Dédicaces

A mon père, ma mère et mon frère

A mon mari et mon fils

A tout ceux qui m'aiment.

Remerciements

Avant tout, il apparaît opportun de rendre grâce à DIEU de m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer ce travail.

*Ma profonde reconnaissance s'adresse au Professeur **Sidi Mohammed Bouguima** et au Professeur **Khalil EZZINBI**, mes directeurs de thèse, pour leur aide et leur conseils précieux qu'ils n'ont eu cessé de prodiguer tout au long de ce travail. Qu'ils soient vivement remerciés.*

*Mes sincères remerciements sont destinés à Monsieur le Professeur **Noureddine GHOUALI** pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **Mouffak BENCHOHRA**, Monsieur **Smail DJEBALI** et Monsieur **Mustapha YEBDRI** pour avoir accepté de faire partie du jury. Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de ma sincère gratitude.*

*je tiens à remercier aussi le Professeur **Hassan HBID** qui m'a accueilli et pour toutes les facilités offertes dans son laboratoire des Mathématiques Appliquées et Dynamique des Populations de l'Université Caddi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech.*

*Une pensée particulière va au défunct **Ovide ARINO** qui m'a accueilli dans son laboratoire des Mathématiques Appliquées et Dynamique des Populations de l'UR GEODES, IRD, France et qui m'a toujours encouragée et soutenue sans limite.*

*Enfin, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes parents, mon frère et sa femme, mon mari **Yassine** et mon fils **Nabil** pour leur soutien et leur aide.*

Que tous ceux qui ne se verront pas cités ici, trouve l'expression de ma reconnaissance.

Une fois encore, merci à toutes et à tous.

Publications et Communications faites aucours de la réalisation de cette Thèse

Publications

- **Nadira BOUKLI-HACENE** and **Khalil EZZINBI**, *Weighted pseudo almost periodic solutions for some partial functional differential equations*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Volume 71, Issue 9, 1 November 2009, Pages 3612-3621.
- **Nadira BOUKLI-HACENE** and **Khalil EZZINBI**, *Weighted pseudo almost automorphic solutions for some partial functional differential equations*, (travail en cours).
- **Abdelkader BOUCHERIF** and **Nadira BOUKLI-HACENE**, *Two-parameter problems with time-dependent three-point boundary conditions*, Maghreb Math. Rev., Volume 8, N° 1 et 2, (1999), 57-66.

Communications

- **Nadira BOUKLI-HACENE**, Dichotomie exponentielle, Journées de mathématiques "Systèmes à retard et applications en dynamique de population", Université de Tlemcen, 7-8 Mai 2001.
- Participation à l'école CIMPA " Delay differential equations and applications ", Marrakech, 9-21 september 2002.
  http ://euromedbiomath.m2002.free.fr/

- **Nadira BOUKLI-HACENE**, " Dichotomie exponentielle pour les équations Différentielles Ordinaires ", Première Conférence internationale sur les modèles et méthodes mathématiques et informatiques en dynamique de Population, Université de Tlemcen, 10-12 mai 2003. http ://euromedbiomath.free.fr/content/French/CMMIDP1-03-ANNONCE-1.pdf/
- **Nadira BOUKLI-HACENE**, "Integrated semigroup associated to the delay differential equation with impulses", European Conference on Mathematical and Theoritical Biology ECMTB05, 18-22 july 2005, Dresden, Germany. http ://www.ECMTB.org/
- **Nadira BOUKLI-HACENE**, " Semi-groupe intégré associé aux équations différentielles à retard avec impultions ", Université des Sciences et de la Technologie-Houari Boumediene école " EDO et Systèmes Dynamiques, 12-17 novembre 2005. www.usthb.dz/ecole-de-math/index.htm
- Ecole-Symposium " Perturbations singulières en théorie du contrôle et en dynamique des populations Tlemcen ", 21-26 janvier 2006. http ://www.univ-tlemcen.dz/manifest/math/ecole-symposium/colo.htm
- Participation à l'école-symposium " Inclusions Différentielles et Théorie du contrôle ", Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 25-30 mars 2006. www.usthb.dz/ecole-de-math/index.htm
- Participation à l'école sur "Les équations différentielles ordinaries EDA-EDO" Tipaza, 13-18 mai 2006. http ://www.ens-kouba.dz/EDAEDO/index.html
- Participation in Marrakech world conference on "Differential equations and applications", Marrakech, 15-20 june 2006. http ://euromedbiomath.free.fr
- Participation au colloque, workshops Ecole-Symposium de " Théorie analytique complexe de la perturbation singulière ", Université de Haute Alsace Mulhouse, 26 juin-1 er juillet 2006. www.lmia.uha.fr/colloques.html
- Participation à "Marrakech international Conference and Workshop on Mathematical Biology" , Marrakech, 3-8 january 2008.

http ://euromedbiomath.free.fr
- Participation à la 4ème école "EDA-EDO", Université de Tlemcen, 23-27 mai 2009.

Projet de Recherche

- Membre du Projet de Recherche N° B* 1301/07/98 intitulé : Equations Différentielles et Analyse non linéaire. (chef du projet de recherche : Abdelkader BOUCHERIF).
- Membre du Projet de Recherche N° B* 1301/05/98 intitulé : Systèmes dynamiques et applications. (chef du projet de recherche : Sidi-Mohammed BOUGUIMA).
- Chef du Projet de Recherche N° B* 1301/03/02 intitulé : Dichotomie Exponentielle et Applications en dynamique de populations.
- Membre du Projet de Recherche N° 1301/06/05 intitulé : Résolution numérique d'un problème de contrôle optimal : Cas d'un problème de poursuite de trajectoires pour un robot mobile à axes rigides. (chef du projet : Djamila Hadj-Slimane).
- Membre du Projet de Recherche N°D02020080017 intitulé : Simulation de la Propagation d'Impultions Ultra-courte dans les Fibres Optiques Non-Linéaire. (chef du projet : Mourad MAHBOUB).

Laboratoire de Recherche

Membre du laboratoire de recherche intitulé : Systèmes dynamiques et applications.

Collaboration

Membre dans l'accord-programme 99MDU453 intitulé : Outils Mathématiques pour l'évaluation et le contrôle de populations animales exploitées, UR GEODES, IRD, France.

Table des matières

Introduction

En pratique, les mouvements des phénomènes de la nature sont régis par des équations différentielles ordinaires. Implicitement, dans cette supposition, le comportement de ces solutions est déterminé uniquement en fonction de l'état actuel et non de l'état postérieur. Dans le cas des équations différentielles à retard ou équations aux différences, ou plus généralement les équations différentielles fonctionnelles, le passé exerce une influence.
Les phénomènes compliqués de la nature sont plus exactement régis par des équations différentielles fonctionnelles que par des équations différentielles ordinaires.

Exemple :

Commençons par un exemple simple, il s'agit de l'équation linéaire scalaire

$$\frac{dx}{dt} = -x(t-r) \quad r > 0 \tag{1}$$

Soit φ une fonction donnée, définie et continue sur $[-r, 0]$. Alors, il existe une fonction unique $x(t)$: définie sur $[-r, +\infty[$, qui coïncide avec φ sur $[-r, 0]$ et qui est solution de l'équation (1), pour $t > 0$.

En effet, si x est une telle solution, alors elle doit vérifier

$$x(t) = \varphi(0) - \int_0^t x(s-r)ds \quad t \geq 0,$$

et en particulier,

$$x(t) = \varphi(0) - \int_0^t \varphi(s-r)ds \quad r \geq t \geq 0,$$

cette dernière équation définit x sur $[0, r]$ et itérativement, on définit x sur $[r, 2r]$.......

Remarques

1. Pour toute fonction φ définie et continue sur $[-r, 0]$, il existe une solution unique sur $[-r, \infty[$, notée $x(\varphi)$.
2. La solution $x(\varphi)$ admet une dérivée continue pour $t > 0$, mais pas en 0 sauf si $\varphi(\theta)$ admet une dérivée à droite en $\theta = 0$ et $\dfrac{d\varphi}{dt}(0) = -\varphi(-r)$ (condition qualifiée de condition de compatibilité). La solution $x(\varphi)$ est plus régulière que la condition initiale.
3. Pour φ donnée sur $[-r, 0]$, la solution $x(\varphi)(t)$ n'est pas définie pour $t \leq -r$, on voit que $x(\varphi)(t)$ n'est pas définie à gauche de $-r$.

   En effet, si $x(\varphi)(t)$ est défini pour $t \leq -r$, on voit que $x(\varphi)(t)$ est défini pour $t \geq -r - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Alors $\varphi(\theta)$ admet une dérivée continue pour $\theta \in]-\varepsilon, 0]$.

D'autres formes plus générales sur les équations différentielles à retard sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F\Big(t, x(t), x(t-r)\Big) \\ \frac{dx}{dt} &= -\alpha x(t-1)\Big(x(t)+1\Big) \end{aligned}$$

Exemple :[42] **Equation Différentielle Fonctionnelle à Retard.**

Considérons une population biologique composée d'individus adulte et juvénile. Soit $N(t)$ dénote la densité des adultes au temps t. Supposons que la durée de la période juvénile est exactement h unité de temps pour chaque individu. Supposons que les adultes produisent des oeufs α et μ la probabilité de mortalité par unité de temps. Supposons que les nouveaux né survivent la période juvénile avec une probabilité ρ et posons $r = \alpha\rho$. Alors la dynamique de N peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\mu N(t) + rN(t-h) \tag{2}$$

qui fait intervenir un terme non local, $rN(t-h)$ signifie que les nouveaux-né deviennent adulte avec un certain retard. Ainsi la variation instantannée de la densité de population N fait intervenir le courrant comme les valeurs du passé de N.

Telles équations sont appelées équations différentielles fonctionnelles à retard (RFDE) ou alternativement, équations à retard.

L'équation (2) décrit les variations de N. Pour déterminer le passé de la solution au temps $t = 0$, on a besoin de décrire les valeurs de N au temps $-h$, et on peut voir que ce n'est pas suffisant de donner la valeur au point $-h$, puisque l'exemple suivant montre bien que cette condition ne suffit pas pour déterminer entièrement la solution.

Equation Différentielle de type Neutre

$$\frac{dx}{dt} = c\,\frac{dx}{dt}(t-r) + dx(t-r) \quad r > 0,\ c > 0$$

Soit φ la solution initiale sur $[-r, 0]$, admettant une dérivée continue, alors on peut déterminer une solution de celle ci pour $t > 0$, ayant une dérivée première continue sauf aux points $t = kr,\ k \in \mathbb{N}$. Si

$$\frac{d\varphi}{dt} \neq c\,\frac{d\varphi}{dt}(-r) + d\varphi(-r) \quad r > 0,\ c > 0$$

alors $\frac{dx}{dt}$ est discontinue en 0 et par suite discontinue en $t = kr$ car $c \neq 0$.

Equation Différentielle Avancée

$$\frac{dx}{dt} = y(t+r) \quad r > 0 \tag{3}$$

Si on pose $\tau = -t, x(t) = y(-t)$ alors x est solution de l'équation (1).

Equation Différentielle à Retard de type Mixte

$$\frac{dx}{dt} = ax(t-r) + bx(t+r) \quad r > 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \tag{4}$$

Cette dernière équation a une caractéristique, c'est qu'on ne sait pas sous quelles conditions l'équation (4) définit une fonction pour $t > 0$, car sa dérivée dépend à la fois du passé et du futur.

0.1 Quelques Modèles sur les Equations à Retard

0.1.1 Les Modèles de Compétition de Lotka-Voltera

Le premier modèle de compétition d'interactions en dynamique des populations a été développé par Lotka [75] et Volterra [101], qui est décrit par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_1(t) = aP_1(t) - bP_1(t)P_2(t) \quad \text{pour} \ \ t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}P_2(t) = -cP_2(t) + dP_1(t)P_2(t) \quad \text{pour} \ \ t \geq 0, \\ P_1(0) = P_1^0 \ \ \text{et} \ \ P_2(0) = P_2^0. \end{cases} \tag{5}$$

Où P_1 et P_2 dénotent respectivement les populations de proies et de prédateurs respectivement et les paramètres :

a est le taux de croissance naturelle de la proie en absence de la prédation,

b est le taux de mortalité de la proie due à la prédation,

c est le taux de mortalité naturelle des prédateurs en absence de proies,

d est le taux de croissance des prédateurs en présence de proies.

