Sur une classe d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires à retard

Hafida HARRAGA[1]

Novembre. 2011

1. Adresse : Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Université Aboubekr BELKAID - BP 119 Tlemcen 13000 (ALGERIE).

A mes parents, mes frères, mes soeurs, mon neveu et mes deux nièces

A mes professeurs

A mes camarades surtout mes chères amies Meriem.K, Imene Meriem.M, Hayet.M et Fatima Zohra.M

Remerciements

Ma profonde reconnaissance va à mon encadreur de mémoire, Professeur Mustapha YEBDRI, qui a dirigé ce mémoire, au cours de cette période avec beaucoup de bienveillance et de disponibilité. C'est un plaisir de le remercier aussi pour ses conseils précieux durant ce travail, et surtout pour le sujet qu'il m'a proposé.

Mes respectueux remerciements s'adressent au professeur Belmiloud MEBKHOUT qui a bien voulu accepté la charge de président.

Les professeurs Sidi Mohamed BOUGUIMA et Abdelkader LAKMECHE me font un très grand plaisir en faisant partie du jury. Je les en remercie très chaleureusement.

Je remercie aussi mon enseignant et le Chef de Département le professeur Belmiloud MEBKHOUT.

J'exprime ma gratitude à mon enseignant et le résponsable de spécialité le professeur Mustapha YEBDRI pour son soutien scientifique, ses encouragements et la confiance qu'il m'a accordée.

Je voudrais également remercier mon enseignant le professeur Sidi Mohamed BOUGUIMA pour ses idées et ses conseils précieux.

Mes respectueux remerciements s'adressent à mon enseignant le professeur Hassen DIB pour tout ce qui m'a appris.

Enfin, je terminerai en remerciant mes parents pour le soutien moral dont ils ont su me gratifier tout au long de mon mémoire, plutôt pendant toute ma vie. Je remercie aussi tout le reste de ma famille.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une classe d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires à retard distribué dépendant d'état. L'existence et l'unicité des solutions, les propriétés asymptotiques, dont l'existence d'un attracteur global, sont étudiées. On cherche des conditions sur la fonction noyau pour que notre système admet des solutions stationnaires.

Mots-clés : équations différentielles fonctionnelles aux dérivées partielles, retard dépendant d'état, attracteur global, solutions stationnaires.

Abstract

This memoir concerns the investigation of a class of nonlinear partial differential equations with distributed state-dependent delay terms. The existence and the uniqueness, the asymptotic properties, including the existence of global attractor, are studied. One find conditions on kernel function for which our system has stationnary solutions.

Keywords : partial functional differential equations, state dependent delay, global attractor, stationnary solutions.

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles à retard est l'une des branches activement développées, ces dernières années, de la théorie des systèmes dynamiques de dimension infinie. Cette théorie couvre les équations différentielles ordinaires, les équations différentielles ordinaires à retard et les équations aux dérivées partielles à retard y compris les retards discrets et distribués, finis et infinis. Les méthodes classiques des équations différentielles, la théorie des distributions et l'analyse fonctionnelle, nous permettent d'étudier de larges classes d'équations différentielles ordinaires et particulièrement d'équations différentielles aux dérivés partielles à retard.

Ces derniers temps, beaucoup d'auteurs se sont intéressés aux équations à retard dépendant de l'état, voir [11, 23, 24] pour les équations différentielles ordinaires et [16, 17] pour les équations aux dérivées partielles. Pour les équations différentielles à retard dépendant de l'état, les techniques utilisées pour les retards indépendant de l'état se sont avérées inappropriés, c'est pourquoi on a fait appel à des espaces d'état plus fins que ceux utilisés précédemment. De même pour les équations aux dérivées partielles cette approche s'est montrée inadéquate.

Dans ce mémoire on présente une approche pour les équations aux dérivées partielles à retard. On reprend le travail de Rezounenko [14]. On considère une équation aux dérivées partielles à retard, dont ce dernier est donné par l'expression suivante :

$$\int_{-r}^{0} b(u(t+\theta,y))\xi(\theta,x,u(t),u_t(\theta))d\theta\,.$$

On se propose de donner les conditions qu'il faut pour la fonction ξ pour

1. l'existence et l'unicité des solutions ;
2. l'existence d'un attracteur global ;
3. l'existence des solutions stationnaires.

L'organisation de notre mémoire est la suivante :

Le premier chapitre porte sur des préliminaires et des rappels.

Dans le deuxième chapitre, on formule notre problème et on étudie l'existence et l'unicité des solutions.

Dans le dernier chapitre intitulé comportement asymptotique, on commence par l'existence d'un attracteur global, ensuite on montre l'existence des solutions stationnaires.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle certains définitions et résultats utilisés dans la suite de ce travail.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$; Ω est supposé borné régulier.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $C^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) l'espace des fonctions k-fois continument différentiables sur Ω .

On note par $C_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω .

L'espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$; est l'ensemble des fonctions mesurables u définies de Ω à valeurs réelles, qui sont p-intégrables i.e. $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$; muni de norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ pour } p \in [1, +\infty) .$$

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est un espace de fonctions *essentiellement* bornées sur Ω([1]), muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_\Omega |u(x)| \stackrel{def}{=} \inf\{c; |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

1. Une fonction u mesurable est dite essentiellement bornée s'il existe un nombre $c > 0$ tel que $|u(x)| \leq c$ p.p. sur Ω .

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)\, v(x) dx\,,$$

Ce produit est également le produit scalaire entre $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(= \mathcal{C}_0^\infty(\Omega))$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (espace des distributions sur $\Omega \overset{def}{=}$ l'espace des formes linéaires continues dans $\mathcal{D}(\Omega)$).

On désigne aussi par $\|\cdot\|$ la norme dans L^2 et on note :

$$\|u\| =< u, u >^{1/2}= \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $p \in [1, +\infty]$, séparable([2]) pour $p \in [1, +\infty[$ et réflexif([3]) pour $p \in]1, +\infty[$ avec son dual est $L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Maintenant on introduit quelques inégalités utiles :

Inégalité de Crude [20]

Pour tout $a, b \geq 0$ et pour tout $p \in [1, +\infty)$, on a :

$$|a + b|^p \leq 2^p (a^p + b^p)\,.$$

Inégalité de Young [20]

Pour tout $a, b \geq 0$ et pour $p \in [1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Inégalité de Holder [20]

Si p telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ alors

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

2. Un espace de Banach X est dit séparable s'il admet un sous ensemble dénombrable D dense ($\overline{D} = X$).
3. Un espace de Banach X est réflexif si $X^{**} = X$.

Où $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Holder se réduit à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Minkowski [20]

Si $u, v \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, alors $u + v \in L^p(\Omega)$ avec

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Inégalité de Gronwall [20]

Soient $u, \alpha \in C([a, b])$, $\beta(t) \geq 0$, β intégrable sur $[a, b]$ et

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

Alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(\tau)\alpha(\tau) \exp\left\{ \int_\tau^t \beta(s) ds \right\} d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

De plus, si α est non-décroissante, alors

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left\{ \int_a^t \beta(s) ds \right\}, \quad a \leq t \leq b.$$

Inégalités différentielles [20]

Soit $u(t) \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $u \geq 0$ et

$$\dot{u}(t) + \gamma\, u(t) \leq h(t)$$

Où $h(t) \in \mathcal{C}([a, b])$, $h \geq 0$, $\gamma \geq 0$.

Alors

$$u(t) \leq \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} h(s) ds + u(0) e^{-\gamma t}.$$

En particulier, si $h(t) = c$ alors

$$u(t) \leq c\gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma t}) + u(0) e^{-\gamma t}.$$

Inégalité de la moyenne [10]

Soient (a,b) un intervalle non nécessairement borné (c'est à dire qu'on peut avoir $a=-\infty$ ou $b=+\infty$), $f(t)$ une fonction bornée sur (a,b) , et $g(t)$ une fonction telle que l'intégrale $\int_a^b |g(t)|dt$ soit convergente. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est absolument convergente et on a :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sup_{t\in(a,b)} |f(t)| \times \int_a^b |g(t)|dt\,.$$

Dans la suite, X étant un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, on désigne par $L^p((a,b);X)$ l'espace des fonctions mesurables u , définies de $(0,T)$ à valeurs dans X ; muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p((a,b);X)} \quad = \quad \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} < \infty\,.$$

Si $p=\infty$, $L^\infty((a,b);X)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur $[a,b]$,muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty((a,b);X)} = ess\sup_{(a,b)} \|u(t)\|_X\,.$$

Chaque $L^p((a,b);X)$ est un espace de Banach. Si X est séparable et $1\leq p<+\infty$, alors $L^p((a,b);X)$ est séparable. Si X est réflexif et $1<p<+\infty$, alors $L^p((a,b);X)$ est aussi réflexif. Finalement, Si X est un espace de Hilbert alors $L^2((a,b);X)$ l'est aussi avec le produit scalaire :

$$<u,v>_{L^2((a,b);X)} = \int_a^b <u(s),v(s)> ds\,, \quad u\,,v\in L^2((a,b);X)\,.$$

Dans la suite on définit la dérivée par rapport à t dans les espaces L^p .

On désigne par $\mathcal{D}'((a,b);X)$ l'espace des distributions sur (a,b) à valeurs dans X , défini par :

$$\mathcal{D}'((a,b);X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]a,b[);X) \ (^4).$$

4. De façon générale $\mathcal{L}(Y;Z)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de Y dans Z

Si $f \in \mathcal{D}'((a,b);X)$, sa dérivée distribution est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi) = -f\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)\,. \tag{1.1.1}$$

Si $f \in L^p((a,b);X)$, il lui correspond une distribution (encore notée f) sur $]a,b[$ à valeurs dans X , par :

$$f(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt\,,\ \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)\,,$$

intégrale à valeurs dans X ; on peut encore définir $\frac{\partial f}{\partial t}$ comme élément de $\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ par (1.1.1).

On note par $\mathcal{C}([a,b],X)$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans X . $\mathcal{C}([a,b],X)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{C}([a,b],X)} = \sup_{[a,b]} \|u(t)\|_X\,.$$

On utilisera aussi l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, d'ordre entier m , et pour $1 \le p \le +\infty$. On le définit comme espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées distributions d'ordre m sont aussi dans $L^p(\Omega)$, i.e. :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ :\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,,\ |\alpha| \le m\}$$

Où $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ est la dérivée faible (distribution) partielle, $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\},\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Alors il est connu (voir dans [13]) que $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}, \quad \text{pour } 1 \le p < \infty$$

et

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = ess \sup_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_\infty\,.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable pour $1 \le p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Pour $p = 2$, on note $W^{m,p}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$, c'est à dire :

$$H^m(\Omega) = \{u \, : \, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \, , \; |\alpha| \leq m\} \, .$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \; = \; < D^\alpha u, D^\alpha u >^{1/2}_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha u > \right)^{1/2} .$$

$W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $C_0^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$ ou k est fini) dans $W^{m,p}(\Omega)$; qui est un sous espace de $W^{m,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ admet un dual $W^{-m,q}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$, où q est l'exposant conjugué de p .

Pour $p = 2$, On note aussi $W_0^{m,p}(\Omega)$ par $H_0^m(\Omega)$ qui est un sous espace de $H^m(\Omega)$ de fonctions nulles sur la frontière $\partial\Omega$. Son dual est noté par $H^{-m}(\Omega)$. Puisque (par définition) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-m}(\Omega)$ de $H_0^m(\Omega)$ à un espace de distributions sur Ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' \\ H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \end{array} \right.$$

Il est clair aussi que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ si $p \in [1, +\infty]$, et $H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ car $\mathcal{C}_0^\infty$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

1.2 Théorèmes de compacité faible

Avant de citer les théorèmes de compacité, on rappelle la définition d'injection dans un espace de Banach.

Définition 1.2.1 *Soient $(E_1, \| \|_{E_1})$ et $(E_2, \| \|_{E_2})$ deux espaces de Banach. On dit que E_2 est inclus topologiquement dans E_1 (notation $E_2 \hookrightarrow E_1$) si :*

1. $E_2 \subset E_1$;
2. *L'injection canonique $j : E_2 \to E_1 \, , u \mapsto u$ est continue.*

La condition (2) équivaut à l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que

$$\forall u \in E_2 \, , \|u\|_{E_1} \leq C \|u\|_{E_2} \, .$$

De plus, on dit que cette injection est compacte si l'injection canonique j est compacte (i.e j transforme tout borné de E_2 en un ensemble relativement compact([5]) de E_1).

Une conséquence pratique de l'inclusion topologique de E_2 dans E_1 est que si une suite $\{u_n\}$ converge vers u dans E_2 (i.e. $\|u_n - u\|_{E_2} \to 0$), alors elle converge aussi dans E_1 vers la même limite (i.e. $\|u_n - u\|_{E_1} \to 0$).

Théorème 1.2.2 ***[2]*** *Soient E_0, E, E_1 des espaces de Banach, avec $E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_0$, E_1 et E_0 sont réflexifs et soit $E_1 \hookrightarrow E$ une injection compacte. Soit $\{u_n\}$, $u_n = u_n(t)$, $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$, une suite bornée dans l'espace $L^{p_0}([0,T];E_1)$, $1 < p_0 < \infty$. Supposons que $u_n(t)$ admet des dérivées $\frac{\partial}{\partial t}u_n(t)$, au sens des distributions, qui sont dans à $L^{p_1}([0,T];E_0)$, $p_1 > 1$, et qui sont bornées dans cet espace. Alors la suite $\{u_n\}$ admet une sous suite convergente dans l'espace $L^{p_0}([0,T];E)$.*

Définition 1.2.3 ***(La convergence faible et la convergence *-faible)***

1. *On dit qu'une suite $\{u_n\} \subset E$ est faiblement convergente vers un élément u de E, en écrivant*

$$u_n \rightharpoonup_{n\to\infty} u\,,$$

si

$$< f, u_n > \to_{n\to\infty} < f, u >$$

pour tout élément f de E^* où E^* est l'espace dual de E.

