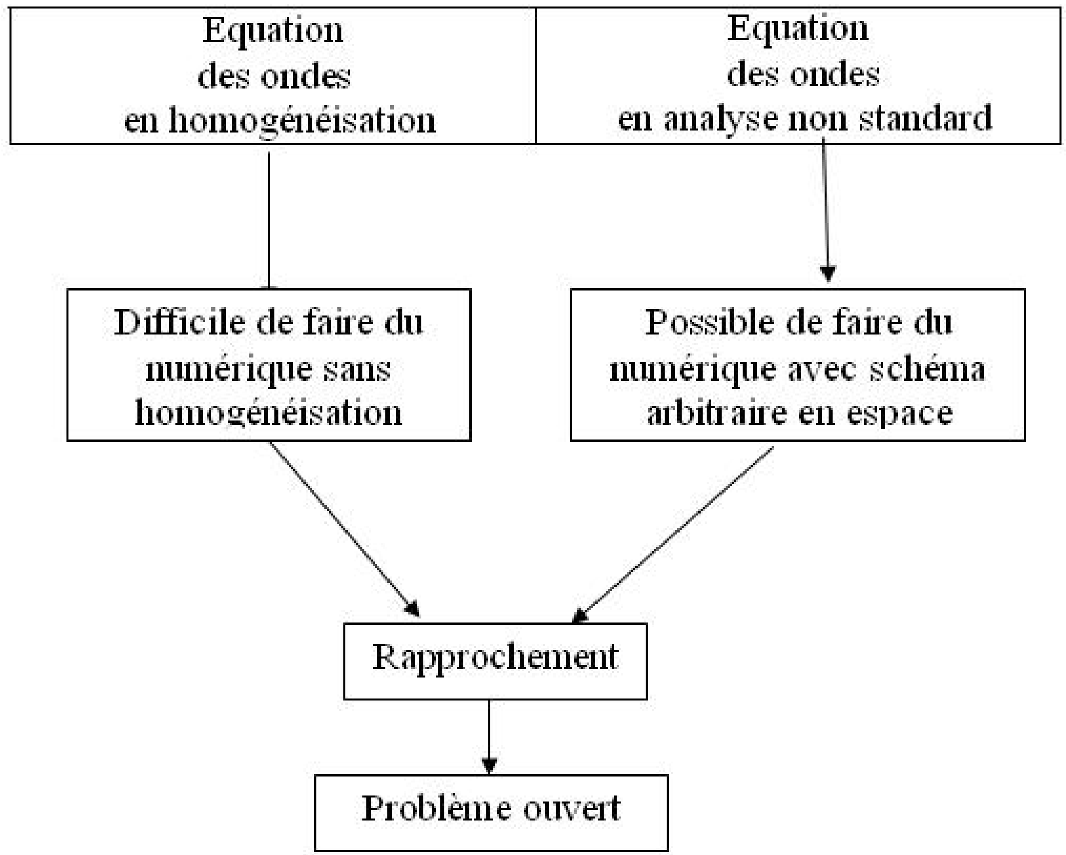
Mathématiques et Applications

Homogénéisation de l'équation des ondes et analyse non standard

Abeidallah Mohammed

juillet 2010


Equation
des ondes
en homogénéisation
Equation
des ondes
en analyse non standard
Difficile de faire du
numérique sans
homogénéisation
Possible de faire du
numérique avec schéma
arbitraire en espace
Rapprochement
Problème ouvert

0.1 Plan

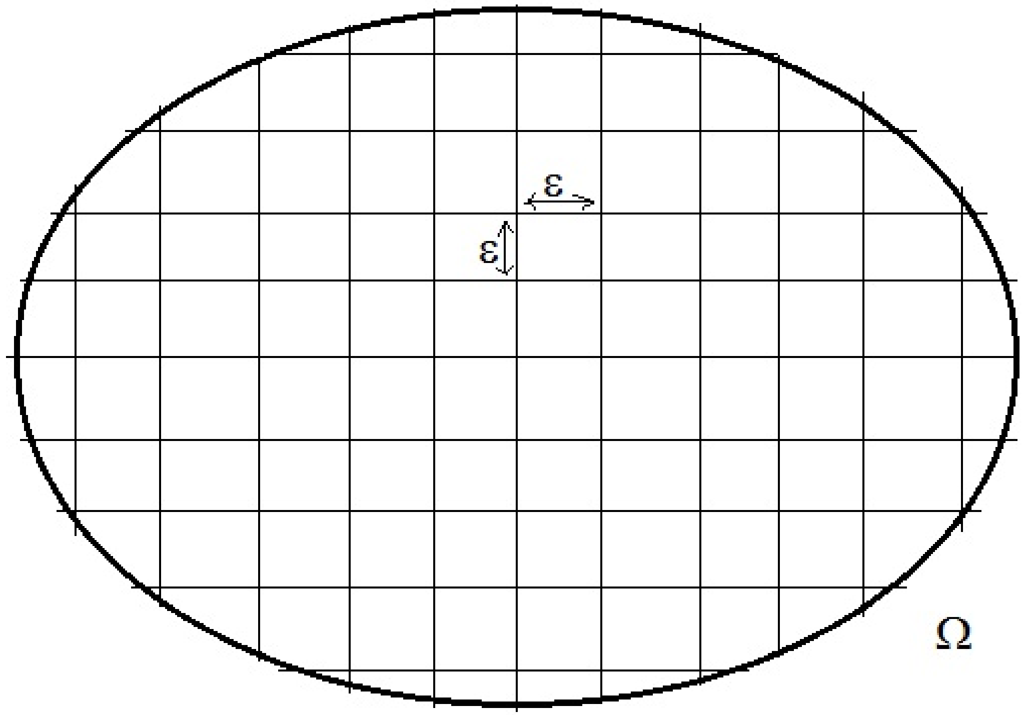
Introduction

Chapitre I : 1) Préliminaire:
2**)** La méthode du développement asymptotique à deux échelles.

Chapitre II : Homogénéisation de l'équation des ondes.

