Sur les Equations Fractionnaires Linéaires avec Retard

Baya DJOUBIR

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Définitions et généralités

Définition 1.1.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. L'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α est définie par:*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)\ (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

où $\alpha > 0$ et $a < t < b$

Remarque 1.1.2 *La convergence de l'intégrale de Riemann-Liouville est assurée sous (par exemple) les hypothèses suivantes :*

1. *$\alpha \geq 1$ et $f \in L^1$. Ou bien*
2. *$0 < \alpha < 1$ et $f \in L^p$ pour $p > 1/\alpha$.*

comme conséquence d'une simple utilisation de l'inégalité de Hölder.

Exemple 1.1.3 *On se propose de calculer l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $(t-a)^\mu$. On a*

$$I_a^\alpha ((t-a)^\mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\mu d\tau$$

En faisant le changement de variable $x = \dfrac{\tau - a}{t - a}$ *et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha\left((t-a)^\mu\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^\mu (t-a)^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}(t-a)^\mu (t-a)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^\mu (t-a)^{\alpha+\mu}(1-x)^{\alpha-1}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\mu}\int_0^1 x^\mu (1-x)^{\alpha-1}d\tau \end{aligned}$$

On sait que

$$\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_a^\alpha\left((t-a)^\mu\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\mu}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(t-a)^{\alpha+\mu} \end{aligned}$$

Finalement

$$I_a^\alpha\left((t-a)^\mu\right) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(t-a)^{\alpha+\mu}$$

Proposition 1.1.4 *Pour tout* $r, s > 0$ *on a*

$$I_a^r I_a^s = I_a^{r+s}$$

Démonstration : On pose $g(t) = \left(I_a^s f\right)(t)$

$$\begin{aligned} \left[\left(I_a^r \circ I_a^s\right)(f)\right](t) &= \left(I_a^r\left(g\right)\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t (t-\tau)^{r-1}g(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t (t-\tau)^{r-1}\left(I_a^s\, f\right)(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t (t-\tau)^{r-1}\left[\frac{1}{\Gamma(s)}\int_a^\tau (\tau-x)^{s-1}f\left(x\right)dx\right]d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_a^t\int_a^\tau (t-\tau)^{r-1}(\tau-x)^{s-1}f(x)\,dx d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_a^t\int_x^t (t-\tau)^{r-1}(\tau-x)^{s-1}f(x)\,d\tau dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_a^t\left[\int_x^t (t-\tau)^{r-1}(\tau-x)^{s-1}d\tau\right]f(x)\,dx
\end{aligned}$$

On pose $u=\dfrac{\tau-x}{t-x}$. Notre fonction devient

$$\begin{aligned}
[(I_a^r\circ I_a^s)(f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_a^t f(x)\,. \\
&\quad .\left[\int_0^1 u^{s-1}(t-x)^{s-1}(t-x)^{r-1}(1-u)^{r-1}(t-x)\,du\right]dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_a^t (t-x)^{r+s-1}f(x)\,\beta(s,r)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_a^t (t-x)^{r+s-1}f(x)\,\frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s+r)}\int_a^t (t-x)^{r+s-1}f(x)\,dx \\
&= \left[I_a^{s+r}(f)\right](t)
\end{aligned}$$

Donc $[I_a^r\circ I_a^s(f)](t)=[I_a^{s+r}(f)](t)$. ■

Définition 1.1.5 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est définie par*

$$D_a^\alpha f(t)=D^m I_a^{m-\alpha}f(t)$$

où $m=[\alpha]+1;\ D^m=\dfrac{d^m}{dt^m},\ a<t<b.$

Exemple 1.1.6 *On va calculer la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction* $(t-a)^{\lambda}$

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left((t-a)^{\lambda}\right) &= D^m I_a^{m-\alpha}\left((t-a)^{\lambda}\right) \\ &= D^m\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1}(x-a)^{\lambda}\,dx\right] \end{aligned}$$

On pose $u=\dfrac{x-a}{t-a}$. *Alors on obtient*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left((t-a)^{\lambda}\right) &= D^m\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^1 u^{\lambda}(t-a)^{\lambda}(1-u)^{m-\alpha-1}(t-a)du\right] \\ &= D^m\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(t-a)^{\lambda+m-\alpha}\int_0^1 u^{\lambda}(1-u)^{m-\alpha-1}du\right] \\ &= D^m\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(t-a)^{\lambda+m-\alpha}\beta(\lambda+1,m-\alpha)\right] \\ &= D^m\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(t-a)^{\lambda+m-\alpha}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha+1+\lambda)}\right] \\ &= D^m\left[(t-a)^{\lambda+m-\alpha}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(m-\alpha+1+\lambda)}\right] \end{aligned} \tag{1.1}$$

Or

$$\begin{aligned} D^m\left((t-a)^{\delta}\right) &= \delta(\delta-1)\cdots(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)}(t-a)^{\delta-m} \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation (1.1), on trouve

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left((t-a)^{\lambda}\right) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(m-\alpha+1+\lambda)}\frac{\Gamma(\lambda+m-\alpha+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}(t-a)^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}(t-a)^{\lambda-\alpha} \end{aligned}$$

Donc

$$D_a^{\alpha}\left((t-a)^{\lambda}\right)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}(t-a)^{\lambda-\alpha}$$

Proposition 1.1.7 *Si la dérivée fractionnaire $D_a^\beta f(t)$ vérifie l'une des hypothèses de la remarque (1.1.2) alors*

$$I_a^\alpha\left(D_a^\beta f(t)\right) = I_a^{\alpha-\beta} f(t) - \left[I_a^{1-\beta} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < \beta \leq \alpha < 1 \quad (1.2)$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} I_a^\alpha\left(D_a^\beta f(t)\right) &= I_a^\alpha\left(D I_a^{1-\beta} f(t)\right) \\ &= I_a^\alpha\left(\frac{d}{dt} I_a^{1-\beta+\alpha-\alpha} f(t)\right) \\ &= I_a^\alpha\left(\frac{d}{dt} I_a^{1-\alpha}\right) I_a^{\alpha-\beta} f(t) \\ &= I_a^\alpha D_a^\alpha I_a^{\alpha-\beta} f(t) \qquad (1.3) \end{aligned}$$

On va utiliser le résultat suivant dans l'équation (1.3) (on donera une preuve ultérieurement)

$$I_a^\alpha (D_a^\alpha h)(t) = h(t) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(I^{1-\alpha} h\right)(t)\right]_{t=a} \quad (1.4)$$

On remplace dans (1.3), on trouve

$$I_a^\alpha\left(D_a^\beta f(t)\right) = I_a^{\alpha-\beta} f(t) - \left[\left(I^{1-\alpha} I^{\alpha-\beta} f\right)(t)\right]_{t=a} . \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Donc

$$I_a^\alpha\left(D_a^\beta f(t)\right) = I_a^{\alpha-\beta} f(t) - \left[\left(I^{1-\beta} f\right)(t)\right]_{t=a} (t) \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

car $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ pour $\alpha, \beta > 0$. Maintenant on prouve l'identité (1.4). On a

$$D_a^\alpha I_a^\alpha = id$$

car

$$\begin{aligned} D_a^\alpha \left[I_a^\alpha f\right](t) &= D_a^m \left[I_a^{m-\alpha} I_a^\alpha f\right](t) \\ &= D_a^m \left[I_a^m f\right](t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Puisque

$$D_a^\alpha \left[I_a^\alpha D_a^\alpha f\right] = D_a^\alpha f$$

Alors

$$D_a^\alpha \left[I_a^\alpha D_a^\alpha f - f\right] = 0$$

c'est-à-dire $I_a^\alpha D_a^\alpha f - f \in ker(D_a^\alpha)$. Déterminons $ker(D_a^\alpha)$ pour $0 < \alpha < 1$

$$D_a^\alpha g = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} I_a^{1-\alpha} g = 0 \Rightarrow I_a^{1-\alpha} g = c(g)$$