Dernièrement, plusieurs auteurs ont observé qu'il est plus naturelle de supposer que le taux de croissance dépend aussi du passé, qui peut résulter d'une variété de causes, telles que la période d'éclosion, la lenteur du remplacement de la nourriture ou le bénéfice du stock de nourriture, ce qui nous emmène à une équation différentielle fonctionelle à retard.

Dans [101], le modèle (5) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_1(t) = P_1(t)\Big(a - bP_2(t)\Big) \quad \text{pour} \ \ t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}P_2(t) = P_2(t)\Big(- c + dP_1(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} k(s)P_1(t+s)ds\Big) \quad \text{pour} \ \ t \geq 0, \\ P_1(\theta) = \varphi_1(\theta) \ \ \text{pour} \ \ - r \leq \theta \leq 0 \ \ \text{et} \ \ P_2(0) = P_2^0. \end{cases} \tag{6}$$

où k est la fonction noyau.

Un autre modèle a été proposé par Brelot [25] où le retard est infini :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_1(t) = P_1(t)\Big(a - bP_2(t) - \displaystyle\int_{0}^{+\infty} k(s)P_2(t-s)ds\Big) \quad \text{pour} \ \ t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}P_2(t) = P_2(t)\Big(- c + dP_1(t) - \displaystyle\int_{0}^{+\infty} k(s)P_1(t-s)ds\Big) \quad \text{pour} \ \ t \geq 0, \\ P_1(\theta) = \varphi_1(\theta) \ \ \text{et} \ \ P_2(\theta) = \varphi_2(\theta) \quad \text{pour} \ \ \theta \leq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Le mouvement spatial et la migration des espèces d'un endroit à un autre peuvent compliquer les interactions ecologiques et influencer le comportement de leurs evolution. Par exemple, si la nourriture est fournie de façon homogène dans l'espace, la diffusion spatiale peut découler de la tendance des espèces à migrer des régions de forte densité de populations vers des régions de faible densité de populations.

Fisher [52], a proposé le modèle suivant pour décrire l'évolution d'une espèce

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(t,x)=\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t,x)+\beta u(t,x)-\gamma u^2(t,x)\quad \text{pour } t\geq 0 \text{ et } x\in\Omega, \tag{8}$$

où $\beta,\ \gamma,\ \delta$ sont tous positifs et représentent respectivement le taux de croissance, le paramètre de concurrence et le coefficient de diffusion, Ω est un ouvert de R^n, où $u(t,x)$ est la densité de population au temps t et à la position x.

De nombreux phénomènes, comme l'instabilité, des oscillations et des modifications périodiques, ne peuvent s'expliquer sans mettre en oeuvre des retards ou des diffusions dans le modèle. Différents types de modèles spatio-temporels intéressants avec un retard peuvent être atribués à de tels effets.

Murray [86] ; Cohen, Hang et Simpson [27] ont construit le modèle de réaction-diffusion tenant compte de la compétition avec retard infini suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(t,x)=\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t,x)+\int_0^{+\infty} l(s)u(t-s,x)ds-\int_0^{+\infty} k(s)u(t-s,x)ds, \tag{9}$$

où le terme $\int_0^{+\infty} l(s)u(t-s,x)ds$ représente la croissance et le processus de décroissance des proies.
$\int_0^{+\infty} k(s)u(t-s,x)ds$ est la consommation des prédateurs dans la population de proies, où l et k sont des fonctions poids pour les effets héréditaires.

D' une manière plus générale le modèle de Lotka-Volterra des équations de réaction-diffusion de type n espèces s'écrit sous la forme (voir [104]).

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t}\,(t,x)=d_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\,(t,x)+b_iu_i(t,x)\Big[a_iu_i(t,x)+\int_0^{r_i} l_i(s)u_i(t-s,x)ds\\ +\textstyle\sum_{j=1}^n\int_0^{+\infty} k_{i,j}(s)u_j(t-s,x)ds\Big],\quad \text{pour } 1\leq i\leq n\end{aligned} \tag{10}$$

où $x=(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_N)\in\Omega\subset\mathbb{R}^N$, Ω est une partie bornée de $\mathbb{R}^N$ avec un bord régulier, a_i,b_i,d_i sont des constantes positives et $l_i,k_{i,j}$ sont des fonctions noyaux.

0.1.2 Modèle Cellulaire

Des modèles mathématiques pour une variété de la dynamique biologique sont plus commodes sous la forme d'équations différentielles fonctionnelles. Dans ce cas, le retard naturel est le cycle cellulaire. Dans [77], [78], [79], [80], [81], [82] et [83], les auteurs ont étudié une série de modèles pour la réplication des cellules et de maturation dans lesquelles la dynamique est décrite par la solution d'une équation aux dérivées partielles de premier ordre avec retard dans le temps ainsi que la non localité de la variable de maturation. La figure ci-dessous se compose d'une phase de prolifération cellulaire d'une population $P(t)$ au temps t et une phase de repos G_0, avec une population de cellules $N(t)$. La phase de prolifération des cellules se compose de cellules dans la phase G_1 du cycle cellulaire, la synthèse de l'ADN appelée phase (S), G_2, et des mitoses M. Dans cette phase de prolifération, les cellules sont engagées à subir la division cellulaire en un temps constant τ après leur entrées en G_1. Le taux de mortalité γ de la phase de prolifération est dû à l'apoptose. Au moment de la cytogenèse (division cellulaire), une cellule se divise en deux cellules filles, qui sont censées entrer dans la phase de repos (N). Dans cette phase, les cellules ne peuvent pas se diviser mais elles ont trois destins possibles : se différencier à un taux constant δ, entrer de nouveau dans la phase de prolifération à un taux β ou rester dans G_0. Pour plus de détails se référer à la thèse de Crauste [32] et de Pujo-Menjouet [93].

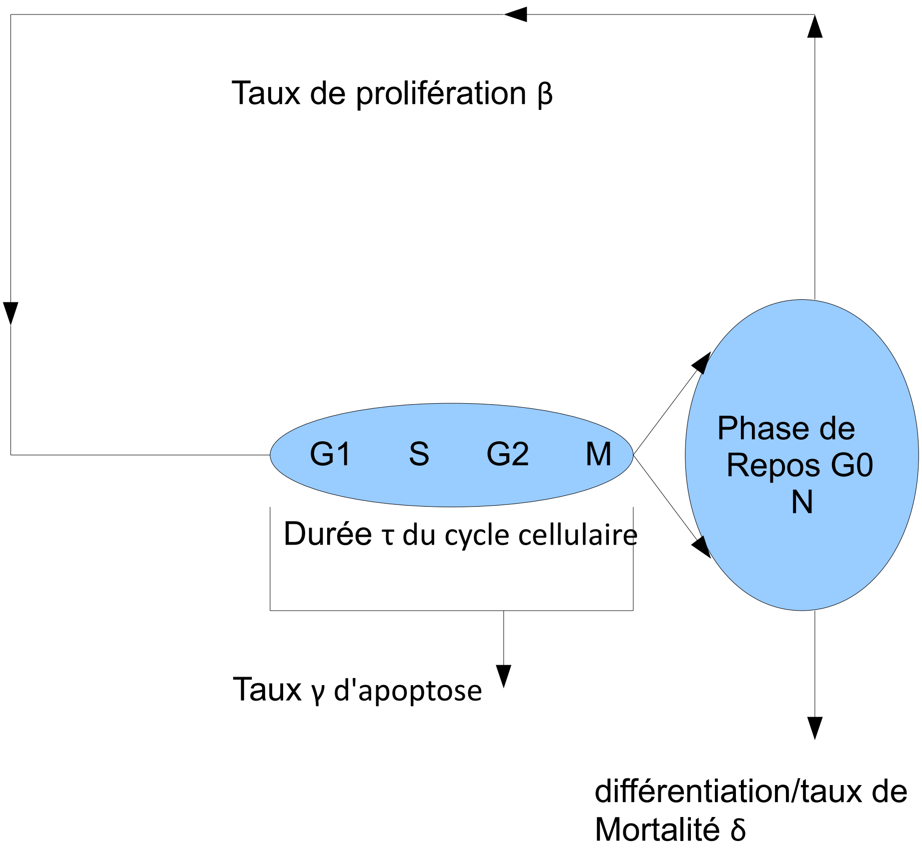

Figure 1

La phase de prolifération des cellules (P) comprend les cellules en G_1, S (synthèse de l'ADN), G_2 et M (mitose), tandis que dans la phase de repos (N), les cellules sont dans la phase G_0. δ est le taux de différenciation dans toutes les populations découlant de cellules souches et γ représente la perte apoptotique de la phase de prolifération des cellules. β est le taux de cellules entrées de nouveau dans G_0 pendant la phase de prolifération, le cycle cellulaire τ est la durée de la phase de prolifération. Lire [78] et [79] pour plus de détails.

Dans Mackey, Pujo-Menjouet et Wu [80] ont présenté un modèle décrit par un couplage nonlinéaire d'équations différentielles à retard, qui prend la forme suivante

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\gamma P(t) + \beta(N(t))N(t) - e^{-\gamma\tau}\beta(N(t-\tau))N(t-\tau) \;\text{ pour }\; t \geq 0 \tag{11}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -[\beta(N(t)) + \delta]N(t) + 2e^{-\gamma\tau}\beta(N(t-\tau))N(t-\tau) \;\text{ pour }\; t \geq 0, \tag{12}$$

où dans le repos G_0, β est donnée par

$$\beta(N) = \frac{\beta_0\delta^n}{\delta^n + N^n}\,.$$

Dans l'équation (12), le premier terme de droite représente la perte de la non prolifération des cellules à la phase de prolifération (flux $\delta(N)N$) et à la différentiation (flux δN), le deuxième terme représente la phase de production des cellules dans G_0 à partir de la prolifération des cellules souches. Le facteur 2 compte pour l'amplification des effets de la division cellulaire tandis que $e^{-\gamma\tau}$ compte pour l'atténuation dans la phase de prolifération en raison de l'apoptose.

Désignons par $P(t)$ la densité pluripotente de la population des cellules souches (cellules / kg) au temps t. Récemment, Adimy, Crauste et Ruan [1], ont présenté le modèle mathématique avec retard suivant décrivant la dynamique de cette population de cellules $P(t)$.

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\Big(\delta + \beta_0\frac{\theta^n}{\theta^n + P(t)^n}\Big)P(t) + \frac{2}{\tau - \tau_{\min}}\int_{\tau_{\min}}^{\tau} \beta_0\frac{\theta^n}{\theta^n + P(t-r)^n}P(t-r)dr \text{ pour } t \geq 0 \tag{13}$$

où le premier terme de droite représente la perte cellulaire en raison de la mortalité et la différenciation cellulaire. Le deuxième terme représente la prolifération de la division des cellules en deux cellules filles au cours de la mitose, avec $\delta > 0,\ \beta > 0,\ \theta \geq 0$ et $n \geq 0$.

Dans [81], [82] et [83], Mackey et ses collaborateurs ont examiné la dynamique de la population de cellules dans lesquelles il existe une prolifération simultanée et une maturation.

Le modèle mathématique de ce processus est formulé comme une équation fonctionnelle aux dérivées partielles avec pour densité cellulaire $u(t,x)$. L'équation est donnée par

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\alpha x\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=-\delta u(t,x)+\lambda u(t-\tau,xe^{-c\tau})\Big(1-u(t-\tau,xe^{-c\tau})\Big)\\&\text{pour } t\geq 0 \text{ et } x\in[0,1],\end{aligned}\tag{14}$$

où $u(t,x)$ est la population de cellules avec la maturation x au temps t, $-\delta u(t,x)$ est la fonction de mortalité, $\lambda u(t-\tau,xe^{-c\tau})\Big(1-u(t-\tau,xe^{-c\tau})\Big)$ est la fonction de retard des naissances, αx est la maturation dépendant de la vitesse de convection et $c,\ \delta,\ \lambda$ sont des paramètres constants.