2. *On dit aussi qu'une suite $\{f_n\} \subset E^*$ est *-faiblement convergente vers un élément f de E^*, en écrivant*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup}_{n\to\infty} f\,,$$

si

$$< f_n, u > \to_{n\to\infty} < f, u >$$

pour tout élément u de E.

Remarque 1 *Si E est un espace de Banach réflexif, alors la convergence *-faible coincide avec la convergence faible.*

---

5. Un ensemble M d'un espace vectoriel normé E est dit relativement compact ($\overline{M}$ est compact) si et seulement si toute suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ de $\overline{M}$ admet une sous suite convergente $u_{n_k} \to u$ quand $k \to \infty$ telle que $u \in \overline{M}$.

Théorème 1.2.4 *[2] Si l'espace E est rérlexif, alors il est possible de choisir, à partir de toute suite bornée de E, une sous suite qui converge faiblement. Si E^* est le dual d'un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée dans E^* contient une sous suite convergente *-faiblement.*

Notons que $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, sont séparables et réflexifs. Les espaces $L^p([0,T];E)$ avec E réflexif sont aussi réflexifs si $1 < p < \infty$.

L'espace $L^\infty([0,T];E^*)$ est le dual de $L^1([0,T];E)$ et si E est séparable alors $L^1([0,T];E)$ l'est aussi. Par conséquent, le théorème 1.2.4 est appliqué pour les espaces mentionnés.

1.3 Propriétés des opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.3.1 ***(Opérateur linéaire non-borné)*** *Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non borné de X dans Y toute application linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$, à valeurs dans Y; où $D(A)$ est le domaine de A.*
On dit que A est ***borné*** *s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que :*

$$\|Au\| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

Remarque 2 *En pratique, la plupart des opérateurs non-bornés que l'on rencontrera sont fermés (i.e. leur graphe est fermé) et à domaine $D(A)$ dense dans X.*

Définition 1.3.2 ***(Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur)*** *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire (non-borné). Un nombre complexe λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $u \in X$, $u \neq 0$ tel que $Au = \lambda u$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre de A.*

Définition 1.3.3 ***(L'ensemble résolvant, le spectre et l'opérateur résolvant)*** *Soit A un opérateur linéaire non nécessairement borné dans un espace de Banach X. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble des nombres complexes λ pour lesquels $(A - \lambda I)$ est inversible, i.e. $(A - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné dans X; où I est l'opérateur identité. Son complément $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ est le spectre de A. On dit que λ est une valeur propre si*

$\lambda \in \sigma(A)$. *La famille* $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ *d'opérateurs linéaires bornés est appelée la résolvante de* A *(ou l'opérateur résolvant de* A*).*

Définition 1.3.4 ***(Opérateur à résolvante compacte)*** *Soient* X *un espace de Banach et* $A : X \to X$ *un opérateur linéaire (non-borné). On dit que* A *est à résolvant compact si* $R(\lambda; A) : X \to X$ *est un application compacte pour tout* $\lambda \in \rho(A)$.

Définition 1.3.5 ***(Opérateur auto-adjoint)*** *Soient* H *un espace de Hilbert et* $A : D(A) \subset H \to H$ *un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur* A *est auto-adjoint si* $A^* = A$, *c'est à dire*

$$< Au, v > = < u, Av > \quad \text{pour tout } u\,, v \in H$$

Où A^* *est l'adjoint de* A.

Définition 1.3.6 ***(Opérateur positif)*** *Soient* H *un espace de Hilbert et* $A : D(A) \subset H \to H$ *un opérateur linéaire. On dit que* A *est positif si*

$$< Au, u > \geq 0 \quad \text{pour tout } u \in H\,.$$

Théorème 1.3.7 *Si* A *un opérateur linéaire, auto-adjoint dans un espace de Hilbert alors toutes ses valeurs propres sont réelles. Si de plus il est positif alors toutes ses valeurs propres sont positives.*

Théorème 1.3.8 ***(spectral)*** *Soit* H *un espace de Hilbert réel séparable et* A *un opérateur auto-adjoint compact sur* H. *Il existe alors une base hilbertienne de* H *constituée de vecteurs propres de* A.

Remarque 3 *Si* A *est compact, auto-adjoint et positif on peut de plus affirmer que chaque vecteur propre de la base hilbertienne construite ci-dessus correspond à une valeur propre positve.*

Définition 1.3.9 ***(Opérateur de projection)*** *Soit* M *un sous espace d'un espace de Banach* X. *Un opérateur* P *est dit une projection de* X *dans* M *si* $P : X \to M$ *est un opérateur linéaire borné tel que* $P^2 = P$.

Théorème 1.3.10 ***[6]*** *Soit* Q_n *une prijection orthogonale sur le sous espace engendré par les éléments* $\{e_k, k \geq n+1\}$ *dans un espace de Hilbert* H *et soit* $P_n = I - Q_n$, $n = 0, 1, \ldots$.
Alors

1). *Pour tout* $h \in H$, $\beta \geq 0$ *et* $t \in \mathbb{R}$ *on a l'inégalité suivante :*

$$\|A^\alpha Q_n e^{-tA} h\| \leq \lambda_n^\beta e^{\lambda_n |t|} \|h\| \, ;$$

2). *Pour tout* $h \in D(A^\beta)$, $t > 0$ *et* $\alpha \geq \beta$ *l'estimation suivante est valide :*

$$\|A^\alpha Q_n e^{-tA} h\| \leq \left[\left(\frac{\alpha - \beta}{t} \right)^{\alpha - \beta} + \lambda_{n+1}^{\alpha - \beta} \right] e^{-t\lambda_{n+1}} \|A^\beta h\| \, . \qquad (1.3.1)$$

Dans le cas où $\alpha - \beta = 0$ *on suppose que* $0^0 = 0$ *dans (1.3.1).*
En particulier il convient de noter, à partir de (1.3.1), que :

$$\|A^\alpha e^{-tA} h\| \leq \left[\left(\frac{\alpha - \beta}{t} \right)^{\alpha - \beta} + \lambda_1^{\alpha - \beta} \right] e^{-t\lambda_1} \|A^\beta h\| \, , \text{ pour tout } \alpha \geq \beta \, . \quad (1.3.2)$$

1.4 Propriétés des semi-groupes (systèmes dynamiques)

Dans cette section, on va introduire certaines notions de la théorie des systèmes dynamiques. En vue d'analyser et de décrire le comportement asymptotique des équations différentielles de dimension infinie.

Définition 1.4.1 ***(Semi-groupe)*** *Soit* X *un espace fonctionnel. Une famille d'opérateurs (d'applications)* $S_t : X \to X$ *dépendant du paramètre réel* $t \geq 0$ *est appelée semi-groupe, noté par* $\{S_t\}$, *si elle satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $S_0 = I$ *(*I *est l'opérateur identité) sur* X *;*

(ii) $S_{t+\tau} = S_t \, S_\tau$ *pour tout* $t \, , \tau \geq 0$.

Dans le cas où S *est définie pour tout* t *dans* $\mathbb{R}$ *et la propriété (ii) convient pour toute valeur de* t , *on dit que* S_t *est un groupe.*

Définition 1.4.2 ***Semi-groupe fortement continu (***C^0 ***semi-groupe)*** *Soient* H *un espace métrique complet et* $S_t : H \to H$ *un semi-groupe. On dit que* $\{S_t\}$ *est un* C^0 *semi-groupe (semi-groupe fortement continu) si de plus :*

(iii) La fonction

$$[0, \infty) \times H \ni (t, x) \to S_t x \in H$$

est continue en $(t, x) \in [0, \infty) \times H$.

Remarque 4 *Il est connu que pour les semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X la condition (iii) est vérifiée si et seulement si, pour tout élément $x \in X$,*

$$S_t x \to x \quad \textit{quand} \quad t \to 0^+ .$$

Remarque 5 *Par les propriétés du semi-groupe, le couple (S_t, H) définit un système dynamique. Où H est un espace métrique complet.*

Définition 1.4.3 ***(Générateur infinitésimal d'un semi-groupe)*** *Soit S_t un C^0 semi-groupe dans un espace de Banach X . L'opérateur linéaire A défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X \, : \, \lim_{t \to 0} \frac{S_t x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S_t x - x}{t} = \left. \frac{d^+ S_t x}{dt} \right|_{t=0} \quad \textit{pour } x \in D(A)$$

est un ***générateur infinitésimal*** *du semi-groupe S_t , $D(A)$ est le domaine de A et d^+ désigne la dérivée à droite.*

Définition 1.4.4 ***(Semi-groupe compact)*** *On dit que le semi-groupe S_t est compact si $S_t : H \to H$ est une application compacte pour tout $t \geq 0$.*

Remarque 6 *Dans le cas où notre opérateur est à résolvante compacte, le semi-groupe généré par cet opérateur est compact.*

Définition 1.4.5 ***(La régularité asymptotique d'un semi-groupe)*** *Un semi-groupe $\{S_t\}_{t \geq 0}$ (respec. un système dynamique (S_t, H)) est dit asymptotiquement régulier si et seulement si tout ensemble $B \subset H$ fermé, borné, non vide, positivement invariant $(S_t B \subset B)$ contient un sous ensemble non vide et compact K tel que $\sup\{d(S_t B, K) \, , B \subset H\} \to 0$ quand $t \to \infty$.*

Lemma 1.4.6 *Si $\{S_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu et compact dans un espace métrique complet H . Alors $\{S_t\}_{t \geq 0}$ est asymptotiquement régulier.*

Définition 1.4.7 ***(La compacité asymptotique d'un semi-groupe)*** *Un semi-groupe $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (respec. un système dynamique (S_t, H)) est dit asymptotiquement compact s'il existe un compact K tel que*

$$\lim_{t\to\infty} \sup\{d_H(S_t u, K) \,:\, u \in B\} = 0 \ (^6)$$

pour tout borné B de H.

Lemma 1.4.8 *Soit $\{S_t\}_{t\geq 0}$ un C^0 semi-groupe dans un espace métrique complet H. Alors $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est asymptotiquement régulier si et seulement si $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est asymptotiquement compact.*

Définition 1.4.9 ***(La dissipativité)*** *Un semi-groupe $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (système dynamique (S_t, H)) est dit dissipatif s'il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout borné B de H : il existe $t_0(= t_0(B))$ tel que $\|S_t y\|_H \leq \rho$ pour tout $y \in B$ et pour tout $t \geq t_0$.*

Définition 1.4.10 ***(Attracteur global)*** *Un attracteur global d'un semi-groupe S_t est un ensemble fermé borné $\mathcal{U}$ dans H, strictement invariant ($S_t\mathcal{U} = \mathcal{U}$ pour tout $t \geq 0$), tels que pour tout borné $B \subset H$ on a*

$$\lim_{t\to\infty} \sup\{d_H(S_t\, y, \mathcal{U}), y \in B\} = 0\,.$$

Théorème 1.4.11 ***[5]*** *Soit $\{S_t\}_{t\geq 0}$ un C^0 semi-groupe dans un espace métrique complet H. Si $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est asymptotiquement compact et un point dissipatif, alors $\{S_t\}_{t\geq 0}$ admet un attracteur global compact dans H.*

6. $\limsup u_n$ (d'une suite bornée) est la plus grande valeur des valeurs d'adhérences de la suite.

Chapitre 2

Formulation du modèle et les propriétés de base des solutions

2.1 Formulation du modèle

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit u la fonction définie de $[-r, T] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui à (t, x) lui associe $u(t, x)$ où $u(t, .) \in L^2(\Omega)$. Pour tout $t \geq 0$, on note par :

$$\begin{array}{rcl} u(t) \equiv u(t, .) \,:\, \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(t)(x) = u(t, .)(x) = u(t, x)\,. \end{array}$$

Pour $t \in [0, T]$ avec $t > r$, on définit la fonction u_t, par :

$$\begin{array}{rcl} u_t \,:\, [-r, 0] & \to & L^2(\Omega) \\ \theta & \mapsto & u_t(\theta) = u(t + \theta) \end{array}$$

et on note par $u_t \equiv u_t(\theta) \equiv u(t + \theta) = u(t + \theta, .) \in L^2([-r, 0]; L^2(\Omega))$; avec la constante $r > 0$.