On a

$$\begin{aligned}
(I_a g)(t) &= I_a^\alpha \left(I_a^{1-\alpha} g\right)(t) \\
&= I_a^\alpha (c(g))(t) \\
&= c(g) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1}\, dx \\
&= c(g) \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left[-(t-x)^\alpha\right]_a^t \\
&= c(g) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

L'équation (1.5) donne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(I_a g\right)(t) &= \frac{d}{dt}\left(c(g)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha\right) \Leftrightarrow g(t) = c(g)\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-1} \\
&\Leftrightarrow g(t) = c(g)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Notre équation est

$$D_a^\alpha \left[I_a^\alpha D_a^\alpha f - f\right] = 0$$

Donc

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f - f = c(f)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}$$

Ceci implique que

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f\,(t) = f(t) + c(f)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}$$

Maintenant il reste à déterminer la constante $c(f)$. Appliquons aux deux membres l'opérateur $I_a^{1-\alpha}$, il vient

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{1-\alpha} I_a^\alpha D_a^\alpha f\right](t) &= I_a^{1-\alpha} f(t) + c(f)\frac{1}{\Gamma(\alpha)} I_a^{1-\alpha}(t-a)^{\alpha-1} \\
&= I_a^{1-\alpha} f(t) + c(f)
\end{aligned}$$

car $I_a^\alpha\left((t-a)^\mu\right)=\dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(t-a)^{\alpha+\mu}$. Donc

$$\left[I_a D_a^\alpha f\right](t)=I_a^{1-\alpha}f(t)+c(f)$$

Les hypothèses faites sur $D_a^\alpha f$ permettent d'affirmer que

$$\lim_{t\to a}\left(I_a D_a^\alpha f\right)(t)=0$$

On obtient

$$c(f)=-\lim_{t\to a}I_a^{1-\alpha}f\left(t\right)$$

Alors on conclut que

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f\left(t\right)=f(t)-\left(\lim_{t\to a}I_a^{1-\alpha}f\left(t\right)\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t-a\right)^{\alpha-1}$$

■

Proposition 1.1.8 *Si f est continue sur $[a,b]$ alors*

$$\left[I_a^{1-\beta}f(t)\right]_{t=a}=\lim_{t\to a}I_a^{1-\beta}f(t)=0,\qquad 0<\beta<1$$

Démonstration : On a

$$I_a^{1-\beta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^t\left(t-x\right)^{-\beta}f(x)dx$$

donc

$$\begin{aligned}
\left|I_a^{1-\beta}f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^t\left(t-x\right)^{-\beta}f(x)dx\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^t\left(t-x\right)^{-\beta}\left|f(x)\right|dx\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^t\left(t-x\right)^{-\beta}dx \qquad \text{car } f \text{ est continue}\\
&\leq \frac{M}{\left(1-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}\left[-\left(t-x\right)^{-\beta+1}\right]_a^t=\frac{M}{\Gamma\left(2-\beta\right)}\left(t-a\right)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

et de là

$$\lim_{t\to a}\left|I_a^{1-\beta}f(t)\right|\leq\lim_{t\to a}\frac{M}{\Gamma\left(2-\beta\right)}\left(t-a\right)^{1-\beta}\leq 0$$

c'est-à -dire $\lim_{t\to a}\left|I_a^{1-\beta}f(t)\right|=0$ car il est évident que $\lim_{t\to a}\left|I_a^{1-\beta}f(t)\right|\geq 0$.
■

Une conséquence de cette proposition est que l'équation (1.2) devient

$$I_a^{\alpha}\left(D_a^{\beta}f(t)\right)=I_a^{\alpha-\beta}f(t)$$

où $0<\beta\leq\alpha<1$.

1.2 Rappels sur des équations différentielles à retard

Nous allons rappeler dans cette section quelques notions concernant des équations linéaires classiques à retard et qu'on se propose de généraliser après au cas fractionnaire. Soit l'équation différentielle à retard suivante:

$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t)=Ax(t)+Bx(t-r) & t\geq 0 \\ x(t)=\phi(t) & t\in[-r,0] \end{array}\right. \tag{1.6}$$

où A ,B et r sont des constantes avec $r>0$

1.2.1 Estimation exponentielle

On va estimer la solution $x(t)$ du problème (1.6) par le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 *Soit $x(t)$ une solution de l'équation (1.6). Alors il existe deux constantes positives a et b telle que*

$$|x(t)|\leq a\,\|\phi\|\exp\left(b\ t\right)$$

où $\|\phi\|=\sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0}|\phi\left(\theta\right)|$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t)+Bx(t-r)\Rightarrow\int_0^t x'(s)ds=\int_0^t(Ax(s)+Bx(s-r))ds \\ &\Rightarrow x(t)-x(0)=A\int_0^t x(s)ds+B\int_0^t x(s-r)ds \\ &\Rightarrow x(t)=\phi\left(0\right)+A\int_0^t x(s)ds+B\int_{-r}^{t-r}x(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |x(t)| \leq \|\phi\| + |A| \int_0^t |x(s)|\, ds + |B| \int_{-r}^t |x(s)|\, ds \\
\leq \quad \|\phi\| + (|A| + |B|) \int_0^t x(s) ds + |B| \int_{-r}^0 |\phi(s)|\, ds \\
\leq \quad (1 + |B|\, r)\, \|\phi\| + (|A| + |B|) \int_0^t x(s) ds
\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall, on trouve

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq (1 + |B|\, r)\, \|\phi\| \exp\left((|A| + |B|) \int_0^t ds \right) \\
&\leq (1 + |B|\, r)\, \|\phi\| \exp\left((|A| + |B|)\, t \right) \\
&= a\, \|\phi\| \exp(bt)
\end{aligned}$$

Avec $a = (1 + |B|\, r)$ et $b = (|A| + |B|)$. $\blacksquare$

1.2.3 L'équation caractéristique

L'équation caractéristique d'une équation différentielle homogène linéaire à coefficients constantes est obtenue à partir des solutions non triviales de la forme $\exp(\lambda t)$. L'équation

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - r)$$

possède une solution non triviale de la forme $\exp(\lambda t)$ si est seulement si

$$\lambda \exp(\lambda t) = A \exp(\lambda t) + B \exp(\lambda(t - r)).$$

Ceci implique que

$$\lambda = A + B \exp(-\lambda r)$$

ou encore

$$h(\lambda) = \lambda - A - B \exp(-\lambda r) = 0$$

$h(\lambda) = 0$ est appelée l'équation caractéristique de (1.6).

1.2.4 La solution fondamentale

Soit $X(t)$ une solution de l'équation (1.6) ayant pour condition initiale

$$\phi(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ 1 & \text{si} \quad t=0 \end{cases}$$

$X(t)$ est appelée solution fondamentale du problème (1.6).

Théorème 1.2.5 *La solution fondamentale $X(t)$ du problème (1.6)est donnée par sa transformée de Laplace*

$$\mathcal{L}\left(X(t)\right)(\lambda)=\frac{1}{h(\lambda)}$$

Aussi pour $c>b$ $(b=(|A|+|B|))$

$$X(t)=\int\limits_{(c)}\frac{\exp\left(\lambda t\right)}{h(\lambda)}d\lambda$$

$$\left(\int\limits_{(c)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\right).$$

Démonstration : Puisque $X(t)$ satisfait l'estimation exponentielle alors $\mathcal{L}(X)$ existe ($\mathcal{L}(X)$ est la transformé de Laplace de X).On a

$$x'(t)=Ax(t)+Bx(t-r)$$

Ceci implique que

$$\underbrace{\int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)x'(t)dt}_{J}=\int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)Ax(t)dt+\int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)Bx(t-r)dt \quad (1.7)$$

On intègre J par partie. On pose

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(-\lambda t\right)\Rightarrow u'=-\lambda\exp\left(-\lambda t\right)dt \\ v' &= x'(t)\Rightarrow v=x(t) \end{aligned}$$

Donc

$$J=\left[\exp\left(-\lambda t\right)x(t)\right]_0^\infty+\int\limits_0^\infty \lambda\exp\left(-\lambda t\right)x(t)dt$$