Chapitre III : Equation des ondes discrétisée en dimension infiniment grand sous une condition régulière.

0.2 Qu'est- ce que c'est que l'homogénéisation ?

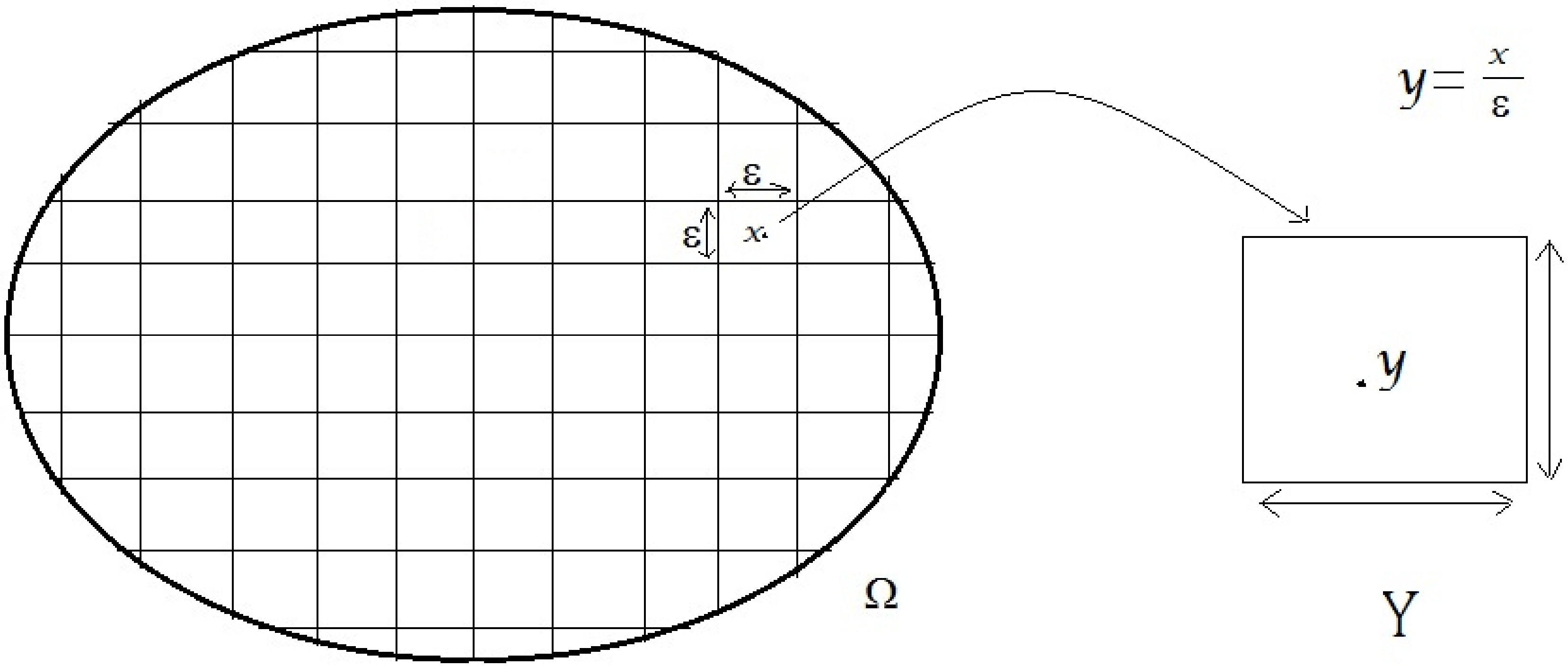


Type de problème à résoudre est :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} -div\,(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = u_0 \ \text{ sur } \Gamma, & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^\varepsilon u^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = u_0 \text{ sur } \Gamma, & \end{cases}$$

pour ε fixé (P_ε) admet une solution unique.

$$a^{\varepsilon}(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$,où a est Y-périodique, et $0 < \alpha < a < \beta$



$$a^{\varepsilon} \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(a)$$

La convergence du produit :

1) Soit $(x_n)_n$ une suite de E et $(y_n)_n$ une suite de $E^{'}$, si :

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E \\ y_n \to y \text{ fortement dans } E^{'} \end{cases}$$

alors :

$$\langle y_n, x_n \rangle_{E',E} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle y, x \rangle_{E',E}$$

2) Soit $(x_n)_n$ une suite de $E = F^{'}$ où F est un espace de Banach et $(y_n)_n$ une suite de F, si :

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement * dans } E \\ y_n \to y \text{ fortement dans } F \end{cases}$$

alors : $\langle x_n, y_n \rangle_{F',F} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle_{F',F}$

Exemple dans le cas unidimensionnel

Soit $\Omega =]d_1, d_2[\subset \mathbb{R}$,et on considère le problème linéaire *dans* Ω suivant : $\begin{cases} -\frac{d}{dx}(a_\varepsilon(x).\frac{du_\epsilon}{dx}) = f \\ u_\epsilon(d_1) = u_\epsilon(d_2) = 0 \end{cases}$

Où

$$\begin{cases} f \in L^2(\Omega) \\ 0 < \alpha \leq a_\epsilon(x) \leq \beta < +\infty \text{ pp } x \in \Omega \\ a \text{ est } l_1 \text{périodique} \\ a \in L^\infty(0, l_1) \end{cases}$$

La formulation variationnelle est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que:} \\ \int_\Omega a_\varepsilon(x)\frac{du_\epsilon}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_\Omega fvdx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram avec :

$$a_1^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega a_\varepsilon(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \text{ et } L(v) = \int_\Omega fvdx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

d'où l'existence et l'unicité.

