REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques et applications

Par :

Mr BENTIFOUR RACHID

Sur le thème

Problèmes elliptiques et paraboliques fractionnaires avec données générales

---

Soutenue publiquement le **Mercredi 15 Mars 2017** à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr TOUAOULA M. T.	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr ABDELLAOUI B.	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr MAHMOUDI F.	Professeur	Centre CMM de Chile	Examinateur
Mr HATHOUT F.	Maître de Conférences A	Université de Saida	Examinateur
Mr MIRI S. H.	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Examinateur

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire & Mathématiques Appliquées (LANLMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

بسم الله الرحمن الرحيم

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées
Département de Mathématiques
Faculté des sciences
Université Abou Bekr Belkaid
BP 119 Tlemcen

Email : **RachidBentifour@gmail.com**

Je dédie ce manuscrit à :

Mes parents, qui avec leurs sacrifices m'ont permis de donner le meilleur de moi-même.

Ma femme pour son aide inconditionnelle, et toute la confiance qu'elle m'accorde.

Mon fils Ahmed à qui je souhaite tout le bonheur du monde.

A la mémoire de mon frère Mohammed.

Ma soeur et mes frères .

"If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants"

Sir Isaac Newtoon.

Remerciements

Je remercie en priorité **ALLAH LE TOUT PUISSANT** de m'avoir donné le courage, et la force de volonté d'achever ce travail.

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse M. Abdellaoui. B. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ma thèse ; il m'a transmis la passion de la recherche mathématique et n'a eu de cesse de m'encourager, et de me soutenir, je lui réitére aussi mes remerciements pour ses conseils avisés et ses indications toujours fructueuses, sa capacité et son énorme maitrise qui m'ont facilité d'aborder les problèmes de cette thèse. Je remercie en lui le frère au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur Touaoula T. M., pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je prie M. le Professeur Mahmoudi F., de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

J'adresse à M. le Professeur Hathout F., l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury qui examinera cette thèse.

Je renouvelle mes remerciements à M. le Maître de Conférences Miri. S. H, pour faire partie du jury, mais aussi pour avoir contribué à l'enrichissement de cette thèse, et pour ses conseils pertinents, je salue sa gentillesse et son humilité.

J'adresse à M. le Professeur Ireneo Peral, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour son accueil chaleureux, et sa disponibilité durant ma visite à l'Université Autonoma de Madrid, ainsi que sa contribution dans cette thèse.

Mes remerciements chaleureux à Mon ami Attar A., qui m'a beaucoup aidé à la réalisation de cette thèse, je salue sa gentillesse, et sa patience à prodiguer des conseils pertinents.

Je remercie les amis ; les vrais, Mohammed, Amine, Reda et mon beau frère Mohammed, pour leur soutien tout au long de ces années.
Je remercie également tous les membres de laboratoire ANLMA, qui m'ont facilité l'intégration dans ce groupe de recherche et aussi pour leur soutien et encouragements tout au long de ces années.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$x=(x_1,x_2,...,x_N)$	Elément de $I\!R^N$
$r=\|x\|=\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)}$	Module de x
$Du=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
$\Delta^s u$	Laplacien fractionnaire de u
$\Delta_p u=\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	p-Laplacien de u
$(-\Delta)_p^s\, u$	p-Laplacien fractionnaire de u
$(-\Delta)_{p,\beta}^s\, u$	p-Laplacien fractionnaire avec poids de u
$\Lambda_{N,p,s}$	Constante de Hardy-Sobolev dans le cas p-Laplacien fractionnaire
p'	Exposent conjugué de p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$
$p^*=\frac{Np}{(N-p)}$	Exposent critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
$meas(A)=\|A\|$	Mesure de Lebesgue de $A\subset I\!R^N$
$\\|\cdot\\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\|\cdot\\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée en $x_0\in I\!R^N$

Notation	Définition
X'	Espace dual de X
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Produit scalaire dans $I\!R^N$ / crochet de dualité X, X'
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V,0)$
V^-	Partie negative de la fonction V, $V^- = \max(-V,0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes de classe k sur Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$\mathscr{S}(I\!R^N)$	$\{\varphi \in C^\infty(I\!R^N)$ tel que $\|\varphi\|_{\mathscr{S}(I\!R^N)} < +\infty\}$ avec $\|\varphi\|_{\mathscr{S}(I\!R^N)} = \sup\limits_{x\in I\!R^N}(1+\|x\|^k)\sum\limits_{\|\alpha\|\leq l}\|D^\alpha\varphi(x)\|, \quad k,l \in \mathbb{N}_0,$
$L^p(\Omega)$	$\{u:\Omega\to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1\leq p<\infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u:\Omega\to I\!R \mid u$ mesurable $\exists C$ tal que $\|u(x)\|\leq C$ en p.p. $x\in\Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k ($k \in I\!N$) dans $L^p(\Omega)$
$W^{s,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev fractionnaire pour s dans $(0,1)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$

Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes paraboliques et elliptiques avec un opérateur non local de type p-laplacien fractionnaire ou bien p-laplacien fractionnaire avec poids. Plus précisément on considère un opérateur pseudo différentiel de la forme

$$(-\Delta)^s_{p,\beta}\, u(x) := P.V. \int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^\beta |y|^\beta}$$

où $s \in (0,1), p > 1$ et $\beta > 0$. Il est clair que cet opérateur coïncide, modulo une constante, avec le p laplacien classique pour $s = 1$ et $\beta = 0$. Pour le cas du laplacien fractionnaire, $p = 2$ et $\beta = 0$, l'opérateur peut être aussi défini en utilisant la transformée de Fourier

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(|\xi|^{2s} u)\Big).$$

Notons aussi que cet opérateur trouve son origine en probabilité, puisque il apparaît comme un cas particulier du processus Levy (voir [[25], [28], [54]]).

L'étude des équations fractionnaires a connu un avancement notable ces dernières années grâce a la contribution de plusieurs mathématiciens. L'un des résultats clé dans l'analyse du laplacien fractionnaire est sans doute le résultat de Caffarelli-Sylvestre dans [35]. Les auteurs ont prouvé une "correspondance" entre l'opérateur non local $(-\Delta)^s$ défini dans $I\!R^N$, et, un opérateur local divergentiel défini dans $I\!R^{N+1}$. Cette correspondance a permis de prouver plusieurs résultats de régularité et de définir des extensions "naturelles" des notions, jusque là limitées au cas du laplacien comme la notion de périmètre, courbure moyenne,...., au cas non local. Dans cette thèse on s'intéresse a l'étude des problèmes elliptiques et paraboliques où l'opérateur principal est donné par $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ et parfois sous la présence d'un terme singulier. Le but principal de ce travail est de généraliser des résultats connus pour le cas local, ou bien non local linéaire, à notre cas non local. A première vue, il semble que cette extension peut se faire facilement, ce qui n'est pas tout à fait vrai dans la majorité des cas, en gardant à l'esprit que l'argument de Caffarelli-Sylvestre ne peut pas être étendu au cas non-linéaire. Tenant en compte la nature algébrique de l'opérateur, et pour accomplir notre étude, il est nécessaire de développer des inégalités algébriques, parfois difficiles à prouver, pour résoudre des difficultés de type intégration par parties, fonction test de type produit, estimations a priori,.....

Une fois que les outils algébriques sont prouvés, on passe à la question des poids admissibles. Dans le cas local, pour l'opérateur divergentiel

$$-\Delta_{p,\beta}\, u(x) = -\mathrm{div}(|x|^{-\beta}|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

le poids $|x|^{-\beta}$ est admissible pour tout $\beta \in (0, N-p)$ dans le sens ou l'opérateur $-\Delta_{p,\beta}$ vérifie l'inégalité de Harnack faible . La démonstration de cette affirmation est basée sur les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Notons que cette classe de poids intervient d'une manière fondamentale quand on cherche à améliorer l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Dans notre cas la situation est totalement différente. Le rang de β admissible change complètement puisque les valeurs "trop" négatives de β posent un problème fondamental dans la définition de l'espace de Sobolev fractionnaire lui même. Donc en prouvant une inégalité de Hardy-Sobolev avec poids (sous quelques conditions sur le poids), on arrive à démontrer une version de l'inégalité de type Caffarelli-Kohn-Nirenberg fractionnaire. Cette inégalité sera la clé pour obtenir l'inégalité de Harnack faible pour notre opérateur dans l'esprit des poids admissible. Enfin, et comme conséquence, on traite une classe de problèmes elliptiques et paraboliques non locaux sous la présence d'un terme singulier comme terme de réaction.

0.1 Description de la Thèse

0.1.1 Description du chapitre 1

Dans le premier chapitre on présente des outils d'analyse non linéaires qui seront utilisés pour traiter nos problèmes. On commence par présenter les espaces de Sobolev fractionnaires et leurs propriétés. Ensuite pour une classe de poids précise, on définit les espace de Sobolev avec poids. La notion de troncature est aussi présentée puisqu'elle va être utilisée pour définir des solutions généralisées. En tenant en compte le caractère algébrique de notre opérateur, dans la dernière partie du Chapitre 1 on présente quelques inégalités algébriques qu'on va les utiliser régulièrement dans cette thèse. Notons que quelques inégalités peuvent être prouvées facilement en utilisant un argument de normalisation et homogénéité, par contre d'autres inégalités sont plus compliquées (et complètement nouvelles) et exigent des démonstrations fines et rigoureuses.

0.1.2 Description du chapitre 2

Dans [34], les auteurs ont montré le résultat suivant :

Théorème 0.1. (Caffarelli-Kohn-Nirenberg). Soient $p, q, r, \alpha, \beta, \sigma$ et a des constantes réelles telles que $p, q \geq 1, r > 0, 0 \leq a \leq 1$ et

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{N}, \frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}, \frac{1}{r} + \frac{m}{N} > 0,$$

où $m = a\sigma + (1-a)\beta$. Alors, il existe une constante positive C telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, on a

$$\Big\| |x|^m u \Big\|_{L^r(I\!R^N)} \leq C \Big\| |x|^\alpha |\nabla u| \Big\|^a_{L^p(I\!R^N)} \Big\| |x|^\beta u \Big\|^{1-a}_{L^q(I\!R^N)}$$

si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{1}{r} + \frac{m}{N} = a\Big(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N}\Big) + (1-a)\Big(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}\Big)$$

avec

$$0 \leq \alpha - \sigma \quad si \quad \alpha > 0,$$

et

$$\alpha - \sigma \leq 1 \quad si \quad a > 0 \quad et \quad \frac{1}{r} + \frac{m}{N} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N}$$

Ce type des inégalités est lié au problème elliptique local suivant :

$$-\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 \tag{1}$$

Comme conséquence du Théorème 0.1, il résulte que $|x|^{-\gamma}$, avec $\gamma < \frac{N-p}{p}$, est un poids admissible dans le sens que si u est une super-solution faible de (1), alors elle satisfait l'inégalité faible de Harnack. Plus précisément, il existe une constante positive $\kappa > 1$ tel que pour tout $0 < q < \kappa(p-1)$,

$$\Big(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^q(x) |x|^{-p\gamma} dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_\rho(x_0)} u,$$

où $B_{2\rho}(x_0) \subset\subset \Omega$, et $C > 0$ dépend seulement de B.
Nous nous référons à [45], [52] qui donnent une discussion complète ainsi que la preuve de l'inégalité de Harnack. Notons que l'inégalité de Harnack classique reste vraie pour la solution positive de (1).
L'un des principaux outils pour obtenir les inégalités faibles de Harnack est l'inégalité de Sobolev avec poids qui peut être obtenue directement à partir du Théorème 0.1.
Un autre argument pour obtenir l'inégalité de Sobolev est de prouver l'inégalité de Hardy avec poids.
L'objectif principal de ce chapitre est de suivre cette approche afin d'obtenir la version non locale de l'inégalité Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Dans [50], les auteurs ont prouvé l'inégalité de Hardy-Sobolev classique :

Théorème 0.2. Soit $p > 1$, $s \in (0,1)$ telles que $sp < N$, alors $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$,

$$\int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \geq \Lambda_{N,p,s} \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}} dx \tag{2}$$

où la constante $\Lambda_{N,p,s}$ est donnée par

$$\Lambda_{N,p,s} = 2\int_0^\infty |1-\sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{-\gamma})\sigma^{N-\beta-1}K(\sigma)d\sigma \tag{3}$$

avec

$$\gamma = \frac{N-ps}{p} \quad \text{et} \quad K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+ps}}.$$

Dans le même papier, et en considérant

$$h_s(u) \equiv \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy - \Lambda_{N,p,s}\int_{I\!R^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}dx,$$

les auteurs montrent que pour $p \geq 2$, il existe une constante positive $C = C(p,N,s)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, si $v = |x|^{\frac{N-ps}{p}}u$, alors

$$h_s(u) \quad \geq \quad C\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{4}$$

L'inégalité précédente devient une égalité pour $p = 2$ avec $C = 1$.

Comme conséquence de (4), on obtient facilement que $\Lambda_{N,p,s}$ n'est jamais atteinte.

Pour $p = 2$, les auteurs dans [13] ont montré le résultat suivant :

Théorème 0.3. Soit $N \geq 1$, $0 < s < 1$ et $N > 2s$. Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, alors pour tout $1 < q < 2$, il existe une constante positive $C = C(\Omega,q,N,s)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} & a_{N,s}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,2,s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx \geq \\ & C(\Omega,q,N,s)\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Le résultat principal du Chapitre 2 est de généraliser le résultat du Théorème 0.3 au cas où $p \neq 2$. Suivant les valeurs de p ($p > 2$ ou bien $p < 2$), la preuve sera basée sur des arguments différents, en particulier sur des inégalités algébriques différentes. Une fois que l'inégalité de Hardy-Sobolev améliorée est prouvée, on arrive à démontrer l'inégalité de type Caffarelli-Kohn-Nirenberg fractionnaire. Notons que notre approche est basée sur le fait que le poids $|x|^{-\beta}$ n'est pas trop dégénéré, c.à.d. on aura besoin que de la condition $\beta > -ps$ qui est une condition optimale puisque pour $\beta \leq -ps$ on aura un problème pour définir l'espace de Sobolev lui-même.

Pour généraliser complètement les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg au rang β négatif, on aura besoin de changer "la structure de l'opérateur", puisqu'il sera nécessaire que le poids "accompagne" la fonction dans la norme.

0.1.3 Description du chapitre 3

Comme application directe des résultats du chapitre 2, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u &= f(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ dans } I\!R^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

où Ω est un domaine borné régulier contenant l'origine et f une fonction donnée.

On commence par le cas où f dépend seulement de x. Notre premier objectif sera d'obtenir l'existence d'une solution, dans un sens convenable, pour le problème (6) pour une grande classe de donné f.

Pour le cas de l'équation du $p-$laplacien classique, l'existence et l'unicité d'une solution entropique pour une donnée dans L^1. On renvoie le lecteur à [27] et [23] pour plus de détails.

Le cas d'une donnée mesure générale a été traité dans [38] où les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution renormalisée.

Le cas local avec un poids a été considéré dans [11], les auteurs ont démontré l'existence et l'unicité d'une solution au sens d'entropie pour une donnée dans L^1.

Pour l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$, les cas $p = 2$ et $\beta = 0$ a été analysé dans [58] et [55] où l'argument de dualité, dans le sens de Stampacchia, a été utilisé pour prouver l'existence de solution pour une donnée dans L^1. Dans un cadre plus général, un problème semi-linéaire a été examiné dans [17] , où l'existence et l'unicité de la solution renormalisée sont analysées.

Le cas $p \neq 2$ et $\beta = 0$ a été traité récemment dans [43] et [36] avec une donnée régulière et une structure variationnelle. Pour une donnée générale, et en se basant sur une certaine généralisation de la théorie du potentiel de Wolff, les auteurs ont pu obtenir l'existence d'une solution faible qui appartient à un espace de Sobolev fractionnaire approprié.

Dans ce chapitre, nous allons traiter le cas $p \neq 2$ et $\beta > 0$, l'argument utilisé dans [57] semble être compliqué pour être adapté à notre cas.

Notre approche est plus simple et elle est basée sur un choix approprié d'une famille de fonctions test et de certaines inégalités algébriques.

Dans la première partie, nous allons considérer le cas $f(x, s) = f(x)$. On prouve l'existence d'une solution faible qui est dans un espace de Sobolev fractionnaire approprié.

Il est clair que pour $\beta = 0$, on obtient le même résultat d'existence et de régularité donné dans [57], cependant, il semblerait que notre approche est plus simple et peut être adaptée à une grande classe d'opérateurs non locaux avec poids. Ensuite, dans le cas où la donnée $f \geq 0$, on prouve l'existence d'une solution au sens d'entropie.

Dans la section 3.2, nous traitons le cas $f(x, s) = \lambda s^q + f(x)$, alors, selon les valeurs de q et λ, nous sommes en mesure de montrer l'existence d'une solution d'entropie pour une grande classe de données f.

Pour une donnée positive, nous allons montrer que l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ satisfait à une inégalité locale de Harnack bien adaptée. Ce dernier résultat a été prouvé dans [42] pour $\beta = 0$

et dans [9] pour le cas $p = 2$ et $\beta > 0$. A ce niveau, en combinant les techniques des derniers articles, nous allons montrer le résultat pour le cas non linéaire $p \neq 2$ et $\beta > 0$. Comme application directe de l'étude précédente on considère le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}\, u &=& \lambda u^q + g(x), \quad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Suivant les valeurs de q et λ, on arrive à prouver l'existence d'une solution positive pour la classe la plus vaste possible de g.

Enfin dans la dernière section de ce chapitre on traite le cas du potentiel de Hardy. Plus précisément, on considère le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}\, u &=& \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} + u^q, \quad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Dans le cas local , le problème se réduit à :

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u &=& \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{p}} + u^q, \quad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Pour $p = 2$, les auteurs dans [30] ont montré que si $q > q_+(2)$, alors le problème (8) n'admet pas de sur-solution distributionnelle, cependant, si $q < q_+(2)$, il existe une sur-solution positive, avec $q_+(2) = 1 + \frac{2}{\theta_1}$, $\theta_1 = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,2} - \lambda}$ et $\Lambda_{N,2} = \frac{(N-2)^2}{4}$, la constante classique de Hardy

Le cas $p \neq 2$ a été considéré dans [6] où la même alternative reste vraie avec $q_+(p) = p - 1 + \frac{p}{\theta_p}$ où θ_p est une solution de l'équation algébrique

$$\Xi(s) = (p-1)s^p - (N-p)s^{p-1} + \lambda = 0.$$

Le cas fractionnaire avec $p = 2$ a été étudié dans [46] et [21]. les auteurs ont montré la même alternative avec $q_+(2, s) = 1 + \frac{2s}{\theta}$ où $\theta \equiv \theta(\lambda, s, N) > 0$.

Notre objectif est de généraliser le résultat de [46], [21] au cas $p \neq 2$.

0.1.4 Description du chapitre 4

Dans ce chapitre on considère la partie parabolique. Comme dans le cas elliptique, notre but est de généraliser les résultats obtenus pour les opérateurs locaux a notre cas non local. On commence par traiter le problème suivant

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta^s_p)u &=& f(x,t), u > 0 & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u &=& 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) &=& u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

où Ω est un domaine borné et f, u_0 sont des fonctions mesurables. En utilisant des techniques similaires au cas elliptiques on arrive à prouver que le problème (9) admet une solution distributionnelle pour f mesure de Radon et $u_0 \in L^1(\Omega)$. Dans le cas ou $f \in L^1(\Omega_T)$ avec $f \geq 0$, l'existence d'une solution entropique est prouvée. L'idée est d'utiliser des arguments d'approximation et de passer à la limite en utilisant les estimations a priori.

0.1.5 Description du chapitre 5

Comme conséquence de l'existence d'une solution entropique et par les résultats du chapitre 2, on étudie le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + (-\Delta_p^s)u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}}, u > 0 & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u & = & 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \tag{10}$$

où Ω est domaine borné contenant l'origine et $\lambda > 0$. Il est clair que le problème (10) est fortement lié à l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Pour $p = 2$ et $s = 1$ le problème (10) a été étudié dans [20]. Les auteurs démontrent l'existence et les résultats de non-existence en relation avec le fait que $\lambda \leq \Lambda_{N,2}$ ou $\lambda > \Lambda_{N,2}$, respectivement. Le cas nonlocal a été résolu dans [58], les auteurs ont pu obtenir la même alternative en utilisant le fait que l'opérateur parabolique nonlocal satisfait une inégalité de Harnack appropriée. Sous la présence d'un terme de réaction, les auteurs dans [8] ont prouvé l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda, s)$ ne dépendant que de λ tel que l'existence a lieu si et seulement si $q < q_+(\lambda)$.

Pour $p \neq 2$ et $s = 1$, le problème a été largement étudié dans la littérature. Dans [15], les auteurs prouvent l'existence d'une solution globale, si $p < \frac{2N}{N+2}$ pour tout $\lambda > 0$ et pour u_0 appropriée. Dans [40], les auteurs complètent l'étude précédente et montrent que si $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$, le problème a une solution au sens des distributions loin de l'origine.

Le cas $p \neq 2$ et $s < 1$ semble être nouveau. Notons que pour prouver l'existence d'une solution loin de l'origine on aura besoin de l'inégalité de CKN avec un poids trop dégénéré, ce qui conduit à l'utilisation des résultats de la dernière section du chapitre 2. L'Extinction en temps fini est aussi analysée.

Première partie

Préliminaires et Résultats principaux

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Sobolev

Quelques outils

Définition 1.1. (**Espace de Schwartz**) L'espace de Schwartz est l'espace des fonctions C^∞ déclinantes (c'est-à-dire des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, elles, ainsi que leurs dérivées de tous ordres) noté :

$$\mathscr{S}(I\!R^N) = \{\varphi \in C^\infty(I\!R^N) \text{ tel que } \|\varphi\|_{\mathscr{S}(I\!R^N)} < +\infty\}$$

où $\|.\|_{\mathscr{S}(I\!R^N)}$ est la semi-norme associée définie comme suit :

$$\|\varphi\|_{\mathscr{S}(I\!R^N)} = \sup_{x\in I\!R^N}(1+|x|^k)\sum_{|\alpha|\leq l}|D^\alpha\varphi(x)|, \qquad k,l \in \mathbb{N},$$

pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_N^{\alpha_N}$.

Définition 1.2. (**Transformé de Fourier**) soit $\varphi \in \mathscr{S}$, pour x, ξ dans $I\!R^N$ on définie la transformée de Fourier de φ noté $\widehat{\varphi}$ ou bien $\mathscr{F}(\varphi)$ par :

$$\mathscr{F}(\varphi(x))(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{I\!R^N}\varphi(x)e^{-ix.\xi}dx,$$

Si $\widehat{\varphi}$ est aussi dans $\mathscr{S}$, alors on a la formule d'inversion suivante :

$$\varphi(x) = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{\varphi}(\xi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{I\!R^N}\widehat{\varphi}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi,$$

Remarque 1.1. Dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}$ la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ dans lui même, donc par dualité on peut définir la transformée de Fourier des éléments de $\mathscr{S}'$ (espace dual de $\mathscr{S}$) ; c'est aussi l'espace des distributions tempérées. Une autre propriété importante est que pour $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathscr{S}(I\!\!R^N) \subset L^p(I\!\!R^N)$ et remarquons aussi que $C_0^\infty(I\!\!R^N)$ est un sous espace de $\mathscr{S}(I\!\!R^N)$.

Propriété 1.1.

- $D^\alpha \varphi = \mathscr{F}^{-1}(i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathscr{F}(\varphi))$
- $D^\alpha \widehat{\varphi} = i^{-|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha \varphi)$

Théorème 1.1 (Plancherel). Soit $\varphi \in L^1(I\!\!R^N) \cap L^2(I\!\!R^N)$,

$$\|\varphi\|_{L^2(I\!\!R^N)} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(I\!\!R^N)}$$

1.1.1 Espace de Sobolev classique $W^{m,p},\ m \in \mathbb{N}$

Définition 1.3. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(I\!\!R^N)$ est défini par

$$W^{m,p}(I\!\!R^N) \equiv \{u \in L^p(I\!\!R^N) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m,\ |D^\alpha u| \in L^p(I\!\!R^N)\}.$$

Il est clair que $W^{m,p}(I\!\!R^N)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(I\!\!R^N)} = \begin{cases} \Big(\|u\|^p_{L^p(I\!\!R^N)} + \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u\|^p_{L^p(I\!\!R^N)} \Big)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(I\!\!R^N)} & \text{si } p = +\infty, \end{cases}$$

Si $m = 1$ et $p = 2$, alors pour Ω un ouvert borné de $I\!\!R^N$, $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.4. Soit $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Lorsque $\Omega = I\!\!R^N$, on sait que $C_0^1(I\!\!R^N)$ est dense dans $W^{1,p}(I\!\!R^N)$, et par conséquent

$$W_0^{1,p}(I\!\!R^N) = W^{1,p}(I\!\!R^N).$$

Si Ω est borné alors en utilisant l'inégalité de Poincaré, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme équivalente :

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.2. Dans le cas $p = 2$ pour désigner l'espace de Sobolev, on utilise une notation spéciale :

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

1.1.2 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}, 0 < s < 1$

Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$ pour tout réel $s > 0$ et $p \in [1, \infty)$, on définit par la suite l'espace de Sobolev fractionnaire. Dans la littérature, les espaces de Sobolev de type fractionnaire sont appelés aussi espaces de *Aronszajn, Gagliardo* ou *Sloboedeckij.*
On commence par fixer un s dans $(0, 1)$, pour tout $p \in [1, +\infty)$ on définit $W^{s,p}$ comme suit :

$$W^{s,p}(\Omega) := \big\{ u \in L^p(\Omega) \;\; avec \;\; \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \big\} \tag{1.1}$$

avec la norme

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \; dy \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

le terme

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \Big(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \; dy \Big)^{\frac{1}{p}}$$

est appelé *Gagliardo* (semi) norme de u.
Nous renvoyons le lecteur à [44] et [62] pour plus de détails.

Dans la même direction, on peut définir l'espace $X_0^{s,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{s,p}(\Omega)$.
Notons que, si $Q = I\!R^N \times I\!R^N \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$, alors

$$||\phi||_{X_0^{s,p}(\Omega)} = \Big(\int\int_Q \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dxdy \Big)^{\frac{1}{p}} + ||\phi||_{L^p(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev fractionnaire on obtient $X_0^{s,p}(\Omega) \subset L^{p_s^*}(\Omega)$ avec inclusion continue, où $p_s^* = \frac{pN}{N-sp}$ pour $ps < N$.

Dans le cas où Ω est un domaine régulier borné, l'espace $X_0^{s,p}(\Omega)$ peut être engendré par la norme équivalente

$$|||\phi|||_{X_0^{s,p}(\Omega)} = \Big(\int\int_Q \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dxdy \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.2 (**Bourgain-Brezis-Mironescu**)**.** Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\lim_{s \to 1^-} (1 - s) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \; dy = C_1 \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

ou C_1 désigne une constante positive qui dépend de n et p.

un autre résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.3 (Maz'ya-Shaposhnikova). Pour tout $u \in \bigcup_{0<s<1} W^{s,p}(I\!R^N)$, on a

$$\lim_{s\to 0^+} s \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx\ dy = C_2 \int_{I\!R^N} |\nabla u|^p dx$$

ou c_1 désigne une constante positive qui dépend de n et p.

L'espace H^s et le laplacien fractionnaire

Dans le cas $p = 2$, les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,2}(\Omega)$ et $W_0^{s,2}(\Omega)$, deviennent des espaces de Hilbert, ils sont notés $H^s(\Omega)$ et $H_0^s(\Omega)$ respectivement. De plus, il sont liés à l'opérateur laplacien fractionnaire $(-\triangle)^s$ définie par le résultat suivant :

Proposition 1.1.

– *i)* $-\triangle^s u = \mathscr{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathscr{F}(u))$

– *ii)* $\exists\ C_{N,s} > 0$ tel que :

$$-\triangle^s u(x) = C_{N,s}\int_{I\!R^N} |\xi|^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = C_{N,s} P.V. \int_{I\!R^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy := I(u) \qquad (1.3)$$

À présent, on peut donner une définition alternative de l'espace $H^s(I\!R^N) = W^{s,2}(I\!R^N)$ via la transformée de Fourier ; donc on a la définition suivante :

$$\hat{H}^s(I\!R^N) := \left\{u \in L^2(I\!R^N)\ \ avec\ \ \int_{I\!R^N}(1+|\xi|^{2s})|\mathscr{F}u(\xi)|^2\ d\xi < +\infty\ \right\} \qquad (1.4)$$

et nous observons que la définition ci-dessus, est également valable pour tout réel $s \geq 1$. On peut aussi donner une autre définition analogue pour le cas $s < 0$ par :

$$\hat{H}^s(I\!R^N) := \left\{u \in \mathscr{S}'(I\!R^N)\ \ avec\ \ \int_{I\!R^N}(1+|\xi|^2)^s|\mathscr{F}u(\xi)|^2\ d\xi < +\infty\ \right\} \qquad (1.5)$$

1.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire avec poids $W^{s,p,\beta}$

Pour prouver l'inégalité de Caffarelli-Khon-Nirenberg d'ordre fractionnaire, on a besoin de définir l'espace de Sobolev fractionnaire avec poids.

Plus précisément, soit $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$ et $\Omega \subset I\!R^N$ avec $0 \in \Omega$, l'espace de Sobolev avec poids $X^{s,p,\beta}(\Omega)$ est défini par

$$X^{s,p,\beta}(\Omega) := \Big\{\phi \in L^p(\Omega, \frac{dx}{|x|^{2\beta}}) : \int_\Omega\int_\Omega \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} < +\infty\Big\}.$$

Ainsi l'espace $X^{s,p,\beta}(\Omega)$ est un espace de Banach engendré par la norme

$$\|\phi\|_{X^{s,p,\beta}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p dx}{|x|^{2\beta}}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.1. Maintenant on définit l'espace $X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

par rapport à la norme précédente.

Comme dans [14], voir aussi [44], on peut montrer le résultat d'extension suivant :

Lemme 1.1. Supposant que $\Omega \subset I\!R^N$ est un domaine régulier, alors pour tout $w \in X^{s,p,\beta}(\Omega)$, il existe $\tilde{w} \in X^{s,p,\beta}(I\!R^N)$ tel que $\tilde{w}_{|\Omega} = w$ et

$$||\tilde{w}||_{X^{s,p,\beta}(I\!R^N)} \leq C||w||_{X^{s,p,\beta}(\Omega)}$$

où $C \equiv C(N, s, p, \Omega) > 0$.

Remarque 1.2. Comme dans le cas $\beta = 0$, si Ω est un domaine borné régulier, on peut engendrer $X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ par la norme équivalente

$$|||\phi|||_{X_0^{s,p,\beta}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta |y|^\beta} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, pour $u \in X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$, on pose

$$L_{s,p,\beta}(u)(x) = \text{ P.V. } \int_{I\!R^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^\beta |y|^\beta}.$$

Il est clair que pour tout $u, v \in X^{s,p,\beta}(\Omega)$, on a

$$\langle L_{s,p,\beta}(u), v\rangle = \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta |y|^\beta}.$$

Dans le cas où $\beta = 0$, on note $L_{s,p,\beta}$ par $L_{s,p}$.

Remarque 1.3. Soit Ω un domaine borné tel que $0 \in \Omega$ et on définit

$$H_\Omega(v) = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy$$

où $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $w(x) = |x|^{-\beta}$ et $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$. En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du lemme précédent et par le lemme d'extension 1.1, on peut montrer que

$$H_\Omega(v) \geq C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy. \tag{1.6}$$

La notion de troncature est une notion très importante dans l'étude des EDP avec donnée dans L^1 ou bien une mesure. Cette notion est basée sur l'usage des fonctions $T_k(s)$ et $G_k(s)$, $k > 0$, définies par :

$$T_k(s) = \begin{cases} s\,, & \text{si}|s| \leq k\,; \\ k\frac{s}{|s|}\,, & \text{si } |s| > k\,; \end{cases}$$

La fonction définie précédemment est la suivante :

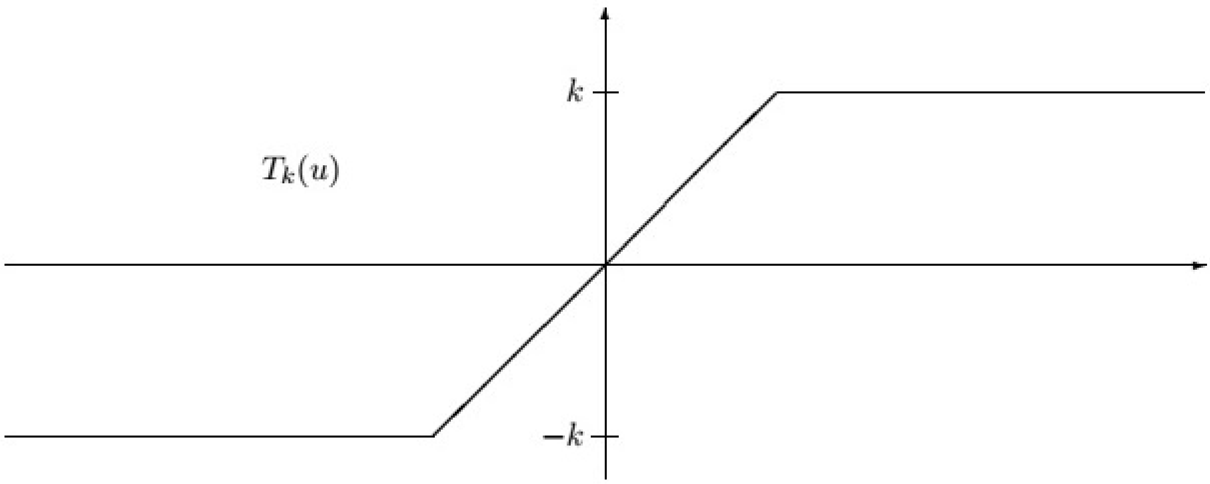


FIGURE 1.1 – La troncature

On définit aussi

$$G_k(s) = s - T_k(s)$$

Une autre fonction sera très utile par la suite à savoir :$\varphi_{k-1} = T_1(G_{k-1}(u))$

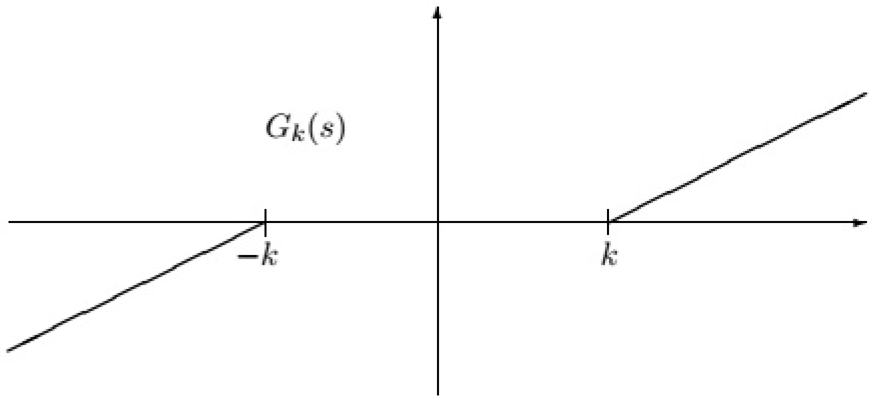


Figure 1.2 – La fonction $G_k(s)$

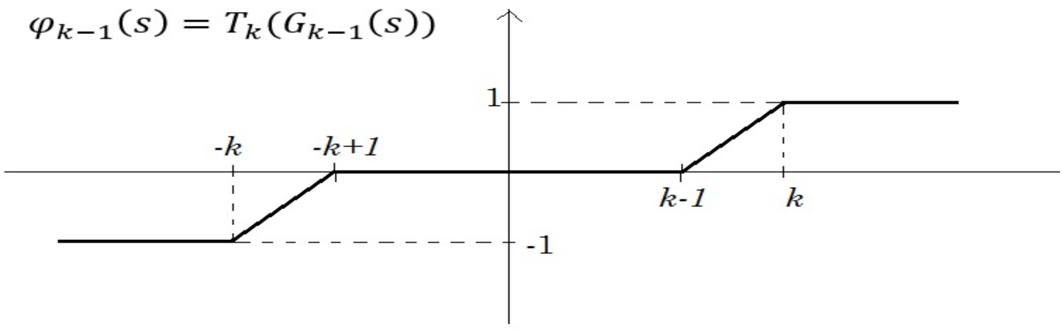


Figure 1.3 – La fonction $T_1(G_{k-1}(u))$

Dans la même direction, nous utiliserons l'espace de Marcinkiewicz avec poids :

Définition 1.5. Pour une fonction mesurable u on pose

$$\Phi_u(k) = \mu\{x \in \Omega : |u(x)| > k\},$$

où $d\mu = |x|^{-2\beta}dx$.
on dit que u est dans l'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega, d\mu)$ si $\Phi_u(k) \leq Ck^{-q}$. Puisque Ω est

un domaine borné, alors

$$L^q(\Omega, d\mu) \subset \mathcal{M}^q(\Omega, d\mu) \subset L^{q-\varepsilon}(\Omega, d\mu)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$.

Définition 1.6. Soit u une fonction mesurable, on dit que $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{\beta,0}(\Omega)$ si pour tout $k > 0$, $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Définition 1.7. (Equi-Intégrabilité dans L^p) Soit X un ensemble mesurable de $I\!R^N$ et $1 \leq p < \infty$. On dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ est equi-intégrable **ssi :** pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $E \subset X$ avec $|E| < \delta$, on a

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

On présente ici le Lemme suivant qui sera très utile pour montrer les résultats d'existence.

Théorème 1.4. (Théorème de Vitali) Soit X un ensemble de mesure fini pour la mesure de Lebesgue de $I\!R^N$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-partout vers f dans X.
2. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est equi-intégrable.

Alors, $\{f_n\}_n$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

1.2 Quelques inégalités algébriques pratiques

Le lemme suivant est prouvé dans [60].

Lemme 1.2. Soient ξ_1, $\xi_2 \in I\!R^N$, on a

1) Si $p \leq 2$,

$$|\xi_1 + \xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2\rangle \leq C(p)|\xi_2|^p, \tag{1.7}$$

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq C(p)\frac{|\xi_2 - \xi_1|^2}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}}. \tag{1.8}$$

2) Si $p > 2$,

$$|\xi_1 + \xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2\rangle \leq \frac{p(p-1)}{2}(|\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2}|\xi_2|^2, \tag{1.9}$$

$$|\xi_2|^p - |\xi_1|^p - p|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle \geq \frac{C(p)}{2^p - 1}|\xi_2 - \xi_1|^p. \tag{1.10}$$

Les inégalités algébriques suivantes peuvent être démontrées en utilisant un argument de renormalisation approprié.

Lemme 1.3. Supposons que $p \geq 1$, $(a,b) \in I\!R^+$ et $\alpha, c, c_1, c_2 > 0$, alors

$$(a+b)^\alpha \leq c_1 a^\alpha + c_2 b^\alpha \tag{1.11}$$

et

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(a^\alpha - b^\alpha) \geq c|a^{\frac{p+\alpha-1}{p}} - b^{\frac{p+\alpha-1}{p}}|^p. \tag{1.12}$$

Dans le cas où $\alpha \geq 1$, alors sous les mêmes conditions sur a, b, p , on a

$$|a+b|^{\alpha-1}|a-b|^p \leq c|a^{\frac{p+\alpha-1}{p}} - b^{\frac{p+\alpha-1}{p}}|^p, \tag{1.13}$$

où $c > 0$ est indépendante de a et b.

Puisque, nous avons considéré les solutions avec une donnée dans L^1, en prenant en considération la définition de troncature, il est facile de montrer l'inégalité algébrique suivante :

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(T_k(a) - T_k(b)) \geq |T_k(a) - T_k(b)|^p \tag{1.14}$$

et

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(G_k(a) - G_k(b)) \geq |G_k(a) - G_k(b)|^p, \tag{1.15}$$

où $a, b \in I\!R$ et $p \geq 1$.

Dans la suite, nous allons utiliser l'inégalités au-dessous prouvées dans [50].

Lemme 1.4. Supposons que $p > 1$, alors pour tout $0 \leq t \leq 1$ et $a \in \mathbb{C}$, on a

$$|a-t|^p \geq (1-t)^{p-1}(|a|^p - t). \tag{1.16}$$

Maintenant, nous avons l'inégalité algébrique suivante.

Lemme 1.5. Supposons que $1 \leq p \leq 2$, alors pour tous $0 \leq t \leq 1$ et $a \in \mathbb{R}$,on a

$$|a-t|^p - (1-t)^{p-1}(|a|^p - t) \geq C_p \frac{|a-1|^2 t}{(|a-t| + |1-t|)^{2-p}} \tag{1.17}$$

avec C_p une constante positive.

Démonstration. L'inégalité précédente est vraie pour $t = 0$ et $t = 1$. Dans la même direction on peut montrer que (1.17) est vraie si $a = t$. Ensuite, on peut assumer que $0 < t < 1$ et $a \in \mathbb{R}\backslash\{t\}$.

On définit $\alpha = \frac{a-t}{1-t}$, on peut écrire (1.17) sous la forme équivalente :

$$\frac{1}{t}\left\{|\alpha|^p - \frac{|\alpha(1-t)+t|^p - t}{1-t}\right\} \geq C_p \frac{(\alpha-1)^2}{(|\alpha|+1)^{2-p}} \tag{1.18}$$

on divise la démonstration en deux cas :

Premier cas : $\alpha > 0$. Notons que si (1.18) est vraie pour $\alpha > 1$ et pour tout $t \in (0,1)$, alors (1.18) est aussi vraie, en particulier pour $z = 1-t$. Ainsi

$$\frac{1}{1-z}\left\{|\alpha|^p - \frac{|\alpha z + (1-z)|^p - (1-z)}{z}\right\} \geq C_p \frac{(\alpha-1)^2}{(|\alpha|+1)^{2-p}}. \tag{1.19}$$

Maintenant, Soit $\xi \in (0,1)$ et on définit $\alpha = \frac{1}{\xi}$, alors $\alpha > 1$. Soustrayons α dans (1.19) on obtient

$$\frac{1}{z}\left\{|\xi|^p - \frac{|\xi(1-z) + z|^p - z}{1-z}\right\} \geq C_p \frac{(\xi-1)^2}{(|\xi|+1)^{2-p}}.$$

Ainsi, il suffit dans ce cas de montrer (1.18) pour $\alpha \geq 1$. Pour ceci, on définit

$$h_\alpha(t) = \frac{|\alpha(1-t)+t|^p - t}{1-t}.$$

Par un calcul direct, on obtient

$$h'_\alpha(t) = \frac{p(1-\alpha)|\alpha(1-t)+t|^{p-2}(\alpha(1-t)+t) - 1}{1-t} + \frac{h_\alpha(t)}{1-t}$$

et

$$h''_\alpha(t) = \tfrac{1}{(1-t)^3}\Big\{|\alpha(1-t)+t|^{p-2}\Big(2(\alpha(1-t)+t)^2 - 2p(\alpha-1)(1-t)(\alpha(1-t)+t)$$
$$+p(p-1)(\alpha-1)^2(1-t)^2\Big) - 2\Big\}$$

En utilisant le fait que $\alpha(1-t)+t = (\alpha-1)(1-t)+1$, on aura

$$h''_\alpha(t) = \tfrac{1}{(1-t)^3} \times$$
$$\Big\{|\alpha(1-t)+t|^{p-2}\Big(-(2-p)(p-1)(\alpha-1)^2(1-t)^2 + 2(2-p)(\alpha-1)(1-t) + 2\Big) - 2\Big\}$$

Puisque $\alpha(1-t)+t \geq 1$, on affirme que $h''_\alpha(t) \leq 0$. En effet, en posant $\rho = (\alpha-1)(1-t)$, on aura

$$h''_\alpha(t) = \frac{1}{(1-t)^3}\,T(\rho) = \frac{1}{(1-t)^3}\,(\rho+1)^{p-2}\Big(2 + 2(2-p)\rho - (2-p)(p-1)\rho^2\Big) - 2.$$

Par un calcul direct on aboutit à $T'(\rho) = -p(p-1)(2-p)\,\frac{(\rho+1)^{p-3}}{(1-t)^3} \leq 0$ puisque $1 < p < 2$. Par conséquent $T(\rho) \leq T(0) = 0$ et l'affirmation s'en suit.

Maintenant, en utilisant la formule de Taylor-Maclaurin

$$h_\alpha(t) - h_\alpha(0) = t h'_\alpha(0) + \int_0^t (t-s) h''_\alpha(s)\,ds,$$

et observons que $h_\alpha(0) = |\alpha|^p$ et $h'_\alpha(0) = -(p-1)|\alpha|^p + p|\alpha|^{p-2}\alpha - 1$, on a

$$\begin{aligned} |\alpha|^p - \frac{|\alpha(1-t)+t|^p - t}{1-t} &= h_\alpha(0) - h_\alpha(t) \\ &= t((p-1)|\alpha|^p - p|\alpha|^{p-2}\alpha + 1) + \int_0^t (s-t)h''_\alpha(s)ds, \\ &\geq t((p-1)|\alpha|^p - p|\alpha|^{p-2}\alpha + 1) \end{aligned}$$

puisque $h''_\alpha \leq 0$ par l'affirmation précédente. Par conséquent, nous concluons que

$$\frac{1}{t}\left\{|\alpha|^p - \frac{|\alpha(1-t)+t|^p - t}{1-t}\right\} \geq ((p-1)|\alpha|^p - p|\alpha|^{p-2}\alpha + 1).$$

Il est clair que

$$((p-1)|\alpha|^p - p|\alpha|^{p-2}\alpha + 1)(|\alpha|+1)^{2-p} \geq C_p(\alpha-1)^2$$

D'où le résultat dans ce cas.

Le deuxième cas : $\alpha < 0$. Posons $\tilde\alpha = -\alpha$, alors nous devons prouver que

$$\frac{1}{t}\left\{|\tilde\alpha|^p - \frac{|\tilde\alpha(1-t)-t|^p - t}{1-t}\right\} \geq C_p\frac{(\tilde\alpha+1)^2}{(|\tilde\alpha|+1)^{2-p}} = (1+\tilde\alpha)^p \qquad \forall\, \tilde\alpha > 0,\ t \in (0,1). \tag{1.20}$$

Il est clair que

$$\frac{1}{t}\left\{|\tilde\alpha|^p - \frac{|\tilde\alpha(1-t)-t|^p - t}{1-t}\right\} =$$
$$\frac{1}{t}\left\{|\tilde\alpha|^p - \frac{|\tilde\alpha(1-t)+t|^p - t}{1-t}\right\} + \frac{1}{t}\left\{\frac{|\tilde\alpha(1-t)+t|^p}{1-t} - \frac{|\tilde\alpha(1-t)-t|^p}{1-t}\right\}$$

on pose

$$R_1(\tilde\alpha,t) = \frac{1}{t}\left\{|\tilde\alpha|^p - \frac{|\tilde\alpha(1-t)+t|^p - t}{1-t}\right\}$$

et

$$R_2(\tilde\alpha,t) = \frac{1}{t}\left\{\frac{|\tilde\alpha(1-t)+t|^p}{1-t} - \frac{|\tilde\alpha(1-t)-t|^p}{1-t}\right\}$$

Puisque $\tilde\alpha > 0$, alors $R_2(\tilde\alpha,t) \geq 0$. Maintenant, en utilisant la première étape nous atteignons

$$R_1(\tilde\alpha,t)(|\tilde\alpha|+1)^{2-p} \geq C(p)(\tilde\alpha-1)^2.$$

Il est clair que, indépendamment des valeurs de R_2 et $t \in (0,1)$,

$$(\tilde\alpha-1)^2 \geq \bar C(\tilde\alpha+1)^2 \text{ for all } \tilde\alpha \in I\!R^+ \setminus (\frac{2}{3},\frac{3}{2}).$$

Par conséquent, nous allons considérer le cas $\tilde\alpha \in [\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$. Pour obtenir le résultat désiré, il suffit de montrer que

$$R_2(\tilde\alpha,t) \geq C_2 > 0 \text{ pour tout } (\tilde\alpha,t) \in [\frac{2}{3},\frac{3}{2}] \times (0,1). \tag{1.21}$$

Par un calcul direct, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} R_2(\tilde{\alpha}, t) = \frac{p}{t}\Big(|\tilde{\alpha}(1-t)+t|^{p-1} - |\tilde{\alpha}(1-t)-t|^{p-2}(\tilde{\alpha}(1-t)-t) \Big)$$

Cette quantité est clairement positive, R_2 est croissante dans $\tilde{\alpha}$ et on obtient que pour tout $(\tilde{\alpha}, t) \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{2}] \times (0,1)$,

$$R_2(\tilde{\alpha}, t) \geq R_2(\frac{2}{3}, t) = \frac{(\frac{2}{3})^p}{t(1-t)}\Big(|1+\frac{1}{2}t|^p - |1-\frac{5}{2}t|^p \Big) \geq C_p.$$

En effet, nous utilisons la formule (1.8) avec $a = 1 + \frac{1}{2}t$ et $b = |1 - \frac{5}{2}t|$. Pour $t < \frac{2}{5}$, la formule (1.8) donne

$$|1+\frac{1}{2}t|^p - |1-\frac{5}{2}t|^p \geq c\frac{9t^2}{(|1+\frac{1}{2}t| + |1-\frac{5}{2}t|)^{2-p}} + 3pt|1-\frac{5}{2}t|^{p-1}$$

et pour $t > \frac{2}{5}$, par la formule (1.8), il résulte que

$$|1+\frac{1}{2}t|^p - |1-\frac{5}{2}t|^p \geq c\frac{4(1-t)^2}{(|1+\frac{1}{2}t| + |1-\frac{5}{2}t|)^{2-p}} + 2p(1-t)|1-\frac{5}{2}t|^{p-1}.$$

Il est clair que dans les deux cas, nous avons

$$\frac{1}{t(1-t)}\Big(|1+\frac{1}{2}t|^p - |1-\frac{5}{2}t|^p \Big) \geq C_p.$$

Cela prouve (1.21). Ainsi (1.20) suit, puis nous concluons. □

Avant de terminer cette section, nous donnerons l'inégalité algébrique suivante qui peut être vu comme une extension de la formule «d'intégration par partie lors de l'utilisation d'un produit comme fonction de test dans le cas local.

Lemme 1.6. Il existe deux constantes positives $C_1 < 1 < C_2$ telles que pour toutes $a_1, a_2 \in I\!R$ et pour toutes $b_1, b_2 \geq 0$, on a

$$|a_1 - a_2|^{p-2}(a_1 - a_2)(a_1 b_1 - a_2 b_2) \geq C_1 |a_1 b_1^{\frac{1}{p}} - a_2 b_2^{\frac{1}{p}}|^p - C_2 (\max\{|a_1|, |a_2|\})^p |b_1^{\frac{1}{p}} - b_2^{\frac{1}{p}}|^p. \quad (1.22)$$

Démonstration. Si $(b_1, b_2) = (0,0)$ ou $(a_1, a_2) = (0,0)$, alors (1.22) est vraie.

Si $a_1 = a_2$, alors (1.22) reste aussi vraie pour $C_1 \leq C_2$.

Supposons que $(b_1, b_2) \neq (0,0)$, $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ et $a_1 \neq a_2$.

On divise la preuve en plusieurs cas.

I-Le premier cas : $a_1 > a_2 \geq 0$**.** on pose $\delta = \dfrac{a_2}{a_1} \in [0,1)$, alors dans ce cas, (1.22) est équivalent à

$$(1-\delta)^{p-1}(b_1 - \delta b_2) \geq C_1 |b_1^{\frac{1}{p}} - \delta b_2^{\frac{1}{p}}|^p - C_2 |b_1^{\frac{1}{p}} - b_2^{\frac{1}{p}}|^p. \quad (1.23)$$

Si $b_1 = b_2$, alors (1.23) prend la forme

$$(1-\delta)^p \geq C_1(1-\delta)^p$$

qui est vraie pour $C_1 \leq 1$. Ainsi, nous supposons que $b_1 \neq b_2$.

1. ***Sous-cas 1 :*** $b_1 > b_2 \geq 0$**.**
   on pose $\theta = (\frac{b_2}{b_1})^{\frac{1}{p}} \in [0,1)$, alors (1.23) prend la forme

   $$(1-\delta)^{p-1}(1-\delta\theta^p) \geq C_1(1-\delta\theta)^p - C_2(1-\theta)^p. \tag{1.24}$$

   nous avons
   $$1-\delta\theta = (1-\theta) + \theta(1-\delta).$$

   Ainsi

   $$\begin{aligned}(1-\delta\theta)^p &= ((1-\theta)+\theta(1-\delta))^p \\ &\leq (1+\varepsilon)^{p-1}\theta^p(1-\delta)^p + (1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-1}(1-\theta)^p\end{aligned}$$

   où $\varepsilon > 0$ est une constante positive quelconque. Maintenant, en utilisant le fait que $(1-\delta)\theta^p < 1-\delta\theta^p$, on obtient que $\theta^p(1-\delta)^p \leq (1-\delta)^{p-1}(1-\delta\theta^p)$. Par conséquent, nous concluons que

   $$C_1(1-\delta\theta)^p \leq C_1(1+\varepsilon)^{p-1}(1-\delta)^{p-1}(1-\delta\theta^p) + C_1(1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-1}(1-\theta)^p.$$

   Il est clair que nous pouvons choisir $C_1 < 1$ dépendant uniquement ε tel que $C_1(1+\varepsilon)^{p-1} = 1$, Ainsi

   $$C_1(1-\delta\theta)^p \leq (1-\delta)^{p-1}(1-\delta\theta^p) + C_2(1-\theta)^p$$

   où $C_2 = \max\{1, C_1(1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-1}\}$ et alors (1.24) tient dans ce cas.

2. ***Sous-cas 2 :*** $b_2 > b_1 \geq 0$**.**
   Dans ce cas, on pose $\theta = (\frac{b_1}{b_2})^{\frac{1}{p}} \in [0,1)$, ainsi (1.23) prend la forme

   $$(1-\delta)^{p-1}(\theta^p - \delta) \geq C_1|\theta-\delta|^p - C_2(1-\theta)^p. \tag{1.25}$$

   On divise la preuve de (1.25) dans deux cas :

(a) **Cas i : $\theta^p > \delta$.** Il est clair que $\delta < \theta^p < \theta$, ensuite nous avons

$$\begin{aligned}(\theta-\delta)^p &= ((\theta-\theta^p)+(\theta^p-\delta))^p \\ &\leq (1+\varepsilon)^{p-1}(\theta^p-\delta)^p+(1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-1}(\theta-\theta^p)^p \\ &\leq (1+\varepsilon)^{p-1}(\theta^p-\delta)^{p-1}(\theta^p-\delta)+(1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-1}\theta^p(1-\theta^{p-1})^p.\end{aligned}$$

Puisque $1-\theta^{p-1} \leq 1-\theta$ et $\theta^p-\delta \leq 1-\delta$, puis en utilisant la même hypothèse sur C_1, ε et C_2 comme dans le cas précédent, il en résulte que

$$C_1(\theta-\delta)^p \leq (1-\delta)^{p-1}(\theta^p-\delta)+C_2(1-\theta)^p$$

puis (1.25) suit.

(b) **Cas ii : $\theta^p \leq \delta$.** Ce cas est plus délicate et on a besoin d'une certaine analyse fine. Il est clair que, dans ce cas, nous devons montrer que

$$C_2(1-\theta)^p \geq C_1|\theta-\delta|^p+(1-\delta)^{p-1}(\delta-\theta^p). \tag{1.26}$$

On commencera par supposer que $\theta < \delta$, puis nous avons trivialement $C_1|\theta-\delta|^p \leq (1-\theta)^p$. Par conséquent, nous devons juste montrer que

$$(1-\delta)^{p-1}(\delta-\theta^p) \leq C_2(1-\theta)^p.$$

Pour $\rho \in (0,\delta)$, on définit la fonction h par

$$h(\rho) = (1-\rho)^p+(1-\delta)^{p-1}\rho^p.$$

Il est clair que $h'(\rho) = p\Big(\rho^{p-1}(1-\delta)^{p-1}-(1-\rho)^{p-1}\Big) \leq 0$. Puisque $\theta \leq \delta$, Nous concluons que $h(\theta) \geq h(\delta)$ puis nous concluons que

$$(1-\theta)^p+(1-\delta)^{p-1}\theta^p \geq (1-\delta)^p+(1-\delta)^{p-1}\delta^p.$$

Ainsi

$$(1-\theta)^p \geq (1-\delta)^{p-1}(1-\delta-\theta^p+\delta^p).$$

Puisque $p < 2$, alors il est pas difficile de montrer que $1-\delta+\delta^p \geq \delta$, par conséquent, nous atteignons que

$$(1-\theta)^p \geq (1-\delta)^{p-1}(\delta-\theta^p)$$

et le résultat suit.

Supposons maintenant que $\delta \leq \theta \leq \delta^{\frac{1}{p}}$. Comme ci-dessus pour $\rho \in (0,\theta)$, nous définissons la fonction h_1 par

$$h_1(\rho) = (1-\rho)^{p-1}(\rho - \theta^p),$$

alors

$$\begin{aligned} h'(\rho) &= (1-\rho)^{p-2}\Big(1 - p\rho + (p-1)\theta^p\Big) \\ &\geq (1-\rho)^{p-2}\Big(1 - p\rho + (p-1)\rho^p\Big). \end{aligned}$$

Puisque $p < 2$, alors $(1 - p\rho + (p-1)\rho^p) \geq 0$, ainsi $h_1' \geq 0$ et ensuite $h_1(\delta) \leq h_1(\theta)$. Par conséquent

$$(1-\delta)^{p-1}(\delta - \theta^p) \leq (1-\theta)^{p-1}(\theta - \theta^p) \leq (1-\theta)^p,$$

où la dernière inégalité suit en utilisant le fait que $2\theta \leq 1 + \theta^p$.

II-Le deuxième cas : $a_2 > a_1 \geq 0$. Il est clair que

$$|a_1 - a_2|^{p-2}(a_1 - a_2)(a_1 b_1 - a_2 b_2) = |a_2 - a_1|^{p-2}(a_2 - a_1)(a_2 b_2 - a_1 b_1),$$

ainsi appliquant le premier cas, il en résulte que

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2|^{p-2}(a_1 - a_2)(a_1 b_1 - a_2 b_2) &\geq C_1 |a_2 b_2^{\frac{1}{p}} - a_1 b_1^{\frac{1}{p}}|^p - C_2(\max\{|a_2|, |a_1|\})^p |b_2^{\frac{1}{p}} - b_1^{\frac{1}{p}}|^p \\ &\geq C_1 |a_1 b_1^{\frac{1}{p}} - a_2 b_2^{\frac{1}{p}}|^p - C_2(\max\{|a_1|, |a_2|\})^p |b_1^{\frac{1}{p}} - b_2^{\frac{1}{p}}|^p. \end{aligned}$$

puis nous concluons.

III-Le troisième cas : $a_1, a_2 \leq 0$. on pose $\tilde{a}_1 = -a_1$ et $\tilde{a}_2 = -a_2$, alors $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \geq 0$ et

$$|a_1 - a_2|^{p-2}(a_1 - a_2)(a_1 b_1 - a_2 b_2) = |\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2|^{p-2}(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)(\tilde{a}_1 b_1 - \tilde{a}_2 b_2),$$

alors le résultat suit en utilisant les cas précédents.

IV-Le quatrième cas : $a_1 < 0 < a_2$ ou $a_2 < 0 < a_1$. Supposons que $a_2 < 0 < a_1$ et définissant $\tilde{a}_2 = -a_2$, on aura

$$|a_1 - a_2|^{p-2}(a_1 - a_2)(a_1 b_1 - a_2 b_2) = (a_1 + \tilde{a}_2)^{p-1}(a_1 b_1 + \tilde{a}_2 b_2).$$

Comme dans le cas précédent, et sans perte de généralité nous pouvons supposer que $a_1 \geq \tilde{a}_2$ et $b_1 \geq b_2$. Posons $\delta = \frac{\tilde{a}_2}{a_1}, \theta = (\frac{b_2}{b_1})^{\frac{1}{p}} \in [0, 1)$ alors (1.22) est équivalente à

$$(1+\delta)^{p-1}(1 + \delta\theta^p) \geq C_1(1 + \delta\theta)^p - C_2(1-\theta)^p. \tag{1.27}$$

on a

$$\begin{aligned}
C_1(1+\delta\theta)^p &\leq C_1(1+\delta\theta^p-\delta\theta^p+\delta\theta)^p \\
&\leq C_1(1+\varepsilon)^{p-1}(1+\delta\theta^p)^p+C_1(1+\frac{1}{\varepsilon})^{p-1}\delta^p\theta^p(1-\theta^{p-1})^p \\
&\leq (1+\delta)^{p-1}(1+\delta\theta^p)+C_2(1-\theta)^p
\end{aligned}$$

où, comme dans les cas précédents, nous avons utilisé le fait que $C_1(1+\varepsilon)^{p-1}=1\leq C_2$. D'où le résultat suit. $\square$

Chapitre 2

Les inégalités de type Caffarelli-Kohn-Nirenberg d'ordre fractionnaire

Ce chapitre est le développement des articles [4],[7].

2.1 Introduction.

Comme on l'a décrit précédemment, le but de ce chapitre est de généraliser le résultat du Théorème 0.3 obtenu dans [13] au cas $p \neq 2$. Pour des raisons techniques, on va considérer deux cas séparés, $p \in (1, 2)$ (Théorème 2.7) et $p > 2$ (Théorème 2.3). D'autres résultats et applications qui sont en relation avec le problème principales seront aussi démontrés.
Le chapitre est organisé de la manière suivante.

Dans la section 2.2 on donnera la preuve de la version générale de l'inégalité de Picone, et comme conséquence, on aura la version de l'inégalité de Hardy avec poids pour une classe de poids "admissibles" dans $I\!R^N$, ainsi que dans un domaine borné.

Ensuite, dans la section 2.3 on présente les résultats principaux du chapitre avec leurs démonstrations.

La première partie de cette section a été consacré pour le cas $p \geq 2$. En tenant compte de l'inégalité de Hardy "avec poids", nous obtenons la preuve du Théorème 2.3.
Une fois le Théorème 2.3 prouvé, nous complétons la preuve de l'inégalité de type "Caffarelli-Khon-Nirenberg" d'ordre fractionnaire dans un domaine borné (Théorème 2.4), par l'utilisation convenable de l'inégalité de Sobolev. Une extension a l'espace tout entier $I\!R^N$ est prouvé dans le Théorème 2.5.

Dans la deuxième partie on considère le cas $p < 2$. Nous commençons par prouver le Lemme

2.5 qui peut être vu comme une représentation de l'état fondamental . En conséquence, nous obtenons la preuve de Théorèmes 2.7 et 2.8.

Enfin, dans la dernière section on considère le cas $\beta < 0$. Si $\beta \in (-ps, 0]$, on arrive a prouver une inégalité de type Hardy-Sobolev et par conséquence tout les résultats prouvés auparavant sont valable. Par contre si $\beta < -ps$, dans ce cas l'espace $W^{s,p}_{\beta}(\Omega)$ n'est pas bien défini. Notons que dans le cas local, $|x|^{-\beta}$ est un poids admissible pour tout $\beta \in (-\infty, \frac{N-p}{p})$. Pour résoudre cette difficulté on va définir un espace de Sobolev avec poids $E_{\alpha}(I\!R^N)$ ou la position de poids, cette fois, nous permet de bien généraliser l'inégalité de Caffaralli-Khon-Nirenberg pour le rang négative. Enfin nous prouverons, sous certaine relation entre α et β, que $E_{\alpha}(I\!R^N) = W^{s,p}_{\beta}(I\!R^N)$ si $\beta > -ps$.