Considérons l'équation aux dérivées partielles à retard suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + A\, u(t, x) + d\, u(t, x) = (F(u_t))(x);\ x \in \Omega,\ t \geq 0 \tag{2.1.1}$$

Où A est un opérateur linéaire positif auto-adjoint à domaine $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$ et à résolvant compact. Ainsi $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un générateur d'un semi-groupe analytique. d est une constante positive.

$$\begin{array}{rcl} F : L^2([-r,0];L^2(\Omega)) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u_t & \longmapsto & F(u_t) \end{array}$$

est le terme non linéaire, donné par :

$$(F(u_t))(x) = \int_{-r}^{0} \left\{ \int_{\Omega} b(u(t+\theta,\ y))\ f(x-y)dy \right\} \xi(\theta, x, u(t), u_t) d\theta \quad (2.1.2)$$

Où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application bornée et localement lipschitzienne, $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, et La fonction $\xi(.,.,.) : [-r,0] \times \Omega \times H \to \mathbb{R}$ représente le retard distribué dépendant de l'état, avec $H \equiv L^2(\Omega) \times L^2((-r,0);L^2(\Omega))$ et on désigne par $\|\cdot\|$ et $< \cdot,\cdot >$ la norme et le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 1 *Par des hypothèses sur l'opérateur A, on peut construire des espaces de Hilbert H_α pour α dans $\mathbb{R}$ tels que :*

- $H_0 = L^2(\Omega)$ *et* $H_\alpha = D(A^\alpha)\ \forall\ \alpha > 0$, *l'espace* $D(A^\alpha)$ *est muni du produit scalaire* $< u,v >_\alpha = < A^\alpha u, A^\alpha v >$ *et de la norme* $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|$;
- $H_{-\alpha} = (H_\alpha)'$;
- $H_{\alpha_1} \subset H_{\alpha_2}\ \forall \alpha_1 > \alpha_2$ *avec injection dense et compacte.*

L'opérateur A peut être prolongé à un opérateur de H_α dans $H_{\alpha-1}$ pour tout α dans $\mathbb{R}$.
En particulier pour $\alpha = 1/2$, on a

$$D(A^{1/2}) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset (D(A^{1/2}))' \equiv D(A^{-1/2}) \quad (2.1.3)$$

et toutes les injections sont denses et compactes. Où $(L^2(\Omega))'$ et $(D(A^{1/2}))'$ sont les espaces duals de $L^2(\Omega)$ et $D(A^{1/2})$ respectivement.
On notera qu'avec cette identification

$$< \phi,\psi > = < \phi,\psi >_{D(A^{-1/2}),D(A^{1/2})} \quad (2.1.4)$$

dès que $\phi \in L^2(\Omega)$ et $\psi \in D(A^{1/2})$.

La fonction u cherchée doit vérifier les conditions initiales suivantes :

$$u(0^+) = u^0 \in L^2(\Omega),\ u|_{(-r,0)} = \varphi \in L^2((-r,0);L^2(\Omega)) \quad (2.1.5)$$

Ainsi, on écrit $(u^0,\varphi) \in H$.

Avant d'étudier le problème à retard (2.1.1), (2.1.5) il faut d'abord choisir une notion appropriée d'une solution faible.

Définition 2.1.1 *Une fonction u est une solution faible du problème (2.1.1), (2.1.5) sur l'intervalle $[0,T]$ si*

$$u \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((-r,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);D(A^{1/2})),$$

$u(\theta) = \varphi(\theta)\ \forall\, \theta \in (-r,0)$ *et*

$$-\int_0^T < u, \dot{v} > dt + \int_0^T < A^{1/2}u, A^{1/2}v > dt + \int_0^T < du - F(u_t), v > dt$$

$$=< u^0, v(0) > \tag{2.1.6}$$

pour toute fonction $v \in L^2((0,T);D(A^{1/2}))$ avec $\dot{v} \in L^2((0,T);D(A^{-1/2}))$ et $v(T) = 0$.

2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour le problème à retard (2.1.1), (2.1.5).

Théorème 2.2.1 ***(d'existence) [14]***
Supposons que
(i) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne et bornée ;
(ii) $f : \overline{\Omega - \Omega} \to \mathbb{R}$ est bornée ;
(iii) $\xi\ : [-r,0] \times \Omega \times H \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :
(a) $\forall M > 0\,, \exists L_{\xi,M}\,|\,\forall (v^i,\psi^i) \in H$ satisfaisant $\|v^i\|^2 + \int_{-r}^0 \|\psi^i(s)\|^2 ds \leq M^2\,, i = 1,2$ on a

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^0 \|\xi(\theta,.,v^1,\psi^1) - \xi(\theta,.,v^2,\psi^2)\|_{-1/2} d\theta \\ \leq\ & L_{\xi,M}.\left[\|v^1 - v^2\|^2 + \int_{-r}^0 \|\psi^1(s) - \psi^2(s)\|^2 ds\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

(b) $\exists C_{(\xi,-1/2)} > 0$ tel que

$$\int_{-r}^0 \|\xi(\theta,.,v,\psi)\|_{-1/2} d\theta \leq C_{(\xi,-1/2)} \quad \forall (v,\psi) \in H \tag{2.2.2}$$

Alors pour tout $(u^0, \varphi) \in H$ le problème (2.1.1), (2.1.5) admet une solution faible $u(t)$ sur toute intervalle donné du temps $[0, T]$ et cette solution satisfait

$$u(t) \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \tag{2.2.3}$$

Remarque 2 *Les propriétés $(iii)(a)$ et $(iii)(b)$ signifient que ξ, comme une fonction de variables $(v, \psi) \in H$, est une application $\xi : H \to L^1((-r,0); D(A^{-1/2}))$ non linéaire, localement lipschitzienne et globalement bornée.*

Démonstration. Pour prouver l'existence d'une solution faible, on procède par la méthode de compacité en utilisant des solutions approximées de Galerkin.

Soient $\{e_k\}_{k\geq 1}$ une base orthonormale([1]) (de vecteurs propres) dans $L^2(\Omega)$ telle que :

$$A\, e_k = \lambda_k\, e_k \quad \text{avec } 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty,$$

et

$$\begin{array}{rcl} u^m : [0,T] & \to & V^m \\ t & \mapsto & u^m(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_{k,m}(t) e_k, \quad m = 1, 2, \dots \end{array}$$

la solution approximée de *Galerkin* d'ordre m pour notre problème à retard (2.1.1), (2.1.5) ; où V^m est le sous espace engendré par la famille $\{e_1, \cdots, e_m\}$, tel que $\cup_{m\geq 1} V_m$ est dense dans $L^2(\Omega)$.
Pour tout $k = 1, \dots, m$, la fonction $u^m(t)$ satisfait :

$$\begin{cases} < \dot{u}^m(t), e_k > + < A\, u^m(t), e_k > + d < u^m(t), e_k > = < F(u^m_t), e_k > \\ < u^m(0), e_k > = < P_m u^0, e_k > = < u^0, e_k > \text{ i.e. } P_m u^m(0) \to u^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\ < u^m(\theta), e_k > = < P_m \varphi(\theta), e_k > = < \varphi(\theta), e_k > \ \forall \theta \in (-r, 0) \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Où

$$g_{k,m}(t) = < u^m(t), e_k >$$

1. La suite $\{e_k\}_{k\geq 1}$ est une base orthonormale dans un espace de Hilbert si $< e_k, e_j > = \begin{cases} 1 & \text{pour tout } \ k = j \\ 0 & \text{pour tout } \ k \neq j \end{cases}$.

sont les coefficients de Fourier, tels que $g_{k,m} \in C^1((0,T);\mathbb{R}) \cap L^2((-r,T);R)$ et $\dot{g}_{k,m}$ est absolument continue ; et

$$\begin{array}{rcl} P_m : L^2(\Omega) & \to & V^m \\ u(t) & \mapsto & P_m u(t) = u^m(t) \end{array}$$

est la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ dans V^m.
La première équation de (2.2.4) s'écrit aussi :

$$\dot{u}^m(t) + Au^m(t) + du^m(t) = P_m F(u_t) \tag{2.2.5}$$

Pour m fixé, (2.2.4) définit un système linéaire d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^m$. Alors on peut appliquer la théorie d'équations différentielles pour obtenir l'existence et l'unicité locales des solutions du système (2.2.4). C'est à dire pour les conditions initiales $(\varphi; a) \in L^2((-r,0);\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$, il existe $\alpha_m > 0$ et une solution unique de (2.2.4), $v^m(t) = (g_{1,m}(t), \cdots, g_{m,m}(t))^T$ avec $v^m \in L^2((-r,\alpha_m);\mathbb{R}^m)$ tels que $v_0^m = \varphi$ et $v^m(0) = a$, et $v^m|_{[0,\alpha_m]} \in C([0,\alpha_m];\mathbb{R}^m)$; et on note par :

$$|v^m(t)|^2_{\mathbb{R}^m} = \sum_{k=1}^m g^2_{k,m}(t)\,.$$

La solution $v^m(t)$ de ce système définit $u^m(t)$ sur $[0,\alpha_m]$.

Lemma 2.2.2 *Par la bornitude des fonctions b et f et la propriété (2.2.2), on a la propriété suivante :*

$$|< F(u_t), v(t) >_{L^2(\Omega)}| \le C_b\, M_f\, |\Omega| C_{(\xi,-1/2)}\,.\, \|A^{1/2}\, v(t)\|\,. \tag{2.2.6}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} & |< F(u_t), v(t) >_{L^2(\Omega)}| \\ = & \left| \int_\Omega \left\{ \int_{-r}^0 \left[\int_\Omega b(u(t+\theta,y)) f(x-y) dy \right] \xi(\theta,x,u(t),u_t) d\theta \right\} v(t,x) dx \right| \end{aligned}$$

D'après Fubini, on a :

$$= \left| \int_{-r}^0 \left[\int_\Omega b(u(t+\theta,y)) \left\{ \int_\Omega f(x-y)\xi(\theta,x,u(t),u_t) v(t,x) dx \right\} dy \right] d\theta \right|$$

En utilisant le fait que f et b sont deux fonctions bornées i.e. $\exists M_f > 0$: $|f(z)| < M_f \; \forall z \in \Omega - \Omega$ et $\exists C_b > 0 : |b(\omega)| \leq C_b \; \forall \omega \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\leq \; C_b \, M_f \int_{-r}^{0} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} |\xi(\theta, x, u(t), u_t)||v(t,x)|dx \right\} dy d\theta \\
&\leq \; C_b \, M_f \, |\Omega| \int_{-r}^{0} \int_{\Omega} |\xi(\theta, x, u(t), u_t)||v(t,x)|dx d\theta \,, \text{ où } |\Omega| = \int_{\Omega} dy \\
&\leq \; C_b \, M_f \, |\Omega| \int_{-r}^{0} | < \xi(\theta, ., u(t), u_t), v(t,.) > | \, d\theta
\end{aligned}$$

En utilisant (2.1.4), on a

$$\leq \; C_b \, M_f \, |\Omega| \int_{-r}^{0} | < \xi(\theta, ., u(t), u_t), v(t,.) >_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} | \, d\theta$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\leq \; C_b \, M_f \, |\Omega| \int_{-r}^{0} \|\xi(\theta, ., u(t), u_t)\|_{-1/2} \, \|v(t,.)\|_{1/2} \, d\theta$$

Par la propriété (2.2.2), on a :

$$| < F(u_t), v(t) >_{L^2(\Omega)} | \leq C_b \, M_f \, |\Omega| C_{(\xi,-1/2)} \,.\, \|v(t)\|_{1/2} \,.$$

En utilisant fait que $\|v(t)\|_{1/2} = \|A^{1/2} \, v(t)\|$, on obtient (2.2.6). ■

L'étape qui suit (lemme 2.2.3) nous montre, par des estimations à priori, que l'on peut prendre $\alpha_m \; = \; T$.

Lemma 2.2.3 *La suite d'approximation de Galerkin* $\{u^m(t)\}_{m\geq 1}$ *est uniformément bornée dans l'espace* $L^\infty((0,T); L^2(\Omega)) \,\cap\, L^2((0,T); D(A^{1/2}))$. *i.e. pour presque tout* $t \in [0,T]$, *(* T *est fini quelconque) il existe une constante* C_1 , *telle que :*

$$\|u^m(t)\|^2 \, + \, \int_0^t \|A^{1/2} \, u^m(s)\|^2 ds \, + \, 2d \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds \leq C_1 \qquad (2.2.7)$$

pour $m = 1, 2, \ldots$.

Preuve.