L'estimation de u_ϵ : En utilisant la coercivité de a_1^ε et l'inégalité de Poincaré on aboutit à :

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{c(\Omega)}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Ceci veut dire que la suite (u_ϵ) est uniformément bornée par rapport à ε, d'où :

$$u_\varepsilon \underset{\epsilon \to 0}{\rightharpoonup} u_0 \text{ faiblement } \textit{dans } H_0^1(\Omega)$$

On pose: $\xi^\varepsilon(x) = a_\varepsilon(x) \frac{du_\epsilon}{dx}$.

$$\Rightarrow -\frac{d\xi^\varepsilon}{dx} = f \quad \textit{dans } \Omega$$

L'estimation de ξ^ε :

$$\left\{ \|\xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \beta^2 \|u_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta^2 \left(\frac{c(\Omega)}{\alpha}\right)^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \right.$$

on a

$$-\frac{d\xi^\varepsilon}{dx} = f \in L^2(\Omega) \Longrightarrow \left\|\frac{d\xi^\epsilon}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

or

$$\|\xi^\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{d\xi^\epsilon}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\|\xi^\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \left(\beta^2\left(\frac{c(\Omega)}{\alpha}\right)^2 + 1\right)\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq k$$

Ceci veut dire que la suite (ξ^ϵ) est uniformément bornée par rapport à ϵ, d'où :

$$\xi^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \xi^0 \text{ faiblement } \textit{dans } H^1(\Omega)$$

puisque l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte donc :

$$\xi^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightarrow} \xi^0 \ \textit{dans } L^2(\Omega)$$

et on a :

$$\frac{1}{a_\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right) \text{ faiblement } \textit{dans } L^2(\Omega)$$

puisque :

$$\begin{cases} \frac{1}{a_\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\rightharpoonup} \mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right) \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \xi^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightarrow} \xi^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{du_\epsilon}{dx} = \frac{1}{a_\epsilon}.\xi^\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\rightarrow} \mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right).\xi^0 = \frac{du_0}{dx}$$

alors :

$$\Rightarrow \xi^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}.\frac{du_0}{dx}$$

En passant à la limite (au sens des distributions) dans : $-\frac{d\xi^\epsilon}{dx} = f$

on aura: $-\frac{d\xi^0}{dx} = f$

Donc le problème homogénéisé est donné par:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mathcal{M}_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{du_0}{dx}\right) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u_0(d_1) = u_0(d_2) = 0 \end{cases}$$

1 Le développement asymptotique à deux échelles

1.1 Définition du problème à homogénéiser

Soit A^{ε} l'opérateur défini par :

$$A^{\varepsilon}u_{\varepsilon} = -div\left(a^{\varepsilon}\nabla u_{\varepsilon}\right). \tag{1}$$

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}u_{\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega, \\ u_{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in L^2\left(\Omega\right)$.

$$a_{ij} \text{ est } Y\text{-périodique sur } \mathbb{R}^n, \forall i,j \in \{1,...,n\}$$

$$a_{ij} \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right), \forall i,j \in \{1,...,n\}$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ (constante) t.q. } \left(a\left(x\right)\zeta,\zeta\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)\zeta_j\zeta_i \geq \alpha\left|\zeta\right|^2 p.p.\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

où $\qquad a\left(x\right) = \left(a_{ij}\left(x\right)\right)_{1\leq i,,j\leq n}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$

1.1.1 Existence et Unicité

Formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q.} \\ a_1^\varepsilon(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3}$$

où :

$$a_1^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega (a^\varepsilon(x)\nabla u, \nabla v)\,dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

- La continuité de a_1^ε

$$|a_1^\varepsilon(u,v)| \leq c_1 \ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{5}$$

- La coercivité de a_1^ε

$$a_1^\varepsilon(v,v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \tag{6}$$

1.1.2 La méthode de développement asymptotique à deux échelles

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \cdots \tag{7}$$

où $u_i(x,.)$ sont des fonctions $Y-$périodiques en y et ceci pour tout $x \in \Omega$

Homogénéisation

$$\left\{ \begin{array}{c} A^{\varepsilon}u_{\varepsilon} = -div\left(a^{\varepsilon}\nabla u_{\varepsilon}\right) = f \quad \text{ dans } \Omega, \\ u_{\varepsilon} = 0 \quad \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{8}$$

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \varphi(x, y) \ où \ \ y = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\left(\varepsilon^{-2}A_0 + \varepsilon^{-1}A_1 + \varepsilon^0 A_2\right) u_{\varepsilon}\left(x\right) = f \quad \text{ dans } \Omega,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\left(y\right)\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right) \\ A_1 = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(y\right)\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right) - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\left(y\right)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ A_2 = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(y\right)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right). \end{array} \right. \tag{9}$$

On a alors à résoudre les problèmes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(A_0 u_0\right)\left(x, .\right) = 0 \quad \text{ dans } Y \\ u_0\left(x, .\right) \ \text{ est } Y - \text{périodique} \end{array} \right. \tag{10}$$

$$\begin{cases} (A_0 u_1)(x,.) = -(A_1 u_0)(x,.) & \text{dans } Y \\ u_1(x,.) \text{ est } Y-\text{périodique} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} (A_0 u_2)(x,.) = f(x) - (A_1 u_1 + A_2 u_0)(x,.) & \text{dans } Y \\ u_2(x,.) \text{ est } Y-\text{périodique} \end{cases} \tag{12}$$

Lemme 1 : Soit $F \in \left(H^1_{per}(Y)\right)^*$, alors :

$$\begin{cases} \int\limits_Y (a(y)\nabla\varphi, \nabla\psi)\, dy = \langle F, \psi \rangle & ,\forall \psi \in H^1_{per}(Y) \\ \varphi \in H^1_\sharp(Y) \end{cases} \tag{13}$$

admet une solution unique si et seulement si :

$$\langle F, 1 \rangle = 0.$$

Lemme 2 : Soient F et G deux fonctions régulières et Y-périodiques alors on a :

$$\int\limits_Y \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)\, G(y)\, dy = -\int\limits_Y \frac{\partial G}{\partial y_i}(y)\, F(y)\, dy \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Premiére étape: Etude du problème (10) :

$$\begin{cases} \left(A_0 u_0\right)(x,.) = 0 \quad \text{dans } Y \\ u_0(x,.) \text{ est } Y - \text{périodique} \end{cases}$$

