition 2.5 du chapitre 2, l'application Π_{PDM} dans ce cas s'écrit:

$$z_1 \rightarrow z_1 + (\tilde{F}_1^0 \frac{\tilde{G}_2^0}{\tilde{F}_2^0} - \tilde{G}_1^0) < a_2^*, z_1 >$$

Avec :

$$a_2 = \frac{1}{-m\tilde{G}_1^0 + \tilde{G}_2^0} \left(\begin{array}{c} -m \\ 1 - \frac{\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0}{\tilde{F}_2^0} \end{array} \right)$$

Et donc:

$$a_2^* = \frac{-m}{-m\tilde{G}_1^0 + \tilde{G}_2^0}$$

Alors on a :

$$\Pi_{PDM}(z_1) = z_1 - \gamma z_1$$

avec :

$$\gamma = \frac{m}{\tilde{G}_2^0 - m\tilde{G}_1^0} \left(\frac{\tilde{F}_2^0 \tilde{G}_1^0 - \tilde{F}_1^0 \tilde{G}_2^0}{\tilde{F}_2^0} \right)$$

et alors l'application de Poincaré globale associé à (3.14) est :

$$z_1 \rightarrow \begin{cases} pz_1 + q\mu, & \text{si } z_1 \leq 0 \\ p(1-\gamma)z_1 + q\mu, & \text{si } z_1 > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

ou encore :

$$x_1 \rightarrow \begin{cases} p(x_1 - \frac{b}{m}) + \frac{b}{m} + q\mu, & \text{si } x_1 \leq \frac{b}{m} \\ p(1-\gamma)(x_1 - \frac{b}{m}) + \frac{b}{m} + q\mu, & \text{si } x_1 > \frac{b}{m} \end{cases} \quad (3.16)$$

Introduisons maintenant un contrôle (sous forme très simplifié) défini comme suit:

$$U = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in S_2 \\ c, & \text{si } x \in S_1 \end{cases}$$

Avec $c = (c_1, c_2)^T$, $c_i, i = 1, 2$ sont des constantes réelles ; avec ce choix de contrôle le nouveau système considéré est :

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x, \mu), & \text{si } x \in S_2 \\ F(x, \mu) + c := G(x, \mu), & \text{si } x \in S_1 \end{cases} \quad (3.17)$$

pour que ce contrôle soit efficace, on choisi la corne C (i.e b et m) de la manière suivante:

i/ On évite les solutions de glissement sur les deux bords de C : Σ_1 et Σ_2

ii/ La corne C dépend des paramètres b et m et l'idée est de trouver une valeur critique de ces paramètres permettant de passer d'un cycle limite à une "corner-collision bifurcation" et

l'inverse

Les conditions permettant d'éviter les solutions de glissement sont:

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla H_1^0, \tilde{F}^0 \rangle &= -\tilde{F}_2^0 < 0 \\
 \langle \nabla H_1^0, \tilde{G}^0 \rangle &= -\tilde{F}_2^0 - c_2 < 0 \\
 \langle \nabla H_2^0, \tilde{F}^0 \rangle &= -m\tilde{F}_1^0 + \tilde{F}_2^0 > 0 \\
 \langle \nabla H_2^0, \tilde{G}^0 \rangle &= -m(\tilde{F}_1^0 + c_1) + \tilde{F}_2^0 + c_2 > 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Et alors l'application de Poincaré globale du système (3.17) s'écrit, en utilisant (3.15):

$$z_1 \rightarrow \begin{cases} pz_1 + q\mu, & \text{si } z_1 \leq 0 \\ p(1-\tau)z_1 + q\mu, & \text{si } z_1 > 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Ou encore :

$$x_1 \rightarrow \begin{cases} p(x_1 - \frac{b}{m}) + \frac{b}{m} + q\mu, & \text{si } x_1 \leq \frac{b}{m} \\ p(1-\tau)(x_1 - \frac{b}{m}) + \frac{b}{m} + q\mu, & \text{si } x_1 > \frac{b}{m} \end{cases} \tag{3.20}$$

avec :

$$\tau = \frac{m[\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_1^0 + c_1) - \tilde{F}_1^0(\tilde{F}_2^0 + c_2)]}{\tilde{F}_2^0[\tilde{F}_2^0 + c_2 - m(\tilde{F}_1^0 + c_1)]} = \frac{m(\tilde{F}_2^0 c_1 - \tilde{F}_1^0 c_2)}{\tilde{F}_2^0[\tilde{F}_2^0 + c_2 - m(\tilde{F}_1^0 + c_1)]} \tag{3.21}$$

La recherche d'un point fixe de l'application (3.19) pour $\mu = 0$ est équivalente à la recherche d'un cycle limite pour le système (3.17).