On remplace par $X(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} J &= \left[\exp\left(-\lambda t\right)X(t)\right]_0^\infty + \int\limits_0^\infty \lambda \exp\left(-\lambda t\right)X(t)dt \\ &= -1 + \int\limits_0^\infty \lambda \exp\left(-\lambda t\right)X(t)dt \end{aligned}$$

L'équation (1.7) devient

$$-1+\int\limits_0^\infty \lambda \exp\left(-\lambda t\right)X(t)dt = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)AX(t)dt+\int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)BX(t-r)dt$$

Donc

$$\begin{aligned} -1+\lambda\mathcal{L}(X(t))\left(\lambda\right) &= A\mathcal{L}(X(t)) + B\int\limits_{-r}^\infty \exp\left(-\lambda(t+r)\right)X(t)dt \\ &= A\mathcal{L}(X(t))\left(\lambda\right) + B\exp\left(-\lambda r\right). \\ &\quad .\left[\int\limits_{-r}^0 \exp\left(-\lambda t\right)X(t)dt + \int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)X(t)dt\right] \\ &= A\mathcal{L}(X(t))\left(\lambda\right) + B\exp\left(-\lambda r\right)\mathcal{L}(X(t))\left(\lambda\right) + \\ &\quad +B\exp\left(-\lambda r\right)\int\limits_{-r}^0 \exp\left(-\lambda t\right)X(t)dt \\ &= A\mathcal{L}(X(t))\left(\lambda\right) + B\exp\left(-\lambda r\right)\mathcal{L}(X(t))\left(\lambda\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\lambda - A - B\exp\left(-\lambda r\right)\right)\mathcal{L}(X(t))(\lambda) = 1$$

Donc on conclut que

$$\mathcal{L}(X(t))(\lambda) = \frac{1}{\lambda - A - B\exp\left(-\lambda r\right)} = \frac{1}{h\left(\lambda\right)}$$

■

1.2.6 Représentation de la solution

On va représenter la solution $x(t)$ du problème (1.6) ayant pour condition initiale $\phi\left(t\right)$ en fonction de la solution fondamentale $X\left(t\right)$.

Théorème 1.2.7 *La solution $x(t)$ du problème (1.6) peut être représentée sous la forme*

$$x(t) = X(t)\phi(0) + B\int_{-r}^{0} X(t-\theta-r)\phi(\theta)\,d\theta$$

Démonstration : On applique la transformation de Laplace à chaque terme du problème (1.6),on obtient

$$\underbrace{\int_{0}^{\infty} \exp(-\lambda t)\,x'(t)dt}_{I} = \int_{0}^{\infty} \exp(-\lambda t)\,Ax(t)dt + \int_{0}^{\infty} \exp(-\lambda t)\,Bx(t-r)dt \quad (1.8)$$

On intègre par partie I , on trouve

$$\begin{aligned} I &= [\exp(-\lambda t)\,x(t)]_0^\infty + \int_{0}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t)\,x(t)dt \\ &= -\phi(0) + \int_{0}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t)\,x(t)dt \\ &= -\phi(0) + \lambda \mathcal{L}(x)(\lambda) \end{aligned}$$

L'équation (1.8) devient

$$\begin{aligned} -\phi(0) + \lambda\mathcal{L}(x)(\lambda) &= A\mathcal{L}(x)(\lambda) + B\int_{-r}^{\infty} \exp(-\lambda(t+r))\,x(t)dt \\ &= A\mathcal{L}(x)(\lambda) + B\exp(-\lambda r)\,. \\ &\quad .\left[\int_{-r}^{0} \exp(-\lambda t)\,x(t)dt + \int_{0}^{\infty} \exp(-\lambda t)\,x(t)dt\right] \\ &= A\mathcal{L}(x)(\lambda) + B\exp(-\lambda r)\,\mathcal{L}(x)(\lambda) + \\ &\quad +B\exp(-\lambda r)\int_{-r}^{0} \exp(-\lambda t)\,x(t)dt \end{aligned}$$

Donc

$$h(\lambda)\mathcal{L}(x)(\lambda) = \phi(0) + B\exp(-\lambda r)\int_{-r}^{0} \exp(-\lambda t)\,\phi(t)dt$$

Ceci implique que

$$\mathcal{L}(x)(\lambda) = \frac{1}{h(\lambda)}\left[\phi(0) + B\exp(-\lambda r)\int_{-r}^{0}\exp(-\lambda\theta)\,\phi(\theta)d\theta\right]$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{(c)}\frac{\exp(\lambda t)}{h(\lambda)}\left[\phi(0) + B\exp(-\lambda r)\int_{-r}^{0}\exp(-\lambda\theta)\,\phi(\theta)d\theta\right]d\lambda \\ &= X(t)\phi(0) + \int_{(c)} B\frac{\exp(\lambda t)}{h(\lambda)}\left[\underbrace{\exp(-\lambda r)\int_{-r}^{0}\exp(-\lambda\theta)\,\phi(\theta)d\theta}_{I_1}\right]d\lambda \end{aligned}$$

Calculons I_1. On définit une fonction $\omega : [-r, +\infty[\to [0,1]$ telle que

$$\omega(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; \theta \geq 0 \\ 1 & \text{si} \;\; \theta < 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{-r}^{+\infty}\exp(-\lambda r)\exp(-\lambda\theta)\,\phi(\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta$$

On pose $s = r + \theta$,on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{0}^{\infty}\exp(-\lambda s)\,\phi(s-r)\omega(s-r)\,ds \\ &= \mathcal{L}\left(\phi(-r+.)\omega(-r+.)\right)(\lambda) \end{aligned}$$

Maintenant on calcule $\int_{(c)} B\frac{\exp(\lambda t)}{h(\lambda)}I_1 d\lambda$

$$\begin{aligned} \int_{(c)} B\frac{\exp(\lambda t)}{h(\lambda)}I_1 d\lambda &= B\int_{(c)}\exp(\lambda t)\,\mathcal{L}(X)(\lambda)\,\mathcal{L}\left(\phi(-r+.)\omega(-r+.)\right)(\lambda)\,d\lambda \\ &= B\int_{(c)}\exp(\lambda t)\,\mathcal{L}\left(X * [\phi(-r+.)\omega(-r+.)]\right)(\lambda)\,d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(c)} B\frac{\exp(\lambda t)}{h(\lambda)} I_1 d\lambda &= B(X * [\phi(-r+.)\omega(-r+.)])(t)\\ &= B\int_0^t X(t-s)\left[\phi(-r+s)\omega(-r+s)\right] ds\\ &= B\int_0^r X(t-s)\phi(-r+s)ds\end{aligned}$$

car $\omega(-r+s)=0$ dans $[r,t]$. Finalement $(\theta = s-r)$

$$x(t) = X(t)\phi(0) + B\int_{-r}^{0} X(t-r-\theta)\phi(\theta)\, d\theta$$

■

Théorème 1.2.8 *Si* $\alpha_0 = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) \ / \ h(\lambda)=0\}$ *alors pour* $\alpha > \alpha_0$ *il y a une constante* $k = k(\alpha)$ *telle que la solution fondamental* $X(t)$ *satisfait l'inégalité*

$$|X(t)| \leq k\exp(\alpha t) \qquad t \geq 0$$

Démonstration : On sait que

$$X(t) = \int_{(c)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

Où c est un nombre réelle grand. Soit $c > \alpha$,on veut montrer que

$$X(t) = \int_{(\alpha)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

On considère les segments suivants formant le rectangle (Γ)

$$\begin{cases} L_1 \text{ est l'ensemble } \{c+i\tau, -T\leq\tau\leq T\} \\ L_2 \text{ est l'ensemble } \{\alpha+i\tau, -T\leq\tau\leq T\} \\ M_1 \text{ est l'ensemble } \{\sigma+iT, \alpha\leq\sigma\leq c\} \\ M_2 \text{ est l'ensemble } \{\sigma-iT, \alpha\leq\sigma\leq c\}\end{cases}$$

Puisque $h^{-1}(\lambda)$ n'a pas de zéros dans le rectangle (Γ) alors d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{(\Gamma)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda = 0$$