La formulation faible associée au problème (10) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0(x,.) \in H^1_{per}(Y) \text{ t.} q. \\ \int\limits_Y \left(a(y)\nabla u_0, \nabla\psi\right) dy = 0 \quad \forall\psi \in H^1_{per}(Y). \end{cases} \tag{14}$$

Remplaçons ψ par $u_0(x,.)$ dans (14) ensuite utilisons la condition d'éllipticité vérifiée par a, on a alors:

$$\|\nabla u_0\|^2_{L^2(Y;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{15}$$

ce qui implique :

$$u_0(x,y) = u_0(x). \tag{16}$$

Deuxième étape: Etude du problème (11) :

$$\begin{cases} (A_0u_1)(x,.) = -(A_1u_0)(x,.) & \text{dans } Y \\ u_1(x,.) \text{ est } Y-\text{périodique.} \end{cases}$$

En tenant compte du (16) la formulation faible associée au problème (11) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1(x,.) \in H^1_{per}(Y) \text{ t.q.} \\ \int\limits_Y (a(y)\nabla u_1, \nabla\psi)\, dy = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial u_0}{\partial x_j} \int\limits_Y a_{ij}\nabla_i\psi dy \quad \forall\psi \in H^1_{per}(Y), \end{cases} \tag{17}$$

où ∇_i est la ième composante du vecteur ∇.
Pour $k = 1, \ldots, n$ on considère le problème :

$$\begin{cases} \int\limits_Y \left(a(y)\nabla\omega^k(y), \nabla\psi(y)\right) dy = -\int\limits_Y (a(y)e_k, \nabla\psi(y))\, dy \quad ,\forall\psi \in H^1_\sharp(Y) \\ \omega^k \in H^1_\sharp(Y). \end{cases} \tag{18}$$

La solution du problème (17) est donnée par :

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_0}{\partial x_k}\omega^k(y) + \tilde{u}_1(x). \tag{19}$$

Troisième étape: Etude du problème (12) :

$$\begin{cases} (A_0 u_2)(x,.) = f(x) - (A_1 u_1 + A_2 u_0)(x,.) & \text{dans } Y \\ u_2(x,.) \text{ est } Y-\text{périodique.} \end{cases}$$

Soit la fonction $F \in \left(H^1_{per}(Y)\right)^*$ définie par:

$$F(x,.) = f(x) - (A_1 u_1 + A_2 u_0)(x,.)\,.$$

Dans ce cas le problème (12) devient:

$$\begin{cases} (A_0 u_2)(x,.) = F(x,.) & \text{dans } Y \\ u_2(x,.) \text{ est } Y-\text{périodique} \end{cases} \tag{20}$$

La formulation faible associée au problème (20) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_2(x,.) \in H^1_{per}(Y) \text{ t.q.} \\ \displaystyle\int_Y (a(y)\nabla u_2, \nabla\psi)\, dy = \langle F, \psi\rangle \quad \forall\psi \in H^1_{per}(Y)\,, \end{cases} \tag{21}$$

telle que :

$$\langle F,\psi\rangle = \int\limits_Y f(x)\,\psi dy + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Y \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)\psi dy$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Y \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)\psi dy + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Y \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\psi dy, \tag{22}$$

Puisque le problème (21) admet une solution unique, alors d'après le lemme 1, on a : $\langle F,1\rangle = 0$, d'où en remplaçant dans (22), en utilisant le lemme 2, on obtient :

$$\langle F,1\rangle = f(x)\,|Y| + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Y a_{ij}(y)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\partial y_j}dy + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\partial x_j}\int\limits_Y a_{ij}(y)\,dy = 0.$$

En remplaçant u_1 par son expression (19), on obtient l'équation homogénéisée :

$$-\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\partial x_k} = f \quad \text{dans } \Omega,$$

avec le coefficient homogénéisé est :

$$b_{ik} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(a_{ik}(y) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial \omega^k}{\partial y_j}(y) \right) dy.$$

Mais pour avoir un problème bien posé, il faut rajouter la condition au bord. Pour cela on utilise le problème (2) c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A^\varepsilon u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et la formule du développement (7) c'est-à-dire : $u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \cdots$
et on conclut que:

$$u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Notons bien que $|Y| = 1$ car Y est le cube unité de $\mathbb{R}^n$.

2 Homogénéisation de l'équation des ondes

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique quand $\varepsilon \to 0$ de la solution u_ε du problème des ondes suivant :

$$\begin{cases} u_\varepsilon^{"} - div(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon & dans \quad \Omega \times]0,T[\\ u_\varepsilon = 0 & sur \quad \partial\Omega \times]0,T[\\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & dans \ \ \Omega \\ u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1(x) & dans \ \ \Omega, \end{cases} \tag{23}$$

où f_ε , u_ε^0 et u_ε^1 des donnés et la matrice A^ε est y-périodique définie par :

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \qquad p.p.\ sur\ \mathbb{R}^N \quad \forall\ i,j = 1,\cdots,N \tag{24}$$

et

$$A^\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon}) = \Big(a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\Big)_{1\le i,j\le N} \qquad p.p.\ sur\ \mathbb{R}^N, \tag{25}$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} & \forall i,j = 1,\cdots N \\ a_{ij}\ est\ \ y - periodique & \forall\ i,j = 1,\ldots N \\ A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N} & \in M(\alpha,\beta,\Omega), \end{cases} \tag{26}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \beta$ et $M(\alpha, \beta, \Omega)$ donner par la définition 1.7.
Soient $f_\varepsilon \in L^2(\Omega \times]0, T[)$, $u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$.