2.2 Résultats préliminaires

Rappelons que pour $u \in X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$, on a

$$L_{s,p,\beta}(u)(x) = \text{ P.V. } \int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}}.$$

Commençons par démontrer la version suivante de l'inégalité de Picone.

Lemme 2.1. (Inégalité de Picone) Soit $w \in X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$, tel que $w > 0$ dans Ω. Supposons que $L_{s,p,\beta}(w) = \nu$ avec $\nu \in L^1_{loc}(I\!R^N)$ et $\nu \gneqq 0$, alors pour tout $u \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2}\int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}} \geq \langle L_{s,p,\beta} w, \frac{|u|^p}{w^{p-1}} \rangle.$$

où $Q = I\!R^N \times I\!R^N \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$.

Démonstration. le cas $p = 2$ et $\beta = 0$ a été obtenu dans [58] et [22] pour $p \neq 2$. Pour la commodité du lecteur, nous incluons quelques détails pour le cas $\beta \neq 0$.

On pose $v(x) = \dfrac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}}$ et $k(x,y) = \dfrac{1}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}$, alors

$$\begin{aligned}\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x) \rangle &= \int_{\Omega} v(x) \int_{I\!R^N} |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}} \int_{I\!R^N} |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Puisque k est symétrique, on obtient que

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x) \rangle =$$

$$\frac{1}{2}\int\int_Q \left(\frac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}} - \frac{|u(y)|^p}{|w(y)|^{p-1}}\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.$$

Soit $v_1 = \dfrac{u}{w}$, alors

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\int\int_Q \left(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.$$

On définit

$$\Phi(x,y) = |u(x)-u(y)|^p - \left(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y)),$$

alors

$$\begin{aligned}\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle &+ \frac{1}{2}\int_Q \Phi(x,y)k(x,y)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int\int_Q |u(x)-u(y)|^p k(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Nous affirmons que $\Phi \geq 0$. Il est clair que, par l'argument de symétrie, nous pouvons supposer que $w(x) \geq w(y)$. Soit $t = w(y)/w(x), a = u(x)/u(y)$, puis en utilisant l'inégalité (1.16), il en résulte que $\Phi(x,y) \geq 0$. Ainsi, on obtiendra l'inégalité de Picone. $\square$

Le principe de comparaison suivant peut être considéré comme étant une extension du principe classique obtenu par Brezis et Kamin dans [31], voir [4] pour la preuve.

Lemme 2.2. Soit Ω un domaine borné et soit h une fonction continue non négative telle que $h(x,\sigma) > 0$ si $\sigma > 0$, et $\dfrac{h(x,\sigma)}{\sigma^{p-1}}$ est décroissante. Soit $u, v \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ telles que $u, v > 0$ dans Ω et

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u & \geq & h(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ \\ (-\Delta)^s_{p,\beta} v & \leq & h(x,v) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors, $u \geq v$ dans Ω.

Démonstration. En utilisant un argument d'approximation, en prenant en considération que $u, v > 0$, nous pouvons prouver que

$$\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} v}{v^{p-1}} \geq \Big(\frac{h(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{h(x,v)}{v^{p-1}}\Big). \tag{2.1}$$

on pose $\rho = (v^p - u^p)_+$, alors

$$\int_\Omega \Big(\frac{h(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{h(x,v)}{v^{p-1}}\Big)\rho\,dx \leq \int_\Omega \rho\Big(\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta} v}{v^{p-1}}\Big)\,dx. \tag{2.2}$$

Analysons chaque terme dans l'inégalité précédente.

En utilisant la définition de ρ nous obtenons $\Big(\dfrac{h(x,u)}{u^{p-1}} - \dfrac{h(x,v)}{v^{p-1}}\Big)\rho \geq 0$. D'autre part, nous avons

$$
\begin{aligned}
J &\equiv \int_\Omega \rho\Big(\frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}u}{u^{p-1}} - \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}v}{v^{p-1}}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{\rho(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{u^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} \\
&- \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{\rho(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{v^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta},
\end{aligned}
$$

où $D_\Omega = I\!R^N \times I\!R^N \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$.

Notons que

$$
\begin{aligned}
&|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\Big(\frac{\rho(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{u^{p-1}(y)}\Big) = \\
&|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\Big(\frac{v^p(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{v^p(y)}{u^{p-1}(y)}\Big) - |u(x)-u(y)|^p.
\end{aligned}
$$

De la même manière, on obtient que

$$
\begin{aligned}
&|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\Big(\frac{\rho(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{\rho(y)}{v^{p-1}(y)}\Big) = \\
&-|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\Big(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\Big) \\
&+|v(x)-v(y)|^p.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{v^p(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{v^p(y)}{u^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} \\
&+ \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\Big)\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} \\
&- \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} - \frac{1}{2}\int\int_{Q} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} \\
&= \int_\Omega \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}(u)}{u^{p-1}}v^p dx + \int_\Omega \frac{(-\Delta)^s_{p,\beta}(v)}{v^{p-1}}u^p dx \\
&- \tfrac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} - \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Picone, nous concluons que $J \leq 0$. Ainsi

$$\Big(\frac{h(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{h(x,v)}{v^{p-1}}\Big)\rho \equiv 0$$

puis $\rho = 0$, ce qui implique que $u \leq v$ dans Ω. □

Remarque 2.1. Le résultat de la comparaison est vrai si on suppose que h est continue en s pour p.p. $x \in \Omega$, $\dfrac{h(s,x)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$ et $h(s,x) > 0$ dans Ω pour tous $s > 0$ fixé.

Par la suite, on aura besoin du résultat suivant :

Lemme 2.3. Fixons $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$ et soit $w(x) = |x|^{-\gamma}$ avec $\gamma < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$, alors il existe une constante positive $\Gamma(\gamma) > 0$ telle que

$$L_{s,p,\beta}(w) = \Gamma(\gamma)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \quad p.p \text{ dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{2.3}$$

Démonstration. -
On pose $r = |x|$ et $\rho = |y|$, alors $x = rx', y = \rho y'$ où $|x'| = |y'| = 1$. Ainsi

$$L_{s,p,\beta}(w) \quad = \quad \frac{1}{|x|^\beta}\int_0^{+\infty} |r^{-\gamma} - \rho^{-\gamma}|^{p-2}\frac{(r^{-\gamma} - \rho^{-\gamma})\rho^{N-1}}{\rho^\beta r^{N+ps}}\left(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \frac{\rho}{r}y'|^{N+ps}}\right)d\rho.$$

on pose $\sigma = \dfrac{\rho}{r}$, alors

$$L_{s,p,\beta}(w) = \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps+2\beta}}\int_0^{+\infty}|1-\sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{-\gamma})\sigma^{N-\beta-1}\left(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+ps}}\right)d\sigma.$$

En posant
$$K(\sigma) = \int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+ps}},$$

comme dans [48], on obtient

$$K(\sigma) = 2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})}\int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1-2\sigma\cos(\theta)+\sigma^2)^{\frac{N+ps}{2}}}d\theta. \tag{2.4}$$

Par conséquent, nous concluons que

$$L_{s,p,\beta}(w) = \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps+2\beta}}\int_0^{+\infty}\psi(\sigma)\,d\sigma,$$

avec
$$\psi(\sigma) = |1-\sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{-\gamma})\sigma^{N-\beta-1}K(\sigma). \tag{2.5}$$

On définit $\Gamma(\gamma) \equiv \int_0^{+\infty}\psi(\sigma)\,d\sigma$, pour conclure on doit juste vérifier que

$$0 < \Gamma(\gamma) < \infty \tag{2.6}$$

On a
$$\Gamma(\gamma) = \int_0^1 \psi(\sigma)\,d\sigma + \int_1^\infty \psi(\sigma)\,d\sigma = I_1 + I_2.$$

Notons que $K(\frac{1}{\xi}) = \xi^{N+ps}K(\xi)$ pour tout $\xi > 0$, puis en utilisant le changement de variable $\xi = \frac{1}{\sigma}$ dans I_1, il en résulte que

$$\Gamma(\gamma) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) d\sigma. \tag{2.7}$$

Quand $\sigma \to \infty$, on a

$$K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) \backsimeq \sigma^{-1-\beta-ps} \in L^1((2,\infty)).$$

Maintenant, quand, $\sigma \to 1$, nous avons

$$K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) \backsimeq (\sigma - 1)^{p-1-ps} \in L^1((1,2)).$$

Par conséquent, en combinant les estimations qui précèdent, nous obtenons $|\Gamma(\gamma)| < \infty$. Maintenant, en utilisant le fait que $0 < \gamma < \dfrac{N - ps - 2\beta}{p-1}$, alors de (2.7) on obtient que $\Gamma(\gamma) > 0$.

En conclusion, nous avons prouvé que

$$L_{s,p,\beta}(w) = \Gamma(\gamma)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \ \textit{p.p.} \text{ dans } I\!R^N \backslash \{0\}.$$

□

En conséquence, nous avons l'inégalité Hardy avec poids suivante.

Théorème 2.1. Soit $\beta < \frac{N-ps}{2}$, alors pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, nous avons

$$2\Gamma(\gamma) \int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx \quad \leq \quad \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}, \tag{2.8}$$

où $\Gamma(\gamma)$ est défini dans (2.7).

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ et $w(x) = |x|^{-\gamma}$ avec $\gamma < \dfrac{N - ps - 2\beta}{p-1}$. Par le lemme 2.3, on a

$$L_{p,s,\beta}(w) = \Gamma(\gamma)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}.$$

il est clair que $\dfrac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \in L^1_{loc}(I\!R^N)$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Picone dans le lemme 2.1, il en résulte que :

$$\frac{1}{2}\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geq \langle L_{p,s,\beta} w, \frac{|u|^p}{w^{p-1}} \rangle = \Gamma(\gamma) \int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx.$$

Ainsi nous concluons. □

Remarque 2.2. Analysons le comportement de la constante $\Gamma(\gamma)$ dans l'inégalité (2.8). Rappelons que, pour $\gamma < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$,

$$\Gamma(\gamma) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) d\sigma,$$

alors

$$\Gamma'(\gamma) = (p-1)\int_1^{+\infty} K(\sigma)\log(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-2}\left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps+\gamma-1}\right) d\sigma.$$

il est clair que si $\gamma_0 = \frac{N-\beta-ps}{p}$, alors $\Gamma'(\gamma_0) = 0$, $\Gamma'(\gamma) > 0$ si $\gamma < \gamma_0$ et $\Gamma'(\gamma) < 0$ si $\gamma > \gamma_0$. Ainsi

$$\max_{\{0<\gamma<\frac{N-ps-2\beta}{p-1}\}} \Gamma(\gamma) = \Gamma(\gamma_0).$$

Par conséquent

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geq 2\Gamma(\gamma_0)\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\, dx. \tag{2.9}$$

Notons que pour $\beta = 0$, alors $2\Gamma(\gamma_0) = 2\Gamma(\frac{N-ps}{p}) \equiv \Lambda_{N,p,s}$ donnée dans (3). Nous avons le résultat d'optimalité suivant :

Théorème 2.2. on définit

$$\Lambda_{N,p,s} = \inf_{\{\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)\setminus 0\}} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}dx},$$

alors $\Lambda_{N,p,s} = 2\Gamma(\gamma_0)$.

Démonstration. De (2.9), il résulte que $\Lambda_{N,p,s} \geq 2\Gamma(\gamma_0)$.

Pour conclure il faut juste prouver l'inégalité inverse. Nous suivons les arguments utilisés dans [50].

Soit $w_0(x) = |x|^{-\gamma_0}$, par le lemme 2.3, on a

$$L_{p,s,\beta}(w_0) = \Gamma(\gamma_0)\frac{w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}.$$

on pose

$$M_n = \{x \in I\!R^N : 1 \leq |x| < n\} \text{ et } O_n = \{x \in I\!R^N : |x| \geq n\}.$$

et on définit

$$w_n = \begin{cases} 1 - n^{-\gamma_0} & \text{si} \quad x \in B_1(0), \\ |x|^{-\gamma_0} - n^{-\gamma_0} & \text{si} \quad x \in M_n, \\ 0 & \text{si} \quad x \in O_n. \end{cases}$$

Par un calcul direct, on obtient facilement que $w_n \in X_0^{s,p,\beta}(I\!R^N)$. Ainsi

$$\langle L_{p,s,\beta}(w_0), w_n \rangle = \Gamma(\gamma_0) \int\limits_{I\!R^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} dx.$$

d'où

$$\int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{(w_n(x) - w_n(y))|w_0(x) - w_0(y)|^{p-2}(w_0(x) - w_0(y))}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} \, dxdy = 2\Gamma(\gamma_0) \int\limits_{I\!R^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} dx.$$

Analysons chaque terme dans l'égalité précédente. Comme dans [50] on obtient que

$$\int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{(w_n(x) - w_n(y))|w_0(x) - w_0(y)|^{p-2}(w(x) - w(y))}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} \, dxdy \geq \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{|w_n(x) - w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} \, dxdy.$$

d'un autre coté on a

$$\int\limits_{I\!R^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} dx = \int\limits_{I\!R^N} \frac{w_n^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx + I_n + J_n,$$

où

$$I_n = \int_{B_1(0)} (1 - n^{-\gamma_0})(w_0^{p-1} - (1 - n^{-\gamma_0})^{p-1}) \frac{dx}{|x|^{ps+\beta}},$$

et

$$J_n = \int_{M_n} (w_0(x) - n^{-\gamma_0})(w_0^{p-1} - (w_0(x) - n^{-\gamma_0})^{p-1}) \frac{dx}{|x|^{ps+\beta}}.$$

il est clair que $I_n, J_n \geq 0$, Par un calcul direct on peut prouver que

$$I_n + J_n \leq C \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi, en combinant les estimations ci-dessus, on trouve que

$$\Lambda_{N,p,s} \leq \frac{\displaystyle\int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{|w_n(x) - w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}} dx} \tag{2.10}$$

$$\leq 2\Gamma(\gamma_0)\Big(1 + \frac{I_n + J_n}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}} dx}\Big). \tag{2.11}$$

Puisque $\int_\Omega \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}} dx \to \infty$ quand $n \to \infty$, et en passant à la limite dans (2.10), il en résulte que

$$\Lambda_{N,p,s} \leq 2\Gamma(\gamma_0)$$

et le résultat s'en suit. □

Par la suite, nous devons utiliser une version de l'inégalité Hardy dans un domaine borné. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.4. Soit Ω un domaine borné régulier tel que $0 \in \Omega$, alors il existe une constante $C \equiv C(\Omega, s, p, N) > 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$C \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx \quad \leq \quad \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.12}$$

Démonstration. Fixons $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et soit $\tilde{u}$ l'extension de u dans $I\!R^N$ définie dans le Lemme 1.1. Alors du Théorème 2.1, on a

$$2\Gamma(\gamma) \int\limits_{I\!R^N} \frac{|\tilde{u}(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx \leq \int\limits_{I\!R^N} \int\limits_{I\!R^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \leq ||\tilde{u}||^p_{X^{s,p,\beta}(I\!R^N)} \leq C||u||^p_{X^{s,p,\beta}(\Omega)}.$$

Puisque $\tilde{u}_{|\Omega} = u$, alors de la remarque 1.2, on conclue que

$$\begin{aligned} 2\Gamma(\gamma) \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}} dx &\leq C||u||^p_{X^{s,p,\beta}(\Omega)} \\ &\leq C_1|||u|||^p_{X_0^{s,p,\beta}(\Omega)} = C_1 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi on a le résultat désiré. □

2.3 Résultats Principaux

2.3.1 Partie 1 : Le cas $p \geq 2$

Théorème 2.3. Soit $p > 2$, $0 < s < 1$ et $N > ps$. Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné. On pose

$$h_s(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dx\, dy - \Lambda_{N,p,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}} dx. \tag{2.13}$$

alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$h_s(u) \geq C \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} dx\, dy. \tag{2.14}$$

Démonstration. Nous suivons les arguments utilisés dans [13]. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\alpha = \dfrac{N-ps}{p}$, alors $w(x) = |x|^{-\alpha}$ et $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$. Rappelons que d'après le Théorème 1.2 dans [50], on a

$$h_s(u) \geq C \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}, \tag{2.15}$$

donc nous allons analyser le côté droit de l'inégalité précédente. Notons que

$$\begin{aligned} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} &= \frac{|w(y)u(x)-w(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} \\ &= \frac{\left|(u(x)-u(y)) - \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}} \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} = f_1(x,y). \end{aligned}$$

De la même manière, grâce à la symétrie de $f_1(x,y)$, il en résulte immédiatement que

$$\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} (w(x))^{\frac{p}{2}} (w(y))^{\frac{p}{2}} = \frac{\left|(u(y)-u(x)) - \frac{u(x)}{w(x)}(w(y)-w(x))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}} \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} = f_2(x,y).$$

Ainsi,

$$h_s(u) \geq \frac{1}{2} \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2} \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Puisque f_1 et f_2 sont des fonctions positives,

$$h_s(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

En utilisant le fait que Ω est un domaine borné, on obtient que pour tout $(x,y) \in (\Omega \times \Omega)$ et $q < p$,

$$\frac{1}{|x-y|^{N+ps}} \geq \frac{C(\Omega)}{|x-y|^{N+qs}}$$

et

$$Q(x,y) \equiv \frac{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}}{w(x)^p + w(y)^p} \leq C.$$

Posons

$$D(x,y) \equiv \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \frac{w(x)^p + w(y)^p}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}},$$

alors $Q(x,y)D(x,y)=1$. Ainsi

$$
\begin{gathered}
f_1(x,y) \geq C(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times \\
\Big[\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} - p\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+qs}}\big\langle u(x)-u(y), \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\big\rangle \\
+C(p)\frac{|\frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big],
\end{gathered}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &\geq \Big[C(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big] \\
&- \Big[pC(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\big|\frac{u(y)}{w(y)}\big||(w(x)-w(y))|\Big].
\end{aligned}
$$

De la même manière nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
f_2(x,y) &\geq \Big[C(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big] \\
&- \Big[pC(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\big|\frac{u(x)}{w(x)}\big||(w(x)-w(y))|\Big].
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
h_s(u) &\geq C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega Q(x,y)\Big(\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\Big)\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\
&- pC(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\Big[Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\big|\frac{u(y)}{w(y)}\big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy \\
&- pC(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\Big[Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\big|\frac{u(x)}{w(x)}\big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
h_s(u) &\geq C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\
&- C_1(\Omega,p)\int_\Omega\int_\Omega\big(h_1(x,y)+h_2(x,y)\big)\,dx\,dy,
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

avec

$$
h_1(x,y) = Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\big|\frac{u(y)}{w(y)}\big||(w(x)-w(y))|,
$$

$$h_2(x,y) = Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|.$$

Puisque $h_1(x,y)$ et $h_2(x,y)$ sont des fonctions symétriques, nous avons juste à estimer $\int_\Omega\int_\Omega h_2(x,y)\,dx\,dy$. En utilisant l'inégalité de Young, il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_\Omega h_2(x,y)dxdy &\leq \varepsilon\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\ &+ C(\varepsilon)\int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{2.17}$$

avec

$$G(x,y) = (Q(x,y))^p\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p^2}{2}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big|^p\frac{|(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}.$$

Nous affirmons que

$$I \equiv \int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,dx\,dy \leq C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}.$$

Notons que

$$I = \int_\Omega\int_\Omega \frac{(u(x))^p}{|x-y|^{N+qs}}\frac{(w(x))^{p^2-p}|(w(x)-w(y))|^p}{(w(x)^p+w(y)^p)^p}\,dx\,dy,$$

alors

$$I = \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega \frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|y|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx.$$

Pour calculer l'intégrale ci-dessus, nous suivons l'argument utilisé dans [48]. On pose $y=\rho y'$ et $x=rx'$ avec $|x'|=|y'|=1$, puis en prenant en considération que $\Omega\subset B_0(R)$, il en résulte que

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega \frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|x|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx \\ &\leq \int_\Omega u^p(x)\int_0^R \frac{(|r^\alpha-\rho^\alpha|^p\rho^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(r^{p\alpha}+\rho^{p\alpha})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\rho y'-rx'|^{N+qs}}\Big)d\rho dx. \end{aligned}$$

on pose $\rho = r\sigma$, alors

$$\begin{aligned} I &\leq \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}\int_0^{\frac{R}{r}}\frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\sigma y'-x'|^{N+qs}}\Big)d\sigma dx \\ &= \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}\int_0^{\frac{R}{r}}\frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}K(\sigma)d\sigma dx \leq \mu\int_\Omega\frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}dx, \end{aligned}$$

où

$$\mu = \int_0^\infty \frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}K(\sigma)d\sigma$$

et

$$K(\sigma) = 2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})}\int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1-2\sigma\cos(\theta)+\sigma^2)^{\frac{N+qs}{2}}}d\theta.$$

Montrons que $\mu < \infty$.

Il est clair que, quand $\sigma \to \infty$,

$$\frac{(|1-\sigma^{\alpha}|^{p}\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^{p}}K(\sigma) \simeq \sigma^{-1-qs} \in L^{1}((1,\infty)).$$

Maintenant, en prenant en considération que $K(\sigma) \leq C|1-\sigma|^{-1-ps}$ quand $s \to 1$, et en suivant le même calcul que dans le lemme 2.3, il en résulte que

$$\int_{0}^{1} \frac{(1-\sigma^{\alpha})^{p}\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^{p}}K(\sigma)d\sigma < \infty.$$

Ainsi $\mu < \infty$.

Par conséquent en combinant les estimations ci-dessus, il en résulte que

$$I \leq C\int_{\Omega} \frac{u^{p}(x)}{|x|^{qs}}dx.$$

Étant donné que $u(x) = v(x)|x|^{-(\frac{N-ps}{p})}$, alors

$$I \leq C\int_{\Omega} \frac{|v(x)|^{p}}{|x|^{N-s(p-q)}}\, dx.$$

Soit $\beta_0 = \frac{N-ps}{2} + \frac{(q-p)s}{2}$, alors $\beta_0 < \frac{N-ps}{2}$. En appliquant le lemme 2.4, on obtient que

$$\begin{aligned} I &\leq C(\Omega)\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta_0}|y|^{\beta_0}}\, dy\, dx \\ &\leq C_1(\Omega)\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\frac{N-ps}{2}}|y|^{\frac{N-ps}{2}}}\, dy\, dx \\ &\leq C_1(\Omega)\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\frac{N-ps}{2}}|y|^{\frac{N-ps}{2}}}\, dy\, dx. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau l'estimation (2.15), nous atteignons que

$$I \leq C_2(\Omega)\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}$$

et l'affirmation suit.

Comme conséquence directe des estimations ci-dessus, nous avons prouvé que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leq C_3\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{2.18}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leq Ch_s(u),$$

et le résultat est obtenu. □

Comme conséquence, on aura par la suite l'inégalité de Caffarelli-Khon-Nirenberg "fractionnaire" dans un domaine borné.

Théorème 2.4. Soit $p \geq 2$, $0 < s < 1$ et $N > ps$. Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}\, dx\, dy \geq C\Big(\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\, dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \tag{2.19}$$

où $p^*_{s,q} = \frac{pN}{N-qs}$ et $\beta = \frac{N-ps}{2}$.

Démonstration. Rappelons que $\alpha = \frac{N-ps}{p}$. Puisque $\alpha p^*_{s,q} = \frac{N(N-ps)}{N-qs} < N$, il en résulte que $\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{\alpha p^*_{s,q}}}\, dx < \infty$, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Pour montrer (2.19), nous allons utiliser l'estimation (2.18) et l'inégalité de Sobolev fractionnaire.

Fixons $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et définissons $u_1(x) = \dfrac{u(x)}{|x|^\alpha}$. Par (2.18), on obtient

$$C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Sobolev, il en résulte que

$$S\Big(\int_\Omega |u_1(x)|^{p^*_{s,q}} dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \leq \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy,$$

où $p^*_{s,q} = \frac{pN}{N-qs}$. Par conséquent, en remplaçant u_1 par sa valeur, on obtient

$$\Big(\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{\alpha p^*_{s,q}}}\, dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \leq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.20}$$

Si on pose $\beta = \frac{N-ps}{2} = \alpha\frac{p}{2}$, alors l'inégalité (2.20) peut être écrite sous la forme

$$\Big(\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\, dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \leq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.21}$$

□

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, pour avoir une généralisation "naturelle" de l'inégalité classique de Caffarelli-Kohn-Nirenberg obtenue dans [34], on considère une classe de "poids admissibles ". Dans cette direction on a le théorème suivant :

Théorème 2.5. Supposons que $1 < p < \frac{N}{s}$ et soit $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$, alors pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, on a

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geq S(\beta)\Big(\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}, \tag{2.22}$$

où $p_s^* = \frac{pN}{N-ps}$ et $S(\beta) > 0$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $u \geq 0$. En utilisant le fait que $\beta < \frac{N-ps}{2}$, on obtient facilement que $\displaystyle\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx < \infty$. A partir de maintenant et pour Simplifier l'écriture , on note par $C, C_1, C_2, ...$ toute constante universelle qui ne dépend pas de u et qui peut changer d'une ligne à l'autre. On pose $\tilde{u}(x) = \dfrac{u(x)}{w_1(x)}$, où $w_1(x) = |x|^{\frac{2\beta}{p}}$, donc

$$\Big(\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} = \Big(\int_{I\!R^N} |\tilde{u}|^{p_s^*}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}. \tag{2.23}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev, il en résulte que

$$S\Big(\int_{I\!R^N} |\tilde{u}|^{p_s^*}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy. \tag{2.24}$$

Pour obtenir le résultat souhaité, nous devons juste montrer que

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \leq C\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.25}$$

pour une constante positive C.

En utilisant la définition de $\tilde{u}$, on obtient

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} = \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{dy}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)}.$$

Notons que

$$\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)} =$$

$$\frac{\big|(\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)) - w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)} - \frac{1}{w_1(y)})\big|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \tilde{f}_1(x,y).$$

Dans la même direction nous obtenons que

$$\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)} =$$

$$\frac{\big|(\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x)) - w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)} - \frac{1}{w_1(x)})\big|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \tilde{f}_2(x,y).$$

Puisque

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \tilde{f}_1(x,y)dxdy = \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \tilde{f}_2(x,y)dxdy,$$

nous concluons que

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} = \frac{1}{2}\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \tilde{f}_1(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \tilde{f}_2(x,y)dxdy.$$

Notons que

$$\tilde{f}_1(x,y) \geq \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - p\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+ps}}\langle \tilde{u}(x)-\tilde{u}(y), w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})\rangle$$
$$+C(p)\frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big],$$

Par conséquent

$$\tilde{f}_1(x,y) \geq \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - p\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}}|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|\Big].$$

Par l'inégalité de Young, nous obtenons l'existence de $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\tilde{f}_1(x,y) \geq \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[C_1\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2\frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big].$$

Dans la même direction et en utilisant le fait que $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sont des fonctions symétriques, on aura

$$f_2(x,y) \geq \left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[C_1\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big].$$

Ainsi nous avons l'existence des constantes positives C_1, C_2, C_3 telles que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geq$$
$$C_1 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \Big[\Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} + \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \Big] dxdy$$
$$-C_2 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)} - \frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}|dxdy$$
$$-C_3 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)} - \frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy.$$

Puisque

$$\Big[\Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} + \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \Big] \geq 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \\ &+C_2 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)} - \frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}|dxdy \\ &+C_3 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)} - \frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy.\end{aligned} \tag{2.26}$$

on pose

$$g_1(x,y) = \Big(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)} - \frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}$$

et

$$g_2(x,y) = \Big(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)} - \frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}.$$

Il est clair que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} g_1(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} g_2(x,y)dxdy,$$

donc, pour obtenir le résultat désiré, nous devons juste montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} g_1(x,y)dxdy \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}.$$

En revenant à la définition de $\tilde{u}$ et w_1, nous atteignons le résultat que

$$g_1(x,y) = \frac{|u(x)|^p \Big||x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}}.$$

Par le même type de calcul que dans la preuve du lemme 2.3. on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N} g_1(x,y)dxdy &= \int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p \Big||x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}}dxdy\\ &= \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big(\int\limits_{I\!R^N} \frac{\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}}dy\Big)dx.\end{aligned}$$

on pose $r = |x|$ et $\rho = |y|$, donc $x = rx', y = \rho y'$ avec $|x'| = |y'| = 1$, alors

$$\int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big(\int\limits_{I\!R^N} \frac{\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}}dy\Big)dx =$$

$$\int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big[\int\limits_0^{+\infty} \frac{|r^{\frac{2\beta}{p}} - \rho^{\frac{2\beta}{p}}|^p\rho^{N-1}}{\rho^{\beta}}\left(\int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|rx'-\rho y'|^{N+ps}}\right)d\rho\Big]dx.$$

on pose $\sigma = \frac{\rho}{r}$, alors

$$\int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big(\int\limits_{I\!R^N} \frac{\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|y|^{\beta}|x-y|^{N+ps}}dy\Big)dx = \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}}\Big[\int\limits_0^{+\infty} |1-\sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p\sigma^{N-1-\beta}K(\sigma)\,d\sigma\Big]dx,$$

où K est défini dans (3.19).
En suivant les mêmes calculs de l'estimation (2.6), on peut prouver que

$$\int_0^{\infty} |1-\sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p\sigma^{N-1-\beta}K(\sigma)d\sigma \equiv C_3 < \infty,$$

il en résulte que

$$\int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N} g_1(x,y)dxdy = C_3\int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}}dx.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité (2.8), on obtient

$$\int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N} g_1(x,y)dxdy \le C_4\int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\beta}}\frac{dy}{|y|^{\beta}}. \tag{2.27}$$

combinant (2.23), (2.24), (2.27) et (2.26), nous obtenons le résultat désiré. □

Dans le cas où Ω est un domaine borné régulier contenant l'origine, on a la *version* suivante du Théorème 2.5.

Théorème 2.6. Supposons que Ω est un domaine borné régulier avec $0 \in \Omega$, alors il existe une constante positive $C \equiv C(\Omega, N, p, s, \beta)$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geq C \Big(\int\limits_\Omega \frac{|\phi(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta \frac{p_s^*}{p}}} dx \Big)^{\frac{p}{p_s^*}}. \tag{2.28}$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et on définit $\tilde{\phi}$ comme étant l'extension de ϕ dans $I\!R^N$ donnée dans le Lemme 1.1, et utilisant le fait que Ω est un domaine borné régulier, on obtient

$$||\tilde{\phi}||_{X^{s,p,\beta}(I\!R^N)} \leq C_1 ||\phi||_{X^{s,p,\beta}(\Omega)} \leq C_1 \Big(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta |y|^\beta} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, en appliquant le Théorème 2.5 à $\tilde{\phi}$, il en résulte que

$$\int\limits_{I\!R^N} \int\limits_{I\!R^N} \frac{|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geq S(\beta) \Big(\int\limits_{I\!R^N} \frac{|\tilde{\phi}(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta \frac{p_s^*}{p}}} dx \Big)^{\frac{p}{p_s^*}}.$$

Ainsi, en combinant les estimations ci-dessus on obtient le résultat désiré. $\square$

2.3.2 Partie 2 : Le cas $1 < p < 2$

Le cas $p \in (1, 2)$ a était étudier dans [7]. On utilisant une approche similaire a la première partie, les auteurs ont démontré une version de l'inégalité de Hardy-Sobolev amélioré. Pour la complétude de notre étude on va inclure ici la preuve de cas $p \in (1, 2)$.

Commençons par prouver le Lemme suivant.

Lemme 2.5. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ et on définit $w(x) = |x|^{-\alpha}$ avec $\alpha = \frac{N-ps}{p}$. considérons $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$, alors pour tous $1 \leq q < p$, on a

$$\int\limits_{I\!R^N} \int\limits_{I\!R^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy \geq C \int\limits_{I\!R^N} \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy. \tag{2.29}$$

Démonstration. Le côté gauche peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} &= \frac{|w(y)u(x) - w(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} \frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} \\ &= \frac{\big|(u(x) - u(y)) - \frac{u(y)}{w(y)}(w(x) - w(y))\big|^p}{|x-y|^{N+qs}} \Big(\frac{w(y)}{w(x)} \Big)^{\frac{p}{2}} := f_1(x, y). \end{aligned}$$

De la même manière, grâce à la symétrie de $f_1(x,y)$, il en résulte immédiatement que

$$\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}(w(x))^{\frac{p}{2}}(w(y))^{\frac{p}{2}} = \frac{\left|(u(y)-u(x)) - \dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y)-w(x))\right|^p}{|x-y|^{N+qs}}\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} = f_2(x,y).$$

Par conséquent, nous pouvons écrire l'intégrale du terme ci-dessus

$$\begin{aligned} H(v) &:= \int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}}\,dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} f_2(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Nous définissons les quantités

$$Q(x,y) := \frac{(w(x)\,w(y))^{\frac{p}{2}}}{w(x)^p + w(y)^p},$$

et

$$D(x,y) \equiv \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \frac{w(x)^p + w(y)^p}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}}.$$

Il est clair que $Q(x,y) \le \frac{1}{2}$ et $Q(x,y)D(x,y) = 1$. Ainsi, on obtient

$$f_1(x,y) \ge C\,Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\left[\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} + p\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+qs}}\left\langle u(x)-u(y), \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right\rangle\right].$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &\ge \left[CQ(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\right] \\ &- \left[pCQ(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\left|\frac{u(y)}{w(y)}\right||(w(x)-w(y))|\right]. \end{aligned}$$

Le même argument appliqué à f_2 donne

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &\ge \left[CQ(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\right] \\ &- \left[pCQ(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\left|\frac{u(x)}{w(x)}\right||(w(x)-w(y))|\right]. \end{aligned}$$

En combinant les deux estimations ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
H(v) &\geq C\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} Q(x,y)\Big(\Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}+\Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\Big)\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy\\
&- pC\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\Big[Q(x,y)\Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy\\
&- pC\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\Big[Q(x,y)\Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
H(v) &\geq C\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy\\
&- C_1(p)\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\big(h_1(x,y)+h_2(x,y)\big)\,dx\,dy,
\end{aligned}\tag{2.30}$$

avec

$$h_1(x,y)=Q(x,y)\Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|,$$

$$h_2(x,y)=Q(x,y)\Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|.$$

Puisque $h_1(x,y)$ et $h_2(x,y)$ sont des fonctions symétriques, nous avons juste à estimer $\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} h_2(x,y)\,dx\,dy$. Dans ce but, nous utilisons l'inégalité de Young qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} h_2(x,y)dxdy &\leq \varepsilon\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy\\
&+ C(\varepsilon)\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} G(x,y)\,dx\,dy,
\end{aligned}\tag{2.31}$$

avec

$$G(x,y)=(Q(x,y))^p\Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p^2}{2}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big|^p\frac{|(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}.$$

Nous affirmons que

$$I:=\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} G(x,y)\,dx\,dy\leq C\int\limits_{I\!R^N}\int\limits_{I\!R^N}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,w(x)^{\frac{p}{2}}w(y)^{\frac{p}{2}}dxdy.$$

En effet, notons que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N}\frac{(u(x))^p}{|x-y|^{N+qs}}\frac{(w(x))^{p^2-p}|(w(x)-w(y))|^p}{(w(x)^p+w(y)^p)^p}\,dx\,dy,\\
&= \int_{I\!R^N} u^p(x)\Big[\int_{I\!R^N}\frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|y|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale ci-dessus, nous suivons les arguments utilisés dans [48]. On pose $y=\rho y'$

et $x = rx'$ avec $|x'| = |y'| = 1$, alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{||x|^\alpha - |y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p} + |x|^{\alpha p})^p} \frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\, dy\Big]\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x) \int_0^\infty \frac{(|r^\alpha - \rho^\alpha|^p \rho^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(r^{p\alpha} + \rho^{p\alpha})^p} \Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{dy'}{|\rho y' - rx'|^{N+qs}}\Big) d\rho dx. \end{aligned}$$

on pose $\rho = r\sigma$, alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} \int_0^\infty \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} \Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{dy'}{|\sigma y' - x'|^{N+qs}}\Big) d\sigma dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} \int_0^\infty \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma dx \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} dx, \end{aligned}$$

où

$$\mu = \int_0^\infty \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma.$$

Comme dans la preuve du lemme 2.3, on peut montrer que $0 < \mu < \infty$. Puisque $u(x) = v(x)|x|^{-(\frac{N-ps}{p})}$, on obtient

$$I = \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^p}{|x|^{N-s(p-q)}}\, dx.$$

soit $\beta_0 = \frac{N-ps}{2} + \frac{(q-p)s}{2}$, alors $\beta_0 < \frac{N-qs}{2}$. En appliquant le lemme 2.3, on obtient

$$I \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}}\, dx\, dy.$$

et l'affirmation est obtenue.

Comme conséquence directe des estimations ci-dessus, nous avons prouvé que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leq C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy \tag{2.32}$$

qui est le résultat souhaité. $\square$

Le premier objectif principal de cette section est d'étendre l'inégalité (4) au cas $p < 2$. Précisément nous prouvons l'inégalité suivante (*l'état fondamental*)

Théorème 2.7. Soit $p < 2$, $0 < s < 1$ et $N > ps$. Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, alors pour tous $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$h_s(u) \geq C \int_\Omega\int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} dxdy. \tag{2.33}$$

Démonstration. Rappelons que (comme dans le lemme 2.5)

$$\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,w(x)^{\frac{p}{2}}w(y)^{\frac{p}{2}} \quad = \quad f_1(x,y)=f_2(x,y)$$

où

$$f_1(x,y)=\frac{\left|(u(x)-u(y))-\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^p}{|x-y|^{N+qs}}\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}$$

et

$$f_2(x,y)=\frac{\left|(u(y)-u(x))-\dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y)-w(x))\right|^p}{|x-y|^{N+qs}}\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Nous définissons les sous ensemble de $\Omega\times\Omega$,

$$D_1=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : w(y)\leq w(x)\}\quad \text{et}\quad D_2=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : w(x)\leq w(y)\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,w(x)^{\frac{p}{2}}w(y)^{\frac{p}{2}}dx\,dy &= \iint_{D_1} f_1(x,y)\,dx\,dy+\iint_{D_2} f_2(x,y)\,dx\,dy\\ &= J_1+J_2.\end{aligned}$$

Nous allons d'abord estimer J_1. Pour cela on pose

$$I_1(x,y)=\left|(u(x)-u(y))-\frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^p\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Nous réécrivons I_1 sous la forme

$$\begin{aligned}I_1(x,y) &= \frac{\left|(u(x)-u(y))-\dfrac{u(y)}{w(x)}(w(x)-w(y))\right|^p}{\left(|u(x)-u(y)|+|\dfrac{u(y)}{w(x)}(w(x)-w(y))|\right)^{(2-p)\frac{p}{2}}}\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\times\ \left(\left(|u(x)-u(y)|+|\frac{u(x)}{w(x)}(w(x)-w(y))|\right)\right)^{(2-p)\frac{p}{2}}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder, il en résulte que

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} f_1(x,y)\,dx\,dy &\leq \left(\iint_{D_1}\frac{\left|(u(x)-u(y))-\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^2}{|x-y|^{N+qs}(|u(x)-u(y)|+|\dfrac{u(x)}{w(x)}(w(x)-w(y))\Big|)^{(2-p)}}\frac{w(y)}{w(x)}dxdy\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\times\ \left(\iint_{D_1}\frac{(|(u(x)-u(y))|+|\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|)^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy\right)^{\frac{2-p}{2}}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

En utilisant la remarque 1.3, nous arrivons à

$$\iint_{D_1} \frac{(|(u(x)-u(y))|+|\frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|)^p dxdy}{|x-y|^{N+qs}} \leq$$

$$C_1 \int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u(x)-u(y))|^p dxdy}{|x-y|^{N+qs}} + \frac{|\frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|^p dxdy}{|x-y|^{N+qs}} \leq C(\Omega) H_\Omega(v).$$

Nous traitons maintenant le premier terme dans (2.34). Puisque $w(y) \leq w(x)$ dans D_1, puis en posant $t = \frac{w(y)}{w(x)}$ et $a = \frac{v(x)}{v(y)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\Big|(u(x)-u(y)) - \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\Big|^2}{(\Big|u(x)-u(y)|+|\frac{u(x)}{w(x)}(w(x)-w(y))\Big|)^{(2-p)}} \frac{w(y)}{w(x)} \\
= \;& \frac{w^p(x)|v(y)|^p|a-1|^2 t}{(|a-t|+|1-t|)^{2-p}} \\
\leq \;& w^p(x)|v(y)|^p\Big(|a-t|^p - (1-t)^{p-1}(|a|^p - t)\Big) \\
= \;& w^p(x)|v(y)|^p\Big[|\frac{v(x)}{v(y)} - \frac{w(y)}{w(x)}|^p - (1-\frac{w(y)}{w(x)})^{p-1}(|\frac{v(x)}{v(y)}|^p - \frac{w(y)}{w(x)})\Big] \\
= \;& |u(x)-u(y)|^p - (w(x)-w(y))^{p-2}(w(x)-w(y))(\frac{|u(x)|^p}{w^{p-1}(x)} - \frac{|u(y)|^p}{w^{p-1}(y)}).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que, pour tout $(x,y) \in I\!R^N \times I\!R^N$,

$$|u(x)-u(y)|^p - (w(x)-w(y))^{p-2}(w(x)-w(y))(\frac{|u(x)|^p}{w^{p-1}(x)} - \frac{|u(y)|^p}{w^{p-1}(y)}) \geq 0,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
& C(\Omega)\int\int_{D_1} \frac{\big|(u(x)-u(y)) - \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\big|^2}{|x-y|^{N+qs}(|u(x)-u(y)|+|\frac{u(x)}{w(x)}(w(x)-w(y))|)^{2-p}} \frac{w(y)}{w(x)} dxdy \\
\leq \;& \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|(u(x)-u(y))|^p dxdy}{|x-y|^{N+ps}} \\
- \;& \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{\Big(\frac{|u(x)|^p}{w^{p-1}(x)} - \frac{|u(y)|^p}{w^{p-1}(y)}\Big)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))dxdy}{|x-y|^{N+ps}} \\
= \;& h_s(u).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\int\int_{D_1} f_1(x,y)dxdy \leq C(\Omega) h_s^{\frac{p}{2}}(u) H_\Omega^{\frac{2-p}{2}}(v). \tag{2.35}$$

De même, par des arguments de symétrie nous obtenons

$$\int\int_{D_2} f_2(x,y)dxdy \leq C(\Omega)h_s^{\frac{p}{2}}(u)H_\Omega^{\frac{2-p}{2}}(v). \tag{2.36}$$

En combinant (2.35) et (2.36), on obtient

$$H_\Omega(v) \leq C(\Omega)h_s^{\frac{p}{2}}(u)H_\Omega^{\frac{2-p}{2}}(v).$$

et ensuite

$$H_\Omega(v) \leq C(\Omega)h_s(u)$$

qui est le résultat souhaité. □

En conséquence, nous obtenons l'amélioration de l'inégalité Hardy suivante.

Théorème 2.8. Supposons que les hypothèses du théorème 2.7 sont vérifiées, alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$h_s(u) \geq C \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \tag{2.37}$$

Démonstration. La preuve est obtenue en combinant les résultats du lemme 2.5 et le théorème 2.7. □

2.4 Extension au cas $\beta < 0$

Il est clair que les résultats précédents restent vrais si on arrive a prouver une inégalité de type Hardy-Sobolev avec poids.

Rappelons que l'espace $W_\beta^{s,p}(I\!R^N)$ est définie par

$$W_\beta^{s,p}(I\!R^N) := \Big\{\phi \in L^p(I\!R^N, \frac{dx}{|x|^{2\beta}}) : \iint_{I\!R^{2N}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} < +\infty\Big\}.$$

Pour $-ps < \beta \leq 0$, on peut montrer que $W_\beta^{s,p}(I\!R^N)$ est un espace de Banach doté par la norme

$$\|\phi\|_{W_\beta^{s,p}(I\!R^N)} = \Big(\int_{I\!R^N}\frac{|\phi(x)|^p dx}{|x|^{2\beta}}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\iint_{I\!R^{2N}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

et que $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N) \subset W_\beta^{s,p}(I\!R^N)$. Par contre, si $\beta \leq ps$, alors $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N) \not\subseteq W_\beta^{s,p}(I\!R^N)$ et par conséquence $W_\beta^{s,p}(I\!R^N)$ n'est pas bien défini.

Maintenant, en prenant en considération l'inégalité de Sobolev avec poids prouvé dans [4], nous pouvons définir l'espace de Banach $D_\beta^{s,p}(I\!R^N)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ par rapport à la norme précédente

$$\|\phi\|_{D^{s,p}_\beta(I\!R^N)} = \Big(\iint_{I\!R^{2N}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que, comme dans [4], nous avons l'inégalité Hardy avec poids suivante valable dans $D^{s,p}_\beta(I\!R^N)$.

Théorème 2.9. (L'inégalité Hardy avec poids fractionnaire) Soit $-ps < \beta < \frac{N-ps}{2}$, alors pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty_0(I\!R^N)$, on a

$$2\Gamma(\gamma) \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx \leq \iint_{I\!R^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}, \tag{2.38}$$

où $\Gamma(\gamma)$ est donnée par (2.7)

Notons que $\Gamma(\gamma)$ est bien définie si $\beta > -ps$. Dans ce cas $\Gamma(\gamma) > 0$.

Maintenant pour $-\infty < \alpha < \frac{N-ps}{2}$, nous définissons l'espace

$$E_\alpha(I\!R^N) = \Big\{ u : |x|^\alpha u \in D^{s,p}(I\!R^N) \;\text{ i.e} : \iint_{I\!R^{2N}} \frac{||x|^\alpha u(x) - |y|^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy < \infty \Big\}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev classique, nous concluons que $E_\alpha(I\!R^N)$ est un espace de Banach et

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*_s} |x|^{p^*_s\alpha} dx\Big)^{\frac{p}{p^*_s}} \leq \iint_{I\!R^{2N}} \frac{||x|^\alpha u(x) - |y|^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy.$$

Le résultat principal de ce section est le suivant.

Théorème 2.10. Supposons que $-ps < \beta < \frac{N-ps}{2}$, alors $E_\alpha(I\!R^N) = W^{s,p}_\beta(I\!R^N)$ avec $\alpha = -\dfrac{2\beta}{p}$.

Démonstration. Pour prouver le résultat principal, on doit montrer juste l'existence de $C_1, C_2 > 0$ telles que pour toute $u \in \mathcal{C}^\infty_0(I\!R^N)$, on a

$$C_1\|u\|_{E_\alpha(I\!R^N)} \leq \|u\|_{W^{s,p}_\beta(I\!R^N)} \leq C_2\|u\|_{E_\alpha(I\!R^N)}. \tag{2.39}$$

Commençons par prouver la première inégalité. Dans ce cas, la preuve suit en utilisant attentivement les calculs dans [4]. Pour la commodité du lecteur, nous incluons ici tous les détails. Soit

$$w(x) = |x|^{-\alpha} = |x|^{\frac{2\beta}{p}}, v(x) = \frac{u(x)}{w(x)}, \tag{2.40}$$

alors

$$\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta} = \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} &= \frac{\left|(v(x)-v(y))-v(y)w(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\equiv f_1(x,y).\end{aligned}$$

De la même façon nous avons

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} &= \frac{\left|(v(y)-v(x))-v(x)w(x)(\frac{1}{w(y)}-\frac{1}{w(x)})\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\equiv f_2(x,y).\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\iint_{I\!R^{2N}} f_1(x,y)\,dx\,dy = \iint_{I\!R^{2N}} f_2(x,y)\,dx\,dy$$

et

$$\iint_{I\!R^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|x|^\beta} = \frac{1}{2}\iint_{I\!R^{2N}} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_{I\!R^{2N}} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Puisque

$$\begin{gathered}f_1(x,y) \geq \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\times\\ \Big[\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - p\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+ps}}\big\langle v(x)-v(y), w(y)v(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})\big\rangle\\ +C(p)\frac{|w(y)v(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big],\end{gathered}$$

puis en utilisant l'inégalité de Young , il en résulte que

$$\begin{gathered}f_1(x,y) \geq \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\times\\ \Big[C_1\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2\frac{|w(y)v(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big]\end{gathered}$$

avec $C_1, C_2 > 0$ indépendant de u. De façon symétrique, nous atteignons que

$$\begin{gathered}f_2(x,y) \geq \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\times\\ \Big[C_1\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2\frac{|w(x)v(x)(\frac{1}{w(y)}-\frac{1}{w(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big].\end{gathered}$$

Ainsi, nous obtenons l'existence des constantes positives C_1, C_2, C_3 tel que

$$\begin{aligned}\iint_{I\!R^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} &\geq C_1 \iint_{I\!R^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big[\Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}+\Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]dxdy\\ &-C_2 \iint_{I\!R^{2N}} \Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w(y)v(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|dxdy\\ &-C_3 \iint_{I\!R^{2N}} \Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w(x)v(x)(\frac{1}{w(y)}-\frac{1}{w(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}dx\,dy.\end{aligned}$$

Puisque $\Big[\Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}}+\Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}}\Big] \geq 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\iint_{I\!R^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy &\leq C_1 \iint_{I\!R^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}\\ &+C_2 \iint_{I\!R^{2N}} \Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w(y)v(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|dxdy\\ &+C_3 \iint_{I\!R^{2N}} \Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w(x)v(x)(\frac{1}{w(y)}-\frac{1}{w(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Soit

$$g_1(x,y) = \Big(\frac{w(y)}{w(x)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w(x)v(x)(\frac{1}{w(y)}-\frac{1}{w(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}$$

et

$$g_2(x,y) = \Big(\frac{w(x)}{w(y)}\Big)^{\frac{p}{2}} \frac{|w(y)v(y)(\frac{1}{w(x)}-\frac{1}{w(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}},$$

alors $\iint_{I\!R^{2N}} g_1(x,y)dxdy = \iint_{I\!R^{2N}} g_2(x,y)dxdy$. Par conséquent, nous avons juste à estimer la première intégrale. Prenant en considération la définition de v et w donnée dans (2.40), on aura

$$g_1(x,y) = \frac{|u(x)|^p\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}}-|y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^\beta|x-y|^{N+ps}}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$I \equiv \iint_{I\!R^{2N}} g_1(x,y)dxdy = \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big(\int\limits_{I\!R^N} \frac{\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}}-|y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|y|^\beta|x-y|^{N+ps}}dy\Big)dx.$$

on pose $r=|x|$ et $\rho=|y|$, d'où $x=rx', y=\rho y'$ avec $|x'|=|y'|=1$, alors

$$I = \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big[\int\limits_0^{+\infty} \frac{|r^{\frac{2\beta}{p}}-\rho^{\frac{2\beta}{p}}|^p\rho^{N-1}}{\rho^\beta}\left(\int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|rx'-\rho y'|^{N+ps}}\right)d\rho\Big]dx.$$

on pose $\sigma = \frac{\rho}{r}$, alors

$$I = \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} \Big[\int\limits_0^{+\infty} |1 - \sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-\beta} K(\sigma)\, d\sigma \Big] dx.$$

En suivant les mêmes calculs de l'estimation (2.6), on peut prouver que

$$\int\limits_0^{+\infty} |1 - \sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-\beta} K(\sigma)\, d\sigma = C_3 \in (0, \infty).$$

Ainsi

$$\iint_{I\!R^{2N}} g_1(x,y) dx dy = C_3 \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} dx.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Hardy fractionnaire avec poids donnée dans le théorème 2.9, nous concluons que

$$\iint_{I\!R^{2N}} g_1(x,y) dx dy \le C_4 \iint_{I\!R^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.42}$$

En Combinant (2.42) et (2.41), nous obtenons

$$\iint_{I\!R^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dx dy \le C_1 \iint_{I\!R^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.43}$$

d'où $\tilde{C} \|u\|_{E_\alpha(I\!R^N)} \le \|u\|_{W^{s,p}_\beta(I\!R^N)}$ avec $\tilde{C} > 0$.

Nous traitons maintenant la seconde inégalité (2.39) . Notons que

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} &= \tfrac{1}{2} \frac{\Big|(u(y) - u(x)) - \dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y) - w(x))\Big|^p}{|x-y|^{N+ps}} \Big[\frac{1}{(w(x))^p} + \frac{1}{(w(y))^p} \Big] \\
&\ge C_1 \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \Big[\frac{1}{(w(x))^p} + \frac{1}{(w(y))^p} \Big] \\
-C_2 \left(\frac{1}{w(y)} \right)^p \frac{|w(y) - w(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}} &| \frac{u(x)}{w(x)} |^p - C_3 \left(\frac{1}{w(x)} \right)^p \frac{|w(x) - w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} | \frac{u(y)}{w(y)} |^p.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\Big[\frac{1}{(w(x))^p} + \frac{1}{(w(y))^p} \Big] \ge \frac{1}{(w(x))^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{(w(y))^{\frac{p}{2}}} \equiv \frac{1}{|x|^\beta |y|^\beta},$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} &\ge C_1 \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps} |x|^\beta |y|^\beta} \\
-C_2 \left(\frac{1}{w(y)} \right)^p \frac{|w(y) - w(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}} &| \frac{u(x)}{w(x)} |^p - C_3 \left(\frac{1}{w(x)} \right)^p \frac{|w(x) - w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} | \frac{u(y)}{w(y)} |^p.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons que

$$C_1 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p \, dxdy}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy$$

$$+C_2 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \left(\frac{1}{w(y)}\right)^p \frac{|w(y)-w(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}} |\frac{u(x)}{w(x)}|^p dxdy + C_3 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \left(\frac{1}{w(x)}\right)^p \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} |\frac{u(y)}{w(y)}|^p dxdy. \tag{2.44}$$

Comme dans le premier cas, nous définissons

$$\tilde{g}_1(x,y) = \left(\frac{1}{w(y)}\right)^p |\frac{u(x)}{w(x)}|^p \frac{|w(y)-w(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}}$$

et

$$\tilde{g}_2(x,y) = \left(\frac{1}{w(x)}\right)^p |\frac{u(y)}{w(y)}|^p \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}},$$

alors $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^{2N}} g_1(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} g_2(x,y)dxdy$, et

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{g}_1(x,y)dxdy \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|y|^{2\beta}|x-y|^{N+ps}} dy \Big) dx.$$

Ainsi, comme dans le premier cas,

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{g}_1(x,y)dxdy = C_4 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} dx = C_4 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^p}{|x|^{ps}} dx$$

où $C_4 = \int_0^{+\infty} |1-\sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-2\beta} K(\sigma)\, d\sigma \in (0,\infty)$. Maintenant, en utilisant l'inégalité de Hardy fractionnaire dans le théorème 0.2, pour v, nous obtenons

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} g_1(x,y)dxdy \leq C_4 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy. \tag{2.45}$$

Combinant (2.44) et (2.45), nous arrivons à

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \geq C \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\beta}} \frac{dy}{|y|^{\beta}}.$$

Par conséquent, nous concluons. $\square$

Deuxième partie

Applications

Chapitre 3

Problèmes avec un opérateur p-laplacien fractionnaire

Ce chapitre est le développement d'une partie de l'article [4] ainsi que les résultats obtenus dans [1].

3.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est de présenter quelques applications des résultats obtenus dans le chapitre 2, pour cela on a considéré trois problèmes, chacun dans une section :
Dans la première section 3.4, nous analysons le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-\Delta)^s_{p,\beta} u & = & f \text{ dans } \Omega, \\ u & = & 0 \text{ dans } I\!\!R^N \setminus \Omega, \end{array}\right.$$

où

$$(-\Delta)^s_{p,\beta}\, u(x) := P.V. \int_{I\!\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^\beta |y|^\beta}$$

et f est une fonction donnée. Notre but est démontré l'existence d'une solution, dans un sens approprié, pour la classe la plus vaste de donné f. En particulier pour $f \in L^1(\Omega)$. Dans le cadre local, l'existence d'une solution "entropique" est prouvé dans [23]. Dans le cas ou f est une mesure de Radon on a le sens renormalisé, voir [38]. Notre objective est de prouver l'existence d'une solution entropique pour $f \in L^1(\Omega)$. Pour $f \geq 0$, on arrive a démontrer que la solution entropique est unique. Comme dans le cas local, notre idée est de procéder par approximation et après on passe a la limite en utilisant des estimations à priori. Enfin, en suivant l'argument utilisé dans [42] et [9], si la donnée f est positive, on démontre que l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ vérifie "une version faible" de l'inégalité Harnack.

Comme conséquence, on considéré dans la deuxième section le cas où $f(x,s) = \lambda s^q + g(x)$,

$s \geq 0$. Suivant les valeurs de q et λ on arrive a démontrer l'existence d'une solution "entropique" pour la classe la plus large de g.

Enfin dans la troisième section on étudie le cas de potentiel de Hardy. Plus précisément nous traitons le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} + u^q, \quad u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

ou $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$. Comme dans le cas local, nous prouvons l'existence d'un exposant critique $q_+(p,s)$ tel que si $q > q_+(p,s)$, le problème précédent n'admet pas de sur-solution positive dans un sens convenable. Pour montrer l'optimalité de l'exposant $q_+(p,s)$, nous construisons une sur-solution convenable dans l'espace bien choisi suivant les valeurs de λ et q.

3.2 Problème avec poids et donnée générale

Soit $s \in (0,1)$, $p \geq 1$ et $0 \leq \beta < \frac{N-ps}{2}$. Pour la simplicité de l'écriture, nous définissons les mesures :

$$d\mu := \frac{dx}{|x|^{2\beta}} \quad \text{et} \quad d\nu := \frac{dxdy}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta}.$$

Rappelons que dans cette section on considère le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ dans } I\!R^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Puisque, nous avons considéré (3.1) avec donnée générale, alors nous avons besoin de préciser le concept de la solution.

Définition 3.1. Supposons que $f \in L^1(\Omega)$, on dit que u est une solution faible du problème (3.1) si pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))d\nu = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

Comme dans le cas local, pour définir la solution entropique, on a besoin de préciser le cadre fonctionnel et l'espace où la solution est bien définie. On commence par la définition suivante.

Définition 3.2. Soit u une fonction mesurable. On dit que $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{\beta,0}(\Omega)$ si $\forall k > 0$ on a $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Maintenant, suivant [17], on définit la notion des solutions d'entropie.

Définition 3.3. Considérons $f \in L^1(\Omega)$, on dit que $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{\beta,0}(\Omega)$ est une solution d'entropie du problème (3.1) si

$$\iint_{R_h} |u(x) - u(y)|^{p-1} d\nu \to 0 \text{ quand } h \to \infty, \tag{3.2}$$

où

$$R_h = \Big\{(x,y) \in I\!R^N \times I\!R^N : h+1 \le \max\{|u(x)|, |u(y)|\} \text{ avec } \min\{|u(x)|, |u(y)|\} \le h \text{ ou } u(x)u(y) < 0\Big\}, \tag{3.3}$$

et pour tout $k > 0$ et $v \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))[T_k(u(x) - v(x)) - T_k(u(y) - v(y))]d\nu \le \\ &\int_\Omega f(x)T_k(u(x) - v(x))\, dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Remarque 3.1. Notons que pour $h >> k$, et en choisissant $\varphi = T_{h-1}(u)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))[T_k(G_{h-1}(u(x))) - T_k(G_{h-1}(u(y)))]d\nu \le \\ &\int_\Omega f(x)T_k(G_{h-1}(u(x)))\, dx \le k\int_{|u|>h-k-1} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Puisque, dans D_Ω, on a

$$|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))[T_k(G_{h-1}(u(x))) - T_k(G_{h-1}(u(y)))] \ge 0,$$

alors en posant

$$\widetilde{R}_h = \Big\{(x,y) \in I\!R^N \times I\!R^N : u(x)u(y) \ge 0 \text{ avec } |u(x)| \ge h \text{ et } h-k-1 \le |u(y)| \le h\Big\},$$

et

$$\widehat{R}_h = \Big\{(x,y) \in I\!R^N \times I\!R^N : u(x)u(y) \ge 0 \text{ avec } |u(x)| \ge h \text{ et } h-k-1 \le |u(x)| \le h\Big\},$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\iint_{\widetilde{R}_h} |u(x) - u(y)|^{p-1}(h - u(y))d\nu \le k\int_{|u|>h-k-1} |f(x)|dx, \tag{3.5}$$

et

$$\frac{1}{2}\iint_{\widehat{R}_h} |u(x) - u(y)|^{p-1}(h - u(x))d\nu \le k\int_{|u|>h-k-1} |f(x)|dx. \tag{3.6}$$

Il est clair que

$$\frac{1}{2}\iint_{\{h-k-1\le u(y)<u(x)\le h\}} (u(x) - u(y))^p d\nu \le k\int_{|u|>h-k-1} |f(x)|dx, \tag{3.7}$$

et

$$\frac{1}{2}\iint_{\{h-k-1\le u(x)<u(y)\le h\}}(u(y)-u(x))^p d\nu \le k\int_{|u|>h-k-1}|f(x)|dx. \tag{3.8}$$

Pour prouver l'existence d'une solution "faible ou bien entropique", on va procéder par approximation. On suppose que $f\in L^1(\Omega)$, soit $\{f_n\}_n\subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n\to f$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et on définit u_n comme l'unique solution du problème approximé :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}u_n &= f_n(x) \text{ dans } \Omega,\\ u_n &= 0 \text{ dans } I\!R^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

Notons que l'existence et l'unicité de u_n se démontre par l'argument variationnel classique dans l'espace $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

La première estimation à priori est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.1. Soit $\{u_n\}_n$ définie comme précédent, alors $\{u_n\}_n$ est bornée dans l'espace $\mathcal{M}^{p_1}(\Omega,d\mu)$ avec $p_1=\frac{(p-1)N}{N-ps}$.

Démonstration. En utilisant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (3.9), on aura

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega}|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(y)-u_n(x))[T_k(u_n(x))-T_k(u_n(y))]d\nu\le k\int_\Omega|f_n(x)|\,dx.$$

Ainsi

$$\int\int_{D_\Omega}|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(y)-u_n(x))[T_k(u_n(x))-T_k(u_n(y))]d\nu\le Ck. \tag{3.10}$$

Rappelons $u_n=T_k(u_n)+G_k(u_n)$, ainsi, en utilisant l'inégalité (1.14) et (3.10) :

$$\frac{1}{k}\int\int_{D_\Omega}|T_k(u_n(x))-T_k(u_n(y))|^p d\nu\le M \text{ pour tout } k>0, \tag{3.11}$$

Maintenant, utilisant l'inégalité de Sobolev avec poids dans le Théorème 2.5, on aura :

$$S\left(\int_{I\!R^N}|T_k(u_n)|^{p_s^*}|x|^{-2\beta\frac{p_s^*}{p}}dx\right)^{p/p_s^*}\le\int\int_{D_\Omega}|T_k(u_n(x))-T_k(u_n(y))|^p d\nu\le Ck.$$

Puisque $\{|u_n|\ge k\}=\{|T_k(u_n)|=k\}$, on obtient que

$$\mu\{x\in\Omega:|u_n|>k\}\le\mu\{x\in\Omega:|T_k(u_n)|=k\}\le\int_\Omega\frac{|T_k(u_n)|^{p_s^*}}{k^{p_s^*}}|x|^{-2\beta\frac{p_s^*}{p}}dx.$$

et par suite, $\mu\{x\in\Omega:|u_n|>k\}\le CM^{\frac{p_s^*}{p}}k^{-(p_s^*-\frac{p_s^*}{p})}$. Posons $p_1=p_s^*-\frac{p_s^*}{p}=\frac{N(p-1)}{N-ps}$, nous concluons que la suite $\{u_n\}_n$ est bornée dans l'espace $\mathcal{M}^{p_1}(\Omega,d\mu)$ et le résultat suit. $\square$

Comme conséquence nous obtenons facilement que la suite $\{|u_n|^{p-2}u_n\}_n$ est bornée dans l'espace $L^\sigma(\Omega, d\mu)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-ps}$.