Multiplions (2.2.4) par $g_{k,m}(t)$ et sommons en $k = 1, \cdots, m$. Alors pour $t \in (0, \alpha_m]$, l'intervalle d'existence locale de $u^m(t)$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{m}(< \dot{u}^m(t), e_k > + < Au^m(t), e_k > +d < u^m(t), e_k >)g_{k,m}(t)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} < F(u_t^m), e_k > g_{k,m}(t)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} < \ & \dot{u}^m(t), u^m(t) > + < Au^m(t), u^m(t) > +d \ < u^m(t), u^m(t) > \\ = \ & < F(u_t^m), u^m(t) > \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. Puisque $g_{k,m} \in C^1((0,T); \mathbb{R}) \cap L^2((-r, T); R)$ et $\dot{g}_{k,m}$ est absolument continue, on écrit : $< \dot{u}^m(t), u^m(t) >= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2$. Ainsi, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2 + \|A^{1/2}\,u^m(t)\|^2 + d\,\|u^m(t)\|^2 \ &= \ < F(u_t^m), u^m(t) > \\ &\leq \ | < F(u_t^m), u^m(t) > | \end{aligned}$$

D'après (2.2.6), on a :

$$\leq \ C_b M_f |\Omega| C_{(\xi,-1/2)} \|A^{1/2}u^m(t)\|$$

En utilisant l'inégalité de Young pour $p = 2$, on aura :

$$\leq \ \frac{1}{2}C_b^2 M_f^2 |\Omega|^2 C_{(\xi,-1/2)}^2 + \frac{1}{2}\|A^{1/2}u^m(t)\|^2$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2 + \|A^{1/2}\,u^m(t)\|^2 + 2\,d\,\|u^m(t)\|^2 \leq C_b^2 M_f^2 |\Omega|^2 C_{(\xi,-1/2)}^2 \equiv k_1 \quad (2.2.8)$$

Lorsqu'on a :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2 + \|A^{1/2}\,u^m(t)\|^2 + 2\,d\,\|u^m(t)\|^2 \\ = \ & \frac{d}{dt}\left(\|u^m(t)\|^2 + \int_0^t \|A^{1/2}\,u^m(s)\|^2 ds + 2d \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds\right) \\ \equiv \ & \frac{d}{dt}\chi^m(t) \leq k_1. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la variation de la constante, pour presque tout $t \in [0,T]$, on trouve :

$$\begin{array}{rcl} \chi^m(t) & \leq & \chi^m(0) + k_1 t \\ & \leq & \|u^m(0)\|^2 + k_1 t \\ & \leq & \|u^0\|^2 + k_1 t \end{array}$$

Donc pour presque tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\|u^m(t)\|^2 + \int_0^t \|A^{1/2}\, u^m(s)\|^2 ds + 2d \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds \leq \|u^0\|^2 + k_1 t$$

Ceci nous donne (2.2.7). Ainsi, $\|u^m(t)\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée donc $\|u^m\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))}$ aussi ; cette dernière avec $\|u^m\|_{L^2((0,T);D(A^{1/2}))}$ et $\|u^m\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}$ sont bornées par une constante dépendante de T ce qui nous donne que pour $u^0 \in L^2(\Omega)$, la suite des solutions approchées $\{u^m(t)\}_{m\geq 1}$ est uniformement bornée dans l'espace $L^\infty((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);D(A^{1/2}))$. Où $D(A^{1/2})$ est le domaine de l'opérateur $A^{1/2}$. L'estimation (2.2.7) aussi implique que la solution approximée peut être prolongeable sur tout intervalle $[0,T]$. Ainsi (2.2.7) convient pour tout $t > 0$. ■

Maintenant, (par le fait que $\alpha_m = T$) on propose de tendre m vers ∞ et de montrer qu'une sous suite des solutions u^m du problème approximé (2.2.4) converge vers une solution faible du problème (2.1.1), (2.1.5). Pour cela, on a besoin de certaines estimations uniformes qui se trouvent dans le lemme 2.2.4.

Lemma 2.2.4 *La suite $\{\dot{u}^m(t)\}_{m\geq 1}$ est uniformément bornée dans l'espace $L^2((0,T);D(A^{-1/2}))$, i.e pour tout $T > 0$ il existe une constante C_T indépendante de m telle que :*

$$\int_0^T \|A^{-1/2}\, \dot{u}^m(s)\|^2 ds \leq C_T\,.$$

Preuve.

Par (2.2.5) on a :

$$\dot{u}^m(t) = -Au^m(t) - du^m(t) + F(u_t^m)$$

Ceci implique que

$$\|\dot{u}^m(t)\| = \| - Au^m(t) - du^m(t) + F(u_t^m)\|$$

Ainsi
$$\|\dot{u}^m(t)\| \leq \|Au^m(t) + du^m(t)\| + \|F(u_t^m)\|$$
On élève au carré cette inégalité, on aura :
$$\|\dot{u}^m(t)\|^2 \leq \Big(\|Au^m(t) + du^m(t)\| + \|F(u_t^m)\|\Big)^2$$
En utilisant l'inégalité de Crude, on obtient :
$$\|\dot{u}^m(t)\|^2 \leq 4\|Au^m(t) + du^m(t)\|^2 + 4\|F(u_t^m)\|^2$$
En utilisant l'inégalité de Crude une autre fois, on aura :
$$\|\dot{u}^m(t)\|^2 \leq 16\|Au^m(t)\|^2 + 16d\|u^m(t)\|^2 + 4\|F(u_t^m)\|^2$$
Comme $D(A) \subset D(A^{1/2})$, i.e. il existe $k_1 > 0$ tel que $\|u\|_{D(A)} \leq k_1\|u\|_{D(A^{1/2})}$, on a :
$$\|\dot{u}^m(t)\|^2 \leq 16k_1\|A^{1/2}u^m(t)\|^2 + 16d\|u^m(t)\|^2 + 4\|F(u_t^m)\|^2$$
Puisque l'injection $L^2(\Omega) \subset D(A^{-1/2})$ est compacte, i.e. il existe k_2 tel que $\|u\|_{D(A^{-1/2})} \leq k_2\|u\|$, on trouve :
$$\frac{1}{k_2}\|\dot{u}^m(t)\|^2_{D(A^{-1/2})} \leq 16k_1\|A^{1/2}u^m(t)\| + 16d\|u^m(t)\|^2 + 4\|F(u_t^m)\|^2$$
Par le fait que $\|u\|_{D(A^{-1/2})} = \|A^{-1/2}u\|$ et $\|F(u_t^m)\| \leq C_bM_fC_{(\xi,-1/2)}|\Omega|$, on a :
$$\|A^{-1/2}\dot{u}^m(t)\|^2 \leq 16k_1k_2\|A^{1/2}u^m(t)\|^2 + 16k_2d\|u^m(t)\|^2 + 4k_2C_b^2M_f^2C^2_{(\xi,-\frac{1}{2})}$$
En intégrant cette dernière entre 0 et T, on obtient :
$$\begin{aligned} & \int_0^T \|A^{-1/2}\dot{u}^m(s)\|^2 ds \\ \leq\ & 16k_1k_2\int_0^T \|A^{1/2}u^m(s)\|^2 ds + 16k_2d\int_0^T \|u^m(s)\|^2 ds \\ +\ & 4k_2C_b^2M_f^2C^2_{(\xi,-\frac{1}{2})}T \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (2.2.7), on aura l'existence d'un $C_T > 0$ telle que :

$$\int_0^T \|A^{-1/2}\dot{u}^m(s)\|^2 ds \leq C_T$$

pour tout $T > 0$. Cette estimation nous montre que la suite $\{\dot{u}^m(t)\}_{m\geq 1}$ est uniformément bornée dans l'espace $L^2((0,T); D(A^{-1/2}))$. ■

Ainsi les deux lemmes précédents, nous donnent que $\{(u^m; \dot{u}^m)\}_{m\geq 1}$ est une suite bornée dans l'espace de Banach X_T tel que
$X_T \equiv L^\infty((0,T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); D(A^{1/2})) \times L^2((0,T); D(A^{-1/2}))$.
Alors il existe une sous suite $\{(u^{m_k}; \dot{u}^{m_k})\}_{k\geq 1} \subset \{(u^m; \dot{u}^m)\}_{m\geq 1}$ et une fonction $(u; \dot{u}) \in X_T$ telles que :

$$(\dot{u}^{m_k}; u^{m_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\dot{u}; u) \tag{2.2.9}$$

En effet ;
On a dans l'espace reflexif $L^2((0,T); D(A^{1/2}))$ la suite $\{u^m\}_{m\geq 1}$ est bornée, alors par le théorème 1.2.4 de compacité faible il existe une sous suite $\{u^{m_k}\}_{k\geq 1} \subset \{u^m\}_{m\geq 1}$ qui converge faiblement vers une fonction $u \in L^2((0,T); D(A^{1/2}))$.
De même l'espace reflexif $L^2((0,T); D(A^{-1/2}))$ contient une suite $\{\dot{u}^m\}_{m\geq 1}$ bornée, donc elle admet une sous suite $\{\dot{u}^{m_k}\}_{k\geq 1}$ convergente faiblement vers une fonction $\dot{u} \in L^2((0,T); D(A^{-1/2}))$. Aussi, on a la suite $\{u^m\}_{m\geq 1}$ est bornée dans l'espace $L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$ qui est le dual de l'espace séparable $L^1((0,T); L^2(\Omega))$, alors d'après la théorie de compacité (théorème 1.2.4) cette suite contient une sous suite $\{u^{m_k}\}_{k\geq 1}$ qui converge *-faiblement vers une fonction $u \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$. Finalement, on a $D(A^{1/2}) \subset L^2(\Omega) \subset D(A^{-1/2})$ avec injection compacte et la suite $\{u^m\}_{m\geq 1}$ est bornée dans
$L^2((0,T); D(A^{1/2}))$ avec sa dérivée $\{\dot{u}^m\}_{m\geq 1}$, au sens de distributions, est aussi bornée dans $L^2((0,T); D(A^{-1/2}))$. Alors par la théorie de compacité (théorème 1.2.2) la suite $\{u^m\}_{m\geq 1}$ admet une sous suite convergente dans l'espace $L^2((0,T); L^2(\Omega))$. C'est à dire :

$$u^{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad L^2((0,T); D(A^{1/2})); \tag{2.2.10}$$
$$u^{m_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans} \quad L^\infty((0,T); L^2(\Omega)); \tag{2.2.11}$$
$$\dot{u}^{m_k} \rightharpoonup \dot{u} \quad \text{dans} \quad L^2((0,T); D(A^{-1/2})); \tag{2.2.12}$$
$$u^{mk} \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2((0,T); L^2(\Omega)). \tag{2.2.13}$$

Lorsque $u^{m_k}(0) \rightarrow u^0$ dans $L^2(\Omega)$ et puisqu'on a (2.2.12) alors $u^{m_k}(t) = u^{m_k}(0) + \int_0^T \dot{u}^{m_k}(t)dt \rightharpoonup u^0 + \int_0^T \dot{u}(t)dt$. (2.2.13) implique que $u^{m_k}(t) \rightharpoonup u(t)$

dans $L^2(\Omega)$ pour $m \to \infty$, et lorsque $u(t)$ est exprimée en terme d'intégrale en fonction de $\dot{u}(t)$ alors $u(t) \to u^0$ faiblement dans $D(A^{-1/2})$ quand $t \to 0^+$. Alors $u(t)$ vérifie la condition initiale. Chaque limite *-faible de l'approximation de Galerkin est une solution faible du problème (2.1.1),(2.1.5).
En effet ;
Soit $W_T \equiv \{v \in L^2((0,T); D(A^{1/2}) : \dot{v} \in L^2((0,T); D(A^{-1/2})$ et $v(T) = 0\}$. On applique l'équation définie par l'approximation de Galerkin à la fonction $v \in W_T$ et on intègre entre 0 et T, on trove :

$$\begin{aligned} \int_0^T &< \dot{u}^m(t), v(t) > dt + \int_0^T < Au^m(t), v(t) > dt \\ &+ \int_0^T < du^m(t) - F(u_t^m), v(t) > dt = 0 \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant le fait que l'opérateur A est auto-adjoint, on trouve :

$$\begin{aligned} &- \int_0^T < u^m(t), \dot{v}(t) > dt + \int_0^T < A^{1/2}u^m(t), A^{1/2}v(t) > dt \\ &+ \int_0^T < du^m(t) - F(u_t^m), v(t) > dt =< u^0, v(0) > \end{aligned}$$

On passe à la limite en utilisant (2.2.10,2.2.11,2.2.12,2.2.13), on affirme que $u(t)$ est une solution faible du problème (2.1.1),(2.1.5), pour toute fonction $v \in W_T$.

Pour prouver la continuité des solutions faibles on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.2.5 *[20] Soit V un espace de Banach dense qui s'injecte continument dans un espace de Hilbert X. On identifie X avec son dual X' tel que $V \hookrightarrow X \hookrightarrow V^*$. Alors l'espace de Banach $W_p(0,T) \equiv \{u \in L^p((0,T); V) : \dot{u} \in L^q((0,T); V^*)\}$, où $p^{-1} + q^{-1} = 1$, est contenu dans $C([0,T]; X)$. De plus si $u \in W_p(0,T)$ alors $\|u(.)\|$ est absolument continue sur $[0,T]$ et on a :*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2 < \dot{u}(t), u(t) > \quad \textit{presque partout dans } [0,T].$$

Dans notre cas $X = L^2(\Omega)$, $V = D(A^{1/2})$, $V^* = D(A^{-1/2})$, $p^{-1} = q^{-1} = \frac{1}{2}$. Ainsi $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ et ceci termine la démonstration du théorème 2.2.1. ∎

Théorème 2.2.6 ***(d'unicité) [14]***
Supposons que les fonctions b et f sont comme dans le théorème 2.2.1 (elles satisfont les propriétés (i), (ii)), la fonction ξ satisfait la propriété (iii)(a) et la propriété suivante :

$$\xi(.,.,v,\psi) \in L^\infty((-r,0);D(A^{-1/2})) \quad \textit{pour tout} \quad (v,\psi) \in H \tag{2.2.14}$$

C'est à dire

$$\begin{array}{rcl} \xi(.,.,.,.) : H & \rightarrow & L^\infty((-r,0);D(A^{-1/2})) \\ (v,\psi) & \mapsto & \xi(.,.,v,\psi) \end{array}$$

est essentiellement bornée sur $(-r,0)$, telle que

$$\|\xi(.,.,v,\psi)\|_{L^\infty((-r,0);D(A^{-1/2}))} = ess \sup_{\theta\in(-r,0)} \|\xi(\theta,.,v,\psi)\|_{D(A^{-1/2})} \,.$$

Alors la solution du problème (2.1.1),(2.1.5) donnée par le théorème 2.2.1 est unique.

Démonstration. Pour prouver l'unicité du solution faible, on considère u^1 et u^2 deux solutions du problème (2.1.1) avec les conditions initiales $u^1(0) = u^{1,0},\ u^1(\theta) = \varphi^1(\theta)$ et $u^2(\theta) = \varphi^2(\theta),\ u^2(0) = u^{2,0}$.