2.1 Existence et Unicité de la solution:

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u^{"} - div(B.\nabla u) = f & dans \quad \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \times]0, T[\\ u\,(x, 0) = u^0(x) & dans \;\; \Omega \\ u'(x, 0) = u^1(x) & dans \;\; \Omega, \end{cases} \tag{27}$$

sous les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \text{i) } B \; symétrique \; et \; B \in M(\alpha, \beta, \Omega) \\ \text{ii) } \; f \in L^2\left(\Omega \times]0, T[\right) \\ \text{iii) } \quad u^0 \in H_0^1\left(\Omega\right) \\ \text{iv) } \quad u^1 \in L^2\left(\Omega\right), \end{cases} \tag{28}$$

On introduit l'espace:

$$W_2 = \left\{ v \;/\;\; v \in L^2(0, T \;;\; H_0^1(\Omega)),\; v' \in L^2(0, T \;\;;\, L^2(\Omega)) \right\}.$$

qui est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{W_2} = \|v\|_{L^2(0,T\ ;\ H_0^1(\Omega))} + \|v'\|_{L^2(\Omega\ \times\ ]0\ ,\ T[)}\ .$$

Alors la formulation variationnelle du problème (27) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W_2 \text{ tel que} \\ \left\langle u^{"}(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega B(x)\nabla u(x,t).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx \quad dans\ D'(0,T),\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x,0) = u^0(x) \qquad\qquad\qquad dans\ \ \Omega \\ u'(x,0) = u^1(x) \qquad\qquad\qquad dans\ \ \Omega, \end{cases} \tag{29}$$

Nous avons le resultat suivant:

Théorème 2-1 : Sous les hypothèses (28), le problème (29) admet une unique solution $u \in W_2$, de plus on a , $u \in L^\infty(0,T\ ;\ H_0^1(\Omega)), u' \in L^\infty(0,T\ \ ;\ L^2(\Omega)), u^{"} \in L^\infty(0,T\ ;\ L^2(\Omega))$ et il existe une constante C dépendante seulement de α, β, Ω et T tel que :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^\infty(0,T\ ;\ L^2(\Omega))} + \left\|u^{"}\right\|_{L^\infty(0,T\ ;\ L^2(\Omega))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + \left\|u^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|u^1\right\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \tag{30}$$

Dans la démonstration du théorème on utilise le lemme de Gronwall

Preuve de Théorème 2-1:

On utilisera la méthode de Faedo-Galerkin, la preuve se fait en six étapes (voir $[3]$):

1er étape: Soit $(w_j)_{\ j\ \geq\ 1}$ une base orthonormale de $L^2(\Omega)$.
ceci signifie que $(w_{i,}w_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$ symbole de Kronecker.
et $v = \sum\limits_{j\ =1}^{+\infty} (v\ , w_j)_{L^2(\Omega)} \cdot w_j, \qquad \forall v \in L^2(\Omega).$
notons que la suite $(w_j)_{\ j\ \geq\ 1}$ est orthogonale dans $H_0^1(\Omega)$
posons : $V_m = vect\ (w_1, \cdots, w_m)$ le sous espace de $H_0^1(\Omega)$.
Considérons l'opérateur de projection P_m de $L^2(\Omega)$ sur V_m défini par:

$$P_m v = \sum_{j\ =1}^{m} (v, w_j)_{L^2(\Omega)} .w_j\ , \qquad \forall v \in L^2(\Omega)$$

où

$$P_m v \to v \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \qquad \forall v \in L^2(\Omega) \tag{31}$$

et

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-1}(\Omega))} \leq 1 \tag{32}$$

2eme étape: Introduisons, pour m$\in \mathbb{N}^*$, le problème approximatif en dimension finie

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_m = \sum\limits_{j=1}^{m} g_j^m(t)\ w_j \in V_m \text{ tel que:} \\ \int\limits_\Omega u_m^{"}(x,t)\ w_k\ dx + \int\limits_\Omega B(x) \nabla u_m(x,t) \nabla w_k\ dx = \int\limits_\Omega f(x,t) w_k\ dx \text{ dans } D'[0,T],\ \ \forall k = 1, \cdots, m \\ u_m(x,0) = u_m^0(0) \text{ dans } \Omega \\ u_m'(x,0) = u_m^1(0) \text{ dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{33}$$

Les conditions initiales pour ce problème sont :

$$g_j^m(0) = \left(u^0, w_j\right)_{L^2(\Omega)}\ \ et\ \ \left(g_j^m\right)'(0) = \left(u^1, w_j\right)_{L^2(\Omega)}$$

Puis on remplace $u_m(t)$ et $u_m^{"}(t)$ par leurs valeurs dans le problème (33) on obtient :

$$\frac{d^2 g_k^m}{dt^2} + \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t) \int_\Omega B\ \nabla w_j \nabla w_k dx = \int_\Omega f(x,t) w_k dx,$$
$$pour\ k = 1, \cdots, m$$

Par consequent, le problème (33) est un système à m E D O linéaires du second ordre d'inconnues

$g_1^m, ..., g_m^m$ qui s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{d^{\ 2} g_k^m}{dt^{\ 2}} + \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t) \int_\Omega B \ \nabla w_j \nabla w_k dx = \int_\Omega f(x,t) w_k dx \\ g_k^m(0) = \left(u^0, w_k\right)_{L^2(\Omega)} \\ \left(g_k^m\right)'(0) = \left(u^1, w_k\right)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$
$$\forall \ k \ = \ 1, \cdots, m$$

Des résultats classiques (voir $[4]$) assurent l'existence et l'unicité des solutions $\{g_1^m, ..., g_m^m\}$ dans $C^1([0,T])$.Alors u_m est bien déterminée et de plus u_m et $u_m' \in C\ ([0,T]; V_m)$.

3eme étape: Estimation à priori pour u_m :

En multipliant la k^{eme} équation de problème(33) par $(g_k^m)'$ et en sommant les équations membre à membre nous obtenons:

$$\int_\Omega u_m^{''}(x,t)u_m'(x,t)\ dx + \int_\Omega B(x)\nabla u_m(x,t)\nabla u_m'(x,t)\ dx = \int_\Omega f(x,t)u_m'(x,t)\ dx$$

et en utilisant du lemme de Gronwall, on aboutit à :

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} + \left\|u_m^{'}\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_1\left(\left\|u^1\right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|u^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\right) \tag{34}$$

Estimation à priori pour $u_m^{''}$: En partant de

$$\left(u_m^{''}(t), v\right)_{L^2(\Omega)} = (divB\nabla u_m(t) + f, v)_{L^2(\Omega)}\ , \qquad \forall v \in V_m$$

On a :

$$u_m^{''}(t) = -\left[P_m(\mathcal{F}(u_m) - f)\ \right](t)$$

avec $\mathcal{F} = -div(B\nabla)$.