Comme dans le cas local, nous prouvons maintenant que la suite $\{u_n\}_n$ est bornée dans un espace fractionnaire convenable, plus précisément on a

Lemme 3.2. Supposons que $\{u_n\}_n$ définie comme dans le lemme 3.1 , alors pour tout $q < \dfrac{N(p-1)}{N-s}$ et pour tout $s_1 < s$, on

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} \frac{1}{|x|^\beta |y|^\beta} dy\, dx \le M. \tag{3.12}$$

Démonstration. Soit $q < \dfrac{N(p-1)}{N-s}$ fixé, puisque Ω est un domaine borné, alors il est suffisant de prouver que (3.12) pour s_1 très proche de s. On fixe s_1 tel que

$$\frac{pq(s-s_1)}{p-q} < \beta. \tag{3.13}$$

On définit $w_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(u_n^+(x)+1)^\alpha}$ où $\alpha > 0$ à choisir ultérieurement et $u_n^+(x) = \max\{u_n(x), 0\}$. Dans la suite on note par $C_1, C_2, ...,$ des constantes positives indépendantes de u et qui peuvent changer d'une ligne a l'autre. En utilisant w_n comme fonction test dans (3.9), on obtient

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y)) \frac{(u_n^+(x)+1)^\alpha - (u_n^+(y)+1)^\alpha}{(u_n^+(x)+1)^\alpha (u_n^+(y)+1)^\alpha} d\nu \le \int_\Omega f_n(x)\, dx,$$

donc

$$\int\int_{D_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y)) \frac{(u_n^+(x)+1)^\alpha - (u_n^+(y)+1)^\alpha}{(u_n^+(x)+1)^\alpha (u_n^+(y)+1)^\alpha} d\nu \le C_1. \tag{3.14}$$

Soit $v_n(x) = u_n^+(x) + 1$, puisque

$$\begin{gathered} |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))\Big((u_n^+(x)+1)^\alpha - (u_n^+(y)+1)^\alpha\Big) \ge \\ |u_n^+(x)-u_n^+(y)|^{p-2}(u_n^+(x)-u_n^+(y))\Big((u_n^+(x)+1)^\alpha - (u_n^+(y)+1)^\alpha\Big) = \\ |v_n(x)-v_n(y)|^{p-2}(v_n(x)-v_n(y))\Big(v_n^\alpha(x) - v_n^\alpha(y)\Big), \end{gathered}$$

Par (3.14), il en résulte que

$$\int\int_{D_\Omega} |v_n(x)-v_n(y)|^{p-2}(v_n(x)-v_n(y))(\frac{v_n^\alpha(x)-v_n^\alpha(y)}{v_n^\alpha(x)v_n^\alpha(y)}) d\nu \le C_1.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $v_n \ge 1$ et par l'inégalité (1.12), on obtient que

$$\int\int_{D_\Omega} \frac{|v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(x) - v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(y)|^p}{v_n^\alpha(x)v_n^\alpha(y)} d\nu \le C_2. \tag{3.15}$$

On définit que $q_1 = q\frac{s_1}{s} < q$, et en utilisant l'inégalité de Hölder, il en résulte que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta} = \\
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{qs}}\frac{(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}\frac{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}{(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}|x-y|^{(q-q_1)s}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta|x-y|^N} \\
&\leq \Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^p(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x)v_n(y))^\alpha|x|^\beta|y|^\beta}dy\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\times\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}\frac{(v_n(x)v_n(y))^{\alpha\frac{p}{p-q}}}{(v_n(x)+v_n(y))^{(\alpha-1)\frac{p}{p-q}}}|x-y|^{(q-q_1)s\frac{p}{p-q}}\frac{dy\,dx}{|x-y|^N|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Maintenant, En utilisant l'inégalité algébrique (1.13), on aura

$$|v_n(x)-v_n(y)|^p(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1} \leq C|v_n(x)^{\frac{p+\alpha-1}{p}} - v_n(y)^{\frac{p+\alpha-1}{p}}|^p.$$

Ainsi, en prenant en considération que $\Omega\times\Omega \subset D_\Omega$ et par (3.15), il en résulte que

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^p(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x)v_n(y))^\alpha|x|^\beta|y|^\beta}dy\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq \Big(\int\int_{D_\Omega} \frac{|v_n(x)^{\frac{p+\alpha-1}{p}} - v_n(y)^{\frac{p+\alpha-1}{p}}|^p}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x)v_n(y))^\alpha|x|^\beta|y|^\beta}dy\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \leq C_3.
\end{aligned}
$$

Donc revenons à (3.16), on aura

$$
\begin{aligned}
&\int\int_{D_\Omega} \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \leq \\
&c_4\Big(\int_\Omega\int_\Omega \Big(\frac{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}{(v_n(x)+v_n(y))^\alpha}\Big)^{\frac{q}{p-q}}(v_n(x)+v_n(y))^{\frac{q}{p-q}}\frac{1}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}}.
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité (1.11), on a

$$(v_n(x)+v_n(y))\Big(\frac{v_n(x)v_n(y)}{v_n(x)+v_n(y)}\Big)^\alpha \leq c(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha+1} \leq c_1v_n^{\alpha+1}(x) + c_2v_n^{\alpha+1}(y).$$

Par la suite,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dx\,dy}{|x|^\beta|y|^\beta} \leq \\
&c_5\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}} + c_5\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(y)dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Il est clair que

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta} = \int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(y)dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta}$$

Ainsi, on doit estimer juste le premier terme.

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)dx\ dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta} = \int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)}{|x|^\beta}dx\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|y|^\beta}.$$

Puisque Ω est un domaine borné, alors $\Omega \subset\subset B_R(0)$. Ainsi

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)dx\ dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)}{|x|^\beta}dx\int_{B_R(0)} \frac{dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|y|^\beta}$$

où $v_n = 1$ dans $B_R(0)\setminus\Omega$.

On pose $r = |x|$ et $\rho = |y|$, alors $x = rx', y = \rho y'$, où $|x'| = |y'| = 1$,

Soit

$$\tau = \frac{(\alpha+1)q}{p-q} \qquad et \qquad \theta = \frac{ps(q-q_1)}{p-q}. \tag{3.18}$$

Ainsi

$$\int\int_{D_\Omega} \frac{v_n^\tau(x)dx\ dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\ dx}{|x|^\beta}\int_0^R \frac{\rho^{N-1}}{\rho^\beta r^{N-\theta}}\left(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\frac{\rho}{r}y'|^{N-\theta}}\right)d\rho.$$

on pose $\sigma = \dfrac{\rho}{r}$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)dx\ dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} &\le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\ dx}{|x|^{2\beta-\theta}}\int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1}\left(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N-\theta}}\right)d\sigma\\ &\le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\ dx}{|x|^{2\beta-\theta}}\int_0^{\infty} \sigma^{N-\beta-1}\left(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N-\theta}}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

On définit

$$K(\sigma) = \int_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N-\theta}},$$

comme dans [48], on définit

$$K_\theta(\sigma) = 2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\beta(\frac{N-1}{2})}\int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\xi)}{(1-2\sigma\cos(\xi)+\sigma^2)^{\frac{N-\theta}{2}}}d\xi. \tag{3.19}$$

Notons que $K_\theta(\sigma) \le C|1-\sigma|^{-1+\theta}$ quand $\sigma \to 1$ et $K_\theta(\sigma) \simeq \sigma^{\theta-N}$ quand $\sigma \to \infty$.

Par conséquent, on aura

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{v_n^\tau(x) dx\ dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta |y|^\beta} \leq$$

$$\int_{B_{\frac{R}{3}}(0)} \frac{v_n^\tau(x)\ dx}{|x|^{2\beta-\theta}} \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma + \int_{B_R(0)\setminus B_{\frac{R}{3}}(0)} \frac{v_n^\tau(x)\ dx}{|x|^{2\beta-\theta}} \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma. \tag{3.20}$$

Rappelons que $r = |x|$, alors si $x \in B_R(0)\setminus B_{\frac{R}{3}}(0)$, on a $\dfrac{R}{r} < 3$. en prenant donc en considération que $\theta > 0$ et le comportement de K_θ au voisinage de 1, on obtient que

$$\int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \leq C_1 \int_0^3 \sigma^{N-\beta-1} |1-\sigma|^{1-\theta}\, d\sigma = C_2 < \infty.$$

Maintenant si $r \equiv |x| < \frac{R}{3}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma &= \int_0^3 \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma + \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \\ &\leq C_2 + \left(\frac{R}{r}\right)^a \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \end{aligned}$$

où $a > 0$ à choisir ultérieurement.

Puisque

$$\int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \leq \int_3^{\infty} \sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma,$$

en utilisant le fait que $\sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma) \simeq \sigma^{-1-\beta-a+\theta}$ quand $\sigma \to \infty$, choisissons $a > \theta$, il en résulte que $\int_0^\infty \sigma^{N-\beta-a-1} K(\sigma) d\sigma \equiv C_3 < \infty$.

Maintenant, en revenant à (3.20), on aura

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta |y|^\beta} dx\ dy \\ &\leq C_1 \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)}{|x|^{2\beta-\theta}}\ dx + C_2 R^a \int_{B_{\frac{R}{3}}(0)} \frac{v_n^\tau(x)}{|x|^{2\beta+a-\theta}}\ dx \\ &\leq C(R) \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)}{|x|^{2\beta+a-\theta}}\ dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Puisque $q < \frac{(p-1)N}{N-s}$, on peut choisir $\alpha > 0$ dans (3.18), tel que $\tau < \frac{(p-1)N}{N-ps}$, ainsi en utilisant le lemme 3.1, et l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\int\int_{D_\Omega} \frac{v_n^\tau(x)}{|x-y|^{N-\mu}|x|^\beta|y|^\beta}dy\;dx \le C_6\int_{B_R(0)}\frac{v_n^\tau(x)}{|x|^{2\beta-\theta}}\;dx \le C_7 \text{ pour tout n} \tag{3.22}$$

Par (3.17) et (3.22) on conclut que :

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n^+(x)-u_n^+(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\;dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\;dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C_8.$$

Dans la même direction et en utilisant $1-\dfrac{1}{(u_n^-(x)+1)^\alpha}$ comme fonction test dans (3.9), on obtient que

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n^-(x)-u_n^-(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\;dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C.$$

En combinant les estimations ci-dessus, on trouve

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\;dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C$$

et le résultat suit. □

Remarque 3.2. Comme conséquence on obtient l'existence d'une fonction mesurable u telle que $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, $|u|^{p-2}u \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ pour tout $\sigma < \dfrac{N}{N-ps}$, $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Il est clair que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, comme $u_n = 0$ p.p. dans $I\!R^N\backslash\Omega$, alors $u = 0$ p.p. dans $I\!R^N\backslash\Omega$.

Notons que par le lemme 3.1 on conclut que

$$|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u \text{ fortement dans } L^a(\Omega, d\mu) \text{ pour tout } a < \frac{N}{N-ps}.$$

Soit

$$U_n(x,y) = |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y)) \text{ et } U(x,y) = |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y)). \tag{3.23}$$

Puisque Ω est un domaine borné, alors par le résultat du lemme 3.2 et en utilisant le lemme de Vitali, on obtient que

$$U_n \to U \text{ fortement dans } L^1(\Omega\times\Omega, d\nu).$$

Nous pouvons maintenant démontrer le premier résultat d'existence.

Théorème 3.1. Supposons que $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème (3.1) a une unique solution u

telle que pour tout $q < \dfrac{N(p-1)}{N-s}$ et pour tout $s_1 < s$,

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} \frac{1}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}} dy\ dx \leq M. \tag{3.24}$$

et $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, pour tout $k > 0$. Si $p > 2 - \dfrac{s}{N}$, alors $u \in W^{s_1,q}_{\beta,0}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < \dfrac{N(p-1)}{N-s}$, et pour tout$s_1 < s$.

Démonstration. Notons que l'estimation (3.24) suit en utilisant le lemme 3.2 et le lemme de Fatou.

Fixons $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_0(\Omega)$, et prenons ϕ comme fonction test dans (3.9), il en résulte que

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\phi(x)-\phi(y))d\nu = \int_{\Omega} f_n(x)\phi(x)\,dx, \tag{3.25}$$

on pose $\Phi(x,y) = \phi(x) - \phi(y)$, par (3.25), on a

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U(x,y)\Phi(x,y)d\nu + \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \Big(U_n(x,y) - U(x,y)\Big)\Phi(x,y)d\nu = \int_{\Omega} f_n(x)\phi(x)\,dx. \tag{3.26}$$

Il est clair que

$$\int_{\Omega} f_n(x)\phi(x)\,dx \to \int_{\Omega} f(x)\phi(x)\,dx \text{ quand } n \to \infty.$$

Nous affirmons que

$$\int\int_{D_\Omega} \Big(U_n(x,y) - U(x,y)\Big)\Phi(x,y)d\nu \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.27}$$

comme $u_n \to u$ p.p. dans Ω, il en résulte que

$$\frac{U_n(x,y)\Phi(x,y)}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}} \to \frac{U(x,y)\Phi(x,y)}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}} \ p.p. \text{ dans } D_\Omega.$$

En utilisant le fait que $u(x) = u_n(x) = \phi(x) = 0$ pour tout $x \in I\!R^N \backslash \Omega$, on aura

$$\int_{I\!R^N\backslash\Omega}\int_{I\!R^N\backslash\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)d\nu = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int\int_{D_\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)d\nu = \int\int_{\Omega\times\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)d\nu \\
&+ \int_{I\!R^N\backslash\Omega}\int_{\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)d\nu + \int_{\Omega}\int_{I\!R^N\backslash\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)d\nu \\
&= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

En utilisant le lemme 3.2 et la remarque 3.2, on obtient facilement que

$$I_1(n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Maintenant pour $I_2(n)$, il est clair que pour $(x, y) \in \Omega \times B_R \setminus \Omega$, on a

$$|(U_n(x, y) - U(x, y))\Phi(x, y)| \leq (|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})|\phi(x)| \text{ dans } \Omega \times B_R \backslash \Omega.$$

Puisque

$$\sup_{\{x \in \text{Supp}\phi,\ y \in B_R \backslash \Omega\}} \frac{1}{|x - y|^{N+ps}} \leq C,$$

alors

$$\Big|\frac{(U_n(x, y) - U(x, y))\Phi(x, y)}{|x - y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}\Big| \leq \frac{(|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})|\phi(x)|}{|x|^\beta|y|^\beta} \equiv Q_n(x, y).$$

En utilisant le lemme 3.1 et la remarque 3.2, on obtient $Q_n \to Q$ fortement dans $L^1(\Omega \times B_R \backslash \Omega)$ avec

$$Q(x, y) = 2|u(x)|^{p-1}|\phi(x)||x|^{-\beta}|y|^{-\beta}.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de convergence dominée, on aura $I_2(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Dans la même direction on obtient $I_3(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Par conséquent (3.27) découle et l'affirmation est prouvée.

Et par suite, en passant a la limite dans (3.26) il en résulte que

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U(x, y)\Phi(x, y)d\nu = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx.$$

Ainsi on conclut. □

Remarque 3.3.

1. Il est clair qu'on a le même résultat d'existence si on remplace f par une mesure bornée de Radon ν.
2. Dans le cas où $\beta = 0$, on aura le même résultat d'existence et de régularité obtenu dans [57].

Cas d'une donnée positive : Solution entropique

Si $f \gneq 0$, on choisit $f_n = T_n(f)$, ainsi $\{u_n\}_n$ est une suite croissante. Dans ce cas nous pouvons montrer que le problème (3.1) a une solution entropique dans le sens de la définition 3.3.Pour cela on a le Théorème suivant.

Théorème 3.2. Supposons que $f \in L^1(\Omega)$ telle que $f \gneq 0$, alors le problème (3.1) a une solution entropique positive unique u dans le sens de la Définition 3.3. De plus, u_n est l'unique solution du problème approximé

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n &= f_n(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.29}$$

avec $f_n = T_n(f)$, alors $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Avant d'entamer la preuve de Théorème 3.2, on démontre le résultat suivant :

Lemme 3.3. Soit $\{u_n\}_n$ et u définies précédemment, alors

$$T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u) \qquad \text{fortement dans } W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega).$$

la preuve du lemme 3.3 sera une conséquence du résultat général de compacité suivant.

Lemme 3.4. Soit $\{u_n\}_n \subset W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ une suite croissante telle que $u_n \geq 0$ et $(-\Delta)^s_{p,\beta} u_n \geq 0$. Supposons que $\{T_k(u_n)\}_n$ est bornée dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, alors il existe une fonction mesurable u telle que $u_n \uparrow u$ p.p. dans Ω, $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ pour tout $k > 0$ et

$$T_k(u_n) \longrightarrow T_k(u) \quad \text{fortement dans } W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega). \tag{3.30}$$

Démonstration. Puisque $\{T_k(u_n)\}_n$ est bornée dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, alors en utilisant la monotonie de la suite $\{u_n\}_n$ on obtient facilement l'existence de u telle que $u_n \uparrow u$ p.p. dans $\Omega, T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ et $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$. Puisque $(-\Delta)^s_{p,\beta} u_n \geq 0$, alors

$$\langle (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n, T_k(u_n) - T_k(u) \rangle \leq 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\int\int_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y)))d\nu \\ &\leq \int\int_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))(T_k(u(x)) - T_k(u(y)))d\nu. \end{aligned} \tag{3.31}$$

On définit :

$$\begin{aligned} I_{1,n} &\equiv \int\int_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y)))d\nu \\ I_{2,n} &\equiv \int\int_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))(T_k(u(x)) - T_k(u(y)))d\nu. \end{aligned}$$

Analysons chaque terme dans l'inégalité précédente. Pour simplifier l'écriture, on pose

$$\mathrm{T}_{n,k}(x,y) \equiv |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^{p-2}(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))).$$

on a

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \int\int_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p d\nu \\ &+ \int\int_{D_\Omega} \Big[U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y)\Big](T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y)))d\nu \end{aligned}$$

Dans la même direction, en utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$\begin{aligned} I_{2,n} &= \int\int_{D_\Omega} \mathrm{T}_{n,k}(x,y)(T_k(u(x)) - T_k(u(y)))d\nu \\ &+ \int\int_{D_\Omega} \Big[U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y)\Big](T_k(u(x)) - T_k(u(y)))d\nu \\ &\leq \frac{p-1}{p}\int\int_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p d\nu + \frac{1}{p}\int\int_{D_\Omega} |T_k(u(x)) - T_k(u(y))|^p d\nu \\ &+ \int\int_{D_\Omega} \Big[U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y)\Big](T_k(u(x)) - T_k(u(y)))d\nu. \end{aligned}$$

En combinant les estimations précédentes, et en revenant à (3.31) on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\int\int_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p d\nu \\ +& \int\int_{D_\Omega} \Big[U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y)\Big]\Big[(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))) - (T_k(u_n(y)) - T_k(u(y)))\Big]d\nu \\ \leq& \frac{1}{p}\int\int_{D_\Omega} |T_k(u(x)) - T_k(u(y))|^p d\nu. \end{aligned} \tag{3.32}$$

On définit

$$K_n(x,y) \equiv \Big[U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y)\Big]\Big[(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))) - (T_k(u_n(y)) - T_k(u(y)))\Big], \tag{3.33}$$

Nous affirmons que $K_n(x,y) \geq 0\, p.p$ dans D_Ω. Pour le voir, on pose

$$D_1 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \leq k, u_n(y) \leq k\},\ D_2 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \geq k, u_n(y) \geq k\}.$$

$$D_3 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \geq k, u_n(y) \leq k\},\ D_4 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \leq k, u_n(y) \geq k\},$$

alors $D_\Omega = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

Dans D_1, on a $U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y) = 0$, alors $K_n(x,y) = 0$. Dans la même direction, si $(x,y) \in D_2$, on a $u(x) \geq u_n(x) \geq k$ et $u(y) \geq u_n(y) \geq k$, alors $[(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))) - (T_k(u_n(y)) - T_k(u(y)))\Big] = 0$, ainsi $K_n(x,y) = 0$ dans D_2.

Supposons que $(x,y) \in D_3$, alors

$$U_n(x,y) - \mathrm{T}_{n,k}(x,y) = (u_n(x) - u_n(y))^{p-1} - (k - u_n(y))^{p-1} \geq 0.$$

Puisque

$$[(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))) - (T_k(u_n(y)) - T_k(u(y)))\Big] = -(T_k(u_n(y)) - T_k(u(y))) \geq 0,$$

Par (3.33) il en résulte que $K_n(x,y) \geq 0$ dans D_3. Dans la même direction, on peut montrer que $K_n(x,y) \geq 0$ dans D_4. Ainsi $K_n(x,y) \geq 0$ p.p dans D_Ω et le résultat suit en revenant à (3.32) il en résulte que

$$\limsup_{n\to\infty} \int\int_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p d\nu \leq \int\int_{D_\Omega} |T_k(u(x)) - T_k(u(y))|^p d\nu.$$

Puisque $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, alors $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ et on conclut.

□

Remarque 3.4.

1. Comme conséquence de la convergence forte précédente, on trouve

$$\int\int_{D_\Omega} K_n(x,y)d\nu \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

2. Soit $w_n = 1 - \dfrac{1}{1+u_n}$ et $w = 1 - \dfrac{1}{1+u}$, en utilisant w_n comme fonction test dans (3.9), on obtient

$$\int\int_{D_\Omega} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{(1+u_n(x))(1+u_n(y))} d\nu = \int_\Omega f_n(x)w_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)w(x)dx \text{ quand } n \to \infty,$$

où $w = 1 - \dfrac{1}{1+u}$. Pour $k > 0$ fixé, on définit les ensembles

$$A_n = D_\Omega \cap \{u_n(x) \geq 2k, u_n(y) \leq k\},\ A = D_\Omega \cap \{u(x) \geq 2k, u(y) \leq k\},$$

Il est clair que pour $(x,y) \in A_n$, on a $u_n(x) - u_n(y) \geq \frac{1}{2}u_n(x)$. Ainsi

$$\int\int_{D_\Omega} u_n^{p-1}(x)\chi_{\{A_n\}}(x,y)d\nu \leq C(k)\int\int_{D_\Omega} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{(1+u_n(x))(1+u_n(y))} d\nu < \bar{C}(k). \quad (3.34)$$

Puisque $u_n\chi_{\{A_n\}} \to u\chi_{\{A\}}$ *p.p* dans D_Ω, alors si $p > 2$, on a

$$u_n\chi_{\{A_n\}} \rightharpoonup u\chi_{\{A\}} \text{ faiblement dans } L^{p-1}(D_\Omega, d\nu).$$

3. De (3.34) on conclut que

$$\nu\{D_\Omega \cap A_n\} \equiv \int\int_{D_\Omega \cap A_n} d\nu \leq \tilde{C}(k).$$

Par le lemme de Fatou, on trouve que

$$\nu\{D_\Omega \cap A\} \equiv \int\int_{D_\Omega \cap A} d\nu \leq \tilde{C}(k).$$

Maintenant, on peut entamer la preuve de l'existence et l'unicité de la solution entropique de notre problème.

Preuve de Théorème 3.2 : Partie existence :
Il est clair qu'en utilisant le Théorème 3.1 on aura l'existence de u, de plus la convergence forte de $\{T_k(u_n)\}_n$ dans l'espace $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ est une conséquence de Lemme 3.3. Pour finir il faut juste montrer que u est une solution entropique de problème (3.1) au sens de la Définition 3.3. On commence par montrer (3.2). Puisque $u, u_n \geq 0$, alors l'ensemble R_k dans la Définition 3.3 est réduit à

$$R_k = \{(x,y) \in I\!R^N \times I\!R^N : k+1 \leq \max\{u(x), u(y)\} \text{ avec } \min\{u(x), u(y)\} \leq k\}.$$

En utilisant $T_1(G_k(u_n))$ comme fonction test dans (3.9), il en résulte que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))[T_1(G_k(u_n(x))) - T_1(G_k(u_n(y)))]d\nu = \\ &\int_\Omega f_n(x) T_1(G_k(u_n(x)))\,dx \leq \int_{u_n \geq k} f_n.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que, pour $(x,y) \in R_k$, on a

$$|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))[T_1(G_k(u_n(x))) - T_1(G_k(u_n(y)))] \geq 0,$$

Ainsi, en utilisant le lemme de Fatou et (3.35), on conclut que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_1(G_k(u(x))) - T_1(G_k(u(y)))]d\nu \leq \\ &\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))[T_1(G_k(u_n(x))) - T_1(G_k(u_n(y)))]d\nu \\ &\leq \int_\Omega f(x) T_1(G_k(u(x)))\,dx \leq \int_{u \geq k} f(x)dx.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Il est clair que pour tout $(x,y) \in R_k$, on a

$$|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_1(G_k(u(x))) - T_1(G_k(u(y)))] \geq |u(x)-u(y)|^{p-1},$$

Par la suite, en utilisant le fait que

$$\int_{u \geq k} f(x)dx \to 0 \text{ as } k \to \infty,$$

et par (3.36) on conclut que

$$\int\int_{R_k} |u(x) - u(y)|^{p-1} d\nu \to 0 \text{ as } k \to \infty.$$

Ainsi (3.2) suit.
Rappelons que

$$U_n(x,y) = |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y)) \text{ et } U(x,y) = |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y)).$$

Soit $v \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, en prenant $T_k(u_n - v)$ comme fonction test dans (3.9), on montre que

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U_n(x,y)[T_k(u_n(x) - v(x)) - T_k(u_n(y) - v(y))]d\nu = \int_\Omega f_n(x) T_k(u_n(x) - v(x))\, dx.$$

Il est clair que

$$\int_\Omega f_n(x) T_k(u_n(x) - v(x))\, dx \to \int_\Omega f(x) T_k(u(x) - v(x))\, dx \text{ quand } n \to \infty.$$

Maintenant on traite le premier terme. On a

$$U_n(x,y)[T_k(u_n(x) - v(x)) - T_k(u_n(y) - v(y))] =: K_{1,n}(x,y) + K_{2,n}(x,y), \tag{3.37}$$

où

$$\begin{aligned} K_{1,n}(x,y) &= |(u_n(x) - v(x)) - (u_n(y) - v(y))|^{p-2}((u_n(x) - v(x)) - (u_n(y) - v(y))) \\ &\times [T_k(u_n(x) - v(x)) - T_k(u_n(y) - v(y))], \end{aligned}$$

et

$$\begin{gathered} K_{2,n}(x,y) = \\ \Big[U_n(x,y) - |(u_n(x) - v(x)) - (u_n(y) - v(y))|^{p-2}((u_n(x) - v(x)) - (u_n(y) - v(y)))\Big] \\ \times [T_k(u_n(x) - v(x)) - T_k(u_n(y) - v(y))]. \end{gathered}$$

Il est clair que $K_{1,n}(x,y) \geq 0$ p.p. dans D_Ω, puisque

$$\begin{aligned} K_{1,n}(x,y) &\to |(u(x) - v(x)) - (u(y) - v(y))|^{p-2}((u(x) - v(x)) - (u(y) - v(y))) \\ &\times [T_k(u(x) - v(x)) - T_k(u(y) - v(y))] \; p.p. \text{ dans } D_\Omega, \end{aligned}$$

comme $n \to \infty$, en utilisant le lemme de Fatou, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\int\int_{D_\Omega} K_{1,n}(x,y)d\nu \geq \\
&\int\int_{D_\Omega} \Big[|(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))\Big] \\
&\times[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]d\nu.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

on traite maintenant avec $K_{2,n}$. on pose $w_n = u_n - v$, $w = u - v$, $\sigma_1(x,y) = u_n(x) - u_n(y)$ et $\sigma_2(x,y) = w_n(x) - w_n(y)$, alors

$$K_{2,n}(x,y) = \Big[|\sigma_1(x,y)|^{p-2}\sigma_1(x,y) - |\sigma_2(x,y)|^{p-2}\sigma_2(x,y)\Big] \times [T_k(u_n(x)-v(x)) - T_k(u_n(y)-v(y))],$$

nous affirmons que

$$\begin{aligned}
&\int\int_{D_\Omega} K_{2,n}(x,y)d\nu \to \\
&\int\int_{D_\Omega} \Big[U(x,y) - |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))\Big] \\
&\times[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]d\nu \text{ quand } \; n \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Nous divisons la preuve de cette dernière affirmation en deux cas, suivant la valeur de p.

Le premier cas $p \in (1,2]$ (Cas singulier) :

Dans ce cas on a

$$\Big||\sigma_1(x,y)|^{p-2}\sigma_1(x,y) - |\sigma_2(x,y)|^{p-2}\sigma_2(x,y)\Big| \leq C|\sigma_1(x,y) - \sigma_2(x,y)|^{p-1} = C|v(x) - v(y)|^{p-1}.$$

Ainsi

$$|K_{2,n}(x,y)| \leq C|v(x)-v(y)|^{p-1}|T_k(u_n(x)-v(x)) - T_k(u_n(y)-v(y))| \equiv \tilde{K}_{2,n}(x,y). \tag{3.40}$$

En utilisant le fait que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ et puisque $v \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on obtient

$$\tilde{K}_{2,n} \to C|v(x)-v(y)|^{p-1}|T_k(u(x)-v(x)) - T_k(u(y)-v(y))| \text{ fortement dans } L^1(D_\Omega, d\nu).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée on trouve que

$$\begin{aligned}
&\int\int_{D_\Omega} K_{2,n}(x,y)d\nu \to \\
&\int\int_{D_\Omega} \Big[U(x,y) - |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))\Big] \\
&\times[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]d\nu,
\end{aligned}$$

comme $n \to \infty$ et le résultat suit dans ce cas.

Deuxième cas $p > 2$ (Cas dégénéré) :

Ce cas est plus pertinent. Comme dans le cas précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big||\sigma_1(x,y)|^{p-2}\sigma_1(x,y) - |\sigma_2(x,y)|^{p-2}\sigma_2(x,y)\Big| \\
&\le C_1|\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)|^{p-1} + C_2|\sigma_2(x,y)|^{p-2}|\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)| \\
&\le C_1|v(x)-v(y)|^{p-1} + C_2|v(x)-v(y)||w_n(x)-w_n(y)|^{p-2} \\
&\le C_1|v(x)-v(y)|^{p-1} + C_2|v(x)-v(y)||u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|K_{2,n}(x,y)| &\le C_1|v(x)-v(y)|^{p-1}|T_k(u_n(x)-v(x)) - T_k(u_n(y)-v(y))| \\
&+ C_2|v(x)-v(y)||u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}|T_k(w_n(x)) - T_k(w_n(y))| \\
&\equiv \bar{K}_{2,n}(x,y) + \check{K}_{2,n}(x,y).
\end{aligned}$$

Le terme $\bar{K}_{2,n}(x,y)$ est traité comme $\tilde{K}_{2,n}$ définie par (3.40). Donc il nous reste à traiter $\check{K}_{2,n}(x,y)$.

On définit

$$D_1 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \le \tilde{k}, u_n(y) \le \tilde{k}\},$$

où $\tilde{k} >> k + ||v||_\infty$ est une "très grande" constante, alors en utilisant le fait que $T_{\tilde{k}}(u_n) \to T_{\tilde{k}}(u)$ fortement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, on obtient

$$\check{K}_{2,n}(x,y)\chi_{\{D_1\}} \to C_2|v(x)-v(y)||u(x)-u(y)|^{p-2}|T_k(w(x)) - T_k(w(y))|\chi_{\{u(x)\le\tilde{k},u(y)\le\tilde{k}\}}$$

fortement dans $L^1(D_\Omega, d\nu)$.

Maintenant, on considère l'ensemble

$$D_2 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \ge k_1, u_n(y) \ge k_1\},$$

où $k_1 > k + ||v||_\infty$, alors $\check{K}_{2,n}(x,y)\chi_{\{D_2\}}(x,y) = 0$.

Ainsi, on limite l'étude aux ensembles :

$$D_3 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(x) \ge 2k, u_n(y) \le k\},$$

ou

$$D_4 = \{(x,y) \in D_\Omega : u_n(y) \ge 2k, u_n(x) \le k\}.$$

On utilisera la remarque 3.4 et l'argument de dualité.

Il est clair que pour $(x,y) \in D_3$, on a

$$\check{K}_{2,n}(x,y)\chi_{\{D_3\}}(x,y) \leq C(k)|v(x)-v(y)||T_k(w_n(x))-T_k(w_n(y))|u_n^{p-2}(x)\chi_{\{D_3\}}(x,y)$$

De la remarque 3.4, on sait que :

$$u_n^{p-2}\chi_{\{D_3\}} \rightharpoonup u^{p-2}\chi_{\{u(x)\geq 2k,u(y)\leq k\}} \text{ faiblement dans } L^{\frac{p-1}{p-2}}(D_\Omega, d\nu). \tag{3.41}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\Big[|v(x)-v(y)||T_k(w_n(x))-T_k(w_n(y))|\Big]^{p-1} \leq \frac{p-1}{p}|T_k(w_n(x))-T_k(w_n(y))|^p + \frac{1}{p}|v(x)-v(y)|^{p(p-1)}\\ &\leq \frac{p-1}{p}|T_k(w_n(x))-T_k(w_n(y))|^p + \frac{1}{p}(2||v||_\infty)^{p(p-2)}|v(x)-v(y)|^p\\ &=: L_n(x,y).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $L_n \to L$ fortement dans $L^1(D_\Omega, d\nu)$ avec,

$$L(x,y) = \frac{p-1}{p}|T_k(w(x))-T_k(w(y))|^p + \frac{1}{p}(2||v||_\infty)^{p(p-2)}|v(x)-v(y)|^p, \tag{3.42}$$

Ainsi par (3.41) et (3.42) et en utilisant l'argument du dualité on trouve

$$\check{K}_{2,n}\chi_{\{D_3\}} \to C_2|v(x)-v(y)||u(x)-u(y)|^{p-2}|T_k(w(x))-T_k(w(y))|\chi_{\{u(x)\geq 2k,u(y)\leq k\}}$$

fortement dans $L^1(D_\Omega, d\nu)$.

Dans la même direction on peut traiter l'ensemble D_4.

En combinant les estimations précédentes et par le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\begin{aligned}&\int\int_{D_\Omega} K_{2,n}(x,y)d\nu \to\\ &\int\int_{D_\Omega}\Big[U(x,y) - |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))\Big]\\ &\times[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]d\nu\end{aligned} \tag{3.43}$$

quand $n \to \infty$ et le résultat suit.

Ainsi, par (3.38),(3.39) et en revenant à (3.37), on conclut

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]d\nu \leq\\ &\int_\Omega f(x)T_k(u(x)-v(x))\,dx\end{aligned} \tag{3.44}$$

et le résultat suit. □

Il est clair que si u est une solution entropique de (3.1), alors pour toute $w \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))d\nu = \int_\Omega f(x)w(x)\,dx \tag{3.45}$$

où $U(x,y) = |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))$.
Cependant, on peut prouver que (3.45) reste valable pour tout $w \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $w \equiv 0$ dans l'ensemble $\{u > k\}$ pour quelques $k > 0$. plus précisément on a le lemme suivant :

Lemme 3.5. Supposons que u est une solution entropique de (3.1) avec $f \gneq 0$, alors pour tout $w \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que, pour certains $k > 0$, $w \equiv 0$ dans l'ensemble $\{u > k\}$, on a

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))d\nu = \int_\Omega f(x)w(x)\,dx. \tag{3.46}$$

Démonstration. Soit $w \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $w \equiv 0$ dans l'ensemble $\{u > k_0\}$ pour quelque $k_0 > 0$ et on définit $v_h = T_h(u-w)$ avec $h >> k_0 + ||w||_\infty + 1$.

Puisque u est une solution entropique de (3.1), alors pour k fixé tel que $k >> \max\{k_0, ||w||_\infty\}$, on a

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v_h(x)) - T_k(u(y)-v_h(y))]d\nu \leq \\ \int_\Omega f(x)T_k(u(x)-v_h(x))\,dx.\end{gathered} \tag{3.47}$$

Il est clair que

$$\int_\Omega f(x)T_k(u(x)-v_h(x))\,dx \to \int_\Omega f(x)w\,dx \text{ quand } h \to \infty.$$

Notons que, pour $h >> ||w||_\infty$, on a $\{u \leq w-h\} = \emptyset$, donc pour h comme avant, il résulte que

$$\{|u(x)-w(x)| \geq h\} \equiv \{(u(x)-w(x)) \geq h\}.$$

On définit

$$A_h \equiv \{(x,y) \in D_\Omega : |u(x)-w(x)| < h,\ |u(y)-w(y)| < h\},$$

$$\begin{aligned} B_h &\equiv \{(x,y) \in D_\Omega : |u(x)-w(x)| \geq h,\ \ |u(y)-w(y)| \geq h\} \\ &\equiv \{(x,y) \in D_\Omega : (u(x)-w(x)) \geq h,\ \ (u(y)-w(y)) \geq h\}\end{aligned}$$

et

$$E_h \equiv \{(x,y) \in D_\Omega : (u(x)-w(x)) \geq h,\ |u(y)-w(y)| \leq h\},$$

$$F_h \equiv \{(x,y) \in D_\Omega : |u(x)-w(x)| < h,\ (u(y)-w(y)) > h\}.$$

Alors

$$\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v_h(x))-T_k(u(y)-v_h(y))]d\nu = \iint_{A_h} + \iint_{B_h} + \iint_{E_h} + \iint_{F_h}$$
$$= I_{A_h} + I_{B_h} + I_{E_h} + I_{F_h}.$$

Il est clair que

$$I_{A_h} = \iint_{A_h} U(x,y)[T_k(w(x))-T_k(w(y))]d\nu = \iint_{A_h} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu$$
$$= \iint_{A_h\cap\{u(x)<k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu + \iint_{A_h\cap\{u(x)>k_0,u(y)>k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu$$
$$+ \iint_{A_h\cap\{u(x)>k_0,u(y)\le k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu + \iint_{A_h\cap\{u(x)\le k_0,u(y)>k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu$$

$$= I_1(h) + I_2(h) + I_3(h) + I_4(h)$$

Puisque $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, on a

$$I_1(h) \to \iint_{\{u(x)<k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu \text{ quand } h \to \infty.$$

En utilisant les propriétés de w, on a $I_2(h) = 0$. En ce qui concerne $I_3(h)$, on a

$$I_3(h) = \iint_{A_h\cap\{k_0<u(x)<2k_0,u(y)\le k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu$$
$$+ \iint_{A_h\cap\{u(x)>2k_0,u(y)\le k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu$$
$$= J_1(h) + J_2(h).$$

Comme plus haut, puisque $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, alors

$$J_1(h) \to \iint_{\{k_0<u(x)<2k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu \text{ quand } h \to \infty. \tag{3.48}$$

Pour $J_2(h)$, on a

$$\Big|U(x,y)[w(x))-w(y)]\Big| \le ||w||_\infty \Big|U(x,y)\Big| = ||w||_\infty \Big|u(x)-u(y)\Big|^{p-1}.$$

En utilisant le fait que

$$\iint_{\{u(x)>2k_0,u(y)\le k_0\}} \Big|U(x,y)\Big| d\nu < \infty,$$

Alors par le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$J_2(h) \to \iint_{\{u(x)\ge 2k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu \text{ quand } h \to \infty. \tag{3.49}$$

Ainsi, par (3.48) et (3.49) on obtient que : quand $h \to \infty$,

$$\begin{aligned} I_3(h) \to & \iint_{\{k_0<u(x)<2k_0, u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu \\ & + \iint_{\{u(x)\geq 2k_0, u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu \end{aligned}$$

Par le même raisonnement on peut traiter $I_4(h)$. Donc

$$I_{A_h} \to \iint_{D_\Omega} U(x,y)[w(x)-w(y)]d\nu \text{ quand } h \to \infty.$$

Maintenant, pour $(x,y) \in B$, on a $v(x)=v(y)=h$, alors

$$I_{B_h} = \iint_B U(x,y)[T_k(u(x)-h)-T_k(u(y)-h)]d\nu \geq 0.$$

Et, pour $(x,y) \in E_h$, on a $u(x) \geq h - ||w||_\infty > k_0$, ainsi $w(x)=0$. Donc

$$E_h \equiv E_h \cap \{u(y) < h - ||w||_\infty - 1\} \cup E_h \cap \{h \geq u(x), u(y) \geq h - ||w||_\infty - 1\} \equiv E_1(h) \cup E_2(h).$$

Il est clair que pour $(x,y) \in E_2(h)$, on a $w(x)=w(y)=0$, alors

$$U(x,y)[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v_h(y))] = U(x,y)[T_k(G_h(u(x)))-T_k(G_h(u(y)))] \geq 0.$$

Ainsi

$$\iint_{E_2(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v_h(y))]d\nu \geq 0.$$

Par la suite, on conclut que

$$I_{E_h} \geq \iint_{E_1(h)} U(x,y)[T_k(G_h(u(x)))-T_k(w(y))]d\nu \geq -2k \iint_{E_1(h)} \Big|U(x,y)\Big|d\nu.$$

Soit $h_1 = h - ||w||_\infty - 1$, alors par (3.2) on trouve

$$\iint_{E_1(h)} \Big|U(x,y)\Big|d\nu \leq \iint_{u(x)>h_1, u(y)<h_1-1} \Big|U(x,y)\Big|d\nu \to 0 \text{ quand } h \to \infty.$$

Ainsi $I_{E_h} \geq o(h)$.

Avec le même raisonnement on peut prouver que $I_{F_h} \geq o(h)$. Par conséquent, on aboutit à

$$\liminf_{h\to\infty} \frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]d\nu \geq \frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))d\nu$$

Comme conclusion, on a prouvé que

$$\frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))d\nu \leq \int_\Omega f(x)w(x)dx.$$

Remplaçons w par $-w$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))d\nu = \int_\Omega f(x)w(x)dx$$

qui est le résultat cherché. □

Maintenant, on peut prouver le résultat d'unicité dans le Théorème 3.2.

Preuve de Théorème 3.2 : Partie unicité :

Soit u la solution entropique positive définie dans le théorème (3.1), rappelons que $u = \limsup u_n$ où u_n est l'unique solution du problème approximé (3.9). Supposons que $\bar{u}$ est une autre solution entropique positive du problème (3.1). On affirme que $u_n \le \bar{u}$ pour tout n. Pour prouver l'affirmation, on fixe n et on définit $w_n = (u_n - v)_+$, alors $w_n = (u_n - T_k(v))_+$ où $k >> ||u_n||_\infty$. Donc $w_n \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $w_n \equiv 0$ dans l'ensemble $\{v > ||u_n||_\infty\}$. Par conséquent, en utilisant w_n comme fonction test dans (3.9) et en prenant en considération le résultat de lemme 3.5, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U_n(x,y)(w_n(x)-w_n(y))d\nu &= \int_\Omega f_n(x)w_n(x)\,dx \\ &\le \int_\Omega f(x)w_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} V(x,y)(w_n(x)-w_n(y))d\nu\end{aligned}$$

où

$$U_n(x,y) = |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y)) \text{ et } V(x,y) = |v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega}\Big(U_n(x,y)-V(x,y)\Big)(w_n(x)-w_n(y))d\nu \le 0.$$

On utilisant le fait que

$$\Big(U_n(x,y)-V(x,y)\Big)(w_n(x)-w_n(y)) \ge C|w_n(x)-w_n(y)|^p,$$

il en résulte que $w_n \equiv 0$, donc $u_n \le v$ pour tout n et alors $u \le v$.

Maintenant on démontre que $v \le u$. Pour ce but, on suivra attentivement l'argument utilisé dans [23]. Puisque u, v sont des solutions entropiques de (3.1), alors pour $h >> k$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x))) - T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu \\ &\le \int_\Omega f(x)T_k(u(x)-T_h(v(x)))\,dx,\end{aligned} \tag{3.50}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]d\nu\\&\leq \int_\Omega f(x)T_k(v(x)-T_h(u(x)))\,dx.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Il est clair que

$$\int_\Omega f(x)T_k(u(x)-T_h(v(x)))\,dx+\int_\Omega f(x)T_k(v(x)-T_h(u(x)))\,dx \to 0 \text{ quand } h\to\infty.$$

Ainsi, de (3.50) et (3.51),

$$\begin{aligned}I(h) &\equiv \frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu\\&+\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]d\nu\\&= P(h)+Q(h)\leq o(h).\end{aligned} \tag{3.52}$$

Soit

$$D^1_\Omega(h)\equiv\{(x,y)\in D_\Omega \text{ tel que } u(x)<h \text{ et } u(y)<h\}$$

et

$$D^2_\Omega(h)\equiv\{(x,y)\in D_\Omega \text{ tel que } v(x)<h \text{ et } v(y)<h\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}P(h) &= \iint_{D^1_\Omega(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu\\&+\iint_{D_\Omega\backslash D^1_\Omega(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu\\&= P_1(h)+P_2(h),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Q(h) &= \iint_{D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]d\nu\\&+\iint_{D_\Omega\backslash D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]d\nu\\&= Q_1(h)+Q_2(h).\end{aligned}$$

On affirme que $P_2(h)\geq o(h)$ et $Q_2(h)\geq o(h)$. Montrons d'abord que $P_2(h)\geq o(h)$. Rappelons que $u\leq v$, alors

$$D_\Omega\backslash D^1_\Omega(h)=\{(x,y)\in D_\Omega \text{ avec } u(x)\geq h\}\cup\{(x,y)\in D_\Omega \text{ avec } u(y)\geq h\}.$$

Si $u(x) \geq h$ et $u(y) \geq h$, alors $v(x) \geq h$ et $v(y) \geq h$. Ainsi

$$U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(u(x)-h)-T_k(u(y)-h)] \geq 0.$$

D'un autre coté, Par (3.2), on obtient

$$\iint_{\{u(x)>h,u(y)<h-1\}} |U(x,y)|d\nu = o(h).$$

Donc

$$\begin{aligned} &\iint_{\{u(x)\geq h\}} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu \\ &\geq \iint_{\{u(x)\geq h, h-1\leq u(y)\leq h\}} U(x,y)[T_k(u(x)-h)-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu + o(h). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Notons que pour $(x,y) \in \{u(x) \geq h, h-1 \leq u(y) \leq h\}$, on a

$$U(x,y)[T_k(u(x)-h)-T_k(u(y)-T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(u(x)-h)+T_k(T_h(v(y))-u(y))] \geq 0.$$

Ainsi par (3.53), on aura

$$\iint_{\{u(x)\geq h\}} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu \geq o(h). \tag{3.54}$$

Dans la même direction on peut montrer que

$$\iint_{\{u(y)\geq h\}} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]d\nu \geq o(h). \tag{3.55}$$

Ainsi, en combinant (3.54) et (3.55) on aura $P_2(h) \geq o(h)$ comme cela a été affirmé. On travaille maintenant avec $Q_2(h)$. Rappelons que

$$Q_2(h) = \iint_{D_\Omega \backslash D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]d\nu \tag{3.56}$$

Comme ci-dessus, on a

$$D_\Omega \backslash D^2_\Omega(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \mid: v(x) \geq h\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in D_\Omega \mid v(y) \geq h\Big\} \equiv M_1(h) \cup M_2(h) \cup M_3(h),$$

où

$$M_1(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \mid: v(x) \geq h \text{ et } v(y) \geq h\Big\}, M_2(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \mid: v(x) \geq h \text{ et } v(y) < h\Big\},$$

et

$$M_3(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \,|\!:\, v(x) < h \text{ et } v(y) \geq h\Big\}.$$

Soit

$$Z_1(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \,|\!:\, v(x) - T_h(u(x)) \geq k\Big\} \text{ et } Z_2(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \,|\!:\, v(y) - T_h(u(y)) \geq k\Big\}.$$

Si $(x,y) \in Z_1(h) \cap Z_2(h)$, on a

$$V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] = 0.$$

Donc, on peut supposer $(x,y) \in \Big(Z_1(h) \backslash Z_2(h)\Big) \cup \Big(Z_2(h) \backslash Z_1(h)\Big) \equiv Y_1(h) \cup Y_2(h)$. Par la suite, on conclut que

$$\begin{aligned} Q_2(h) &= \iint_{M_1(h)\cap Y_1(h)} + \iint_{M_2(h)\cap Y_1(h)} + \iint_{M_3(h)\cap Y_1(h)} \\ &+ \iint_{M_1(h)\cap Y_2(h)} + \iint_{M_2(h)\cap Y_2(h)} + \iint_{M_3(h)\cap Y_2(h)} \\ &= J_1(h) + J_2(h) + J_3(h) + T_1(h) + T_2(h) + T_3(h). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Montrons d'abord que $J_1(h) \geq o(h)$. Notons que

$$M_1(h) \cap Y_1(h) = \Big\{(x,y) \in D_\Omega \,|\!:\, v(x) \geq h, v(y) \geq h \text{ et } v(x) - T_h(u(x)) \geq k, v(y) - T_h(u(y)) < k\Big\},$$

alors pour $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$, on a

$$V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] = V(x,y)[k - (v(y) - T_h(u(y)))]$$

Si $v(x) \geq v(y)$, alors $V(x,y)[k - (v(y) - T_h(u(y)))] \geq 0$, donc on doit juste considérer le cas où $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$ avec $v(x) < v(y)$. Ainsi

$$\Big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\Big| = (v(y) - v(x))^{p-1}[k - (v(y) - T_h(u(y)))].$$

Maintenant prenons en considération que $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$, on obtient

$$0 \leq (v(y) - v(x)) \leq T_h(u(y)) + k - (T_h(u(x)) + k) \leq T_h(u(y)) - T_h(u(x)) \leq u(y) - u(x).$$

Par la suite, on conclut que

$$\Big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\Big| \leq 2k\,(u(y) - u(x))^{p-1}.$$

Si $u(x) \geq h$, alors $u(y) \geq h$, donc

$$V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] = V(x,y)[T_k(v(x)) - T_k(v(y))] \geq 0,$$

Il reste à considérer le cas $u(x) < h$.

(i) Si $u(y) > (h+1)$, Par (3.2), on trouve

$$\iint_{\{u(y)>h+1, u(x)<h\}} |U(x,y)| d\nu = o(h).$$

(ii) Si $h < u(y) \leq (h+1)$, alors $0 \leq k - (v(y) - T_h(u(y))) \leq u(y) - u(x)$, ainsi

$$\Big| V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] \Big| \leq (u(y) - u(x))^p.$$

Et par (3.8), on obtient

$$\iint_{\{h<u(y)\leq h+1, u(x)<h\}} (u(y) - u(x))^p d\nu = o(h).$$

(iii) On travaille maintenant avec l'ensemble $u(y) \leq h$. Puisque $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$, on a $u(y) \geq (h-k)$, donc si $u(x) < (h-k-1)$, utilisons de nouveau (3.6) on trouve

$$\iint_{\{u(y)>(h-k), u(x)<(h-k-1)\}} |U(x,y)| d\nu = o(h).$$

Supposons que $(h-k-1) < u(x) \leq u(y) < h$. Dans ce cas on a

$$[k - (v(y) - T_h(u(y)))] = u(y) - (v(y) - k) \leq u(y) - (v(x) - k) \leq u(y) - u(x).$$

Donc pour $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$ avec $h-k-1 < u(x) \leq u(y) < h$,
on obtient

$$\begin{gathered}\Big| V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] \Big| = \\ (v(y) - v(x))^{p-1}[k - (v(y) - T_h(u(y)))] \leq (u(y) - u(x))^p.\end{gathered}$$

En utilisant (3.8), il résulte que

$$\begin{aligned}&\iint_{\{h-k-1<u(x)\leq u(y)<h\}} \Big| V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] \Big| d\nu \\ &\leq \iint_{\{h-k-1<u(x)\leq u(y)<h\}} (u(y) - u(x))^p d\nu = o(h).\end{aligned} \tag{3.58}$$

Par conséquent, en combinant les estimations ci-dessus on obtient $J_1(h) \geq o(h)$. Pour $J_2(h)$, on a $v(y) \leq h < v(x)$ et

$$T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y))) \geq k - (v(y) - T_h(u(x))) \geq 0.$$

Ainsi

$$V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] \geq 0 \text{ pour tout } (x,y) \in M_2(h) \cap Y_1(h).$$

Donc $J_2(h) \geq 0$. A présent, on travaille avec $J_3(h)$. On a $v(x) \leq h < v(y)$ et pour tout $(x,y) \in M_3(h) \cap Y_1(h)$,

$$\Big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\Big| = (v(y) - v(x))^{p-1}[k - (v(y) - T_h(u(y)))].$$

Si $v(x) \leq (h-1)$, Alors par (3.6) on a

$$\begin{aligned}&\iint_{\{v(y)>h, v(x)<h-1\}} \Big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\Big| d\nu \leq \\ &2k \iint_{\{v(y)>h, v(x)<h-1\}} |V(x,y)| d\nu = o(h).\end{aligned} \tag{3.59}$$

Donc, supposons que $(h-1) < v(x) \leq h$. Puisque $(x,y) \in M_3(h) \cap Y_1(h)$, alors $v(y) \leq k + T_h(u(y)) \leq k + u(y)$. Ainsi $u(y) > (h-k)$. Il est clair que

$$0 \leq v(y) - v(x) \leq T_h(u(y)) - T_h(u(x)) \leq u(y) - u(x). \tag{3.60}$$

Donc en suivant la même discussion comme dans le cas (iii) dans l'étude de $J_1(h)$, et en combinant les estimations ci-dessus, on trouve que $J_3(h) \geq 0$. Notons que dans une direction symétrique on peut montrer que $T_1(h) + T_2(h) + T_3(h) \geq o(h)$. Ainsi $Q_2(h) \geq o(h)$ et l'affirmation suit. Par conséquent, revenons à la définition de $I(h)$ donnée dans (3.52) et prenons en considération que $u < h$ dans l'ensemble $\{v < h\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
I(h) &\geq \frac{1}{2} \iint_{D^1_\Omega(h)} U(x,y)[T_k(u(x) - T_h(v(x))) - T_k(u(y) - T_h(v(y)))] d\nu \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))] d\nu + o(h) \\
&\geq \frac{1}{2} \iint_{D^2_\Omega(h)} \Big(V(x,y) - U(x,y)\Big)[T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))] d\nu \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{D^1_\Omega(h) \setminus D^2_\Omega(h)} U(x,y)[T_k(u(x) - T_h(v(x))) - T_k(u(y) - T_h(v(y)))] d\nu + o(h) \\
&\geq I_1(h) + I_2(h) + o(h).
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$I_1(h) \geq C \iint_{D^2_\Omega(h)} |T_k(v(x)-u(x)) - T_k(v(y)-u(y))|^p d\nu.$$

On affirme que $I_2(h) \geq o(h)$. Notons que

$$D^1_\Omega(h) \backslash D^2_\Omega(h) = N_1(h) \cup N_2(h) \cup N_3(h)$$

où

$$N_1(h) \equiv \Big\{(x,y) \in D_\Omega \text{ tel que } u(x) \leq h, u(y) \leq h, v(x) > h, v(y) > h\Big\},$$

$$N_2(h) \equiv \Big\{(x,y) \in D_\Omega \text{ tel que } u(x) \leq h, u(y) \leq h, v(x) > h, v(y) \leq h\Big\},$$

et

$$N_3(h) \equiv \Big\{(x,y) \in D_\Omega \text{ tel que } u(x) \leq h, u(y) \leq h, v(x) \leq h, v(y) > h\Big\}.$$

Puisque

$$\frac{1}{2} \iint_{N_1(h)} U(x,y)[T_k(u(x) - T_h(v(x))) - T_k(u(y) - T_h(v(y)))] d\nu \geq 0,$$

alors on conclut que

$$I_2(h) \geq \frac{1}{2} \iint_{N_2(h)} + \frac{1}{2} \iint_{N_3(h)} = I_{21}(h) + I_{22}(h).$$

Pour $(x,y) \in N_2(h)$, on considérera trois cas principales :

I) Si $h - u(x) \leq v(y) - u(y)$, alors $0 \leq h - v(y) \leq u(x) - u(y)$. Donc

$$U(x,y)[T_k(u(x) - T_h(v(x))) - T_k(u(y) - T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(v(y) - u(y)) - T_k(h - u(x))] \geq 0.$$

II) Si $u(x) - u(y) \leq 0 \leq h - v(y)$, alors $u(x) - u(y) \leq 0$ et $h - u(x) \geq v(y) - u(y)$. Ainsi

$$U(x,y)[T_k(u(x) - T_h(v(x))) - T_k(u(y) - T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(v(y) - u(y)) - T_k(h - u(x)] \geq 0.$$

III) Considérons maintenant le cas où $0 \leq u(x) - u(y) \leq h - v(y)$. Il est clair que $0 \leq u(x) - u(y) \leq v(x) - v(y)$. Donc

$$\begin{aligned} &\Big| U(x,y)[T_k(u(x) - T_h(v(x))) - T_k(u(y) - T_h(v(y)))] \Big| \\ &= (u(x) - u(y))^{p-1} [T_k(h - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))] \leq 2k\,(v(x) - v(y))^{p-1}. \end{aligned}$$

Si $v(y) \leq h-1$ ou $v(x) \geq h+1$, Par (3.2), on obtient

$$\iint_{N_2(h)\cap\left\{\{v(x)>h,v(y)<h-1\}\cup\{v(x)>h+1,v(y)<h\}\right\}} |V(x,y)|d\nu = o(h).$$

Ainsi, on travaille avec l'ensemble $\{h-1 < v(y) \leq h \text{ et } v(x) \leq h+1\}$. Il est clair que si $v(y)-u(y) \geq k$, alors $h-u(x) \geq k$. Ainsi

$$\Big|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x))) - T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\Big| = 0.$$

Supposons que $h-u(x) \leq k$, alors $v(y)-u(y) \leq k$, donc

$$\Big|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x))) - T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\Big| \leq$$
$$(v(x)-v(y))^{p-1}[(h-u(x))-(v(y)-u(y))] \leq (v(x)-v(y))^p.$$

Par conséquent, on note :
$N_2^h = N_2(h) \cap \{h-1 < v(y) \leq h \leq v(x) \leq h+1\}$
$\overline{N}_2^h = N_2(h) \cap \{h-1 < v(y) \leq h \leq v(x) \leq h+1\} \cap \{h-k \leq u(x)\}$
$\underline{N}_2^h = N_2(h) \cap \{h-1 < v(y) \leq h \leq v(x) \leq h+1\} \cap \{u(x) < h-k\}$
Et en utilisant (3.8), on a

$$\iint\limits_{\overline{N}_2^h} \Big|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x))) - T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\Big|d\nu \leq$$

$$\iint\limits_{N_2^h} (v(x)-v(y))^p d\nu = o(h).$$

On considère maintenant l'ensemble où $v(y)-u(y) < k < h-u(x)$, alors $u(x) < h-k$ et ainsi $u(y) < h-k$. Comme ci-dessus on a

$$\Big|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x))) - T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\Big| \leq$$
$$(v(x)-v(y))^{p-1}[(k-(v(y)-u(y))] \leq (v(x)-v(y))^p$$

Ainsi en utilisant de nouveau (3.8),

$$\iint\limits_{\underline{N}_2^h} \Big|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x))) - T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\Big|d\nu \leq$$

$$\iint\limits_{N_2^h} (v(x)-v(y))^p d\nu = o(h).$$

Par conséquent on conclut que $I_{21}(h) \geq o(h)$. Dans la même direction et en utilisant l'argument de symétrie, on peut montrer que $I_{22}(h) \geq o(h)$. Donc $I_2(h) \geq o(h)$ et l'affirmation suit. Comme conclusion, on a prouvé que

$$C \iint_{D^2_\Omega(h)} |T_k(v(x)-u(x)) - T_k(v(y)-u(y))|^p d\nu \leq o(h).$$

Faisions tendre $h \to \infty$, il en résulte que

$$\iint_{D_\Omega} |T_k(v(x)-u(x)) - T_k(v(y)-u(y))|^p d\nu = 0.$$

Ainsi $T_k(u) = T_k(v)$ pour tout k et alors $u = v$. $\square$

3.2.1 Inégalité de Harnack faible

Dans cette section on suppose que $f \gneqq 0$, notre but est de prouver que l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ vérifie la version faible de l'inégalité de Harnack. Notons que sans perte de généralité, on peut supposer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

Commençons par la définition suivante.

Définition 3.4. Soit $v \in W^{s,p}_{\beta,loc}(\Omega)$, on dit que v est super-solution du problème (3.1) si pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, on a

$$\int\int_{D_{\Omega_1}} |v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\varphi(x)-\varphi(y))d\nu \geq \int_{\Omega_1} f\varphi\, dx, \tag{3.61}$$

pour tout $\varphi \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega_1)$ non négative.

Le résultat principal de l'appendice est la version suivante de l'inégalité faible de Harnack

Théorème 3.3. *(Inégalité faible de Harnack)*
Supposons que $f \geq 0$ et soit $v \in W^{s,p}_\beta(I\!R^N)$ une super-solution de (3.1) avec $v \gneqq 0$ dans $I\!R^N$. Alors pour tout $q < \frac{N(p-1)}{N-ps}$, on a

$$\left(\int_{B_r} v^q |x|^{-2\beta} dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_{\frac{3r}{2}}} v. \tag{3.62}$$

Contrairement aux cas locaux, où les itérations de type Moser sont utilisées pour obtenir l'inégalité de Harnack, voir [37], ici on utilisera une approche différente

Pour $\beta = 0$, le résultat a été obtenu dans [42] où une version générale de l'inégalité Harnack est prouvée, y compris des solutions qui changent de signe.
Le cas $\beta > 0, p = 2$ et des données positives a été obtenu en [9]. Ici, nous combinons les deux arguments pour prouver le Théorème 3.3.

Rappelons que $d\mu(x) \equiv \dfrac{dx}{|x|^{2\beta}}$ et $d\nu \equiv \dfrac{dxdy}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}$. Notons qu'on a juste à considérer le cas où $B_r(x_0) = B_r(0)$.

Pour la simplicité d'écriture, on notera B_r au lieu de $B_r(0)$.

On utilisera systématiquement la version suivante de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec poids, pour la preuve on renvoit à l'appendice de [8]

Théorème 3.4. Soit $w \in W^{s,p}_{\beta}(B_2)$ et Supposons que ψ est une fonction décroissante radiale telle que Supp $\psi \subset B_1$ et $0 \lneqq \psi \leq 1$. On définit

$$W_\psi = \frac{\int_{B_1} w(x)\psi(x)d\mu}{\int_{B_1} \psi(x)d\mu},$$

alors

$$\int_{B_1} |w(x) - W_\psi|^p \psi(x)d\mu \leq C \int_{B_1}\int_{B_1} |w(x) - w(y)|^p \min\{\psi(x), \psi(y)\}d\nu.$$

On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.6. Supposons que $v \in W^{s,p}_{\beta}(I\!R^N)$ avec $v \gneqq 0$, est une supersolution de (3.1). Soit $k > 0$ et supposons que pour un certain $\sigma \in (0, 1]$, on a

$$|B_r \cap \{v \geq k\}|_{d\mu} \geq \sigma |B_r|_{d\mu} \tag{3.63}$$

avec $0 < r < \frac{R}{16}$, alors il existe une constante positive $C = C(N, s)$ telle que

$$|B_{6r} \cap \{v \leq 2\delta k\}|_{d\mu} \leq \frac{C}{\sigma \log(\frac{1}{2\delta})} |B_{6r}|_{d\mu} \tag{3.64}$$

pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{4})$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $v > 0$ dans B_R, (Si non on peut travailler avec $v + \varepsilon$ et on pose $\varepsilon \to 0$.) Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(B_R)$ telle que $0 \leq \psi \leq 1$, supp $\psi \subset B_{7r}$, $\psi = 1$ dans B_{6r} et $|\nabla\psi| \leq \frac{C}{r}$.