Soit $w^m(t) = u^{1,m}(t) - u^{2,m}(t)$ la différence correspondante aux solutions, $u^{1,m}(t)$ et $u^{2,m}(t)$, approximées de Galerkin. Ainsi $w^m(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\dot{w}^m(t) + A\,w^m(t) + d\,w^m(t) = F(u_t^{1,m}) - F(u_t^{2,m})\,.$$

On multiplie cette équation par $w^m(t)$ dans $V^m \subset L^2(\Omega)$, on trouve :

$$\begin{array}{rl} & < \dot{w}^m(t),^m(t) > + < Aw^m(t), w^m(t) > +d < w^m(t), w^m(t) > \\ = & < F(u_t^{1,m}) - F(u_t^{2,m}), w^m(t) > \end{array}$$

Par le fait que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^m(t)\|^2 =< w^m(t), \dot{w}^m(t) >$, alors après calcul on obtient :

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|w^m(t)\|^2 + \|A^{1/2}\,w^m(t)\|^2 + d\,\|w^m(t)\|^2 =< F(u_t^{1,m}) - F(u_t^{2,m}), w^m(t) > \tag{2.2.15}$$

Lorsque $u^1\,,u^2 \in W_2(0,T)$ alors $w \in W_2(0,T)\,,$ ainsi $w \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))\,.$ Donc $w(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\dot{w}(t) + A\,w(t) + d\,w(t) = F(u^1_t) - F(u^2_t) \in L^2(]0,T[;D(A^{1/2}))\,.$$

On considère la différence $< F(u^1_t) - F(u^2_t), w(t) >$ en détail :

$$\begin{aligned}
& < F(u^1_t) - F(u^2_t), w(t) > \\
= & \int_\Omega \Bigg\{ \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^1(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] \xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)d\theta \\
- & \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t)d\theta \Bigg\} w(t,x)dx \\
= & \int_\Omega \Bigg\{ \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^1(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] \xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)d\theta \\
- & \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] \xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)d\theta \Bigg\} w(t,x)dx \\
+ & \int_\Omega \Bigg\{ \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] \xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)d\theta \\
- & \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t)d\theta \Bigg\} w(t,x)dx \\
= & \int_\Omega \Bigg\{ \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega (b(u^1(t+\theta,y)) - b(u^2(t+\theta,y)))f(x-y)dy \Bigg] \\
& \xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)d\theta \Bigg\} w(t,x)dx \\
+ & \int_\Omega \Bigg\{ \int_{-r}^0 \Bigg[\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy \Bigg] (\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t) \\
- & \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t))d\theta \Bigg\} w(t,x)dx
\end{aligned}$$

D'après Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
&= \int_{-r}^{0}\Big\{\int_\Omega (b(u^1(t+\theta,y)) - b(u^2(t+\theta,y))) \\
&\quad \Big[\int_\Omega f(x-y)\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)w(t,x)dx\Big]dy\Big\}\,d\theta \\
&+ \int_{-r}^{0}\Big\{\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))\Big[\int_\Omega f(x-y)(\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t) \\
&- \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t))w(t,x)dx\Big]dy\Big\}\,d\theta
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété localement lipschitzienne de b i.e pour tout w^1, $w^2 \in \mathbb{R}$ il existe $L_b > 0$ tel que $|b(w^1) - b(w^2)| \leq L_b|w^1 - w^2|$ y compris le fait que b est borné i.e. il existe $C_b > 0$ tel que $|b(w)| \leq C_b$, on obtient :
$| < F(u^1_t) - F(u^2_t), w(t) > |$

$$\begin{aligned}
\leq\ & L_b\int_{-r}^{0}\Big\{\int_\Omega |u^1(t+\theta,y) - u^2(t+\theta,y))|\Big[\int_\Omega |f(x-y)| \\
& |\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)w(t,x)|dx\Big]dy\Big\}\,d\theta + C_b\int_{-r}^{0}\Big\{\int_\Omega\Big[\int_\Omega |f(x-y)| \\
& |\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t) - \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t)|\,|w(t,x)|dx\Big]dy\Big\}\,d\theta
\end{aligned}$$

Du fait que la fonction f est bornée i.e. il existe $M_f > 0$ tel que $|f(.)| \leq M_f$ et que $w = u^1 - u^2$, on aura :

$$\begin{aligned}
\leq\ & L_bM_f\int_{-r}^{0}\Big\{\int_\Omega |w(t+\theta,y))|\Big[\int_\Omega |\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)|\,|w(t,x)|dx\Big] \\
& dy\Big\}\,d\theta + C_bM_f|\Omega|\int_{-r}^{0}\Big\{\int_\Omega |\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t) - \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t)| \\
& |w(t,x)|dx\Big\}d\theta
\end{aligned}$$

Où $|\Omega| = \int_\Omega dy$ (la mesure de Ω).
Par définition du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$\leq \quad L_b M_f \int_{-r}^{0} \left\{ \int_\Omega |w(t+\theta,y))| < |\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t)| \, , |w(t,x)| > \right.$$
$$\left. dy \right\} d\theta + C_b M_f |\Omega| \int_{-r}^{0} < |\xi(\theta,x,u^1(t),u^1_t) - \xi(\theta,x,u^2(t),u^2_t)| \, ,$$
$$|w(t,x)| > d\theta$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par (2.1.4), on a :

$$\leq \quad L_b M_f \int_{-r}^{0} \left\{ \int_\Omega |w(t+\theta,y))| \|\xi(\theta,.,u^1(t),u^1_t)\|_{-\frac{1}{2}} \|w(t,.)\|_{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. dy \right\} d\theta + C_b M_f |\Omega| \int_{-r}^{0} \|\xi(\theta,.,u^1(t),u^1_t) - \xi(\theta,.,u^2(t),u^2_t)\|_{-\frac{1}{2}}$$
$$\|w(t,.)\|_{\frac{1}{2}} d\theta$$

En utilisant l'inégalité de Holder, la propriété (2.2.1) et le fait que $\| \cdot \|_{\frac{1}{2}} = \|A^{1/2} \cdot \|$; on aura :

$$\begin{aligned}
\leq \quad & L_b M_f \int_{-r}^{0} \|\xi(\theta,.,u^1(t),u^1_t)\|_{-\frac{1}{2}} \|A^{1/2} w(t,.)\| \\
& \left(\int_\Omega |w(t+\theta,y))|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega dy \right)^{\frac{1}{2}} d\theta \\
+ \quad & C_b M_f L_{\xi,M} |\Omega| \|A^{1/2} w(t,.)\| \left[\|w(t)\|^2 + \int_{-r}^{0} \|w(t+s)\|^2 ds \right]^{1/2} \\
\leq \quad & L_b M_f \sqrt{|\Omega|} \int_{-r}^{0} \|\xi(\theta,.,u^1(t),u^1_t)\|_{-\frac{1}{2}} \|A^{1/2} w(t,.)\| \|w(t+\theta,.)\| d\theta \\
+ \quad & C_b M_f L_{\xi,M} |\Omega| \|A^{1/2} w(t,.)\| \left[\|w(t)\|^2 + \int_{-r}^{0} \|w(t+s)\|^2 ds \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (2.2.14) on aura, par l'inégalité de la moyenne, que :

$$\leq \quad L_b M_f \sqrt{|\Omega|} \, ess \sup_{\theta \in (-r,0)} \|\xi(\theta,.,u^1(t),u^1_t)\|_{-\frac{1}{2}} \int_{-r}^{0} \|A^{1/2} w(t,.)\|$$
$$\|w(t+\theta,.)\| d\theta + C_b M_f L_{\xi,M} |\Omega| \|A^{1/2} w(t,.)\|$$
$$\left[\|w(t)\|^2 + \int_{-r}^{0} \|w(t+s)\|^2 ds \right]^{1/2}$$

L'inégalité de Young nous donne :

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}L_b^2M_f^2|\Omega|\left[ess\sup_{\theta\in(-r,0)}\|\xi(\theta,.,u^1(t),u_t^1)\|_{-\frac{1}{2}}\right]^2\left[\int_{-r}^{0}\|w(t+\theta,.)\|d\theta\right]^2\\
&+ \frac{1}{2}\|A^{1/2}w(t,.)\|^2+\frac{1}{2}\|A^{1/2}w(t,.)\|^2+\frac{1}{2}C_b^2M_f^2L_{\xi,M}^2|\Omega|^2\\
&\left[\|w(t)\|^2+\int_{-r}^{0}\|w(t+s)\|^2ds\right]
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Holder on a :

$$\begin{aligned}
&\leq \|A^{1/2}w(t,.)\|^2+\frac{1}{2}L_b^2M_f^2|\Omega|\left[ess\sup_{\theta\in(-r,0)}\|\xi(\theta,.,u^1(t),u_t^1)\|_{-1/2}\right]^2\\
&\left[\int_{-r}^{0}d\theta\right]\left[\int_{-r}^{0}\|w(t+\theta,.)\|^2d\theta\right]+\frac{1}{2}C_b^2M_f^2L_{\xi,M}^2|\Omega|^2\|w(t)\|^2\\
&+ \frac{1}{2}C_b^2M_f^2L_{\xi,M}^2|\Omega|^2\int_{-r}^{0}\|w(t+s)\|^2ds\\
&\leq \|A^{1/2}w(t)\|^2+\left\{\frac{1}{2}L_b^2M_f^2|\Omega|r\left[ess\sup_{\theta\in(-r,0)}\|\xi(\theta,.,u^1(t),u_t^1)\|_{-1/2}\right]^2\right.\\
&+ \left.\frac{1}{2}C_b^2M_f^2L_{\xi,M}^2|\Omega|^2\right\}\int_{-r}^{0}\|w(t+\theta)\|^2d\theta+\frac{1}{2}C_b^2M_f^2L_{\xi,M}^2|\Omega|^2\|w(t)\|^2
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'existence des constantes positives $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned}
&|< F(u_t^1)-F(u_t^2),w(t)>|\\
\leq\ &\|A^{1/2}w(t)\|^2+\frac{C_1}{2}\int_{-r}^{0}\|w(t+\theta)\|^2d\theta+\frac{C_2}{2}\|w(t)\|^2
\end{aligned}$$

Cette dernière estimation et (2.2.15) nous donnent :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^m(t)\|^2+\|A^{1/2}\,w^m(t)\|^2+d\,\|w^m(t)\|^2\\
\leq\ &\|A^{1/2}\,w^m(t)\|^2+\frac{C_1}{2}\int_{-r}^{0}\|w^m(t+\theta)\|^2d\theta+\frac{C_2}{2}\|w^m(t)\|^2 \qquad (2.2.16)
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_{-r}^{0}\|w^m(t+\theta)\|^2d\theta \overset{s=t+\theta}{=} \int_{t-r}^{t}\|w^m(s)\|^2ds$$

Comme $[t-r,t] \subset [-r,t]\,,\ t>0\,$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_{t-r}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds &\leq \int_{-r}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds\\ &\leq \int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta + \int_{0}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds\end{aligned}$$

Ainsi, (2.2.16) devient :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\,\|w^m(t)\|^2 + 2d\,\|w^m(t)\|^2\\ \leq\ & C_1\bigg(\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta + \int_{0}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds\bigg) + C_2\|w^m(t)\|^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\bigg[\|w^m(t)\|^2 + 2d\int_{0}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds\bigg]\\ \leq\ & C_1\int_{0}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds + C_2\|w^m(t)\|^2 + C_1\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta\\ \leq\ & C_2\bigg[\|w^m(t)\|^2 + \frac{C_1}{C_2}\int_{0}^{t} \|w^m(s)\|^2 ds\bigg] + C_1\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta\end{aligned}$$

Ceci nous donne, pour $z^m(t) \equiv \|w^m(t)\|^2 + 2d\int_0^t \|w^m(s)\|^2 ds\,$, que :

$$\frac{d}{dt}z^m(t) \leq C_2\, z^m(t) + C_1\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta$$

En appliquant le lemme de Gronwall à cette dernière, on trouve :

$$z^m(t) \leq z^m(0)e^{C_2 t} + \bigg(\frac{C_1}{C_2}\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta\bigg)(e^{C_2 t} - 1)$$

Par conséquent :

$$z^m(t) \leq \bigg(\|w^m(0)\|^2 + \frac{C_1}{C_2}\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta\bigg)e^{C_2 t} - \frac{C_1}{C_2}\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta$$

Ceci nous implique que :

$$z^m(t) \leq \bigg(\|w^m(0)\|^2 + \frac{C_1}{C_2}\int_{-r}^{0} \|w^m(\theta)\|^2 d\theta\bigg)e^{C_2 t} \tag{2.2.17}$$

Cette dernière estimation nous permet d'appliquer la proposition suivante :

Proposition 2.2.7 *[26] Soit X un espace de Banach. Alors toute suite, $\{w_n\}_{n\geq 1} \subset X^*$, convergente *-faiblement, elle converge vers un élément $w_\infty \in X^*$ et $\|w_\infty\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|w_n\|_X$ (2).*

Ainsi, pour la différence $u^1(t) - u^2(t)$ des deux solutions on a :

$$\begin{aligned} & \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + 2d \int_0^t \|u^1(s) - u^2(s)\|^2 ds \\ \leq \quad & \left(\|u^{1,0} - u^{2,0}\|^2 + \frac{C_1}{C_2} \int_{-r}^0 \|\varphi^1(\theta) - \varphi^2(\theta)\|^2 d\theta \right) e^{C_2 t} \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Ainsi, par (2.2.3) la différence $\|u^1(t) - u^2(t)\|$ a un sens pour tout $t \in [0, T]$, $\forall T > 0$. La dernière estimation nous donne la dépendance continue par rapport aux conditions initiales et en posant $u^{1,0} = u^{2,0}$ et $\varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta)$, on conclut que $u^1(t) = u^2(t)$ donc on a l'unicité du solution faible ; ceci termine la démonstration du théorème 2.2.6. ■

2. $\liminf u_n$ (d'une suite bornée) est la plus petite des valeurs d'adhérences de la suite.