0.1.3 Modèle Climatique

Dans une série de documents, Hetzer et ses collaborateurs ont montré que la réaction de diffusion des équations différentielles à retard se pose naturellement dans l'étude des modèles climatiques. La dépendance au retard est dû à un long temps de réponse $T \quad (T\approx 10^4)$ des énormes feuilles de glace continentales, voir [62], [63], [64] et [65] . Dans [63], l'auteur nous propose l'étude du modèle climatologique à retard suivant

$$\begin{cases} c\Big(x,\int_{-T}^{0}\beta(s)u(t+s,x)ds\Big)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\mathrm{div}(k\mathrm{grad}\ u(t,.))(x)\\ =R\Big(t,x,u(t,x),\int_{-T}^{0}\beta(s)u(t+s,x)ds\Big)\quad \text{pour } t>0 \text{ et } x\in M\\ \\ u(s,x)=v(s,x)\quad \text{pour } -T\leq s\leq 0 \text{ et } x\in M,\end{cases}\tag{15}$$

où M est égal à la sphère unité euclidienne S^2, qui correspond à la surface du globe. Le second terme de droite de l'équation représentant la moyenne nette du flux de rayonnement est donné par

$$R(t,x,y,z)=\mu\ Q(t,x)[1-\alpha(x,y,z)]-g(y)\qquad \text{pour } t\geq 0\ \text{ et } x\in M \text{ et } y,z\in\mathbb{R}^+,$$

où μQ est le nouveau flux de rayonnement solaire, α l'albédo et g est le flux sortant du rayonnement terrestre.

0.1.4 Dynamique des Populations

Pour décrire l'interaction de diffusion spatiale et le retard dans une dynamique des populations, commençons par une simple espèce de population distribuée uniformément dans un environnement isolé.

Soit $u(t)$ le nombre d'indivudus au temps t. Alors le modèle de la croissance est donné par

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)f\Big(u(t)\Big)$$

où r est une constante positive appélée taux de croissance intrinsèque et $uf(u)$ est le taux de croissance effective.

Un choix possible de f qui saisit les caractéristiques essentielles d'un environnement fini est $f(u) = 1 - u/K$, ce qui conduit à la célèbre équation logistique

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)\Big(1 - \frac{u(t)}{K}\Big), \tag{16}$$

où chaque solution non triviale non négative converge vers l'équilibre stable $u = K$, K est la capacité de transport de l'environnement déterminée entre autres par la nourriture, l'espace, la prédation, etc. Dans l'équation (16), la densité dépend d'un mécanisme régulateur, qui, répresenté par le facteur $1-u/K$ opère instantanément. Cependant, dans la plupart des situations réelles, ces effets régulateurs sont susceptibles de fonctionner avec certains retard. Une voie d'incorporer ce retard est d'écrire l'équation (16) comme suit

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)\Big(1 - \frac{u(t-\tau)}{K}\Big), \tag{17}$$

où τ peut provenir d'une grande variété de causes telles que la période d'éclosion, la durée des grossesses, la lenteur du remplacement du stock de nourriture. Cette équation peut aussi se poser comme une approximation pour décrire entièrement une seule population structuré en âge (voir Auslander [13], Metz [85], Smith [96]). L'équation (16) a été introduite en dynamique des populations par Hutchinson [69] et Wangersky et Cunningham [102]. Bien sûr, il est plus réaliste que les termes régulateurs de la densité ne devraient pas seulement dépendre de la population au temps τ, mais devraient tenir compte des dernières populations passées. Ceci conduit à l'équation suivante

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)\Big(1 - \frac{\int_{-\infty}^{t} Q(t-s)u(s)ds}{K}\Big), \tag{18}$$

pour une certaine application $Q : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $\int_{-\infty}^{t} Q(t-s)ds = 1$.

Les modifications et généralisations des équations (17) et (18) ont été largement étudiées, et de nombreux comportements complexes à long terme et des modes temporelles de croissance démographique observée dans les expériences en laboratoire et dans la réalité peuvent souvent être attribués au mécanisme de retard. Pour plus de détails, on pourra se référer à McDonald [77], Hale [57] pour des résultats détaillés des problèmes des systèmes dynamiques en présence d'effets héréditaires.

0.1.5 Formulation Abstraite

Les modèles mathématiques (9), (10), (11), (12) et (13) peuvent être écrits sous la forme de l'équation différentielle fonctionnelle abstraite suivante

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + F(u_t) \quad \text{pour } t \geq 0 \\ u(\theta) = \varphi(\theta) \quad \text{pour } \theta \leq 0, \end{cases} \tag{19}$$

où A est un opérateur linéaire non borné et $F : B \longrightarrow X$ est une fonction continue de l'espace de phase B vers X. L'espace de phase B sera précisé ultérieurement. Dans la littérature l'équation (19) s'appelle équation aux dérivées partielles fonctionnelles.

0.2 Rappel Historique sur les Fonctions Presque-Périodiques

La notion de fonctions presque-périodiques est d'une grande importance dans l'étude des équations différentielles. La théorie des fonctions presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une quatre vingtaine d'années environ ; très exactement, les premiers résultats de celle-ci ont été publiés dans les deux articles du pionnier de cette classe de fonctions, P. Bohr [21] parus dans la revue " Acta-Mathematica " en 1925 - 26. Elle a été développée par d'autres, notamment par Bochner [18] qui, vers 1933, a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque-périodiques équivalentes à celle donnée par Bohr, mais plus maniables. Dans les années cinquante, cette étude a été reprise par Stepanov [97] qui définit la notion de fonction presque-périodique en moyenne L^p_{loc}. Dans les années soixante, Bertrandias [14] a présenté un travail dans le prolongement de celui de

Stepanov en définissant les fonctions presque-périodiques continues seulement en moyenne. Il faut aussi mentionner les noms de Weiner, Besicovitch [15], Delsarte, Maak [84] Bogolioboff, Levitan [71], dont les travaux consistent en l'étude de la presque-périodicité de la primitive d'une fonction presque-périodique.

Avant que Bohr eût donné la définition générale, il y a eu des études de fonctions presque-périodiques d'un type spécial : somme de Fourier de fonctions périodiques par Bohl et Esclangon en 1923. Cette idée a été soulevée vers la fin du siècle dernier par H. Poincaré. Les premières publications dans ce domaine ne concernaient que les fonctions à valeurs réelles ou complexes. C'est Bochner [18] qui a étendu la notion au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach quelconque de dimension finie ou infinie. Plusieurs articles récents traitent de l'existence de solutions presque-périodiques dans des systèmes dynamiques en dimension infinie.

- Equations différentielles à retard infini (Hino [66], Sawano [98], Seifert [99], J.K. Hale [56]).
- Equations opérationnelles abstraites (Zaidman [107])
- Systèmes d'évolution généraux (Ait Dads-Arino [5], Ait Dads-Ezzinbi [7], Fink et Gatica [51], Ishi-Itoshi [67], Dafermos [33], Haraux [60], Torrejón [100], Ezzinbi-Hachimi [45].)

Une généralisation connue des fonctions presque-périodiques est la classe des fonctions asymptotiquement presque-périodiques (qui a été introduite par Frechet), ce sont les fonctions de type

$$f = g + \varepsilon$$

avec g presque-périodique et ε continue et de plus $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

La notion de fonctions pseudo presque-périodiques a été introduite dans la littérature il ya une quinzaine d'années par Zhang [109] comme une généralisation de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.

L'existence, l'unicité et la stabilité des solutions presque-périodiques, pseudo presque-périodiques, pseudo presque-périodiques avec poids, presqu'automorphes et pseudo presqu'automorphes sont d'une grande importance dans l'étude qualitative de la théorie des équations différentielles due à leurs applications dans plusieurs domaines comme la biologie mathématique, la physique, la théorie du contrôle et d'autres.

0.3 Présentation de la Thèse

Cette thèse est le résultat de trois travaux :

Le premier : Nadira BOUKLI-HACENE et Khalil EZZINBI, Weighted pseudo almost periodic solutions for some partial functional differential equations, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Volume 71, Issue 9, 1 November 2009, Pages 3612-3621.

Le deuxième : Nadira BOUKLI-HACENE et Khalil EZZINBI, Weighted pseudo almost automorphic solutions for some partial functional differential equations, (travail en cours).

Le troisième : Abdelkader BOUCHERIF et Nadira BOUKLI-HACENE, Two-parameter problems with time-dependent three-point boundary conditions, Maghreb Math. Rev., Volume 8, N° 1 et 2, (1999), 57-66.

Cette thèse est répartie comme suit suit :

Le Chapitre 1 est consacré aux rappels des définitions sur la théorie des semi-groupes , la notion de dichotomie exponentielle et ces propriétés et les fonctions presque-périodiques avec poids et presque-automorphes avec poids et leurs propriétés.

Dans le Chapitre 2, on étudie l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids d'une équation aux dérivées partielles fonctionnelle dans le cas hyperbolique.

Dans le Chapitre 3, on rappelle les propriétés des fonctions presque-automorphes et on étudie l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque-automorphes avec poids d'une équation aux dérivées partielles fonctionnelle dans le cas hyperbolique.

Le Chapitre 4 est consacré à l'existence et aux propriétés des valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville à deux paramètres avec des conditions aux limites dépendant du temps et imposées en trois points. On utilise la méthode des bifurcations pour caractériser les courbes de valeurs propres, ainsi que leur dépendance par rapport au paramètre t.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est une collection de résultats qui seront utiles pour la suite de la thèse. On rappelera quelques définitions et résultats sur la théorie des semi-groupes et on présentera la notion de dichotomie exponentielle et ces propriétés. On introduira aussi quelques définitions et propriétés de fonctions presque-périodiques.

1.1 Semi-Groupe Fortement Continu

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Définition 1.1.1. *Une famille à un paramètre $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaire bornés sur un espace de Banach $\mathbb{E}$ est un semi-groupe fortement continu (ou C_0-semi-groupe) si*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *pour tout* $t,\ s \geq 0$,

(iii) $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu sur* $\mathbb{E}$ *i.e pour chaque* $x \in \mathbb{E}$, *la fonction*

$$t \longmapsto T(t)x$$

est continue de $[0, +\infty)$ *sur* $\mathbb{E}$.

Le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ est défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in \mathbb{E} \ : \ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \ \text{ existe}\right\} \\ \\ A\ \varphi = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \ \text{ pour } \ \varphi \in D(A) \end{cases}$$

Le théorème ci-dessous donne une caractérisation du générateur d'un semi-groupe fortement continu.

Théorème 1.1.2. *Soit* $\omega \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$ *deux constantes et* A *un opérateur linéaire sur un espace de Banach* $\mathbb{E}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes,*

(i) *A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu* $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur* $\mathbb{E}$ *vérifiant*

$$|T(t)| \leq Ne^{\omega t} \quad pour \;\; t \geq 0.$$

(ii) *A est à domaine dense et pour chaque* $\lambda > \omega$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$sup\Big\{(\lambda - \omega)^n |(\lambda I - A)^{-n}| : n \in \mathbb{N} \; et \; \lambda > \omega\Big\} < N.$$

1.2 Dichotomie Exponentielle pour les Systèmes Dynamiques

Soit $A(t)$ une fonction à valeurs matricielles, continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, $X(t)$ la matrice fondamentale du système

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

Définition 1.2.1. *[29] On dit que l'équation* (1.1) *a une dichotomie exponentielle sur* J *s'il existe une projection* P $(P^2 = P)$ *et des constantes positives* K *et* α *telles que :*

$$\begin{aligned} \|X(t)PX^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad t \geq s \; dans \; J, \\ \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(s-t)} \quad s \geq t \; dans \; J. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Cette notion a été généralisée au cas des systèmes dynamiques ([58], [74]).

L'équation autonome

$$\dot{x} = A_0 x,$$

a une dichotomie exponentielle si et seulement si aucune valeur propre de la matrice constante A_0, n'est à partie réelle nulle. La matrice fondamentale qui lui est associée étant $X(t) = \exp(A_0 t)$, on peut considérer la projection spectrale P définie par :

$$P = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (zI - A_0)^{-1} dz,$$

γ étant n'importe quelle courbe rectifiable simple dans le demi plan gauche, qui entoure les valeurs propres de A_0 à partie réelle négative.