Mettons $\varphi = \psi^p v^{1-p}$ comme fonction test dans (3.61), il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))(\psi^p(x)v^{1-p}(x) - \psi^p(y)v^{1-p}(y))d\nu \geq 0.$$

Ainsi

$$0 \leq \int_{B_{8r}}\int_{B_{8r}} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))(\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}} - \frac{\psi^p(y)}{v(y)^{p-1}})d\nu$$

$$+2\int_{I\!R^N \setminus B_{8r}}\int_{B_{8r}} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}}d\nu.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\int_{I\!R^N \setminus B_{8r}}\int_{B_{8r}} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}}d\nu \leq \int_{I\!R^N \setminus B_{8r}}\int_{B_{8r}} \psi^p(x)d\nu.$$

Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{8r}}\int_{B_{8r}}\psi^p(x)d\nu \;=\; \int_{B_{7r}}\frac{\psi^p(x)}{|x|^\beta}\int_{8r}^{\infty}\frac{\rho^{N-\beta-1}d\rho}{|x|^{N+ps}}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\frac{\rho}{|x|}y'-x'|^{N+ps}}\Big)dx,$$

Posons $\tau=\dfrac{\rho}{|x|}$, il suit que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{8r}}\int_{B_{8r}}\psi^p(x)d\nu=\int_{B_{7r}}\frac{\psi^p(x)dx}{|x|^{2\beta+ps}}\int_{\frac{8}{7}}^{\infty}\tau^{N-\beta-1}D(\tau)d\tau,$$

où

$$D(\tau)=2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\beta(\frac{N-1}{2})}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1-2\sigma\cos(\theta)+\tau^2)^{\frac{N+ps}{2}}}d\theta.$$

Prenant on considération le comportement de D au voisinage de $0,1$ et ∞, on obtient que

$$\int_{\frac{8}{7}}^{\infty}\tau^{N-\beta-1}D(\tau)d\tau\le C.$$

Par conséquent, on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{8r}}\int_{B_{8r}}|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}}d\nu\le Cr^{N-ps-2\beta}.$$

Notons que de [43], nous savons que

$$\begin{aligned}&|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}}-\frac{\psi^p(y)}{v(y)^{p-1}})\\ &\le -C_1|\log(v(x))-\log(v(y))|^p\psi(y)^p+C_2(\psi(x)-\psi(y))^p.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\int_{B_{8r}}\int_{B_{8r}}|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}}-\frac{\psi^p(y)}{v(y)^{p-1}})d\nu\\ &=\int_{B_{6r}}\int_{B_{6r}}|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\frac{1}{v(x)^{p-1}}-\frac{1}{v(y)^{p-1}})d\nu\\ &+\int\int_{B_{8r}\times B_{8r}\setminus B_{6r}\times B_{6r}}|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\frac{\psi^p(x)}{v(x)^{p-1}}-\frac{\psi^p(y)}{v(y)^{p-1}})d\nu\\ &\le\int_{B_{6r}}\int_{B_{6r}}|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))(\frac{1}{v(x)^{p-1}}-\frac{1}{v(y)^{p-1}})d\nu+Cr^{N-ps-2\beta}.\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les estimations ci-dessus il en résulte que

$$\int_{B_{6r}}\int_{B_{6r}}|\log(v(x))-\log(v(y))|^p d\nu\le Cr^{N-ps-2\beta}. \tag{3.65}$$

on pose $w(x) = \min\{\log(\frac{1}{2\delta}), \log(\frac{k}{v})\}_+$, ensuite en utilisant (3.65), il en résulte que

$$\int_{B_{6r}} \int_{B_{6r}} |w(x) - w(y)|^p d\nu \leq C r^{N-ps-2\beta}. \tag{3.66}$$

On définit

$$\langle w\rangle_{B_{6r}} = \frac{1}{|B_{6r}|_{d\mu}} \int_{B_{6r}} w(x) d\mu,$$

et en utilisant les inégalités de Hölder et Poincaré-Wirtinger ,

$$\int_{B_{6r}} |w(x) - \langle w\rangle_{B_{6r}}| d\mu \leq C|B_{6r}|_{d\mu}.$$

Notons que $\{x \in \Omega/\, w(x) = 0\} = \{x \in \Omega/v(x) \geq k\}$, ensuite de (3.63) on a

$$|B_{6r} \cap \{v \geq k\}|_{d\mu} \leq \frac{\sigma}{6^{N-2\beta}} |B_{6r}|_{d\mu}. \tag{3.67}$$

il est clair que

$$B_{6r} \cap \{v \geq 2\delta k\} = B_{6r} \cap \{w = \log(\frac{1}{2\delta})k\},$$

et en utilisant le fait que

$$|B_{6r} \cap \{w = \log(\frac{1}{2\delta})k\}|_{d\mu} \leq \frac{6^{N-2\beta}}{\sigma \log(\frac{1}{2\delta})} \int_{B_{6r}} |w(x) - \langle w\rangle_{B_{6r}}| d\mu,$$

on obtient le résultat désiré. □

Comme conséquence on a l'estimation suivante sur $\inf\limits_{B_{4r}} v$.

Lemme 3.7. Supposons que les hypothèses du lemme 3.6 sont vérifiées, alors il existe $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tel que

$$\inf_{B_{4r}} v \geq \delta k. \tag{3.68}$$

Démonstration. On pose $w = (l - v)_-$ où $l \in (\delta k, 2\delta k)$ et soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\rho)$ avec $r \leq \rho < 6r$.

Mettons $\varphi = w\psi^p$ comme fonction test dans (3.61) et en suivant le même calcul comme dans le lemme précédent, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho} \int_{B_\rho} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))(w(x)\psi^p(x) - w(y)\psi^p(y)) d\nu \\
&\leq -c \int_{B_\rho} \int_{B_\rho} |w(x)\psi(x) - w(y)\psi(y)|^p d\nu \\
&+ c \int_{B_\rho} \int_{B_\rho} ((max\{w(x), w(y)\}))^p |\psi(x) - \psi(y)|^p d\nu.
\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les résultats ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho}\int_{B_\rho} |w(x)\psi(x)-w(y)\psi(y)|^p d\nu \leq \\ &C_1\int_{B_\rho}\int_{B_\rho} ((max\{w(x),w(y)\}))^p|\psi(x)-\psi(y)|^p d\nu + l^p|B_\rho\cap\{v<l\}|_{d\mu}\times \\ &\sup_{\{x\in \text{supp } \rho\}} \int_{I\!R^N\setminus B_\rho} \frac{dy}{|x-y|^{N+ps}}.\end{aligned} \tag{3.69}$$

On définit maintenant la suite $\{l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ et $\{\bar\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ on posant

$$l_j = \delta k + 2^{-j-1}\delta k,\ \rho_j = 4r + 2^{1-j}r,\ \bar\rho_j = \frac{\rho_j+\rho_{j+1}}{2}.$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev citée dans la Théorème 2.5, on obtient

$$C(N,s,\beta)\Big(\int\limits_{B_j} \frac{|w_j\psi_j(x)|^{p_s^*}}{|x|^{\beta p_s^*}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \int_{B_j}\int_{B_j} |w_j(x)\psi_j(x)-w_j(y)\psi_j(y)|^p d\nu.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $w_j\psi_j \geq (l_j - l_{j+1})$ dans $B_{j+1}\cap\{v<l_{j+1}\}$ et prenant en considération que $|x|^{-p_s^*\beta} \geq \bar C r^{-(p_s^*-2)\beta}|x|^{-2\beta}$ dans B_j avec $\bar C$ est indépendant de j, il en résulte que

$$\Big(\int\limits_{B_j} \frac{|w_j\phi(x)|^{p_s^*}}{|x|^{\beta p_s^*}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \geq \frac{C}{r^{(p_s^*-2)\beta}}(l_j-l_{j+1})^p|B_{j+1}\cap\{v<j+1\}|_{d\mu}^{\frac{p}{p_s^*}}.$$

Ainsi, on conclut que

$$(l_j-l_{j+1})^p\Big(\frac{|B_{j+1}\cap\{v<j+1\}|_{d\mu}}{|B_{j+1}|_{d\mu}}\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq C(N,s)r^{-(N-ps-2\beta)}\int_{B_j}\int_{B_j}|w_j(x)\phi(x)-w_j(y)\phi(y)|^p d\nu.$$

En appliquant (3.69) pour w_j, on conclut que

$$\begin{aligned}&(l_j-l_{j+1})^p\Big(\frac{|B_{j+1}\cap\{v<j+1\}|_{d\mu}}{|B_{j+1}|_{d\mu}}\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \\ &\leq \frac{C(N,s)}{r^{(N-ps-2\beta)}}\Big(C_1\int_{B_\rho}\int_{B_\rho}((max\{w_j(x),w_j(y)\}))^p|\psi_j(x)-\psi_j(y)|^p d\nu \\ &+ l_j^p|B_j\cap\{v<l_j\}|_{d\mu}\times \sup_{\{x\in \text{supp } \rho_j\}}\int_{I\!R^N\setminus B_{\rho_j}}\frac{dy}{|x-y|^{N+ps}}\Big).\end{aligned} \tag{3.70}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{B_j}\int_{B_j} w_j^p|\psi_j(x)-\psi_j(y)|^p d\nu &\leq l^p\int_{B_j\cap\{v<l_j\}}\int_{B_j}\frac{|x-y|^{p-ps}}{|x-y|^N}\frac{dy}{|y|^\beta}\frac{dx}{|x|^\beta} \\ &\leq Cr^{-ps}\int_{B_j\cap\{v<l_j\}}\frac{dx}{|x|^{2\beta}}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{B_j}\int_{B_j} w_j^p|\psi_j(x)-\psi_j(y)|^p d\nu \leq Cr^{-ps}|B_j\cap\{v<l_j\}|_{d\mu}.$$

Maintenant, nous estimons le terme

$$\sup_{\{x\in \mathrm{Supp}\psi\}}\int_{I\!R^N\setminus B_r}\frac{dy}{|x-y|^{N+ps}},$$

comme dans [42] on obtient

$$(l_j-l_{j+1})^p\Big(\frac{|B_{j+1}\cap\{v<j+1\}|_{d\mu}}{|B_{j+1}|_{d\mu}}\Big)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \frac{C(N,s)}{r^{(N-ps-2\beta)}}r^{-ps}|B_j\cap\{v<l_j\}|_{d\mu}\leq \tilde{C}\frac{|B_j\cap\{v<j\}|_{d\mu}}{|B_j|_{d\mu}}$$

où $\tilde{C}\leq C(R,N,s)2^{N+s+2}$.

On définit $A_j=\dfrac{|B_j\cap\{v<j\}|_{d\mu}}{|B_j|_{d\mu}}$ et en suivant le même argument comme dans [42], on obtient le résultat désiré. □

Maintenant, on a besoin d'obtenir une sorte d' *inégalité inverse de Hölder* Pour v. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 3.8. Supposons que v est une supersolution de (3.1), alors pour tout $0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{N(p-1)}{N-ps}$, on a

$$\Big(\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int_{B_r} v^{\alpha_2}\,d\mu\Big)^{\frac{1}{\alpha_2}}\leq C\Big(\frac{1}{|B_{\frac{3}{2}r}|_{d\mu}}\int_{B_{\frac{3}{2}r}} v^{\alpha_1}\,d\mu\Big)^{\frac{1}{\alpha_1}}. \tag{3.71}$$

Démonstration. Soit $q\in(1,p)$ et $d>0$, on pose $\tilde{v}=(v+d)$. Supposons que $\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(B_R)$ est telle que Supp$\psi\subset B_{\tau r},\psi=1$ dans $B_{\tau' r}$ et $|\nabla\psi|\leq\frac{C}{(\tau-\tau')r}$ où $\frac{1}{2}\leq\tau'<\tau<\frac{3}{2}$. Ensuite en utilisant $\varphi=\tilde{v}^{1-q}\psi^p$ comme fonction test dans (3.61), on obtient que

$$\int_{B_r}\int_{B_r}|\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y)|^{p-2}(\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y))(\frac{\psi^p(x)}{\tilde{v}^{q-1}(x)}-\frac{\psi^p(y)}{\tilde{v}^{q-1}(y)})d\nu$$

$$+2\int_{I\!R^N\setminus B_r}\int_{B_r}|\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y)|^{p-2}(\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y))\frac{\psi^p(x)}{\tilde{v}^{q-1}(x)}d\nu\geq 0.$$

Comme dans la preuve du lemme 3.6, on peut montrer que

$$\int_{I\!R^N\setminus B_r}\int_{B_r}|\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y)|^{p-2}(\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y))\frac{\psi^p(x)}{\tilde{v}(x)^{q-1}}d\nu\leq C_1\int\limits_{B_r}\tilde{v}^{p-q}\psi^p\,d\mu\times\sup_{\{x\in\mathrm{Supp}\psi\}}\int_{I\!R^N\setminus B_r}\frac{dy}{|x-y|^{N+ps}}.$$

Dans la même direction, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{B_r}\int_{B_r}|\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y)|^{p-2}(\tilde{v}(x)-\tilde{v}(y))(\frac{\psi^p(x)}{\tilde{v}^{q-1}(x)}-\frac{\psi^p(y)}{\tilde{v}^{q-1}(y)})d\nu\leq\\ &-C_2\int_{B_r}\int_{B_r}(\tilde{v}^{\frac{p-q}{p}}(x)-\tilde{v}^{\frac{p-q}{p}}(y))^p\psi^p(y)d\nu+C_3\int_{B_r}\int_{B_r}((\tilde{v}^{p-q}(x)+\tilde{v}^{p-q}(y))(\psi(x)-\psi(y))^p d\nu.\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_{B_r}\int_{B_r}((\tilde{v}^{p-q}(x)+\tilde{v}^{p-q}(y))|\psi(x)-\psi(y)|^p d\nu \leq \frac{Cr^{-ps}}{(\tau-\tau')^p}\int\limits_{B_{\tau r}}\tilde{v}^{p-q}\,d\mu,$$

et

$$\sup_{\{x\in \text{Supp}\psi\}}\int_{I\!R^N\setminus B_r}\frac{dy}{|x-y|^{N+ps}}\leq Cr^{-ps},$$

ensuite, en combinant les estimations ci-dessus, on obtient

$$\int_{B_\rho}\int_{B_\rho}((max\{w(x),w(y)\}))^p|\psi(x)-\psi(y)|^p d\nu \leq \frac{Cr^{-ps}}{(\tau-\tau')^p}\int\limits_{B_{\tau r}}\tilde{v}^{p-q}\,d\mu.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Sobolev donnée dans la proposition 2.5 et en prenant en considération les estimations précédentes, il en résulte que

$$\Big(\frac{1}{|B_{\tau' r}|_{d\mu}}\int_{B_{\tau r}}\tilde{v}^{\frac{(p-q)N}{N-ps}}\,d\mu\Big)^{\frac{N-ps}{N}}\leq \frac{C}{|B_{\tau r}|_{d\mu}(\tau-\tau')^p}\int_{B_{\tau r}}\tilde{v}^{p-q}\,d\mu.$$

Maintenant, faisons $d\to 0$ et en itérant l'inégalité précédente, on obtient le résultat désiré. □

Le lemme suivant sera la clé pour compléter la preuve de l'inégalité faible de Harnack.

Lemme 3.9. Supposons que v est une supersolution de (3.1), alors il existe $\eta\in(0,1)$ qui dépend seulement de N,s tel que

$$\Big(\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int_{B_r}v^\eta d\mu\Big)^{\frac{1}{\eta}}\leq C\inf_{B_r}v. \tag{3.72}$$

Pour montrer le lemme 3.9 on a besoin du résultat suivant, voir Lemme 4.1 dans [42]

Lemme 3.10. Supposons que $E\subset B_r(x_0)$ est un ensemble mesurable. Pour $\bar{\delta}\in(0,1)$, on définit

$$[E]_{\bar{\delta}}\equiv\bigcup_{\rho>0}\{B_{3\rho}(x)\cap B_r(x_0), x\in B_r(x_0): |E\cap B_{3\rho}(x)|_{d\mu}>\bar{\delta}|B_\rho(x)|_{d\mu}\}.$$

Alors, soit

1. $|[E]_{\bar{\delta}}|_{d\mu}\geq\frac{\tilde{C}}{\bar{\delta}}|E|_{d\mu}$, ou bien
2. $[E]_{\bar{\delta}}=B_r(x_0)$

où $\tilde{C}$ dépend seulement de N.

Preuve de lemme 3.9.

Notons que, pour tout $\eta>0$,

$$\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int_{B_r}v^\eta d\mu(x)=\eta\int_0^\infty t^{\eta-1}\frac{|B_r\cap\{v>t\}|_{d\mu}}{|B_r|_{d\mu}}dt. \tag{3.73}$$

alors, pour $t > 0$ et $i \in \mathbb{N}$, on pose $A_t^i = \{x \in B_r : v(x) > t\delta^i\}$ où δ est donné par le lemme 3.7. Notons que $A_t^{i-1} \subset A_t^i$.

Soit $x \in B_r$ tel que $B_{3\rho}(0) \cap B_r \subset [A_t^{i-1}]_{\bar{\delta}}$, alors

$$|A_t^{i-1} \cap B_{3\rho}(x)|_{d\mu} > \bar{\delta}|B_\rho|_{d\mu} = \frac{\bar{\delta}}{3^{N-2\beta}}|B_{3\rho}|_{d\mu}.$$

Ainsi en utilisant le lemme 3.7, on obtient

$$v(x) > \delta(t\delta^{i-1}) = t\delta^i \text{ pour tout } x \in B_r.$$

Ainsi $[A_t^{i-1}]_{\bar{\delta}} \subset A_t^i$. Par conséquent, en utilisant le résultat alternatif dans le lemme 3.10, on obtient soit $A_t^i = B_r$ ou bien $|A_t^i|_{d\mu} \geq \frac{\tilde{C}}{\bar{\delta}}|A_t^{i-1}|_{d\mu}$.

Ainsi, si pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on a

$$|A_t^0|_{d\mu} > (\frac{\bar{\delta}}{\tilde{C}})^m |B_r|_{d\mu}, \tag{3.74}$$

alors $|A_t^m|_{d\mu} = |B_r|_{d\mu}$. Donc $A_t^i = B_r$ et alors

$$\inf_{B_r} v > t\delta^m.$$

Il est clair que (3.74) reste vraie si $m > \dfrac{1}{\log(\frac{\bar{\delta}}{\tilde{C}})}\log(\frac{|A_t^0|_{d\mu}}{|B_r|_{d\mu}})$. Fixons m comme ci-dessus et définissons $\beta = \dfrac{\log(\frac{\bar{\delta}}{\tilde{C}})}{\log(\delta)}$, il en résulte que

$$\inf_{B_r} v > t\delta\Big(\frac{|A_t^0|_{d\mu}}{|B_r|_{d\mu}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}.$$

On pose $\xi = \inf_{B_r} v$, alors

$$\frac{|B_r \cap \{v > t\}|_{d\mu}}{|B_r|_{d\mu}} = \frac{|A_t^0|_{d\mu}}{|B_r|_{d\mu}} \leq C\delta^{-\beta}t^{-\beta}\xi^\beta.$$

revenons à (3.73), on aura

$$\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int_{B_r} v^\eta d\mu(x) \leq \eta\int_0^a t^{\eta-1}dt + \eta C\int_a^\infty \delta^{-\beta}t^{-\beta}\xi^\beta dt.$$

En choisissant $a = \xi$ et $\eta = \frac{\beta}{2}$, on trouvera le résultat désiré. $\square$

On donne maintenant la preuve de l'inégalité de Harnack faible avec poids

Preuve de Théorème 3.3. En utilisant le lemme 3.9 on obtient

$$\Big(\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int_{B_r} u^\eta d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{\eta}} \leq C\inf_{B_r} u$$

pour un certain $\eta \in (0,1)$. Fixons $1 \leq q < \frac{N(p-1)}{N-ps}$, alors par le lemme 3.8 pour $\alpha_1 = \eta$ et $\alpha_2 = q$, on obtient

$$\Big(\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int_{B_r} u^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\frac{1}{|B_{\frac{3}{2}r}|_{d\mu}}\int_{B_{\frac{3}{2}r}} u^\eta\,d\mu\Big)^{\frac{1}{\eta}}. \tag{3.75}$$

enfin on conclut que

$$\Big(\frac{1}{|B_r|_{d\mu}}\int\limits_{B_r} u^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_{\frac{3}{2}r}} u$$

□

3.3 Problème avec terme de réaction et donnée générale

Comme application de résultats précédents, on considère un problème avec un terme de diffusion et une donnée générale, plus précisément on va traiter le le problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u &= \lambda u^q + g(x), u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.76}$$

où $\lambda, q > 0$ et $g \gneq 0$. Selon les valeurs de q et λ, on prouvera que le problème (3.76) a une solution entropique dans le sens de la Définition 3.3.

Commençons par le cas $q < p-1$, dans ce cas, on a le résultat d'existence est le suivant.

Théorème 3.5. Supposons que $q < p-1$, alors pour tout $g \in L^1(\Omega)$ et pour tout $\lambda > 0$, le problème (3.76) a une solution entropique positive.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut assumer que $\lambda = 1$. On pose $g_n = T_n(g)$, alors $g_n \gneq 0$ et $g_n \uparrow g$ fortement dans $L^1(\Omega)$. On définit u_n comme étant l'unique solution du problème approximé.

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n &= u_n^q + g_n \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n &\geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.77}$$

Notons que l'existence de u_n peut être obtenue comme point critique de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2p}\int\int_{D_\Omega} |u(x)-u(y)|^p d\nu - \frac{1}{q+1}\int_\Omega u_+^{q+1} dx - \int_\Omega g_n\, u\, dx.$$

Cependant, on obtient l'unicité par le résultat de comparaison dans le lemme 2.2. Il est clair que par le même principe de comparaison, on obtient que $u_n \leq u_{n+1}$.

On affirme que $\{u_n^{p-1}\}_n$ est bornée uniformément dans $L^1(\Omega)$. Pour prouver l'affirmation, on utilise le raisonnement par l'absurde. Supposons que $C_n \equiv ||u_n^{p-1}||_{L^1(\Omega)} \to \infty$ quand $n \to \infty$.

On pose $v_n = \frac{u_n}{C_n^{\frac{1}{p-1}}}$, alors $||v_n^{p-1}||_{L^1(\Omega)} = 1$ et v_n est solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcll} (-\Delta)^s_{p,\beta} v_n & = & C_n^{\frac{q-p+1}{p-1}} v_n^q + C_n^{-1} g_n & \text{dans } \Omega, \\ v_n & \geq & 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_n & = & 0 & \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega. \end{array}\right. \tag{3.78}$$

On pose $G_n \equiv C_n^{\frac{q-p+1}{p-1}} v_n^q + C_n^{-1} g_n$, alors $||G_n||_{L^1(\Omega)} \to 0$ quand $n \to \infty$. Prenons en considération les résultats des lemmes 3.1 et 3.2 on obtient l'existence d'une fonction mesurable v telle que $T_k(v) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, $v^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ pour tout $\sigma < \dfrac{N}{N-ps}$ et $T_k(v_n) \rightharpoonup T_k(v)$ faiblement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Puisque $\sigma > 1$, alors en utilisant le lemme de Vitali, on peut montrer que $v_n^{p-1} \to v^{p-1}$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Ainsi $||v^{p-1}||_{L^1(\Omega)} = 1$.

Maintenant en prenant $T_k(v_n)$ comme fonction test dans (3.78), et en utilisant le fait que $||G_n||_{L^1(\Omega)} \to 0$, il en résulte que $||T_k(v_n)||_{W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)} \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $T_k(v) = 0$ pour tout k d'où on a $v \equiv 0$, on trouve alors une contradiction avec le fait que $||v^{p-1}||_{L^1(\Omega)} = 1$. Par la suite, $||u_n^{p-1}||_{L^1(\Omega)} \leq C$ pour tout n .

Puisque $q < p-1$, on conclut que la suite $\{u_n^q + g_n\}_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ et par suite on obtient l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n^q \uparrow u^q$, $u^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ pour tout $\sigma < \dfrac{N}{N-ps}$ et $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Puisque $\{u_n^q + f_n\}_n$ est une suite croissante, en utilisant le lemme 3.4, on conclut que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ fortement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$. Maintenant, par le Théorème 3.2 on obtient que u est une solution entropique du problème (3.76) dans le sens de la Définition 3.3.

On montre maintenant que u est la solution minimale de (3.76).

Soit $\overline{u}$ une autre solution entropique positive du problème (3.76). Rappelons que $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ainsi pour finir, on doit montrer que $u_n \leq v$ pour tout n. Fixons n et considérons la suite $\{w_{n,i}\}_i$, définie par $w_{n,0} = 0$ et $w_{n,i+1}$ est l'unique solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} (-\Delta)^s_{p,\beta} w_{n,i+1} & = & w_{n,i}^q + g_n & \text{dans } \Omega, \\ w_{n,i+1} & \geq & 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_{n,i+1} & = & 0 & \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega. \end{array}\right. \tag{3.79}$$

Il est clair que la suite $\{w_{n,i}\}_i$ est croissante en i avec $w_{n,i} \leq u_n$ pour tout i. Ainsi $w_{n,i} \uparrow \bar{w}_n$ est une solution du problème (3.82). Maintenant par le principe de comparaison dans le lemme 2.2 on conclut que $\bar{w}_n = u_n$, et par l'argument d'itération on peut montrer que $w_{n,i} \leq \overline{u}$ pour tout i, ainsi $u_n \leq \overline{u}$ et le résultat suit. □

Dans le cas $q = p-1$, le problème est lié à la première valeur propre de l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$, plus précisément on pose

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega),\ \phi \neq 0} \frac{\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} |\phi(x)-\phi(y)|^p d\nu}{\int_\Omega |\phi|^p dx}. \tag{3.80}$$

Comme dans le cas $\beta = 0$, il n'est pas difficile de voir que $\lambda_1 > 0$ et que λ_1 est atteinte.

Ainsi, on peut formuler notre résultat d'existence.

Théorème 3.6. Supposons que $q = p-1$, si $\lambda < \lambda_1$, alors pour tout $g \in L^1(\Omega)$, le problème (3.76) a une solution minimale positive entropique.

Pour démontrer le théorème 3.6, on a besoin du résultat de régularité classique suivant.

Lemme 3.11. Soit u l'unique solution du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ dans } I\!R^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.81}$$

où $|f||x|^{p^*_s\beta} \in L^m(\Omega, |x|^{-p^*_s\beta}\,dx)$ pour certains $m > \frac{N}{ps}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. On suit attentivement l'argument de Stampacchia donné dans [66]. On utilise $G_k(u(x))$, avec $k > 0$, comme fonction test (3.81), et prenons en considération que

$$U(x,y)\big(G_k(u(x)) - G_k(u(y))\big) \geq |G_k(u(x)) - G_k(u(y))|^p,$$

où $U(x,y) = |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))$, on trouve

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|G_k(u(x)) - G_k(u(y))|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \leq \int_\Omega |f|\,|G_k(u(x))|\,dx.$$

Par *l'inégalité de Sobolev avec poids* (2.5), on obtient

$$S\|G_k(u)\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega, |x|^{-p^*_s\beta}\,dx)} \leq \int_{A_k} |f|\,|G_k(u(x))|dx$$

où $A_k = \{x \in \Omega \,:\, |u(x)| \geq k\}$. On pose $d\omega = \dfrac{dx}{|x|^{p^*_s\beta}}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{A_k} |f|\,|G_k(u(x))|dx &= \int_{A_k} (|f||x|^{p^*_s\beta})\,|G_k(u(x))|d\omega \\ &\leq \|G_k(u)\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega,d\omega)} \|(|f||x|^{p^*_s\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)} |A_k|_{d\omega}^{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p^*_s}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$C\|G_k(u)\|^{\frac{p-1}{p^*_s}}_{L^{p^*_s}(\Omega,d\omega)} \leq \|(|f||x|^{p^*_s\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)} |A_k|_{d\omega}^{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p^*_s}}.$$

Soit $h > k$, puisque $A_h \subset A_k$, on trouve

$$(h-k)|A_h|_{d\omega}^{\frac{p-1}{p_s^*}} \leq \|(|f||x|^{p_s^*\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)}|A_k|_{d\omega}^{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*}}.$$

Donc

$$|A_h|_{d\omega} \leq \frac{C\|(|f||x|^{p_s^*\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)}^{\frac{p_s^*}{p-1}}|A_k|_{d\omega}^{\frac{p_s^*}{p-1}(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*})}}{(h-k)^{\frac{p_s^*}{p-1}}}.$$

On pose $\Phi(k) = |A_h|_{d\omega}$, alors

$$\Phi(h) \leq \frac{C\Phi^{\frac{p_s^*}{p-1}(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*})}(k)}{(h-k)^{\frac{p_s^*}{p-1}}}.$$

Puisque $m > \frac{N}{ps}$, alors $\frac{p_s^*}{p-1}(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*}) > 1$. Par le résultat classique de Stampacchia, voir [66], on obtient l'existence de $k_0 > 0$ tel que $\Phi(h) = 0$ pour tout $h \geq k_0$, ainsi on conclut. $\square$

Preuve de Théorème 3.6. On suit le même argument utilisé dans la démonstration de Théorème 3.5.

On définit u_n comme l'unique solution du problème approximé

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}u_n &= \lambda u_n^{p-1} + g_n \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n &\geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N\backslash\Omega. \end{cases} \tag{3.82}$$

Notons que l'existence de u_n peut être obtenue comme point critique de fonctionnelle

$$J(u_n) = \frac{1}{2p}\int\int_{D_\Omega} |u_n(x)-u_n(y)|^p d\nu - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u_n|^p dx - \int_\Omega g_n\, u_n\, dx.$$

Cependant, on obtient l'unicité par le résultat de comparaison dans le lemme 2.2. Il est clair que par le même principe de comparaison, on obtient que $u_n \leq u_{n+1}$.

Nous affirmons que $\{u_n^{p-1}\}_n$ est bornée uniformément dans $L^1(\Omega)$.Pour prouver l'affirmation, on utilise le raisonnement par l'absurde. Supposons que $C_n \equiv ||u_n^{p-1}||_{L^1(\Omega)} \to \infty$ quand $n \to \infty$. On pose $v_n = \frac{u_n}{C_n^{\frac{1}{p-1}}}$, alors $||v_n^{p-1}||_{L^1(\Omega)} = 1$ et v_n résout le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}v_n &= \lambda v_n^{p-1} + \dfrac{g_n}{C_n} \quad \text{dans } \Omega, \\ v_n &\geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ v_n &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N\backslash\Omega. \end{cases} \tag{3.83}$$

On pose $G_n \equiv v_n^{p-1} + \frac{g_n}{C_n}$, alors $||G_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$. Prenons en considération les résultats des lemmes 3.1 et 3.2 on obtient l'existence d'une fonction mesurable v telle que $T_k(v) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, $v^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ pour tout $\sigma < \dfrac{N}{N-ps}$ et $T_k(v_n) \rightharpoonup T_k(v)$ faiblement dans $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Puisque $\sigma > 1$, alors en utilisant le lemme de Vitali, on peut montrer que $v_n^{p-1} \to v^{p-1}$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Ainsi $||v^{p-1}||_{L^1(\Omega)} = 1$. Il est clair que $G_n \to \lambda v^{p-1}$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Ainsi v résout

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} v &= \lambda v^{p-1} \quad \text{dans } \Omega, \\ v &\gneq 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.84}$$

On affirme que $v \in L^\infty(\Omega)$. De la discussion précédente, on sait que $v^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ pour tout $\sigma < \dfrac{N}{N-ps}$. En posant $a_1 = \dfrac{(p-1)N}{N-ps} - (p-1) - \epsilon$, avec ε très petit, en utilisant l'argument d'approximation on peut prendre v^{a_1} comme fonction test dans (3.84) pour conclure que

$$\int\int_{D_\Omega} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))(v^{a_1}(x) - v^{a_1}(y))d\nu \leq C.$$

Donc en utilisant l'inégalité (1.12), il en résulte que

$$\int\int_{D_\Omega} |v^{\frac{a_1+p-1}{p}}(x) - v^{\frac{a_1+p-1}{p}}(y)|^p d\nu \leq C.$$

Utilisons l'inégalité de Sobolev fractionnaire avec poids dans le Théorème 2.5, on obtient que

$$\int_\Omega \frac{|v(x)|^{(a_1+p-1)\frac{p_s^*}{p}}}{|x|^{p_s^*\beta}} dx < \infty.$$

Maintenant, on pose $a_2 = (a_1 + p - 1)\frac{p_s^*}{p} - (p-1)$, ensuite en utilisant v^{a_2} comme fonction test dans (3.84) et suivant le même argument ci-dessus on conclue que

$$\int_\Omega \frac{|v(x)|^{(a_2+p-1)\frac{p_s^*}{p}}}{|x|^{p_s^*\beta}} dx < \infty.$$

Maintenant, on considère la suite $a_{n+1} = (a_n + p - 1)\frac{p_s^*}{p} - (p-1)$, il est clair que $a_n \uparrow \infty$ et en utilisant une démonstration par récurrence on peut montrer que $\int_\Omega v^{a_n} dx < \infty$ pour tout n. Ainsi, en utilisant le Lemme 3.11, on conclut que v est une solution d'énergie pour le problème (3.84) et que $v \in L^\infty(\Omega)$. Maintenant en utilisant v comme fonction test dans (3.84), et prenons en considération que $\lambda < \lambda_1$, on aura $||v||_{W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)} = 0$, contradiction avec le fait que $||v^{p-1}||_{L^1(\Omega)} = 1$, ainsi l'affirmation suit. Dans le reste de la preuve on suit exactement le même argument comme dans la preuve de Théorème 3.5. $\square$

Dans le cas où $q > p-1$, nous devons poser des conditions supplémentaires sur g. Plus précisément, si $g \in L^1(\Omega)$, on définit w comme la solution minimale de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} w &= g \quad \text{dans } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.85}$$

Nous sommes prêt maintenant à montrer le résultat suivant.

Théorème 3.7. Supposons que $g \in L^1(\Omega)$ vérifie $w^q(x) \leq g(x)$ p.p. dans Ω, alors il existe une constante positive $\bar{\lambda}$ pour tout $\lambda < \bar{\lambda}$, le problème (3.76) a une solution entropique minimale positive.

Démonstration. Rappelons que par les résultats des lemmes 3.1 et 3.2, on sait que $w^{p-1} \in L^{\sigma}(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ pour tout $\sigma < \dfrac{N}{N-ps}$ et $T_k(w) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Soit v la solution minimal du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} v &= g + w^q \quad \text{dans } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.86}$$

Il n'est pas difficile de voir que $v \leq 2^{p-1} w$, ainsi en utilisant l'hypothèse sur g, on a

$$(-\Delta)^s_{p,\beta} v = g + w^q \geq g + 2^{\frac{q}{1-p}} v^q.$$

Alors v est une supersolution de (3.76) pour $\lambda \leq \bar{\lambda} = 2^{\frac{q}{1-p}}$. Fixons λ comme ci-dessus et on définit la suite $\{u_n\}_n$ par $u_0 = 0$, u_{n+1} comme étant l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_{n+1} &= u_n^q + g_{n+1} \quad \text{dans } \Omega, \\ u_{n+1} &= 0 \quad \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.87}$$

Par récurrence on peut obtenir que $u_n \leq v$ pour tout n et que la suite $\{u_n\}_n$ est croissante dans n. Ainsi $\{u_n^q + g_n\}_n$ est croissante et bornée dans $L^1(\Omega)$. Maintenant, en utilisant le même argument de compacité comme dans la preuve du théorème 3.5 et 3.6 on obtient le résultat d'existence. □

3.4 Problème avec potentiel de Hardy .

Pour terminer ce chapitre on étudie le cas singulier avec potentiel de Hardy :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} + u^q, \quad u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.88}$$

où $0 < \lambda \leq \Lambda_{N,p,s}$.

Notons que pour $0 < q < p-1$, le résultat de l'existence est obtenu à l'aide de l'arguments variationnels. Plus précisément, on peut prouver facilement que

1. Si $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$, l'existence d'une solution u de (3.88) découle en utilisant l'argument de minimisation classique, dans ce cas $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$.

2. Si $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$, le résultat de l'existence suit en utilisant l'inégalité Hardy améliorée dans le Théorème 2.3. Dans ce cas u satisfait $h_{s,\Omega}(u) < \infty$ où $h_{s,\Omega}$ est définie par

$$h_{s,\Omega}(u) \equiv \int_{I\!R^N} \int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy - \Lambda_{N,p,s} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}} dx. \tag{3.89}$$

il est clair que dans ce cas on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy < \infty \text{ pour tout } q < p.$$

Nous traitons maintenant le cas $q > p-1$.
Définissons $w(x) = |x|^{-\gamma}$ avec $0 < \gamma < \dfrac{N-ps}{p-1}$, Alors nous avons précédemment obtenu que

$$(-\Delta)^s_p(w) = \Gamma(\gamma) \frac{w^{p-1}}{|x|^{ps}} \;\; p.p. \text{ dans } I\!R^N \backslash \{0\},$$

où

$$\Gamma(\gamma) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\gamma(p-1)} - \sigma^{ps-1} \right) d\sigma,$$

et K est donné par (3.19). Commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 3.12. Supposons que $0 < \lambda < \Lambda_{N,p,s}$, alors ils existent γ_1, γ_2 tels que

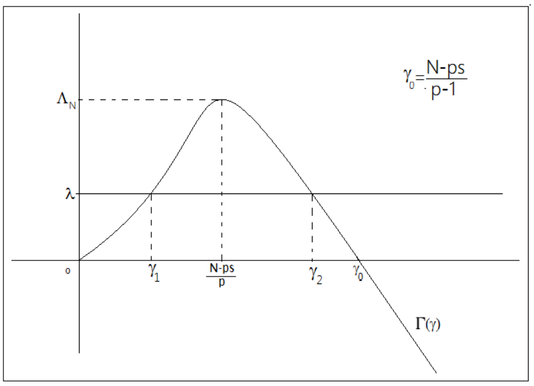
$$0 < \gamma_1 < \frac{N-ps}{p} < \gamma_2,$$

et $\Gamma(\gamma_1) = \Gamma(\gamma_2) = \lambda$.

Démonstration. on a $\Gamma(0) = 0, \Gamma(\frac{N-ps}{p}) = \Lambda_{N,p,s}$, $\Gamma(\gamma_0) < 0$ si $\gamma > \frac{N-ps}{p-1}$ et

$$\Gamma'(\gamma) = (p-1) \int_1^{+\infty} K(\sigma) \log(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-2} \left(\sigma^{N-1-\gamma(p-1)} - \sigma^{ps+\gamma-1} \right) d\sigma.$$

il est clair que $\gamma_0 = \frac{N-ps}{p}$, on a $\Gamma'(\gamma_0) = 0$, $\Gamma'(\gamma) > 0$ si $\gamma < \gamma_0$ et $\Gamma'(\gamma) < 0$ si $\gamma > \gamma_0$. Ainsi, puisque $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$, on obtient l'existence de $0 < \gamma_1 < \frac{N-ps}{p} < \gamma_2 < \frac{N-ps}{p-1}$ tel que $\Gamma(\gamma_1) = \Gamma(\gamma_2) = \lambda$. □



On définit $q_+(p,s) = p - 1 + \frac{ps}{\gamma_1}$, il est clair que $p_s^* - 1 < q_+(p,s)$. On a le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.8. Supposons que $q < q_+(p,s)$, alors

1. Si $p - 1 < q < p_s^* - 1$, le problème (3.88) a une solution u. De plus, $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ si $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$ et $h_{s,\Omega}(u) < \infty$ si $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$ où $h_{s,\Omega}$ est définie dans (3.89).
2. $p_s^* - 1 \leq q < q_+(p,s)$, alors le problème (3.88) a une sur-solution positive u.

Démonstration. Commençons par le cas où $p - 1 < q < p_s^* - 1$. Si $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$, ensuite, en utilisant le théorème de Mountain Pass, voir [65], on obtient une solution positive $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Toutefois, si $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$, alors, en utilisant l'inégalité de Hardy améliorée dans le Théorème 2.3 et le Théorème de Mountain pass, nous obtenons une solution positive u du problème (3.88) avec $h_{s,\Omega}(u) < \infty$.
Maintenant supposons que $p_s^* - 1 \leq q < q_+(p,s)$ et fixons $\lambda_1 \in (\lambda, \Lambda_{N,p,s})$ à choisir ultérieurement. Soit $\gamma_1 \in (0, \frac{N-ps}{p})$ tel que $\Gamma(\gamma_1) = \lambda_1$ et soit $w(x) = |x|^{-\gamma_1}$, alors

$$(-\Delta)_p^s(w) = \lambda_1 \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} \quad p.p \text{ dans } I\!R^N \backslash \{0\}$$

avec $\dfrac{w^{p-1}}{|x|^{ps}} \in L^1_{loc}(I\!R^N)$. Par conséquent,

$$(-\Delta)_p^s(w) = \lambda \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} + (\lambda_1 - \lambda)\frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} \quad p.p \text{ dans } I\!R^N \backslash \{0\}.$$

En utilisant le fait que $q < q_+(p,s)$, nous pouvons choisir $\lambda_1 > \lambda$, très proche de λ tel que $\gamma_1(p-1) + ps > q\gamma_1$, ainsi, dans tout domaine borné Ω, on a

$$(\lambda_1 - \lambda)\frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} \geq C(\Omega) w^q.$$

posons $\hat{w} = Cw$, par les estimations précédentes, nous pouvons choisir $C(\Omega) > 0$ telle que $\hat{w}$ soit une sur-solution au (3.88) dans Ω. D'où, le résultat. $\square$

Maintenant, nous montrons l'optimalité de l'exposant $q_+(p,s)$. Nous avons le résultat de non existence suivant.

Théorème 3.9. Soit $q_+(p,s) = p - 1 + \frac{ps}{\gamma_1}$, alors si $q > q_+(p,s)$, l'unique sur-solution non négative $u \in W^{s,p}_{loc}(\Omega)$ du problème (3.88) est $u \equiv 0$.

Commençons par prouver le lemme suivant qui montre que la constante de Hardy est indépendante du domaine.

Lemme 3.13. Soit $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine régulier tel que $0 \in \Omega$. On définit

$$\Lambda(\Omega) = \inf_{\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\setminus 0\}} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx},$$

alors $\Lambda(\Omega) = \Lambda_{N,p,s}$ défini dans (3).

Démonstration. rappelons que

$$\Lambda_{N,p,s} = \inf_{\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)\setminus 0\}} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\displaystyle\int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx},$$

ainsi $\Lambda(\Omega) \geq \Lambda_{N,p,s}$. Il est clair que si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors $\Lambda(\Omega_1) \geq \Lambda(\Omega_2)$.
Maintenant, en utilisant l'argument de dilatation, nous pouvons prouver que $\Lambda(B_{R_1}(0)) = \Lambda(B_{R_2}(0))$ pour tout $0 < R_1 < R_2$. Par conséquent, nous concluons que $\Lambda(\Omega) \equiv \bar{\Lambda}$ ne dépend pas du domaine Ω. Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, on pose

$$Q(\phi) \equiv \frac{\displaystyle\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\displaystyle\int_{I\!R^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx}.$$

Soit $\{\phi_n\}_n \subset \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ telle que $Q(\phi_n) \to \Lambda_{N,p,s}$. Sans perte de généralité et en utilisant l'argument de symétrisation nous pouvons supposer que Supp $\phi_n \subset B_{R_n}(0)$. Il est clair que $Q(\phi_n) \geq \Lambda(\text{Supp}(\phi_n)) = \bar{\Lambda}$, ainsi, comme $n \to \infty$, il en résulte que $\bar{\Lambda} \leq \Lambda_{N,p,s}$. Comme conclusion nous obtenons que $\bar{\Lambda} = \Lambda_{N,p,s}$ et le résultat suit. $\square$

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.14. Soit Ω un domaine borné tel que $0 \in \Omega$. Supposons que $u \in W^{s,p}(I\!R^N)$ est tel que $u \geq 0$ dans $I\!R^N$, $u > 0$ dans Ω et $\Lambda_{N,p,s} u \gneqq \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}}$ dans Ω, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $u(x) \geq C|x|^{-\gamma_1+\varepsilon}$ dans $B_\eta(0)$ où γ_1 est définit dans le lemme 3.12.

Démonstration. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $B_1(0) \subset \Omega$. Fixons $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda)$, puis on définit

$$w_1(x) = \begin{cases} |x|^{-\gamma_1} & \text{si } |x| < 1, \\ 1 & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \tag{3.90}$$

Il est clair que $\tilde{w} \in W_0^{s,p}(B_1(0))$ et

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s \tilde{w} &= h(x) \dfrac{\tilde{w}^{p-1}}{|x|^{ps}} \text{ dans } B_1(0), \\ \tilde{w} &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \end{cases} \tag{3.91}$$

où

$$h(x) = \int_0^{\frac{1}{|x|}} |1 - \sigma^{-\tilde{\gamma}}|^{p-2}(1 - \sigma^{-\tilde{\gamma}})\sigma^{N-1} K(\sigma) d\sigma + (1 - |x|^{\tilde{\gamma}}) \int_{\frac{1}{|x|}}^{\infty} \sigma^{N-1} K(\sigma) d\sigma.$$

Utilisons la définition de γ_1, voir Lemme 3.12, on peut prouver que $h(x) \leq \lambda$ pour tout $x \in B_1(0)$.

Puisque $(-\Delta)_p^s u \gneqq 0$ et $u > 0$ dans Ω, et en utilisant l'inégalité faible de Harnack non local dans [41], on obtient l'existence de $\varepsilon > 0$ telle que $u \geq \varepsilon$ dans $\bar{B}_1(0)$.

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u & \geq \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} \text{ dans } B_1(0) \\ (-\Delta)_p^s \tilde{w} & \leq \lambda \dfrac{\tilde{w}^{p-1}}{|x|^{ps}}, \text{ dans } B_1(0), \\ u & \geq \tilde{w} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0). \end{cases} \tag{3.92}$$

Par le principe de comparaison du Lemme 2.2, il suit que $\tilde{w} \leq u$ qui est le résultat souhaité. $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 3.9.

Preuve du théorème 3.9.

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence de $u \gneqq 0$ telle que $u \in W^{s,p}(I\!R^N)$ et u est une sur-solution de problème (3.88) dans Ω, alors $u > 0$ dans Ω. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\eta(0))$ avec $B_\eta(0) \subset\subset \Omega$ et $\eta > 0$ à choisir par la suite. En utilisant l'inégalité de Picone dans le lemme 2.1, il en résulte que

$$||\phi||^p_{X_0^{s,p}(I\!R^N)} \geq \int_{B_\eta(0)} \frac{(-\Delta)_p^s u}{u^{p-1}} |\phi|^p dx.$$

Ainsi

$$||\phi||^p_{X_0^{s,p}(I\!R^N)} \geq \int_{B_\eta(0)} u^{q-(p-1)} |\phi|^p dx.$$

Puisque $q > q_+(p, s)$, on obtient l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\gamma_1 - \varepsilon)(q - (p-1)) > ps + \rho$$

pour quelque $\rho > 0$. Ainsi, en utilisant le lemme 3.14, on peut choisir $\eta > 0$ tel que

$$u^{q-(p-1)} \geq C|x|^{-ps-\rho} \text{ in } B_\eta(0).$$

Donc

$$||\phi||^p_{X_0^{s,p}(I\!R^N)} \geq C \int_{B_\eta(0)} \frac{|\phi|^p}{|x|^{ps+\rho}} dx,$$

qui est une contradiction avec l'optimalité de l'inégalité Hardy prouvée dans le lemme 3.13. $\square$

Chapitre 4

Problème parabolique d'ordre fractionnaire avec donnée générale

Ce chapitre est le développement d'une partie de l'article [2]

4.1 Introduction.

Dans ce chapitre on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta_p^s)u & = & f(x,t) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u & \geq & 0 & \text{dans } I\!R^N \times (0,T) \\ u & = & 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné, $s \in (0,1), 1 < p < N$ et

$$(-\Delta_p^s)\, u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|^{p-2}(u(x,t) - u(y,t))}{|x-y|^{N+ps}}\, dy$$

est l'opérateur $p-$laplacien fractionnaire, qui est , en particulier, non local. Les données f et u_0 sont des fonctions mesurables non négatives sous des hypothèses appropriées que nous préciserons dans chaque cas.

Pour l'opérateur local $p-$laplacien, il existe beaucoup de références dans la littérature. Parmi ces derniers, nous nous référons au [64] où l'auteur a prouvé l'existence d'une solution d'entropie pour toutes les données dans $(f, u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$ et au [26] pour une donnée mesure et l'existence d'une solution renormalisée.

Pour l'opérateur non local, le cas $p = 2$ a été analysé dans [58]. En utilisant de la dualité et des arguments d'approximation, les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution qui appartient à un espace de Sobolev fractionnaire approprié. Le cas de potentiel de Hardy et sous une condition «naturelle» sur (f, u_0) a été largement étudié dans [8].

Dans ce chapitre, nous allons traiter le cas $p \neq 2$. Nous allons prouver l'existence d'une solution dans un espace de Sobolev fractionnaire approprié. Il est intéressant de rappeler que le problème stationnaire a été étudié dans le chapitre 3. Nous allons utiliser les techniques et les résultats fonctionnels expliqués dans le chapitre 3.

Plus précisément, le chapitre est organisé comme suit.

Dans la section 4.2 nous allons donner le sens dans lequel les solutions sont envisagées et quelques outils utiles. la section 4.3 est consacrée à la preuve de l'existence d'une solution faible pour toutes les données $(f, u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$. L'idée est de procéder par approximation et de passer à la limite en utilisant une fonction test appropriée. De la même manière, nous montrons que cette solution est en fait une solution d'entropie. Dans la dernière section, nous analysons les questions de extension en temps fini et la propagation de la vitesse finie.

4.2 Préliminaires et cadre fonctionnel

Définissons maintenant les espaces paraboliques correspondants. Comme dans le cas local, l'espace $L^p(0,T; W_0^{s,p}(\Omega))$ est défini comme l'ensemble des fonctions ϕ tel que $\phi \in L^p(\Omega_T)$ avec $||\phi||_{L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))} < \infty$ où

$$||\phi||_{L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))} = \Big(\int_0^T \iint_{D_\Omega} |\phi(x,t) - \phi(y,t)|^p d\nu\, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Il est clair que $L^p(0,T; W_0^{s,p}(\Omega))$ est un espace de Banach dont l'espace dual est $L^{p'}(0,T; W_0^{-s,p'}(\Omega))$.

Pour la simplicité d'écriture et pour toute fonction mesurable u, on pose

$$U(x,y,t) = |u(x,t) - u(y,t)|^{p-2}(u(x,t) - u(y,t)).$$

Nous introduisons la notion de la solution à utiliser plus tard.

Définition 4.1. Supposons que $(f, u_0) \in L^{p'}(0,T, W^{-s,p'}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$. Nous disons que u est une solution d'énergie pour le problème (4.1) si $u \in L^p(0,T; W_0^{s,p}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T], L^p(\Omega))$, $u_t \in L^{p'}(0,T; W_0^{-s,p'}(\Omega))$, $u(x,.) \to u_0$ fortement dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$ et pour toute $v \in L^p(0,T; W_0^{s,p}(\Omega))$ on a

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle dt + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)(v(x,t) - v(y,t))d\nu dt = \iint_{\Omega_T} f(x,t) v dx dt$$

Notons que l'existence d'une solution d'énergie suit en utilisant l'argument classique pour un opérateur monotone, (Voir [61]).

Pour une donnée $(f, u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$, nous avons besoin de préciser le sens dans lequel la solution est définie.

Définition 4.2. Supposons que $(f, u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$, on dit que u est une solution faible (ou solution au sens des distributions) au problème (4.1) si pour toute $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_T)$ on a

$$-\iint_{\Omega_T} u\, v_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)(v(x,t) - v(y,t))d\nu dt = \iint_{\Omega_T} f(x,t)vdxdt.$$

Dans le cas local une notion plus forte de la solution entropie, est introduit dans le but d'obtenir l'unicité, voir [64]. Rappelons la fonction de troncature et l'espace des fonctions dont nous avons besoin.

Définition 4.3. On dit que $u \in \mathcal{T}_0^{s,p}(\Omega_T)$ si $T_k(u) \in L^p(0, T, W_0^{s,p}(\Omega))$ pour toute $k > 0$.

Nous indiquons maintenant la définition de la solution d'entropie inspirée de [64].

Définition 4.4. Soit $(f, u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$ des fonctions non négatives. On dit que $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ est une solution d'entropie du problème (4.1) si $u \in \mathcal{T}_0^{s,p}(\Omega_T)$ et

1. Posons

$$\begin{aligned} R_h \quad = \quad & \Big\{(x,y,t) \in I\!R^{2N} \times (0,T) : h+1 \le \max\{|u(x,t)|, |u(y,t)|\} \\ & \text{avec } \min\{|u(x,t)|, |u(y,t)|\} \le h \text{ ou } u(x,t)u(y,t) < 0\Big\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

alors

$$\iiint_{R_h} |u(x,t) - u(y,t)|^{p-1} d\nu\, dt \to 0 \text{ quand } h \to \infty. \tag{4.3}$$

2. Pour tout $v \in L^p((0,T), W^{s,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T) \cap C([0,T]; L^1(\Omega))$ avec $v_t \in L^{p'}((0,T); W^{-s,p'}(\Omega))$ on a

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Theta_k(u-v)(x,T)dx - \int_0^T \langle v_t, T_k(u-v)\rangle dt \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)[T_k(u(x,t) - \varphi(x,t)) - T_k(u(y,t) - \varphi(y,t))]d\nu\, dt \\ & \le \int_\Omega \Theta_k(u_0(x) - v(x,0))dx + \iint_{\Omega_T} fT_k(u-v)dxdt, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\Theta_k(\sigma) = \displaystyle\int_0^\sigma T_k(a)da$.

Afin de prouver l'existence d'une solution d'entropie, nous allons procéder d'abord par approximation puis trouver des estimations appropriées pour passer à la limite et, enfin, en prouvant que la limite est une solution d'entropie. Avec cette stratégie, nous prouvons que toute solution limite d'approximations est une solution d'entropie.

Quelques estimations a priori seront prouvées dans l'espace de Marcinkiewicz classique $\mathcal{M}^q(\Omega_T)$, que pour la commodité du lecteur, nous le définissons ci-dessous.

Définition 4.5. Soit u une fonction mesurable, on définit

$$\Phi_u(k) = \mu\{(x,t) \in \Omega_T : |u(x,t)| > k\}.$$

On dit que u est un espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega_T, d\mu)$ si $\Phi_u(k) \leq Ck^{-q}$. Notons que $L^q(\Omega_T) \subset \mathcal{M}^q(\Omega_T)$ pour tout $q > 1$.

4.3 Résultats d'existence

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 4.1. Supposons que $(f, u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$ sont des fonctions non négatives, alors le problème (4.1) a une solution faible u telle que $T_k(u) \in L^p(0, T, W_0^{s,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$ et $q < \frac{N(p-1)+ps}{N+s}$, et pour tout $s_1 < s$, nous avons

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\, dy\, dx\, dt \leq M. \tag{4.5}$$

Si $p > 2 - \frac{s}{N}$, alors $u \in L^p(0, T, W_0^{s_1,q}(\Omega))$ pour tout $1 \leq q < \frac{N(p-1)+ps}{N+s}$ et pour tout $s_1 < s$.

Pour montrer le théorème 4.1 on procède par approximation. on définit $f_n = T_n(f)$ et $u_{0n} = T_n(u_0)$, alors $(f_n, u_{0n}) \in L^\infty(\Omega_T) \times L^\infty(\Omega)$ et $(f_n, u_{0n}) \uparrow (f, u_0)$ fortement dans $L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$. Soit u_n la solution unique pour le problème approximé suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{nt} + (-\Delta_p^s)u_n &=& f_n(x,t) & \text{dans } \Omega_T, \\ u_n &=& 0 & \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,0) &=& u_{0n}(x) & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Notons que l'existence de u_n suit en utilisant une modification directe du résultat classique de [61]. Puisque $\{f_n\}_n, \{u_{0n}\}_n$ sont des suites croissantes, alors $\{u_n\}_n$ est croissante en n. Il est clair que $u_n \geq 0$ pour tout n.

On commence par prouver l'estimation a priori suivante.

Lemme 4.1. Considérons la suite $\{u_n\}_n$ défini comme ci-dessus, alors $||u_n||_{\mathcal{M}^{p_1}(\Omega_T)} \leq C$ pour tout n, où $p_1 = p - 1 + \frac{ps}{N}$. En particulier, pour tout $q < 1 + \frac{ps}{(p-1)N}$, on a

$$||u_n^{p-1}||_{L^q(\Omega_T)} \leq C \text{ for all } n.$$

Démonstration. En prenant $T_k(u_n)$ comme fonction test dans le problème (4.6), il en résulte que

$$\iint_{\Omega_T} u_{nt}T_k(u_n(x,t))\ dx\ dt + \iint_{\Omega_T} (-\Delta_p^s)\, u_n(x,t)[T_k(u_n(x,t))]\ dx\ dt$$
$$= \iint_{\Omega_T} f_n(x,t)[T_k(u_n(x,t))]\, dx\ dt \leq Ck.$$

L'intégration par partie nous donne,

$$\int_\Omega \Theta_k(u_n(x,T))\ dx + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)[T_k(u_n(x,t)) - T_k(u_n(y,t))]d\nu\, dt$$
$$\leq ck + \int_\Omega \Theta_k(u_{0n}(x))\ dx \leq ck + k\int_\Omega u_0(x)\ dx$$
$$\leq C_1 k.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité (1.14) et l'estimation ci-dessus, il en résulte que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega \Theta_k(u_n(x,t))\ dx + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} |T_k(u_n(x,t)) - T_k(u_n(y,t))|^p d\nu\, dt \leq Mk.$$

Maintenant, par l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\int_0^T \Big(\int_\Omega |T_k(u_n(x,t))|^{p_s^*}\ dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}\ dt$$
$$\leq \int_0^T \iint_{D_\Omega} |T_k(u_n(x,t)) - T_k(u_n(y,t))|^p d\nu\ dt$$
$$\leq Mk.$$

Par conséquent

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |T_k(u_n(x,t))|^{p_s^*} dx\right)^{\frac{1}{p_s^*}}\ dt \leq C(Mk)^{1/p}.$$

Soit $1 < r < p_s^*$ et on définit $r_1 = \big(\frac{p_s^*}{p_s^*-1}\big)(r-1)$, $r_2 = 1 - \frac{r_1}{p_s^*}$, où $r = r_1 + r_2$.

Fixons $t_1 < T$, alors

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega |T_k(u_n(x,t))|^r\ dx\ dt \leq \int_0^{t_1}\int_\Omega |T_k(u_n(x,t))|^{r_1}|u_n(x,t)|^{r_2}\ dx\ dt$$
$$\leq \int_0^{t_1} \Big(\int_\Omega |T_k(u_n(x,t))|^{p_s^*}\ dx\Big)^{\frac{r_1}{p_s^*}} \Big(\int_\Omega |u_n(x,t)|^{r_2(\frac{p_s^*}{r_1})'}\ dx\Big)^{1-\frac{r_1}{p_s^*}}\ dt$$
$$\leq \int_0^{t_1} \Big(\int_\Omega |T_k(u_n(x,t))|^{p_s^*}\ dx\Big)^{\frac{r_1}{p_s^*}} \Big(\int_\Omega |u_n(x,t)|^{r_2\frac{p_s^*}{p_s^*-r_1}}\ dx\Big)^{1-\frac{r_1}{p_s^*}}\ dt$$
$$\leq \Big(\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega |u_n(x,t)|dx\Big)\int_0^T \Big(\int_{I\!R^N} |T_k(u_n(x,t))|^{p_s^*}\ dx\Big)^{\frac{r_1}{p_s^*}} dt$$
$$\leq c\int_0^T \Big(\int_{I\!R^N} |T_k(u_n(x,t))|^{p_s^*}\ dx\Big)^{\frac{r_1}{p_s^*}}\ dt \leq cMk^{\frac{r_1}{p}} \leq Ck^{\frac{r_1}{p}}.$$

Ainsi
$$\iint_{\Omega_T} |T_k(u_n(x,t))|^r \ dx \ dt \leq Ck^{\frac{r_1}{p}}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $|\{u_n > k\}| = |\{T_k(u_n) = k\}|$, on obtient

$$Tk^r\Phi\{(x,t) \in \Omega_T : |u| > k\} \leq \int\int_{\Omega_T} |T_k(u_n(x,t))|^r \ dx \ dt \leq TCk^{\frac{r_1}{p}}.$$

Par conséquent
$$\Phi\{(x,t) \in \Omega_T : |u_n| > k\} \leq Ck^{-(r-\frac{r_1}{p})} \leq Ck^{-\alpha},$$

où $\alpha = 1 + r_1[\frac{p_s^*(p-1)-p}{pp_s^*}]$. Faisons $r_1 \to p$, il en résulte que $\alpha \to 1 + [\frac{p_s^*(p-1)-p}{p_s^*}] = [\frac{p(p_s^*-1)}{p_s^*}]$.

Ainsi $\Phi\{(x,t) \in \Omega_T : |u_n| > k\} \leq CM^{\frac{p_s^*}{p}} k^{-p_1}$ où $p_1 = p - 1 + \frac{ps}{N}$. Par conséquent $||u_n||_{\mathcal{M}^{p_1}(\Omega_T)} \leq C$ pour tout n, et le résultat suit. $\square$

En utilisant le théorème de convergence monotone nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable non négatif u telle que $u_n \uparrow u$ *p.p.* dans Ω et $u_n^{p-1} \to u^{p-1}$ fortement dans $L^q(\Omega_T)$ pour tout $q < 1 + \frac{ps}{(p-1)N}$.

Nous montrons maintenant que la suite $\{u_n\}_n$ est bornée dans un espace de Sobolev fractionnaire approprié, plus précisément nous avons.

Lemme 4.2. Soit $\{u_n\}_n$ défini comme ci-dessus, pour tout $q < p_2 = \frac{N(p-1)+ps}{N+s}$ et pour tout $s_1 < s$, on a
$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_n(x,t) - u_n(y,t)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} d\nu \ dt \leq M. \tag{4.7}$$

En particulier, si $p > \frac{2N+s}{N+s}$, alors $\{u_n\}_n$ est bornée dans $L^q(0, T, W_0^{s_1,q}(\Omega))$ pour tout $1 < q < p_2 = \frac{N(p-1)+ps}{N+s}$.