On a $\mathcal{F} \in \mathcal{L}\left(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right)$,alors pour tout $u_m \in V_m$ on a $\|\mathcal{F}(u_m(t))\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \beta\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$

donc $\|\mathcal{F}(u_m)\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq \beta\|u_m\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}$.

De (34) on obtient :

$$\|u_m\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_1 \left(\left\| u^1 \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| u^0 \right\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \right)$$

En calculant la norme de $u_m''(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$et en utilisant (32) et et la bornitude de $\mathcal{F}(u_m)$ dans $L^2\left(0,T,H^{-1}(\Omega)\right)$ on trouve :

$$\left\| u_m'' \right\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} + \left\| u_m' \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + \left\| u^1 \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| u^0 \right\|_{L^2(\Omega)}\right) \quad (35)$$

où C est une constante dépendant seulement de α, β, Ω et Γ

4eme étape: De l'estimation de (35), on a :

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u \text{ faiblement * dans } L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right) \\ u_m' \rightharpoonup u' \text{ faiblement * dans } L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \\ u_m'' \rightharpoonup u'' \text{ faiblement dans } L^2\left(0,T,H^{-1}(\Omega)\right) \end{cases} \quad (36)$$

Soit ψ dans $D(0,T)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$.

Par multiplication l'équation (33), par $(v, w_k)_{L^2(\Omega)} \cdot \psi$ et par sommation membre à membre et par intégration sur $]0,T[$ on obtient :

$$-\int_0^T\int_\Omega u_m^{'}(x,t)\psi^{'}(t)\left(P_m v\right)(x)\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega B(x)\nabla u_m(x,t)\psi(t)\nabla\left(P_m v\right)(x)\,dxdt=\int_0^T\int_\Omega f\ \psi(t)\left(P_m v\right)(x)\,dxdt$$

faisons tendre $m\to+\infty$, on trouve :

$$-\int_0^T\int_\Omega u^{'}(x,t)\psi^{'}(t)v\left(x\right).dxdt+\int_0^T\int_\Omega B(x)\nabla u(x,t).\psi(t)\nabla v\left(x\right)dxdt=\int_0^T\int_\Omega f(x,t).\psi(t)v\left(x\right)dxdt \quad (37)$$

D'après le théorème 1.9, on obtient :

$$\int_0^T\left\langle u^{''}(t),\psi(t)v\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt+\int_0^T\int_\Omega B(x)\nabla u(x,t).\psi(t)\nabla v\left(x\right)dxdt=\int_0^T\int_\Omega f(x,t).\psi(t)v\left(x\right)dxdt \quad (38)$$

ce qui est exactement l'equation variationnelle (29) où ψ et v sont arbitraires dans $D(0,T)$ et $H_0^1\left(\Omega\right)$ respectivement.

Par passage à la limite quand $m\to\infty$ en utilisant du théorème 1.9 et 1.11 on montre que u satisfait aux conditions initiales

$$u(x,0)=u^0(x)\qquad\text{et}\qquad u^{'}(x,0)=u^1(x),$$

5 étape:

Nous prouvons maintenant l'estimation (30), en utilisant la convergence (36), la semi continuité de la norme nous obtenons:

$$\begin{cases} \|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \liminf\limits_{m\to+\infty} \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ \left\|u^{'}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf\limits_{m\to+\infty} \left\|u_m^{'}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ \left\|u^{''}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \liminf\limits_{m\to+\infty} \left\|u_m^{''}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \end{cases}$$

En sommant terme à terme et en utilisant l'estimation (35) on aboutit à :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\|u^{'}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \left\|u^{''}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + \left\|u^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|u^1\right\|_{H_0^1(\Omega)})$$

Etape 6: Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions vérifiant les mêmes données, leur différence $w = u_1 - u_2$ satisfait (29) avec $f \equiv 0$, $u^0 \equiv 0$ et $u^1 \equiv 0$. Donc

$$\begin{cases} \langle w^{''}(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega B(x)\nabla w(x,t)\nabla v(x)dx = 0 \quad \text{dans } D^{'}(0,T) \\ w(x,0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ w^{'}(x,0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Soit ψ définie (voir $[3]$) par :

$$\psi(x,t)=\begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(x,\tau)d\tau & \text{pour} \quad 0\leq\ t<s \\ 0 & \text{pour} \quad 0<s\leq t<T \end{cases}$$

Notons aussi que la fonction $\psi'(t)\in L^2(\Omega)$, d'où

$$\psi'(x,t)=\begin{cases} w(x,t) & \text{pour} \quad 0\leq\ t<s \\ 0 & \text{pour} \quad 0<s\leq t<T \end{cases}$$

Prenons $v=\psi$, en empolyant le théorème 1.9, l'ellipticité de B et tenant compte la définition de ψ et ψ' on obtient :

$$\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}=0\Rightarrow w(s)=0$$

puisque s est arbitraire dans $]0,T[$, alors $w\equiv 0$ et par suite $u_1=u_2$, d'où l'unicité de la solution u du problème (27).