Notons que la stabilité asymptotique uniforme est un cas particulier de dichotomie exponentielle, elle correspond au cas où $P = I$.

Pour voir la signification de la dichotomie dans le cas général, réecrivons les conditions (1.2) sous une forme équivalente

$$\begin{cases} \|X(t)P\xi\| & \leq \quad Le^{-\alpha(t-s)}\|X(s)P\xi\| \quad t \geq s \\ \|X(t)(I-P)\xi\| & \leq \quad L'e^{-\alpha(s-t)}\|X(s)(I-P)\xi\| \quad s \geq t, \\ \|X(t)PX^{-1}(t)\| & \leq \quad M \quad \forall t \in J \end{cases} \tag{1.3}$$

L, M et L' sont des constantes positives, ξ est un vecteur arbitraire constant. Notons k le rang de P.

La première condition de (1.3) montre qu'il existe un sous-espace de dimension finie k, de solutions qui tendent vers 0, uniformément et exponentiellement quand t tend vers $+\infty$.
La seconde montre qu'il existe un sous espace supplémentaire, de dimension $n - k$, de solutions qui tendent vers l'infini uniformément et exponentiellement quand t tend vers $+\infty$.

Il existe des cas où seules les premières conditions de (1.2) sont suffisantes pour avoir une dichotomie exponentielle, ce qui n'est pas vrai en général, comme nous le verrons dans un exemple ultérieur.

Définition 1.2.2. *On dit que l'équation* (1.1) *est à croissance bornée sur un intervalle J si, pour $h > 0$ fixé, il existe une constante $C \geq 1$ tel que toute solution $x(t)$ de* (1.1) *vérifie*

$$| x(t) | \leq C \mid x(s) \mid \quad \textit{pour} \ \ s, t \in J \ \ \textit{et} \ \ s \leq t \leq s + h.$$

Proposition 1.2.3. *L'équation* (1.1) *est à croissance bornée si et seulement si il existe des constantes K, α tel que la matrice fondamentale $X(t)$ vérifie*

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \textit{pour} \quad t \geq s.$$

Remarque 1.2.4. *L'équation* (1.1) *est à croissance bornée si les coefficients de la matrice $A(t)$ sont bornées.*

Lemme 1.2.5. *[29] Supposons que* (1.1) *est à croissance bornée sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une projection P telle que :*

$$\begin{aligned} \|X(t)P\xi\| &\leq Le^{-\alpha(t-s)}\|X(s)P\xi\| \quad t \geq s, \ \textit{dans } J, \\ \|X(t)(I-P)\xi\| &\leq L'e^{-\alpha(s-t)}\|X(s)(I-P)\xi\| \quad s \geq t, \ \textit{dans } J. \end{aligned}$$

Alors (1.1) *admet une dichotomie exponentielle sur J.*

Exemple : Nous allons voir à travers cet exemple que la troisième condition de (1.3) est nécessaire si (1.1) n'est pas à croissance bornée.

Le système du second ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + e^{2t}y \\ \dot{y} = y \end{cases} \tag{1.4}$$

dont la matrice fondamentale

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{(e^{3t}-e^{-t})}{4} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

est telle que les deux premières conditions de (1.3) sont satisfaites avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3,$$

mais on peut facilement vérifier que la troisième n'est pas satisfaite et on a pas de dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Supposos que A soit périodique de période T, le système (1.1) est équivalent à un système à coefficients constants

$$\dot{y} = By. \tag{1.5}$$

Les valeurs propres de B sont les exposants caractéristiques de la matrice de monodromie de (1.1). Il est donc facile de voir que (1.1) a une dichotomie exponentielle si et seulement si (1.5) en a une ((1.1) est similaire à (1.5)). Ce système a une dichotomie exponentielle lorsque les multiplicateurs caractéristiques ne sont pas sur le cercle unité (ils sont tous de module $\neq 1$).

1.2.1 Propriétés de la Dichotomie Exponentielle

Nous rappelons dans ce paragraphe les propriétés les plus connues de la dichotomie exponentielle.

Lemme 1.2.6. *[29] Soit t_0, τ des constantes réelles, $\tau < t_0$ (resp. $\tau > t_0$). Si l'équation* (1.1) *a une dichotomie exponentielle* (1.2) *sur $[t_0, \infty)$ (resp. $(-\infty, t_0]$), alors elle en a une sur $[\tau, \infty)$ (resp. $(-\infty, \tau]$), avec le même exposant α et la même projection P.*

Lemme 1.2.7. *[29] Si l'équation* (1.1) *a des dichotomies exponentielles sur les demi-droites $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, avec la même projection P, alors elle en a une sur $\mathbb{R}$, avec la même projection.*

Soulignons le fait que la dichotomie exponentielle est préservée par des petites perturbations linéaires sur l'équation (1.1), illustrons cette remarque par le théorème suivant :

Théorème 1.2.8. *[29] Supposons que l'équation différentielles* (1.1) *a une dichotomie exponentielle* (1.2) *sur $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$). Soit B une fonction à valeurs matricielle continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$) telle que*

$$\delta = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |B(t)| < \frac{\alpha}{4k^2}.$$

Alors l'équation perturbée

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x \tag{1.6}$$

a une dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ *(resp.* $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$*) de constantes* $K_1 = (\frac{5}{2})K^2$ *et d'exposant* $(\alpha - 2K\delta)$ *et de projection* Q *de même noyau (resp. image) que celui de* P*.*

De plus, si $Y(t)$ *est la matrice fondamentale de* (1.6) *vérifiant* $Y(0) = I$*, alors*

$$|Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t)| \leq 4\alpha^{-1}K^3\delta, \quad \textit{pour tout } t.$$

1.3 Equations Différentielles à Retard en Dimension Finie

1.3.1 Problèmes à Valeurs Initiales

Soit $r > 0$ et $C := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme de convergence uniforme.

Soit $\sigma \in \mathbb{R},\ A > 0$ et $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $t \in [\sigma, \sigma + A]$, on définit $x_t \in C$, par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \text{pour} - r \leq \theta \leq 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. Une équation différentielle fonctionnelle est donnée par

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t) \tag{1.7}$$

Définition 1.3.1. x *est dite solution de l'équation* (1.7) *s'il existe* $\sigma \in \mathbb{R},\ A > 0$ *tel que* x *est solution de* (1.7) *sur* $[\sigma - r, \sigma + A]$ *pour* $\sigma \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi \in C$ *et on note* $x = x(\sigma, \varphi)$ *et on a* $x(\sigma, \varphi) = \varphi$*.*

Le type d'équations considérées est une généralisation de

$$\frac{dx}{dt}(t) = f\Big(t, x(t), x(t - r(t))\Big) \qquad \text{pour } 0 \leq r(t) \leq r$$

Si

$$f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t)$$

avec L linéaire en φ, on dit que c'est une équation à retard linéaire.

Si $h = 0$, l'équation (1.7) est dite équation homogène.

Si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, l'équation (1.7) est dite autonome.

Lemme 1.3.2. *[59] Si $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C$ sont donnés et $f(t,\varphi)$ est continue. Alors, chercher une solution de l'équation* (1.7) *avec la condition initiale* (σ,φ) *est équivalent à résoudre le problème suivant*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{\sigma}^{t} f(s, x_s)ds \quad t \geq \sigma \quad et \quad x_\sigma = \varphi.$$

Lemme 1.3.3. *[59] Si $x \in C\Big([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n\Big)$, alors x_t est une fonction continue de $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$.*

Les théorèmes ci-dessous donne une condition suffisante qui assure l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1.7).

Théorème 1.3.4. *[59] Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f : D \to \mathbb{R}^n$ continue, si $(\sigma,\varphi) \in D$, alors, il existe une solution de l'équation* (1.7) *passant par* (σ,φ).

Théorème 1.3.5. *[59] Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et $f(t,\varphi)$ est Lipschitzienne en φ dans tout compact de D. Si $(\sigma,\varphi) \in D$, alors l'équation* (1.7) *admet une solution unique passant par* (σ,φ).

1.3.2 Equation Linéaire Autonome

Dans ce paragraphe on considère quelques propriétés des équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Lx_t, \\ x_0 = \varphi \in C \end{cases} \tag{1.8}$$

où L est une application linéaire continue de C dans $\mathbb{R}^n$. Cette hypothèse implique qu'il existe une matrice $(n \times n)$ $\eta(\theta) : -r \leq \theta \leq 0$, dont les éléments sont à variation bornée

$$L(\varphi) = \int_{-r}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta) \qquad \text{pour tout } \varphi \in C.$$

Exemple : Considérons l'équation scalaire

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2}\, x(t-1)$$

avec l'espace de phase $C := C([-1,0],\mathbb{R})$. L'opérateur L est défini par $L\varphi = -\dfrac{\pi}{2}\,\varphi(-1)$.

La normalisation de L est donnée par

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in]-1,0] \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } \theta = -1 \end{cases}$$

Equation Caractéristique

Considérons une équation linéaire à retard sur $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Lx_t$$

où, $L \in \mathcal{L}(C, \mathbb{R}^n)$ et peut donc s'exprimer à l'aide d'une fonction η à variations bornées

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

sous la forme

$$Lx_t = \int_{-r}^{0} d\eta(s)x(t+s).$$

Au semi-groupe solution $T(t)$ associé à l'équation on fait correspondre l'opérateur dérivé A sur le domaine :

$$D(A) = \Big\{\varphi \in C \ : \ \lim_{t \to 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \ \text{ existe}\Big\}$$

On a :

$$\begin{cases} D(A) = \Big\{\varphi \in C \ : \ \lim_{t \to 0} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \ \text{ existe}\Big\} \\ A\ \varphi = \dfrac{d}{dt}\ \varphi \end{cases}$$

L'opérateur A est à résolvante compacte. Son spectre est donc purement ponctuel et est constitué par l'ensemble des racines d'une équation dite équation caractéristique [59] :

$$\sigma(A) = \Big\{\lambda \in C \ : \ \det\Big(\lambda I - \int_{-r}^{0} d\eta(s)e^{\lambda s}\Big) = 0\Big\}$$

Exemple : On considère l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t) \tag{1.9}$$

L'équation cractéristique de l'équation homogène associée à l'équation (1.9)

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + Bx(t-r) \tag{1.10}$$

à coefficients constants est déterminée en cherchant des solutions non triviales de la forme $(e^{\lambda t})c$, où c est une constante.

Soit

$$h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda r} = 0. \tag{1.11}$$

L'équation (1.11) est dite équation caractéristique de l'équation (1.10).

Les Lemmes ci-dessous donnent l'existence de solutions de l'équation (1.10).

Lemme 1.3.6. *S'il existe une suite* (λ_j) *de solutions de l'équation* (1.11) *tel que* $|\lambda_j| \to \infty,\ j \to \infty,$ *alors*

$$Re\lambda_j \to -\infty$$

il existe un nombre réel α *tel que toute solution de* (1.10) *satisfait* $Re\lambda > \alpha$ *et il existe un nombre fini de solutions tel que* $a < |\lambda| < b$.

Lemme 1.3.7. *Supposons* λ *une racine de multiplicité* m *de* (1.11). *Alors chacune des fonctions* $t^k e^{\lambda t},\ k = 0, 1, 2, ..., m-1$ *sont des solutions de* (1.10).

Le Lemme suivant définit la transformée de Laplace et la convolution.

Lemme 1.3.8. *Existence et convolution de la transformée de Laplace :*

Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est mesurable et satisfait*

$$|f(t)| \leq a\ e^{bt}, \quad t \in [0, +\infty[$$

pour des constantes a *et* b, *alors la transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ *est définie par*

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$$

existe et est une fonction analytique de λ *pour* $Re\lambda > b$.

Si la fonction $f * g$ *est définie par*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s) g(s) ds.$$

Alors,

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

La Solution Fondamentale

Dans la suite, nous aurons besoin de l'application transformée de Laplace notée $h^{-1}(\lambda)$. Ce qui nous permettra de définir la solution de l'équation (1.9) appelée solution fondamentale de l'équation (1.9) dont la transformée de Laplace est $h^{-1}(\lambda)$.