Démonstration. on définit $w_n(x,t) = 1 - \dfrac{1}{(u_n(x,t)+1)^\alpha}$, puis en utilisant w_n comme fonction test dans (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega u_{nt} w_n(x,t) \ dx \ dt + \int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t) w_n(x,t) d\nu \, dt \\ \leq \iint_{\Omega_T} f_n(x,t) w_n \, dx \, dt \leq C.\end{aligned}$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_T} u_{nt}(x,t) w_n(x,t) \ dx \ dt = \int_\Omega u_n(x,T) \ dx - \int_\Omega u_{0n}(x) dx \\ + \frac{1}{1+\alpha} \int_\Omega \Big[\frac{1}{(u_n(x,T)+1)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(u_{n0}(x)+1)^{\alpha+1}}\Big] \ dx \text{ if } \alpha \neq 1,\end{aligned}$$

et

$$\iint_{\Omega_T} u_{nt}(x,t)w_n(x,t)\ dx\ dt = \int_\Omega u_n(x,T)\ dx - \int_\Omega u_{0n}(x)\ dx$$
$$+\int_\Omega \Big[\log(u_n(x,T)+1) - \log(u_{n0}(x)+1)\Big]\ dx \text{ if } \alpha = 1.$$

Par conséquent, dans tous les cas, en prenant en considération le fait que $\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega |u_n(x,t)|dx \leq C$ pour tout n, il en résulte que

$$\iint_{\Omega_T} u_{nt}(x,t)w_n(x,t)\ dx\ dt \geq \int_\Omega u_n(x,T)\ dx - C.$$

Nous traitons maintenant le terme

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} |u_n(x,t)-u_n(y,t)|^{p-2}(u_n(x,t)-u_n(y,t))w_n(x,t)d\nu\, dt.$$

Soit $v_n = u_n + 1$, alors

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} |u_n(x,t)-u_n(y,t)|^{p-2}(u_n(x,t)-u_n(y,t))w_n(x,t)d\nu dt =$$
$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} |v_n(x,t)-v_n(y,t)|^{p-2}(v_n(x,t)-v_n(y,t))(\frac{v_n^\alpha(x,t)-v_n^\alpha(y,t)}{v_n^\alpha(y,t)v_n^\alpha(x,t)})d\nu\ dt.$$

En utilisant l'inégalité (1.12), il en résulte que

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} \frac{|v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(x,t) - v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(y,t)|^p}{v_n^\alpha(y,t)v_n^\alpha(x,t)} d\nu\ dt \leq C.$$

Fixons $q < p_2$ et $s < s_1$, alors il existe $q_1 < q$ telle que $s_1 = \frac{q_1}{q}s$. Par conséquent, nous obtenons

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} dx\ dy\ dt$$

$$= \int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^q}{|x-y|^{qs}} \frac{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}}{(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}} \frac{(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}}{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}} \frac{|x-y|^{(q-q_1)s}}{|x-y|^N} dx\ dy\ dt$$

$$\leq \Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^p (v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}} dx\ dy\ dt\Big)^{\frac{q}{p}} \times$$

$$\Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}}{(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}} \frac{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha\frac{p}{p-q}}}{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{(\alpha-1)\frac{p}{p-q}}} \frac{|x-y|^{(q-q_1)s\frac{p}{p-q}} dx\ dy\ dt}{|x-y|^N}\Big)^{\frac{p-q}{p}}$$

$$\leq \Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^p (v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}} dx\ dy\ dt\Big)^{\frac{q}{p}} \times$$

$$\Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \Big(\frac{(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}}{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}}\Big)^{\frac{q}{p-q}} \frac{|x-y|^{(q-q_1)s\frac{p}{p-q}} dx\ dy\ dt}{|x-y|^N}\Big)^{\frac{p-q}{p}}.$$

En utilisant l'inégalité (1.13), il en résulte que

$$\Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^p (v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}} dx\ dy\ dt\Big)^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq \Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(x,t)-v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x,t)v_n(y,t))^{\alpha}} dx\ dy\ dt\Big)^{\frac{q}{p}} \leq c.$$

Donc, nous obtenons

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} dx\ dy\ dt$$
$$\leq c\Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \Big(\frac{v_n(x,t)v_n(y,t)}{v_n(x,t)+v_n(y,t)}\Big)^{\alpha\frac{q}{p-q}} \frac{(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\frac{q}{p-q}}}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}} dx\ dy\ dt\Big)^{\frac{p-q}{p}}.$$

En utilisant l'inégalité (1.11), nous obtenons que

$$\begin{aligned} (v_n(x,t)+v_n(y,t))\Big(\frac{v_n(x,t)v_n(y,t)}{v_n(x,t)+v_n(y,t)}\Big)^{\alpha} &\leq c(v_n(x,t)+v_n(y,t))^{\alpha+1} \\ &\leq c_1 v_n^{\alpha+1}(x,t)+c_2 v_n^{\alpha+1}(y,t). \end{aligned}$$

alors,

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|v_n(x,t)-v_n(y,t)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} dy\ dx\ dt$$
$$\leq c_1\Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x,t) dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}}\Big)^{\frac{p-q}{p}} + c_2\Big(\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(y,t) dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}}\Big)^{\frac{p-q}{p}}. \tag{4.8}$$

Puisque Ω est un domaine borné, nous obtenons l'existence de $R > 0$ telle que $\Omega \subset\subset B_R(0)$. Par conséquent

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x,t)dx\, dy\, dt}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}} \leq \int_0^T \int_{B_R(0)} v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x,t)dx\, dt \int_{B_R(0)} \frac{dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}}$$

On pose $r = |x|$ et $\rho = |y|$, alors $x = rx', y = \rho y'$, où $|x'| = |y'| = 1$. on définit $\kappa = \frac{(\alpha+1)q}{p-q}$ et $\theta = \frac{ps(q-q_1)}{p-q}$, il en résulte que

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\kappa}(x,t)dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\theta}} \leq \int_0^T \int_{B_R(0)} v_n^{\kappa}(x,t)\ dx\ dt \int_0^R \frac{\rho^{N-1}}{r^{N-\theta}} \left(\int_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\frac{\rho}{r}y'|^{N-\theta}} \right) d\rho.$$

Posons $\sigma = \dfrac{\rho}{r}$, alors

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\kappa}(x,t)dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\theta}} \leq \int_0^T \int_{B_R(0)} v_n^{\kappa}(x,t)|x|^{\theta}\ dx\ dt \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma.$$

où K_θ est donnée dans (3.19). Par conséquent, nous concluons que

$$\begin{aligned} \int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\kappa}(x,t)dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\theta}} &\leq \int_0^T \int_{B_{\frac{R}{3}}(0)} v_n^{\kappa}(x,t)|x|^{\theta}\ dx\ dt \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \\ &+ \int_0^T \int_{B_R(0)\setminus B_{\frac{R}{3}}(0)} v_n^{\kappa}(x,t)|x|^{\theta}\ dx\ dt \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Rappelons que $r = |x|$, alors si $x \in B_R(0)\setminus B_{\frac{R}{3}}(0)$, il en résulte que $\frac{R}{r} < 3$. donc, en prenant en considération que $\theta > 0$ et le comportement de K_θ proche 1, nous arrivons à ce que

$$\int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \leq \int_0^3 \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma = C_1.$$

Maintenant si $x \in B_{\frac{R}{3}}(0)$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma &= \int_0^3 \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma + \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma = C_1 + \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \\ &\leq C_1 + (\frac{R}{r})^a \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1-a} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \end{aligned}$$

où $a > 0$ à choisir plus tard. Il est clair que

$$\int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-1-a} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \leq \int_3^{\infty} \sigma^{N-1-a} K_\theta(\sigma)\, d\sigma.$$

En choisissant $a > \theta$, il en résulte que $\int_3^{\infty} \sigma^{N-1-a} K_\theta(\sigma)\, d\sigma = C_2 < \infty$. Maintenant, en revenant à (4.9), on aura

$$\begin{aligned} &\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^\kappa(x,t) dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\theta}} \\ &\leq C_1 \int_0^T \int_{B_R(0)} v_n^\kappa(x,t)|x|^\theta\ dx\ dt + C_2 R^a \int_0^T \int_{B_{\frac{R}{3}}(0)} v_n^\kappa(x,t)|x|^{\theta-a}\ dx\ dt \end{aligned} \tag{4.10}$$

Rappelons que $q < \frac{(p-1)N+ps}{N+s}$, alors nous pouvons choisir $\alpha > 0$ telle que $\kappa < p - 1 + \frac{ps}{N}$. Par conséquent, en prenant en considération le résultat du lemme 4.1, et en choisissant a très proche de θ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on en déduit que

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x,t) dx\ dy\ dt}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}} \leq C.$$

De façon symétrique, on peut montrer que

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(y,t) dy\ dx\ dt}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}} \leq C \text{ for all } n.$$

En revenant à (4.8) et en prenant en considération les estimations précédentes, nous concluons que

$$\int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_n(x,t) - u_n(y,t)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} dy\ dx\ dt \leq C.$$

Par conséquent, le résultat suit. □

Pour prouver que $u \in \mathcal{C}([0,T], L^1(\Omega))$, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3. Soit $\{u_n\}_n$ défini comme ci-dessus, $\{u_n\}_n$ converge fortement vers u dans $C([0,T], L^1(\Omega))$.

Démonstration. Soit $m, n \in I\!N$, alors pour tout $\phi \in L^p([0,T], W_0^{s,p}(\Omega))$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_T} (u_n - u_m)_t(x,t)\phi(x,t)dx\ dt \\
&+ \iint_{\Omega_T} \langle(-\Delta_p^s)\, u_n(x,t) - (-\Delta_p^s)\, u_m(x,t), \phi(x,t)\rangle dxdt \\
&= \iint_{\Omega_T} (f_n - f_m)\phi dxdt.
\end{aligned}$$

Soit $\phi(x,t) = T_1(u_n - u_m)_{[0,t]}(x,t)$, avec $t \leq T$, en posant $\Omega_t = \Omega \times (0,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_t} \langle (u_n - u_m)_\tau(x,\tau), T_1(u_n - u_m)(x,\tau)\rangle dx\ d\tau \\
&+ \iint_{\Omega_t} \langle(-\Delta_p^s)\, u_n(x,\tau) - (-\Delta_p^s)\, u_m(x,\tau), T_1(u_n - u_m)\rangle dxd\tau \\
&= \iint_{\Omega_t} (f_n - f_m)(x,\tau)T_1(u_n - u_m)(x,\tau)\, dx\, d\tau \leq \iint_{\Omega_T} |f_n - f_m| dxd\tau.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\iint_{\Omega_T} \langle (u_n - u_m)_\tau(x,\tau), T_1(u_n - u_m)(x,\tau)\rangle dx\ d\tau = \int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)]_0^t(x,\tau)\, dx.$$

Maintenant, par l'inégalité (1.14) on obtient que

$$\iint_{\Omega_t} \langle(-\Delta_p^s)\, u_n(x,\tau) - (-\Delta_p^s)\, u_m(x,\tau), T_1(u_n - u_m)\rangle dxd\tau \geq 0.$$

ainsi

$$\int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](t)dx \leq \int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](x,0)dx + \iint_{\Omega_T} |f_n - f_m| dx\, d\tau.$$

Rappelons que $\Theta_1(\sigma) \leq |\sigma|$, ceci, pour toute $t \leq T$,

$$\int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](x,t)dx \leq \int_\Omega |u_{0n} - u_{0m}| dx + \iint_{\Omega_T} |f_n - f_m| dx\, d\tau.$$

Notons $b_{n,m}$ le côté droite, donc

$$\int_{|u_n - u_m| < 1} |u_n - u_m|^2 dx + \int_{|u_n - u_m| > 1} |u_n - u_m| \leq 2b_{n,m} dx.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n - u_m| dx &= \int_{|u_n - u_m| < 1} |u_n - u_m| dx + \int_{|u_n - u_m| > 1} |u_n - u_m| dx \\
&\leq \Big(\int_{|u_n - u_m| < 1} |u_n - u_m|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} |\Omega_T|^{\frac{1}{2}} + 2b_{n,m} \\
&\leq |2\Omega_T|^{\frac{1}{2}} b_{n,m}^{\frac{1}{2}} + 2b_{n,m},
\end{aligned}$$

en prenant en considération que les suites $\{f_n\}_n$ et $\{u_n\}_n$ convergent fortement dans $L^1(\Omega_T)$ et $L^1(\Omega)$ respectivement, nous concluons que $b_{n,m} \to 0$ pour $n, m \to \infty$.

Par conséquent, nous concluons que $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T], L^1(\Omega))$ et donc $u_n \to u$ dans $C([0,T], L^1(\Omega))$. $\square$

En conséquence des lemmes précédentes , on obtient que $u \in C([0,T], L^1(\Omega))$, $T_k(u) \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$, $u^{p-1} \in L^\sigma(\Omega_T)$ pour tout $\sigma < \frac{N(p-1)+ps}{N(p-1)}$ et $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ faiblement dans $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$. Il est clair que $u_n \to u$ p.p. dans Ω_T, alors, en prenant en considération le fait que $u_n = 0$ p.p. dans $(I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T)$, nous obtenons $u = 0$ p.p. dans $(I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T)$.

Rappelons que

$$U_n(x,y,t) = |u_n(x,t) - u_n(y,t)|^{p-2}(u_n(x,t) - u_n(y,t)) \text{ et}$$

$$U(x,y,t) = |u(x,t) - u(y,t)|^{p-2}(u(x,t) - u(y,t)).$$

Puisque Ω est un domaine borné, puis par le résultat du lemme 4.1 et en utilisant le lemme de Vitali, nous obtenons

$$U_n \to U \text{ strongly in } L^1((\Omega \times \Omega) \times (0,T), d\nu\, dt).$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.1.

Preuve du théorème 4.1.

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_T)$ et on définit $\Phi(x,y,t) = \phi(x,t) - \phi(y,t)$, prenons ϕ comme fonction test dans (4.6), il en résulte que

$$\begin{aligned} &\int\int_{\Omega_T} u_{nt}\phi(x,t)\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)\Phi(x,y,t)d\nu\,dt \\ &= \int\int_{\Omega_T} f_n(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Il est clair que

$$\iint_{\Omega_T} u_{nt}\phi(x,t)\,dx\,dt = -\iint_{\Omega_T} u_n\phi_t(x,t)\,dx\,dt.$$

Par conséquent

$$-\iint_{\Omega_T} u_n\phi_t(x,t)\,dx\,dt \to -\iint_{\Omega_T} u\phi_t(x,t)\,dx\,dt \quad \text{quand n} \to \infty.$$

De la même manière nous avons

$$\iint_{\Omega_T} f_n(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt \to \iint_{\Omega_T} f(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt \text{ quand } n \to \infty.$$

Nous affirmons que

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} \Big(U_n(x,y,t) - U(x,y,t)\Big)\Phi(x,y,t)d\nu\, dt \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{4.12}$$

Puisque $u_n \to u$ p.p. dans Ω_T, alors

$$\frac{U_n(x,y,t)\Phi(x,y,t)}{|x-y|^{N+ps}} \to \frac{U(x,y,t)\Phi(x,y,t)}{|x-y|^{N+ps}} \; p.p. \text{ dans } D_{\Omega_T} \equiv D_\Omega \times (0,T).$$

En utilisant le fait que $u(x,t) = u_n(x,t) = \phi(x,t) = 0$ pour tout $x \in (I\!R^N \backslash \Omega) \times (0,T)$, nous obtenons que

$$\int_0^T \int_{I\!R^N\backslash\Omega} \int_{I\!R^N\backslash\Omega} (U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)d\nu\, dt = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \iint_{D_\Omega} (U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)d\nu\, dt \\
&= \int_0^T \iint_{\Omega\times\Omega} (U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)d\nu\, dt \\
&+ \int_0^T \int_{I\!R^N\backslash\Omega} \int_\Omega (U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)d\nu\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R^N\backslash\Omega} (U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)d\nu\, dt \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Puisque $U_n \to U$ strongly in $L^1((\Omega\times\Omega)\times(0,T), d\nu dt)$, alors $I_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Nous traitons maintenant I_2. Il est clair que, dans $(\Omega \times B_R\backslash\Omega) \times (0,T)$, on a

$$|(U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)| \le (|u_n(x,t)|^{p-1} + |u(x,t)|^{p-1})|\phi(x,t)|.$$

Puisque

$$\sup_{\{x\in \text{Supp}\phi,\; y\in B_R\backslash\Omega\}} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} \le C,$$

alors

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{(U_n(x,y,t) - U(x,y,t))\Phi(x,y,t)}{|x-y|^{N+ps}}\Big| &\le C(|u_n(x,t)|^{p-1} + |u(x,t)|^{p-1})|\phi(x,t)| \\
&\equiv Q_n(x,y,t).
\end{aligned}$$

Notons que $Q_n \to Q$ fortement dans $L^1((\Omega \times B_R\backslash\Omega)\times(0,T))$ avec

$$Q(x,y,t) = 2|u(x,t)|^{p-1}|\phi(x,t)|.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de convergence Dominée nous arrivons à ce que $I_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. De la même manière nous obtenons $I_3 \to 0$ quand $n \to \infty$. D'où le résultat suit

Comme conclusion et en passant à la limite dans (4.11) il en résulte que

$$\begin{aligned}-\iint_{\Omega_T} u\phi_t(x,t)\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{\Omega_T} U(x,y,t)\Phi(x,y,t)d\nu\,dt \\ = \iint_{\Omega_T} f(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous concluons. ■

Remarque 4.1.

1. Il est clair que les résultats des lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 découlent sans utiliser la positivité des données. D'où le résultat d'existence dans le théorème 4.1 découle pour toute donnée $(f,u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$ sans aucune condition de signe.
2. On a également le même résultat de l'existence si $(f,u_0) \in \mathfrak{M}^1(\Omega_T) \times \mathfrak{M}^1(\Omega)$, l'ensemble des mesures de Radon sur Ω_T et Ω respectivement.

4.3.1 Solutions non négatives obtenus comme limite d'approximation des solutions entropie

Puisque nous considérons des données non négatifs dans $L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$, alors, nous pouvons prouver que la solution précédente est une solution entropie dans le sens de la définition 4.4.

Théorème 4.2. Supposons que $(f,u_0) \in L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$ sont des fonctions non négatives, alors le problème (4.1) a une solution entropie non négative u dans le sens de la définition 4.4.

Démonstration. Nous devons juste montrer que la solution faible obtenue dans le théorème 4.1 satisfait aux conditions (4.3) et (4.4) indiqué dans la définition 4.4.

Commençons par prouver l'estimation (4.3). Puisque $u, u_n \geq 0$, alors l'ensemble R_h défini dans la (4.2) est réduite à

$$R_h = \Big\{(x,y,t) \in I\!R^{2N} \times (0,T) : h+1 \leq \max\{u(x,t),u(y,t)\} \text{ avec } \min\{u(x,t),u(y,t)\} \leq h\Big\}.$$

En utilisant $T_1(G_h(u_n))$ comme fonction test dans (3.9), il en résulte que

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega_T} u_{nt}T_1(G_h(u_n(x,t)))\,dx\,dt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)[T_1(G_h(u_n(x,t))) - T_1(G_h(u_n(y,t)))]d\nu\,dt \\ &= \iint_{\Omega_T} f_n(x,t)T_1(G_h(u_n(x,t)))\,dx\,dt \leq \iint_{\Omega_T\cap\{u_n\geq h\}} f_n(x,t)dx\,dt.\end{aligned}$$

Notons que

$$\iint_{\Omega_T} u_{nt} T_1(G_h(u_n(x,t)))\,dx\,dt = \int_\Omega \tilde{\Theta}_h(u_n)(x,T)dx - \int_\Omega \tilde{\Theta}_h(u_n)(x,0)dx$$

où $\tilde{\Theta}(\sigma) = \displaystyle\int_0^\sigma T_1(G_h(a))da$. Il est clair que $\tilde{\Theta}(\sigma) \leq \sigma$ pour tout$\sigma \geq 0$.

Prenant en considération le fait que $u_n \geq 0$, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)[T_1(G_h(u_n(x,t))) - T_1(G_h(u_n(y,t)))]d\nu\,dt \\
&\leq \int_\Omega \tilde{\Theta}_h(u_n)(x,0)dx + \iint_{\Omega_T\cap\{u_n\geq h\}} f_n(x,t)dx\,dt \\
&\leq \int_{u_0>h} u_0(x)dx + \iint_{\Omega_T\cap\{u_n\geq h\}} f_n(x,t)dx\,dt.
\end{aligned}$$

Il ne est pas difficile de montrer que

$$U_n(x,y,t)[T_1(G_h(u_n(x,t))) - T_1(G_h(u_n(y,t)))] \geq 0.$$

ainsi, en utilisant le lemme de Fatou, nous concluons que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)[T_1(G_h(u(x,t))) - T_1(G_h(u(y,t)))]d\nu\,dt \leq \\
&\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)[T_1(G_h(u_n(x,t))) - T_1(G_h(u_n(y,t)))]d\nu\,dt \\
&\qquad \leq \int_{u_0>h} u_0(x)dx + \iint_{\Omega_T\cap\{u_n\geq h\}} f_n(x,t)dx\,dt.
\end{aligned}$$

Puisque

$$U_n(x,y,t)[T_1(G_h(u(x,t))) - T_1(G_h(u(y,t)))] \geq |u(x,t)-u(y,t)|^{p-1} \text{ dans } R_h,$$

puis, en utilisant le fait que

$$\int_{u_0>h} u_0(x)dx + \iint_{\Omega_T\cap\{u_n\geq h\}} f_n(x,t)dx\,dt \to 0 \text{ quand } h\to\infty,$$

Nous concluons que

$$\iiint_{R_h} |u(x,t)-u(y,t)|^{p-1} d\nu\,dt \to 0 \text{ quand } h\to\infty$$

et puis on aura (4.3).

Soit maintenant $v \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ telle que $L^{p'}(0,T,W_0^{-s,p'}(\Omega))$. Prenons

$T_k(u_n - v)$ comme fonction test (4.6), on obtient que

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_T} u_{nt} T_k(u_n - v)\,dx\,dt \\
&+\frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)[T_k(u_n(x,t) - v(x,t)) - T_k(u_n(y,t) - v(y,t))]d\nu\,dt \\
&= \iint_{\Omega_T} f_n(x,t) T_k(u_n(x,t) - v(x,t))\,dx\,dt.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Étudions la limite, quand $n \to \infty$, de chaque terme de l'identité précédente.

Par le théorème de convergence Dominée on peut facilement montrer que, $n \to \infty$,

$$\iint_{\Omega_T} f_n(x,t) T_k(u_n(x,t) - v(x,t))\,dx\,dt \to \iint_{\Omega_T} f(x,t) T_k(u(x,t) - v(x,t))\,dx\,dt.$$

Puisque $u_{nt} = (u_n - v)_t + v_t$ on a

$$\begin{gathered}
\iint_{\Omega_T} u_{nt} T_k(u_n - v)\,dx\,dt = \\
\int_\Omega [\Theta_k(u_n - v)](T)\,dx - \int_\Omega [\Theta_k(u_n - v)](0) dx - \iint_{\Omega_T} v_t T_k(u_n - v)\,dx\,dt.
\end{gathered}$$

En utilisant le fait que $u_n \to u$ fortement dans $C([0,T], L^1(\Omega))$ et Puisque Θ_k est continue Lipschitzienne , on a, quand $n \to \infty$,

$$\int_\Omega [\Theta_k(u_n - v)](T)\,dx \to \int_\Omega [\Theta_k(u - v)](T)\,dx$$

et

$$\int_\Omega [\Theta_k(u_n - v)](0)\,dx \to \int_\Omega [\Theta_k(u_0 - v(0))]\,dx.$$

Nous analysons maintenant le terme $\iint_{\Omega_T} v_t T_k(u_n - v)\,dxdt$. Puisque $v \in L^\infty(\Omega_T)$, Posons $M = ||v||_\infty$, alors $T_k(u_n - v) = T_k(T_{M+k}(u_n) - v)$. ainsi $T_k(u_n - v) \rightharpoonup T_k(u - v)$ faiblement dans $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$. Comme $v_t \in L^{p'}(0,T,W_0^{-s,p'}(\Omega))$, alors l'argument de dualité nous permet de conclure que

$$\iint_{\Omega_T} v_t T_k(u_n - v)\,dx\,dt \to \iint_{\Omega_T} v_t T_k(u - v)\,dx\,dt.$$

Nous traitons maintenant le second terme dans (4.13). Nous suivons attentivement les mêmes arguments comme dans [1].

On pose

$$w_n = u_n - v \text{ et } W_n(x,y,t) = |w_n(x,t) - w_n(y,t)|^{p-2}(w_n(x,t) - w_n(y,t)),$$

alors

$$U_n(x,y,t)[T_k(u_n(x,t)-v(x,t))-T_k(u_n(y,t)-v(y,t))] =: K_{1,n}(x,y,t)+K_{2,n}(x,y,t),$$

où

$$K_{1,n}(x,y,t) = W_n(x,y,t)[T_k(w_n(x,t))-T_k(w_n(y,t))],$$

et

$$K_{2,n}(x,y,t) = \Big[U_n(x,y,t)-W_n(x,y,t)\Big][T_k(w_n(x,t))-T_k(w_n(y,t))].$$

Il est clair que $K_{1,n}(x,y,t)\geq 0$ p.p. dans $D_\Omega\times(0,T)$, puisque

$$K_{1,n}(x,y,t) \quad\to\quad W(x,y,t)[T_k(w(x,t))-T_k(w(y,t))] \text{ } p.p. \text{ in } D_{\Omega_T},$$

quand $n\to\infty$, où

$$w=u-v \text{ et } W(x,y,t)=|w(x,t)-w(y,t)|^{p-2}(w(x,t)-w(y,t)).$$

Ainsi, en utilisant le lemme de Fatou, on obtient que

$$\int_0^T\iint_{D_\Omega}K_{1,n}(x,y,t)d\nu\,dt\geq$$
$$\int_0^T\iint_{D_\Omega}W(x,y,t)[T_k(w(x,t))-T_k(w(y,t))]d\nu\,dt.$$

Nous traitons maintenant $K_{2,n}$.

On pose

$$\sigma_1(x,y,t)=u_n(x,t)-u_n(y,t) \text{ et } \sigma_2(x,y,t)=w_n(x,t)-w_n(y,t).$$

alors

$$K_{2,n}(x,y,t)=\Big[|\sigma_1(x,y,t)|^{p-2}\sigma_1(x,y,t)-|\sigma_2(x,y,t)|^{p-2}\sigma_2(x,y,t)\Big]$$
$$\times[T_k(w_n(x,t))-T_k(w_n(y,t))].$$

Nous affirmons que, quand $n\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\iint_{D_\Omega}K_{2,n}(x,y,t)d\nu\,dt\to\\&\int_0^T\iint_{D_\Omega}\Big[U(x,y,t)-W(x,y,t)\Big][T_k(w(x,t))-T_k(w(y,t))]d\nu\,dt\end{aligned}\tag{4.14}$$

Nous divisons la preuve de l'affirmation en deux cas en fonction de la valeur de p.

Le cas singulier $p \in (1,2]$ ***:*** Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}&\Big||\sigma_1(x,y,t)|^{p-2}\sigma_1(x,y,t) - |\sigma_2(x,y,t)|^{p-2}\sigma_2(x,y,t)\Big|\\ &\le C|\sigma_1(x,y,t) - \sigma_2(x,y,t)|^{p-1} = C|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1}.\end{aligned}$$

ainsi

$$|K_{2,n}(x,y,t)| \le C|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1}|T_k(w(x,t)) - T_k(w(y,t))| \equiv \tilde{K}_{2,n}(x,y,t).$$

En utilisant le lemme 4.1, nous obtenons que

$$|T_k(w_n(x,t)) - T_k(w_n(y,t))| \to |T_k(w(x,t)) - T_k(w(y,t))| \text{ fortement dans } L^{p'}(D_{\Omega_T}, d\nu).$$

Puisque $v \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$, par l'argument de dualité, nous concluons que

$$\tilde{K}_{2,n} \to C|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1}|T_k(w(x,t)) - T_k(w(y,t))| \text{ fortement dans } L^1(D_{\Omega_T}, d\nu).$$

En utilisant le théorème de convergence Dominée nous arrivons à

$$\begin{aligned}&\int_0^T \iint_{D_\Omega} K_{2,n}(x,y,t)d\nu\, dt \to\\ &\int_0^T \iint_{D_\Omega} \Big[U(x,y,t) - W(x,y,t)\Big][T_k(w(x,t)) - T_k(w(y,t))]d\nu\, dt,\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$ et l'affirmation suit dans ce cas.

Le cas dégénéré $p > 2$ ***:*** Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}&\Big||\sigma_1(x,y,t)|^{p-2}\sigma_1(x,y,t) - |\sigma_2(x,y,t)|^{p-2}\sigma_2(x,y,t)\Big|\\ &\le C_1|\sigma_1(x,y,t) - \sigma_2(x,y,t)|^{p-1} + C_2|\sigma_2(x,y,t)|^{p-2}|\sigma_1(x,y,t) - \sigma_2(x,y,t)|\\ &\le C_1|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1} + C_2|v(x) - v(y)||w_n(x,t) - w_n(y,t)|^{p-2}\\ &\le C_1|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1} + C_2|v(x,t) - v(y,t)||u_n(x,t) - u_n(y,t)|^{p-2}.\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}|K_{2,n}(x,y,t)| &\le C_1|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1}|T_k(w_n(x,t)) - T_k(w_n(y,t))|\\ &+ C_2|v(x,t) - v(y,t)||u_n(x,t) - u_n(y,t)|^{p-2}|T_k(w_n(x,t)) - T_k(w_n(y,t))|\\ &\equiv \bar{K}_{2,n}(x,y,t) + \check{K}_{2,n}(x,y,t).\end{aligned}$$

Le terme $\bar{K}_{2,n}(x,y,t)$ peut être traité comme $\tilde{K}_{2,n}$ ci-dessus. Par conséquent, il reste à traiter $\check{K}_{2,n}(x,y,t)$.

Nous définissons

$$D_1 = \{(x,y,t) \in D_{\Omega_T} : u_n(x,t) \leq \tilde{k}, u_n(y,t) \leq \tilde{k}\},$$

où $\tilde{k} >> k + ||v||_\infty$ aussi grande que nécessaire. En utilisant l'argument de dualité, nous obtenons

$$\check{K}_{2,n}(x,y,t)\chi_{D_1} \to$$
$$C_2|v(x,t) - v(y,t)||u(x,t) - u(y,t)|^{p-2}|T_k(w(x,t)) - T_k(w(y,t))|\chi_{\{u(x,t)\leq\tilde{k},u(y,t)\leq\tilde{k}\}}$$

fortement dans $L^1(D_{\Omega_T}, d\nu)$.

Maintenant, considérons l'ensemble

$$D_2 = \{(x,y,t) \in D_{\Omega_T} : u_n(x,t) \geq k_1, u_n(y,t) \geq k_1\},$$

où $k_1 > k + ||v||_\infty$, alors $\check{K}_{2,n}(x,y,t)\chi_{D_2}(x,y,t) = 0$.

Il est clair que, en tenant compte des calculs précédents, nous avons juste d'analyser la convergence sur l'ensemble.

$$D_3 = \{(x,y,t) \in D_{\Omega_T} : u_n(x,t) \geq 2k, u_n(y,t) \leq k\},$$

ou

$$D_4 = \{(x,y,t) \in D_{\Omega_T} : u_n(y,t) \geq 2k, u_n(x,t) \leq k\}.$$

Si $(x,y,t) \in D_3$, alors

$$\check{K}_{2,n}(x,y,t)\chi_{D_3}(x,y,t)$$
$$\leq C(k)|v(x,t) - v(y,t)||T_k(w_n(x,t)) - T_k(w_n(y,t))|u_n^{p-2}(x,t)\chi_{D_3}(x,y,t).$$

Notons que

$$u_n^{p-2}(x,t)\chi_{D_3}(x,y,t) \rightharpoonup u^{p-2}(x,t)\chi_{\{u(x,t)\geq 2k,u(y,t)\leq k\}} \text{ faiblement dans } L^{\frac{p-1}{p-2}}(D_{\Omega_T}, d\nu).$$

Puisque

$$\Big[|v(x,t) - v(y,t)||T_k(w_n(x,t)) - T_k(w_n(y,t))|\Big]^{p-1}\chi_{\{u(x,t)\geq 2k,u(y,t)\leq k\}} \leq$$
$$k^{p-2}|v(x,t) - v(y,t)|^{p-1}|T_k(w_n(x,t)) - T_k(w_n(y,t))\chi_{\{u(x,t)\geq 2k,u(y,t)\leq k\}}$$

L'argument de dualité nous permet de conclure que

$$\Big[|v(x,t)-v(y,t)||T_k(w_n(x,t))-T_k(w_n(y,t))|\Big]^{p-1}\chi_{\{u(x,t)\geq 2k,u(y,t)\leq k\}}\to$$
$$\Big[|v(x,t)-v(y,t)||T_k(w(x,t))-T_k(w(y,t))|\Big]^{p-1}\chi_{\{u(x,t)\geq 2k,u(y,t)\leq k\}}$$

fortement dans $L^1(D_\Omega, d\nu)$ quand $n\to\infty$.

ainsi

$$\check{K}_{2,n}\chi_{D_3}\to$$
$$C_2|v(x,t)-v(y,t)||u(x,t)-u(y,t)|^{p-2}|T_k(w(x,t))-T_k(w(y,t))\chi_{\{u(x,t)\geq 2k,u(y,t)\leq k\}}$$

fortement dans $L^1(D_{\Omega_T}, d\nu)$.

De la même manière, nous pouvons traiter l'ensemble D_4.

Par conséquent, en combinant les estimations ci-dessus et en utilisant le théorème de convergence Dominée, nous concluons que

$$\int_0^T\iint_{D_\Omega}K_{2,n}(x,y,t)d\nu\,dt\to$$
$$\int_0^T\iint_{D_\Omega}\Big[U(x,y,t)-W(x,y,t)[T_k(w(x,t))-T_k(w(y,t))]d\nu\,dt$$

quand $n\to\infty$ et l'affirmation suit dans ce cas.

Par conséquent, Comme conclusion, nous avons prouvé que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[\Theta_k(u-v)](T)\,dx-\int_\Omega[\Theta_k(u-v)](0)dx-\iint_{\Omega_T}v_tT_k(u-v)\,dx\,dt\\&+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{D_\Omega}U(x,y,t)[T_k(u(x,t)-v(x,t))-T_k(u(y,t)-v(y,t))]d\nu\,dt\\&\leq\iint_{\Omega_T}f(x,t)T_k(u(x,t)-v(x,t))\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Par conséquent, le résultat suit. □

Chapitre 5

Problème parabolique d'ordre fractionnaire avec potentiel de Hardy

Ce chapitre est le développement de l'article [3].

5.1 Introduction.

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème parabolique suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t + (-\Delta_p^s)u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}}, u > 0 & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u & = & 0 & \text{dans } (I\!\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.1}$$

où Ω est domaine borné et $\lambda > 0$.

Pour $p = 2$ et $s = 1$ le problème (5.1) a été étudié dans [20]. Les auteurs ont démontré l'existence et des résultats de non-existence en relation avec le fait que $\lambda \leq \Lambda_{N,2}$ ou $\lambda > \Lambda_{N,2}$, respectivement. Le cas non local a été résolu dans [58], les auteurs ont pu obtenir la même alternative en utilisant le fait que l'opérateur parabolique non local satisfait une inégalité de Harnack appropriée. Sous la présence d'un terme de réaction, les auteurs dans [8] ont prouvé l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda, s)$ ne dépende que de λ telle que l'existence a lieu si et seulement si $q < q_+(\lambda)$.

Pour $p \neq 2$ et $s = 1$, le problème a été largement étudié dans la littérature. Dans [15], les auteurs prouvent l'existence d'une solution globale, si $p < \frac{2N}{N+2}$ pour tout $\lambda > 0$ et pour u_0 appropriée. Dans [40], les auteurs complètent l'étude précédente et en montrant que si $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$, le problème a une solution au sens des distributions loin de l'origine.

Notre objectif est de généraliser les résultats précédents à notre opérateur non local.

Le Chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 5.2 nous donnons des résultats auxiliaires liés aux espaces paraboliques fractionnaires de Sobolev. Nous présentons également une inégalité algébrique qui sera utilisée pour contrôler le terme de "l'intégration par parties" pour l'opérateur non local.

Dans la section 5.3 nous allons considérer le cas $\lambda \leq \Lambda_{N,p,s}$, dans ce cas, nous démontrons l'existence d'une solution globale dans un espace d'énergie approprié.

Le cas $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$ et $p < 2$ est étudié dans la section 5.4, puis en fonction de la valeur de p, nous démontrons l'existence d'une solution qui est dans un espace de Sobolev fractionnaire approprié. Dans le cas où $\frac{2N}{N+s} \leq p < 2$, et qui est le cas le plus délicat, nous sommes en mesure de prouver l'existence d'une solution loin de l'origine, modulo un poids convenable, dans un espace de Sobolev fractionnaire avec poids.

Dans la dernière section, nous analysons la question de l'extinction en temps fini. Selon la condition sur u_0, nous montrons les propriétés d'extinction en temps finis. La même propriété est prouvée si nous ajoutons un potentiel "concave" en u comme terme de réaction dans (5.1).

5.2 Cadre fonctionnel et conception des solutions

Nous allons commencer par citer un résultat intéressant, que l'on utilisera à plusieurs reprises dans le présent chapitre. On se réfère à [44] et [14] pour plus de détails.

Commençons par définir les espaces paraboliques correspondants.

Soit $\Omega \subsetneqq I\!R^N$, l'espace $L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))$ est défini comme l'ensemble des fonctions ϕ telles que $\phi \in L^p(\Omega_T)$ avec $||\phi||_{L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))} < \infty$ où

$$||\phi||_{L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))} = \Big(\int_0^T \iint_{D_\Omega} |\phi(x,t) - \phi(y,t)|^p d\nu\, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

et $D_\Omega = I\!R^N \times I\!R^N \setminus \mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega$.

Il est clair que $L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))$ est un espace de Banach.

Dans le cas où la donnée $(f,u_0) \in L^2(\Omega_T)\times L^2(\Omega)$, alors nous pouvons chercher une solution d'énergie, plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 5.1. Supposons $(f,u_0) \in L^2(\Omega_T)\times L^2(\Omega)$, alors on dit que u est une solution d'énergie au problème (5.1) si $u \in L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T],L^p(\Omega))$, $u_t \in L^{p'}(0,T;W_0^{-s,p'}(\Omega))$, où $W_0^{-s,p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$ et pour toute $v \in L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))$ on a

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle u_t, v\rangle dt + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)(v(x,t)-v(y,t))d\nu\ dt \\ &= \lambda \iint_{\Omega_T} \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{ps}} v dx\, dt\end{aligned}$$

et $u(x,.) \to u_0$ fortement dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$ où

$$U(x,y,t) \equiv |u(x,t) - u(y,t)|^{p-2}(u(x,t) - u(y,t)).$$

Il est à noter que l'existence d'une solution d'énergie découle en utilisant le même argument classique pour l'opérateur monotone comme dans [61].

5.3 Résultats Existence : $\lambda \leq \Lambda_{N,p,s}$

Rappelons que nous considérons une solution non négative du problème

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta_p^s)u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u &\geq 0 & \text{dans } I\!R^N \times (0,T), \\ u &= 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $\lambda \leq \Lambda_{N,p,s}$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ avec $u_0 \gneqq 0$. Posons $u_{0n} = T_n(u_0)$, commençons par $u_0 \equiv 0$, pour $n \geq 1$, nous considérons u_n comme l'unique solution non négative pour le problème approximé suivant

$$\begin{cases} u_{nt} + (-\Delta_p^s)u_n &= \lambda \dfrac{u_{n-1}^{p-1}}{|x|^{ps} + \frac{1}{n}} & \text{dans } \Omega_T, \\ u_n &= 0 & \text{dans } I\!R^N \backslash \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,0) &= u_{0n}(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

L'existence de u_n est assurée en utilisant des arguments classiques pour l'opérateur monotone comme dans [61]. Il est clair que $u_n \gneqq 0$ et $\{u_n\}_n$ est monotone en n. Comme conséquence, nous obtenons le premier résultat d'existence.

Théorème 5.1. Supposons que $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors le problème (5.2) a une solution globale u telle que $u \in L^p(0,T; W_0^{s,p}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T], L^p(\Omega))$, $u_t \in L^{p'}(0,T; W_0^{-s,p'}(\Omega))$ et $u(x,.) \to u_0$ fortement dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$.

Preuve

En utilisant u_n comme fonction test dans (5.3), nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2 dx + \frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} \frac{|u_n(x,t) - u_n(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dy\ dx \leq \lambda \int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^{ps}} dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,T)dx + \Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p,s}}\Big)\int_0^T \iint_{D_\Omega} \frac{|u_n(x,t) - u_n(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dy\ dx\ dt \leq \frac{1}{2}||u_0||_2^2.$$

Par conséquent, nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n \uparrow u$ p.p dans Ω_T, $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$ et $\dfrac{|u_n|^p}{|x|^{ps}} \to \dfrac{|u|^p}{|x|^{ps}}$ fortement dans $L^1(\Omega_T)$. Maintenant le reste de la preuve est obtenue en utilisant des arguments de compacité classiques. □

Dans le cas où $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$ nous pouvons utiliser l'inégalité de Hardy-Sobolev améliorée donnée par (2.14) et (2.37), dans ce cas, nous pouvons prouver le théorème suivant.

Théorème 5.2. Supposons que $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors le problème (5.2) a une solution globale u telle que

$$\frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dx\ dydt - \Lambda_{N,p,s}\int_0^T \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{ps}}dxdt \le \frac{1}{2}||u_0||_2^2.$$

De plus, $u \in L^q(0,T;W_0^{s,q}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$ pour tout $q < p$.

5.4 Resultats d'existence : $p < 2$ et $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$

Considérons maintenant le cas le plus intéressant $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$ et $p < 2$, puis suivant la valeur de p, nous allons prouver que le problème (5.2) a une solution.

5.4.1 Le cas $1 < p < \frac{2N}{N+2s}$ et $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 5.3. Supposons que $1 < p < \frac{2N}{N+2s}$ et $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$, alors le problème (5.2) a une solution globale.

Démonstration. Posons $W_n(x) = \dfrac{1}{|x|^{ps}+\frac{1}{n}}$, puis en utilisant un des arguments d'itération appropriés nous pouvons prouver que le problème

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta_p^s)u &= \lambda W_n(x)u^{p-1} & \text{dans } \Omega_T, \\ u(x,t) &= 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_{0n}(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

a une solution non négative minimale bornée u_n. En utilisant u_n comme fonction test dans

(5.4) et par les inégalités de Hölder et Young, il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_n^2(x,T)\,dx + \int_0^T \iint_{D_\Omega} \frac{|u_n(x,t)-u_n(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dxdy\,dt \\
&= \int_\Omega u_{0n}^2(x)\,dx + \lambda \int_0^T \int_\Omega W_n(x) u_n^p(x,t)\,dxdt \\
&\le \int_\Omega u_0^2(x)\,dx + \lambda \int_0^T \Big(\int_\Omega |W_n(x)|^{2/(2-p)}\,dx \Big)^{(2-p)/2} \times \Big(\int_\Omega u_n^2(x,t)\,dx \Big)^{p/2} dt \\
&\le \int_\Omega u_0^2(x)\,dx + \lambda \Big(\frac{2-p}{2} \int_0^T \int_\Omega |W_n(x)|^{2/(2-p)}\,dxdt + \frac{p}{2} \int_0^T \int_\Omega u_n^2(x,t)\,dxdt \Big).
\end{aligned}$$

Notons

$$y_n(T) \equiv \int_\Omega |u_n(x,T)|^2\,dx$$

et

$$\begin{aligned}
\beta_n(t) &= \int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx + \lambda \frac{2-p}{2} \int_0^T \int_\Omega |W_n(x)|^{2/(2-p)}\,dxdt \\
&\le C\Big(\int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx + \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{1}{|x|^{\frac{2ps}{2-p}}} \Big)^{2/(2-p)} dx \Big).
\end{aligned}$$

Puisque $1 < p < 2N/(N+2s)$, alors $\beta_n(t) \le C(T+1)$. Ainsi

$$y_n(T) \le \beta_n(t) + \lambda \frac{p}{2} \int_0^T y_n(s)ds,$$

et comme conséquence de l'inégalité de Gronwall, on aura

$$\int_\Omega |u_n(x,t)|^2\,dx \le \beta_n(T) + \int_0^T \beta_n(s) e^{\alpha s} ds, \tag{5.5}$$

où $\alpha = \alpha(\lambda, p) > 0$. Ainsi

$$\int_\Omega u_n^2(x,T)\,dx + \int_0^T \iint_{D_\Omega} \frac{|u_n(x,t)-u_n(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dxdy\,dt \le C(T)$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega W_n(x) u_n^p(x,t)\,dxdt \le C(T).$$

Par conséquent, nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n \uparrow u$ p.p dans Ω_T, $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(0,T; W_0^{s,p}(\Omega))$ et $u_t \in L^{p'}(0,T; W_0^{-s,p'}(\Omega))$. Il n'est pas difficile de montrer que u est définie globalement en temps et que u résout le problème (5.2). $\square$

5.4.2 Le cas $\lambda > \lambda_{N,p,s}$ et $2 > p \ge 2N/(N+2s)$

Nous commençons par étudier l'existence d'une solution auto-similaire non négative pour le problème de Cauchy dans l'ensemble $I\!R^N$.

On pose $V(x,t) = t^{\alpha}F(x)$, alors

$$V_t = \alpha t^{\alpha-1}F(r) \text{ et } (-\Delta_p^s)V(x,t) = t^{\alpha(p-1)}\int_{I\!R^N}\frac{|F(x)-F(y)|^{p-2}(F(x)-F(y))}{|x-y|^{N+ps}}dy. \tag{5.6}$$

Posons $\alpha = \frac{1}{p-2}$, on aura

$$\alpha F(x) + \int_{I\!R^N}\frac{|F(x)-F(y)|^{p-2}(F(x)-F(y))}{|x-y|^{N+ps}}dy = \lambda\frac{|F(x)|^{p-2}F(x)}{|x|^{ps}}. \tag{5.7}$$

Cherchons F sous la forme $F(x) = F(|x|) = A|x|^{\gamma}$, alors (5.7) implique que

$$\alpha A r^{\gamma} + A^{p-1}r^{\gamma(p-1)-ps}\int_0^{\infty}|1-\sigma^{\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{\gamma})\sigma^{N-1}K(\sigma)d\sigma = \lambda A^{p-1}r^{\gamma(p-1)-ps} \tag{5.8}$$

où

$$K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+ps}}.$$

Supposons que $\gamma = \frac{-ps}{2-p}$, alors $\gamma = \gamma(p-1) - ps$.
par conséquent, de (5.8) on obtient que

$$A^{p-2} = \frac{\alpha}{\Psi(\gamma)+\lambda} \equiv B,$$

où

$$\Psi(\gamma) = \int_0^{\infty}|\sigma^{\gamma}-1|^{p-2}(\sigma^{\gamma}-1)K(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma.$$

Soit $\bar\gamma = -\gamma$, alors $\bar\gamma > 0$ et

$$\Psi(\gamma) = \int_0^{\infty}|1-\sigma^{\bar\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{\bar\gamma})K(\sigma)\sigma^{-\bar\gamma(p-1)+N-1}d\sigma \equiv \Psi_1(\bar\gamma).$$

Donc,

$$B = \frac{1}{(2-p)(\Psi_1(\bar\gamma)+\lambda)}$$

et alors

$$V(x,t) = B^{\frac{1}{p-2}}\Big(\frac{t}{|x|^{ps}}\Big)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\Psi_1(\bar\gamma) &= \textstyle\int_0^{\infty}|1-\sigma^{\bar\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{\bar\gamma})K(\sigma)\sigma^{-\bar\gamma(p-1)+N-1}d\sigma = \displaystyle\int_0^1 + \int_1^{\infty} \\ &= I_1 + I_2,\end{aligned} \tag{5.9}$$

puis en prenant en considération le fait que $K(\frac{1}{\xi}) = \xi^{N+ps}K(\xi)$ pour $\xi > 0$ et en utilisant le changement de variable $\xi = \frac{1}{\sigma}$ dans I_2, on aura

$$\Psi_1(\bar{\gamma}) = \int_1^\infty K(\sigma)(\sigma^{\bar{\gamma}} - 1)^{p-1} \left(\sigma^{ps-1} - \sigma^{N-1-\bar{\gamma}(p-1)}\right) d\sigma. \tag{5.10}$$

Commençons par prouver le Lemme suivant.

Lemme 5.1. On suppose que $1 < p < 2$ et $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$ alors $B > 0$

Pour prouver le lemme 5.1 nous avons besoin du résultat suivant obtenu dans [4].

Proposition 5.1. Soit

$$\Theta(\rho) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^{\gamma} - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\rho(p-1)} - \sigma^{ps-1}\right) d\sigma,$$

où $\rho \geq 0$ et $ps + \rho(p-1) < N$, alors on a

1. $\Theta(0) = 0$ et $\Theta(\frac{N-ps}{p}) = \Lambda_{N,p,s} = \max_{\rho\geq 0} \Theta(\rho)$.
2. Pour tout $0 < \lambda < \Lambda_{N,p,s}$, il existe ρ_1, ρ_2 tel que $0 < \rho_1 < \frac{N-ps}{p} < \rho_2$ et $\Theta(\rho_1) = \Theta(\rho_2) = \lambda$.

Preuve de Lemme 5.1.

Nous devons juste montrer que $(\Psi_1(\bar{\gamma}) + \lambda) > 0$. Nous allons diviser la preuve en deux cas, selon la valeur de p.

Le premier cas : $\frac{2N}{N+s} \leq p < 2$.

Dans ce cas, on a $ps \geq N - \bar{\gamma}(p-1)$, ainsi en utilisant (5.10) on obtient que $\Psi_1(\bar{\gamma}) \geq 0$. Par conséquent $B > 0$ et le résultat suit dans ce cas.

Le deuxième cas : $p < \frac{2N}{N+s}$.

Ce cas est plus délicat. Nous avons

$$\Psi_1(\bar{\gamma}) = -\int_1^\infty K(\sigma)(\sigma^{\bar{\gamma}} - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\bar{\gamma}(p-1)} - \sigma^{ps-1}\right) d\sigma < 0. \tag{5.11}$$

Maintenant, par (5.11) on obtient que $\Psi_1(\bar{\gamma}) = -\Theta(\bar{\gamma}) \geq -\Lambda_{N,p,s}$. Comme $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$ par la proposition 5.1, nous atteignons que $\lambda + \Psi_1(\bar{\gamma}) > \lambda - \Lambda_{N,p,s} > 0$. Ainsi, nous concluons. $\square$

Remarque 5.1. Il est facile de voir que la solution auto-similaire obtenue ci-dessus est une sur-solution au sens des distributions, pour le problème (5.2) si et seulement si $p < \frac{2N}{N+s}$. Dans le cas où $p \geq \frac{2N}{N+s}$, $V \notin L^1(B_\delta(0) \times (0,T))$ pour tout $\delta > 0$. Cependant, nous pouvons montrer que, dans ce cas, nous avons une solution loin de l'origine et que la solution est dans un espace de Sobolev avec poids.

Définissons maintenant l'espace de Sobolev parabolique avec poids.

$$\Upsilon_\alpha = \left\{ u : |x|^\alpha u \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)), |x|^{\alpha(p-1)} u_t \in L^{p'}(0,T,W_0^{-s,p'}(\Omega)) \right\}.$$

Nous renvoyons le lecteur à la section 2.4 du Chapitre 2 pour certaines propriétés de l'espace "elliptique" associés à Υ_α.

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 5.4. Supposons que $\lambda > \Lambda_{N,p,s}$ et $\frac{2N}{N+s} \le p < 2$, et que $u_0 \in L^2(|x|^\alpha dx, \Omega)$ pour certains $\alpha > \frac{2s}{p-2} - \frac{N}{p}$. Alors il existe une fonction $u \in \Upsilon_\alpha$ qui est une solution de (5.2) loin de l'origine. En outre, pour tous $v \in \Upsilon_\alpha$, nous avons

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \langle v_t, |x|^{p\alpha} u \rangle dt + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)(|x|^{p\alpha} v(x,t) - |y|^{p\alpha} v(y,t)) d\nu \, dt \\ &= \lambda \iint_{\Omega_T} \frac{u^{p-1}|x|^{p\alpha} v}{|x|^{ps}} dx\, dt. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Preuve

Rappelons que u_n est la solution unique du problème approximé (5.3) on pose $w(x) = |x|^{p\alpha}$ où $\alpha > \frac{2s}{p-2} - \frac{N}{p}$ et on définit

$$U_n(x,y,t) = |u_n(x,t) - u_n(y,t)|^{p-2}(u_n(x,t) - u_n(y,t)).$$

En utilisant wu_n comme fonction test dans (5.3), il en résulte que

$$\int_\Omega u_{nt} w u_n dx + \int_\Omega (-\Delta_p^s) u_n w u_n dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_{n-1}^{p-1} u_n}{|x|^{ps} + \frac{1}{n}} w dx.$$

En intégrant dans le temps et en utilisant le fait que la suite $\{u_n\}_n$ est croissante en n, il en résulte que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,T) w(x) dx + \int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)(u_n(x,t)w(x) - u_n(y,t)w(y)) d\nu \, dt \\ &\qquad \le \lambda \iint_{\Omega_T} \frac{(u_n(x,t) w^{\frac{1}{p}}(x))^p}{|x|^{ps}} dx\, dt + \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x) w(x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.22), on obtient

$$\begin{gathered} U_n(x,y,t)(u_n(x,t)w(x) - u_n(y,t)w(y)) \ge \\ C_1 |u_n(x,t) w(x)^{\frac{1}{p}} - u_n(y,t) w(y)^{\frac{1}{p}}|^p - C_2 (u_n^p(x,t) + u_n^p(y,t)) |w(x)^{\frac{1}{p}} - w(y)^{\frac{1}{p}}|^p. \end{gathered}$$

Par conséquent, nous concluons que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,T)w(x)\,dx + C_1\int_0^T\iint_{D_\Omega} |u_n(x,t)w(x)^{\frac{1}{p}} - u_n(y,t)w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu\ dt\\
&\quad\le C_2\int_0^T\iint_{D_\Omega}(u_n^p(x,t)+u_n^p(y,t))|w(x)^{\frac{1}{p}} - w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu\ dt\\
&\quad\quad +\lambda\iint_{\Omega_T}\frac{(u_n w^{\frac{1}{p}})^p}{|x|^{ps}}\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x)w(x)dx.
\end{aligned}$$

Analysons le terme $\displaystyle\int_0^T\iint_{D_\Omega}(u_n^p(x,t)+u_n^p(y,t))|w(x)^{\frac{1}{p}} - w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu dt$. En utilisant des arguments de symétrie nous obtenons

$$\int_0^T\iint_{D_\Omega}(u_n^p(x,t)+u_n^p(y,t))|w(x)^{\frac{1}{p}} - w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu dt = 2\int_0^T\iint_{D_\Omega}u_n^p(x,t)|w(x)^{\frac{1}{p}} - w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu dt = 2J.$$

Nous affirmons que

$$J \le C\iint_{\Omega_T}\frac{u_n^p w}{|x|^{ps}}dxdt.$$

Puisque Ω est un domaine borné, puis $\Omega \subset\subset B_R(0)$, par conséquent

$$J \le \int_0^T\int_{B_R(0)}u_n^p(x,t)\int\limits_{I\!R^N}||x|^\alpha - |y|^\alpha|^p d\nu dt.$$

On pose $r=|x|$ et $\rho=|y|$, alors $x = rx', y=\rho y'$. où $|x'|=|y'|=1$. Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned}
J &\le \int_0^T\int_{B_R(0)}u_n^p(x,t)|x|^{-ps}\int_0^\infty |r^\alpha - (r\sigma)^\alpha|^p\sigma^{N-1}\left(\int\limits_{|y'|=1}\frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+ps}}\right)d\sigma\,dx\,dt\\
&\le \int_0^T\int_{B_R(0)}u_n^p(x,t)|x|^{p\alpha-ps}\int_0^\infty |1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{N-1}K(\sigma)d\sigma\,dx\,dt
\end{aligned}$$

Posons $C=\int_0^\infty|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{N-1}K(\sigma)d\sigma$ et en prenant en considération le fait que $u_n=0$ dans $(I\!R^N\setminus\Omega)\times(0,T)$ on obtient que

$$J \le C\iint_{\Omega_T}\frac{u_n^p w}{|x|^{ps}}\,dx\,dt$$

et le résultat suit.

Maintenant, puisque $p<2$, puis en utilisant l'inégalité de Young,

$$\iint_{\Omega_T}\frac{u_n^p w}{|x|^{ps}}\,dx\,dt \le C_3\iint_{\Omega_T}u_n^2 w(x)\,dx\,dt + C_4\iint_{\Omega_T}|x|^{p\alpha-\frac{2ps}{p-2}}\,dx\,dt.$$

Puisque $\alpha > \frac{2s}{p-2} - \frac{N}{p}$, il en résulte que $\displaystyle\iint_{\Omega_T} |x|^{p\alpha - \frac{2ps}{p-2}}\,dx\,dt \le C_5 T$. Ainsi

$$\iint_{\Omega_T} \frac{u_n^p w}{|x|^{ps}}\,dx\,dt \le C_3 \iint_{\Omega_T} u_n^2(x,t)w(x)\,dx\,dt + CT.$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous arrivons à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,T)w(x)dx + C_1 \int_0^T \iint_{D_\Omega} |u_n(x,t)w(x)^{\frac{1}{p}} - u_n(y,t)w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu\ dt \\ \le C_2 \iint_{\Omega_T} u_n^2(x,t)w(x)\,dx\,dt + C_3 T + C_4.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme Gronwall nous obtenons que $\int_\Omega u_n^2(x,T)w(x)dx \le C(T)$ et puis

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} |u_n(x,t)w(x)^{\frac{1}{p}} - u_n(y,t)w(y)^{\frac{1}{p}}|^p d\nu\ dt \le C(T).$$

on pose $\tilde{u}_n = w(x)u_n$, alors $\{\tilde{u}_n\}_n$ est croissante en n et bornée dans l'espace $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$. Par conséquent, nous obtenons l'existence d'une fonction mesurable u telle que $u_n \uparrow u$ p.p. dans Ω, $u = 0$ dans $(I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T)$ et $\tilde{u}_n \rightharpoonup wu$ faiblement dans $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$. Soit $U(x,y,t) = |u(x,t)-u(y,t)|^{p-2}(u(x,t)-u(y,t))$, alors $U_n \to U$ p.p. dans $D_\Omega \times (0,T)$. Montrons que u satisfait (5.12). Soit $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_T)$, en utilisant wv comme fonction test dans le problème d'approximation (5.3) et en intégrant dans le temps, il en résulte que

$$\begin{aligned}&-\int_0^T \int_\Omega v_t u_n(x,t)w(x)\,dx\,dt + \int_\Omega v(x,T)u_n(x,T)w(x)dx \\ &+ \int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)(v(x,t)w(x) - v(y,t)w(y))d\nu\ dt \\ &= \lambda \iint_{\Omega_T} \frac{u_{n-1}^{p-1} wv}{|x|^{ps} + \frac{1}{n}}\,dx\,dt + \int_\Omega u_{n0}^2(x)v(x,0)w(x)dx.\end{aligned}$$

En prenant en considération les estimations précédentes, on obtient facilement que : quand $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}-\iint_{\Omega_T} v_t u_n(x,t)w(x)\,dx\,dt + \int_\Omega v(x,T)u_n(x,T)w(x)dx \to \\ -\iint_{\Omega_T} v_t u(x,t)w(x)\,dx\,dt + \int_\Omega v(x,T)u(x,T)w(x)dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_T} \frac{u_{n-1}^{p-1} wv}{|x|^{ps} + \frac{1}{n}}\,dx\,dt + \int_\Omega u_{n0}^2(x)v(x,0)w(x)dx \to \\ \iint_{\Omega_T} \frac{u^{p-1} wv}{|x|^{ps}}\,dx\,dt + \int_\Omega u_0^2(x)v(x,0)w(x)dx.\end{aligned}$$

Montrons que

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)(v(x,t)w(x) - v(y,t)w(y))d\nu\, dt \to$$
$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)(v(x,t)w(x) - v(y,t)w(y))d\nu\, dt.$$

Posons

$$\tilde{u}_n = |x|^\alpha u_n,\ \ \tilde{u} = |x|^\alpha u,\ \ \tilde{v} = |x|^\alpha v$$

, et

$$\tilde{U}_n(x,y,t) = |\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)|^{p-2}(\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)),$$

$$\tilde{U}(x,y,t) = |\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)|^{p-2}(\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t))$$

et

$$\tilde{V}(x,y,t) = |\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t)|^{p-2}(\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t)).$$

En utilisant les estimations précédentes sur $\{u_n\}_n$, on a $\tilde{u}, \tilde{v} \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$, $\{\tilde{u}_n\}_n$ est bornée dans $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$ et $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ faiblement dans $L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$.

on a

$$U_n(x,y,t)(v(x,t)w(x) - v(y,t)w(y)) = J_n(x,y,t) + L_n(x,y,t),$$

où

$$J_n(x,y,t) = \tilde{U}_n(x,y,t)(\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t))$$

et

$$L_n(x,y,t) =$$
$$\left|(\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\right|^{p-2}\Big((\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\Big)$$
$$\times\Big((\tilde{v}_n(x,t) - \tilde{v}_n(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}_n(y,t)\Big) - J_n(x,y,t).$$

En utilisant un argument de dualité nous obtenons que

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} J_n(x,y,t)d\nu\, dt \to \int_0^T \iint_{D_\Omega} J(x,y,t)d\nu\, dt \text{ quand } n \to \infty.$$

On traite maintenant L_n. Il est clair que $L_n \to L$ p.p in $D_\Omega \times (0,T)$ où

$$L(x,y,t) =$$
$$\left|(\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}(y,t)\right|^{p-2}\Big((\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}(y,t)\Big)$$
$$\times\Big((\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\Big) - J(x,y,t).$$

On a

$$|L_n(x,y,t)| \leq L_{n1}(x,y,t) + L_{n2}(x,y,t),$$

où

$$L_{n1}(x,y,t) =$$
$$\Bigg\|\Big|(\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\Big|^{p-2}\Big((\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\Big)$$
$$-\Big|\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)\Big|^{p-2}\Big(\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)\Big)\Bigg\|$$
$$\times\Big|(\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t))\Big|,$$

et

$$\begin{aligned} L_{n2}(x,y,t) &= \Big|(\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)) + (1 - (\frac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\Big|^{p-1} \\ &\times \Big|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\Big|, \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} L_{n2}(x,y,t) &\leq \Big|\tilde{u}_n(x,t) - \tilde{u}_n(y,t)\Big|^{p-1} \times \Big|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\Big| \\ &+ \Big|1 - (\frac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\Big|^{p-1} \times \Big|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\Big| \\ &\leq L_{n21}(x,y,t) + L_{n22}(x,y,t). \end{aligned}$$

Nous affirmons que $\Big|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\Big| \in L^p(D_\Omega \times (0,T), d\nu\ dt)$. Il est clair que

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} \Big|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\Big|^p d\nu\ dt \leq$$
$$\int_0^T \int_\Omega \frac{|\tilde{v}(y,t)|^p}{|y|^{p\alpha(p-1)+ps}} \int_{I\!R^N} \frac{\Big||y|^{\alpha(p-1)} - |x|^{\alpha(p-1)}\Big|^p}{|x-y|^{N+ps}} dx\, dy\, dt.$$

On pose $r = |x|, \rho = |y|$, alors $x = rx', y = \rho y'$ où $|x'| = |y'| = 1$. Pour $\sigma = \dfrac{r}{\rho}$, on obtient que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \iint_{D_\Omega} \left|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\right|^p d\nu\ dt \\ \leq &\int_0^T \int_\Omega \frac{|\tilde{v}(y,t)|^p}{|y|^{p\alpha(p-1)+ps}} \int_0^\infty \left||y|^{\alpha(p-1)} - (\sigma|y|)^{\alpha(p-1)}\right|^p \sigma^{N-1} K(\sigma) d\sigma\, dy\, dt \\ \leq &\int_0^T \int_\Omega \frac{|\tilde{v}(y,t)|^p}{|y|^{ps}} \int_0^\infty \left|1 - \sigma^{\alpha(p-1)}\right|^p \sigma^{N-1} K(\sigma)\, d\sigma\, dy\, dt \\ \leq &\; C \int_0^T \int_\Omega \frac{|\tilde{v}(y,t)|^p}{|y|^{ps}}\, dy\, dt, \end{aligned}$$

où

$$C = \int_0^\infty \left|1 - \sigma^{\alpha(p-1)}\right|^p \sigma^{N-1} K(\sigma) d\sigma < \infty.$$

Puisque $\tilde{v} \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$, alors nous concluons que $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega \frac{|\tilde{v}(y,t)|^p}{|y|^{ps}}\, dy\, dt < \infty$ et le résultat suit.