Ceci implique que

$$\int_{(M_1)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda + \int_{(L_1)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda -$$

$$- \int_{(M_2)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda - \int_{(L_2)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda = 0$$

Si on prouve que

$$\int_{(M_1)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_{(M_2)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda \to 0 \quad \text{qd} \quad T \to \infty$$

Alors

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{(L_1)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda = \lim_{T\to+\infty} \int_{(L_2)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

Par conséquent

$$X(t) = \int_{(\alpha)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

On choisit T_0 assez grand pour que

$$\left(1 + \frac{\min(\alpha^2, c^2)}{T_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{T_0}\left(|A| + |B| \exp(-\alpha r)\right) \geq \frac{1}{2}$$

Soit $\lambda \in M_1$ alors $\lambda = \sigma + iT, \alpha \leq \sigma \leq c$, pour $T > T_0$ on a

$$\begin{aligned} |\lambda - A - B\exp(-\lambda r)| &\geq \left(\sigma^2 + T^2\right)^{\frac{1}{2}} - |A| - |B| \exp(-\sigma r) \\ &= T\left[\left(\frac{\min(\alpha^2, c^2)}{T^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{T}\left(|A| + |B| \exp(-\alpha r)\right)\right] \\ &\geq \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\left|h^{-1}(\lambda)\right| \leq \frac{2}{T} \Rightarrow \left| \int_{(M_1)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda \right| \leq \frac{2}{T} \exp(ct)(c - \alpha) \to 0 \text{ qd } T \to \infty$$

On fait la même chose pour $\int\limits_{(M_2)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda$. Alors

$$X(t) = \int\limits_{(\alpha)} \exp(\lambda t)\, h^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

Le reste à revoir !!!! ■

Chapitre 2

Equations fractionnaires à retard

On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x\,(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t) & t > 0 \\ x(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{2.1}$$

où dans cette section D^{α} est la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre α avec $a = 0$, $0 < \alpha < 1$, ϕ est une fonction continue dans $[-r, 0]$, A et B sont des matrices carrées constantes de dimension finie et $r > 0$ est une constante. Le système est définit sur l'intervalle $J = [0, T]$, $f(t)$ est une fonction continue dans $[0, T]$. On note par $C([a, b])$ l'espace des fonctions continues réelles qui sont définies sur $[a, b]$ et par $C\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ avec la topologie de convergence uniforme. Soit $C = C\left([-r, 0], \mathbb{R}^n\right)$ et ϕ un élément dans C. On désigne la norme de ϕ par

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\phi(t)|$$

Soit

$$X_{\phi} = \left\{x \in C\left([-r, T], \mathbb{R}^n\right) \;/\; x(t) = \phi(t) \text{ si } t \in [-r, 0]\right\}$$

Alors X_{ϕ} est un espace affine car

$$X_{\phi} = \left\{h + \widetilde{\phi}, h \in F\right\}$$

où $\widetilde{\phi}$ est un prolongement continue de ϕ sur $[-r, T]$ et

$$F = \left\{x \in C\left([-r, T], \mathbb{R}^n\right) \;/\; x(t) = 0 \text{ si } t \in [-r, 0]\right\}.$$

Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de $E = C([-r,T], \mathbb{R}^n)$. Montrons que F est un fermé. On prend une suite (f_n) dans F telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f$$

et on montre que $f \in F$. On a $f_n \rightrightarrows f$ quand $n \to \infty$ c'est-à-dire que f_n converge uniformément vers f. On sait que la convergence uniforme conserve la continuité, alors puisque les f_n sont continues alors f est continue. Pour $t \in [-r, 0]$, comme la convergence uniforme implique la convergence simple donc

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

car $f_n(t) = 0$ dans $[-r, 0]$. Donc on conclut que $f \in F$ ce qui implique que F est un fermé.

Soient

$$x_1, x_2 \in X_\phi \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + \widetilde{\phi} \\ x_2 = y_2 + \widetilde{\phi} \end{cases}$$

On définit une distance d sur l'éspace X_ϕ par

$$d(x_1, x_2) = \|y_1 - y_2\| = \sup_{0\le t\le T} |y_1 - y_2|$$

Il faut remarquer que les solutions continues du problème (2.1) seront déterminées dans l'espace affine X_ϕ. De ce fait, les majorations devraient être établies à l'aide de la distance d définie plus haut. Comme elle ne dépend que de la distance uniforme entre les représentants y_1 et y_2 dans lespace vectoriel F, alors on ne fera usage que de la norme de la convergence uniforme sachant bien qu'il s'agit de la distance d.

Pour les matrices A et B on définit les nombres

$$\mu_0 = \sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \|A\| \quad \text{et} \quad \mu_1 = \sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|Bu\|}{\|u\|} = \|B\|$$

2.1 Existence

Théorème 2.1.1 *Soit $\phi \in C$ une fonction continue donnée.On fixe $T > 0$ et on suppose que $f(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$,alors il existe une solution unique $x(\phi, f)$ continue définie sur $[0,T]$ et qui coïncide avec ϕ sur $[-r, 0]$ du problème à valeur initial (2.1).*

Démonstration : On montre d'abord l'équivalence entre le système (2.1) et le système suivant:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t)$$

On prouve maintenant que si on a $D^{\alpha} x\left(t\right) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t)$ alors

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B I^{k\alpha} x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t)$$

On a

$$D^{\alpha} x\left(t\right) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t)$$

alors

$$x\left(t\right) = I^{\alpha} Ax(t) + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t)$$

car d'une part à l'aide de (1.4) on a

$$I^{\alpha}(D^{\alpha} x)(t) = x(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)} \left[\left(I^{1-\alpha} x\right)\left(t\right)\right]_{t=0}$$

et d'autre part grâce à (Prop 1.1.8) $\left[\left(I^{1-\alpha} x\right)\left(t\right)\right]_{t=0} = 0$ puisque x est supposée continue. Après une itération on aura

$$\begin{aligned}
x\left(t\right) &= AI^{\alpha}\left[I^{\alpha} Ax(t) + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t)\right] + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t) \\
&= A^2 I^{2\alpha} x(t) + ABI^{2\alpha} x(t-r) + AI^{2\alpha} f(t) + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
x\left(t\right) &= A^2 I^{2\alpha}\left[I^{\alpha} Ax(t) + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t)\right] + ABI^{2\alpha} x(t-r) + \\
&\quad + AI^{2\alpha} f(t) + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t) \\
&= A^3 I^{3\alpha} x(t) + A^2 BI^{3\alpha} x(t-r) + A^2 I^{3\alpha} f(t) \\
&\quad + ABI^{2\alpha} x(t-r) + AI^{2\alpha} f(t) + I^{\alpha} Bx(t-r) + I^{\alpha} f(t) \\
&= A^3 I^{3\alpha} x(t) + \left[BI^{\alpha} + ABI^{2\alpha} + A^2 BI^{3\alpha}\right] x(t-r) \\
&\quad + \left(I^{\alpha} + AI^{2\alpha} + A^2 I^{3\alpha}\right) f(t) \\
&\quad \cdots \\
&\quad \cdots \\
&= A^n I^{n\alpha} x(t) + \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} BI^{k\alpha} x(t-r) + \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} A^{k-1}BI^{k\alpha}x(t-r)\right| &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\left|I^{k\alpha}x(t-r)\right| \\ &= \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k\alpha)}\left|\int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1}x(\tau-r)d\tau\right| \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1}\left|x(\tau-r)\right|d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\frac{\|x\|}{\Gamma(k\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1}d\tau \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\frac{\|x\|}{\Gamma(k\alpha+1)}\left[-(t-\tau)^{k\alpha}\right]_0^t \\ &\leq \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\frac{\|x\|t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \leq \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{k-1}\frac{\|x\|T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\end{aligned}$$