Soit $X(t)$ la solution de l'équation (1.10) pour $t \geq 0$ et satifaisant la condition initiale

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Lemme 1.3.9. *[57] (Théorème d'inversion)*

Supposons que $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction donnée,* $b > 0$ *est une constante donnée telle que* f *est à variation bornée sur tout compact et* $t \to f(t)e^{-\lambda t}$ *est Lebesgue intégrable sur* $[0, +\infty[$. *Alors pour tout* $c > b$,

$$\int_{(c)} \mathcal{L}(f)(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big[f(t+) + f(t-)\Big] & t > 0, \\ \frac{1}{2}f(0+) & t = 0. \end{cases}$$

Notation : La notation suivante est utilisée

$$\int_{(c)} = \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \quad \text{pour } c \text{ un réel.}$$

Théorème 1.3.10. *[57] La solution* $X(t)$ *de l'équation* (1.9) *à donnée initiale* (1.12) *est la solution fondamentale, celle qui vérifie*

$$\mathcal{L}(X)(\lambda) = h^{-1}(\lambda).$$

De plus, pour tout $c > b$,

$$X(t) = \int_{(c)} h^{-1}(\lambda)\ e^{\lambda t}\ d\lambda, \qquad t > 0$$

où b *est l'exposant associé et on a en plus*

$$|X(t)| \leq ae^{bt}, \quad t \geq 0.$$

Théorème 1.3.11. *[57] Si* $\alpha_0 = \max\big\{Re\lambda : h(\lambda) = 0\big\}$, *alors pour tout* $\alpha > \alpha_0$, *il existe une constante* $k = k(\alpha)$ *telle que la solution fondamentale* X *satisfait l'inégalité*

$$|X(t)| \leq ke^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

La Formule de la Variation de la Constante

Dans cette partie, nous exprimons la solution de l'équation (1.9) $x(\varphi, f)$ en fonction de la solution fondamentale $X(t)$ de l'équation homogène associée

$$x(\varphi, f)(t) = x(\varphi, 0)(t) + \int_0^t X(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Si φ est une fonction donnée dans C et $x_t(\varphi)$ est l'unique solution de l'équation (1.8) à donnée initiale en zéro, l'opérateur solution $T(t)$ est donné par

$$T(t)\varphi = x_t(\varphi), \quad pour \quad t \geq 0.$$

Théorème 1.3.12. *L'opérateur solution $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe avec générateur infinitésimal défini par*

$$D(A) = \Big\{\varphi \in C \ : \ \frac{d\varphi}{d\theta} \in C \ \ et \ \ \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = L(\varphi) \ \ et \ \ A\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}\Big\}.$$

De plus le spectre $\sigma(A)$ est constitué des valeurs propres et donné par

$$\sigma(A) = \Big\{\lambda \in C : det\ \Delta(\lambda) = 0\Big\},$$

où

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^0 e^{\lambda\theta} d\eta(\theta).$$

Théorème 1.3.13. *Soit $\Lambda = \big\{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda > 0\big\}$ et supposons que C est décomposé par Λ comme suit*

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda.$$

Alors, il existe des constantes positives k et c tel que

$$\|T(t)\varphi^{P_\Lambda}\| \leq Ke^{ct}, \quad t \leq 0, \tag{1.13}$$

$$\|T(t)\varphi^{Q_\Lambda}\| \leq Ke^{-ct}, \quad t \geq 0. \tag{1.14}$$

Dans la suite on considère l'équation linéaire non homogène suivante

$$\frac{dx(t)}{dt} = Lx_t + f(t), \tag{1.15}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est continue.

Théorème 1.3.14. *Supposons que $\sigma(A) \bigcap i\mathbb{R} = \phi$. Alors pour toute fonction bornée f, l'équation* (1.15) *admet une et une seule solution bornée.*

1.3.3 Equation Linéaire non Autonome

Dans cette partie on considère l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = L(t)x_t + h(t), \tag{1.16}$$

Exemple :

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + Bx(t-r) = \int_{-r}^{0} \Big[d_\theta \eta(t,\theta)\Big] x(t+\theta)$$

où

$$\eta(t,\theta) = \begin{cases} -A(t) - B(t) & \theta \leq -r \\ -A(t) & -r \leq \theta < 0 \\ 0 & \theta = 0 \end{cases}$$

La Formule de la Variation de la Constante

Théorème 1.3.15. *Si $h \in \mathcal{L}_1^{loc}([\sigma, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ et $x(\sigma,\varphi,h)(t)$ est la solution du système* (1.16) *alors*

$$\begin{cases} x(\sigma,\varphi,h)(t) = x(\sigma,\varphi,0)(t) + \displaystyle\int_\sigma^t T(t,s)h(s)ds \quad t \geq \sigma \\ \qquad\qquad x_\sigma = \varphi \end{cases}$$

où $T(t,s)$ est la solution de l'équation

$$T(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma^t L\Big(u, T_u(\cdot,s)\Big)du + I \quad pp \text{ en } s \quad t \geq s \\ 0 \quad s - r \leq t \leq s \end{cases}$$

ou de l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,s) = L(t, T_t(\cdot, s)) \quad t \geq s \quad pp \text{ en } s \text{ et } t$$

$$T(t,s) = \begin{cases} 0 & s-r \leq t \leq s \\ I & t = s \end{cases}$$

où $T_t(\cdot, s)(\theta) = T(t+\theta, s) \quad -r \leq \theta \leq 0$. T *est appelée solution fondamentale.*

Notion de Dichotomie Exponentielle

Définition 1.3.16. *On dit que le système d'équations différentielles à retard* (1.16) *admet la propriété de dichotomie exponentielle sur* $\mathbb{R}$, *si l'opérateur solution* $T(t,s)$ *satisfait les propriétés suivantes :*
il existe des constantes positives $k > 1$, $c > 0$, *et un opérateur projection*
$P(s) : E \to E, (P(s) = P^2(s))$, $s \in \mathbb{R}$. *Telle que si* $Q(s) = I - P(s)$, *alors*

(i) $T(t,s)P(s) = P(t)T(t,s), \quad t \geq s$

(ii) *La restriction* $T(t,s)R(Q(s)), t \geq s$, *est un isomorphisme de* $R(Q(s))$ *dans* $R(Q(t))$ *et on définit* $T(s,t)$ *comme l'application inverse.*

(iii) $\|T(t,s)P(s)\| \leq ke^{-c(t-s)}$, *pour* $s \leq t$.

(iv) $\|T(t,s)Q(s)\| \leq ke^{-c(t-s)}$, *pour* $s \geq t$.

L'opérateur $P(t)$ *est appelé projection de la dichotomie exponentielle. La solution du système* (1.16) *à donnée initiale en s dans l'image de* $P(s)$ *(resp.* $Q(s)$*) s'approche de zéro exponentiellement quand* $t \to +\infty$ *(resp.* $t \to -\infty$*).*

Si φ est une fonction donnée dans C et $x(\varphi)$ est l'unique solution de l'équation (1.16) à valeur initiale en zéro, l'opérateur solution $T(t,\sigma)$ est donné par

$$T(t,\sigma)\phi = x_t(\cdot; \sigma, \phi) \quad \text{pour} \quad t \geq \sigma.$$

Pour plus de détails voir [59].

1.4 Définitions et Propriétés des Fonctions Presque-Périodiques

1.4.1 Caractérisations des Fonctions Presque-Périodiques

Définition 1.4.1. *[21] Soit* $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$$

est dite presque-périodique si

(i) f *est continue,*

(ii) pour chaque $\varepsilon > 0$ *il existe un* $l(\varepsilon) > 0$*, tel que tout intervalle* I *de longueur* $l(\varepsilon)$ *contient un nombre* τ *avec la propriété que :*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exemples

1. Toute fonction continue et $T-$périodique est une fonction presque-périodique.

En effet, soit $l = T$ et soit I un intervalle quelconque de longueur T : $I = [\gamma, \gamma + T]$ avec γ un réel. Si $\gamma = (n-1)T + \delta$ où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \delta \leq T$, alors I contient un point de la forme $nT = \tau$ et on a :

$$f(t+\tau) - f(t) = f(t+nT) - f(t) = 0.$$

2. $f(t) = \sin t + \sin\sqrt{2}t$, est presque-périodique.

Vérifions cela.

Il est clair que f n'est pas périodique.

$$\begin{aligned} |f(t+p) - f(t)| &= |\sin(t+p) + \sin\sqrt{2}(t+p) - \sin t - \sin\sqrt{2}t| \\ &\leq |1 - \cos p| + |1 - \cos\sqrt{2}p| + |\sin p| + |\sin\sqrt{2}p|. \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, alors il existe m et n deux entiers naturels tels que $|m - \sqrt{2}n| \leq \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$.
Si on prend $p = 2n\pi$ alors $\cos p = 1$ et $\sin p = 0$. D'où

$$|f(t+p) - f(t)| \leq |1 - \cos\sqrt{2}p| + |\sin\sqrt{2}p|$$

Mais

$$\sqrt{2}p = (\sqrt{2}n)2\pi = (m+\alpha)2\pi$$

où α est un réel vérifiant $|\alpha| \leq \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$. Ainsi,

$$\cos\sqrt{2}p = \cos 2\alpha\pi \quad et \quad \sin\sqrt{2}p = sin2\alpha\pi.$$

Soit

$$|f(t+p) - f(t)| \leq 2\pi|\alpha| + 2\pi|\alpha| = 4\pi|\alpha| \leq \varepsilon$$

car

$$|1-\cos\theta| \leq |\theta| \;\; et \;\; |\sin\theta| \leq \theta \qquad \text{pour tout} \;\; \theta.$$

Remarque 1.4.2. *Contrairement au cas périodique où toute fonction périodique atteint son maximum (resp minimum) on remarque que*

$$\sup\Big\{f(x), x \in \mathbb{R}\Big\} = 2,$$

mais le maximum n'est pas atteint.

1.4.2 Commentaire et Conséquences

La définition 1.4.1 est la plus proche de celle des fonctions périodiques. Les nombres τ sont appelés des $\varepsilon-$presque-périodes.

Conséquences Simples

$\mathbf{C_1}$: Toute fonction presque-périodique est bornée.

$\mathbf{C_2}$: Toute fonction presque-périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

$\mathbf{C_3}$: Principe de reconstitution (à $+\infty$ *et* $-\infty$). Il existe des suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $t_n \to \infty$ et $t_n^{'} \to -\infty$ telle que $(f(t+t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(t+t_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(t)$.

$\mathbf{C_4}$: L'ensemble des fonctions presque-périodiques est invariant par translation ; il l'est également par convolution par des fonctions de L^1.

Remarque 1.4.3. *Le défaut de la définition de Bohr est que chaque fonction presque-périodique a ses presque-périodes propres, de ce fait deux fonctions presque-périodiques sont a priori difficilement comparables et l'on ne peut rien dire de leur somme.*

La caractérisation suivante, dûe à Bochner est beaucoup plus maniable.

1.4.3 Caractérisation de Bochner

Définition 1.4.4. *Soit X un espace de Banach muni d'une norme notée $\|\cdot\|$,*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}.$$

On dit que : f est presque-périodique si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) f est continue,

(ii) de toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on peut extraire une sous suite $(h_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(t+h_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Commentaires et Conséquences

Cette caractérisation correspond à une propriété élémentaire dans le cas périodique. En effet, si f est une fonction T périodique (et continue) et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels, la suite

$$h_n^{'} = h_n - E\Big(\frac{h_n}{T}\Big)T, \text{ où } E(\cdot) \text{ est la fonction partie entière,}$$

est bornée et a donc des sous suites convergentes. Si $(h_{nk}^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ est une telle sous suite, on déduit de l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ que

$$f(t+h_{nk}^{'}) = f(t+h_{nk})$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

La démonstration de l'équivalence des propriétés se fait dans le cas général en adoptant cette méthode.

Quelques unes des conséquences nouvelles que l'on tire de la caractérisation Bochner sont :

$\mathbf{C_5}$: L'image d'une fonction presque-périodique à valeurs dans un espace de dimension quelconque est relativement compacte.