Chapitre 3

Comportement asymptotique de système dynamique

3.1 Existence d'un attracteur global

Semi-groupe d'évolution.

Les résultats du chapitre précédent nous donnent l'existence et l'unicité des solutions faibles, ainsi on peut définir un semi-groupe d'évolution par :

$$\begin{array}{rcl} S_t : H & \longrightarrow & H \\ (u^0;\varphi) & \longmapsto & S_t(u^0;\varphi) \equiv (u(t);u(t+\theta));\ \forall\theta\in(-r,0),\ \forall t\geq 0\,, \end{array}$$

où $u(t)$ est la solution faible du problème (2.1.1),(2.1.5).
En effet ;

1. Pour tout $(u^0;\varphi)\in H$, on a :

$$\begin{array}{rcl} S_0(u^0;\varphi) & = & (u(0);u(0+\theta)) \\ & = & (u^0;\varphi)\,. \end{array}$$

2. Pour tout $t,\tau\ >0$,

$$\begin{array}{rcl} S_t\,S_\tau(u^0;\varphi) & = & S_t(S_\tau(u^0;\varphi)) \\ & = & S_t(u(\tau);u(\tau+\theta)) \\ & = & (u(t+\tau);u(t+\tau+\theta)) \\ & = & S_{t+\tau}(u^0;\varphi)\,. \end{array}$$

3. La continuité du semi-groupe par rapport au temps t suit de la continuité de la solution $u(t)$ du problème (2.1.1), (2.1.5) (voir (2.2.3)) ; et la continuité de S_t par rapport aux conditions initiales suit de la dépendance continue des solutions de notre problème par rapport aux conditions initiales (voir (2.2.18)).

Le couple (S_t, H) définit un système dynamique ; où H est un espace métrique complet (espace de Banach).

Dans cette section on s'intéresse à létude des propriétés asymptotiques du semi-groupe d'évolution précédent. On énonce le résultat principal suivant :

Théorème 3.1.1 *[14] Supposons que les fonctions b et f satisfont les propriétés (i), (ii) du théorème 2.2.1. Soit ξ la fonction qui satisfait la propriété (iii)(a) du théorème 2.2.1, la propriété (2.2.14) du théorème 2.2.6 et aussi il existe $C_{(\xi,0)} > 0$ tel que*

$$\int_{-r}^{0} \|\xi(\theta, ., v, \psi)\| d\theta \leq C_{(\xi,0)} \quad \textit{pour tout } (v, \psi) \in H \tag{3.1.1}$$

Cette dernière propriété signifie que la fonction

$$\begin{array}{rcl} \xi(.,.,.,.) : H & \to & L^1((-r,0); L^2(\Omega)) \\ (v,\psi) & \mapsto & \xi(.,.,v,\psi) \end{array}$$

est une application globalement bornée avec

$$\|\xi(.,.,v,\psi)\|_{L^1((-r,0);L^2(\Omega))} = \int_{-r}^{0} \|\xi(\theta, ., v, \psi)\| d\theta$$

Alors le système dynamique $(S_t; H)$ admet un attracteur global compact $\mathcal{U}$ qui est un ensemble borné dans l'espace $H_1 \equiv D(A^\alpha) \times W$, où $W = \{\varphi : \varphi \in L^\infty((-r,0); D(A^\alpha)),\ \dot{\varphi} \in L^\infty((-r,0); D(A^{\alpha-1}))\}, \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Démonstration. Pour prouver l'existence d'un attracteur global compact on utilise le résultat classique (théorème 1.4.11) qui stipule qu'il est suffisant pour un système dynamique (S_t, H) d'être dissipatif et asymptotiquement compact .

La propriété (3.1.1) nous donne une estimation plus forte que (2.2.6) :

$$| < F(u_t), v >_{L^2(\Omega)} | \leq C_b\, M_f\, |\Omega| C_{(\xi,0)} . \|v\| . \tag{3.1.2}$$

qui est nécessaire pour la dissipativité. Pour la suite on a besoin de montrer les lemmes suivants :

Lemma 3.1.2 ***[18]*** *Pour tout borné $B \subset H$ il existe une constante $C_T(B)$ telle que pour toute solution faible du problème (2.1.1) à condition initiale dans B , on a*

$$\forall t \in [0, T] \Rightarrow \|u(t)\| \leq C_T(B)\,.$$

Preuve.

On écrit (2.1.1) sous la forme $\dot{u}(t)+Au(t) = M(u(t); u_t)$, où $M(u(t); u_t) = F(u_t) - du(t)$. La formule de la variation de la constante nous donne :

$$u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}M(u(s); u_s)ds \tag{3.1.3}$$

Cette dernière nous donne :

$$\|u(t)\| \leq \|e^{-At}\| \cdot \|u(0)\| + \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\| \cdot \|M(u(s); u_s)\|ds$$

On a $\|e^{-At}\| \leq 1\,,\ t \in [0, T]$.
En effet ;
Par récurrence on a :
Comme $A\,e_k = \lambda_k\,e_k\,,\ k = 1, 2, \ldots$, alors $e^{-Ae_kt} = e^{-\lambda_ke_kt}$.
Pour $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\|e^{-Ae_1t}\| &= \|e^{-\lambda_1e_1t}\| \\ &\leq 1\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que cette propriété est vraie à l'ordre $k-1$ et montrons la véracité de la même propriété à l'ordre k ; c'est à dire : supposons que $\|e^{-Ae_{k-1}t}\| \leq 1$ est vraie et montrons que $\|e^{-Ae_kt}\| \leq 1$ est vraie.
On a :

$$\|e^{-Ae_kt}\| = \|e^{-\lambda_ke_kt}\|$$

Puisque $\lambda_{k-1} \leq \lambda_k$, on a :

$$\begin{aligned}\|e^{-\lambda_ke_kt}\| &\leq \|e^{-\lambda_{k-1}e_{k-1}t}\| \\ &\leq 1\,.\end{aligned}$$

Par le fait que $\|e^{-At}\| \leq 1$ et $\|e^{-A(t-s)}\| \leq 1$, on a :

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| + \int_0^t \Big(\|F(u_s)\| + d\|u(s)\|\Big)ds$$

En utilisant le fait que $\|F(u_t)\| \leq C_b M_f C_{(\xi,0)} |\Omega|$ (voir (3.1.2)), on obtient :

$$\|u(t)\| \leq \left(\|u(0)\| + t\, C_b M_f C_{(\xi,0)} |\Omega| \right) + d \int_0^t \|u(s)\| ds$$

Il suit, de l'inégalité de Gronwall, que :

$$\|u(t)\| \leq \left(\|u(0)\| + t\, C_b M_f C_{(\xi,0)} |\Omega| \right) e^{td} \text{ pour tout } \ t \in [0, T]$$

Donc

$$\|u(t)\| \leq \left(\|u(0)\| + T\, C_b M_f C_{(\xi,0)} |\Omega| \right) e^{Td}$$

Ainsi pour tout borné $B \subset H$, il existe une constante $C_T(B)$ telle que pour tout t dans $[0, T]$ on a : $\|u(t)\| \leq C_T(B)$. ■

Le lemme qui suit nous montre que la solution devient plus régulière avec t positif.

Lemma 3.1.3 ***[16]*** *Pour* $0 < \alpha < 1$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ *et pour tout ensemble borné* $B \subset H$, *il existe une constante* $C_{\alpha,\varepsilon,T}(B)$ *telle que pour toute solution faible de (2.1.1) avec conditions initiales dans* B *on a :* $\|A^\alpha u(t)\| \leq C_{\alpha,\varepsilon,T}(B)$ *pour tout* $t \in (\varepsilon, T]$. *En particulier on a :* $u(t) \in D(A^\alpha)$ *pour tout* $t > \varepsilon$.

Preuve.

On compose l'égalité (3.1.3) avec A^α , on trouve :

$$A^\alpha\, u(t) = A^\alpha\, e^{-At} u(0) + \int_0^t A^\alpha\, e^{-A(t-s)} M(u(s); u_s) ds$$

Ceci implique que :

$$\|A^\alpha\, u(t)\| \leq \|A^\alpha\, e^{-At} u(0)\| + \int_0^t \|A^\alpha\, e^{-A(t-s)} M(u(s); u_s)\| ds$$

Utilisons l'estimation suivante pour tout $\beta \leq \alpha$, (voir la propriété (1.3.2) dans le théorème 1.3.10)

$$\begin{aligned} \|A^\alpha\, e^{-At} u\| &\leq \left[\left(\frac{\alpha - \beta}{t} \right)^{(\alpha-\beta)} + \lambda_1^{(\alpha-\beta)} \right] e^{-t\lambda_1} \|A^\beta u\| \\ &\leq \left(\frac{\alpha - \beta}{t} + \lambda_1 \right)^{(\alpha-\beta)} e^{-t\lambda_1} \|A^\beta u\| , \end{aligned}$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned}\|A^{\alpha}\, u(t)\| \;\; &\leq \;\; \left(\frac{\alpha-\beta}{t}+\lambda_1\right)^{(\alpha-\beta)} e^{-t\lambda_1}\|A^{\beta}u(0)\| + \int_0^t \left(\frac{\alpha-\beta}{t-s}+\lambda_1\right)^{(\alpha-\beta)} \\ & e^{-\lambda_1(t-s)}\|A^{\beta}M(u(s);u_s)\|ds\end{aligned}$$

Par le lemme 3.1.2 et le fait que $\|F(u_t)\| \leq C_b M_f C_{\xi,0}|\Omega|$, on a :

$$\|M(u(s);u_s)\| \leq C_b M_f C_{\xi,0}|\Omega| + dC_T(B) \equiv \widetilde{C}_T(B) \text{ pour tout } s \in [0,T]\,.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\|A^{\alpha}\, u(t)\| \;\; &\leq \;\; \left(\frac{\alpha-\beta}{t}+\lambda_1\right)^{(\alpha-\beta)} e^{-t\lambda_1}\|A^{\beta}u(0)\| + \widetilde{C}_T(B)\,\|A^{\beta}\| \\ & \int_0^t \left(\frac{\alpha-\beta}{t-s}+\lambda_1\right)^{(\alpha-\beta)} e^{-\lambda_1(t-s)}ds\end{aligned}$$

Alors la dernière intégrale converge avec $\beta = 0$ et $0 < \alpha < 1$.
En effet ;
On a :

$$\|A^{\alpha}\, u(t)\| \leq \left(\frac{\alpha}{t}+\lambda_1\right)^{\alpha} e^{-t\lambda_1}\|u(0)\| + \widetilde{C}_T(B)\int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\left(\frac{\alpha}{t-s}+\lambda_1\right)^{\alpha} ds$$

Au voisinage de 0 on a

$$e^{-\lambda_1(t-s)}\left(\frac{\alpha}{t-s}+\lambda_1\right)^{\alpha}\Bigg|_{s\approx 0} = e^{-\lambda_1 t}\left(\frac{\alpha}{t}+\lambda_1\right)^{\alpha},$$

alors qu'au voisinage de t ($s \to t$) on a

$$\left(\frac{\alpha}{t-s}+\lambda_1\right)^{\alpha} \approx \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha} \text{ quand } t \to 0\,.$$

Où $(\frac{1}{t})^{\alpha} \to 0$ (car $\alpha < 1$) ; ainsi cette integrale est bien définie.
Donc pour tout $\alpha \in (0,1)\,, \varepsilon > 0\,, T > 0$ et pour tout borné B de H , il existe une constante $C_{\alpha,\varepsilon,T}(B)$ telle que $\|A^{\alpha}\, u(t)\| \leq C_{\alpha,\varepsilon,T}(B)$ pour tout $t \in (\varepsilon, T]$.
■

Lemma 3.1.4 ***(La dissipativité) [18]*** *Pour tout $\delta \in [0,1/2)$ il existe C_δ tel que pour tout borné $B \subset H$, il existe $t_\delta(B)$ tel que pour tout $t \geq t_\delta(B) > 0$ on a $\|A^{\delta}u(t)\| \leq C_\delta$, où $u(t)$ est la solution faible du problème (2.1.1) avec condition initiale $(u^0;\varphi)$ dans B .*

Preuve.

Le lemme 3.1.3 implique (en prenant $\alpha = \frac{1}{2}+\delta$) que $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}+\delta})$, $\forall \delta \in [0, 1/2)$, $t \geq \varepsilon(\delta)$. Ainsi $Au(t) \in D(A^{-\frac{1}{2}+\delta})$, pour tout $\delta \in [0, 1/2)$, $t \geq \varepsilon(\delta)$.