On remarque d'autre part que l'application de Poincaré donnée par (3.20) dépend des paramètres c_1, c_2 , il est donc possible de changer les propriétés du point fixe de cycle limite en faisant varier c_1 et c_2 ; C'est à dire on peut choisir c_1 et c_2 pour détruire le cycle limite ou bien garder ce cycle limite.

En analysant ce problème, on se rend compte qu'on est dans le cadre général des C-bifurcations, à notre problème spécifique (3.19), les trois possibilités correspondant aux trois conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ sont

Première possibilité $(p^*(1) \cdot p^{**}(1) > 0)$

Ici on a $p^*(1) = p - 1, p^{**}(1) = p(1 - \tau) - 1$, où p est la valeur correspondant au stabilité du cycle limite ($\mu = 0$)

1/ Si $p - 1 < 0$ (i.e $p < 1$) alors:

$$p(1 - \tau) - 1 < 0 \Leftrightarrow (p - 1) < p\tau \quad (3.22)$$

Alors: si $p \in]0, 1[$ on a en remplaçant (3.21) dans (3.22) on obtient::

$$c_1 > \frac{1}{m\tilde{F}_2^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0 m} (c_2(m\tilde{F}_1^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0) + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0)). \quad (3.23)$$

Et si $p < 0$ on a :

$$c_1 < \frac{1}{m\tilde{F}_2^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0 m} (c_2(m\tilde{F}_1^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0) + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0)). \quad (3.24)$$

2/ Si $p - 1 > 0$ (i.e $p > 1$) alors :

$$p(1 - \tau) - 1 > 0 \Leftrightarrow \tau < \frac{p-1}{p} \quad (3.25)$$

en remplaçant (3.21) dans (2.25) on obtient :

$$c_1 < \frac{1}{m\tilde{F}_2^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0 m} (c_2(m\tilde{F}_1^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0) + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0)) \quad (3.26)$$

En choisissant c_1 et c_2 telle que l'une des conditions (3.23), (3.24), (3.26) sont vérifiés alors on a suivant les conditions sur p la coexistence de deux cycles limite sur les deux côtés.

Deuxième possibilité ($p^*(1), p^{**}(1) < 0$)

1/ Si $p - 1 < 0$ (i.e $p < 1$) alors :

$$p(1 - \tau) - 1 > 0 \Leftrightarrow p\tau < p - 1 \quad (3.27)$$

et donc en remplaçant (3.21) dans (3.27) on a que:

• Si $p \in]0, 1[$ on a :

$$c_1 < \frac{1}{m\tilde{F}_2^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0 m} (c_2(m\tilde{F}_1^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0) + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0)). \quad (3.28)$$

• Si $p < 0$ on a :

$$c_1 > \frac{1}{m\tilde{F}_2^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0 m} (c_2(m\tilde{F}_1^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0) + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0)). \quad (3.29)$$

2/ Si $p - 1 > 0$ (i.e $p > 1$) alors :

$$p\tau > p - 1 \Leftrightarrow \tau > \frac{p-1}{p} \quad (3.30)$$

et donc en remplaçant (3.21) dans (3.30) on obtient que:

$$c_1 > \frac{1}{m\tilde{F}_2^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0 m} (c_2(m\tilde{F}_1^0 + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0) + \frac{p-1}{p}\tilde{F}_2^0(\tilde{F}_2^0 - m\tilde{F}_1^0)). \quad (3.31)$$

et donc le choix de c_1 et c_2 vérifiant (3.28) ou (3.29) ou (3.31) implique l'apparition de deux cycles limites sur le même coté.

Le même principe de calcul se fait pour la troisième possibilité ($p^*(-1)p^{**}(-1) < 0$)

Illustrons ces résultats par un exemple.

Exemple 3.1 .

On considère le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x), & x \in S_2 \\ F(x) + c := G(x), & x \in S_1 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\text{Avec } F(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x_1 + 1)(a - \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} - x_2) \\ \varepsilon x_2(a - \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} + x_1 + 1) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$$

avec S_1, S_2 sont les régions intérieure et extérieure d'une corne C limitée par Σ_1 et Σ_2 telle

que :

$$\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2, -x_2 = 0\} \quad \Sigma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2, x_2 - mx_1 + b = 0\}$$

Prenons : $m = 1, \varepsilon = 0.1$ et $b = 0$

Le cercle de centre $(x_1^*, x_2^*) = (-1, 0)$, et de rayon a est le cycle limite associé à ce système.