$\mathbf{C_6}$: L'ensemble des translatées d'une fonction presque-périodique f i.e.

$$\Big\{ s \to f(t+s),\ t \in \mathbb{R} \Big\}$$

est relativement compact, quand $C(\mathbb{R}, X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ (cet énoncé n'est qu'une reformulation de la définition).

$\mathbf{C_7}$: L'espace des fonctions presque-périodiques est complet pour la norme du sup.

$\mathbf{C_8}$: La somme et le produit de fonctions presque-périodiques sont presque-périodiques.

Donc, l'espace des fonctions presque-périodiques a une structure d'algèbre de Banach.

$\mathbf{C_9}$: Composée de deux fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

Nous notons enfin que la fonction $\|f\|_X$ est presque-périodique si f l'est.

$\mathbf{C_{10}}$: Si f est une fonction presque-périodique et si g est une fonction uniformément continue alors la composée $g \circ f$ est une fonction presque-périodique.

La nécessité de vérifier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ est une difficulté sérieuse pour établir la presque périodicité. Il arrive souvent que l'on ait la convergence uniforme sur les bornés, mais que l'on ne puisse dire plus a priori.

La caractérisation suivante introduite également par Bochner [19] présente un grand intérêt de ce point de vue.

1.4.4 Deuxième Caractérisation de Bochner

Théorème 1.4.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction continue. Alors, f est presque-périodique si pour toute suite $((\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}})$ $\sigma_n,\ \tau_n \in \mathbb{R}$, il existe une sous suite $((\sigma_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n^{'})_{n\in\mathbb{N}})$ telles que $(f(t+\sigma_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $g(t)$ et $(f(t+\sigma_n^{'}+\tau_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(t+\tau_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers la même fonction $h(t)$.*

Nous donnons une démonstration du théorème 1.4.5, qui fait apparaître le lien entre les deux caractérisations de Bochner :

Preuve du Théorème :

Supposons d'abord f est presque-périodique au sens de la définition 1.4.1. Considérons deux suites $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De la définition 1.4.1, nous déduisons l'existence d'une sous suite $(\sigma_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(t+\sigma_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Désignons par $g(t)$ la fonction limite. Du Corollaire $\mathbf{C_6}$, on déduit que g est presque-périodique . En appliquant la première caractérisation à la fonction g et à (τ_n) on déduit l'existence d'une sous suite $(\tau_n^{'})$ telle que $(g(t+\tau_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h. On a alors :

$$\|f(t+\sigma_n^{'}+\tau_n^{'})-h(t)\| \leq \|f(t+\sigma_n^{'}+\tau_n^{'})-g(t+\tau_n^{'})\| + \|g(t+\tau_n^{'})-h(t)\|$$

Le terme

$$\|f(t+\sigma_n^{'}+\tau_n^{'})-g(t+\tau_n^{'})\| \to 0$$

indépendamment de $t+\tau_n^{'}$ quand $n\to\infty$, en raison de l'uniforme convergence de $(f(t+\sigma_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $g(t)$. On obtient donc la conclusion du théorème,

$$\lim_{n\to\infty} f(t+\sigma_n^{'}+\tau_n^{'}) = h(t) = \lim_{n\to\infty} g(t+\tau_n^{'}).$$

Inversement, supposons vérifiée la propriété du théorème 1.4.5 et montrons la propriété caractéristique de la définition 1.4.1. On fait un raisonnement par l'absurde.

Supposons donc qu'il existe une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(t+\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g et que la convergence n'est pas uniforme. On en déduit l'existence d'un nombre $\varepsilon>0$, d'une sous suite $(\sigma_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'une suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\|f(\sigma_n^{'}+\tau_n)-g(\tau_n)\| \geq \varepsilon.$$

Mais, par application du théorème 1.4.5, on déduit l'existence de deux sous suites $(\tau_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^{''})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(g(t+\tau_n^{'}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(t+\tau_n^{'}+\sigma_n^{''}))_{n\in\mathbb{N}}$ aient en chaque point t, la même limite.

L'inégalité précédente montre que cette conclusion n'a pas lieu en $t=0$, d'où une contradiction.

Commentaires et Conséquences

Nous verrons plus loin que la définition 1.4.5 est particulièrement adaptée pour obtenir des résultats pour des systèmes dynamiques à dépendance presque-périodique.

Nous notons que la propriété du théorème 1.4.5 est vérifiée par des fonctions uniformément continue, dans le cas des suites $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées. Ce qui est caractéristique des fonctions presque-périodiques, c'est donc que la même propriété soit vérifiée avec des suites non bornées.

Introduisons l'opérateur U_σ comme dans Haraux [60], associée une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels quelconques, par

$$(U_{\sigma_n} f)(t) = \lim_{n\to\infty} f(t+\sigma_n)$$

quand cette limite existe.

A l'aide des opérateurs U_σ, le théorème 1.4.5 s'énonce ainsi :
f est presque-périodique si et seulement si pour toute suite $\Big((\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ $\sigma_n, \tau_n \in \mathbb{R}$, il existe une sous suite $\Big((\sigma_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ telle que

$$U_{_{\sigma^{'}+\tau^{'}}} f = U_{_{\sigma^{'}}}(U_{\tau^{'}} f) = U_{_{\tau^{'}}}(U_{\sigma^{'}} f)$$

$$(U_\sigma f)(t) = \lim_{n\to\infty} f(t+\sigma_n)$$

quand cette limite existe. Propriéte que l'on peut qualifier de commutativité asymptotique des translations. Cette propriété caractérise une classe de fonctions qui englobe les fonctions presque-périodiques.

$\mathbf{C_{11}}$: Soit f une fonction presque-périodique. Si g est une translatée-limite de f, alors f est aussi une translatée limite de g (g est une translatée-limite de f, s'il existe une suite de réels $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t+\sigma_n)$).

Pour conclure la présentation de ces caractérisations nous devons souligner qu'aucune d'entre elles n'est de type fonctionnel en ce sens qu'elle correspond à une caractérisation ensembliste des fonctions presque-périodiques à partir d'un seul opérateur, contrairement à ce que l'on a pour les fonctions périodiques de période donnée.

En ce qui concerne l'utilité respective des caractérisations, les deux premières définition 3 et définition 1, interviennent surtout dans l'étude des propriétés des fonctions presque-périodiques. Quant à la deuxième caractérisation de Bochner, elle est particulièrement adaptée pour obtenir des résultats d'existence de solutions presque-périodiques pour des systèmes à dépendance presque-périodique.

Chapitre 2

Solutions Pseudo Presque-Périodiques avec Poids pour les Equations Différentielles à Retard en Dimension Infinie

2.1 Introduction

L'objectif de ce travail est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids pour l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

où $A : D(A) \to \mathbb{E}$ est un opérateur linéaire (pas nécessairement dense) sur un espace de Banach $\mathbb{E}$, on suppose que A vérifie la condition de Hille-Yoshida , qui signifie que A vérifie la condition spectrale suivante : il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A) \text{ et } |(\lambda I - A)^{-n}| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda > \omega,$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A, ici $C := C([-r, 0], \mathbb{E})$ est l'espace de Banach de fonctions continues de $[-r, 0]$ sur $\mathbb{E}$ muni de la topologie de la norme uniforme, L est un opérateur linéaire borné de C sur $\mathbb{E}$ et f est une fonction pseudo presque-périodique avec poids de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Pour chaque $t \geq 0$, la fonction $x_t \in C$ est définie par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \qquad \text{pour } -r \leq \theta \leq 0.$$

Il existe plusieurs exemples où A n'est pas à domaine dense. En particulier, on rencontre la nondensité dans plusieurs situations due à des restrictions de l'espace où l'équation est considérée (par exemple, les fonctions continues périodiques, les fonctions continues au sens de Hölder) ou due aux conditions limites (par exemple, l'espace C^1 avec une valeur nulle sur la frontière est non dense dans l'espace des fonctions continues).

La notion de pseudo-presque périodicité, a été introduite dans la litérature il ya une quinzaine d'années par C. Zhang [108, 109, 110], comme une généralisation de la presque-périodicité classique au sens de Bohr. Depuis, plusieurs auteurs s'intéressent à l'existence de solutions pseudo presque-périodiques des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles et des équations différentielles fonctionnelles et ont fait plusieurs contributions là dessus : par exemple, E. Aitdads, O. Arino et K. Ezzinbi [6, 8, 9] obtiennent une condition suffisante d'existence de solutions pseudo presque-périodiques de certaines équations différentielles à retard et récemment d'autres contributions sur les solutions pseudo-presque périodiques d'équations differentielles ont été obtenues par T. Diagana, E.M. Hern$\grave{a}$ndez, G.M. Mahop, G.M. N'Gu$\acute{e}$r$\acute{e}$kata [35, 37, 39, 40, 41].

T. Diagana [34, 38] introduit une nouvelle classe de fonctions dite fonctions pseudo presque-périodiques avec poids qui généralisent les fonctions pseudo presque-périodiques introduites par Zhang. L'idée principale consiste à mettre un poids $\rho : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (une fonction localement intégrable sur tout $\mathbb{R}$), sur la composante ergodique apparaîssant dans la définition de Zhang et ainsi obtenir l'espace à poids, $PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$. De cette façon, une fonction f pseudo presque-périodique avec poids ρ, apparaîtra comme étant une perturbation d'une fonction presque-périodique au sens de H. Bohr par une fonction de $PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$ c'est à dire $f = g + \phi$ où $g \in AP(\mathbb{E})$ et $\phi \in PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$. L'auteur obtient des propriétés intéressantes sur l'espace à poids $PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$ comme la complétude ou la composition qui sont fondamentaux pour l'étude des solutions pseudo presque-périodiques avec poids de certaines équations différentielles ou équations aux dérivées partielles semi-linéaires.

Cependant, une condition suffisante d'existence de solutions pseudo presque-périodiques avec poids pour les équations différentielles fonctionnelles a été établie par L. Zhang et Y. Xu [111].

Ce travail se présente comme suit : Dans le paragraphe 2, on rappelle quelques notations et définitions de fonctions pseudo presque-périodiques avec poids. Dans le paragraphe 3, on donne la formule de variation de la constante et quelques résultats fondamentaux sur la décomposition spectrale des solutions qui est l'outil principal de ce travail. Dans le paragraphe 4, on démontre le Théorème fondamental d'existence et d'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids. Dans le paragraphe 5, on applique le résultat du paragraphe précédent à l'équation à retard non linéaire. A la fin, le paragraphe 6 est une illustration de notre résultat fondamental (Théorème 2.4.1), on établie les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids à l'équation de diffusion à retard.

2.2 Fonctions Pseudo Presque-Périodique avec Poids

Dans ce qui suit on rappelle quelques définitions et notations qu'on utilisera par la suite.

Soit $(\mathbb{E}, \| \;\; \|)$ un espace de Banach et $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ dénote l'espace de toutes les fonctions locallement intégrables sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathbb{U}$ défini par

$$\mathbb{U} := \left\{\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \rho(x) > 0 \quad \text{presque pour tout} \;\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

Dorénavant, si $\rho \in \mathbb{U}$ et pour $R > 0$, on pose alors

$$m(R, \rho) := \int_{-R}^{R} \rho(x)\; dx$$

L'espace des fonctions poids est défini par

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_\infty &:= \left\{\rho \in \mathbb{U} : \lim_{R\to\infty} m\left(R, \rho\right) = \infty\right\} \\ \mathbb{U}_B &:= \left\{\rho \in \mathbb{U}_\infty : \;\rho \text{ est bornée et } \inf_{x\in\mathbb{R}} \rho(x) > 0\right\}. \end{aligned}$$

Dans tout ce travail $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est l'espace de toutes les fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathbb{E}$ muni de la norme du sup définie par $\|\phi\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|$.

Définition 2.2.1. *[30, 50] Une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ *est dite presque-périodique si*

(i) f *est continue,*

(ii) pour chaque $\varepsilon > 0$ *il existe un* $l(\varepsilon) > 0$*, tel que tout intervalle* I *de longueur* $l(\varepsilon)$ *contient un nombre* τ *avec la propriété que* $\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Le nombre τ *ci-dessus est appelé le nombre* ε*-translation de* f*.*

Soit $AP(\mathbb{E})$ dénote l'espace des fonctions presque-périodiques.