2.2 Le résultat d'homogénéisation:

Nous revenons au problème (23) avec $f_\varepsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$.
La formulation variationnelle du problème (23) est

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon \in W_2 \text{ tel que:} \\ \langle u_\varepsilon''(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx \ \text{ dans } D'(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) \ \text{ dans } \ \Omega \\ u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1(x) \ \text{ dans } \ \Omega \end{cases} \tag{39}$$

L'existence et l'unicité de u_ε ont été données par le théorème 2.1 telle que:

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), u_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

Nous étudions maintenant le comportement de la solution u_ε quand $\varepsilon \to 0$.
En fait, nous avons le résultat suivant:
Théorème 2-2: Soient $f_\varepsilon \in L^2(0,T,L^2(\Omega)), u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega), u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$ et u_ε la solution du problème (23) avec A^ε est définie par (24)- (26). On suppose :

$$\begin{cases} i)\ u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \ \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ ii)\ u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \ \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) \\ iii)\ f_\varepsilon \rightharpoonup f \ \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times]0,T[) \end{cases} \tag{40}$$

alors, u_ε satisfait

$$\begin{cases} i)\ u_\varepsilon \rightharpoonup u \ \text{ faiblement * dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ ii)\ u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \ \text{ faiblement * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ iii)\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 \ \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega \times]0,T[)\right)^N \end{cases}$$

où u est la solution du problème limite suivant:

$$\begin{cases} u'' - div(A^0 \nabla u) = f \ \text{ dans } \ \Omega \times]0,T[\\ u = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = u^0(x) \ \text{ dans } \ \Omega \\ u'(x,0) = u^1(x) \ \text{ dans } \ \Omega \end{cases} \tag{41}$$

avec $A^0 \in M(\alpha,\beta,\Omega)$ la matrice homogénéisée

Preuve

En utilisant le fait que $A^\varepsilon \in M(\alpha,\beta,\Omega)$, l'hypothèse (40) et l'estimation (30) nous avons:

$$\begin{aligned}\left\|u_\varepsilon''\right\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} + \left\|u_\varepsilon'\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} &\leq C\left(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + \left\|u_\varepsilon^1\right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|u_\varepsilon^0\right\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C'\end{aligned}$$

où C' est une constante indépendante de ε.
On introduit le vecteur ξ^ε défini par

$$\xi^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x,t)$$

L'estimation sur ξ^ε:

$$\|\xi^\varepsilon\|_{(L^2(0,T,L^2(\Omega))^N} \leq \beta\,\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq \beta C' = C$$

C est une constante indépendante de ε.donc

$$\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega\times]0,T[)\right)^N.$$

De l'ensemble de ces estimations, on a :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement * dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u_\varepsilon \to u \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_\varepsilon' \rightharpoonup u' \text{ faiblement * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi^0 \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega\times]0,T[)\right)^N, \end{cases} \tag{42}$$

Soit $\varphi \in D(0,T)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$,
On multiplie l'équation (39) par φ,et on intègre par rapport à t

$$\int_0^T \langle u_\varepsilon''(t), v\varphi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x,t)\nabla v(x)\varphi(t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)v(x)\varphi(t)dxdt$$

On utilise le théorème 1.9 dans le premier terme :

$$\int_0^T \int_\Omega \xi^\varepsilon(x,t)\nabla v(x)\varphi(t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x,t)v(x)\varphi(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon'(x,t)v(x)\varphi'(t)dxdt$$

On peut passer à la limite gràce à la convergence (40) et (42) on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega \xi^0(x,t)\nabla v(x)\varphi(t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)v(x)\varphi(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega u'(x,t)v(x)\varphi'(t)dxdt$$

du thèorème 1.9 on a :

$$\int_0^T \langle u''(t), v\varphi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega \xi^0(x,t)\nabla v(x)\varphi(t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)v(x)\varphi(t)dxdt$$

d'où

$$\langle u''(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \xi^0(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx \text{ dans } D'(0,T),\ \forall v\epsilon H_0^1(\Omega) \quad (43)$$

Si on prouve que,

$$\xi^0 = A^0\nabla u^0 \quad (44)$$

alors (43) montre que u^0 vérifie la formulation faible associée au problème (41). Et par unicité de la solution de ce problème, on peut conclure que $u^0 = u$ et le théorème 2.1 prouve l'unicité de la solution du problème (41)
On a donc à montrer seulement (44), en utilisant les fonctions test oscillantes w_λ^ε définies par:

$$w_\lambda^\varepsilon(x) = \varepsilon w_\lambda(\frac{x}{\varepsilon}) = \lambda.x - \varepsilon\Psi_\lambda(\frac{x}{\varepsilon})$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, en utilisant du théorème 1.9 et 1.11 on montre que u satisfait aux conditions initiales

$$u(x,0) = u^0(x) \text{ et } u'(x,0) = u^1(x)$$

Finalement le problème (41) admet une solution unique u, par conséquent, toute sous-suite dans(42) converge. cela donne la preuve du théorème 2.2.

3 Equation des ondes discrétisée en dimension infiniment grand sous une condition régulière

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation des ondes (voir $[5]$).
Considérons l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = f(x,t) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

L'opérateur ($\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$) se factorise en $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})$.
Nous nous intéressons à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{45}$$

1)-**Schéma numérique de l'équation (1) :**
Soit $u\,(x,t)$ la solution de l'équation (45).
On approche le terme $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, nous utilisons le développement de Taylor suivant :

$$u(x+\varepsilon,t) = u\,(x,t) + \varepsilon u^{'}\,(x,t) + \tfrac{\varepsilon^2}{2} u^{"}\,(x,t) + \tfrac{\varepsilon^3}{6} u^{(3)}\,(x,t) + ...$$
$$u(x-\varepsilon,t) = u\,(x,t) - \varepsilon u^{'}\,(x,t) + \tfrac{\varepsilon^2}{2} u^{"}\,(x,t) - \tfrac{\varepsilon^3}{6} u^{(3)}\,(x,t) + ...$$

Par différence, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{u(x+\varepsilon,t) - u(x-\varepsilon,t)}{2\varepsilon} + 0\left(\varepsilon^2\right)$$

Pour ε très proche de 0, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \simeq \frac{u(x+\varepsilon,t) - u(x-\varepsilon,t)}{2\varepsilon}$$

Par suite en discrétisant la géométrie spatiale: on pose $x_n = n\varepsilon,\ \ \varepsilon = \frac{1}{N}$, où N est le nombre de points de discrétisation $(\varepsilon$ le pas d'éspace$)$. D'où :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n,t) = \frac{u(x_{n+1},t) - u(x_{n-1},t)}{2\varepsilon}.$$

Alors pour $0 \leq n \leq N$, on deduit le schéma numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du_n(t)}{dt} = \dfrac{u_{n\ +1}(t)\ \ - u_{n\ -1}(t)}{2\varepsilon} \\ \varepsilon > 0\ \ ;\ t \in \mathbb{R}\ \ et\ \ n \in\ \mathbb{Z} \end{array} \right. \qquad (46)$$

On étudie le comportement des solutions du système (46), où ε est un infiniment petit strictement positif, t$\in\mathbb{R}$ et n$\in\mathbb{Z}$.