Par conséquent L_{n21} converge fortement dans $L^1(D_\Omega \times (0,T), d\nu\ dt)$. De la même façon, nous pouvons prouver que L_{n22} converge fortement dans $L^1(D_\Omega \times (0,T), d\nu\ dt)$. Ainsi en utilisant le théorème de convergence Dominée nous obtenons que L_{n2} converge vers L_2 fortement dans $L^1(D_\Omega \times (0,T), d\nu\ dt)$ où

$$\begin{aligned} L_2(x,y,t) &= \left|(\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)) + (1 - (\frac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}(y,t)\right|^{p-1} \\ &\times \left|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^{\alpha(p-1)})\tilde{v}(y,t)\right|. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $p < 2$, alors

$$L_{n1}(x,y,t) \leq C\left|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\right|^{p-1} \times \left|(\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t))\right|,$$

Puisque $\tilde{v} \in L^p(0,T,W_0^{s,p}(\Omega))$, puis en utilisant les mêmes calculs que dans le résultat précédent, nous arrivons à ce que $\left|(1 - (\frac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\right|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(D_\Omega \times (0,T), d\nu\ dt)$. Par conséquent, en utilisant le théorème de convergence Dominée il en résulte que $L_{n1} \to L_1$ converge vers $L_1(x,y,t)$ fortement dans $L^1(D_\Omega \times (0,T), d\nu\ dt)$ où

$$\begin{aligned} &L_1(x,y,t) = \\ &\Bigg\|\left|(\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\right|^{p-2}\Big((\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)) + (1 - (\tfrac{|x|}{|y|})^\alpha)\tilde{u}_n(y,t)\Big) \\ &-\left|\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)\right|^{p-2}\Big(\tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(y,t)\Big)\Bigg\| \\ &\times\left|(\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(y,t))\right|. \end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous concluons que

$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} U_n(x,y,t)(v(x,t)w(x) - v(y,t)w(y))d\nu\ dt \to$$
$$\int_0^T \iint_{D_\Omega} U(x,y,t)(v(x,t)w(x) - v(y,t)w(y))d\nu\ dt.$$

Par conséquent $u \in \Upsilon_\alpha$ satisfait (5.12). Il est clair que u est une solution au sens de distribution dans $\Omega\backslash\{0\} \times (0,T)$. □

5.5 Autres résultats

5.5.1 Extinction en temps fini

Dans cette sous-section, nous supposons que $p < 2$, notre objectif principal est d'obtenir la condition la plus "naturelle" pour montrer que la solution non négative devienne nulle pour un temps très grand. Le premier résultat dans cette direction est la suivante.

Théorème 5.5. Supposons que $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$ et définissons u comme étant la solution minimale du problème

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta_p^s)u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} & \text{dans } \Omega_T, \\ u &\geq 0 & \text{dans } I\!R^N \times (0,T), \\ u &= 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.13}$$

alors on a

1. Si $\frac{2N}{N+2s} \leq p < 2$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors il existe un temps fini $T^*(N,p,|\Omega|,\Lambda_{N,p,s},||u_0||_2) \equiv T^* \geq ||u_0||_2^{2-p}|\Omega|^{\frac{p}{2}-1+\frac{ps}{N}}$ tel que $u(.,t) \equiv 0$ pour $t \geq T^*$.
2. Si $1 < p < \frac{2N}{N+2s}$ et $u_0 \in L^{\nu+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ avec $\nu+1 = \frac{N(2-p)}{ps}$, alors il existe $C(N,p,s) > 0$ telle que si $\lambda < C(N,p,s)$, alors $u(.,t) \equiv 0$ pour tout $t \geq T^*$ où $T^* = T^*(\lambda, C, u_0)$.

Démonstration. Nous suivons les arguments utilisés dans [15]. Utilisons u comme fonction test dans (5.13), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dy\ dx = \lambda \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{ps}} dx.$$

Par les inégalités de Hardy et Sobolev, nous arrivons à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \frac{C(S,\Lambda_{N,p,s})}{2}\left(\int_\Omega |u|^{p_s^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq 0.$$

Puisque $\frac{2N}{N+2s} < p < 2$, alors $p_s^* > 2$, ainsi par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx \leq C(\Omega)\Big(\int_\Omega |\ u^{p_s^*}(x,t)|\ dx\Big)^{\frac{2}{p_s^*}}.$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u(x,t) \parallel_2^2 + c(\Lambda_{N,p,s})|\Omega|^{\frac{p}{p_s^*}-\frac{p}{2}} \parallel u(x,t) \parallel_2^p \leq 0$$

Comme conclusion

$$\parallel u(x,T) \parallel_2 \leq \parallel u_0 \parallel_2 \Big(1 - \frac{(2-p)c(\Lambda_{N,p,s})|\Omega|^{\frac{p}{p_s^*}-\frac{p}{2}}T}{\parallel u_0 \parallel_2^{2-p}}\Big)^{\frac{1}{2-p}}$$

Par conséquent si $T < T^*$, $u(x,T) = 0$ et le résultat suit.

Supposons que $1 < p < \frac{2N}{N+2s}$, en utilisant un argument d'approximation, nous pouvons prendre u^ν comme fonction test dans (5.13), on aura

$$\frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\nu+1}dx + \frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} |u(x,t)-u(y,t)|^{p-2}(u(x,t)-u(y,t))(u^\nu(x,t)-u^\nu(y,t))d\nu$$
$$= \lambda\int_\Omega \frac{u^{p-1+\nu}}{|x|^{ps}}dx.$$

Ainsi, par l'inégalité(1.12), on obtient

$$\frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\nu+1}dx + \frac{C}{2}\iint_{D_\Omega} |u^{\frac{p+\nu-1}{p}}(x,t) - u^{\frac{p+\nu-1}{p}}(y,t)|^p\, d\nu \leq \lambda\int_\Omega \frac{u^{p-1+\nu}}{|x|^{ps}}dx$$

En utilisant maintenant, l'inégalité de Hardy,

$$\frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\nu+1}dx + (\frac{C}{2} - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,p,s}})\iint_{D_\Omega} |u^{\frac{p+\nu-1}{p}}(x,t) - u^{\frac{p+\nu-1}{p}}(y,t)|^p\, d\nu \leq 0.$$

Supposons que $\lambda < \dfrac{C\Lambda_{N,p,s}}{2}$, donc en utilisant l'inégalité de Sobolev, nous concluons que

$$\frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\nu+1}dx + C(\Lambda_{N,p,s})\left(\int_\Omega u^{\frac{(\nu+p-1)}{p}p_s^*}dx\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq 0.$$

Rappelons que $\nu = \frac{N(2-p)-ps}{ps}$, alors $\frac{\nu+p-1}{p}p_s^* = \nu+1$.

$$\frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}||u(x,t)||_{\nu+1}^{\nu+1} + C||u(x,t)||_{\nu+1}^{\nu+p-1} \leq 0$$

Maintenant, nous obtenons

$$||u(x,T)||_{\nu+1} \leq ||u_0||_{\nu+1}\Big(1 - \frac{CT}{\parallel u_0 \parallel_{\nu+1}^{2-p}}\Big)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Par conséquent le résultat suit. $\square$

Maintenant, pour un problème plus général

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta_p^s)u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} + u^q & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u &\geq 0 & \text{dans } I\!R^N \times (0,T), \\ u &= 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.14}$$

où $q < 1$, comme dans le théorème 5.5, on peut montrer que le problème (5.14) a une solution avec extinction en temps fini, plus précisément, nous avons

Théorème 5.6. Supposons que $p - 1 < q \leq 1, \lambda < \Lambda_{N,p,s}$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors le problème (5.14) a une solution minimale non négative $u \in L^p(0, T, W_0^{s,p}(\Omega))$, de plus

1. Si $p \geq \frac{2N}{N+2s}$, puis sous une condition de petitesse sur $||u_0||_2$, il existe un temps fini T^* tel que $u(.,t) \equiv 0$ pour tout $t \geq T^*$.
2. Si $1 < p < \frac{2N}{N+2s}$, $p - 1 < q \leq 1$ et $u_0 \in L^{\nu+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ avec $\nu + 1 = \frac{N(2-p)}{ps}$, alors il existe $C > 0$ tel que si $\lambda < C$, alors $u(.,t) \equiv 0$ pour tout $t \geq T^*$ pour un $T^* > 0$.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, **R. Bentifour**, *On the Fractional p-laplacian equations with weight and general datum,* apparaître dans Advances in Nonlinear Analysis, 2016.

[2] B. Abdellaoui, A. Attar, **R. Bentifour**, I. Peral, *On the Fractional Parabolic p-laplacian equations with general datum. Submitted.(http ://arxiv.org/abs/1601.00606)*

[3] B. Abdellaoui, A. Attar, **R. Bentifour**, I. Peral, *On Fractional quasilinear parabolic problem with Hardy potential*, Submitted.(https ://arxiv.org/pdf/1703.03299.pdf).

[4] B. Abdellaoui, **R. Bentifour**, *Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities of fractional order and applications.* Journal of Functional analysis 2017.

[5] B. Abdellaoui, E. Collorado, I. Peral, *Some improved Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities.* Calc. Var. 23, (2005), 327-345.

[6] B. Abdellaoui, V. Felli, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian.* Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. -8 9 (2006), no. 2 445-484.

[7] B. Abdellaoui, F. Mahmoudi *An improved Hardy inequality for a nonlocal operator*, Discrte and continuous systems, Vol. 36 No. 3 2016.

[8] B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *Optimal results for the fractional heat equation involving the Hardy potential* . Submitted.

[9] B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *A note on the effect of the Hardy potential in some Calderon-Zygmund properties for the fractional Laplacian.* J. Differential Equations, 260 -2016 8160-8206.

[10] B. Abdellaoui, S.E. Miri, I. Peral,T.M. Touaoula, *Some remarks on quasilinear parabolic problems with singular potential and a reaction term.* Nonlinear Differ. Equ. Appl. 21 (2014), 453-490.

[11] B. Abdellaoui, I. Peral, *On quasilinear elliptic equation related to some Caffarelli-Khon-Nirenberg inequalities*, Comm. Pure and Applied Math. Vol. 3 No 3(2003), 539-566.

[12] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacien with a critical potential.* Ann. di .Math, 182, (2003), 247-270.

[13] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, *A remark on the fractional Hardy inequality with a remainder term*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 -2014 299-303.

[14] R.A. Adams *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[15] J.A. Aguilar, I. Peral, *Global behaviour of the Cauchy Problem for some Critical Nonlinear Parabolic Equations*, SIAM Journal in Mathematical Analysis 31 (2000), no. 6, 1270-1294.

[16] N.E. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures.* SIAM J. Math. Anal, 24, (1993), 23-35.

[17] N. Alibaud, B. Andreianov, M. Bendahmane, *Renormalized solutions of the fractional Laplace equation*, C. R. Acad. Sci. Paris,Ser. I 348,(2010), 759-762

[18] F.J. Almgren, E. H. Lieb, *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous.* J. Amer. Math. Soc., 2, (1989), (4), 683-773. 1989.

[19] F. Antoci, *Some necessary and some sufficient conditions for the compactness of the embedding of weighted Sobolev spaces.* Ricerche di Matematica, LII, (2003), 55-71

[20] P. Baras, J. Goldstein, *The heat equation with a singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 121-139.

[21] B. Barrios, M. Medina, I. Peral, *Some remarks on the solvability of non-local elliptic problems with the Hardy potential.* Communications in Contemporary Mathematics (2013). Published on line 8 October, 2013 DOI : 10.1142/S0219199713500466.

[22] B. Barrios, I. Peral, S. Vita, *Some remarks about the summability of nonlocal nonlinear problems*, to appear.

[23] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vázquez, *An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Vol 22. No 2 (1995),240-273.

[24] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, M.Pierre, J.L. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci, 22, (1995), 241-273.

[25] J. Bertoin, *Levy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[26] D. Blanchard, F. Murat, H. Redwane, *Existence and Uniqueness of a Renormalized Solution for a Fairly General Class of Nonlinear Parabolic Problems*, Journal of Differential Equations Vol.177, 2, 2001, 331-374

[27] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina,*Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations involving measure data*, Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol. 13 No 13 (1996), 539-551

[28] T. BOJDECKI, L. G. GOROSTIZA, *Fractional Brownian motion via fractional Laplacian,* Statist. Probab. Lett., 44(1) (1999), 107-108.

[29] H. BREZIS, X. CABRÉ, *Some Simple Nonlinear PDE's Without Solution,* Boll. Unione. Mat. Ital. Sez. B Vol 8 No 1 (1998), 223-262.

[30] H. BREZIS, L. DUPAIGNE, A. TESEI, *On a semilinear equation with inverse-square potential* Selecta Math., 11, (2005), 1-7.

[31] H. BREZIS, S. KAMIN, *Sublinear elliptic equations in* $I\!R^N$, Manuscripta Math. 74, (1992), 87-106.

[32] H. BREZIS, M. MARCUS, *Hardy's inequalities revisited.* Annali della Scuola Seperior do Piza Classe di Scienze 4 série, tome 25 (1997), 217-237.

[33] H. BREZIS, A.C. PONCE, *Kato's inequality when* Δu *is a measure.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser(2004).

[34] L. CAFFARELLI, R. KOHN, L. NIRENBERG, *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Math., 53, (1984), 259-275.

[35] L. CAFFARELLI, L. SILVESTRE, *An extension problem related to the fractional Laplacian.* Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 7-9, 1245-1260.

[36] M. CAPONI, P. PUCCI, *Existence theorems for entire solutions of stationary Kirchhoff fractional p-Laplacian equations.* To appear in Ann. Mat.Pura Appl.

[37] F.M. CHIARENZA, R. P. SERAPIONI, *A Harnack inequality for degenerate parabolic equations.* Comm. in PDE, 9 (1984), no. 8 719-749.

[38] G. DAL MASO, F. MURAT, L. ORSINA, A. PRIGNET, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, 4, (1999), 741-808.

[39] A. DALL'AGLIO, *Approximated solutions of equations with* L^1 *data. Application to the* H*-convergence of quasi-linear parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl., 170 (1996), 207–240.

[40] A. DALL'AGLIO, D. GIACHETTI, I. PERAL, *Results on parabolic equations related to some caffarelli-Khon-Nirenberg inequalities.* Siam J. Math. Anal, 36, (2004), no. 3, 691-716.

[41] A. DI CASTRO, T. KUUSI, G. PALATUCCI, *Nonlocal Harnack inequalities.* To appear in J. Functional Analysis.

[42] A. DI CASTRO, T. KUUSI, TUOMO, G. PALATUCCI, *Nonlocal Harnack inequalities*, J. Funct. Anal. 267 (2014), no. 6 1807-1836.

[43] A. DI CASTRO, T. KUUSI, TUOMO, G. PALATUCCI, *Local behavior of fractional p-minimizers*, Preprint.

[44] E. DI NEZZA, G. PALATUCCI, E. VALDINOCI, *Hitchhikers guide to the fractional Sobolev spaces.* Bull. Sci. math., 136 (2012), no. 5 521-573.

[45] E.B. Fabes, C. E. Kenig, R. P. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations,* Comm. Partial Diff. Equa. 7 (1982), no. 1 77–116.

[46] M.M. Fall, *Semilinear elliptic equations for the fractional Laplacian with Hardy potential*, Preprint. arXiv :1109.5530v4 [math.AP].

[47] M.M. Fall, R. Musina, *Hardy-Poincaré inequalities with boundary singularities.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A, 142, (2012), 1-18.

[48] F. Ferrari, I. Verbitsky, *Radial fractional Laplace operators and Hessian inequalities*, J. Differential Equations 253 (2012), no. 1 244-272.

[49] R. Frank, E. H. Lieb, R. Seiringer, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrodinger operators*, Journal of the American Mathematical Society (2008), Vol. 20 No. 4 925-950.

[50] R. Frank, R. Seiringer, *Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities*, Journal of Functional Analysis 255 (2008), 3407–3430.

[51] J. García Azorero, I. Peral, *Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems.* J. Diff. Eq, 144, (1998), 441-476.

[52] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations,* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.

[53] I.W. Herbst, *Spectral theory of the operator* $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$, Commun. math. Phys. 53 (1977), 285-294.

[54] K. Ito, *Lectures on stochastic processes,* volume 24 of Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics. Distributed for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, second edition (1984). Notes by K. Muralidhara Rao.

[55] K. Kenneth H., F. Petitta, S. Ulusoy, *A duality approach to the fractional Laplacian with measure data.* Publ. Mat. 55 (2011), no. 1 151-161.

[56] A. Kufner, B. Opic, *Hardy-type inequalities.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219. Longman Scientific & Technical, Harlow, (1990).

[57] T. Kuusi, G. Mingione, Y. Sire, *Nonlocal equations with measure data,* Comm. Math. Phys. 337(2015), 1317-1368.

[58] T. Leonori, I. Peral, A. Primo, F. Soria, *Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations*, Discrete and Continuos Dynamical System-A. To appear.

[59] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics 14 American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[60] P. Lindqvist, *On the equation* $\Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u = 0$. Proc. Amer. Math. Soc. 109(1), 157-164 (1990).

[61] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites nonlinéaires* Edition Dunod, paris 1969

[62] V. MAZ'YA, *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 342. Springer, Heidelberg, 2011.

[63] A. PRIGNET, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel.* ThÃ¨se de Doctorat. UMPA-ENS Lyon. (1997).

[64] A. PRIGNET, *Existence and uniqueness of "entropy" solutions of parabolic problems with L^1 data*, Nonlinear Anal. 28 (1997), no. 12, 1943–1954.

[65] R. SERVADEI, E. VALDINOCCI, *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators.* J. Math. Anal. Appl., 389 (2012), no. 2 887-898.

[66] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 15 (1965), 189–258.

Résumé :

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes paraboliques et elliptiques avec un opérateur non local de type p-laplacien fractionnaire ou bien p-laplacien fractionnaire avec poids. Le but principal de ce travail est de généraliser des résultats connus pour le cas local au cadre non local, ou bien non local linéaire au cadre non local non linéaire.

Mots Clés :

Equations elliptiques et paraboliques fractionnaires, opérateur non local, potentiel de Hardy-Sobolev, solutions entropiques, p-laplacien fractionnaire.

Abstract:

In this thesis, we focus on the study of a class of parabolic and elliptic problems with non-local operator as the fractional p-Laplace or fractional p-Laplacian with weight. The main purpose of this work is to generalize some well known results in the local case, or nonlinear local, to our non local case.

Key words :

Fractional Elliptic and parabolic problems, nonlocal operator, Hardy-Sobolev potential, entropy solutions, fractional p-Laplacian.

الملخص:

في هذه الأطروحة، نهتم بدراسة فئة من المسائل الشلجمية و المسائل الاهليليجية مع مؤثر غير محلي من نوع ب-لابلاس الكسري أو ب-لابلاس الكسري مع الوزن . والغرض الرئيسي من هذا العمل هو تعميم نتائج معروفة قي الحالة المحلية، أو الحالة غير المحلية الخطية، الى مسائلنا الغير محلية.

الكلمات المفتاحية:

المسائل الشلجمية و الاهليليجية الكسرية ، معامل غير محلي ،حد هاردي سوبولاف ، الحلول الانتروبية ، ب-لابلاس الكسري

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCEN

RÈSUMÈ
DE LA THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques et applications

Par :

Mr BENTIFOUR RACHID

Sur le thème

Problèmes elliptiques et paraboliques fractionnaires avec données générales

---

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire & Mathématiques Appliquées (LANLMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Résumé de la thèse
Problèmes elliptiques et paraboliques fractionnaires avec données générales

Bentifour Rachid

January 23, 2017

1.1 Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes paraboliques et elliptiques avec un opérateur non local de type p-laplacien fractionnaire ou bien p-laplacien fractionnaire avec poids. Plus précisément on considère un opérateur pseudo différentiel de la forme

$$(-\Delta)^s_{p,\beta}\, u(x) := P.V. \int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}}$$

où $s \in (0,1), p > 1$ et $\beta > 0$. Il est clair que cet opérateur coïncide, modulo une constante, avec le p laplacien classique pour $s = 1$ et $\beta = 0$. Pour le cas du laplacien fractionnaire, $p = 2$ et $\beta = 0$, l'opérateur peut être aussi défini en utilisant la transformée de Fourier

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\bigg(\mathcal{F}(|\xi|^{2s}u)\bigg).$$

Notons aussi que cet opérateur trouve son origine en probabilité, puisque il apparaît comme un cas particulier du processus Levy (voir [[25], [28], [54]]).

L'étude des équations fractionnaires a connu un avancement notable ces dernières années grâce a la contribution de plusieurs mathématiciens. L'un des résultats clé dans l'analyse du laplacien fractionnaire est sans doute le résultat de Caffarelli-Sylvestre dans [35]. Les auteurs ont prouvé une "correspondance" entre l'opérateur non local $(-\Delta)^s$ défini dans $I\!R^N$, et, un opérateur local divergentiel défini dans $I\!R^{N+1}$. Cette correspondance a permis de prouver plusieurs résultats de régularité et de définir des extensions "naturelles" des notions, jusque là limitées au cas du laplacien comme la notion de périmètre, courbure moyenne,...., au cas non local. Dans cette thèse on s'intéresse a l'étude des problèmes elliptiques et paraboliques où l'opérateur principal est donné par $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ et parfois sous la présence d'un terme singulier. Le but principal de ce travail est de généraliser des résultats connus pour le cas local, ou bien non local linéaire, à notre cas non local. A première vue, il semble que cette extension peut se faire facilement, ce qui n'est pas tout à fait vrai dans la majorité des cas, en gardant à l'esprit que l'argument de Caffarelli-Sylvestre ne peut pas être étendu au cas non-linéaire. Tenant en compte la nature algébrique de l'opérateur, et pour accomplir notre étude, il est nécessaire de développer des inégalités algébriques, parfois difficiles à prouver, pour résoudre des difficultés de type intégration par parties, fonction test de type produit, estimations a priori,.....

Une fois que les outils algébriques sont prouvés, on passe à la question des poids admissibles. Dans le cas local, pour l'opérateur divergentiel

$$-\Delta_{p,\beta}\, u(x) = -\text{div}(|x|^{-\beta}|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

le poids $|x|^{-\beta}$ est admissible pour tout $\beta \in (0, N-p)$ dans le sens ou l'opérateur $-\Delta_{p,\beta}$ vérifie l'inégalité de Harnack faible . La démonstration de cette affirmation est basée sur les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Notons que cette classe de poids intervient d'une manière fondamentale quand on cherche à améliorer l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Dans notre cas la situation est totalement différente. Le rang de β admissible change complètement puisque les valeurs "trop" négatives de β posent un problème fondamental dans la définition de l'espace de Sobolev fractionnaire lui même. Donc en prouvant une inégalité de Hardy-Sobolev avec poids (sous quelques conditions sur le poids), on arrive à démontrer une version de l'inégalité de type Caffarelli-Kohn-Nirenberg fractionnaire. Cette inégalité sera la clé pour obtenir l'inégalité de Harnack faible pour notre opérateur dans l'esprit des poids admissible. Enfin, et comme conséquence, on traite une classe de problèmes elliptiques et paraboliques non locaux sous la présence d'un terme singulier comme terme de réaction.

1.2 Description de la Thèse

1.2.1 Description du chapitre 1

Dans le premier chapitre on présente des outils d'analyse non linéaires qui seront utilisés pour traiter nos problèmes. On commence par présenter les espaces de Sobolev fractionnaires et leurs propriétés. Ensuite pour une classe de poids précise, on définit les espace de Sobolev avec poids. La notion de troncature est aussi présentée puisqu'elle va être utilisée pour définir des solutions généralisées. En tenant en compte le caractère algébrique de notre opérateur, dans la dernière partie du Chapitre 1 on présente quelques inégalités algébriques qu'on va les utiliser régulièrement dans cette thèse. Notons que quelques inégalités peuvent être prouvées facilement en utilisant un argument de normalisation et homogénéité, par contre d'autres inégalités sont plus compliquées (et complètement nouvelles) et exigent des démonstrations fines et rigoureuses.

1.2.2 Description du chapitre 2

Dans [34], les auteurs ont montré le résultat suivant:

Théorème 0.1 *(Caffarelli-Kohn-Nirenberg). Soient $p, q, r, \alpha, \beta, \sigma$ et a des constantes réelles telles que $p, q \geq 1, r > 0, 0 \leq a \leq 1$ et*

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{N}, \frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}, \frac{1}{r} + \frac{m}{N} > 0,$$

où $m = a\sigma + (1-a)\beta$. Alors, il existe une constante positive C telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, on a

$$\left\| |x|^m u \right\|_{L^r(I\!R^N)} \leq C \left\| |x|^\alpha |\nabla u| \right\|^a_{L^p(I\!R^N)} \left\| |x|^\beta u \right\|^{1-a}_{L^q(I\!R^N)}$$

si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées:

$$\frac{1}{r} + \frac{m}{N} = a\Big(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N}\Big) + (1-a)\Big(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}\Big)$$

avec

$$0 \leq \alpha - \sigma \quad si \quad \alpha > 0,$$

et

$$\alpha - \sigma \leq 1 \quad si \quad a > 0 \quad et \quad \frac{1}{r} + \frac{m}{N} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N}$$

Ce type des inégalités est lié au problème elliptique local suivant:

$$-\text{div}(|x|^{-p\gamma}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \tag{2.0}$$

Comme conséquence du Théorème 0.1, il résulte que $|x|^{-\gamma}$, avec $\gamma < \frac{N-p}{p}$, est un poids admissible dans le sens que si u est une super-solution faible de (2.0), alors elle satisfait l'inégalité faible de Harnack. Plus précisément, il existe une constante positive $\kappa > 1$ tel que pour tout $0 < q < \kappa(p-1)$,

$$\Big(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^q(x)|x|^{-p\gamma}dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_\rho(x_0)} u,$$

où $B_{2\rho}(x_0) \subset\subset \Omega$, et $C > 0$ dépend seulement de B.
Nous nous référons à [45], [52] qui donnent une discussion complète ainsi que la preuve de l'inégalité de Harnack. Notons que l'inégalité de Harnack classique reste vraie pour la solution positive de (2.0).
L'un des principaux outils pour obtenir les inégalités faibles de Harnack est l'inégalité de Sobolev avec poids qui peut être obtenue directement à partir du Théorème 0.1.
Un autre argument pour obtenir l'inégalité de Sobolev est de prouver l'inégalité de Hardy avec poids.
L'objectif principal de ce chapitre est de suivre cette approche afin d'obtenir la version non locale de l'inégalité Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Dans [50], les auteurs ont prouvé l'inégalité de Hardy-Sobolev classique:

Théorème 0.2 *Soit $p > 1$, $s \in (0,1)$ telles que $sp < N$, alors $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$,*

$$\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \geq \Lambda_{N,p,s} \int\limits_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}dx \tag{2.1}$$

où la constante $\Lambda_{N,p,s}$ est donnée par

$$\Lambda_{N,p,s} = 2\int_0^\infty |1-\sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{-\gamma})\sigma^{N-\beta-1}K(\sigma)d\sigma \tag{2.2}$$

avec

$$\gamma = \frac{N-ps}{p} \quad et \quad K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N+ps}}.$$

Dans le même papier, et en considérant

$$h_s(u) \equiv \int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy - \Lambda_{N,p,s}\int_{I\!R^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}dx,$$

les auteurs montrent que pour $p \geq 2$, il existe une constante positive $C = C(p,N,s)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$, si $v = |x|^{\frac{N-ps}{p}}u$, alors

$$h_s(u) \quad \geq \quad C\int_{I\!R^N}\int_{I\!R^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{2.3}$$

L'inégalité précédente devient une égalité pour $p = 2$ avec $C = 1$.
Comme conséquence de (2.3), on obtient facilement que $\Lambda_{N,p,s}$ n'est jamais atteinte.
Pour $p = 2$, les auteurs dans [13] ont montré le résultat suivant:

Théorème 0.3 *Soit $N \geq 1$, $0 < s < 1$ et $N > 2s$. Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, alors pour tout $1 < q < 2$, il existe une constante positive $C = C(\Omega, q, N, s)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} &a_{N,s}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,2,s}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx \geq \\ &C(\Omega,q,N,s)\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le résultat principal du Chapitre 2 est de généraliser le résultat du Théorème 0.3 au cas où $p \neq 2$. Suivant les valeurs de p ($p > 2$ ou bien $p < 2$), la preuve sera basée sur des arguments différents, en particulier sur des inégalités algébriques différentes. Une fois que l'inégalité de Hardy-Sobolev améliorée est prouvée, on arrive à démontrer l'inégalité de type Caffarelli-Kohn-Nirenberg fractionnaire. Notons que notre approche est basée sur le fait que le poids $|x|^{-\beta}$ n'est pas trop dégénéré, c.à.d. on aura besoin que de la condition $\beta > -ps$ qui est une condition optimale puisque pour $\beta \leq -ps$ on aura un problème pour définir l'espace de Sobolev lui-même.

Pour généraliser complètement les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg au rang β négatif, on aura besoin de changer "la structure de l'opérateur", puisqu'il sera nécessaire que le poids "accompagne" la fonction dans la norme.

1.2.3 Description du chapitre 3

Comme application directe des résultats du chapitre **??**, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u &= f(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ dans } I\!R^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

où Ω est un domaine borné régulier contenant l'origine et f une fonction donnée.

On commence par le cas où f dépend seulement de x. Notre premier objectif sera d'obtenir l'existence d'une solution, dans un sens convenable, pour le problème (2.5) pour une grande classe de donné f.

Pour le cas de l'équation du $p-$laplacien classique, l'existence et l'unicité d'une solution entropique pour une donnée dans L^1. On renvoie le lecteur à [27] et [23] pour plus de détails.

Le cas d'une donnée mesure générale a été traité dans [38] où les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution renormalisée.

Le cas local avec un poids a été considéré dans [11], les auteurs ont démontré l'existence et l'unicité d'une solution au sens d'entropie pour une donnée dans L^1.

Pour l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$, les cas $p = 2$ et $\beta = 0$ a été analysé dans [58] et [55] où l'argument de dualité, dans le sens de Stampacchia, a été utilisé pour prouver l'existence de solution pour une donnée dans L^1. Dans un cadre plus général, un problème semi-linéaire a été examiné dans [17] , où l'existence et l'unicité de la solution renormalisée sont analysées.

Le cas $p \neq 2$ et $\beta = 0$ a été traité récemment dans [43] et [36] avec une donnée régulière et une structure variationnelle. Pour une donnée générale, et en se basant sur une certaine généralisation de la théorie du potentiel de Wolff, les auteurs ont pu obtenir l'existence d'une solution faible qui appartient à un espace de Sobolev fractionnaire approprié.

Dans ce chapitre, nous allons traiter le cas $p \neq 2$ et $\beta > 0$, l'argument utilisé dans [57] semble être compliqué pour être adapté à notre cas.

Notre approche est plus simple et elle est basée sur un choix approprié d'une famille de fonctions test et de certaines inégalités algébriques.

Dans la première partie, nous allons considérer le cas $f(x,s) = f(x)$. On prouve l'existence d'une solution faible qui est dans un espace de Sobolev fractionnaire approprié.

Il est clair que pour $\beta = 0$, on obtient le même résultat d'existence et de régularité donné dans [57], cependant, il semblerait que notre approche est plus simple et peut être adaptée à une grande classe d'opérateurs non locaux avec poids. Ensuite, dans le cas où la donnée $f \geq 0$, on prouve l'existence d'une solution au sens d'entropie.

Dans la section **??**, nous traitons le cas $f(x,s) = \lambda s^q + f(x)$, alors, selon les valeurs de q et λ, nous sommes en mesure de montrer l'existence d'une solution d'entropie pour une grande classe de données f.

Pour une donnée positive, nous allons montrer que l'opérateur $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ satisfait à une inégalité locale de Harnack bien adaptée. Ce dernier résultat a été prouvé dans [42] pour $\beta = 0$ et dans [9] pour le cas $p = 2$ et $\beta > 0$. A ce niveau, en combinant les techniques des derniers articles, nous allons montrer le résultat pour le cas non linéaire $p \neq 2$ et $\beta > 0$. Comme application directe de l'étude précédente on considère le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}\, u &=& \lambda u^q + g(x), \quad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Suivant les valeurs de q et λ, on arrive à prouver l'existence d'une solution positive pour la classe la plus vaste possible de g.

Enfin dans la dernière section de ce chapitre on traite le cas du potentiel de Hardy. Plus précisément, on considère le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta}\, u &=& \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} + u^q, \quad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Dans le cas local , le problème se réduit à:

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u &=& \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{p}} + u^q, \quad u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour $p = 2$, les auteurs dans [30] ont montré que si $q > q_+(2)$, alors le problème (2.7) n'admet pas de sur-solution distributionnelle, cependant, si $q < q_+(2)$, il existe une sur-solution positive, avec $q_+(2) = 1 + \frac{2}{\theta_1}$, $\theta_1 = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,2} - \lambda}$ et $\Lambda_{N,2} = \frac{(N-2)^2}{4}$, la constante classique de Hardy

Le cas $p \neq 2$ a été considéré dans [6] où la même alternative reste vraie avec $q_+(p) = p - 1 + \frac{p}{\theta_p}$ où θ_p est une solution de l'équation algébrique

$$\Xi(s) = (p-1)s^p - (N-p)s^{p-1} + \lambda = 0.$$

Le cas fractionnaire avec $p = 2$ a été étudié dans [46] et [21]. les auteurs ont montré la même alternative avec $q_+(2,s) = 1 + \frac{2s}{\theta}$ où $\theta \equiv \theta(\lambda, s, N) > 0$.

Notre objectif est de généraliser le résultat de [46], [21] au cas $p \neq 2$.

1.2.4 Description du chapitre 4

Dans ce chapitre on considère la partie parabolique. Comme dans le cas elliptique, notre but est de généraliser les résultats obtenus pour les opérateurs locaux a notre cas non local. On commence par traiter le problème suivant

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta^s_p)u &=& f(x,t), u > 0 & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u &=& 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) &=& u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

où Ω est un domaine borné et f, u_0 sont des fonctions mesurables. En utilisant des techniques similaires au cas elliptiques on arrive à prouver que le problème (2.8) admet une solution distributionnelle pour f mesure de Radon et $u_0 \in L^1(\Omega)$. Dans le cas ou $f \in L^1(\Omega_T)$ avec $f \geq 0$, l'existence d'une solution entropique est prouvée. L'idée est d'utiliser des arguments d'approximation et de passer à la limite en utilisant les estimations a priori.

1.2.5 Description du chapitre 5

Comme conséquence de l'existence d'une solution entropique et par les résultats du chapitre **??**, on étudie le problème

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta_p^s)u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}}, u > 0 & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{dans } (I\!R^N \setminus \Omega) \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

où Ω est domaine borné contenant l'origine et $\lambda > 0$. Il est clair que le problème (2.9) est fortement lié à l'inégalité de Hardy-Sobolev.

Pour $p = 2$ et $s = 1$ le problème (2.9) a été étudié dans [20]. Les auteurs démontrent l'existence et les résultats de non-existence en relation avec le fait que $\lambda \leq \Lambda_{N,2}$ ou $\lambda > \Lambda_{N,2}$, respectivement. Le cas nonlocal a été résolu dans [58], les auteurs ont pu obtenir la même alternative en utilisant le fait que l'opérateur parabolique nonlocal satisfait une inégalité de Harnack appropriée. Sous la présence d'un terme de réaction, les auteurs dans [8] ont prouvé l'existence d'un exposant critique $q_+(\lambda, s)$ ne dépendant que de λ tel que l'existence a lieu si et seulement si $q < q_+(\lambda)$.

Pour $p \neq 2$ et $s = 1$, le problème a été largement étudié dans la littérature. Dans [15], les auteurs prouvent l'existence d'une solution globale, si $p < \frac{2N}{N+2}$ pour tout $\lambda > 0$ et pour u_0 appropriée. Dans [40], les auteurs complètent l'étude précédente et montrent que si $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$, le problème a une solution au sens des distributions loin de l'origine.

Le cas $p \neq 2$ et $s < 1$ semble être nouveau. Notons que pour prouver l'existence d'une solution loin de l'origine on aura besoin de l'inégalité de CKN avec un poids trop dégénéré, ce qui conduit à l'utilisation des résultats de la dernière section du chapitre 2. L'Extinction en temps fini est aussi analysée.

Remarque: Pour les références voir la thèse.

Journal of Functional Analysis ••• (••••) •••–•••

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Functional Analysis

www.elsevier.com/locate/jfa

Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications ☆

B. Abdellaoui, R. Bentifour

Laboratoire d'Analyse Nonlinéaire et Mathématiques Appliquées, Département de Mathématiques, Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, Tlemcen 13000, Algeria

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 20 January 2015
Accepted 4 February 2017
Available online xxxx
Communicated by F.-H. Lin

MSC:
49J35
35A15
35S15

Keywords:
Fractional Sobolev spaces
Weighted Hardy inequality
Nonlocal problems

A B S T R A C T

Let $0 < s < 1$ and $p > 1$ be such that $ps < N$. Assume that Ω is a bounded domain containing the origin. Starting from the ground state inequality by R. Frank and R. Seiringer in [17] to obtain:

(1) The following improved Hardy inequality for $p \geqslant 2$:
For all $q < p$, there exists a positive constant $C \equiv C(\Omega, q, N, s)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,p,s}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p}\,dx$$
$$\geqslant C\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy,$$

for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Here $\Lambda_{N,p,s}$ is the optimal constant in the Hardy inequality (1.2).

(2) Define $p_s^* = \frac{pN}{N-ps}$ and let $\beta < \frac{N-ps}{2}$, then

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}\,dy\,dx$$

☆ This work is partially supported by project MTM2013-40846-P, MINECO, Spain. The first author is partially supported by a grant from the ICTP centre of Trieste, Italy.
E-mail addresses: boumediene.abdellaoui@uam.es (B. Abdellaoui), rachidbentifour@gmail.com (R. Bentifour).

http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

$$\geqslant S(N,p,s,\beta)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}},$$

for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ where $S \equiv S(N,p,s,\beta) > 0$.

(3) If $\beta \equiv \frac{N-ps}{2}$, as a consequence of the improved Hardy inequality, we obtain that for all $q < p$, there exists a positive constant $C(\Omega)$ such that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}\,dy\,dx$$
$$\geqslant C(\Omega)\Big(\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^{p_{s,q}^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_{s,q}^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_{s,q}^*}},$$

for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ where $p_{s,q}^* = \frac{pN}{N-qs}$.

Notice that the previous inequalities can be understood as the fractional extension of the Callarelli–Kohn–Nirenberg inequalities in [9].

1. Introduction

In [9] the authors proved the following result

Theorem 1.1 *(Caffarelli–Kohn–Nirenberg). Let $p, q, r, \alpha, \beta, \sigma$ and a be real constants such that $p, q \geqslant 1$, $r > 0$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, and*

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{N},\ \frac{1}{q} + \frac{\beta}{N},\ \frac{1}{r} + \frac{m}{N} > 0,$$

where $m = a\sigma + (1-a)\beta$. Then there exists a positive constant C such that for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ we have

$$\Big|\Big||x|^m u\Big|\Big|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\Big|\Big||x|^\alpha|\nabla u|\Big|\Big|^a_{L^p(\mathbb{R}^N)}\Big|\Big||x|^\beta u\Big|\Big|^{1-a}_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

if and only if the following relations hold:

$$\frac{1}{r} + \frac{m}{N} = a\Big(\frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{N}\Big) + (1-a)\Big(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}\Big),$$

with

$$0 \leqslant \alpha - \sigma \text{ if } a > 0,$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

and

$$\alpha - \sigma \leqslant 1 \text{ if } a > 0 \text{ and } \frac{1}{r} + \frac{m}{N} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N}.$$

This class of inequalities are related to the following local elliptic problem

$$-\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0. \tag{1.1}$$

As a consequence of Theorem 1.1, it follows that $|x|^{-\gamma}$, with $\gamma < \frac{N-p}{p}$, is an admissible weight in the sense that if u is a weak positive supersolution to (1.1), then it satisfies a weak Harnack inequality.

More precisely, there exists a positive constant $\kappa > 1$ such that for all $0 < q < \kappa(p-1)$,

$$\Big(\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} u^q(x)|x|^{-p\gamma}dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \inf_{B_\rho(x_0)} u,$$

where $B_{2\rho}(x_0) \subset\subset \Omega$, and $C > 0$ depends only on B.

We refer to [13,18] and the references therein for a complete discussion and the proof of the weak Harnack inequality.

Notice that even the classical Harnack inequality holds for positive solution to (1.1).

One of the main tools to get the weak Harnack inequality is a weighted Sobolev inequality that can obtained directly from Theorem 1.1.

An alternative argument to get the Sobolev inequality is to prove a weighted Hardy inequality as it was observed in [22].

The main goal of this paper is to follow this approach in order to get a nonlocal version of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities.

In [17], the authors proved the following Hardy inequality stating that for $p > 1$ with $sp < N$ and for all $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \geqslant \Lambda_{N,p,s} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx \tag{1.2}$$

where the constant $\Lambda_{N,p,s}$ is given by

$$\Lambda_{N,p,s} = 2\int\limits_0^\infty |1 - \sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1 - \sigma^{-\gamma})\sigma^{N-1}K(\sigma) \tag{1.3}$$

and

$$K(\sigma) = \int\limits_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{N+ps}}.$$

In the same paper, setting

$$h_s(u) \equiv \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy - \Lambda_{N,p,s}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}dx,$$

they proved that for $p \geqslant 2$, there exists a positive constant $C = C(p, N, s)$ such that for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, if $v = |x|^{\frac{N-ps}{p}}u$, it holds

$$h_s(u) \geqslant C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{1.4}$$

The above inequality turns to be equality for $p = 2$ with $C = 1$.

As a consequence of (1.4), we easily get that $\Lambda_{N,p,s}$ is never achieved.

For $p = 2$, the authors in [2] proved the next result:

Theorem 1.2. *Let $N \geqslant 1$, $0 < s < 1$ and $N > 2s$. Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, then for all $1 < q < 2$, there exists a positive constant $C = C(\Omega, q, N, s)$ such that for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} a_{N,s}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,2,s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx \\ \geqslant C(\Omega, q, N, s)\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{1.5}$$

One of the main results of this work is to generalize Theorem 1.2 to the case $p > 2$. More precisely we have the next Theorem:

Theorem 1.3. *Let $p > 2$, $0 < s < 1$ and $N > ps$. Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, then for all $1 < q < p$, there exists a positive constant $C = C(\Omega, q, N, s)$ such that for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dx\,dy - \Lambda_{N,p,s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}\,dx \geqslant C\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy. \tag{1.6}$$

As a consequence we get the next "fractional" Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality in bounded domain.

Theorem 1.4. *Let $p \geqslant 2$, $0 < s < 1$ and $N > ps$. Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, then for all $1 < q < p$, there exists a positive constant $C = C(\Omega, q, N, s)$ such that for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,*

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}\, dx\, dy \geqslant C\Big(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\, dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \tag{1.7}$$

where $p^*_{s,q} = \frac{pN}{N-qs}$ *and* $\beta = \frac{N-ps}{2}$.

In the case where $\Omega = \mathbb{R}^N$, to get a *natural* generalization of the classical Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality obtained in [9], we have to consider a class of *admissible weights* in the sense of [18]. Precisely we obtain the following weighted Sobolev inequality.

Theorem 1.5. *Assume that* $1 < p < \frac{N}{s}$ *and let* $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$, *then for all* $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, *we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geqslant S(\beta)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p^*_s}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_s}{p}}}\, dx\Big)^{\frac{p}{p^*_s}}, \tag{1.8}$$

where $S(\beta) > 0$.

It is clear that the condition imposed on β coincides in some sense with definition of *admissible* weight given in [18]. The proof of Theorem 1.5 is based on some weighted Hardy inequality given below.

As a direct application of the previous results, we will consider the problem

$$\begin{cases} L_{p,s}\, u - \lambda\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{ps}} = |u|^{q-1}u, \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

where

$$L_{s,p}\, u(x) := \text{ P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\, dy,$$

$0 < \lambda \leqslant \Lambda_{N,p,s}$ and $q > 0$.

In the local case, the problem is reduced to

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u - \lambda\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p}} = |u|^{q-1}u, \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

For $p = 2$, the authors in [7] proved that if $q > q_+(2)$, then problem (1.10) has no distributional supersolution, however, if $q < q_+(2)$, there exists a positive supersolution, with $q_+(2) = 1 + \frac{2}{\theta_1}$, $\theta_1 = \frac{N-2}{2} - \sqrt{\Lambda_{N,2} - \lambda}$ and $\Lambda_{N,2} = \frac{(N-2)^2}{4}$, the classical Hardy constant.

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

The case $p \neq 2$ was considered in [1] where the same alternative holds with $q_+(p) = p - 1 + \frac{p}{\theta_p}$ where θ_p is the smallest solution to the equation

$$\Xi(s) = (p-1)s^p - (N-p)s^{p-1} + \lambda.$$

The fractional case with $p = 2$ was studied in [14] and [5]. The authors proved the same alternative with $q_+(2, s) = 1 + \frac{2s}{\theta}$ where $\theta \equiv \theta(\lambda, s, N) > 0$.

Our goal is to extend the results of [14] and [5] to the case $p \neq 2$.

The paper is organized as follows.

In Section 2 we prove the main results, namely Theorems 1.3, 1.4 and 1.5.

The starting point will be the proof of a general version of the Picone inequality. As a consequence, we get a weighted version of the Hardy inequality for a class of "admissible weights".

Hence, following closely the arguments used in [2], taking in consideration the "weighted" Hardy inequality, we get the proof of Theorem 1.3.

Once Theorem 1.3 proved, we complete the proof of Theorem 1.4 using suitable Sobolev inequality.

At the end, and by using a weighted Hardy inequality, we are able to get a "fractional Caffarelli–Kohn–Nirenberg" inequality for admissible weights in $\mathbb{R}^N$ and then to proof Theorem 1.5.

In section 3, we analyze problem (1.10). We prove the existence of a critical exponent $q_+(p, s)$ such that if $q > q_+(p, s)$, then problem (1.10) has no positive solution in a suitable sense. To show the optimality of the non-existence exponent, we will construct an appropriate supersolution in the whole space.

In the whole of the paper we will use the next elementary inequality, see for instance [17].

Lemma 1.6. *Assume that $p > 1$, then for all $0 \leqslant t \leqslant 1$ and $a \in \mathbb{C}$, we have*

$$|a - t|^p \geqslant (1 - t)^{p-1}(|a|^p - t). \tag{1.11}$$

2. Statement and proof of the main results

Let us begin with some functional settings that will be used below, we refer to [12] and [22] for more details.

For $s \in (0, 1)$ and $p \geqslant 1$, we define the fractional Sobolev spaces $W^{s,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, by

$$W^{s,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dxdy < \infty\}.$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

It is clear that $W^{s,p}(\Omega)$ is a Banach space endowed with the norm

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

In the same way, we define the space $X_0^{s,p}(\Omega)$ as the completion of $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm of $W^{s,p}(\Omega)$.

Notice that, if $Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$, then

$$||\phi||_{X_0^{s,p}(\Omega)} = \Big(\int\int\limits_{Q} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy\Big)^{\frac{1}{p}} + ||\phi||_{L^p(\Omega)}.$$

Using the fractional Sobolev inequality we obtain $X_0^{s,p}(\Omega) \subset L^{p_s^*}(\Omega)$ with continuous inclusion, where $p_s^* = \frac{pN}{N-sp}$ for $ps < N$.

In the case where Ω is a bounded regular domain, the space $X_0^{s,p}(\Omega)$ can be endowed with the equivalent norm

$$|||\phi|||_{X_0^{s,p}(\Omega)} = \Big(\int\int\limits_{Q} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

To prove the *fractional* Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality, we need to define fractional Sobolev spaces with weight. More precisely, let $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ with $0 \in \Omega$, the weighted Sobolev space $X^{s,p,\beta}(\Omega)$ is defined by

$$X^{s,p,\beta}(\Omega) := \Big\{\phi \in L^p(\Omega, \frac{dx}{|x|^{2\beta}}) : \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} < +\infty\Big\}.$$

Thus $X^{s,p,\beta}(\Omega)$ is a Banach space endowed with the norm

$$\|\phi\|_{X^{s,p,\beta}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \frac{|\phi(x)|^p dx}{|x|^{2\beta}}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Now, we define the weighted Sobolev space $X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ as the completion of $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ with respect to the previous norm.

As in [3], see also [12], we can prove the following extension result.

Lemma 2.1. *Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a regular domain, then for all $w \in X^{s,p,\beta}(\Omega)$, there exists $\tilde{w} \in X^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$ such that $\tilde{w}_{|\Omega} = w$ and*

$$||\tilde{w}||_{X^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||w||_{X^{s,p,\beta}(\Omega)}$$

where $C \equiv C(N, s, p, \Omega) > 0$.

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Remark 2.2. As in the case $\beta = 0$, if Ω is bounded regular domain, we can endow $X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ with the equivalent norm

$$|||\phi|||_{X_0^{s,p,\beta}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Now, for $w \in X^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$, we set

$$L_{s,p,\beta}(w)(x) = \text{ P.V.} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dy}{|x|^\beta|y|^\beta}.$$

It is clear that for all $w, v \in X^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$, we have

$$\langle L_{s,p,\beta}(w), v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}.$$

In the case where $\beta = 0$, we denote $L_{s,p,\beta}$ by $L_{s,p}$.

Let begin by proving the next version of the Picone inequality.

Lemma 2.3 *(Picone inequality). Let $w \in X_0^{s,p,\beta}(\Omega)$ be such that $w > 0$ in Ω. Assume that $L_{s,p,\beta}(w) = \nu$ with $\nu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ and $\nu \gneqq 0$, then for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, we have*

$$\frac{1}{2}\int\int\limits_{Q} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta} \geqslant \langle L_{s,p,\beta}w, \frac{|u|^p}{w^{p-1}}\rangle.$$

Proof. The case $\beta = 0$ is obtained in [20] if $p = 2$ and in [6] if $p \neq 2$. For the reader convenience we include some details for the general case $\beta \neq 0$.

We set $v(x) = \dfrac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}}$ and $k(x,y) = \dfrac{1}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}$, then

$$\begin{aligned}\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle &= \int\limits_{\Omega} v(x)\int\limits_{\mathbb{R}^N} |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx\\ &= \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Since k is symmetric, we obtain that

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle =$$
$$\frac{1}{2}\int\int\limits_{Q}\left(\frac{|u(x)|^p}{|w(x)|^{p-1}} - \frac{|u(y)|^p}{|w(y)|^{p-1}}\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.$$

Let $v_1 = \dfrac{u}{w}$, then

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle =$$
$$\frac{1}{2}\int\int_Q \left(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y))k(x,y)\,dy\,dx.$$

Define

$$\Phi(x,y) = |u(x)-u(y)|^p - \left(|v_1(x)|^p w(x) - |v_1(y)|^p w(y)\right)|w(x)-w(y)|^{p-2}(w(x)-w(y)),$$

then

$$\langle L_{s,p,\beta}(w(x)), v(x)\rangle + \frac{1}{2}\int_Q \Phi(x,y)k(x,y)\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\int_Q |u(x)-u(y)|^p k(x,y)\,dy\,dx.$$

We claim that $\Phi \geqslant 0$. It is clear that, by a symmetry argument, we can assume that $w(x) \geqslant w(y)$. Let $t = w(y)/w(x), a = u(x)/u(y)$, then using inequality (1.11), the claim follows at once. Hence we conclude. □

As a consequence, for $\beta = 0$, we have the next comparison principle that extends, to the fractional framework, the classical one obtained by Brezis–Kamin in [8].

Lemma 2.4. *Let Ω be a bounded domain and let f be a nonnegative continuous function such that $f(\sigma) > 0$ if $\sigma > 0$ and $\dfrac{f(\sigma)}{\sigma^{p-1}}$ is decreasing. Let $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ be such that $u, v > 0$ in Ω and*

$$\begin{cases} L_{s,p}u \geqslant f(u) \text{ in } \Omega, \\ L_{s,p}v \leqslant f(v) \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

Then, $u \geqslant v$ in Ω.

Proof. Using an approximation argument, taking in consideration that $u, v > 0$, we can prove that

$$\frac{L_{s,p}u}{u^{p-1}} - \frac{L_{s,p}v}{v^{p-1}} \geqslant \left(\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\right). \tag{2.12}$$

We set $\xi = (v^p - u^p)_+$, then

$$\int_\Omega \left(\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\right)\xi\,dx \leqslant \int_\Omega \xi\left(\frac{L_{s,p}u}{u^{p-1}} - \frac{L_{s,p}v}{v^{p-1}}\right)dx. \tag{2.13}$$

Let us analyze each term in the previous inequality.

Using the definition of ξ we obtain that $\Big(\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\Big)\xi \geqslant 0$. On the other hand, we have

$$\begin{aligned}
J &\equiv \int\limits_{\Omega} \xi\Big(\frac{L_{s,p}u}{u^{p-1}} - \frac{L_{s,p}v}{v^{p-1}}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{\xi(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{\xi(y)}{u^{p-1}(y)}\Big)\,dxdy \\
&- \frac{1}{2}\int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{\xi(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{\xi(y)}{v^{p-1}(y)}\Big)\,dxdy,
\end{aligned}$$

where $Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$.

Notice that

$$\begin{aligned}
&|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\Big(\frac{\xi(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{\xi(y)}{u^{p-1}(y)}\Big) = \\
&|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\Big(\frac{v^p(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{v^p(y)}{u^{p-1}(y)}\Big) - |u(x)-u(y)|^p.
\end{aligned}$$

In the same way, we obtain that

$$\begin{aligned}
&|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\Big(\frac{\xi(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{\xi(y)}{v^{p-1}(y)}\Big) = \\
&-|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\Big(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\Big) + |v(x)-v(y)|^p.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
J &= \int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{v^p(x)}{u^{p-1}(x)} - \frac{v^p(y)}{u^{p-1}(y)}\Big)dxdy \\
&+ \int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\Big(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\Big)dxdy \\
&- \int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - \int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dxdy \\
&= \cancel{\frac{1}{2}}\int\limits_{\Omega} \frac{L_{p,s}(u)}{u^{p-1}} v^p\,dx + \cancel{\frac{1}{2}}\int\limits_{\Omega} \frac{L_{p,s}(v)}{v^{p-1}} u^p\,dx - \int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dxdy \\
&- \int\!\!\int\limits_{Q} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,dxdy.
\end{aligned}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Now, using Picone's inequality, we conclude that $J \leqslant 0$. Thus

$$\Big(\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\Big)\xi \equiv 0$$

and then $\xi = 0$ which implies that $u \leqslant v$ in Ω. $\square$

Remark 2.5. The comparison result holds if we replace $f(s)$ by $g(s,x)$ where g is continuous in s for a.e. $x \in \Omega$, $\dfrac{g(s,x)}{s}$ is decreasing for $s > 0$ and $g(s,x) > 0$ in Ω for all $s > 0$ fixed.

In the sequel we need the next results.

Lemma 2.6. *Fix $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$ and let $w(x) = |x|^{-\gamma}$ with $0 < \gamma < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$, then there exists a positive constant $\Lambda(\gamma) > 0$ such that*

$$L_{s,p,\beta}(w) = \Lambda(\gamma)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N \backslash \{0\}. \tag{2.14}$$

Proof. We set $r = |x|$ and $\rho = |y|$, then $x = rx', y = \rho y'$ where $|x'| = |y'| = 1$. Thus

$$L_{s,p,\beta}(w) = \frac{1}{|x|^\beta}\int_0^{+\infty} |r^{-\gamma} - \rho^{-\gamma}|^{p-2}\frac{(r^{-\gamma} - \rho^{-\gamma})\rho^{N-1}}{\rho^\beta r^{N+ps}}\left(\int_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \frac{\rho}{r}y'|^{N+ps}}\right) d\rho.$$

Let $\sigma = \dfrac{\rho}{r}$, then

$$L_{s,p,\beta}(w) = \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps+2\beta}}\int_0^{+\infty} |1 - \sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1 - \sigma^{-\gamma})\sigma^{N-\beta-1}\left(\int_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{N+ps}}\right) d\sigma.$$

Defining

$$K(\sigma) = \int_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|x' - \sigma y'|^{N+ps}},$$

as in [15], we obtain that

$$K(\sigma) = 2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})}\int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1 - 2\sigma\cos(\theta) + \sigma^2)^{\frac{N+ps}{2}}} d\theta. \tag{2.15}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Hence

$$L_{s,p,\beta}(w) = \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps+2\beta}} \int_0^{+\infty} \psi(\sigma)\, d\sigma,$$

with

$$\psi(\sigma) = |1-\sigma^{-\gamma}|^{p-2}(1-\sigma^{-\gamma})\sigma^{N-\beta-1}K(\sigma). \tag{2.16}$$

Define $\Lambda(\gamma) \equiv \int_0^{+\infty} \psi(\sigma)\, d\sigma$, then to finish we just have to show that $0 < \Lambda(\gamma) < \infty$.

We have

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^1 \psi(\sigma)\, d\sigma + \int_1^\infty \psi(\sigma)\, d\sigma = I_1 + I_2.$$

Notice that $K(\frac{1}{\xi}) = \xi^{N+ps}K(\xi)$ for any $\xi > 0$, then using the change of variable $\xi = \frac{1}{\sigma}$ in I_1, there results that

$$\Lambda(\gamma) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) d\sigma. \tag{2.17}$$

As $\sigma \to \infty$, we have

$$K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) \backsimeq \sigma^{-1-\beta-ps} \in L^1(2,\infty).$$

Now, as, $\sigma \to 1$, we have

$$K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) \backsimeq (\sigma-1)^{p-1-ps} \in L^1(1,2).$$

Therefore, combining the above estimates, we get $|\Lambda(\gamma)| < \infty$. Now, using the fact that $0 < \gamma < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$, from (2.17), we reach that $\Lambda(\gamma) > 0$.

As a conclusion, we have proved that

$$L_{s,p,\beta}(w) = \Lambda(\gamma)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \quad a.e. \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Hence the result follows. □

As a consequence we have the following weighted Hardy inequality.

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Theorem 2.7. *Let $\beta < \frac{N-ps}{2}$, then for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, we have*

$$2\Lambda(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}, \tag{2.18}$$

where $\Lambda(\gamma)$ is defined in (2.17).

Proof. Let $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ and $w(x) = |x|^{-\gamma}$ with $\gamma < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$. By Lemma 2.6, we have

$$L_{p,s,\beta}(w) = \Lambda(\gamma) \frac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}.$$

It is clear that $\dfrac{w^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Thus using Picone inequality in Lemma 2.3, it follows that

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geqslant \langle L_{p,s,\beta} w, \frac{|u|^p}{w^{p-1}} \rangle = \Lambda(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx.$$

Thus we conclude. □

Remark 2.8. Let analyze the behavior of the constant $\Lambda(\gamma)$ in inequality (2.18). Recall that, for $\gamma < \dfrac{N-ps-2\beta}{p-1}$,

$$\Lambda(\gamma) = \int\limits_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1} \left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps-1}\right) d\sigma,$$

then

$$\Lambda'(\gamma) = (p-1) \int\limits_1^{+\infty} K(\sigma)\log(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-2} \left(\sigma^{N-1-\beta-\gamma(p-1)} - \sigma^{\beta+ps+\gamma-1}\right) d\sigma.$$

It is clear that if $\gamma_0 = \frac{N-\beta-ps}{p}$, then $\Lambda'(\gamma_0) = 0$, $\Lambda'(\gamma) > 0$ if $\gamma < \gamma_0$ and $\Lambda'(\gamma) < 0$ if $\gamma > \gamma_0$. Thus

$$\max_{\{0<\gamma<\frac{N-ps-2\beta}{p-1}\}} \Lambda(\gamma) = \Lambda(\gamma_0).$$

Hence

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geqslant 2\Lambda(\gamma_0) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx. \tag{2.19}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Notice that for $\beta = 0$, then $2\Lambda(\gamma_0) = 2\Lambda(\frac{N-ps}{p}) \equiv \Lambda_{N,p,s}$ given in (1.3). Therefore, we have the next optimality result.

Theorem 2.9. *Define*

$$\Lambda_{N,p,s,\gamma} = \inf_{\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)\setminus 0\}} \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}dxdy}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}dx},$$

then $\Lambda_{N,p,s,\gamma} = 2\Lambda(\gamma_0)$.

Proof. From (2.19), it follows that $\Lambda_{N,p,s,\gamma} \geqslant 2\Lambda(\gamma_0)$, hence to conclude we have just to prove the reverse inequality.

We closely follow the argument used in [17].

Let $w_0(x) = |x|^{-\gamma_0}$, by Lemma 2.6, we have

$$L_{p,s,\beta}(w_0) = \Lambda(\gamma_0)\frac{w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}.$$

We set

$$M_n = \{x \in \mathbb{R}^N : 1 \leqslant |x| < n\} \text{ and } O_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geqslant n\},$$

and define

$$w_n = \begin{cases} 1 - n^{-\gamma_0} & \text{if } \ x \in B_1(0), \\ |x|^{-\gamma_0} - n^{-\gamma_0} & \text{if } \ x \in M_n, \\ 0 & \text{if } \ x \in O_n. \end{cases}$$

By a direct computation, we get easily that $w_n \in X_0^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)$.

Hence

$$\langle L_{p,s,\beta}(w_0), w_n\rangle = \Lambda(\gamma_0)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}dx.$$

Thus

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{(w_n(x)-w_n(y))|w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y))}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}dxdy$$

$$= 2\Lambda(\gamma_0)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}dx.$$

Let analyze each term in the previous identity. As in [17] we obtain that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{(w_n(x)-w_n(y))|w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y))}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}\,dxdy$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}\,dxdy.$$

On the other hand we have

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{w_n w_0^{p-1}}{|x|^{ps+2\beta}}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{w_n^p}{|x|^{ps+2\beta}}dx + I_n + J_n,$$

where

$$I_n = \int\limits_{B_1(0)} (1-n^{-\gamma_0})(w_0^{p-1} - (1-n^{-\gamma_0})^{p-1})\frac{dx}{|x|^{ps+\beta}},$$

and

$$J_n = \int\limits_{M_n} (w_0(x)-n^{-\gamma_0})(w_0^{p-1} - (w_0(x)-n^{-\gamma_0})^{p-1})\frac{dx}{|x|^{ps+\beta}}.$$

It is clear that $I_n, J_n \geqslant 0$, using a direct computation we can prove that

$$I_n + J_n \leqslant C \text{ for all } n \geqslant 1.$$

Thus, combining the above estimates, it holds

$$\Lambda_{N,p,s,\gamma} \leqslant \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta}|y|^{\beta}}dxdy}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}}dx} \tag{2.20}$$

$$\leqslant 2\Lambda(\gamma_0)\Big(1 + \frac{I_n + J_n}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}}dx}\Big). \tag{2.21}$$

Since $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_n(x)|^p}{|x|^{ps+\beta}}dx \uparrow \infty$ as $n \to \infty$, then passing to the limit in (2.20), it follows that

$$\Lambda_{N,p,s,\gamma} \leqslant 2\Lambda(\gamma_0)$$

and then the result follows. □

In the sequel we need to use a version of the Hardy inequality in bounded domains. More precisely, we have the next result.