On a la série $\mu_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_0^{k-1}\frac{\|x\|T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$ est convergente car:

on pose

$$c_k = \mu_0^{k-1}\frac{\|x\|T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{c_{k+1}}{c_k} &= \mu_0^{k}\frac{\|x\|T^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\mu_0^{k-1}\|x\|T^{k\alpha}} \\ &= \mu_0 T\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim z^{a-b} \quad \text{qd} \ \ z \to +\infty$$

donc

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \sim (\alpha k)^{-\alpha} \qquad \text{qd} \quad k \to +\infty$$

donc

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \to 0 \ \ \text{qd} \ \ k \to +\infty$$

On fait le même raisonnement pour la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t)$. D'autre part $A^nI^{n\alpha}x(t)$ est le terme générale de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}x(t)$ donc

$$A^nI^{n\alpha}x(t) \to 0 \text{ qd } n \to +\infty$$

Alors on conclut que

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t)$$

Maintenant on prouve que si

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t)$$

alors $D^\alpha x\,(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t)$. On a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t) \\
&\Rightarrow D^\alpha x\,(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}BI^{(k-1)\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{(k-1)\alpha}f(t) \\
&\Rightarrow D^\alpha x\,(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k}I^{k\alpha}f(t) \\
&\Rightarrow D^\alpha x\,(t) = Bx(t-r) + f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k}I^{k\alpha}f(t) \\
&\Rightarrow D^\alpha x\,(t) = Bx(t-r) + f(t) + A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t)\right) \\
&\Rightarrow D^\alpha x\,(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t)
\end{aligned}$$

Donc les deux systemes sont équivalents.On montre maintenant par la méthode des pas l'existense de la solution du probleme (2.1).

1. pour $t \in [0, r]$ alors $t - r \in [-r, 0]$,on a

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}BI^{k\alpha}x(t-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}B\frac{1}{\Gamma(k\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{k\alpha-1}\phi(\tau-r)d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1}I^{k\alpha}f(t)
\end{aligned}$$

2. pour $t \in [r, 2r]$,on a

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{k\alpha-1} \phi(\tau - r) d\tau \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_r^t (t-\tau)^{k\alpha-1} x_1(\tau - r) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t) \end{aligned}$$

3. Alors pour $t \in [(n-1)r, nr]$,on a

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{\alpha-1} \phi(\tau - r) d\tau \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_r^{2r} (t-\tau)^{k\alpha-1} x_1(\tau - r) d\tau + ... \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} B \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_{(n-1)r}^{t} (t-\tau)^{k\alpha-1} x_{n-1}(\tau - r) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} A^{k-1} I^{k\alpha} f(t) \end{aligned}$$

Donc la solution éxiste. ■

2.2 Unicité

Maintenant on montre l'unicité de la solution. On prend deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec deux conditions initiales $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ respectivement,on a

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &= |I^\alpha A (x_1(t) - x_2(t)) + I^\alpha B (x_1(t-r) - x_2(t-r))| \\ &\leq |I^\alpha A (x_1(t) - x_2(t))| + |I^\alpha B (x_1(t-r) - x_2(t-r))| \\ &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| d\tau + \\ &\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau - r)| d\tau \end{aligned}$$

Si $t \in [0, r]$:

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau + \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(\phi_1 - \phi_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&\leq \frac{\mu_1 r^\alpha \|\phi_1 - \phi_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec $1 < p < \dfrac{1}{1-\alpha}$ et q telle que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,on obtient

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq \frac{\mu_1 r^\alpha \|\phi_1 - \phi_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-1)p} \, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1 r^\alpha \|\phi_1 - \phi_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0 r^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{1}{p}}} \left[\int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|x_1(t) - x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q r^{\alpha q} \|\phi_1 - \phi_2\|^q}{\Gamma(\alpha+1)^q} + \frac{2^{q-1} \mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q \left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}} \int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau$$

D'aprés le lemme de Gronwall:

$$|x_1(t) - x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q r^{\alpha q} \|\phi_1 - \phi_2\|^q}{\Gamma(\alpha+1)^q} \exp\left(\frac{2^{q-1} \mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{\Gamma(\alpha)^q \left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}} \right)$$

Alors on conclut que si $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ alors $x_1(t) = x_2(t)$ sur $[0, r]$.

Maintenant si $t > r$:

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau + \\
&\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{\alpha-1} |(\phi_1 - \phi_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_r^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau + \\
&\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{\alpha-1} |(\phi_1 - \phi_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-r} (t-r-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq \frac{\mu_1 \|\phi_1 - \phi_2\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-1)p} \, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{t-r} (t-r-\tau)^{(\alpha-1)p} \, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^{t-r} |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1 \|\phi_1 - \phi_2\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{(\mu_0 + \mu_1) T^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha) ((\alpha-1)p+1)^{\frac{1}{p}}} \right) \left[\int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|x_1(t) - x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\phi_1 - \phi_2\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} + \left(\frac{2^{q-1} (\mu_0 + \mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}} \right) \int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau$$

D'aprés le lemme de Gronwall on obtient

$$|x_1(t) - x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\phi_1 - \phi_2\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} \exp\left(\frac{2^{q-1} (\mu_0 + \mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}} \right)$$

Alors on conclut que si $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ alors

$$\forall t \in [0, T], \quad x_1(t) = x_2(t)$$

Ce qui nous donne l'unicité de la solution.

2.3 Systèmes non autonomes

Maintenant on étudie l'existense et l'unicité du problème (2.1) pour A et B dépendant continûment du temps.

Théorème 2.3.1 *Soit $\phi \in C$ une fonction continue donnée.On fixe $T > 0$ et on suppose que $f(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$. Alors il existe une solution unique du problème à valeur initiale (2.1), $x(\phi, f)$ continue définie sur $[0, T]$ et qui coïncide avec ϕ sur $[-r, 0]$.*

Démonstration : On montre d'abord l'équivalence entre le système (2.1) et le système suivant:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} [I^\alpha A(t)]^k I^\alpha B(t)x(t-r) + \sum_{k=0}^{+\infty} [I^\alpha A(t)]^k I^\alpha f(t)$$

Où $[I^\alpha A(t)]^n g(t) = \underbrace{I^\alpha A(t) I^\alpha A(t) \cdots I^\alpha A(t)}_{n \text{ fois}} g(t)$

" $\Rightarrow$ " :

On a

$$\begin{aligned}
x(t) &= I^\alpha A(t)x(t) + I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha f(t) \\
&= I^\alpha A(t) [I^\alpha A(t)x(t) + I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha f(t)] + I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha f(t) \\
&= I^\alpha A(t) I^\alpha A(t)x(t) + I^\alpha A(t) I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha A(t) I^\alpha f(t) \\
&\quad + I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha f(t) \\
&= I^\alpha A(t) I^\alpha A(t) [I^\alpha A(t)x(t) + I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha f(t)] \\
&\quad + I^\alpha A(t) I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha A(t) I^\alpha f(t) + I^\alpha B(t)x(t-r) + I^\alpha f(t) \\
&= I^\alpha A(t) I^\alpha A(t) I^\alpha A(t)x(t) + (I^\alpha + I^\alpha A(t) I^\alpha + I^\alpha A(t) I^\alpha A(t) I^\alpha) f(t) \\
&\quad (I^\alpha B(t) + I^\alpha A(t) I^\alpha B(t) + I^\alpha A(t) I^\alpha A(t) I^\alpha B(t)) x(t-r) \\
&\quad \cdots \\
&\quad \cdots \\
&= [I^\alpha A(t)]^n x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} [I^\alpha A(t)]^k I^\alpha B(t)x(t-r) + \sum_{k=0}^{n-1} [I^\alpha A(t)]^k I^\alpha f(t)
\end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$\begin{aligned}
\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{n} g(t) &= \underbrace{I^{\alpha}A(t)I^{\alpha}A(t)\cdots I^{\alpha}A(t)}_{n \text{ fois}} g(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)^{n}} \underbrace{\int ..\int}_{0\le\tau_n\le....\le t} (t-\tau_1)^{\alpha-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\tau_k-\tau_{k+1})^{\alpha-1}\times \\
&\quad \times A(\tau_1)...A(\tau_n)\,g(\tau_n)\,d\tau_1...d\tau_n
\end{aligned}$$