3.1 Existence et Unicité des solutions analytiques du système (46)

Toute solution analytique se développe formellement en série de Taylor :

$$u_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} u_n^{(p)}(0). \tag{47}$$

Nous allons tout d'abord déterminer de manière univoque la valeur de $u_n^{(p)}(0)$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on montrera que :

$$\forall p \geq 0, \qquad u_n^{(p)}(0) = \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k u_{n+p-2k}(0) \tag{48}$$

ce qui démontre l'unicité de la solution.
On a applique règle d'Alembert à la série (47), on trouve que le rayon de convergence est l'infini, d'où l'existence des solutions analytiques

3.2 Problème :

On considère le système différentiel défini par:

$$\begin{cases} \dot{u}_n(t) = \dfrac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2\varepsilon} \\ u_n(0) = f(n\varepsilon) \end{cases} \tag{49}$$

où ε est un infiniment petit strictement positif et $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 3-1: Soit f une fonction analytique réelle standard dont toutes les dérivées sont uniformement bornées, alors si, pour tout n entier, $u_n(0) = f(n\varepsilon)$,on a pour tout t limité, et tout n, $u_n(t) \simeq f(n\varepsilon + t)$.

Dans la démonstration du théorème on utilise le lemme suivant :

Lemme 3-1: S est un opérateur linéaire défini par:

$$Sf(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} \qquad et \quad S^p f = S(S^{p-1} f)$$

Sous les même hypothèses du théorème on a:

$$u_n^{(p)}(0) = S^p f(n\varepsilon) \tag{50}$$

où

$$S^p f(n\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k}}{(2k+p)!} f^{(2k+p)}(n\varepsilon) a_{k,p} \tag{51}$$

avec

$$a_{k,p} \ \leq p^{2k+p} \tag{52}$$

et

$$\frac{a_{0,p}}{p!} = 1$$

Preuve du Théorème 3-1 : Toute solution du système différentiel(49) se développe formellement en série de Taylor:

$$u_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} u_n^{(p)}(0). \tag{53}$$

En remplaçant les formules (50) et (51) du lemme, dans la formule(53), on obtient:

$$u_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k} \ f^{(2k+p)}}{(2k+p)!}(n\varepsilon) a_{k,p}$$

On peut l'écrire sous la forme

$$u_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} f^{\ (p)}(n\varepsilon) + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k} \ f^{(2k+p)}}{(2k+p)!}(n\varepsilon) a_{k,p} \tag{54}$$

Pour alléger l'écriture, notons par:

$$\varphi_t = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k} \ f^{(2k+p)}}{(2k+p)!}(n\varepsilon) a_{k,p}$$

Pour montrer que la solution $u_n(t)$ du système différentiel (49) est infiniment proche de la fonction

$f(n\varepsilon + t)$ il suffit que l'expression φ_t soit infiniment petite, car la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} f^{(p)}(n\varepsilon)$$

n'est autre que le développement en série de Taylor de la fonction $f(n\varepsilon + t)$.
En utilisant le fait que dérivées succéssives sont uniformément bornées et le lemme 3-1 on trouve :

$$\varphi_t \leq M\varepsilon^2 \exp(t.e)$$

Comme t est limité et ε est un infiniment petit, alors

$$M\varepsilon^2 \exp(t.e) \simeq 0$$

car c'est le produit d'un infiniment petit par un limité et par conséquent $\varphi_t \simeq 0$
De (54) on a :

$$u_n(t) = f(n\varepsilon + t) + \varphi_t \text{ avec } \varphi_t \simeq 0$$

Donc la solution $u_n(t)$ du système différentiel (49) vérifie:

$$u_n(t) \simeq f(n\varepsilon + t).$$

Résultat :
On a vu dans ce chapitre que sous de bonnes conditions initiales, la solution du système différentiel

(49) s'interprète comme une onde qui se propage presque sans déformation, et son ombre est solution de l'équation aux dérivées partielles(45).

Exemple : On considère le système différentiel suivant défini par:

$$\begin{cases} \dot{u}_n(t) = \dfrac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2\varepsilon} \\ u_n(0) = f(n\varepsilon) = \cos(an\varepsilon) \\ \varepsilon > 0 \ (i.p) \ ; n \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On remarque que la fonction f vérifie bien les hypothèses du théorème 3-1, par conséquent:

$$u_n(t) \simeq f(n\varepsilon + t) = \cos(an\varepsilon + t)$$

conclusion

L'analyse non standard nous permet de voir l'homogénéisation comme une forme de discrétisation " non apparente ".

En effet, les cellules de périodicité sont tellement nombreuses qu'on peut prendre la taille de chaque cellule comme pas de discrétisation. Le pas tendra vers zéro et pour donner le problème homogénéisé et pour trouver la solution du problème d'ondes discrétisé en espace dans l'analyse non standard. Le choix du schéma de discrétisation de l'équation des ondes en analyse non standard est arbitraire puisque le schéma vu ne présente pas de discrétisation en temps, chose que ne présente pas de déstabilisation du schéma numérique. Ceci nous pousse à poser un problème ouvert qui est: quel est le schéma le plus adéquat pour que le calcul numérique de la solution du problème homogénéisé coincide avec la solution de l'équation discrétisée en analyse non standard.