Lemma 2.10. *Let Ω be a bounded regular domain such that $0 \in \Omega$, then there exists a constant $C \equiv C(\Omega, s, p, N) > 0$ such that for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, we have*

$$C \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.22}$$

Proof. Fix $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ and let $\tilde{u}$, be the extension of u to $\mathbb{R}^N$ defined in Lemma 2.1. Then from Theorem 2.7, we get

$$2\Lambda(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \leqslant ||\tilde{u}||^p_{X^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||^p_{X^{s,p,\beta}(\Omega)}.$$

Since $\tilde{u}_{|\Omega} = u$, form Remark 2.2 we conclude that

$$\begin{aligned} 2\Lambda(\gamma) \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps+2\beta}}\,dx &\leqslant C||u||^p_{X^{s,p,\beta}(\Omega)} \\ &\leqslant C_1|||u|||^p_{X_0^{s,p,\beta}(\Omega)} = C_1 \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}. \end{aligned}$$

Hence we reach the desired result. □

Now, we are able to proof Theorem 1.3.

Proof of Theorem 1.3. We follow closely the arguments used in [2]. Let $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ and define $\alpha = \dfrac{N-ps}{p}$, then $w(x) = |x|^{-\alpha}$ and $v(x) = \dfrac{u(x)}{w(x)}$.

Recall that from the result of [17], we have

$$h_s(u) \geqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{2.23}$$

Let us analyze the right hand side of the previous inequality.

Notice that

$$\begin{aligned} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}} &= \frac{|w(y)u(x)-w(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{1}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}} \\ &= \frac{\left|(u(x)-u(y)) - \dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}} \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \\ &= f_1(x,y). \end{aligned}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

In the same way, thanks to the symmetry of $f_1(x,y)$, it immediately follows that

$$\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,(w(x))^{\frac{p}{2}}(w(y))^{\frac{p}{2}} = \frac{\left|(u(y)-u(x)) - \dfrac{u(x)}{w(x)}(w(y)-w(x))\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}$$
$$= f_2(x,y).$$

Hence,

$$h_s(u) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Since f_1 and f_2 are positive functions, it follows that

$$h_s(u) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} f_1(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Using the fact that Ω is a bounded domain, we obtain that for all $(x,y)\in(\Omega\times\Omega)$ and $q<p$,

$$\frac{1}{|x-y|^{N+ps}} \geqslant \frac{C(\Omega)}{|x-y|^{N+qs}}$$

and

$$Q(x,y) \equiv \frac{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}}{w(x)^p + w(y)^p} \leqslant C.$$

Define

$$D(x,y) \equiv \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \equiv \frac{w(x)^p + w(y)^p}{(w(x)w(y))^{\frac{p}{2}}},$$

then $Q(x,y)D(x,y)=1$. Thus

$$f_1(x,y) \geqslant C(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$
$$\Big[\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} - p\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+qs}}\Big\langle u(x)-u(y), \frac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))\Big\rangle$$
$$+C(p)\frac{|\dfrac{u(y)}{w(y)}(w(x)-w(y))|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big].$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Hence

$$f_1(x,y) \geqslant \Big[C(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big] - \Big[pC(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big].$$

In the same way we reach that

$$f_2(x,y) \geqslant \Big[C(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\Big] - \Big[pC(\Omega)Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big].$$

Therefore,

$$\begin{aligned} h_s(u) \geqslant{}& C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega Q(x,y)\Big(\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\Big)\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\ &- pC(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega \Big[Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy \\ &- pC(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega \Big[Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|\Big]\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} h_s(u) \geqslant{}& C(\Omega)\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy \\ &- C_1(\Omega,p)\int_\Omega\int_\Omega \big(h_1(x,y)+h_2(x,y)\big)\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{2.24}$$

with

$$h_1(x,y) = Q(x,y)\left(\frac{w(y)}{w(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(y)}{w(y)}\Big||(w(x)-w(y))|,$$

$$h_2(x,y) = Q(x,y)\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+qs}}\Big|\frac{u(x)}{w(x)}\Big||(w(x)-w(y))|.$$

Since $h_1(x,y)$ and $h_2(x,y)$ are symmetric functions, we just have to estimate $\int_\Omega\int_\Omega h_2(x,y)\,dx\,dy$.

Using Young inequality, we get

$$\int_\Omega\int_\Omega h_2(x,y)dxdy \leqslant \varepsilon \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\,dx\,dy + C(\varepsilon)\int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,dx\,dy, \tag{2.25}$$

with

$$G(x,y) = (Q(x,y))^p \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{\frac{p^2}{2}} \left|\frac{u(x)}{w(x)}\right|^p \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}.$$

We claim that

$$I \equiv \int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,dx\,dy \leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}}\frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}.$$

Notice that

$$I = \int_\Omega\int_\Omega \frac{(u(x))^p}{|x-y|^{N+qs}}\frac{(w(x))^{p^2-p}|w(x)-w(y)|^p}{(w(x)^p+w(y)^p)^p}\,dx\,dy,$$

then

$$I = \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega \frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|y|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx.$$

To compute the above integral, we closely follow the arguments used in [15]. We set $y=\rho y'$ and $x=rx'$ with $|x'|=|y'|=1$, then taking in consideration that $\Omega\subset B_0(R)$, it follows that

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega u^p(x)\Big[\int_\Omega \frac{||x|^\alpha-|y|^\alpha|^p}{(|x|^{\alpha p}+|x|^{\alpha p})^p}\frac{|y|^{\alpha p(p-1)}}{|x-y|^{N+qs}}\,dy\Big]\,dx \\ &\leqslant \int_\Omega u^p(x)\int_0^R \frac{(|r^\alpha-\rho^\alpha|^p\rho^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(r^{p\alpha}+\rho^{p\alpha})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\rho y'-rx'|^{N+qs}}\Big)d\rho dx. \end{aligned}$$

We set $\rho = r\sigma$, then

$$I \leqslant \int_\Omega \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}}\int_0^{\frac{R}{r}} \frac{|1-\sigma^\alpha|^p\sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{dy'}{|\sigma y'-x'|^{N+qs}}\Big)d\sigma dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} \int_0^{\frac{R}{r}} \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma dx \leqslant \mu \int_{\Omega} \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} dx,$$

where

$$\mu = \int_0^\infty \frac{|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma$$

and

$$K(\sigma) = 2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\theta)}{(1-2\sigma\cos(\theta)+\sigma^2)^{\frac{N+qs}{2}}} d\theta.$$

Let us show that $\mu < \infty$.

It is clear that, as $\sigma \to \infty$, we have

$$\frac{(|1-\sigma^\alpha|^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) \simeq \sigma^{-1-qs} \in L^1(1,\infty).$$

Now, taking in consideration that $K(\sigma) \leqslant C|1-\sigma|^{-1-ps}$ as $s \to 1$, and following the same computation as in Lemma 2.6, it follows that

$$\int_0^1 \frac{(1-\sigma^\alpha)^p \sigma^{\alpha p(p-1)+N-1}}{(1+\sigma^{\alpha p})^p} K(\sigma) d\sigma < \infty.$$

Thus $\mu < \infty$.

Hence combining the above estimates, there results that

$$I \leqslant C \int_{\Omega} \frac{u^p(x)}{|x|^{qs}} dx.$$

Since $u(x) = v(x)|x|^{-(\frac{N-ps}{p})}$, then

$$I \leqslant C \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^p}{|x|^{N-s(p-q)}} dx.$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Let $\beta_0 = \frac{N-ps}{2} + \frac{(q-p)s}{2}$, then $\beta_0 < \frac{N-ps}{2}$. Applying Lemma 2.10, we obtain that

$$\begin{aligned} I &\leqslant C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\beta_0}|y|^{\beta_0}}\, dy\, dx \\ &\leqslant C_1(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\frac{N-ps}{2}}|y|^{\frac{N-ps}{2}}}\, dy\, dx \\ &\leqslant C_1(\Omega) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}|x|^{\frac{N-ps}{2}}|y|^{\frac{N-ps}{2}}}\, dy\, dx. \end{aligned}$$

Therefore, using again estimate (2.23), we reach that

$$I \leqslant C_2(\Omega) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}$$

and the claim follows.

As a direct consequence of the above estimates, we have proved that

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leqslant C_3 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}. \tag{2.26}$$

Thus

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leqslant C h_s(u),$$

and the result follows at once. □

We are now in position to prove the Theorem 1.4.

Proof of Theorem 1.4. Recall that $\alpha = \frac{N-ps}{p}$. Since $\alpha p^*_{s,q} = \frac{N(N-ps)}{N-qs} < N$, it follows that $\int_\Omega \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{\alpha p^*_{s,q}}}\, dx < \infty$, for all $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

To prove (1.7), we will use estimate (2.26) and the fractional Sobolev inequality.

Fix $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ and define $u_1(x) = \dfrac{u(x)}{|x|^\alpha}$. By (2.26), we obtain that

$$C(\Omega) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\frac{N-ps}{2}}} \frac{dy}{|y|^{\frac{N-ps}{2}}}.$$

Now, using Sobolev inequality, there results that

$$S\Big(\int_\Omega |u_1(x)|^{p^*_{s,q}} dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \leqslant \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}\, dx\, dy,$$

where $p^*_{s,q} = \frac{pN}{N-qs}$. Hence, substituting u_1 by its value, we get

$$\Big(\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{\alpha p^*_{s,q}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.27}$$

If we set $\beta = \frac{N-ps}{2} = \alpha\frac{p}{2}$, then inequality (2.27) can be written in the form

$$\Big(\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}} \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}. \quad \square \tag{2.28}$$

As a consequence, we will prove the fractional Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality given in Theorem 1.5.

Proof of Theorem 1.5. Let $u \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N)$, without loss of generality, we can assume that $u \geqslant 0$. Using the fact that $\beta < \frac{N-ps}{2}$, we easily get that $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p^*_s}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_s}{p}}}\,dx < \infty$.

From now and for simplicity of typing, we denote by $C, C_1, C_2, \ldots$ any universal constant that does not depend on u and can change from a line to another.

We set $\tilde{u}(x) = \dfrac{u(x)}{w_1(x)}$, where $w_1(x) = |x|^{\frac{2\beta}{p}}$, then

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p^*_s}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_s}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_s}} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{p^*_s}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_s}}. \tag{2.29}$$

Using Sobolev inequality, it follows that

$$S\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{p^*_s}\,dx\Big)^{\frac{p}{p^*_s}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy. \tag{2.30}$$

To get the desired result we just have to show that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \tag{2.31}$$

for some positive constant C.

Using the definition of $\tilde{u}$, we get

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{dy}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)}.$$

Notice that

$$\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)}=$$

$$\frac{\left|(\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y))-w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\equiv\tilde{f}_1(x,y).$$

In the same way we have

$$\frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)-w_1(y)\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(x)}\frac{1}{w_1^{\frac{p}{2}}(y)}=$$

$$\frac{\left|(\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x))-w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}}\equiv\tilde{f}_2(x,y).$$

Since

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{f}_1(x,y)dxdy=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{f}_2(x,y)dxdy,$$

we get

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{f}_1(x,y)dxdy+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{f}_2(x,y)dxdy.$$

Notice that

$$\tilde{f}_1(x,y)\geqslant\left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\times$$

$$\Big[\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}-p\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+ps}}\Big\langle\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y),w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})\Big\rangle$$

$$+C(p)\frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}\Big].$$

Hence

$$\tilde{f}_1(x,y)\geqslant\left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\times$$

$$\Big[\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}-p\frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}}|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|\Big].$$

Using Young inequality, we get the existence of $C_1, C_2 > 0$ such that

$$\tilde{f}_1(x,y) \geqslant \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$

$$\Big[C_1 \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2 \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)} - \frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big].$$

In the same way and using that $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ are symmetric functions, it holds

$$f_2(x,y) \geqslant \left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \times$$

$$\Big[C_1 \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} - C_2 \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)} - \frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}|\Big].$$

Thus we get the existence of positive constants C_1, C_2, C_3 such that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geqslant$$

$$C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \Big[\left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\Big] dxdy$$

$$-C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(y)\tilde{u}(y)(\frac{1}{w_1(x)} - \frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}|dxdy$$

$$-C_3 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{|w_1(x)\tilde{u}(x)(\frac{1}{w_1(y)} - \frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+qs}} dxdy.$$

Since

$$\Big[\left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac{p}{2}}\Big] \geqslant 1,$$

then

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\tilde u(x)-\tilde u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy &\leqslant C_1\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}\\ &+C_2\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac p2}\frac{|w_1(y)\tilde u(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}|dxdy\\ &+C_3\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac p2}\frac{|w_1(x)\tilde u(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy.\end{aligned}\tag{2.32}$$

We set

$$g_1(x,y)=\left(\frac{w_1(y)}{w_1(x)}\right)^{\frac p2}\frac{|w_1(x)\tilde u(x)(\frac{1}{w_1(y)}-\frac{1}{w_1(x)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}$$

and

$$g_2(x,y)=\left(\frac{w_1(x)}{w_1(y)}\right)^{\frac p2}\frac{|w_1(y)\tilde u(y)(\frac{1}{w_1(x)}-\frac{1}{w_1(y)})|^p}{|x-y|^{N+ps}}.$$

It is clear that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}g_1(x,y)dxdy=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}g_2(x,y)dxdy,$$

therefore, to get the desired result, we just have to show that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}g_1(x,y)dxdy\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta}.$$

Going back to the definition of $\tilde u$ and w_1, we reach that

$$g_1(x,y)=\frac{|u(x)|^p\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}}-|y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^\beta|x-y|^{N+ps}}.$$

We closely follow the same type of computation as in the proof of Lemma 2.6.

We have

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}g_1(x,y)dxdy&=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}}-|y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|x|^{3\beta}|y|^\beta|x-y|^{N+ps}}dxdy\\ &=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\Big||x|^{\frac{2\beta}{p}}-|y|^{\frac{2\beta}{p}}\Big|^p}{|y|^\beta|x-y|^{N+ps}}dy\Big)dx.\end{aligned}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

We set $r = |x|$ and $\rho = |y|$, then $x = rx', y = \rho y'$ with $|x'| = |y'| = 1$, then

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|y|^\beta |x-y|^{N+ps}} dy \Big) dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big[\int_0^{+\infty} \frac{|r^{\frac{2\beta}{p}} - \rho^{\frac{2\beta}{p}}|^p \rho^{N-1}}{\rho^\beta} \left(\int_{|y'|=1} \frac{dH^{n-1}(y')}{|rx' - \rho y'|^{N+ps}} \right) d\rho \Big] dx.$$

Let $\sigma = \frac{\rho}{r}$, then

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{3\beta}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Big| |x|^{\frac{2\beta}{p}} - |y|^{\frac{2\beta}{p}} \Big|^p}{|y|^\beta |x-y|^{N+ps}} dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} \Big[\int_0^{+\infty} |1 - \sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-\beta} K(\sigma)\, d\sigma \Big] dx,$$

where K is defined in (2.15). Since

$$\int_0^{+\infty} |1 - \sigma^{\frac{2\beta}{p}}|^p \sigma^{N-1-\beta} K(\sigma)\, d\sigma \equiv C_3 < \infty,$$

it follows that

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} g_1(x,y) dx dy = C_3 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{2\beta+ps}} dx.$$

Now, using inequality (2.18), we get

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} g_1(x,y) dx dy \leqslant C_4 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta}. \tag{2.33}$$

Combining (2.29), (2.30), (2.33) and (2.32), we reach the desired result. □

In the case where Ω is a regular bounded domain containing the origin, we have the following *version* of Theorem 1.5.

Theorem 2.11. *Assume that Ω is a regular bounded domain with $0 \in \Omega$, then there exists a positive constant $C \equiv C(\Omega, N, p, s, \beta)$ such that for all $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, we have*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta} \frac{dy}{|y|^\beta} \geqslant C \Big(\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta \frac{p_s^*}{p}}} dx \Big)^{\frac{p}{p_s^*}}. \tag{2.34}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Proof. Let $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ and define $\tilde{\phi}$ to be the extension of ϕ to $\mathbb{R}^N$ given in Lemma 2.1, then using the fact that Ω is a regular bounded domain, we reach that

$$||\tilde{\phi}||_{X^{s,p,\beta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1||\phi||_{X^{s,p,\beta}(\Omega)} \leqslant C_1\Big(\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dxdy}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Now, applying Theorem 1.5 to $\tilde{\phi}$, it follows that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{\phi}(x)-\tilde{\phi}(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \geqslant S(\beta)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\tilde{\phi}(x)|^{p_s^*}}{|x|^{2\beta\frac{p_s^*}{p}}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p_s^*}}.$$

Hence combining the above estimates we get the desired result. □

3. Application

In this section we deal with the next problem

$$\begin{cases} L_{p,s}\,u = \lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}} + u^q, & u>0 \text{ in } \Omega,\\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{3.35}$$

where

$$L_{s,p}\,u := \text{ P.V.}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\,dy,$$

and $0<\lambda\leqslant\Lambda_{N,p,s}$.

In the case where $0<q<p-1$, the existence result follows using variational arguments. More precisely we have:

(1) If $\lambda<\Lambda_{N,p,s}$, then the existence of a solution u to (3.35) follows using classical minimizing argument. In this case $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$.
(2) If $\lambda=\Lambda_{N,p,s}$, the existence result follows using the improved Hardy inequality in Theorem 1.3. In this case u satisfies $h_{s,\Omega}(u)<\infty$ where $h_{s,\Omega}$ is defined by

$$h_{s,\Omega}(u)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy - \Lambda_{N,p,s}\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}dx. \tag{3.36}$$

This clearly implies that

$$\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}}dxdy<\infty \text{ for all } q<p.$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

We deal now with the case $q > p-1$.

Define $w(x) = |x|^{-\gamma}$ with $0 < \gamma < \dfrac{N-ps}{p-1}$, then we have previously obtained that

$$L_{s,p}(w) = \Lambda(\gamma)\frac{w^{p-1}}{|x|^{ps}} \quad a.e. \text{ in } \mathbb{R}^N\backslash\{0\},$$

where

$$\Lambda(\gamma) = \int_1^{+\infty} K(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-1}\left(\sigma^{N-1-\gamma(p-1)} - \sigma^{ps-1}\right) d\sigma,$$

and K is given by (2.15). Let us begin by proving the next lemma.

Lemma 3.1. *Assume that $0 < \lambda < \Lambda_{N,p,s}$, then there exist γ_1, γ_2 such that*

$$0 < \gamma_1 < \frac{N-ps}{p} < \gamma_2,$$

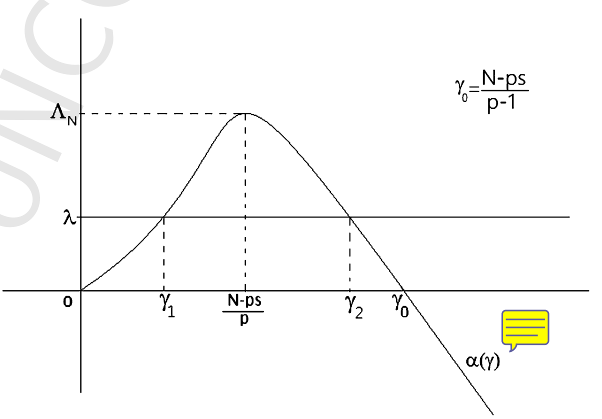
and $\Lambda(\gamma_1) = \Lambda(\gamma_2) = \lambda$.

Proof. We have $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(\frac{N-ps}{p}) = \Lambda_{N,p,s}$, $\Lambda(\gamma) < 0$ if $\gamma > \frac{N-ps}{p-1}$ and

$$\Lambda'(\gamma) = (p-1)\int_1^{+\infty} K(\sigma)\log(\sigma)(\sigma^\gamma - 1)^{p-2}\left(\sigma^{N-1-\gamma(p-1)} - \sigma^{ps+\gamma-1}\right) d\sigma.$$

It is clear that for $\gamma_0 = \frac{N-ps}{p}$, we have $\Lambda'(\gamma_0) = 0$, $\Lambda'(\gamma) > 0$ if $\gamma < \gamma_0$ and $\Lambda'(\gamma) < 0$ if $\gamma > \gamma_0$.

Hence, since $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$, we get the existence of $0 < \gamma_1 < \frac{N-ps}{p} < \gamma_2 < \frac{N-ps}{p-1}$ such that $\Lambda(\gamma_1) = \Lambda(\gamma_2) = \lambda$. $\square$



Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Define $q_+(p,s) = p - 1 + \frac{ps}{\gamma_1}$, it is clear that $p_s^* - 1 < q_+(p,s)$. We have the next existence result.

Theorem 3.2. *Assume that $q < q_+(p,s)$, then*

(1) *If $p-1 < q < p_s^* - 1$, problem* (3.35) *has a solution u. Moreover, $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ if $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$ and $h_{s,\Omega}(u) < \infty$ if $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$ where $h_{s,\Omega}$ is defined in* (3.36).
(2) *If $p_s^* - 1 \leqslant q < q_+(p,s)$, then problem* (3.35) *has a positive supersolution u.*

Proof. Let us begin with the case where $p-1 < q < p_s^* - 1$. If $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$, then using the Mountain Pass Theorem, see [23], we get a positive solution $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$. However, if $\lambda = \Lambda_{N,p,s}$, then using the improved Hardy inequality in Theorem 1.3 and the Mountain Pass Theorem, we reach a positive solution u to problem (3.35) with $h_{s,\Omega}(u) < \infty$.

Assume now that $p_s^* - 1 \leqslant q < q_+(p,s)$ and fix $\lambda_1 \in (\lambda, \Lambda_{N,p,s})$ to be chosen later.

Let $\gamma_1 \in (0, \frac{N-ps}{p})$ be such that $\Gamma(\gamma_1) = \lambda_1$ and set $w(x) = |x|^{-\gamma_1}$, then

$$L_{s,p}(w) = \lambda_1 \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} \quad a.e. \text{ in } \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$$

with $\dfrac{w^{p-1}}{|x|^{ps}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Hence

$$L_{s,p}(w) = \lambda \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} + (\lambda_1 - \lambda) \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} \quad a.e. \text{ in } \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Using the fact that $q < q_+(p,s)$, we can choose $\lambda_1 > \lambda$, very close to λ such that $\gamma_1(p-1) + ps > q\gamma_1$, thus, in any bounded domain Ω, we have

$$(\lambda_1 - \lambda) \frac{w^{p-1}(x)}{|x|^{ps}} \geqslant C(\Omega) w^q.$$

Define $\hat{w} = Cw$, by the previous estimates, we can choose $C(\Omega) > 0$ such that $\hat{w}$ will be a supersolution to (3.35) in Ω. Hence the result follows. $\square$

Now, we show the optimality of the exponent $q_+(p,s)$. We have the following non-existence result.

Theorem 3.3. *Let $q_+(p,s) = p - 1 + \frac{ps}{\gamma_1}$. If $q > q_+(p,s)$, then the unique nonnegative supersolution $u \in W^{s,p}_{loc}(\Omega)$ to problem* (3.35) *is $u \equiv 0$.*

We first prove the next lemma which shows that the Hardy constant is independent of the domain.

Lemma 3.4. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a regular domain such that $0 \in \Omega$. Define*

$$\Lambda(\Omega) = \inf_{\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\setminus 0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx},$$

then $\Lambda(\Omega) = \Lambda_{N,p,s}$ defined in (1.3).

Proof. Recall that

$$\Lambda_{N,p,s} = \inf_{\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)\setminus 0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx},$$

thus $\Lambda(\Omega) \geqslant \Lambda_{N,p,s}$. It is clear that if $\Omega_1 \subset \Omega_2$, then $\Lambda(\Omega_1) \geqslant \Lambda(\Omega_2)$.

Now, using a dilatation argument we can prove that $\Lambda(B_{R_1}(0)) = \Lambda(B_{R_2}(0))$ for all $0 < R_1 < R_2$. Hence we conclude that $\Lambda(\Omega) \equiv \bar{\Lambda}$ does not depend of the domain Ω.

For $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, we set

$$Q(\phi) \equiv \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}dx}.$$

Let $\{\phi_n\}_n \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ be such that $Q(\phi_n) \to \Lambda_{N,p,s}$. Without loss of generality and using a symmetrization argument we can assume that $\text{Supp}(\phi_n) \subset B_{R_n}(0)$. It is clear that $Q(\phi_n) \geqslant \Lambda(\text{Supp}(\phi_n)) = \bar{\Lambda}$, thus, as $n \to \infty$, it follows that $\bar{\Lambda} \leqslant \Lambda_{N,p,s}$. As a conclusion we reach that $\bar{\Lambda} = \Lambda_{N,p,s}$ and the result follows. □

We need the next lemma.

Lemma 3.5. *Let Ω be a bounded domain such that $0 \in \Omega$. Assume that $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ is such that $u \geqslant 0$ in $\mathbb{R}^N$, $u > 0$ in Ω and $L_{N,p,s}u \gneqq \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^{ps}}$ in Ω, then there exists $C > 0$ such that $u(x) \geqslant C|x|^{-\gamma_1}$ in $B_\eta(0)$ where γ_1 is defined in Lemma 3.1.*

Proof. Without loss of generality we can assume that $B_1(0) \subset \Omega$.

Fixed $\lambda < \Lambda_{N,p,s}$ and define

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} |x|^{-\gamma_1} - 1 & \text{if } |x| < 1, \\ 0 & \text{if } |x| > 1. \end{cases}$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

It is clear that $\tilde{w} \in W_0^{s,p}(B_1(0))$ and

$$\begin{cases} L_{p,s}\,\tilde{w} = h(x)\dfrac{\tilde{w}^{p-1}}{|x|^{ps}} \text{ in } B_1(0), \\ \qquad \tilde{w} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \end{cases} \tag{3.37}$$

where

$$h(x) = \int_0^{\frac{1}{|x|}} |1-\sigma^{-\tilde{\gamma}}|^{p-2}(1-\sigma^{-\tilde{\gamma}})\sigma^{N-1}K(\sigma)d\sigma + (1-|x|^{\tilde{\gamma}})\int_{\frac{1}{|x|}}^{\infty} \sigma^{N-1}K(\sigma)d\sigma.$$

Using the definition of γ_1, see Lemma 3.1, we can prove that $h(x) \leqslant \lambda$ for all $x \in B_1(0)$.

Since $L_{p,s}u \gneqq 0$ and $u > 0$ in Ω, then using the nonlocal weak Harnack inequality in [11], we get the existence of $\varepsilon > 0$ such that $u \geqslant \varepsilon$ in $\bar{B}_1(0)$.

Therefore we obtain that

$$\begin{cases} L_{p,s}\,u \geqslant \lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^p s} \text{ in } B_1(0), \\ L_{p,s}\,\tilde{w} \leqslant \lambda\dfrac{\tilde{w}^{p-1}}{|x|^{ps}}, \text{ in } B_1(0), \\ u \qquad \geqslant \tilde{w} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0). \end{cases} \tag{3.38}$$

Thus by the comparison principle in Lemma 2.4, it follows that $\tilde{w} \leqslant u$ which is the desired result. □

We are now in position to prove Theorem 3.3.

Proof of Theorem 3.3. We argue by contradiction. Assume the existence of $u \gneqq 0$ such that $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ and u is a supersolution to problem (3.35) in Ω, then $u > 0$ in Ω. Let $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\eta(0))$ with $B_\eta(0) \subset\subset \Omega$ and $\eta > 0$ to be chosen later.

Using Picone's inequality in Lemma 2.3, it follows that

$$||\phi||^p_{X_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \geqslant \int_{B_\eta(0)} \frac{L_{p,s}(u)}{u^{p-1}}|\phi|^p dx.$$

Thus

$$||\phi||^p_{X_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \geqslant \int_{B_\eta(0)} u^{q-(p-1)}|\phi|^p dx.$$

Since $q > q_+(p,s)$, we get the existence of $\varepsilon > 0$ such that

$$(\gamma_1 - \varepsilon)(q-(p-1)) > ps + \rho$$

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

for some $\rho > 0$. Thus, using Lemma 3.5, we can choose $\eta > 0$ such that

$$u^{q-(p-1)} \geqslant C|x|^{-ps-\rho} \text{ in } B_\eta(0).$$

Therefore

$$||\phi||^p_{X_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \geqslant C \int\limits_{B_\eta(0)} \frac{|\phi|^p}{|x|^{ps+\rho}} dx,$$

which is a contradiction with the optimality of the Hardy inequality proved in Lemma 3.4. Hence we conclude. □

Uncited references

[4] [10] [16] [19] [21]

References

[1] B. Abdellaoui, V. Felli, I. Peral, Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 9 (2) (2006) 445–484.

[2] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo, A remark on the fractional Hardy inequality with a remainder term, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 299–303.

[3] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[4] F.J. Almgren, E.H. Lieb, Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous, J. Amer. Math. Soc. 2 (4) (1989) 683–773.

[5] B. Barrios, M. Medina, I. Peral, Some remarks on the solvability of non-local elliptic problems with the Hardy potential, Commun. Contemp. Math. 16 (4) (2014) 1350046.

[6] B. Barrios, I. Peral, S. Vita, Some remarks about the summability of nonlocal nonlinear problems, Adv. Nonlinear Anal. 4 (2) (2015) 91–107.

[7] H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei, On a semilinear equation with inverse-square potential, Selecta Math. 11 (2005) 1–7.

[8] H. Brezis, S. Kamin, Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Manuscripta Math. 74 (1992) 87–106.

[9] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, First order interpolation inequalities with weights, Compos. Math. 53 (1984) 259–275.

[10] L.A. Caffarelli, L. Silvestre, An extension problem related to the fractional Laplacian, Comm. Partial Differential Equations 32 (7–9) (2007) 1245–1260.

[11] A. Di castro, T. Kuusi, G. Palatucci, Nonlocal Harnack inequalities, J. Funct. Anal. 267 (6) (2014) 1807–1836.

[12] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, Bull. Sci. Math. 136 (5) (2012) 521–573.

[13] E.B. Fabes, C.E. Kenig, R.P. Serapioni, The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations, Comm. Partial Differential Equations 7 (1) (1982) 77–116.

[14] M.M. Fall, Semilinear elliptic equations for the fractional Laplacian with Hardy potential, preprint, arXiv:1109.5530v4 [math.AP].

[15] F. Ferrari, I. Verbitsky, Radial fractional Laplace operators and Hessian inequalities, J. Differential Equations 253 (1) (2012) 244–272.

[16] R. Frank, E.H. Lieb, R. Seiringer, Hardy–Lieb–Thirring inequalities for fractional Schrodinger operators, J. Amer. Math. Soc. 20 (4) (2008) 925–950.

[17] R. Frank, R. Seiringer, Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities, J. Funct. Anal. 255 (2008) 3407–3430.

[18] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

[19] I.W. Herbst, Spectral theory of the operator $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$, Comm. Math. Phys. 53 (1977) 285–294.
[20] T. Leonori, I. Peral, A. Primo, F. Soria, Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (12) (2015) 6031–6068.
[21] E.H. Lieb, M. Loss, Analysis, second edition, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[22] V. Maz'ya, Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations, second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 342, Springer, Heidelberg, 2011.
[23] R. Servadei, E. Valdinocci, Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators, J. Math. Anal. Appl. 389 (2) (2012) 887–898.

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Sponsor names

Do not correct this page. Please mark corrections to sponsor names and grant numbers in the main text.

MINECO, *country*=Spain, *grants*=MTM2013-40846-P

ICTP, *country*=Italy, *grants*=

Please cite this article in press as: B. Abdellaoui, R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order with applications, J. Funct. Anal. (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2017.02.007

Research Article

Boumediene Abdellaoui*, Ahmed Attar and Rachid Bentifour

On the fractional p-Laplacian equations with weight and general datum

DOI: 10.1515/anona-2016-0072
Received March 29, 2016; revised September 13, 2016; accepted October 7, 2016

Abstract: The aim of this paper is to study the following problem:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$ containing the origin,

$$(-\Delta)^s_{p,\beta} u(x) := \mathrm{PV} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^\beta |y|^\beta}$$

with $0 \le \beta < \frac{N-ps}{2}$, $1 < p < N$, $s \in (0,1)$, and $ps < N$. The main purpose of this work is to prove the existence of a weak solution under some hypotheses on f. In particular, we will consider two cases:

(i) $f(x,\sigma) = f(x)$; in this case we prove the existence of a weak solution, that is, in a suitable weighted fractional Sobolev space for all $f \in L^1(\Omega)$. In addition, if $f \gneq 0$, we show that the problem above has a unique entropy positive solution.

(ii) $f(x,\sigma) = \lambda\sigma^q + g(x)$, $\sigma \ge 0$; in this case, according to the values of λ and q, we get the largest class of data g for which the problem above has a positive solution.

Keywords: Weighted fractional Sobolev spaces, nonlocal problems, entropy solution

MSC 2010: 49J35, 35A15, 35S15

1 Introduction and motivations

We consider the following problem:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

where

$$(-\Delta)^s_{p,\beta} u(x) := \mathrm{PV} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^\beta |y|^\beta},$$

Ω is a smooth bounded domain containing the origin and f belongs to a suitable Lebesgue space.

***Corresponding author: Boumediene Abdellaoui:** Laboratoire d'Analyse Nonlinéaire et Mathématiques Appliquées, Département de Mathématiques, Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, Tlemcen 13000, Algeria, e-mail: boumediene.abdellaoui@inv.uam.es
Ahmed Attar, Rachid Bentifour: Laboratoire d'Analyse Nonlinéaire et Mathématiques Appliquées, Département de Mathématiques, Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, Tlemcen 13000, Algeria, e-mail: ahm.attar@yahoo.fr, rachidbentifour@gmail.com

This class of operators appear in a natural way when dealing with the improved Hardy inequality, namely, for all $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ and for all $q < p$ we have

$$G_{s,p}(\phi) \geq C \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+qs}} w(x)^{\frac{p}{2}} w(y)^{\frac{p}{2}}\, dx\, dy,$$

where

$$G_{s,p}(\phi) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\, dxdy - \Lambda_{N,p,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^{ps}}\, dx,$$

$\Lambda_{N,p,s}$ is the optimal Hardy constant, $w(x) = |x|^{-(N-ps)/p}$, and $v(x) = \frac{\phi(x)}{w(x)}$. We refer to [1, 2, 4, 18] for a complete discussion about this fact.

In the same way, we can consider $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ as an extension of the local operator $-\operatorname{div}(|x|^{-\beta}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. This last one is strongly related to the classical Caffarelli–Khon–Nirenberg inequalities given in [11] and it was deeply analyzed in the literature. Notice that, as a consequence of the Caffarelli–Khon–Nirenberg inequalities, it is known that the weight $|x|^{-\beta}$, with $\beta < N - p$, is an admissible weight in the sense that, if u is a weak positive supersolution to the problem

$$-\operatorname{div}(|x|^{-\beta}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,$$

then it satisfies a weak Harnack inequality.

More precisely, there exists a positive constant $\kappa > 1$ such that for all $0 < q < \kappa(p-1)$ we have

$$\Big(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^q(x)|x|^{-p\beta} dx \Big)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_\rho(x_0)} u,$$

where $B_{2\rho}(x_0) \subset\subset \Omega$ and $C > 0$ depends only on B.

We refer to [16, 19] and the references therein for a complete discussion and the proof of the Harnack inequality and its generalization of admissible weights.

Our objective in this work is to analyze the properties of the operator $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ and to get the existence of a solution, in a suitable sense, to problem (1.1) for the largest class of the datum f.

The case of p-Laplacian equations is well known in the literature; we refer for example to [7, 8] where the authors proved the existence and the uniqueness of an entropy solution for L^1 datum. The case of measure datum was treated in [13], where the existence of a renormalized solution is obtained.

The local case with weight was considered in [3]. The authors proved the existence and the uniqueness of an entropy solution for datum in L^1.

For the operator $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ the case $p = 2$ and $\beta = 0$ was analyzed in [20, 22]. Using a duality argument, in the sense of Stampacchia, the authors were able to prove the existence of a solution for any datum in L^1. A more general semilinear problem was considered in [6], where the existence and the uniqueness of the solution is studied.

The case $p \neq 2$ and $\beta = 0$, with regular data and variational structure, was treated in the year 2016 in [12, 14].

For general datum, based on some generalization of the Wolff potential theory, Kuusi, Mingione and Sire succeeded in [21] in obtaining the existence of a weak solution belonging to a suitable fractional Sobolev space.

In this paper, we will treat the case $p \neq 2$ and $\beta > 0$. The argument considered in [21] seems to be too complicated to be adapted to our case.

Our approach is more simple and it is based on a suitable choice of a test function's family and on some algebraic inequalities.

In the first part of the present paper, we will consider the case $f(x, \sigma) = f(x)$. We prove the existence of a weak solution that is in an appropriate fractional Sobolev space. More precisely, we get the following existence result.

Theorem 1.1. *Assume that $f \in L^1(\Omega)$. Then problem* (1.1) *has a weak solution u such that*

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{1}{|x|^\beta|y|^\beta}\,dy\,dx \le M \quad \text{for all } q < \frac{N(p-1)}{N-s} \text{ and for all } s_1 < s, \tag{1.2}$$

and $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ for all $k > 0$, where

$$T_k(a) = \begin{cases} a & \text{if } |a| \le k, \\ k\frac{a}{|a|} & \text{if } |a| > k. \end{cases}$$

If $p > 2 - \frac{s}{N}$, then $u \in W^{s_1,q}_{\beta,0}(\Omega)$ for all $1 \le q < \frac{N(p-1)}{N-s}$ and for all $s_1 < s$.

It is clear that for $\beta = 0$, we reach the same existence and regularity result as was obtained in [21]. However, it seems that our approach is more simple and can be adapted for a large class of weighted nonlocal operators.

Next, assuming that $f \ge 0$, we show the existence of a positive entropy solution in the sense of Definition 2.9. The statement of our result is the following.

Theorem 1.2. *Assume that $f \in L^1(\Omega)$ is such that $f \gneq 0$. Then problem* (1.1) *has a unique entropy positive solution u in the sense of Definition 2.9 given below. Moreover, if u_n is the unique solution to the approximating problem*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n = f_n(x) & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

with $f_n = T_n(f)$, then $T_k(u_n) \to T_k(u)$ strongly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

In the second part of the paper, we consider the case $f(x,\sigma) = \lambda\sigma^q + g(x)$. According to the values of q and λ, we prove the existence of an entropy solution for the largest class of the datum g.

The paper is organized as follows. In Section 2, we introduce some useful tools and preliminaries that we will use throughout the paper, like the weighted fractional Sobolev spaces and some related inequalities, a weak comparison principle and some algebraic inequalities. We also specify the sense in which the solutions to problem (1.1) are defined.

In Section 3, we begin by proving Theorem 1.1, namely, the case where $f(x,\sigma) \equiv f(x)$. The main idea is to proceed by approximation and to pass to the limit using suitable test functions. In the second part of the section, we prove Theorem 1.2, more precisely, if $f \ge 0$, we are able to show that problem (1.1) has *a unique positive entropy solution*. In the same way, setting u_n as the solution of (1.1) with datum $f_n \equiv T_n(f)$, we will prove that the sequence $\{T_k(u_n)\}_n$ converges to $T_k(u)$ strongly in the corresponding weighted fractional Sobolev space.

In Section 4, we study the case where $f(x,\sigma) = \lambda\sigma^q + g(x)$ with $\lambda > 0$ and $g \gneq 0$. According to the values of q and λ, we get the largest class of the data g such that the problem (1.1) has a positive solution.

2 Functional setting and main tools

In this section, we give some functional settings that will be used below. We refer to [15, 23] for more details.

Let $s \in (0,1)$, $p \ge 1$ and $0 \le \beta < \frac{N-ps}{2}$. For simplicity of notation, we will set

$$d\mu := \frac{dx}{|x|^{2\beta}} \quad \text{and} \quad d\nu := \frac{dxdy}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}.$$

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$; the weighted fractional Sobolev space $W^{s,p}_\beta(\Omega)$ is defined by

$$W^{s,p}_\beta(\Omega) \equiv \Big\{\phi \in L^p(\Omega, d\mu) : \int_\Omega\int_\Omega |\phi(x)-\phi(y)|^p\,d\nu < +\infty\Big\}.$$

Furthermore, $W^{s,p}_{\beta}(\Omega)$ is a Banach space endowed with the norm

$$\|\phi\|_{W^{s,p}_{\beta}(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} |\phi(x)|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{\Omega}\int_{\Omega} |\phi(x) - \phi(y)|^p \, d\nu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

In the same way, we define the space $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ as the completion of $\mathcal{C}^{\infty}_0(\Omega)$ with respect to the previous norm.

As in [5] (see also [15]) we can prove the following extension result.

Lemma 2.1. *Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a regular domain. Then for all $w \in W^{s,p}_{\beta}(\Omega)$ there exists $\tilde{w} \in W^{s,p}_{\beta}(\mathbb{R}^N)$ such that $\tilde{w}_{|\Omega} = w$ and*

$$\|\tilde{w}\|_{W^{s,p}_{\beta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|w\|_{W^{s,p}_{\beta}(\Omega)},$$

where $C \equiv C(N, s, p, \Omega) > 0$.

The following weighted Sobolev inequality is obtained in [1] and will be used systematically in this paper.

Theorem 2.2 (Weighted fractional Sobolev inequality). *Assume that $0 < s < 1$ and $p > 1$ are such that $ps < N$. Let $\beta < \frac{N-ps}{2}$. Then there exists a positive constant $S(N, s, \beta)$ such that for all $v \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}^N)$ we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\beta}} \frac{dy}{|y|^{\beta}} \geq S(N, s, \beta)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^{p^*_s}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_s}{p}}}\Big)^{\frac{p}{p^*_s}},$$

where $p^*_s = \frac{pN}{N-ps}$.

Moreover, if $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain and $\beta = \frac{N-ps}{2}$, then for all $q < p$ there exists a positive constant $C(\Omega)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^{\beta}} \frac{dy}{|y|^{\beta}} \geq C(\Omega)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^{p^*_{s,q}}}{|x|^{2\beta\frac{p^*_{s,q}}{p}}}\Big)^{\frac{p}{p^*_{s,q}}}$$

for all $v \in C^{\infty}_0(\Omega)$, where $p^*_{s,q} = \frac{pN}{N-qs}$.

Remark 2.3. As in the case $\beta = 0$, if Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, we can endow $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ with the equivalent norm

$$|||\phi|||_{W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Now, for $w \in W^{s,p}_{\beta}(\mathbb{R}^N)$, we set

$$(-\Delta)^s_{p,\beta} w(x) = \mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x) - w(y)|^{p-2}(w(x) - w(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dy}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}}.$$

It is clear that for all $w, v \in W^{s,p}_{\beta}(\mathbb{R}^N)$ we have

$$\langle(-\Delta)^s_{p,\beta} w, v\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x) - w(y)|^{p-2}(w(x) - w(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dxdy}{|x|^{\beta}|y|^{\beta}}.$$

In the case where $\beta = 0$, we denote $(-\Delta)^s_{p,\beta}$ by $(-\Delta)^s_p$.

The following comparison principle extends the classical one obtained by Brezis–Kamin in [10]. See [1, 22] for the proof.

Lemma 2.4. *Let Ω be a bounded domain and let h be a non-negative continuous function such that $h(x, \sigma) > 0$ if $\sigma > 0$ and $\frac{h(x,\sigma)}{\sigma^{p-1}}$ is decreasing. Let $u, v \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ be such that $u, v > 0$ in Ω and*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u \geq h(x, u) & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta)^s_{p,\beta} v \leq h(x, v) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Then $u \geq v$ in Ω.

The following algebraic inequalities can be proved using a suitable rescaling argument.

Lemma 2.5. *Assume that $p \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ and $\alpha > 0$. Then there exist positive constants c, c_1, c_2 such that*

$$(a+b)^\alpha \leq c_1 a^\alpha + c_2 b^\alpha \tag{2.1}$$

and

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(a^\alpha - b^\alpha) \geq c\big|a^{\frac{p+\alpha-1}{p}} - b^{\frac{p+\alpha-1}{p}}\big|^p. \tag{2.2}$$

In the case where $\alpha \geq 1$, under the same conditions on a, b, p as above, we have

$$|a+b|^{\alpha-1}|a-b|^p \leq c\big|a^{\frac{p+\alpha-1}{p}} - b^{\frac{p+\alpha-1}{p}}\big|^p. \tag{2.3}$$

Since we are considering a solution with datum in L^1, we need to use the concept of truncation. Recall that, for $k > 0$ we have

$$T_k(a) = \begin{cases} a & \text{if } |a| \leq k, \\ k\frac{a}{|a|} & \text{if } |a| > k. \end{cases}$$

Define $G_k(a) = a - T_k(a)$; if we take the above definition into consideration, it is not difficult to show the algebraic inequalities

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(T_k(a) - T_k(b)) \geq |T_k(a) - T_k(b)|^p \tag{2.4}$$

and

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(G_k(a) - G_k(b)) \geq |G_k(a) - G_k(b)|^p,$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ and $p \geq 1$.

In the same way, we will use the classical weighted Marcinkiewicz spaces.

Definition 2.6. For a measurable function u we set

$$\Phi_u(k) = \mu\{x \in \Omega : |u(x)| > k\},$$

where $d\mu = |x|^{-2\beta}\,dx$.

We say that u is in the Marcinkiewicz space $\mathcal{M}^q(\Omega, d\mu)$ if $\Phi_u(k) \leq Ck^{-q}$.

Since Ω is a bounded domain,

$$L^q(\Omega, d\mu) \subset \mathcal{M}^q(\Omega, d\mu) \subset L^{q-\varepsilon}(\Omega, d\mu)$$

for all $\varepsilon > 0$.

Since we are considering problems with general datum, we need to specify the concept of solution. We begin by the following definitions.

Definition 2.7. Let u be a measurable function. We say that $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{\beta,0}(\Omega)$ if for all $k > 0$ we have $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Now, we are able to state what we mean by a solution to problem (1.1).

Definition 2.8. Assume that $f \in L^1(\Omega)$. We say that u is a weak solution to problem (1.1) if for all $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ we have

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_\Omega} |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))\,d\nu = \int\limits_\Omega f(x)\phi(x)\,dx.$$

Following [6], we define the notion of entropy solution as follows.

Definition 2.9. Consider $f \in L^1(\Omega)$. We say that $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{0,\beta}(\Omega)$ is an entropy solution to problem (1.1) if

$$\iint\limits_{R_h} |u(x)-u(y)|^{p-1}\,d\nu \to 0 \quad \text{as } h \to \infty, \tag{2.5}$$

where

$$R_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : h+1 \le \max\{|u(x)|,|u(y)|\} \text{ with } \min\{|u(x)|,|u(y)|\} \le h \text{ or } u(x)u(y) < 0\},$$

and for all $k > 0$ and $\phi \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ we have

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_k(u(x)-\phi(x)) - T_k(u(y)-\phi(y))]\,dv \le \int_\Omega f(x)T_k(u(x)-\phi(x))\,dx.$$

Remark 2.10. Notice that for $h \gg k$, choosing $\phi = T_{h-1}(u)$, we obtain that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} &|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_k(G_{h-1}(u(x))) - T_k(G_{h-1}(u(y)))]\,dv \\ &\le \int_\Omega f(x)T_k(G_{h-1}(u(x)))\,dx \le k \int_{|u|>h-k-1} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Since

$$|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_k(G_{h-1}(u(x))) - T_k(G_{h-1}(u(y)))] \ge 0$$

in D_Ω, setting

$$\widetilde{R}_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : u(x)u(y) \ge 0 \text{ with } |u(x)| \ge h \text{ and } h-k-1 \le |u(y)| \le h\}$$

and

$$\widehat{R}_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : u(x)u(y) \ge 0 \text{ with } |u(x)| \ge h \text{ and } h-k-1 \le |u(x)| \le h\},$$

we reach that

$$\frac{1}{2}\iint_{\widetilde{R}_h} |u(x)-u(y)|^{p-1}(h-u(y))\,dv \le k \int_{|u|>h-k-1} |f(x)|\,dx$$

and

$$\frac{1}{2}\iint_{\widehat{R}_h} |u(x)-u(y)|^{p-1}(h-u(x))\,dv \le k \int_{|u|>h-k-1} |f(x)|\,dx. \tag{2.6}$$

It is clear that

$$\frac{1}{2}\iint_{\{h-k-1\le u(y)<u(x)\le h\}} (u(x)-u(y))^p\,dv \le k \int_{|u|>h-k-1} |f(x)|\,dx$$

and

$$\frac{1}{2}\iint_{\{h-k-1\le u(x)<u(y)\le h\}} (u(y)-u(x))^p\,dv \le k \int_{|u|>h-k-1} |f(x)|\,dx. \tag{2.7}$$

3 Existence results: Proofs of Theorems 1.1 and 1.2

In this section, we consider the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

where $f \in L^1(\Omega)$.

The main goal of this section is to show that problem (3.1) has a weak solution u in the sense of Definition 2.8. As in the local case, the main idea is to proceed by approximation and then pass to the limit by using suitable a priori estimates.

Before proving the main existence results, we need several lemmas.

Let $\{f_n\}_n \subset L^\infty(\Omega)$ be such that $f_n \to f$ strongly in $L^1(\Omega)$ and define u_n as the unique solution to the approximated problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n = f_n(x) & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Notice that the existence and the uniqueness of u_n follows by using a classical variational argument in the space $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

The first a priori estimate is given by the following Lemma.

Lemma 3.1. *Let $\{u_n\}_n$ be defined as above. Then $\{u_n\}_n$ is bounded in the space $\mathcal{M}^{p_1}(\Omega, d\mu)$ with $p_1 = \frac{(p-1)N}{N-ps}$.*

Proof. Using $T_k(u_n)$ as a test function in (3.2), we reach that

$$\frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(y) - u_n(x))[T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))]\, dv \le k \int_\Omega |f_n(x)|\, dx.$$

Thus,

$$\iint_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(y) - u_n(x))[T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))]\, dv \le Ck. \tag{3.3}$$

Recall that $u_n = T_k(u_n) + G_k(u_n)$. Then by inequalities (2.4) and (3.3), we reach that

$$\frac{1}{k} \iint_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p\, dv \le M \quad \text{for all } k > 0.$$

Now, using the weighted Sobolev inequality in Theorem 2.2, we get

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |T_k(u_n(x))|^{p_s^*} |x|^{-2\beta \frac{p_s^*}{p}}\, dx \Big)^{p/p_s^*} \le \iint_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p\, dv \le Ck.$$

Since $\{|u_n| \ge k\} = \{|T_k(u_n)| = k\}$, we obtain that

$$\mu\{x \in \Omega : |u_n| \ge k\} \le \mu\{x \in \Omega : |T_k(u_n)| = k\} \le \int_\Omega \frac{|T_k(u_n(x))|^{p_s^*}}{k^{p_s^*}} |x|^{-2\beta \frac{p_s^*}{p}}\, dx.$$

Hence,

$$\mu\{x \in \Omega : |u_n| > k\} \le C M^{\frac{p_s^*}{p}} k^{-(p_s^* - \frac{p_s^*}{p})}.$$

Setting $p_1 = p_s^* - \frac{p_s^*}{p} = \frac{N(p-1)}{N-ps}$, we conclude that the sequence $\{u_n\}_n$ is bounded in the space $\mathcal{M}^{p_1}(\Omega, d\mu)$ and the result follows. □

As a consequence we easily get that the sequence $\{|u_n|^{p-2}u_n\}_n$ is bounded in the space $L^\sigma(\Omega, d\mu)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$.

As in the local case, we prove now that the sequence $\{u_n\}_n$ is bounded in a suitable fractional Sobolev space. More precisely we have the following lemma.

Lemma 3.2. *Assume that $\{u_n\}_n$ is defined as in Lemma 3.1. Then*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^q}{|x - y|^{N+qs_1}} \frac{1}{|x|^\beta |y|^\beta}\, dy\, dx \le M \quad \textit{for all } q < \frac{N(p-1)}{N-s} \textit{ and for all } s_1 < s. \tag{3.4}$$

Proof. Let $q < \frac{N(p-1)}{N-s}$ be fixed. Since Ω is a bounded domain, it is sufficient to prove (3.4) for s_1 very close to s. In particular, we fix s_1 such that

$$\frac{pq(s - s_1)}{p - q} < \beta.$$

Define $w_n(x) = 1 - \frac{1}{(u_n^+(x)+1)^\alpha}$, where $\alpha > 0$ is to be chosen later and $u_n^+(x) = \max\{u_n(x), 0\}$.

In what follows, we denote by $C_1, C_2, \dots$ any positive constants that are independent of u_n and can change from one line to another.

Using w_n as a test function in (3.2), we get

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega}|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))\frac{(u_n^+(x)+1)^\alpha-(u_n^+(y)+1)^\alpha}{(u_n^+(x)+1)^\alpha(u_n^+(y)+1)^\alpha}\,dv \le \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Hence,

$$\iint_{D_\Omega}|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))\frac{(u_n^+(x)+1)^\alpha-(u_n^+(y)+1)^\alpha}{(u_n^+(x)+1)^\alpha(u_n^+(y)+1)^\alpha}\,dv \le C_1. \tag{3.5}$$

Let $v_n(x)=u_n^+(x)+1$. Since

$$\begin{aligned}|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}&(u_n(x)-u_n(y))((u_n^+(x)+1)^\alpha-(u_n^+(y)+1)^\alpha)\\ &\ge |u_n^+(x)-u_n^+(y)|^{p-2}(u_n^+(x)-u_n^+(y))((u_n^+(x)+1)^\alpha-(u_n^+(y)+1)^\alpha)\\ &= |v_n(x)-v_n(y)|^{p-2}(v_n(x)-v_n(y))(v_n^\alpha(x)-v_n^\alpha(y))\end{aligned}$$

by (3.5), it follows that

$$\iint_{D_\Omega}|v_n(x)-v_n(y)|^{p-2}(v_n(x)-v_n(y))\frac{v_n^\alpha(x)-v_n^\alpha(y)}{v_n^\alpha(x)v_n^\alpha(y)}\,dv \le C_1.$$

Now, using the fact that $v_n \ge 1$ and by inequality (2.2), we get

$$\iint_{D_\Omega}\frac{|v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(x)-v_n^{\frac{p+\alpha-1}{p}}(y)|^p}{v_n^\alpha(x)v_n^\alpha(y)}\,dv \le C_2. \tag{3.6}$$

Defining $q_1 = q\frac{s_1}{s} < q$ and using the Hölder inequality, we find

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta}\\ &\quad= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{qs}}\frac{(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}\frac{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}{(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}|x-y|^{(q-q_1)s}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta|x-y|^N}\\ &\quad\le \Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^p(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v(x)v(y))^\alpha|x|^\beta|y|^\beta}\,dy\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}\\ &\qquad\times\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{(v(x)v(y))^\alpha}\frac{(v_n(x)v_n(y))^{\alpha\frac{p}{p-q}}}{(v_n(x)+v_n(y))^{(\alpha-1)\frac{p}{p-q}}}|x-y|^{(q-q_1)s\frac{p}{p-q}}\frac{dy\,dx}{|x-y|^N|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Now, using the algebraic inequality (2.3), we have

$$|v_n(x)-v_n(y)|^p(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1} \le C\big|v_n(x)^{\frac{p+\alpha-1}{p}}-v_n(y)^{\frac{p+\alpha-1}{p}}\big|^p.$$

Hence, taking into consideration that $\Omega\times\Omega\subset D_\Omega$ and by (3.6), we get

$$\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^p(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha-1}}{|x-y|^{N+ps}(v(x)v(y))^\alpha|x|^\beta|y|^\beta}\,dy\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \le C\Big(\iint_{D_\Omega}\frac{|v_n(x)^{\frac{p+\alpha-1}{p}}-v_n(y)^{\frac{p+\alpha-1}{p}}|^p}{|x-y|^{N+ps}(v_n(x)v_n(y))^\alpha|x|^\beta|y|^\beta}\,dy\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \le C_3.$$

So, going back to (3.7), we reach that

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C_4\Big(\int_\Omega\int_\Omega\Big(\frac{(v_n(x)v_n(y))^\alpha}{(v_n(x)+v_n(y))^\alpha}\Big)^{\frac{q}{p-q}}(v_n(x)+v_n(y))^{\frac{q}{p-q}}\frac{1}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}}\frac{dy\,dx}{|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}}.$$

By inequality (2.1), we have

$$(v_n(x)+v_n(y))\Big(\frac{v_n(x)v_n(y)}{v_n(x)+v_n(y)}\Big)^{\alpha} \le c(v_n(x)+v_n(y))^{\alpha+1} \le C_5(v_n^{\alpha+1}(x)+v_n^{\alpha+1}(y)).$$

Therefore,

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}}\frac{dx\,dy}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C_5\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}} + C_5\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(y)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta}\Big)^{\frac{p-q}{q}}. \tag{3.8}$$

It is clear that

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta} = \int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(y)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta},$$

hence we just have to estimate the first term. We have

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta} = \int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)}{|x|^\beta}\,dx \int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|y|^\beta}.$$

Since Ω is a bounded domain, $\Omega \subset\subset B_R(0)$. Thus

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^{\frac{(\alpha+1)q}{p-q}}(x)}{|x|^\beta}\,dx \int_{B_R(0)} \frac{dy}{|x-y|^{N-\frac{ps(q-q_1)}{p-q}}|y|^\beta},$$

where $v_n = 1$ in $B_R(0)\setminus\Omega$. We set $r=|x|$ and $\rho=|y|$. Then $x = rx'$, $y=\rho y'$, where $|x'|=|y'|=1$.

Let

$$\tau = \frac{(\alpha+1)q}{p-q} \quad\text{and}\quad \theta = \frac{ps(q-q_1)}{p-q}. \tag{3.9}$$

Then

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\,dx}{|x|^\beta}\int_0^R \frac{\rho^{N-1}}{\rho^\beta r^{N-\theta}}\Big(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{N-1}(y')}{|x'-\frac{\rho}{r}y'|^{N-\theta}}\Big)\,d\rho.$$

We set $\sigma = \frac{\rho}{r}$; hence

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\,dx}{|x|^{2\beta-\theta}}\int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1}\Big(\int_{|y'|=1}\frac{dH^{N-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N-\theta}}\Big)\,d\sigma.$$

Defining

$$K_\theta(\sigma) = \int_{|y'|=1}\frac{dH^{N-1}(y')}{|x'-\sigma y'|^{N-\theta}}$$

as in [17], we find

$$K_\theta(\sigma) = 2\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\beta(\frac{N-1}{2})}\int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\xi)}{(1-2\sigma\cos(\xi)+\sigma^2)^{\frac{N-\theta}{2}}}\,d\xi.$$

Notice that $K_\theta(\sigma)\le C|1-\sigma|^{-1+\theta}$ as $\sigma\to 1$ and $K_\theta(\sigma) \simeq \sigma^{\theta-N}$ as $\sigma\to\infty$.

Therefore, there holds

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)\,dx\,dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} \le \int_{B_{\frac{R}{3}}(0)} \frac{v_n^\tau(x)\,dx}{|x|^{2\beta-\theta}}\int_0^{\frac{R}{r}}\sigma^{N-\beta-1}K_\theta(\sigma)\,d\sigma + \int_{B_R(0)\setminus B_{\frac{R}{3}}(0)} \frac{v_n^\tau(x)\,dx}{|x|^{2\beta-\theta}}\int_0^{\frac{R}{r}}\sigma^{N-\beta-1}K_\theta(\sigma)\,d\sigma. \tag{3.10}$$

Recall that $r = |x|$. Then if $x \in B_R(0) \setminus B_{\frac{R}{3}}(0)$, we have $\frac{R}{r} < 3$. Hence taking into consideration that $\theta > 0$ and the behavior of K_θ near 1, we reach that

$$\int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \le C_1 \int_0^3 \sigma^{N-\beta-1} |1-\sigma|^{1-\theta}\, d\sigma = C_2 < \infty.$$

Now, if $r \equiv |x| < \frac{R}{3}$, there holds

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma &= \int_0^3 \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma + \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \\ &\le C_2 + \Big(\frac{R}{r}\Big)^a \int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma,\end{aligned}$$

where $a > 0$ is to be chosen later.

Since

$$\int_3^{\frac{R}{r}} \sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma \le \int_3^{\infty} \sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma)\, d\sigma,$$

using the fact that $\sigma^{N-\beta-a-1} K_\theta(\sigma) \simeq \sigma^{-1-\beta-a+\theta}$ as $\sigma \to \infty$ and choosing $a > \theta$, it follows that

$$\int_0^{\infty} \sigma^{N-\beta-a-1} K(\sigma) d\sigma \equiv C_3 < \infty.$$

Now, going back to (3.10), there holds

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)\, dx\, dy}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} &\le C_1 \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\, dx}{|x|^{2\beta-\theta}}\, dx + C_2 R^a \int_{B_{\frac{R}{3}}(0)} \frac{v_n^\tau(x)\, dx}{|x|^{2\beta+a-\theta}}\, dx \\ &\le C(R) \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\, dx}{|x|^{2\beta+a-\theta}}\, dx.\end{aligned}$$

Since $q < \frac{(p-1)N}{N-s}$, we can choose $\alpha > 0$ in (3.9) such that $\tau < \frac{(p-1)N}{N-ps}$. By Lemma 3.1, choosing $a > \theta$, very close to θ and using the Hölder inequality, we reach that

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{v_n^\tau(x)\, dy\, dx}{|x-y|^{N-\theta}|x|^\beta|y|^\beta} \le C_6 \int_{B_R(0)} \frac{v_n^\tau(x)\, dx}{|x|^{2\beta+a-\theta}} \le C_7 \quad \text{for all } n. \tag{3.11}$$

Hence by (3.8) and (3.11), we conclude that

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n^+(x)-u_n^+(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} \frac{dy\, dx}{|x|^\beta|y|^\beta} = \int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_n(x)-v_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} \frac{dx\, dy}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C_8.$$

In the same way, by using $1 - 1/((u_n^-(x)+1)^\alpha)$ as a test function in (3.2), we obtain that

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n^-(x)-u_n^-(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} \frac{dy\, dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C_9.$$

Combining the above estimates, we reach that

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^q}{|x-y|^{N+qs_1}} \frac{dy\, dx}{|x|^\beta|y|^\beta} \le C$$

and the result follows. □

Remark 3.3. As a consequence we get the existence of a measurable function u such that $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, $|u|^{p-2}u \in L^{\sigma}(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$, and $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ weakly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

It is clear that $u_n \to u$ a.e. in Ω. Since $u_n = 0$ a.e. in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, we have $u = 0$ a.e. in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Notice that by Lemma 3.1 we conclude that

$$|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u \quad \text{strongly in } L^a(\Omega, d\mu) \text{ for all } a < \frac{N}{N-ps}.$$

Let

$$U_n(x,y) = |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y)) \quad \text{and} \quad U(x,y) = |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y)).$$

Since Ω is a bounded domain, by the result of Lemma 3.2 and using Vitali's lemma, we obtain that

$$U_n \to U \quad \text{strongly in } L^1(\Omega \times \Omega, d\nu).$$

We are now able to prove the first existence result.

Proof of Theorem 1.1. It is clear that estimate (1.2) follows by using Lemma 3.2 and Fatou's lemma.