On va majorer

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)^{n}} \underbrace{\int ..\int}_{0\le\tau_n\le....\le t} (t-\tau_1)^{\alpha-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\tau_k-\tau_{k+1})^{\alpha-1} A(\tau_1)...A(\tau_n)\,d\tau_1...d\tau_n$$

On fait une régression à partir de τ_n

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_{n-1}}(\tau_{n-1}-\tau_n)^{\alpha-1}d\tau_n=\frac{\tau_{n-1}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

et pour

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}-\tau_{n-1})^{\alpha-1}\frac{\tau_{n-1}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}d\tau_{n-1} \qquad (*)$$

on pose $y=\dfrac{\tau_{n-1}}{\tau_{n-2}}$,on obtient

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1(\tau_{n-2}-\tau_{n-2}y)^{\alpha-1}(\tau_{n-2}y)^{\alpha}\tau_{n-2}dy \\
&= \frac{\tau_{n-2}^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^{\alpha}dy=\frac{\tau_{n-2}^{2\alpha}\beta(\alpha,\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{\tau_{n-2}^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&= \frac{\tau_{n-2}^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}
\end{aligned}$$

et pour

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+1)}\int_0^{\tau_{n-3}}(\tau_{n-3}-\tau_{n-2})^{\alpha-1}\tau_{n-2}^{2\alpha}d\tau_{n-2}$$

on pose $\eta = \dfrac{\tau_{n-2}}{\tau_{n-3}}$. Donc on conclut que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)^n} \underbrace{\int .. \int}_{0 \leq \tau_n \leq .... \leq t} (t-\tau_1)^{\alpha-1} \prod_{k=1}^{n-1} (\tau_k - \tau_{k+1})^{\alpha-1} d\tau_1 ... d\tau_n = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

Alors

$$\left| [I^\alpha A(t)]^n g(t) \right| \leq \frac{\mu_0^n \|g\| T^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} [I^\alpha A(t)]^k I^\alpha f(t) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu_0^k \|I^\alpha f(t)\| T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu_0^k \|f\| T^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

On pose

$$c_k = \frac{\mu_0^k \|f\| T^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha+1)}$$

On a

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \mu_0 T^\alpha \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)} \sim \mu_0 T^\alpha (\alpha k)^{-\alpha} \ \text{ qd } k \to +\infty$$

car

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim z^{a-b} \quad \text{qd} \quad z \to +\infty$$

Donc $\dfrac{c_{k+1}}{c_k} \to 0$ qd $k \to +\infty$. Alors la série (2.2) est convergente.On fait le même raisonnement pour la série

$$\sum_{k=0}^{n-1} [I^\alpha A(t)]^k I^\alpha B(t) x(t-r)$$

Pour le terme

$$\left| [I^\alpha A(t)]^n x(t) \right| \leq \frac{\mu_0^n \|x\| T^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)}$$

on remarque que $\dfrac{\mu_0^n \|x\| T^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)}$ est à un facteur près, le terme général de la série (2.2) donc

$$\frac{\mu_0^n \|x\| T^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)} \to 0 \quad \text{qd} \quad n \to +\infty$$

Par conséquent

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}B(t)x(t-r)+\sum_{k=0}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}i^{\alpha}f(t)$$

" $\Leftarrow$ "

On a si

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}B(t)x(t-r)+\sum_{k=0}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}f(t)\\ &= I^{\alpha}B(t)x(t-r)+I^{\alpha}f(t)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}B(t)x(t-r)+\\ &\quad +\sum_{k=1}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}f(t)\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}D^{\alpha}x(t) &= B(t)x(t-r)+f(t)+\sum_{k=1}^{+\infty}A(t)\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k-1}I^{\alpha}B(t)x(t-r)+\\ &\quad +\sum_{k=1}^{+\infty}A(t)\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k-1}I^{\alpha}f(t)\end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned}D^{\alpha}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k} &= \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}\\ &= \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}I^{\alpha}A(t)\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k-1}\\ &= A(t)\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^{\alpha}x(t) &= B(t)x(t-r)+f(t)+A(t).\\ &\quad .\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}B(t)x(t-r)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[I^{\alpha}A(t)\right]^{k}I^{\alpha}f(t)\right]\\ &= A(t)x(t)+B(t)x(t-r)+f(t)\end{aligned}$$

Donc les deux système sont équivalents. Le reste de l'étude de l'existence et de l'unicité se fait identiquement au cas autonome. ∎

2.4 Stabilité

Définition 2.4.1 *On dit que $x(t,\phi)$ est stable si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0 \text{ telle que } \sup_{-r\leq t\leq 0}|\phi(t)-\phi_0(t)|\leq\delta\Rightarrow\sup_{0\leq t\leq T}|x(t,\phi)-x(t,\phi_0)|\leq\varepsilon$$

Théorème 2.4.2 *La solution du problème (2.1) est stable si la condition suivante est satisfaite:*

$$\frac{2^{q-1}r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{q\Gamma(\alpha)^q((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right)\leq\frac{\varepsilon}{\delta}$$

avec $1<p<\dfrac{1}{1-\alpha}$ *et q telle que* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

Démonstration : On pose $x(t,\phi_1)=x_1(t)$ et $x(t,\phi_2)=x_2(t)$.On a

$$\begin{aligned}
|x_1(t)-x_2(t)| &= |I^{\alpha}A(x_1(t)-x_2(t))+I^{\alpha}B(x_1(t-r)-x_2(t-r))| \\
&\leq |I^{\alpha}A(x_1(t)-x_2(t))|+|I^{\alpha}B(x_1(t-r)-x_2(t-r))| \\
&\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}|(x_1-x_2)(\tau)|\,d\tau+ \\
&\quad +\frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}|(x_1-x_2)(\tau-r)|\,d\tau
\end{aligned}$$

Si $t\in[0,r]$:

$$\begin{aligned}
|x_1(t)-x_2(t)| &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}|(x_1-x_2)(\tau)|\,d\tau+ \\
&\quad +\frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}|(\phi_1-\phi_2)(\tau-r)|\,d\tau \\
&\leq \frac{\mu_1 r^{\alpha}\|\phi_1-\phi_2\|}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}|(x_1-x_2)(\tau)|\,d\tau
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec $1 < p < \dfrac{1}{1-\alpha}$ et q telle que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,on obtient

$$\begin{aligned}
|x_1(t)-x_2(t)| &\leq \frac{\mu_1 r^{\alpha}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|}{\Gamma(\alpha+1)}+ \\
&\quad +\frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-1)p}\,d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^t |(x_1-x_2)(\tau)|^q\,d\tau\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1 r^{\alpha}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|}{\Gamma(\alpha+1)}+ \\
&\quad +\frac{\mu_0 r^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{1}{p}}}\left[\int_0^t |(x_1-x_2)(\tau)|^q\,d\tau\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|x_1(t)-x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1}\mu_1^q r^{q\alpha}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|^q}{\Gamma(\alpha+1)^q}+\frac{2^{q-1}\mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}}\int_0^t |(x_1-x_2)(\tau)|^q\,d\tau$$

D'après le lemme de Gronwall, on trouve

$$|x_1(t)-x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1}\mu_1^q r^{q\alpha}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|^q}{\Gamma(\alpha+1)^q}\exp\left(\frac{2^{q-1}\mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{\Gamma(\alpha)^q\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Par conséquent

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leq \frac{2^{1-\frac{1}{q}}\mu_1 r^{\alpha}\left\|\phi_1-\phi_2\right\|}{\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{2^{q-1}\mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{q\Gamma(\alpha)^q\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Si $t > r$:

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau + \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{\alpha-1} |(\phi_1 - \phi_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_r^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau + \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (t-\tau)^{\alpha-1} |(\phi_1 - \phi_2)(\tau - r)| \, d\tau \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-r} (t-r-\tau)^{\alpha-1} |(x_1 - x_2)(\tau)| \, d\tau
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq \frac{\mu_1 \|\phi_1 - \phi_2\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\
&+ \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-1)p} \, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{t-r} (t-r-\tau)^{(\alpha-1)p} \, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^{t-r} |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1 \|\phi_1 - \phi_2\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{(\mu_0 + \mu_1) T^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{1}{p}}} \right) \left[\int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|x_1(t) - x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\phi_1 - \phi_2\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} + \left(\frac{2^{q-1} (\mu_0 + \mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q \left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}} \right) \int_0^t |(x_1 - x_2)(\tau)|^q \, d\tau$$

D'après le lemme de Gronwall on obtient

$$|x_1(t) - x_2(t)|^q \leq \frac{2^{q-1}\mu_1^q \|\phi_1 - \phi_2\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} \exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Ceci implique que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{2^{1-\frac{1}{q}}\mu_1 \|\phi_1 - \phi_2\| r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{q\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Donc si$\|\phi_1 - \phi_2\| \leq \delta$ alors $\forall t \in [0, T]$

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{2^{1-\frac{1}{q}}\mu_1 \delta r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{q\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Alors on voit bien que la condition

$$\frac{2^{1-\frac{1}{q}}\mu_1 r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{q\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

est suffisante pour assurer la stabilité. A noter que la dernière exponentielle est plus grande que celle obtenue dans le cas $t \in [0, r]$. $\blacksquare$

Chapître 3

Quelques généralisations

Dans cette section, on va chercher la solution de notre problème à l'aide de la transformation de Laplace. On va d'abord estimer la solution du problème par l'exponentielle pour assurer l'existence de la transformée de Laplace.

3.1 Estimation exponentielle

Notre problème est

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bx(t-r) & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t) & t \in [0, r] \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$. On pose $\mu_0 = |A|$ et $\mu_1 = |B|$. Le théorème suivant, bien qu'énoncé et démontré dans le cas scalaire, reste valable dans le cas vectoriel où A et B sont des matrices constantes. C'est pour cette raison que nous avons gardé la notation μ_0 et μ_1.

Théorème 3.1.1 *Soit $x(t)$ une solution du problème (3.1). Alors il existe deux constantes positives a et b telles que*

$$|x(t)| \leq a \|\phi\| \exp(bt)$$

où $\|\phi\| = \sup\limits_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$

Démonstration : On a

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bx(t) \Rightarrow x(t) = AI^{\alpha}x(t) + BI^{\alpha}x(t-r)$$

Ceci implique que

$$|x(t)| \leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |x(\tau)| \, d\tau + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |x(\tau - r)| \, d\tau$$

Si $t \in [0, r]$,alors

$$|x(t)| \leq \frac{\mu_1 \|\phi\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |x(\tau)| \, d\tau$$

On utilise l'inégalité de Hölder ,on obtient

$$|x(t)| \leq \frac{\mu_1 \|\phi\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-1)p} \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t |x(\tau)|^q \, d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

Avec si $1 < p < \dfrac{1}{1-\alpha}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$$|x(t)| \leq \frac{\mu_1 \|\phi\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0 r^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)\left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^t |x(\tau)|^q \, d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

Alors

$$|x(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\phi\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} + \frac{2^{q-1} \mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q \left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}} \int_0^t |x(\tau)|^q \, d\tau$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on trouve

$$|x(t)|^q \leq \frac{2^{q-1} \mu_1^q \|\phi\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} \exp\left(\frac{2^{q-1} \mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q \left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}} \, t \right)$$

Donc

$$|x(t)| \leq \frac{2^{1-\frac{1}{q}} \mu_1 \|\phi\| r^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{2^{q-1} \mu_0^q r^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}} t}{q\Gamma(\alpha)^q \left((\alpha-1)p+1\right)^{\frac{q}{p}}} \right)$$

Si $t > r$

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}|x(\tau)|\,d\tau + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (t-\tau)^{\alpha-1}|x(\tau-r)|\,d\tau + \\
&+\frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\int_r^t (t-\tau)^{\alpha-1}|x(\tau-r)|\,d\tau \\
&\leq \frac{\mu_1\|\phi\|r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}|x(\tau)|\,d\tau + \\
&+\frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-r} (t-r-\tau)^{\alpha-1}|x(\tau)|\,d\tau
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder ,on obtient

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \frac{\mu_1\|\phi\|r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-1)p}\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t |x(\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{t-r} (t-r-\tau)^{(\alpha-1)p}\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t |x(\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1\|\phi\|r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu_0 T^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^t |x(\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\mu_1 (t-r)^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^t |x(\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\mu_1\|\phi\|r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\mu_0+\mu_1)T^{(\alpha-1)+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^t |x(\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{car } t-r<T)
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|x(t)|^q \leq \frac{2^{q-1}\mu_1^q\|\phi\|^q r^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha+1)^q} + \frac{(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{\Gamma(\alpha)^q((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\int_0^t |x(\tau)|^q\,d\tau$$

On applique le lemme de Gronwall, on trouve

$$|x(t)|^q \leq \frac{2^{q-1}\mu_1^q \|\phi\|^q r^{q\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^q} \exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}+1}}{\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Donc

$$|x(t)| \leq \frac{2^{1-\frac{1}{q}}\mu_1 \|\phi\| r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}} t}{q\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}\right)$$

Alors

$$|x(t)| \leq a \|\phi\| \exp(bt)$$

où $a = \dfrac{2^{1-\frac{1}{q}}\mu_1 r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ et $b = \dfrac{2^{q-1}(\mu_0+\mu_1)^q T^{(\alpha-1)q+\frac{q}{p}}}{q\Gamma(\alpha)^q ((\alpha-1)p+1)^{\frac{q}{p}}}$ ■

3.2 Transformée de la solution

Puisque $x(t)$ satisfait l'estimation exponentielle alors $\mathcal{L}(x)$ existe, on a

$$\mathcal{L}(D^{\alpha}x(t))(z) = A\mathcal{L}(x(t))(z) + B\mathcal{L}(x(t-r))(z)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
z^{\alpha}\mathcal{L}(x(t))(z) &= A\mathcal{L}(x(t))(z) + B\mathcal{L}(x(t-r))(z) \\
&= A\mathcal{L}(x(t))(z) + B\int_0^{+\infty} \exp(-zt)\, x(t-r)dt \\
&= A\mathcal{L}(x(t))(z) + B\int_{-r}^{+\infty} \exp(-z(t+r))\, x(t)dt \\
&= A\mathcal{L}(x(t))(z) + B\exp(-zr)\int_{-r}^{0} \exp(-zt)\, x(t)dt + \\
&\quad +B\exp(-zr)\int_0^{+\infty} \exp(-zt)\, x(t)dt \\
&= A\mathcal{L}(x(t))(z) + B\exp(-zr)\,\mathcal{L}(x(t))(z) + \\
&\quad +B\exp(-zr)\int_{-r}^{0} \exp(zt)\,\phi(t)dt
\end{aligned}$$

Donc

$$(z^{\alpha} - A - B\exp(-zr))\,\mathcal{L}(x(t))(z) = B\exp(-zr)\int_{-r}^{0}\exp(zt)\,\phi(t)dt$$

Alors on obtient

$$\mathcal{L}(x(t))(z) = \frac{1}{z^{\alpha} - A - B\exp(-zr)} B\exp(-zr)\int_{-r}^{0}\exp(zt)\,\phi(t)dt$$

On pose

$$M_{\phi}(z) = B\exp(-zr)\int_{-r}^{0}\exp(zt)\,\phi(t)dt$$

S'il existe $E(t)$ et $g(t)$ tels que

$$\mathcal{L}(E(t))(z) = \frac{1}{z^{\alpha} - A - B\exp(-zr)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(g(t))(z) = M_{\phi}(z)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t))(z) &= \mathcal{L}(E(t))(z)\mathcal{L}(g(t))(z) \\ &= \mathcal{L}((E * g)(t))(z) \end{aligned}$$