Dénotons par $PAP_0(\mathbb{E})$ l'espace des perturbations ergodiques défini par

$$PAP_0(\mathbb{E}) := \left\{f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \; \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f(t)\|\; dt = 0\right\}$$

Définition 2.2.2. *[37] Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque-périodique si*

$$f = g + \phi,$$

où $g \in AP(\mathbb{E})$ et $\phi \in PAP_0(\mathbb{E})$.

g et ϕ sont appelées la composante presque-périodique et la perturbation ergodique, respectivement, de la fonction f.

La collection de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ est dénotée par $PAP(\mathbb{E})$.

Exemples

1. $f(t) = sin\ t + sin\ \sqrt{2}t + \dfrac{1}{t^2+1}$.

2. $f(t) = sin\ t + sin\ \pi t + t\ |sin\ \pi t|^{t^N}$ pour $N > 6$.

Remarque 2.2.3. *Notons que g et ϕ sont déterminées d'une manière unique.*

Définition 2.2.4. *[38] Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. On définit l'espace ergodique avec poids par*

$$PAP_0(\mathbb{E}, \rho) := \left\{ f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|f(t)\|\rho(t)\ dt = 0 \right\}$$

Définition 2.2.5. *[38] Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque-périodique avec poids (ou ρ-pseudo presque périodique) si elle s'écrit comme suit*

$$f = g + \phi,$$

où $g \in AP(\mathbb{E})$ et $\phi \in PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$.

La collection de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques avec poids de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ est dénotée par $PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Remarque 2.2.6. *[38] Les fonctions g et ϕ qui apparaissent en définition 2.2.5 sont appelées respectivement les composantes presque-périodiques et ergodiques avec poids de f.*

Remarque 2.2.7. *[38] La décomposition d'une fonction ρ-pseudo presque-périodique $f = g + \phi$, où $g \in AP(\mathbb{E})$ et $\phi \in PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$, est unique. Ceci est basé sur le fait que $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$. Par conséquent, $PAP(\mathbb{E}, \rho) = AP(\mathbb{E}) \oplus PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$.*

Définition 2.2.8. *[38] Soit $(\mathbb{F}, \| \quad \|)$ un espace de Banach. Une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est dite presque-périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $y \in \mathbb{F}$ si pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{F}$ il existe $l(\varepsilon)$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre τ avec la propriété que*

$$\|F(t + \tau, y) - F(t, y)\| < \varepsilon \quad \textit{pour chaque} \ \ t \in \mathbb{R} \ \ \textit{et} \ \ y \in K.$$

La collection de ces fonctions est dénotée par $AP(\mathbb{F}, \mathbb{E})$.

De la même façon, on définit $PAP_0(\mathbb{F}, \mathbb{E}, \rho)$ comme la collection de fonctions conjointement continues $F : \mathbb{R} \times \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ tel que $F(\cdot, y)$ est bornée et

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{m(R, \rho)} \int_{-R}^{R} \|F(s, y)\| \rho(s) \ \ ds = 0$$

uniformément par rapport à y dans tout sous ensemble compact de $\mathbb{F}$.

Définition 2.2.9. *[38] La fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ est dite pseudo presque-périodique avec poids en t par rapport à la deuxième variable si*

$$F = G + H,$$

où $G \in AP(\mathbb{F}, \mathbb{E})$ et $H \in PAP_0(\mathbb{F}, \mathbb{E}, \rho)$.

La classe de telles fonctions est dénotée par $PAP(\mathbb{F}, \mathbb{E}, \rho)$.

Maintenant, on rappelle quelques propriétés des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids.

Définition 2.2.10. *[38] Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. On dit que ρ_1 est équivalent à ρ_2 et on note $\rho_1 \sim \rho_2$ chaque fois que $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathbb{U}_B$.*

Théorème 2.2.11. *[38] Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. Si ρ_1 est équivalent à ρ_2, alors $PAP(\mathbb{E}, \rho_1) = PAP(\mathbb{E}, \rho_2)$.*

Une conséquence immédiate du Théorème 2.2.11 est le corollaire suivant, qui nous permet de coïncider l'espace de Zhang $PAP(\mathbb{E}) = AP(\mathbb{E}) \oplus PAP_0(\mathbb{E})$ avec la classe des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids $PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Si le poids est borné alors l'espace des fonctions pseudo presque périodiques avec poids coïncide avec l'espace des fonctions pseudo presque-périodiques. Ceci est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.12. *[38] Si $\rho \in \mathbb{U}_B$, alors $PAP(\mathbb{E}, \rho) = PAP(\mathbb{E})$.*

La proposition suivante est essentielle pour la suite.

Proposition 2.2.13. *[36] Soit le poids $\rho : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$ continue. Si,*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\Big[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\Big] \ \textit{et} \ \overline{\lim_{R\to\infty}}\Big[\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\Big] \quad \textit{sont finies}$$

pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, alors l'espace $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ est invariant par translation.

Le Théorème ci-dessous généralise le résultat de composition des fonctions pseudo-presque périodiques donné dans [10] et [110].

Théorème 2.2.14. *[38] Soit $f \in PAP(\mathbb{F}, \mathbb{E}, \rho)$ vérifiant la condition de Lipschitz*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x-y\|_{\mathbb{F}} \qquad \textit{pour tout } x,\ y \in \mathbb{F},\ t \in \mathbb{R}.$$

Si $h \in PAP(\mathbb{F}, \rho)$, alors $f(\cdot, h(\cdot)) \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Théorème 2.2.15. *[36] Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. L'espace $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ est un sous espace fermé de $\Big(BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \|\ \|_\infty\Big)$ muni de la topologie de la norme uniforme. Par conséquent $\Big(PAP(\mathbb{E}, \rho), \|\cdot\|_\infty\Big)$ est un espace de Banach.*

Proposition 2.2.16. *[34] Si $\rho \in \mathbb{U}_B$. Soit $f \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$ et soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $f * g$, la convolution de f et g sur $\mathbb{R}$, appartient à $PAP(\mathbb{E}, \rho)$.*

Voici un exemple d'une fonction qui est pseudo presque-périodique avec poids et qui n'est pas pseudo presque-périodique.

Exemple 2.2.17. *Soit* $\rho(t) = e^t \quad$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$.
Il est facile de voir que $m(R, \rho) = e^R - e^{-R}$ *et d'ici* $\rho \in \mathbb{U}_\infty$.

Posons $f(t) = sin\ t + sin\ \sqrt{2}\ t + e^{-t}$. *Il est clair que* f *appartient à* $PAP(\mathbb{R}, \rho)$.

On voit que, $sin\ t + sin\ \sqrt{2}\ t$ *est sa composante presque périodique et la composante ergodique avec poids de* f *vérifie*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^R - e^{-R}} \int_{-R}^{R} e^{-t}\ e^t\ dt = 0,$$

tandis que $\qquad \displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} e^{-t}\ dt = +\infty.$

D'ici, f *n'appartient pas à* $PAP(\mathbb{R})$.

2.3 Equations aux Dérivées Partielles Fonctionnelles

Par la suite, on supposera que

$(\mathbf{H_0})$ A vérifie la condition de Hille-Yoshida : il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A) \text{ et } |(\lambda I - A)^{-n}| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda > \omega,$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A.

On assoscie à l'équation (2.1) le problème avec condition initiale suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t) \qquad \text{pour } t \geq 0, \\ \\ x_0 = \varphi \in C. \end{cases} \tag{2.2}$$

Définition 2.3.1. *[2] On dit qu'une fonction continue x de $[-r,\infty)$ sur $\mathbb{E}$ est une solution intégrale de l'équation* (2.2)*, si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\displaystyle\int_0^t x(s)\ ds \in D(A) \quad$ *pour* $t \geq 0$,

(ii) $\displaystyle x(t) = \varphi(0) + A\int_0^t x(s) \quad ds + \int_0^t \Big(L(x_s) + f(s)\Big) \ ds \quad$ *pour* $t \geq 0$,

(iii) $x_0 = \varphi$.

Si $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$, les solutions intégrales coïncident avec les solutions faibles. Si x est une solution intégrale de l'équation (2.2), alors $x(t) \in \overline{D(A)}$ pour tout $t \geq 0$, en particulier $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$.

Introduisons la part A_0 de l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$ qui est définie par

$$\begin{cases} D(A_0) = \Big\{y \in D(A) : \ Ay \in \overline{D(A)}\Big\}, \\ A_0 y = Ay \quad \text{pour } y \in D(A_0). \end{cases}$$

Lemme 2.3.2. *[46] A_0 est le générateur d'un semi-groupe fortement continue $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sur $\overline{D(A)}$.*

Pour l'existence de solutions intégrales, on a le résultat suivant :

Théorème 2.3.3. *[2] Supposons que **(H_0)** est vérifiée. Alors pour tout $\varphi \in C$ tel que $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$, l'équation* (2.2) *a une unique solution intégrale x sur $[-r,+\infty)$. De plus, x est donnée par*

$$x(t) = T_0(t) \ \ \varphi(0) + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda\Big(L(x_s) + f(s)\Big) \ \ ds \quad \textit{pour} \ \ t \geq 0,$$

où $B_\lambda = \lambda R(\lambda I - A)^{-1} \quad$ *pour* $\lambda > \omega$.

L'espace de phase C_0 de l'équation (2.2) est défini par

$$C_0 = \Big\{\varphi \in C : \varphi(0) \in \overline{D(A)}\Big\}.$$

Pour chaque $t \geq 0$, on définit l'opérateur linéaire $T(t)$ sur C_0 par

$$T(t)\varphi = x_t(0, \varphi) \quad \text{pour } t \geq 0.$$

où $x(0, \varphi)$ est la solution de l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ \\ x_0 = \varphi \in C := C([-r, 0]; \mathbb{E}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Proposition 2.3.4. *[2] $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur C_0 :*

(i) Pour tout $t \geq 0, T(t)$ est un opérator linéaire borné sur C_0;

(ii) T(0)=I;

(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$;

(iv) Pour tout $\varphi \in C_0$, $T(t)\varphi$ est une fonction continue de $t \geq 0$ à valeurs dans C_0.

Théorème 2.3.5. *[3] Soit $\mathcal{A}_T$ définie sur C_0 par*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}_T) = \Big\{\varphi \in C^1([-r, 0]; \mathbb{E}) : \ \varphi(0) \in D(A), \ \varphi'(0) \in \overline{D(A)} \ \textit{et} \ \varphi'(0) = A\varphi(0) + L(\varphi)\Big\} \\ \mathcal{A}_T\varphi = \varphi' \quad \textit{pour } \varphi \in D(\mathcal{A}_T). \end{cases}$$

Alors, $\mathcal{A}_T$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur C_0.

Pour donner la formule de variation de la constante , on rappelle quelques notations et résultats qui sont pris de [3].

Soit $\langle X_0 \rangle$ l'espace défini par

$$\langle X_0 \rangle = \Big\{X_0 c : c \in \mathbb{E}\Big\},$$

où la fonction $X_0 c$ est définie par

$$(X_0 c)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in [-r, 0), \\ c & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

L'espace $C_0 \oplus \langle X_0 \rangle$ est muni de la norme

$$|\phi + X_0 c| = |\phi|_C + |c| \quad \text{pour } (\phi, c) \in C_0 \times \mathbb{E},$$

est un espace de Banach et considérons l'extension $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ definie sur $C_0 \oplus \langle X_0 \rangle$ par

$$\begin{cases} D(\widetilde{\mathcal{A}}_T) = \Big\{ \varphi \in C^1([-r, 0]; \mathbb{E}) : \ \varphi(0) \in D(A) \ \text{ et } \varphi'(0) \in \overline{D(A)} \Big\} \\ \mathcal{A}_T \varphi = \varphi' + X_0(A\varphi(0) + L(\varphi) - \varphi'(0)). \end{cases}$$

Lemme 2.3.6. *[3] Supposons que* ***(H_0)*** *est vérifiée. Alors, $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ vérifie la condition de Hille-Yoshida sur $C_0 \oplus \langle X_0 \rangle$: il existe $\widetilde{M} \geq 0$ et $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}$ tel que*

$$(\widetilde{\omega}, +\infty) \subset \rho(\widetilde{\mathcal{A}}_T) \quad et \quad |(\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_T)^{-n}| \leq \frac{\widetilde{M}}{(\lambda - \widetilde{\omega})^n} \quad pour\ n \in \mathbb{N} \quad et \quad \lambda > \widetilde{\omega}. \tag{2.4}$$

De plus, la part de $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ sur $\overline{D(\widetilde{\mathcal{A}}_T)} = C_0$ est exactement l'opérateur $\mathcal{A}_T$.