Let $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Then, by using ϕ as a test function in (3.2), it follows that

$$\frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))(\phi(x) - \phi(y))\, d\nu = \int_\Omega f_n(x)\phi(x)\, dx. \tag{3.12}$$

We set $\Phi(x,y) = \phi(x) - \phi(y)$. By (3.12), we have

$$\frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} U(x,y)\Phi(x,y)\, d\nu + \frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu = \int_\Omega f_n(x)\phi(x)\, dx. \tag{3.13}$$

It is clear that

$$\int_\Omega f_n(x)\phi(x)\, dx \to \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \quad \text{as } n \to \infty.$$

We claim that

$$\iint_{D_\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.14}$$

Since $u_n \to u$ a.e. in Ω, it follows that

$$\frac{U_n(x,y)\Phi(x,y)}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} \to \frac{U(x,y)\Phi(x,y)}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta |y|^\beta} \quad \text{a.e. in } D_\Omega.$$

Using the fact that $u(x) = u_n(x) = \phi(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu = 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu \\
&\quad = \iint_{\Omega\times\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \int_\Omega (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu \\
&\qquad + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} (U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)\, d\nu \\
&\quad = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n).
\end{aligned}$$

Using Lemma 3.2 and Remark 3.3, we easily find that

$$I_1(n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

We now deal with $I_2(n)$. It is clear that for $(x,y) \in \Omega \times B_R \setminus \Omega$ we have

$$|(U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)| \le (|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})|\phi(x)|.$$

Since

$$\sup_{\{x \in \operatorname{Supp}\phi,\ y \in B_R\setminus\Omega\}} \frac{1}{|x-y|^{N+ps}} \le C,$$

we have

$$\Big|\frac{(U_n(x,y) - U(x,y))\Phi(x,y)}{|x-y|^{N+ps}|x|^\beta|y|^\beta}\Big| \le \frac{(|u_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1})|\phi(x)|}{|x|^\beta|y|^\beta} \equiv Q_n(x,y).$$

Using Lemma 3.1 and Remark 3.3, we get $Q_n \to Q$ strongly in $L^1(\Omega \times B_R \setminus \Omega)$ with

$$Q(x,y) = 2|u(x)|^{p-1}|\phi(x)||x|^{-\beta}|y|^{-\beta}.$$

Thus by the dominated convergence theorem we arrive to $I_2(n) \to 0$ as $n \to \infty$. In the same way, we obtain that $I_3(n) \to 0$ as $n \to \infty$. Hence (3.14) follows and the claim is proved.

Therefore, passing to the limit in (3.13), we arrive at

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)\Phi(x,y)\,dv = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx. \qquad \square$$

Remark 3.4. (i) It is clear that the same existence result holds if we replace f by a bounded Radon measure ν.

(ii) In the case where $\beta = 0$, we get the same existence and regularity results as were obtained in [21].

3.1 The case of positive datum: Existence and uniqueness of the positive entropy solution

If $f \gneq 0$, we choose $f_n = T_n(f)$, thus $\{u_n\}_n$ is an increasing sequence. In this case, we are able to prove that problem (3.1) has a unique entropy positive solution in the sense of Definition 2.9. Before beginning with the proof of Theorem 1.2, let us prove the following compactness result.

Lemma 3.5. *Let $\{u_n\}_n$ and u be defined as above. Then*

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \quad \textit{strongly in } W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega).$$

The proof of Lemma 3.5 will be a consequence of the following more general compactness result.

Lemma 3.6. *Let $\{u_n\}_n \subset W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ be an increasing sequence such that $u_n \ge 0$ and $(-\Delta)^s_{p,\beta}u_n \ge 0$. Assume further that $\{T_k(u_n)\}_n$ is bounded in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ for all $k > 0$. Then there exists a measurable function u such that $u_n \uparrow u$ a.e. in Ω, $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ for all $k > 0$ and*

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \quad \textit{strongly in } W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega).$$

Proof. Since $\{T_k(u_n)\}_n$ is bounded in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, using the monotony of the sequence $\{u_n\}_n$, we get the existence of a measurable function u such that $u_n \uparrow u$ a.e. in Ω, $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ and $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ weakly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$. Since $(-\Delta)^s_{p,\beta}u_n \ge 0$, we have

$$\langle(-\Delta)^s_{p,\beta}u_n, T_k(u_n) - T_k(u)\rangle \le 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned}\iint_{D_\Omega} &|u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))\big)\,dv \\ &\le \iint_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))\big(T_k(u(x)) - T_k(u(y))\big)\,dv. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Define

$$I_{1,n} \equiv \iint\limits_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))\big)\,dv$$

and

$$I_{2,n} \equiv \iint\limits_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))\big(T_k(u(x)) - T_k(u(y))\big)\,dv.$$

For simplicity of notation, we set

$$\mathrm{T}_{n,k}(x, y) \equiv |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^{p-2}\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))\big).$$

We have

$$I_{1,n} = \iint\limits_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p\,dv + \iint\limits_{D_\Omega} [U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y)]\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))\big)\,dv.$$

In the same way, using Young inequality, we obtain that

$$\begin{aligned} I_{2,n} &= \iint\limits_{D_\Omega} \mathrm{T}_{n,k}(x, y)\big(T_k(u(x)) - T_k(u(y))\big)\,dv + \iint\limits_{D_\Omega} [U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y)]\big(T_k(u(x)) - T_k(u(y))\big)\,dv \\ &\le \frac{p-1}{p} \iint\limits_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p\,dv + \frac{1}{p} \iint\limits_{D_\Omega} |T_k(u(x)) - T_k(u(y))|^p\,dv \\ &\quad + \iint\limits_{D_\Omega} [U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y)]\big(T_k(u(x)) - T_k(u(y))\big)\,dv. \end{aligned}$$

Combining the above estimates and going back to (3.15), we find

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} \iint\limits_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p\,dv + \iint\limits_{D_\Omega} [U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y)] \\ &\qquad \times\big[\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))\big) - \big(T_k(u_n(y)) - T_k(u(y))\big)\big]\,dv \\ &\qquad\qquad \le \frac{1}{p} \iint\limits_{D_\Omega} |T_k(u(x)) - T_k(u(y))|^p\,dv. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Define

$$K_n(x, y) \equiv [U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y)]\big[\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))\big) - \big(T_k(u_n(y)) - T_k(u(y))\big)\big]. \tag{3.17}$$

We claim that $K_n(x, y) \ge 0$ a.e. in D_Ω. We set

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \le k, u_n(y) \le k\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \ge k, u_n(y) \ge k\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \ge k, u_n(y) \le k\}, \quad D_4 = \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \le k, u_n(y) \ge k\}. \end{aligned}$$

Then $D_\Omega = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

In D_1 we have $U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y) = 0$. Then $K_n(x, y) = 0$. In the same way, if $(x, y) \in D_2$, we have $u(x) \ge u_n(x) \ge k$ and $u(y) \ge u_n(y) \ge k$. Then

$$\big[\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))\big) - \big(T_k(u_n(y)) - T_k(u(y))\big)\big] = 0.$$

Thus, $K_n(x, y) = 0$ in D_2.

Assume that $(x, y) \in D_3$. Then

$$U_n(x, y) - \mathrm{T}_{n,k}(x, y) = (u_n(x) - u_n(y))^{p-1} - (k - u_n(y))^{p-1} \ge 0.$$

Since

$$\big[\big(T_k(u_n(x)) - T_k(u(x))\big) - \big(T_k(u_n(y)) - T_k(u(y))\big)\big] = -\big(T_k(u_n(y)) - T_k(u(y))\big) \ge 0$$

by (3.17), it follows that $K_n(x,y) \geq 0$ in D_3. In the same way, we can prove that $K_n(x,y) \geq 0$ in D_4. Thus $K_n(x,y) \geq 0$ a.e. in D_Ω and the claim follows.

Going back to (3.16), there results that

$$\limsup_{n\to\infty} \iint_{D_\Omega} |T_k(u_n(x)) - T_k(u_n(y))|^p \, d\nu \leq \iint_{D_\Omega} |T_k(u(x)) - T_k(u(y))|^p \, d\nu.$$

Since $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ weakly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, we obtain $T_k(u_n) \to T_k(u)$ strongly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$. □

Remark 3.7. (i) As a consequence of the previous strong convergence we reach that

$$\iint_{D_\Omega} K_n(x,y)\, d\nu \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

(ii) Letting $w_n = 1 - \frac{1}{1+u_n}$ and $w = 1 - \frac{1}{1+u}$, and using w_n as a test function in (3.2), we have

$$\iint_{D_\Omega} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{(1+u_n(x))(1+u_n(y))}\, d\nu = \int_\Omega f_n(x) w_n(x)\, dx \to \int_\Omega f(x) w(x)\, dx \quad \text{as } n \to \infty.$$

For $k > 0$ fixed, we define the sets

$$A_n = D_\Omega \cap \{u_n(x) \geq 2k,\, u_n(y) \leq k\} \quad \text{and} \quad A = D_\Omega \cap \{u(x) \geq 2k,\, u(y) \leq k\}.$$

It is clear that for $(x,y) \in A_n$ we have $u_n(x) - u_n(y) \geq \frac{1}{2} u_n(x)$. Thus,

$$\iint_{D_\Omega} u_n^{p-1}(x) \chi_{A_n}(x,y)\, d\nu \leq C(k) \iint_{D_\Omega} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{(1+u_n(x))(1+u_n(y))}\, d\nu < \bar{C}(k). \tag{3.18}$$

Since $u_n \chi_{\{A_n\}}(x,y) \to u\chi_{\{A\}}$ a.e. in D_Ω, if $p > 2$, we get

$$u_n \chi_{\{A_n\}} \rightharpoonup u\chi_{\{A\}} \quad \text{weakly in } L^{p-1}(D_\Omega, d\nu).$$

(iii) From (3.18) we conclude that

$$\nu\{D_\Omega \cap A_n\} \equiv \iint_{D_\Omega \cap A_n} d\nu \leq \tilde{C}(k).$$

Hence by Fatou's lemma, we reach that

$$\nu\{D_\Omega \cap A\} \equiv \iint_{D_\Omega \cap A} d\nu \leq \tilde{C}(k).$$

Now, we are in the position to prove the existence and the uniqueness of the entropy solution.

Proof of Theorem 1.2: Existence part. It is clear that the existence of u follows by using Theorem 1.1, however the strong convergence of $\{T_k(u_n)\}_n$ in the space $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$ is a consequence of Lemma 3.5. To finish we just need to show that u is an entropy solution to problem (3.1) in the sense of Definition 2.9.

Let us begin by proving that (2.5) holds.

Since $u, u_n \geq 0$, the set R_h given in Definition 2.9 is reduced to

$$R_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : h + 1 \leq \max\{u(x), u(y)\} \text{ with } \min\{u(x), u(y)\} \leq h\}.$$

Using $T_1(G_h(u_n))$ as a test function in (3.2), we obtain

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p-2}(u_n(x) - u_n(y))[T_1(G_h(u_n(x))) - T_1(G_h(u_n(y)))]\, d\nu \\ &\qquad = \int_\Omega f_n(x) T_1(G_h(u_n(x)))\, dx \leq \int_{u_n \geq h} f_n(x)\, dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

It is not difficult to show that, for $(x,y) \in R_h$, we have

$$|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))[T_1(G_h(u_n(x)))-T_1(G_h(u_n(y)))] \geq 0.$$

Thus, using Fatou's lemma and by (3.19), we conclude that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} &|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_1(G_h(u(x)))-T_1(G_h(u(y)))]\,dv\\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega}|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))[T_1(G_h(u_n(x)))-T_1(G_h(u_n(y)))]\,dv\\ &\leq \int_\Omega f(x)T_1(G_h(u(x)))\,dx \leq \int_{u\geq h} f(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3.20}$$

It is clear that for all $(x,y)\in R_h$ we have

$$|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))[T_1(G_h(u(x)))-T_1(G_h(u(y)))] \geq |u(x)-u(y)|^{p-1}.$$

Therefore, using the fact that

$$\int_{u\geq h} f(x)\,dx \to 0 \quad \text{as } h\to\infty$$

and by (3.20), we conclude that

$$\iint_{R_h}|u(x)-u(y)|^{p-1}\,dv \to 0 \quad \text{as } h\to\infty.$$

Hence (2.5) holds.

Recall that

$$U_n(x,y)=|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y)) \quad\text{and}\quad U(x,y)=|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y)).$$

Let $v\in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Taking $T_k(u_n-v)$ as a test function in (3.2), we reach that

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U_n(x,y)[T_k(u_n(x)-v(x))-T_k(u_n(y)-v(y))]\,dv = \int_\Omega f_n(x)T_k(u_n(x)-v(x))\,dx.$$

One immediately sees that

$$\int_\Omega f_n(x)T_k(u_n(x)-v(x))\,dx \to \int_\Omega f(x)T_k(u(x)-v(x))\,dx \quad \text{as } n\to\infty.$$

We now deal with the first term. We have

$$U_n(x,y)[T_k(u_n(x)-v(x))-T_k(u_n(y)-v(y))] =: K_{1,n}(x,y)+K_{2,n}(x,y), \tag{3.21}$$

where

$$\begin{aligned}K_{1,n}(x,y) = {}&|(u_n(x)-v(x))-(u_n(y)-v(y))|^{p-2}((u_n(x)-v(x))-(u_n(y)-v(y)))\\ &\times[T_k(u_n(x)-v(x))-T_k(u_n(y)-v(y))]\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}K_{2,n}(x,y) = {}&[U_n(x,y)-|(u_n(x)-v(x))-(u_n(y)-v(y))|^{p-2}((u_n(x)-v(x))-(u_n(y)-v(y)))]\\ &\times[T_k(u_n(x)-v(x))-T_k(u_n(y)-v(y))].\end{aligned}$$

It is clear that $K_{1,n}(x,y) \geq 0$ a.e. in D_Ω. Since

$$K_{1,n}(x,y) \to |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))$$
$$\times [T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))] \quad \text{a.e. in } D_\Omega$$

as $n \to \infty$, using Fatou's lemma, we obtain that

$$\iint_{D_\Omega} K_{1,n}(x,y)\,d\nu \geq \iint_{D_\Omega} [|(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))]$$
$$\times [T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]\,d\nu. \tag{3.22}$$

We now deal with $K_{2,n}$.

We set

$$w_n = u_n - v, \quad w = u - v, \quad \sigma_1(x,y) = u_n(x) - u_n(y), \quad \sigma_2(x,y) = w_n(x) - w_n(y).$$

Then

$$K_{2,n}(x,y) = [|\sigma_1(x,y)|^{p-2}\sigma_1(x,y) - |\sigma_2(x,y)|^{p-2}\sigma_2(x,y)] \times [T_k(u_n(x)-v(x)) - T_k(u_n(y)-v(y))].$$

We claim that

$$\iint_{D_\Omega} K_{2,n}(x,y)\,d\nu \to \iint_{D_\Omega} [U(x,y) - |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))]$$
$$\times [T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]\,d\nu \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.23}$$

We divide the proof of the claim into two cases according to the value of p.

The singular case: $p \in (1,2]$. In this case, we have

$$\big||\sigma_1(x,y)|^{p-2}\sigma_1(x,y) - |\sigma_2(x,y)|^{p-2}\sigma_2(x,y)\big| \leq C|\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)|^{p-1} = C|v(x)-v(y)|^{p-1}.$$

Thus,

$$|K_{2,n}(x,y)| \leq C|v(x)-v(y)|^{p-1}|T_k(u_n(x)-v(x)) - T_k(u_n(y)-v(y))| \equiv \tilde{K}_{2,n}(x,y). \tag{3.24}$$

Since $T_k(u_n) \to T_k(u)$ strongly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, we get

$$\tilde{K}_{2,n} \to C|v(x)-v(y)|^{p-1}|T_k(u(x)-v(x)) - T_k(u(y)-v(y))| \quad \text{strongly in } L^1(D_\Omega, d\nu)$$

as $v \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Using the dominated convergence theorem, we reach that

$$\iint_{D_\Omega} K_{2,n}(x,y)\,d\nu \to \iint_{D_\Omega} [U(x,y) - |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{p-2}((u(x)-v(x))-(u(y)-v(y)))]$$
$$\times [T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v(y))]\,d\nu$$

as $n \to \infty$ and then (3.23) follows in this case.

The degenerate case: $p > 2$. This case is more relevant. As in the previous case, we have

$$\begin{aligned}\big||\sigma_1(x,y)|^{p-2}\sigma_1(x,y) - |\sigma_2(x,y)|^{p-2}\sigma_2(x,y)\big| &\leq C_1|\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)|^{p-1} + C_2|\sigma_2(x,y)|^{p-2}|\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)| \\ &\leq C_1|v(x)-v(y)|^{p-1} + C_2|v(x)-v(y)||w_n(x)-w_n(y)|^{p-2} \\ &\leq C_1|v(x)-v(y)|^{p-1} + C_2|v(x)-v(y)||u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}.\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}|K_{2,n}(x,y)| &\leq C_1|v(x)-v(y)|^{p-1}|T_k(u_n(x)-v(x)) - T_k(u_n(y)-v(y))| \\ &\quad + C_2|v(x)-v(y)||u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}|T_k(w_n(x)) - T_k(w_n(y))| \\ &\equiv \bar{K}_{2,n}(x,y) + \check{K}_{2,n}(x,y).\end{aligned}$$

The term $\bar{K}_{2,n}(x,y)$ can be treated as $\tilde{K}_{2,n}$ defined in (3.24). Hence it remains to deal with $\check{K}_{2,n}(x,y)$.

We define

$$D_1 = \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \leq \tilde{k},\ u_n(y) \leq \tilde{k}\},$$

where $\tilde{k} \gg k + \|v\|_\infty$ is a large constant. Using the fact that $T_{\tilde{k}}(u_n) \to T_{\tilde{k}}(u)$ strongly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, we obtain that

$$\check{K}_{2,n}(x, y)\chi_{\{D_1\}} \to C_2|v(x) - v(y)||u(x) - u(y)|^{p-2}|T_k(w(x)) - T_k(w(y))|\chi_{\{u(x)\leq\tilde{k},u(y)\leq\tilde{k}\}}$$

strongly in $L^1(D_\Omega, dv)$.

Now, consider the set

$$D_2 = \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \geq k_1,\ u_n(y) \geq k_1\},$$

where $k_1 > k + \|v\|_\infty$. Then $\check{K}_{2,n}(x, y)\chi_{\{D_2\}} = 0$.

Hence we just have to deal with sets of the form

$$D_3 = \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(x) \geq 2k,\ u_n(y) \leq k\}$$

or

$$D_4 = \{(x, y) \in D_\Omega : u_n(y) \geq 2k,\ u_n(x) \leq k\}.$$

We will use Remark 3.7 and a duality argument.

It is clear that for $(x, y) \in D_3$ we have

$$\check{K}_{2,n}(x, y)\chi_{\{D_3\}}(x, y) \leq C(k)|v(x) - v(y)||T_k(w_n(x)) - T_k(w_n(y))|u_n^{p-2}(x)\chi_{\{D_3\}}(x, y).$$

From Remark 3.7, we know that

$$u_n^{p-2}\chi_{\{D_3\}} \rightharpoonup u^{p-2}\chi_{\{u(x)\geq 2k,u(y)\leq k\}} \quad \text{weakly in } L^{\frac{p-1}{p-2}}(D_\Omega, dv). \tag{3.25}$$

Notice that

$$\begin{aligned}
[|v(x) - v(y)||T_k(w_n(x)) - T_k(w_n(y))|]^{p-1} &\leq \frac{p-1}{p}|T_k(w_n(x)) - T_k(w_n(y))|^p + \frac{1}{p}|v(x) - v(y)|^{p(p-1)} \\
&\leq \frac{p-1}{p}|T_k(w_n(x)) - T_k(w_n(y))|^p + \frac{1}{p}(2\|v\|_\infty)^{p(p-2)}|v(x) - v(y)|^p \\
&=: L_n(x, y).
\end{aligned}$$

It is clear that $L_n \to L$ strongly in $L^1(D_\Omega, dv)$ with

$$L(x, y) = \frac{p-1}{p}|T_k(w(x)) - T_k(w(y))|^p + \frac{1}{p}(2\|v\|_\infty)^{p(p-2)}|v(x) - v(y)|^p. \tag{3.26}$$

Thus by (3.25), (3.26) and using a duality argument, we find that

$$\check{K}_{2,n}\chi_{\{D_3\}} \to C_2|v(x) - v(y)||u(x) - u(y)|^{p-2}|T_k(w(x)) - T_k(w(y))|\chi_{\{u(x)\geq 2k,u(y)\leq k\}}$$

strongly in $L^1(D_\Omega, dv)$.

We can treat the set D_4 in the same way.

Therefore, combining the above estimates and using the dominated convergence theorem, we conclude that

$$\begin{aligned}
\iint_{D_\Omega} K_{2,n}(x, y)\,dv \to \iint_{D_\Omega} &[U(x, y) - |(u(x) - v(x)) - (u(y) - v(y))|^{p-2}((u(x) - v(x)) - (u(y) - v(y)))] \\
&\times [T_k(u(x) - v(x)) - T_k(u(y) - v(y))]\,dv \quad \text{as } n \to \infty,
\end{aligned}$$

and the claim follows.

Hence by (3.21)–(3.23), we conclude that

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x, y)[T_k(u(x) - v(x)) - T_k(u(y) - v(y))]\,dv \leq \int_\Omega f(x)T_k(u(x) - v(x))\,dx \tag{3.27}$$

and the result follows at once. □

It is clear that if u is an entropy solution of (3.1), then for all $w \in C_0^\infty(\Omega)$ we have

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))\,d\nu = \int_\Omega f(x)w(x)\,dx, \tag{3.28}$$

where $U(x,y) = |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))$.

Moreover, we can prove that (3.28) holds for all $w \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ such that $w \equiv 0$ in the set $\{u > k\}$ for some $k > 0$. More precisely we have the following lemma.

Lemma 3.8. *Assume that u is an entropy solution to (3.1) with $f \gneq 0$. Then for all $w \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ such that for some $k > 0$ we have $w \equiv 0$ in the set $\{u > k\}$, we obtain*

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))\,d\nu = \int_\Omega f(x)w(x)\,dx. \tag{3.29}$$

Proof. Let $w \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ be such that $w \equiv 0$ in the set $\{u > k_0\}$ for some $k_0 > 0$. Define $v_h = T_h(u-w)$ with $h \gg k_0 + \|w\|_\infty + 1$.

Since u is an entropy solution to (3.1), by (3.27), for k fixed such that $k \gg \max\{k_0, \|w\|_\infty\}$, we have

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v_h(x)) - T_k(u(y)-v_h(y))]\,d\nu \le \int_\Omega f(x)T_k(u(x)-v_h(x))\,dx. \tag{3.30}$$

It is clear that

$$\int_\Omega f(x)T_k(u(x)-v_h(x))\,dx \to \int_\Omega f(x)w\,dx \quad \text{as } h \to \infty.$$

Notice that for $h \gg \|w\|_\infty$ we have $\{u \le w - h\} = \emptyset$, thus for h as above there results that

$$\{|u(x)-w(x)| \ge h\} \equiv \{(u(x)-w(x)) \ge h\}.$$

Define

$$\begin{aligned}
A_h &\equiv \{(x,y) \in D_\Omega : |u(x)-w(x)| < h,\ |u(y)-w(y)| < h\},\\
B_h &\equiv \{(x,y) \in D_\Omega : |u(x)-w(x)| \ge h,\ |u(y)-w(y)| \ge h\}\\
&= \{(x,y) \in D_\Omega : (u(x)-w(x)) \ge h,\ (u(y)-w(y)) \ge h\},\\
E_h &\equiv \{(x,y) \in D_\Omega : (u(x)-w(x)) \ge h,\ |u(y)-w(y)| \le h\},\\
F_h &\equiv \{(x,y) \in D_\Omega : |u(x)-w(x)| < h,\ (u(y)-w(y)) > h\}.
\end{aligned}$$

Then

$$\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v_h(x)) - T_k(u(y)-v_h(y))]\,d\nu = \iint_{A_h} + \iint_{B_h} + \iint_{E_h} + \iint_{F_h} = I_{A_h} + I_{B_h} + I_{E_h} + I_{F_h}.$$

It is clear that

$$\begin{aligned}
I_{A_h} &= \iint_{A_h} U(x,y)[T_k(w(x)) - T_k(w(y))]\,d\nu = \iint_{A_h} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,d\nu\\
&= \iint_{A_h\cap\{u(x)<k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,d\nu + \iint_{A_h\cap\{u(x)>k_0,u(y)>k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,d\nu\\
&\quad + \iint_{A_h\cap\{u(x)>k_0,u(y)\le k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,d\nu + \iint_{A_h\cap\{u(x)\le k_0,u(y)>k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,d\nu\\
&= I_1(h) + I_2(h) + I_3(h) + I_4(h).
\end{aligned}$$

Since $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, we have

$$I_1(h) \to \iint\limits_{\{u(x)<k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv \quad \text{as } h\to\infty.$$

Using the properties of w, we have $I_2(h)=0$. Let us consider now $I_3(h)$. We have

$$\begin{aligned} I_3(h) &= \iint\limits_{A_h\cap\{k_0<u(x)<2k_0,u(y)\le k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv + \iint\limits_{A_h\cap\{u(x)>2k_0,u(y)\le k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv \\ &= J_1(h)+J_2(h). \end{aligned}$$

As above, since $T_k(u) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, we obtain

$$J_1(h) \to \iint\limits_{\{k_0<u(x)<2k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv \quad \text{as } h\to\infty. \tag{3.31}$$

For $J_2(h)$ we have

$$|U(x,y)[w(x)-w(y)]| \le \|w\|_\infty |U(x,y)| = \|w\|_\infty |u(x)-u(y)|^{p-1}.$$

Using the fact that

$$\iint\limits_{\{u(x)>2k_0,u(y)\le k_0\}} |U(x,y)|\,dv < \infty,$$

by the dominated convergence theorem, we conclude that

$$J_2(h) \to \iint\limits_{\{u(x)\ge 2k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv \quad \text{as } h\to\infty. \tag{3.32}$$

Hence by (3.31) and (3.32), we obtain that

$$I_3(h) \to \iint\limits_{\{k_0<u(x)<2k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv + \iint\limits_{\{u(x)\ge 2k_0,u(y)<k_0\}} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv$$

as $h\to\infty$.

We can treat $I_4(h)$ in the same way. Hence,

$$I_{A_h} \to \iint\limits_{D_\Omega} U(x,y)[w(x)-w(y)]\,dv \quad \text{as } h\to\infty.$$

We now deal with I_{B_h}. It is clear that if $(x,y)\in B_h$, then $v_h(x)=v_h(y)=h$, hence

$$I_{B_h} = \iint\limits_{B_h} U(x,y)[T_k(u(x)-h)-T_k(u(y)-h)]\,dv \ge 0.$$

Now, for $(x,y)\in E_h$, we have $u(x)\ge h-\|w\|_\infty > k_0$, thus $w(x)=0$. Hence,

$$\begin{aligned} E_h &\equiv E_h\cap\{u(y)<h-\|w\|_\infty-1\} \cup E_h\cap\{h\ge u(x),\ u(y)\ge h-\|w\|_\infty-1\} \\ &\equiv E_1(h)\cup E_2(h). \end{aligned}$$

It is clear that for $(x,y)\in E_2(h)$ we have $w(x)=w(y)=0$. Then

$$U(x,y)[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v_h(y))] = U(x,y)\big[T_k\big(G_h(u(x))\big)-T_k\big(G_h(u(y))\big)\big] \ge 0.$$

Thus,

$$\iint\limits_{E_2(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-v(x))-T_k(u(y)-v_h(y))]\,dv \ge 0.$$

Therefore, we conclude that

$$I_{E_h} \geq \iint\limits_{E_1(h)} U(x,y)[T_k(G_h(u(x))) - T_k(w(y))]\,dv \geq -2k \iint\limits_{E_1(h)} |U(x,y)|\,dv.$$

Let $h_1 = h - \|w\|_\infty - 1$. Then by (2.5) we reach that

$$\iint\limits_{E_1(h)} |U(x,y)|\,dv \leq \iint\limits_{u(x)>h_1,u(y)<h_1-1} |U(x,y)|\,dv \to 0 \quad \text{as } h \to \infty.$$

Thus, $I_{E_h} \geq o(h)$.

In the same way, we can prove that $I_{F_h} \geq o(h)$. Therefore, we reach that

$$\liminf_{h\to\infty} \frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-v(x)) - T_k(u(y)-v_h(y))]\,dv \geq \frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))\,dv.$$

As a conclusion, and going back to (3.30), we have proved that

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))\,dv \leq \int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx.$$

Substituting w by $-w$ in the above inequality, we obtain that

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} U(x,y)(w(x)-w(y))\,dv = \int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx,$$

which is the desired result. □

Now we are in a position to prove the uniqueness result in Theorem 1.2.

Proof of Theorem 1.2: Uniqueness part. Let u be the entropy positive solution defined in Theorem 1.1. Recall that $u = \limsup u_n$, where u_n is the unique solution to the approximated problem (3.2).

Assume that v is another entropy positive solution to problem (3.1). We claim that $u_n \leq v$ for all n. To prove the claim, we fix n and define $w_n = (u_n - v)_+$. Then $w_n = (u_n - T_k(v))_+$, where $k \gg \|u_n\|_\infty$. Hence $w_n \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and $w_n \equiv 0$ in the set $\{v > \|u_n\|_\infty\}$. Therefore, using w_n as a test function in (3.2) and taking into consideration the identity (3.29) in Lemma 3.8, we reach that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} U_n(x,y)(w_n(x)-w_n(y))\,dv &= \int\limits_\Omega f_n(x)w_n(x)\,dx \\ &\leq \int\limits_\Omega f(x)w_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} V(x,y)(w_n(x)-w_n(y))\,dv,\end{aligned}$$

where

$$U_n(x,y) = |u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y)) \quad \text{and} \quad V(x,y) = |v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y)).$$

Thus,

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{D_\Omega} (U_n(x,y) - V(x,y))(w_n(x)-w_n(y))\,dv \leq 0.$$

Using the fact that

$$(U_n(x,y) - V(x,y))(w_n(x)-w_n(y)) \geq C|w_n(x)-w_n(y)|^p,$$

it follows that $w_n \equiv 0$, hence $u_n \leq v$ for all n and the claim follows. As a consequence we obtain that $u \leq v$.

Let us now prove that $v \leq u$. To this end, we will follow closely the argument used in [7].

Since u and v are entropy solutions to (3.1), for $h \gg k$, we have

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\,d\nu \le \int_\Omega f(x)T_k(u(x)-T_h(v(x)))\,dx \tag{3.33}$$

and

$$\frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]\,d\nu \le \int_\Omega f(x)T_k(v(x)-T_h(u(x)))\,dx. \tag{3.34}$$

It is clear that

$$\int_\Omega f(x)T_k(u(x)-T_h(v(x)))\,dx + \int_\Omega f(x)T_k(v(x)-T_h(u(x)))\,dx \to 0 \quad \text{as } h \to \infty.$$

Thus from (3.33) and (3.34), we have

$$\begin{aligned} I(h) \equiv{}& \frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\,d\nu \\ &+ \frac{1}{2}\iint_{D_\Omega} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]\,d\nu \\ ={}& P(h)+Q(h) \le o(h). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Let

$$D^1_\Omega(h) \equiv \{(x,y)\in D_\Omega : u(x)<h \text{ and } u(y)<h\}$$

and

$$D^2_\Omega(h) \equiv \{(x,y)\in D_\Omega : v(x)<h \text{ and } v(y)<h\}.$$

Then

$$\begin{aligned} P(h) ={}& \iint_{D^1_\Omega(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\,d\nu \\ &+ \iint_{D_\Omega\setminus D^1_\Omega(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\,d\nu \\ ={}& P_1(h)+P_2(h) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q(h) ={}& \iint_{D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]\,d\nu \\ &+ \iint_{D_\Omega\setminus D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]\,d\nu \\ ={}& Q_1(h)+Q_2(h). \end{aligned}$$

We claim that $P_2(h) \ge o(h)$ and $Q_2(h) \ge o(h)$.

Let us begin by proving that $P_2(h) \ge o(h)$. Recall that $u \le v$. Then

$$D_\Omega \setminus D^1_\Omega(h) = \{(x,y)\in D_\Omega : u(x)\ge h\} \cup \{(x,y)\in D_\Omega : u(y)\ge h\}.$$

If $u(x) \ge h$ and $u(y) \ge h$, then $v(x) \ge h$ and $v(y) \ge h$. Thus,

$$U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(u(x)-h)-T_k(u(y)-h)] \ge 0.$$

On the other hand, by (2.5), we find

$$\iint\limits_{\{u(x)>h,u(y)<h-1\}} |U(x,y)|d\nu = o(h).$$

Hence,

$$\iint\limits_{\{u(x)\geq h\}} U(x,y)\big[T_k\big(u(x)-T_h(v(x))\big)-T_k\big(u(y)-T_h(v(y))\big)\big]\,d\nu \geq \iint\limits_{\{u(x)\geq h,h-1\leq u(y)\leq h\}} U(x,y)\big[T_k(u(x)-h)-T_k\big(u(y)-T_h(v(y))\big)\big]\,d\nu + o(h). \tag{3.36}$$

Notice that for $(x,y)\in\{u(x)\geq h,\ h-1\leq u(y)\leq h\}$ we have

$$U(x,y)\big[T_k(u(x)-h)-T_k\big(u(y)-T_h(v(y))\big)\big] = U(x,y)\big[T_k(u(x)-h)+T_k\big(T_h(v(y))-u(y)\big)\big]\geq 0.$$

Then by (3.36) there results that

$$\iint\limits_{\{u(x)\geq h\}} U(x,y)\big[T_k\big(u(x)-T_h(v(x))\big)-T_k\big(u(y)-T_h(v(y))\big)\big]\,d\nu \geq o(h). \tag{3.37}$$

In the same way, we can prove that

$$\iint\limits_{\{u(y)\geq h\}} U(x,y)\big[T_k\big(u(x)-T_h(v(x))\big)-T_k\big(u(y)-T_h(v(y))\big)\big]\,d\nu \geq o(h). \tag{3.38}$$

Thus combining (3.37) and (3.38), we arrive at $P_2(h)\geq o(h)$ as claimed.

We now deal with $Q_2(h)$. Recall that

$$Q_2(h) = \iint\limits_{D_\Omega\setminus D^2_\Omega(h)} V(x,y)\big[T_k\big(v(x)-T_h(u(x))\big)-T_k\big(v(y)-T_h(u(y))\big)\big]\,d\nu.$$

As above, we have

$$D_\Omega\setminus D^2_\Omega(h) = \{(x,y)\in D_\Omega : v(x)\geq h\}\cup\{(x,y)\in D_\Omega : v(y)\geq h\}\equiv M_1(h)\cup M_2(h)\cup M_3(h),$$

where

$$M_1(h)=\{(x,y)\in D_\Omega : v(x)\geq h \text{ and } v(y)\geq h\},\quad M_2(h)=\{(x,y)\in D_\Omega : v(x)\geq h \text{ and } v(y)<h\},$$

and

$$M_3(h)=\{(x,y)\in D_\Omega : v(x)<h \text{ and } v(y)\geq h\}.$$

Let

$$Z_1(h)=\{(x,y)\in D_\Omega : v(x)-T_h(u(x))\geq k\}\quad\text{and}\quad Z_2(h)=\{(x,y)\in D_\Omega : v(y)-T_h(u(y))\geq k\}.$$

If $(x,y)\in Z_1(h)\cap Z_2(h)$, we have

$$V(x,y)\big[T_k\big(v(x)-T_h(u(x))\big)-T_k\big(v(y)-T_h(u(y))\big)\big]=0.$$

Hence we can assume that

$$(x,y)\in(Z_1(h)\setminus Z_2(h))\cup(Z_2(h)\setminus Z_1(h))\equiv Y_1(h)\cup Y_2(h).$$

Therefore, we conclude that

$$Q_2(h) = \iint\limits_{M_1(h)\cap Y_1(h)} + \iint\limits_{M_2(h)\cap Y_1(h)} + \iint\limits_{M_3(h)\cap Y_1(h)} + \iint\limits_{M_1(h)\cap Y_2(h)} + \iint\limits_{M_2(h)\cap Y_2(h)} + \iint\limits_{M_3(h)\cap Y_2(h)} = J_1(h)+J_2(h)+J_3(h)+T_1(h)+T_2(h)+T_3(h). \tag{3.39}$$

Let us begin by proving that $J_1(h) \geq o(h)$. Notice that

$$M_1(h) \cap Y_1(h) = \{(x,y) \in D_\Omega : v(x) \geq h,\ v(y) \geq h \text{ and } v(x) - T_h(u(x)) \geq k,\ v(y) - T_h(u(y)) < k\}.$$

Then for $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$ we have

$$V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] = V(x,y)[k - (v(y) - T_h(u(y)))]$$

If $v(x) \geq v(y)$, then $V(x,y)[k - (v(y) - T_h(u(y)))] \geq 0$. Therefore, we just have to consider the case where $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$ with $v(x) < v(y)$. Thus,

$$|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]| = (v(y) - v(x))^{p-1}[k - (v(y) - T_h(u(y)))].$$

Now taking into consideration that $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$, we get

$$0 \leq (v(y) - v(x)) \leq T_h(u(y)) + k - (T_h(u(x)) + k) \leq T_h(u(y)) - T_h(u(x)) \leq u(y) - u(x).$$

Therefore, we conclude that

$$\big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\big| \leq 2k(u(y) - u(x))^{p-1}.$$

If $u(x) \geq h$, then $u(y) \geq h$, hence

$$V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))] = V(x,y)[T_k(v(x)) - T_k(v(y))] \geq 0.$$

It then remains to consider the case $u(x) < h$. We distinguish the following three cases:

(i) If $u(y) > (h+1)$, by (2.5), we reach that

$$\iint\limits_{\{u(y)>h+1,u(x)<h\}} |U(x,y)|\,d\nu = o(h).$$

(ii) If $h < u(y) \leq (h+1)$, then $0 \leq k - (v(y) - T_h(u(y))) \leq u(y) - u(x)$, thus

$$\big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\big| \leq (u(y) - u(x))^p.$$

Now, by (2.7), we get

$$\iint\limits_{\{h<u(y)\leq h+1,u(x)<h\}} (u(y) - u(x))^p\,d\nu = o(h).$$

(iii) We now deal with the set $u(y) \leq h$. Since $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$, we have $u(y) \geq (h-k)$. Therefore, if $u(x) < (h-k-1)$, using again (2.6), we reach that

$$\iint\limits_{\{u(y)>(h-k),u(x)<(h-k-1)\}} |U(x,y)|\,d\nu = o(h).$$

Let us assume that $(h-k-1) < u(x) \leq u(y) < h$. In this case, we have

$$[k - (v(y) - T_h(u(y)))] = u(y) - (v(y) - k) \leq u(y) - (v(x) - k) \leq u(y) - u(x).$$

So for $(x,y) \in M_1(h) \cap Y_1(h)$ with $h-k-1 < u(x) \leq u(y) < h$ we get

$$\big|V(x,y)[T_k(v(x)-T_h(u(x)))-T_k(v(y)-T_h(u(y)))]\big| = (v(y)-v(x))^{p-1}[k-(v(y)-T_h(u(y)))] \leq (u(y)-u(x))^p.$$

Now, by using again (2.7), it follows that

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\{h-k-1<u(x)\leq u(y)<h\}} \big|V(x,y)[T_k(v(x) - T_h(u(x))) - T_k(v(y) - T_h(u(y)))]\big|\,d\nu\\ &= \iint\limits_{\{h-k-1<u(x)\leq u(y)<h\}} (u(y) - u(x))^p\,d\nu = o(h).\end{aligned}$$

Therefore, combining the above estimates, we obtain $J_1(h) \geq o(h)$.

For $J_2(h)$ we have $v(y) \le h < v(x)$ and

$$T_k\big(v(x) - T_h(u(x))\big) - T_k\big(v(y) - T_h(u(y))\big) \ge k - \big(v(y) - T_h(u(x))\big) \ge 0.$$

Thus,

$$V(x,y)\big[T_k\big(v(x) - T_h(u(x))\big) - T_k\big(v(y) - T_h(u(y))\big)\big] \ge 0 \quad \text{for all } (x,y) \in M_2(h) \cap Y_1(h).$$

Hence, $J_2(h) \ge 0$.

We now deal with $J_3(h)$. We have $v(x) \le h < v(y)$ and for all $(x,y) \in M_3(h) \cap Y_1(h)$ we have

$$\big|V(x,y)\big[T_k\big(v(x) - T_h(u(x))\big) - T_k\big(v(y) - T_h(u(y))\big)\big]\big| = (v(y) - v(x))^{p-1}\big[k - \big(v(y) - T_h(u(y))\big)\big].$$

If $v(x) \le (h-1)$, then by (2.6) we have

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\{v(y)>h, v(x)<h-1\}} \big|V(x,y)\big[T_k\big(v(x) - T_h(u(x))\big) - T_k\big(v(y) - T_h(u(y))\big)\big]\big| \, d\nu \\ &\le 2k \iint\limits_{\{v(y)>h, v(x)<h-1\}} |V(x,y)| d\nu = o(h). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Now, assume $(h-1) < v(x) \le h$. Since $(x,y) \in M_3(h) \cap Y_1(h)$, we obtain $v(y) \le k + T_h(u(y)) \le k + u(y)$. Thus, $u(y) > (h-k)$. It is clear that

$$0 \le v(y) - v(x) \le T_h(u(y)) - T_h(u(x)) \le u(y) - u(x). \tag{3.41}$$

Hence following the same discussion as in case (iii) in the analysis of $J_1(h)$ and using (3.40) and (3.41), we obtain that $J_3(h) \ge 0$.

Notice that in a symmetric way we can prove that $T_1(h) + T_2(h) + T_3(h) \ge o(h)$.

Going back to (3.39), it holds that $Q_2(h) \ge o(h)$ and then the claim follows.

Therefore, going back to the definition of $I(h)$ given in (3.35) and taking into consideration that $u < h$ in the set $\{v < h\}$, we get

$$\begin{aligned} I(h) &\ge \frac{1}{2} \iint\limits_{D^1_\Omega(h)} U(x,y)\big[T_k\big(u(x) - T_h(v(x))\big) - T_k\big(u(y) - T_h(v(y))\big)\big] \, d\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint\limits_{D^2_\Omega(h)} V(x,y)[T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))] \, d\nu + o(h) \\ &\ge \frac{1}{2} \iint\limits_{D^2_\Omega(h)} (V(x,y) - U(x,y))[T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))] \, d\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint\limits_{D^1_\Omega(h) \setminus D^2_\Omega(h)} U(x,y)\big[T_k\big(u(x) - T_h(v(x))\big) - T_k\big(u(y) - T_h(v(y))\big)\big] \, d\nu + o(h) \\ &\ge I_1(h) + I_2(h) + o(h). \end{aligned}$$

It is clear that

$$I_1(h) \ge C \iint\limits_{D^2_\Omega(h)} |T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))|^p \, d\nu.$$

We claim that $I_2(h) \ge o(h)$.

Notice that

$$D^1_\Omega(h) \setminus D^2_\Omega(h) = N_1(h) \cup N_2(h) \cup N_3(h),$$

where

$$\begin{aligned} N_1(h) &\equiv \big\{(x,y) \in D_\Omega : u(x) \le h,\ u(y) \le h,\ v(x) > h,\ v(y) > h\big\}, \\ N_2(h) &\equiv \big\{(x,y) \in D_\Omega : u(x) \le h,\ u(y) \le h,\ v(x) > h,\ v(y) \le h\big\}, \\ N_3(h) &\equiv \big\{(x,y) \in D_\Omega : u(x) \le h,\ u(y) \le h,\ v(x) \le h,\ v(y) > h\big\}. \end{aligned}$$

Since
$$\frac{1}{2}\iint\limits_{N_1(h)} U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]\,d\nu \geq 0,$$
we conclude that
$$I_2(h) \geq \frac{1}{2}\iint\limits_{N_2(h)} + \frac{1}{2}\iint\limits_{N_3(h)} = I_{21}(h)+I_{22}(h).$$

For $(x,y)\in N_2(h)$ we will consider the following three main cases:

(I) If $h-u(x)\leq v(y)-u(y)$, then $0\leq h-v(y)\leq u(x)-u(y)$. Hence,
$$U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(v(y)-u(y))-T_k(h-u(x))] \geq 0.$$

(II) If $u(x)-u(y)\leq 0\leq h-v(y)$, then $u(x)-u(y)\leq 0$ and $h-u(x)\geq v(y)-u(y)$. Thus,
$$U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))] = U(x,y)[T_k(v(y)-u(y))-T_k(h-u(x)] \geq 0.$$

(III) Now consider the case where $0\leq u(x)-u(y)\leq h-v(y)$. It is clear that $0\leq u(x)-u(y)\leq v(x)-v(y)$. Hence,
$$\begin{aligned}&|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]|\\ &\quad = (u(x)-u(y))^{p-1}[T_k(h-u(x))-T_k(v(y)-u(y))] \leq 2k(v(x)-v(y))^{p-1}.\end{aligned}$$
If $v(y)\leq h-1$ or $v(x)\geq h+1$, by (2.5), we get
$$\iint\limits_{N_2(h)\cap\{\{v(x)>h,v(y)<h-1\}\cup\{v(x)>h+1,v(y)<h\}\}} |V(x,y)|d\nu = o(h).$$
Thus, we deal with the set $\{h-1<v(y)\leq h$ and $v(x)\leq h+1\}$.

It is clear that if $v(y)-u(y)\geq k$, then $h-u(x)\geq k$. Thus,
$$|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]| = 0.$$
Assume that $h-u(x)\leq k$. Then $v(y)-u(y)\leq k$, hence
$$\begin{aligned}&|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]|\\ &\quad \leq (v(x)-v(y))^{p-1}[(h-u(x))-(v(y)-u(y))] \leq (v(x)-v(y))^{p}.\end{aligned}$$
Therefore, using (2.7), we obtain
$$\begin{aligned}&\iint\limits_{N_2(h)\cap\{h-1<v(y)\leq h\leq v(x)\leq h+1\}\cap\{h-k\leq u(x)\}} |U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]|\,d\nu\\ &\quad\leq \iint\limits_{N_2(h)\cap\{h-1<v(y)\leq h\leq v(x)\leq h+1\}} (v(x)-v(y))^p\,d\nu = o(h).\end{aligned}$$
We now consider the set $\{v(y)-u(y)<k<h-u(x)\}$. Then $u(x)<h-k$, and thus $u(y)<h-k$. As above, we have
$$\begin{aligned}&|U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]|\\ &\quad \leq (v(x)-v(y))^{p-1}[(k-(v(y)-u(y))] \leq (v(x)-v(y))^{p}\end{aligned}$$
Thus using again (2.7), we obtain
$$\begin{aligned}&\iint\limits_{N_2(h)\cap\{h-1<v(y)\leq h\leq v(x)\leq h+1\}\cap\{u(x)<h-k\}} |U(x,y)[T_k(u(x)-T_h(v(x)))-T_k(u(y)-T_h(v(y)))]|\,d\nu\\ &\quad\leq \iint\limits_{N_2(h)\cap\{h-1<v(y)\leq h\leq v(x)\leq h+1\}} (v(x)-v(y))^p\,d\nu = o(h).\end{aligned}$$

Therefore, we conclude that $I_{21}(h) \geq o(h)$. In the same way and using a symmetric argument, we can prove that $I_{22}(h) \geq o(h)$.

Hence $I_2(h) \geq o(h)$ and the claim follows.

In conclusion, we have proved that

$$C \iint_{D^2_\Omega(h)} |T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))|^p \, dv \leq o(h).$$

Let $h \to \infty$. There results that

$$\iint_{D_\Omega} |T_k(v(x) - u(x)) - T_k(v(y) - u(y))|^p \, dv = 0.$$

Thus $T_k(u) = T_k(v)$ for all k. Then $u = v$. □

4 Problem with reaction term and general datum

In this section, we consider the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u = \lambda u^q + g(x) & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

where λ, $q > 0$ and $g \gneq 0$. According to the values of q and λ, we will prove that problem (4.1) has an entropy solution in the sense of Definition 2.9.

Let us begin with the case $q < p - 1$. We have the following existence result.

Theorem 4.1. *Assume that $q < p - 1$. Then for all $g \in L^1(\Omega)$ and for all $\lambda > 0$ problem (4.1) has a positive entropy solution.*

Proof. Without loss of generality we can assume that $\lambda = 1$. We set $g_n = T_n(g)$. Then $g_n \gneq 0$ and $g_n \uparrow g$ strongly in $L^1(\Omega)$. Define u_n to be the unique solution to the approximated problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n = u_n^q + g_n & \text{in } \Omega, \\ u_n \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Notice that the existence of u_n can be obtained as a critical point of the functional

$$J(u) = \frac{1}{2p} \iint_{D_\Omega} |u(x) - u(y)|^p \, dv - \frac{1}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1} \, dx - \int_\Omega g_n u \, dx.$$

However, the uniqueness follows by using the comparison result in Lemma 2.4. It is clear that by the same comparison principle we obtain that $u_n \leq u_{n+1}$.

We claim that $\{u_n^{p-1}\}_n$ is uniformly bounded in $L^1(\Omega)$. To prove the claim we argue by contradiction. Assume that $C_n \equiv \|u_n^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} \to \infty$ as $n \to \infty$. We set

$$v_n = \frac{u_n}{C_n^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Then $\|v_n^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} = 1$ and v_n solves the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} v_n = C_n^{\frac{q-p+1}{p-1}} v_n^q + C_n^{-1} g_n & \text{in } \Omega, \\ v_n \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

We set

$$G_n \equiv C_n^{\frac{q-p+1}{p-1}} v_n^q + C_n^{-1} g_n.$$

Then $\|G_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ as $n \to \infty$. Taking into consideration the results of Lemmas 3.1 and 3.2, we get the existence of a measurable function v such that $T_k(v) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, $v^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta} dx)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$, and $T_k(v_n) \rightharpoonup T_k(v)$ weakly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Since $\sigma > 1$, using Vitali's lemma, we can prove that $v_n^{p-1} \to v^{p-1}$ strongly in $L^1(\Omega)$. Thus, $\|v^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

Now taking $T_k(v_n)$ as a test function in (4.2) and using the fact that $\|G_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$, we conclude that

$$\|T_k(v_n)\|_{W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)} \to 0$$

as $n \to \infty$. Hence $T_k(v) = 0$ for all k. Then $v \equiv 0$. Thus we reach a contradiction with the fact that $\|v^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

Therefore, $\|u_n^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} \le C$ for all n and the claim follows.

Since $q < p - 1$, we conclude that the sequence $\{u_n^q + g_n\}_n$ is bounded in $L^1(\Omega)$, and thus we get the existence of a measurable function u such that $u_n^q \uparrow u^q$, $u^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta} dx)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$ and $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ weakly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Since $\{u_n^q + f_n\}_n$ is an increasing sequence, using Lemma 3.6, we conclude that $T_k(u_n) \to T_k(u)$ strongly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$. Now, by Theorem 1.2 we obtain that u is an entropy solution to problem (4.1) in the sense of Definition 2.9.

We now prove that u is the minimal solution of (4.1).

Let $\bar{u}$ be another entropy positive solution to problem (4.1). Recall that $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, so to finish we have to show that $u_n \le \bar{u}$ for all n. Fix n and consider the sequence $\{w_{n,i}\}_i$ defined by $w_{n,0} = 0$ with $w_{n,i+1}$ being the unique solution to the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} w_{n,i+1} = w_{n,i}^q + g_n & \text{in } \Omega, \\ w_{n,i+1} \ge 0 & \text{in } \Omega, \\ w_{n,i+1} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

It is clear that the sequence $\{w_{n,i}\}_i$ is increasing in i with $w_{n,i} \le u_n$ for all i. Hence $w_{n,i} \uparrow \bar{w}_n$ is a solution to problem (4.4). Now, by the comparison principle in Lemma 2.4 we conclude that $\bar{w}_n = u_n$, and by an iteration argument we can prove that $w_{n,i} \le \bar{u}$ for all i. Hence $u_n \le \bar{u}$ and the result follows. □

In the case where $q = p - 1$, the problem is related to the first eigenvalue of the operator $(-\Delta)^s_{p,\beta}$. More precisely, we set

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega),\ \phi \ne 0} \frac{\frac{1}{2} \iint_{D_\Omega} |\phi(x) - \phi(y)|^p \, dv}{\int_\Omega |\phi|^p \, dx}.$$

As in the case $\beta = 0$, it is not difficult to show that $\lambda_1 > 0$ and that λ_1 is attained.

Now, we can formulate our existence result.

Theorem 4.2. *Assume that $q = p - 1$. If $\lambda < \lambda_1$, then for all $g \in L^1(\Omega)$ problem (4.1) has a minimal entropy positive solution.*

To prove Theorem 4.2, we need the following classical regularity result.

Lemma 4.3. *Let u be the unique solution to the problem*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

where $|f||x|^{p_s^*\beta} \in L^m(\Omega, |x|^{-p_s^*\beta} dx)$ for some $m > \frac{N}{ps}$. Then $u \in L^\infty(\Omega)$.

Proof. We follow closely the Stampacchia argument given in [24]. Using $G_k(u(x))$, with $k > 0$, as a test function (4.3), and taking into consideration that

$$U(x, y)\big(G_k(u(x)) - G_k(u(y))\big) \ge |G_k(u(x)) - G_k(u(y))|^p,$$

where $U(x,y) = |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))$, we reach that

$$\frac{1}{2}\int\int_{D_\Omega} \frac{|G_k(u(x)) - G_k(u(y))|^p}{|x-y|^{N+ps}} \frac{dx}{|x|^\beta}\frac{dy}{|y|^\beta} \le \int_\Omega |f||G_k(u(x))|\,dx.$$

By the Weighted Fractional Sobolev Inequality in Theorem 2.2, it follows that

$$S\|G_k(u)\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega,|x|^{-p_s^*\beta}\,dx)} \le \int_{A_k} |f||G_k(u(x))|\,dx,$$

where $A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| \ge k\}$. We set $d\omega = \frac{dx}{|x|^{p_s^*\beta}}$. Then

$$\begin{aligned}\int_{A_k} |f||G_k(u(x))|dx &= \int_{A_k} (|f||x|^{p_s^*\beta})|G_k(u(x))|\,d\omega \\ &\le \|G_k(u)\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega,d\omega)} \|(|f||x|^{p_s^*\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)} |A_k|_{d\omega}^{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*}}.\end{aligned}$$

Thus,

$$C\|G_k(u)\|^{\frac{p-1}{p_s^*}}_{L^{p_s^*}(\Omega,d\omega)} \le \|(|f||x|^{p_s^*\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)} |A_k|_{d\omega}^{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*}}.$$

Let $h > k$. Since $A_h \subset A_k$, there results that

$$(h-k)|A_h|_{d\omega}^{\frac{p-1}{p_s^*}} \le \|(|f||x|^{p_s^*\beta})\|_{L^m(\Omega,d\omega)} |A_k|_{d\omega}^{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*}}.$$

Hence,

$$|A_h|_{d\omega} \le \frac{C\|(|f||x|^{p_s^*\beta})\|^{\frac{p_s^*}{p-1}}_{L^m(\Omega,d\omega)} |A_k|_{d\omega}^{\frac{p_s^*}{p-1}(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*})}}{(h-k)^{\frac{p_s^*}{p-1}}}.$$

We set $\Phi(k) = |A_h|_{d\omega}$. Then

$$\Phi(h) \le \frac{C\Phi^{\frac{p_s^*}{p-1}(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{p_s^*})}(k)}{(h-k)^{\frac{p_s^*}{p-1}}}.$$

Since $m > \frac{N}{ps}$, we have

$$\frac{p_s^*}{p-1}\Big(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{p_s^*}\Big) > 1.$$

By the classical result of Stampacchia (see [24]) we get the existence of $k_0 > 0$ such that $\Phi(h) = 0$ for all $h \ge k_0$, hence we conclude the proof. □

Proof of Theorem 4.2. We follow closely the argument used in the proof of Theorem 4.1.

Define u_n to be the unique solution to the approximated problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_n = \lambda u_n^{p-1} + g_n & \text{in } \Omega, \\ u_n \ge 0 & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Notice that, since $\lambda < \lambda_1$, the existence of u_n can be obtained as a critical point of the functional

$$J(u_n) = \frac{1}{2p}\iint_{D_\Omega} |u(x) - u(y)|^p\,dv - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx - \int_\Omega g_n u\,dx.$$

However, the uniqueness follows by using the comparison result in Lemma 2.4. It is clear that by using the same comparison principle we obtain that $u_n \le u_{n+1}$.

We claim that $\{u_n^{p-1}\}_n$ is uniformly bounded in $L^1(\Omega)$. We argue by contradiction. Assume that

$$C_n \equiv \|u_n^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} \to \infty$$

as $n \to \infty$. We set

$$v_n = \frac{u_n}{C_n^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Then $\|v_n^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} = 1$ and v_n solves the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} v_n = \lambda v_n^{p-1} + \dfrac{g_n}{C_n} & \text{in } \Omega, \\ v_n \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

We set $G_n \equiv v_n^{p-1} + \frac{g_n}{C_n}$, thus $\|G_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C$. Taking into consideration the results of Lemmas 3.1 and 3.2, we get the existence of a measurable function v such that $T_k(v) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$, $v^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$ and $T_k(v_n) \rightharpoonup T_k(v)$ weakly in $W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Since $\sigma > 1$, using Vitali's lemma, we can prove that $v_n^{p-1} \to v^{p-1}$ strongly in $L^1(\Omega)$. Thus, $\|v^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} = 1$. It is clear that $G_n \to \lambda v^{p-1}$ strongly in $L^1(\Omega)$. Thus v solves

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} v = \lambda v^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ v \gneq 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

We claim that $v \in L^\infty(\Omega)$. From the previous discussion we know that $v^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$. Thus setting $a_1 = \frac{(p-1)N}{N-ps} - (p-1) - \varepsilon$, with ε very small, and using an approximation argument, we can take v^{a_1} as a test function in (4.5) to conclude that

$$\iint\limits_{D_\Omega} |v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))(v^{a_1}(x) - v^{a_1}(y))\, dv \leq C.$$

Hence by using inequality (2.2), it follows that

$$\iint\limits_{D_\Omega} |v^{\frac{a_1+p-1}{p}}(x) - v^{\frac{a_1+p-1}{p}}(y)|^p\, dv \leq C.$$

Using the weighted Sobolev inequality in Theorem 2.2, we reach that

$$\int\limits_\Omega \frac{|v(x)|^{(a_1+p-1)\frac{p_s^*}{p}}}{|x|^{p_s^*\beta}}\, dx < \infty.$$

Now we set $a_2 = (a_1 + p - 1)\frac{p_s^*}{p} - (p-1)$. Then using v^{a_2} as a test function in (4.5) and following the same argument as above, we conclude that

$$\int\limits_\Omega \frac{|v(x)|^{(a_2+p-1)\frac{p_s^*}{p}}}{|x|^{p_s^*\beta}}\, dx < \infty.$$

Now consider the sequence $a_{n+1} = (a_n + p - 1)\frac{p_s^*}{p} - (p-1)$. It is clear that $a_n \uparrow \infty$ and by an induction argument we can prove that $\int_\Omega v^{a_n}\, dx < \infty$ for all n. Thus using Theorem 4.3, we conclude that v is an energy solution to problem (4.5) and that $v \in L^\infty(\Omega)$. Now, by using v as a test function in (4.5) and taking into consideration that $\lambda < \lambda_1$, it follows that $\|v\|_{W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)} = 0$, which is a contradiction to the fact that $\|v^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Therefore, the claim follows. The rest of the proof follows exactly the same argument as in the proof of Theorem 4.1. □

Let us now consider the case $q > p - 1$. We follow closely the argument used in [9]. It is clear that in this case additional conditions on g are needed in order to guarantee the existence of a positive solution.

More precisely, if $g \in L^1(\Omega)$, we define w to be the unique positive solution to the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} w = g & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

We are able to prove the following result.

Theorem 4.4. *Assume that $g \in L^1(\Omega)$ verifies $w^q(x) \leq g(x)$ a.e. in Ω. Then there exists a positive constant $\bar{\lambda}$ such that for all $\lambda < \bar{\lambda}$ problem* (4.1) *has a minimal entropy positive solution.*

Proof. Recall that by the results of Lemmas 3.1 and 3.2 we know that $w^{p-1} \in L^\sigma(\Omega, |x|^{-2\beta}dx)$ for all $\sigma < \frac{N}{N-ps}$ and $T_k(w) \in W^{s,p}_{\beta,0}(\Omega)$.

Let v be the minimal solution to the problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} v = g + w^q & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

It is not difficult to show that $v \leq 2^{p-1}w$, hence by using the hypothesis on g, it follows that

$$(-\Delta)^s_{p,\beta} v = g + w^q \geq g + 2^{\frac{q}{1-p}} v^q.$$

Then v is a supersolution to (4.1) for $\lambda \leq \bar{\lambda} = 2^{\frac{q}{1-p}}$. Fixing λ as above and defining the sequence $\{u_n\}_n$ by $u_0 = 0$, we have that u_{n+1} is the unique solution to the following problem:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_{p,\beta} u_{n+1} = u_n^q + g_{n+1} & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

By an induction argument, we can prove that $u_n \leq v$ for all n and that the sequence $\{u_n\}_n$ is increasing in n. Thus $\{u_n^q + g_n\}_n$ is increasing and bounded in $L^1(\Omega)$. Now, using the same compactness argument as in the proofs of Theorems 4.1 and 4.2, we get the existence result. □

Acknowledgment: The authors would like to express their gratitude to the anonymous referee for their comments and suggestions that improved the last version of the manuscript.

Funding: Work partially supported by Project MTM2013–40846-P, MINECO, Spain.

References

[1] B. Abdellaoui and R. Bentifour, Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequalities of fractional order and applications, submitted.

[2] B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral and A. Primo, A note on the effect of the Hardy potential in some Calderon–Zygmund properties for the fractional Laplacian, *J. Differential Equations* **260** (2016), 8160–8206.

[3] B. Abdellaoui and I. Peral, On quasilinear elliptic equation related to some Caffarelli–Khon–Nirenberg inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.* **3** (2003), no. 3, 539–566.

[4] B. Abdellaoui, I. Peral and A. Primo, A remark on the fractional Hardy inequality with a remainder term, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **352** (2014), 299–303.

[5] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[6] N. Alibaud, B. Andreianov and M. Bendahmane, Renormalized solutions of the fractional Laplace equation, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **348** (2010), 759–762.

[7] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre and J. L. Vázquez, An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)* **22** (1995), no. 2, 240–273.

[8] L. Boccardo, T. Galloüet and L. Orsina, Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations involving measure data, *Ann. Inst. H. Poincar é Anal. Non Linéaire* **13** (1996), no. 13, 539–551.

[9] H. Brezis and X. Cabré, Some simple nonlinear PDEs without solution, *Boll. Unione. Mat. Ital. Sez. B* **8** (1998), no. 1, 223–262.

[10] H. Brezis and S. Kamin, Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, *Manuscripta Math.* **74** (1992), 87–106.

[11] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, First order interpolation inequality with weights, *Compos. Math.* **53** (1984), 259–275.

[12] M. Caponi and P. Pucci, Existence theorems for entire solutions of stationary Kirchhoff fractional p-Laplacian equations, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **195** (2016), no. 6, 2099–2129.

[13] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina and A. Prignet, Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)* **28** (1999), no. 4, 741–808.

[14] A. Di Castro, T. Kuusi and G. Palatucci, Local behavior of fractional p-minimizers, *Ann. Inst. H. Poincar é Anal. Non Linéaire* **33** (2016), no. 5, 1279–1299.

[15] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math.* **136** (2012), no. 5, 521–573.

[16] E. B. Fabes, C. E. Kenig and R. P. Serapioni, The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations, *Comm. Partial Differential Equations* **7** (1982), no. 1, 77–116.

[17] F. Ferrari and I. Verbitsky, Radial fractional Laplace operators and Hessian inequalities, *J. Differential Equations* **253** (2012), no. 1, 244–272.

[18] R. L. Frank, E. H. Lieb and R. Seiringer, Hardy–Lieb–Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), 925–950.

[19] J. Heinonen, T. Kilpelainen and O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[20] K. H. Karlsen, F. Petitta and S. Ulusoy, A duality approach to the fractional Laplacian with measure data, *Publ. Mat.* **55** (2011), no. 1, 151–161.

[21] T. Kuusi, G. Mingione and Y. Sire, Nonlocal equations with measure data, *Comm. Math. Phys.* **337** (2015), 1317–1368.

[22] T. Leonori, I. Peral, A. Primo and F. Soria, Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **35** (2015), no. 12, 6031–6068.

[23] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss. 342, Springer, Heidelberg, 2011.

[24] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **15** (1965), 189–258.