Ceci nous permettra d'exprimer la solution par

$$x(t) = (E * g)(t)$$

D'abord on va chercher un grand domaine où la fonction

$$D(z) = z^{\alpha} - A - B\exp(-zr)$$

ne s'annulle pas pour que la fonction $\dfrac{1}{z^{\alpha} - A - B\exp(-zr)}$ soit définie. On pose

$$z = \rho\exp(i\theta) \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Alors

$$\begin{aligned} D(\rho,\theta) &= \rho^{\alpha}(\cos(\alpha\theta) + i\sin(\alpha\theta)) - A \\ &\quad -B\exp(-r\rho\cos(\theta))\,(\cos(r\rho\sin(\theta)) - i\sin(r\rho\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Si $D(z) = 0$ alors ceci implique que

$$(S) \qquad \begin{cases} \rho^\alpha \cos(\alpha\theta) - A - B\exp(-r\rho\cos(\theta))(\cos(r\rho\sin(\theta))) = 0 \\ \rho^\alpha \sin(\alpha\theta) + B\exp(-r\rho\cos(\theta))\sin(r\rho\sin(\theta)) = 0 \end{cases}$$

On fixe $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,le problème (S) implique

$$\begin{cases} B\exp(-r\rho\cos(\theta))(\cos(r\rho\sin(\theta))) = \rho^\alpha \cos(\alpha\theta) - A \\ B\exp(-r\rho\cos(\theta))\sin(r\rho\sin(\theta)) = -\rho^\alpha \sin(\alpha\theta) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} B^2\exp(-2r\rho\cos(\theta))(\cos^2(r\rho\sin(\theta))) = (\rho^\alpha \cos(\alpha\theta) - A)^2 \\ B^2\exp(-2r\rho\cos(\theta))\sin^2(r\rho\sin(\theta)) = \rho^{2\alpha} \sin^2(\alpha\theta) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} B^2\exp(-2r\rho\cos(\theta)) &= (\rho^\alpha \cos(\alpha\theta) - A)^2 + \rho^{2\alpha}\sin^2(\alpha\theta) \\ &= \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\cos(\alpha\theta)\rho^\alpha \end{aligned}$$

Donc

$$B^2\exp(-2r\rho\cos(\theta)) = \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\cos(\alpha\theta)\rho^\alpha$$

On pose

$$\Psi(\rho) = \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\cos(\alpha\theta)\rho^\alpha$$

Et

$$f(\rho) = B^2\exp(-2r\rho\cos(\theta))$$

Si $A > 0$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \leq \cos(\alpha\theta) \leq 1 \\ &\Rightarrow 2A\rho^\alpha \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \leq 2A\rho^\alpha\cos(\alpha\theta) \leq 2A\rho^\alpha \\ &\Rightarrow -2A\rho^\alpha \leq -2A\rho^\alpha\cos(\alpha\theta) \leq -2A\rho^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\rho^\alpha \leq \Psi(\rho) \leq \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\rho^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow \Psi(\rho) \geq \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\rho^\alpha = (\rho^\alpha - A)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } (\rho^\alpha - A)^2 > 2B^2 \text{ alors } \rho^\alpha - A > \sqrt{2}\,|B|$$

Alors

$$\rho^\alpha > A + \sqrt{2}\,|B| \Rightarrow \rho > \left(A + \sqrt{2}\,|B|\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Pour

$$f(\rho) = B^2 \exp(-2r\rho\cos(\theta))$$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos(\theta) \leq 1 \\ &\Rightarrow -2r\rho \leq -2r\rho\cos(\theta) \leq 0 \\ &\Rightarrow \exp(-2r\rho) \leq \exp(-2r\rho\cos(\theta)) \leq 1 \\ &\Rightarrow B^2\exp(-2r\rho) \leq B^2\exp(-2r\rho\cos(\theta)) \leq B^2 \\ &\Rightarrow B^2\exp(-2r\rho) \leq f(\rho) \leq B^2 \end{aligned}$$

Alors on conclut que

$$\text{Si } \rho > \left(A + \sqrt{2}\,|B|\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ alors } \begin{cases} \Psi(\rho) \geq 2B^2 \\ f(\rho) \leq B^2 \end{cases}$$

Alors (S) n'a pas de solutions si $\rho > \left(A + \sqrt{2}\,|B|\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Si $A < 0$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \leq \cos(\alpha\theta) \leq 1 \\ &\Rightarrow 2A\rho^\alpha \leq 2A\rho^\alpha\cos(\alpha\theta) \leq 2A\rho^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow -2A\rho^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \leq -2A\rho^\alpha\cos(\alpha\theta) \leq -2A\rho^\alpha \\ &\Rightarrow \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\rho^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \leq \Psi(\rho) \leq \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\rho^\alpha \\ &\Rightarrow \Psi(\rho) \geq \rho^{2\alpha} + A^2 - 2A\rho^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\Psi(\rho) \geq \rho^{2\alpha} + A^2$$

On choisit ρ telle que

$$\begin{aligned} \rho^{2\alpha} + A^2 &> B^2 + A^2 \Rightarrow \rho^{2\alpha} > B^2 \\ &\Rightarrow \rho^\alpha > |B| \\ &\Rightarrow \rho > |B|^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

Alors on conclut que

$$\text{Si } \rho > |B|^{\frac{1}{\alpha}} \text{ alors } \begin{cases} \Psi(\rho) > B^2 + A^2 \\ f(\rho) \leq B^2 \end{cases}$$

Alors (S) n'a pas de solutions si $\rho > |B|^{\frac{1}{\alpha}}$. En définitive, il existe un demi-plan inclu dans le demi-plan $\Re(z) \geq 0$, dans lequel le système (S) n'a pas de solutions.

Maintenant on montre que $L^{-1}(M_\phi(z))(t)$ existe c'est à dire $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)} M_\phi(z)\exp(zt)\,dz$ converge (c assez grand positif).

On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int M_\phi(z)\exp(zt)\,dz = \frac{B}{2\pi i}\int \exp(-zr)\int\limits_{-r}^{0}\exp(-z\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau\exp(zt)\,dz$$

On pose $z = c + i\zeta$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int M_\phi(z)\exp(zt)\,dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-(c+i\zeta)r)\int\limits_{-r}^{0}\exp(-(c+i\zeta)\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau\exp((c+i\zeta)t)\,d\zeta \\
&= \lim_{L\to\infty}\frac{B}{2\pi}\int\limits_{-L}^{+L}\exp(-(c+i\zeta)r)\int\limits_{-r}^{0}\exp(-(c+i\zeta)\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau\exp((c+i\zeta)t)\,d\zeta \\
&= \lim_{L\to\infty}\frac{B}{2\pi}\int\limits_{-r}^{0}\exp(-(c+i\zeta)r)\int\limits_{-L}^{+L}\exp(-(c+i\zeta)\tau)\,\phi(\tau)\,d\zeta\exp((c+i\zeta)t)\,d\tau \\
&= \lim_{L\to\infty}\frac{B}{2\pi}\int\limits_{-r}^{0}\phi(\tau)\int\limits_{-L}^{+L}\exp((c+i\zeta)(t-r-\tau))\,d\zeta d\tau \\
&= \lim_{L\to\infty}\frac{B}{2\pi}\int\limits_{-r}^{0}\phi(\tau)\exp(c(t-r-\tau))\int\limits_{-L}^{+L}\exp(i\zeta(t-r-\tau))\,d\zeta d\tau \\
&= \lim_{L\to\infty}\frac{B}{\pi}\int\limits_{-r}^{0}\phi(\tau)\exp(c(t-r-\tau))\;\frac{\sin(t-r-\tau)L}{(t-r-\tau)}\;d\tau
\end{aligned}$$

Quand $L \to +\infty$ on sait que le noyau $\frac{\sin(t-r-\tau)L}{\pi(t-r-\tau)}$ approche la distribution δ de Dirac. D'où

$$\frac{1}{2\pi i}\int M_\phi(z)\exp(zt)\,dz = B\phi(t-r)$$

Maintenant on montre que $L^{-1}(\dfrac{1}{z^\alpha - A - B\exp(-zr)})(t)$ existe c'est à dire $\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{\exp(zt)}{z^\alpha - A - B\exp(-zr)}dz$ converge.!!!!!!