On multiplie l'équation (2.2.4) par $A^{2\delta}u^m(t)$ et on utilise la propriété : $< \dot{u}^m(t), A^{2\delta}u^m(t) >= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{\delta}u^m(t)\|^2$ pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{\delta}u^m(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}+\delta}u^m(t)\|^2 + d \cdot \|A^{\delta}u^m(t)\|^2 \leq \|F(u_t^m)\| \cdot \|A^{2\delta}u^m(t)\|$$

En utilisant la propriété (3.1.2), on aura :

$$\|F(u_t^m)\| \cdot \|A^{2\delta}u^m(t)\| \leq C_b M_f C_{(\xi,0)}|\Omega| \cdot \|A^{2\delta}u^m(t)\|$$

Comme $D(A^{\delta+1/2}) \subset D(A^{2\delta})$ avec injection compacte, il existe $k_3 > 0$ tq $\|A^{2\delta} \cdot \| \leq k_3\|A^{\frac{1}{2}+\delta} \cdot \|$.

Donc

$$\|F(u_t^m)\| \cdot \|A^{2\delta}u^m(t)\| \leq C_b M_f C_{(\xi,0)}|\Omega| \cdot k_3\|A^{\frac{1}{2}+\delta}u^m(t)\|$$

Par l'inégalité de Young on a :

$$\leq \frac{1}{2}\,C_b^2 M_f^2 C_{\xi,0}^2|\Omega|^2 k_3^2 + \frac{1}{2}\,\|A^{\frac{1}{2}+\delta}u^m(t)\|^2 \,.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{d}{dt}\|A^{\delta}u^m(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}+\delta}u^m(t)\|^2 + 2d \cdot \|A^{\delta}u^m(t)\|^2 \leq C_b^2 M_f^2 C_{\xi,0}^2|\Omega|^2 k_3^2 \,.$$

En utilisant le fait que $\|A^{\frac{1}{2}+\delta}u^m(t)\|^2 \geq \lambda_1\|A^{\delta}u^m(t)\|^2$, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\|A^{\delta}u^m(t)\|^2 + (\lambda_1 + 2d)\|A^{\delta}u^m(t)\|^2 \leq C_b^2 M_f^2 C_{\xi,0}^2|\Omega|^2 k_3^2 \,.$$

Multiplions la dernière estimation par $e^{(\lambda_1+2d)t}$, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left(\|A^{\delta}u^m(t)\|^2 \cdot e^{(\lambda_1+2d)t}\right) \leq C_b^2 M_f^2 C_{\xi,0}^2|\Omega|^2 k_3^2 \cdot e^{(\lambda_1+2d)t}$$

Intégrons sur $[\varepsilon, t]$ et multiplions par $e^{-(\lambda_1+2d)t}$, on obtient :

$$\|A^{\delta}u^m(t)\|^2 \leq \|A^{\delta}u^m(\varepsilon)\|^2 e^{-(\lambda_1+2d)(t-\varepsilon)} + C_b^2 M_f^2 C_{\xi,0}^2|\Omega|^2 k_3^2(\lambda_1 + 2d)^{-1} \,. \tag{3.1.4}$$

Maintenant on utilise la propriété $\lim_{m\to\infty}\|A^\delta(u^m(t)-u(t))\|=0$ (car A^δ est à résolvant compact et $u^m(t)\rightharpoonup u(t)$) pour obtenir l'analogue de (3.1.4) pour $u(t)$, i.e :

$$\|A^\delta u(t)\|^2 \le \|A^\delta u(\varepsilon)\|^2 e^{-(\lambda_1+2d)(t-\varepsilon)} + C_b^2 M_f^2 C_{\xi,0}^2 |\Omega|^2 k_3^2 (\lambda_1+2d)^{-1}\,.$$

Lorsque $u(\varepsilon)\in D(A^\delta)$ (on a, par le lemme 3.1.3, $\|A^\delta u(\varepsilon)\|$ est fini), on obtient la propriété suivante :

$$\forall\delta\in[0,1/2)\,,\ \exists C_\delta>0\ :\ \forall B\text{-borné dans } H\,, \exists t_\delta(B) \Rightarrow \|A^\delta u(t)\|\le C_\delta \tag{3.1.5}$$

Ainsi notre système dynamique (S_t,H) est dissipatif. ■

Maintenant, on peut donner une démonstration pour le théorème 3.1.1. Les lemmes 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 et l'équation (2.1.1) nous donnent l'estimation suivante :

$$\|A^{\delta-1}\dot u(t)\|\le C(B)\quad \text{pour tout}\quad t\ge t_\delta(B)\,,\ \delta\in[0,1/2)\,.$$

En effet ;
Par (2.1.1), on a :

$$\dot u(t,x) = -Au(t,x) - d\cdot u(t,x) + F(u_t)(x)$$

Alors :

$$\|\dot u(t)\|\le \|Au(t)\| + d\cdot\|u(t)\| + \|F(u_t)\|$$

En utilisant le fait que $D(A)\subset D(A^\delta)$, $\delta\in[0,1/2)$, on obtient :

$$\|\dot u(t)\|\le \|A^\delta u(t)\| + d\cdot\|u(t)\| + \|F(u_t)\|$$

On a $L^2(\Omega)\hookrightarrow D(A^{\delta-1})$, $\delta\in[0,1/2)$ avec injection continue, alors il existe une constante $k_2>0$ telle que $\|A^{\delta-1}\dot u(t)\|\le k_2\cdot\|\dot u(t)\|$. Ainsi :

$$\|A^{\delta-1}\dot u(t)\|\le k_2\cdot(\|Au(t)\| + d\cdot\|u(t)\| + \|F(u_t)\|)$$

Donc, par les lemmes 3.1.2, 3.1.4 et par le fait que $\|F(u_t)\|\le C_b M_f C_{(\xi,0)}|\Omega|$ (voir (3.1.2)), il existe une constante $C(B)$ telle que $\|A^{\delta-1}\dot u(t)\|\le C(B)$ pour tout $t\ge t_\delta(B)$, $\delta\in[0,1/2)$. Ceci montre qu'il existe un compact $K\subset H$ tel que pour toute solution faible du problème (2.1.1), (2.1.5) avec condition initiale dans un borné B de H , on a $(u(t),u_t)\subset K$ pour tout $t\geq t_\delta(B)$. Où on pose

$$K\equiv\left\{(v;\varphi)\,:\,\|A^\alpha v\|^2+ess\sup\nolimits_{s\in[-r,0]}\left(\|A^\alpha\varphi(s)\|^2+\|A^{\alpha-1}\dot\varphi(s)\|^2\right)\leq R\right\},$$

avec $\alpha\leq 1/2$. Donc le système dynamique $(S_t;H)$ est asymptotiquement compact. D'après ce qui précède, on a $(S_t;H)$ est dissipatif et asymptotiquement compact. Ainsi par le théorème 1.4.11, il existe un attracteur global compact $\mathcal{U}$ qui est borné dans $K\subset H_1$; avec $H_1\equiv D(A^\alpha)\times W$, où $W=\{\varphi:\varphi\in L^\infty((-r,0);D(A^\alpha)),\,\dot\varphi\in L^\infty((-r,0);D(A^{\alpha-1}))\},\alpha\leq\frac{1}{2}$. Ce qui complète la démonstration du théorème 3.1.1. ■

3.2 Solutions Stationnaires

Cette section est consacrée aux solutions stationnaires et la possibilité d'utiliser notre système pour construire un système dynamique avec un ensemble donné à priori des solutions stationnaires isolées. D'abord on va donner la définition d'une solution stationnaire :

Définition 3.2.1 *Un élément u de H est dit solution stationnaire pour le système dynamique (S_t,H) si $S_t\,u=u$ pour tout $t>0$.*

Pour simplifier la présentation, on considère l'opérateur $A=-\Delta>0$, où

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

est le laplacien dans $L^2(\Omega)$ avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u=0\quad\text{sur}\quad\partial\Omega\,.$$

Dans ce cas, on a :

$$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\;D(A^{1/2})=H_0^1(\Omega),\;D(A^{-1/2})=H^{-1}(\Omega)\,.$$

Par la définition 2.1.1 (de la solution faible), on a :

$$u(t,x)\in L^2((0,T);D(A^{1/2}))=L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$$

Ainsi, pour la solution stationnaire

$$u(t,x) \equiv u^{st}(x)\,,$$

on a :

$$u^{st} \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Soit

$$u^{st} \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

une fonction arbitraire. Notre but est de trouver des conditions sur la fonction ξ telle que le système (2.1.1), (2.1.5) admet une solution stationnaire

$$u(t) \equiv u^{st} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

On note par :

$$\overline{u^{st}} = \overline{u^{st}}(\theta) \equiv u^{st}\,,\ \theta \in [-r,0]\,.$$

Pour

$$0 = u^{st} \in H_0^1(\Omega)\,,$$

l'équation (2.1.1) nous donne :

$$0 = A\,\cdot 0 + d\,\cdot 0 = \int_{-r}^{0}\left\{\int_\Omega b(0)\ f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,0,0)d\theta$$

Choisissons

$$\xi(\cdot,\cdot,0,0) = 0\,,$$

et par la suite on s'intéresse au cas où

$$0 \neq u^{st} \in H_0^1(\Omega)\,.$$

À partir de (2.1.1) et $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) \equiv 0$, on a :

$$Au^{st}(x) + du^{st}(x) = \int_\Omega b(u^{st}(y))\ f(x-y)dy\,.\int_{-r}^{0}\xi(\theta,x,u^{st},\overline{u^{st}})d\theta\,,\ x \in \Omega\,. \tag{3.2.1}$$

Comme on peut voir, il suffit de définir seulement les valeurs de ξ pour coordonnées

$$(u^{st},\overline{u^{st}}) \in H \equiv L^2(\Omega) \times L^2((-r,0);L^2(\Omega))$$

dans un sens propre. On propose, pour le faire, de décomposer la fonction ξ en temps et en espace, i.e.

$$\xi(\theta, x, u^{st}, \overline{u^{st}}) = \chi(\theta).\widehat{v}(x)\,, \quad \theta \in [-r, 0]\,,\ x \in \Omega. \tag{3.2.2}$$

Ainsi l'équation (3.2.1) devient :

$$Au^{st}(x) + d \cdot u^{st}(x) = \int_\Omega b(u^{st}(y))\, f(x-y)dy \,\cdot\, \widehat{v}(x) \,\cdot\, \int_{-r}^0 \chi(\theta)d\theta\,,\ x \in \Omega\,. \tag{3.2.3}$$

Le lemme qui suit est essentiellement nécessaire pour la suite

Lemma 3.2.2 *Supposons que*

$$0 \neq u^{st} \in L^2(\Omega)\,.$$

Soit $f \in C^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$ *et* f *strictement positive. Soit* b *une fonction bornée et satisfait* $b(w) > 0$ *pour tout* $w \neq 0$.
Alors la fonction

$$p(x) \equiv \int_\Omega b(u^{st}(y))\, f(x-y)dy \tag{3.2.4}$$

satisfait les propriétés :
 (*i*) $p \in C(\overline{\Omega})$;
 (*ii*) $\inf\{p(x) : x \in \overline{\Omega}\} \equiv p_{min} > 0$;
 (*iii*) $\sup\{(\partial/\partial x_i)p(x) : x \in \overline{\Omega}\,, i = 1\,, \ldots\,, n\} \equiv p'_{max} < \infty$.

Preuve.

(i). La continuité de p sur $\overline{\Omega}$ suit immédiatement à partir de la continuité de f et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
En effet ;
Soient x^1, x^2 $\in$ $\Omega \subset \overline{\Omega}$ on a :

$$|p(x^1) - p(x^2)| \;\;=\;\; \left| \int_\Omega b(u^{st}(y))\, [f(x^1-y) - f(x^2-y)]dy \right|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$ nous donne :

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega b(u^{st}(y))\, [f(x^1-y) - f(x^2-y)]dy \right| \\ \leq\ & \left(\int_\Omega [b(u^{st}(y))]^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |f(x^1-y) - f(x^2-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & \|b(u^{st}(\cdot))\| \,\cdot\, \left(\int_\Omega |f(x^1-y) - f(x^2-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que b est bornée, on a :

$$|p(x^1) - p(x^2)| \leq C_b \left(\int_\Omega |f(x^1 - y) - f(x^2 - y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisqu'on a $f \in C^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$ c'est à dire que f est bornée sur $\overline{\Omega - \Omega}$, alors on en déduit que p est continue sur $\overline{\Omega}$.

(ii). Les propriétés : $b(w) > 0$ pour tout $w \neq 0$, $u^{st} \neq 0 \in L^2(\Omega)$ et $f > 0$ impliquent que $p(x) > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Ainsi la continuité de p et le théorème de Weierstrass (chaque fonction (p) continue sur un compact ($\overline{\Omega}$) est une limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\overline{\Omega}$) nous donnent que $\inf\{p(x) : x \in \overline{\Omega}\} \equiv p_{min} > 0$.

(iii). La bornitude des dérivées partielles de p revient au fait que $f \in C^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$.
En effet ;
Lorsqu'on a b est bornée et $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$ alors $b(u^{st}(y))\, f(x-y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x, telle que

$$\frac{\partial}{\partial x}(b(u^{st}(y))\, f(x-y)) = b(u^{st}(y)) \frac{\partial}{\partial x} f(x-y)$$

qui est bornée par une fonction intégrable sur Ω, et qui ne dépond pas de x. Donc on peut intervertir les signes dérivation et intégration, c'est à dire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_\Omega b(u^{st}(y))\, f(x-y) dy = \int_\Omega b(u^{st}(y)) \frac{\partial}{\partial x} f(x-y) dy$$

On en conclut que l'intégrale

$$\int_\Omega b(u^{st}(y)) \frac{\partial}{\partial x} f(x-y) dy$$

converge uniformément par rapport à x.
Ce qui nous donne que :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} p(x) \,/\, x \in \overline{\Omega},\ i = 1, \ldots, n \right\} < \infty$$

Ainsi, la propriété (iii) est prouvée.