Le contrôle $u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ avec $c_i, i = 1, 2$ sont des constantes choisies de telle sorte que les conditions (3.18) sont satisfaites en effet on a :

$$F_1^0 = 0, F_2^0 = 1, G_1^0 = c_1, G_2^0 = 1 + c_2$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla H_1, G^0 \rangle &= -1 - c_2 < 0, \langle \nabla H_1, F^0 \rangle &= -1 < 0, \\ \langle \nabla H_2, F^0 \rangle &= 1 > 0, \langle \nabla H_2, G^0 \rangle &= -c_1 + c_2 + 1 > 0 \Rightarrow c_1 < c_2 + 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Et alors l'application de Poincaré globale associé à (3.32) s'écrit (en posant $\mu = a - 1$):

$$z_1 \rightarrow \begin{cases} pz_1 + q\mu, & \text{si } z_1 \leq 0 \\ p(z_1 - c_1 \frac{z_1}{c_1 - c_2 - 1}) + q\mu, & \text{si } z_1 > 0 \end{cases}$$

Avec $p = 0.5335, q = 1 - e^{-2\varepsilon\pi} = 1 - p = 0.4665$.

La pente de l'application de Poincaré globale après l'intersection noté β est donnée par :

$$\beta = p \frac{c_2 + 1}{c_2 + 1 - c_1}$$

La relation (3.33) implique que $\beta > 0$; pour tout c_1 et c_2 , donc on a deux cas à étudier:

- Premier cas: $\beta < 1$, (i.e $(p - 1)(\beta - 1) > 0$)

Ce qui correspond à c_1, c_2 telle que $c_1 < (1 - p)(c_2 + 1)$.

Par exemple si on choisit $c_1 = -2, c_2 = 1$; ceci donne $\beta = 0.26$ ce qui provoque la coexistence de deux cycles limites sur les deux côtés ($\mu = 0$).

- Deuxième cas: $\beta > 1$ (i.e $(p - 1)(\beta - 1) < 0$)

Ce qui correspond à c_1, c_2 vérifiant $(c_2 + 1)(1 - p) < c_1 < c_2 + 1$

Par exemple si on choisit $c_2 = 3$ et $c_1 = 2$, ce qui donne $\beta = 1.06$ et donc on a l'apparition de

deux cycles limites sur le même côté.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté un type de bifurcation spécifique pour les systèmes continus par morceaux (Grasing bifurcation et corner bifurcation).

Un contrôle de ce type de bifurcation est ensuite proposé pour les systèmes définis en dimensions deux. Le meilleur choix du type de contrôle reste posé.

Une analyse pour des systèmes en dimension plus grande et en dimension infini reste une voie à explorer.

Le même travail peut se traiter en présentant un autre type de bifurcation spécifique pour les systèmes continus par morceaux: "Grazing-sliding bifurcation" et "Corner-sliding bifurcation" [10].

Bibliographie

- [1] C.Delcarte, H.Dang-vu, " Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine de programmes en pascal, Fortran et Mathematica".Ellipses. (2000).
- [2] M.Di Bernardo, C.J.Budd and A.R.champneys , "Corner collision implies border-collision bifurcation "Physica, D 154,pp 171-194(2000).
- [3] M.Di Bernardo, C.J.Budd and A.R champneys , "Normal Form of maps for grazing bifurcation on in n-dimensionnal piecewise smooth dynamical systems "Physica, D160,pp 222-254(2000).
- [4] M.Di Bernardo, C.J.Budd and A.R champneys , " Grazing and border-collision in piecewise smooth systems: A unified analytical Framework", Physical Review Letters 86,pp 2553-2556(2001) .
- [5] M.Di Bernardo, P.Kowalczyk, A.Nordmark , "Bifurcations of Dynamical systems with sliding: derivation of normal-form mappings "Physica, D 170,pp 175-205(2002) .
- [6] M.Di Bernardo, S.Feigin, J-Hogan, M.E.Homer, " local analysis of C-bifurcation in n-dimensionnal piecewise smooth dynamical systems", journal of chaos, solution and fractals 10,pp 1881-1908(1999) .
- [7] M.Di Bernardo, F.Angulo, G.Oliver, "Switching and sliding control of limite cycle in planar systems", Nonsmooth bifurcation Techniques, chapitre 1(2000).
- [8] G.Iooss, "Bifurcation of maps and application Mathematics studies "(1986).
- [9] A.Kurznetsov, S.Rinaldi, AGagnani , "One parameter bifurcation in planar Filippov systems" Int.J.Bifurcations and chaos 13, pp 2157-2188(2002)

- [10] A.Kuznetsov, "Element of applied bifurcation theory ", Springer Verlag, second édition (1998) .
- [11] H.Khalil, Non linear systems "Third Edition prentice Hall".
- [12] T.Sari., "Systèmes non linéaires :Notes de cours de post graduation", université de Tlemcen, Avril 2005
- [13] S.Wiggins, "Introductions to applied non linéair dynamical systems and chaos ",Springer, Berlin (1990).