Cela achève la preuve du lemme 3.2.2. ■

On suppose maintenant :

$$\int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta \neq 0\,. \tag{3.2.5}$$

Théorème 3.2.3 *[14] Sous les hypothèses du lemme et (3.2.5) on a*

$$\widehat{v}(x) = \frac{Au^{st}(x) + d \cdot u^{st}(x)}{\int_\Omega b(u^{st}(y))\, f(x-y)dy \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta} \tag{3.2.6}$$

Elle vérifie

$$\widehat{v} \in D(A^{-1/2}) = H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

(au sens de distributions).

Démonstration. Lorsqu'on a, par le lemme précédent, $p(x) > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ (car $b(w) > 0$ pour tout $w \neq 0$ et $f > 0$) et par la propriété (3.2.5), on trouve :

$$p(x) \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\,.$$

Ainsi, en utilisant (3.2.3) on aura (3.2.6).

Comme on a vu, par la définition 1 (du solution faible),

$$u(t,x) \in L^2((0,T); D(A^{1/2})) = L^2((0,T); H_0^1(\Omega))\,;$$

alors, pour la solution stationnaire $u(t,x) \equiv u^{st}(x)$, on a $u^{st} \in H_0^1(\Omega)$. Ceci implique que $Au^{st} \in H^{-1}(\Omega) = D(A^{-1/2})$ (car A est un opérateur linéaire défini de $H_0^1(\Omega)$ à valeurs dans $H^{-1}(\Omega)$) et $Au^{st} + d \cdot u^{st} \in H^{-1}(\Omega)$. Pour prouver que $\widehat{v} \in H^{-1}(\Omega)$ on rappelle la proposition suivante :

Proposition 3.2.4 *[13] Soit m un entier positif. Alors tout élément h de $H^{-m}(\Omega)$ peut se présenter, d'une manière non unique, par :*

$$h = \sum_{|j| \leq m} D^j h_j,\ h_j \in L^2(\Omega)$$

Où

$$D^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n_0}^{\alpha_{n_0}}}\,,\ \alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_0}\}\,,\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n_0}\,.$$

Dans notre cas $m = 1$ et pour

$$h = Au^{st} + d \cdot u^{st} \in H^{-1}(\Omega)$$

et

$$q(x) = \frac{1}{p(x) \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta) d\theta} \quad \text{(car on a 3.2.5 et} \quad p(x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \overline{\Omega}) ,$$

alors

$$\widehat{v} = q\, h \in H^{-1}(\Omega) .$$

En utilisant la proposition 3.2.4, on écrit :

$$h = h_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i \,,\; h_i \in L^2(\Omega) .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{v} = qh &= qh_0 + \sum_{i=1}^{n} q \frac{\partial}{\partial x_i} h_i \\ &= qh_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(qh_i) - h_i \frac{\partial}{\partial x_i} q \right] \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Remarque 1 *On note que toutes les dérivées sont au sens des distributions (on peut voir [10, 13, 19]). Le terme $q \cdot h$ est donné comme une distribution obtenue en multipliant la distribution h par la fonction indéfiniment différentiable q (par définition, on a $(q \cdot h, \varphi) = (h, q \cdot \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D})$, lorsque l'opération de multiplication n'est pas définie pour deux distributions. En utilisant cette définition, il est facile de vérifier que $(\partial/\partial x_i)(q \cdot h) = h \cdot (\partial/\partial x_i) q + q \cdot (\partial/\partial x_i) h$.*

Par la proposition 3.2.4, pour prouver que $\widehat{v} \in H^{-1}(\Omega)$ il suffit de montrer (voir (3.2.7)) que :

$$qh_i \in L^2(\Omega) \,, \quad h_i \frac{\partial}{\partial x_i} q \in L^2(\Omega) . \tag{3.2.8}$$

Puisque $h_i \in L^2(\Omega)$ et $q \in C(\overline{\Omega})$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |q(x) h_i(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |q(x)|^2 \cdot |h_i(x)|^2 dx \\ &\leq [\sup\{|q(x)| \,:\, x \in \overline{\Omega}\}]^2 \cdot \int_{\Omega} |h_i(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Par le fait que $q(x) = \frac{1}{p(x)\cdot\int_{-r}^{0}\chi(\theta)d\theta}$ et par définition de la norme de h_i dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$[\sup\{|q(x)|\ :\ x \in \overline{\Omega}\}]^2 \cdot \int_{\Omega} |h_i(x)|^2 dx \quad = \quad \frac{1}{[\inf\{p(x) : x \in \overline{\Omega}\} \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta]^2} \cdot \|h_i\|^2$$

En utilisant la propriété (ii) du lemme 3.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\inf\{p(x) : x \in \overline{\Omega}\} \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta]^2} \cdot \|h_i\|^2 &= p_{min}^{-2} \cdot \frac{1}{[\int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta]^2} \cdot \|h_i\|^2 \\ &< +\infty\,. \end{aligned}$$

Ainsi on aura la première propriété dans (3.2.8).
La deuxième propriété dans (3.2.8) dûe à

$$\int_{\Omega} \left| h_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right|^2 dx \quad = \quad \int_{\Omega} \left| h_i(x) \right|^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right|^2 dx$$

Puisque $q \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, on a :

$$\leq \quad \left[\sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right|\ :\ x \in \overline{\Omega}\,,\ i = 1\,, \cdots, n \right\} \right]^2 \cdot \int_{\Omega} |h_i(x)|^2 dx$$

De la propriété (iii) du lemme 3.2.2 et de fait que $h_i \in L^2(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} &\leq \quad \left[\frac{p'_{max}}{p_{min}^2 \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta} \right]^2 \cdot \|h_i\|^2 \\ &< \quad +\infty \end{aligned}$$

Où, en utilisant le lemme 3.2.2 on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} q(x) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{p(x) \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta} \right| \\ &= \left| -\frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{p^2(x) \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta} \right| \\ &\leq \sup \left\{ \left| \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{p^2(x) \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta} \right|, \quad x \in \overline{\Omega}\,,\ i = 1\,, \ldots n \right\} \\ &\leq \frac{p'_{max}}{p_{min}^2 \int_{-r}^{0} \chi(\theta)d\theta}\,. \end{aligned}$$

Ainsi on a (3.2.8) et par la formule (3.2.7), on obtient la propriété :

$$\widehat{v} \in H^{-1}(\Omega) = D(A^{-1/2}), \tag{3.2.9}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.2.3. ■

Cette propriété (3.2.9) nous permet de justifier le choix des hypothèses sur la fonction ξ qui représente le retard dépendant de l'état (le choix d'une classe des fonctions ξ) dans ce travail. Maintenant, on voit que, en supposant (en relation avec (3.2.5)) que

$$\int_{-r}^{0} |\chi(\theta)| \, d\theta \, < \, \infty \, ,$$

la fonction ξ définie par (3.2.2) avec $\widehat{v}$ définie par (3.2.6) possède la propriété (2.2.2).

Comme un résultat, de toute suite (finie ou infinie) de points isolés $\{u^{st,k}\} \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on peut définir une fonction ξ, qui satisfait les hypothèses du théorème 2.2.1 et tel que le système (2.1.1) avec ξ aura tous les points $\{u^{st,k}\} \subset H_0^1(\Omega)$ comme solutions stationnaires $u^k(t) \equiv u^{st,k}$, $t \in \mathbb{R}$.

Conclusion

On avait comme objectif de trouver des conditions sur la fonction ξ pour que l'équation (2.1.1)

1. admet une solution faible ;
2. comportement asymptotiqye des solutions à travers l'existence d'un attracteur global ;
3. l'existence des solutions stationnaires qui sont des éléments de l'attracteur.

Ces conditions se résument par les hypothèses

H b) sur la fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, bornée et satisfait $b(w) > 0$ pour tout $w \neq 0$;

$\mathbf{H_1}$ f) sur la fonction $f : \overline{\Omega - \Omega} \to \mathbb{R}$ est bornée ;

$\mathbf{H_2}$ f) la fonction f est strictement positive et $f \in C^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$;

$\mathbf{H_1}$ ξ) sur la fonction $\xi : [-r, 0] \times \Omega \times L^2(\Omega) \times L^2((-r, 0); L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ satisfait la conditon suivante :
Pour tout $M > 0$ il existe $L_{\xi,M}$ tel que pour tout (v^i, ψ^i) satisfaisant $\|v^i\|^2 + \int_{-r}^0 \|\psi^i(s)\|^2 ds \leq M^2$, $i = 1, 2$ on a

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^0 \|\xi(\theta, ., v^1, \psi^1) - \xi(\theta, ., v^2, \psi^2)\|_{-1/2} d\theta \\ \leq \; & L_{\xi,M} \cdot \left[\|v^1 - v^2\|^2 + \int_{-r}^0 \|\psi^1(s) - \psi^2(s)\|^2 ds \right]^{1/2} ; \end{aligned}$$

$\mathbf{H_2}$ ξ) Il existe $C_{(\xi,-1/2)} > 0$ tel que

$$\int_{-r}^0 \|\xi(\theta, ., v, \psi)\|_{-1/2} d\theta \leq C_{(\xi,-1/2)} \quad \forall (v, \psi) \in H ;$$

$\mathbf{H_3}\,\xi$) sur la fonction ξ satisfait $\xi(.,.,v,\psi) \in L^\infty((-r,0); D(A^{-1/2}))$ pour tout $(v,\psi) \in H$;

$\mathbf{H_4}\,\xi$) Il existe $C_{(\xi,0)} > 0$ tel que

$$\int_{-r}^{0} \|\xi(\theta,.,.,v,\psi)\| d\theta \leq C_{(\xi,0)} \quad \forall (v,\psi) \in H\,;$$

$\mathbf{H}\,\chi$) sur la fonction χ satisfait $\int_{-r}^{0} \chi(\theta) d\theta \neq 0$ et $\int_{-r}^{0} |\chi(\theta)| d\theta \leq \infty$.

Bibliographie

[1] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov and L.F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations,* Moscow, Nauka, 1991 .

[2] A. V. Babin, and M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations,* Studies in mathematics and its applications, vol 25,edr J.Lions Paris. Amsterdam, North-Holland, 1992.

[3] L. Boutet de Monvel, I. D. Chueshov and A. V. Rezounenko, *Inertial manifolds for retarded semilinear parabolic equations,* Nonlinear Analysis, 34 (1998), $907 - 925$.

[4] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et Application,* Université Pière et Marie Curie et Ecole Polytechnique, 2^{ieme} édition, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico 1987.

[5] J. W. Cholewa and T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems,* Silesian University, Poland, First published 2000 .

[6] I. D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems,* Acta, Kharkov (1999) , (in Russian). English transl, Acta, Kharkov (2002) .

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, vol.19, American Mathematical Society, 1997.

[8] K. Fumi and F. Kappel, M.I. Vishik, *Evolution Equations and their approximations* Series on advances in mathematics for applied sciences, vol.61, world scientific.

[9] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations,* Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1977.

[10] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Elements of the theory of functions and functional analysis,* 3rd ed. Moscow : MIR, 536p. 1994.

[11] T. Krisztin, O. Arino, *The 2-dimensional attractor of a differential equation with state-dependent delay,* Journal of dynamics and differential equations 2001; $13 : 453 - 522$.

[12] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[13] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et applications,* Dunon, Paris, 1968.

[14] A. V. Rezounenko, *On a class of PDEs with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay term,* Department of Mechanics and Mathematics, Kharkov University,4, Svobody Sqr., Kharkov, 61077, Ukraine, 2008.

[15] A. V. Rezounenko, *On singular limit dynamics for a class of retarded nonlinear partial differential equations,* Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. -1997. N.4 (1/2), 193-211.

[16] A.V. Rezounenko, J. Wu, *A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay : local theory and global attractors* Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 190, Issues $1 - 2, P.99 - 113$, 2006.

[17] A.V. Rezounenko, *Partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007. Vol. 326, Issue 2, (15 February 2007), $1031 - 1045$. (see preprint version : A.V. Rezounenko, Two models of partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays, preprint. March 22, 2005, http ://arxiv.org/abs/math.DS/0503470).

[18] A.V. Rezounenko, *Differential Equations with discret state-dependent Delay : uniqueness and well-posedness into space of continuous functions,* Department of Mechanics and Mathematics, Kharkov National University, 4 Svobody sqr., Kharkov, 61077 , Ukraine.

[19] L. Schwartz, *Theorie des distributions,* I et II, Hermann, Paris, $1950 - 1951$.

[20] R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations,* AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 49, 1997.

[21] R. Temam, *Navier- Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis,* Universite de Paris- Sud, Orsay, France Indiana University, Bloomington, Indiana second édition 1995.

[22] M. I. Vishik, *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations,* Silesian University, Poland, Moscow State University. First published 1992 .

[23] H.O. Walther, *The solution manifold and C1-smoothness for differential equations with state-dependent delay,* J.Differential Equations 2003 .

[24] H. O. Walther, *Stable periodic motion of a system with state dependent delay,* Differential and Integral Equations 15 (2002), $923-944$.

[25] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1996 .

[26] K. Yosida, *Functional analysis,* Springer-Verlag, New York, 1965 .

[27] S. Zheng, *Nonlinear Evolution Equations,* Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, China, 2004 .