Théorème 2.3.7. *[3] Supposons que* ***(H_0)*** *est vérifiée. Alors pour tout $\varphi \in C_0$, la solution x de l'équation (2.2) est donnée par la formule de variation de la constante suivante*

$$x_t = T(t)\ \varphi + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t T(t-s) \widetilde{B}_\lambda (X_0 f(s))\ ds \quad pour \ \ t \geq 0,$$

où $\widetilde{B}_\lambda = \lambda\ (\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_T)^{-1}$ pour $\lambda > \widetilde{\omega}$.

Par la suite, on supposera que

(H_1) L'opérateur $T_0(t)$ est compact sur $\overline{D(A)}$ pour tout $t > 0$.

Théorème 2.3.8. *[3] Supposons que* ***(H_0)*** *et* ***(H_1)*** *soient vérifiées, alors $T(t)$ est compact pour $t > r$.*

Comme conséquence de la propriété de compacité de l'opérateur $T(t)$, nous avons que le spectre $\sigma(\mathcal{A}_T)$ est le spectre ponctuel. De plus, on a

Lemme 2.3.9. *$\sigma(\mathcal{A}_T)$ est donné par la formule suivante :*

$$\sigma(\mathcal{A}_T) = \big\{ \lambda \in \mathbb{C} : ker\Delta(\lambda) \neq \{0\} \big\}$$

où l'opérateur linéaire $\Delta(\lambda) : D(A) \to \mathbb{E}$ *est donné par :*

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - A - L(e^{\lambda} I)$$

et $e^{\lambda} I : \mathbb{E} \to C$, *est défini par :*

$$(e^{\lambda} x)(\theta) = e^{\lambda \theta} x, \quad \textit{pour} \;\; x \in \mathbb{E} \;\; \textit{et} \; \theta \in [-r, 0].$$

Définition 2.3.10. *[59] On dit que le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est hyperbolique si*

$$\sigma(\mathcal{A}_T) \cap i\mathbb{R} = \varnothing.$$

De la compacité du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et de [44] nous donnons le résultat suivant de décomposition spectrale sur l'espace de phase C_0.

Théorème 2.3.11. *[46] Supposons que* $\boldsymbol{(H_0)}$ *et* $\boldsymbol{(H_1)}$ *soient vérifiées. Si le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est hyperbolique, alors l'espace* C_0 *est décomposé comme somme directe de sous-espace stable et instable*

$$C_0 = S \oplus U$$

et il existe des constantes positives K *et* c *tel que*

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi\| &\leq Ke^{-ct}\|\varphi\| \quad \textit{pour} \;\; t \geq 0 \;\; \textit{et} \;\; \varphi \in S, \\ \|T(t)\varphi\| &\leq Ke^{ct}\|\varphi\| \quad \textit{pour} \;\; t \leq 0 \;\; \textit{et} \;\; \varphi \in U. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Comme conséquence de l'hyperbolicité nous avons l'unicité de solutions bornées de l'équation (2.2).

Théorème 2.3.12. *[46] Supposons que* $\boldsymbol{(H_0)}$ *et* $\boldsymbol{(H_1)}$ *soient vérifiées et le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est hyperbolique. Si* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$, *alors l'équation* (2.2) *a une unique solution bornée sur* $\mathbb{R}$ *qui est donnée par la formule suivante*

$$x_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\, d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\, d\tau$$

où, Π^s *et* Π^u *sont les projections de* C *sur les sous-espaces stables et instables, respectivement,* T^s *et* T^u *sont les restrictions de* $T(t)$ *à* S *et* U *respectivement.*

2.4 Solutions Pseudo-Presque Périodiques avec Poids

Dans ce paragraphe, on étudie l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids de l'équation (2.1).

On établit le résultat fondamental de ce travail, qui montre l'existence et l'unicité d'une solution $\rho-$pseudo presque-périodique si la fonction d'entrée f est $\rho-$pseudo presque-périodique.

Théorème 2.4.1. *[24] Pour $\rho \in \mathbb{U}_\infty$ fixé. Supposons que **(H_0)** et **(H_1)** soient vérifiées et le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est hyperbolique. Si f est ρ-pseudo presque-périodique en $t \in \mathbb{R}$ et ρ est décroissante avec*

$$P(c) := \sup_{R>0} \Big(\int_{-R}^{R} e^{-c(t+R)} \rho(t)\ dt \Big) < \infty. \tag{2.6}$$

Alors, l'équation (2.2) *a une et une seule solution bornée qui est aussi ρ-pseudo presque-périodique.*

Preuve. L'équation (2.2) a une et une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par

$$x_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\ d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\ d\tau$$

On montre que les fonctions

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\ d\tau \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\ d\tau$$

sont pseudo presque-périodiques avec poids.

Puisque f est ρ-pseudo preque-periodique alors, $f = g + \phi$ où g est presque-périodique et $\phi \in PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$.

Rappelons que $\phi \in PAP_0\ (\mathbb{E}, \rho)$ si et seulement si

$$\phi \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \text{ et } \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(t)\|\ \rho(t) dt = 0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\ d\tau &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau))\ d\tau\\ &\quad+\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau))\ d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau))\ d\tau &= \lim_{n\to+\infty}\int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau))\ d\tau\\ &\quad+\lim_{n\to+\infty}\int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau))\ d\tau\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau))\ d\tau \quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}\int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau))\ d\tau$$

sont presque-périodiques.

Il reste à montrer que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\Big\|\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau))\ d\tau\Big\|\rho(t)\ dt=0$$

et

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\Big\|\lim_{n\to+\infty}\int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau))\ d\tau\Big\|\rho(t)\ dt=0$$

Posons :

$$\begin{aligned}I(t) &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau))\ d\tau\\ J(t) &= \lim_{n\to+\infty}\int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau))\ d\tau\end{aligned}$$

D'aprés les relations (2.4) et (2.5) il existe des constantes positives K et $\widetilde{M}$ tel que

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|I(t)\|\ \rho(t)\ dt &\leq \lim_{R\to\infty}\frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\Big[\int_{-\infty}^{t} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big]\rho(t)\ dt\\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\Big[\int_{-R}^{t} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big]\rho(t)\ dt\\ &+ \lim_{R\to\infty}\frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big]\rho(t)\ dt\\ &= I_1(\rho)+I_2(\rho)\end{aligned}$$

D'aprés le théorème de Fubini, on a que

$$\begin{aligned}
I_1(\rho) &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{t} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big]\rho(t)\ dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(\tau)\|\Big[\int_{\tau}^{R} e^{-c(t-\tau)}\ \rho(t)\ dt\Big]\ d\tau
\end{aligned}$$

Puisque ρ est une fonction décroissante alors on a

$$I_1(\rho) \le \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(\tau)\|\ \ \rho(\tau)\Big[\frac{1}{c}\Big(1-e^{-c(R-\tau)}\Big)\Big]\ d\tau.$$

De plus $-R \le t \le R$ et $c > 0$ alors $\dfrac{1}{c}\Big(1-e^{-c(R-\tau)}\Big)$ est uniformément bornée par rapport à τ.

$$I_1(\rho) \le \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{c\ m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(\tau)\|\ \rho(\tau)\ d\tau = 0.$$

De (2.6) nous avons

$$\begin{aligned}
I_2(\rho) &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big]\rho(t)\ dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} e^{-ct}\Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{c\tau}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big]\rho(t)\ dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} e^{-ct}\ \ \rho(t)\ dt\Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{c\tau}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau\Big] \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{c\ m(R,\rho)\ e^{cR}}\ \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|\phi(\tau)\| \int_{-R}^{R} e^{-ct}\ \rho(t)\ dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|J(t)\|\ \rho(t)\ dt = 0.$$

Ceci complète la preuve du Théorème.

2.5 Equations aux Dérivées Partielles Fonctionnelles Non Linéaire

Dans ce paragraphe, on considère l'équation aux dérivées partielles fonctionnelle non linéaire

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) + h(t, x(t-r)) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

$\mathbf{(H_2)}$ $h \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$ et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable :
il existe une constante $\widetilde{K} > 0$ assez petite tel que

$$\|h(t,x) - h(t,y)\| \leq \widetilde{K}\ \|x-y\| \quad \text{pour tout } \ x,\ y \in \mathbb{E} \quad \text{ et } \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

$\mathbf{(H_3)}$ La fonction poids ρ vérifie :

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\Big[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\Big] \text{ et } \overline{\lim_{R\to\infty}}\Big[\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\Big] \ \text{ sont finies.}$$

On peut voir que sous l'hypothèse $\mathbf{(H_3)}$ si $u \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$, alors $u(\cdot - r) \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Théorème 2.5.1. *[38] Supposons que* ***(H₂)*** *et* ***(H₃)*** *soient vérifiées. Si* $u \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$*, alors* $h(\cdot, u(\cdot - r)) \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Théorème 2.5.2. *[24] Supposons que* $\boldsymbol{(H_0)}$, $\boldsymbol{(H_1)}$, $\boldsymbol{(H_2)}$, $\boldsymbol{(H_3)}$ *soient vérifiées et le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est hyperbolique. Si* ρ *est décroissante avec*

$$P(c) := \sup_{R>0}\Big(\int_{-R}^{R} e^{-c(t+R)}\rho(t)\ dt\Big) < \infty. \tag{2.9}$$

Alors, (2.7) *a une et une seule solution bornée qui est aussi* ρ*-pseudo presque-périodique pour* $\widetilde{K}$ *assez petit.*

Preuve. Puisque ρ est croissante, alors

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\Big[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\Big] < \infty.$$

Soit $v \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$, considérons l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}\, u(t) = Au(t) + L(u_t) + h(t, v(t-r)) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

D'aprés le théorème 2.5.1, $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ est invariant par translation on a que

$$h(t, v(t-r)) \in PAP(\mathbb{E}, \rho).$$

Alors l'équation (2.10) a une et une seule solution u dans $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ qui est donnée par

$$u_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 h(\tau, v(\tau-r)\Big)d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 h(\tau, v(\tau-r))\Big)d\tau$$

Soit l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : PAP(\mathbb{E}, \rho) &\longrightarrow PAP(\mathbb{E}, \rho) \\ v &\longmapsto \mathcal{H}(v) = u \end{aligned}$$

De l'hyperbolicité, on peut voir que pour une certaine constante positive $\widetilde{N}$

$$\|\mathcal{H}(v) - \mathcal{H}(w)\| \leq \widetilde{N}\widetilde{K}\ \|v - w\|$$

Si $\widetilde{N}\widetilde{K} < 1$, alors $\mathcal{H}$ a un unique point fixe qui est l'unique solution ρ-pseudo presque-périodique de l'équation (2.7).

2.6 Exemple

Pour illustrer les résultats précédents, on considère l'équation aux dérivées partielles fonctionnelle suivante avec diffusion qui décrit l'évolution de l'espèce animale diffusive simple avec la densité de population v. Pour plus de détails sur ce modèle, on se réfère à [104].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, y(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, y(t,x) + \displaystyle\int_{-r}^{0} q(\theta)\, y(t+\theta, x)\, d\theta + z(t,x) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0,\pi], \\ \\ y(t,0) = y(t,\pi) = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $q : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$z : \mathbb{R} \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et définie par

$$z(t, x) = \psi(t) \;\; \eta(x), \quad \eta : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \;\text{ est une fonction continue,}$$

où $\psi(t) = \sin\ t + \sin\ \sqrt{2}\ t + e^{\alpha t}$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Soit $\mathbb{E} = C\ ([0, \pi]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la norme uniforme.

On définit l'opérateur $A : D(A) \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ par

$$\begin{cases} D(A) = \Big\{ y \in C^2([0, \pi]; \mathbb{R}) : y(0) = y(\pi) = 0 \Big\}, \\ \\ Ay = y''. \end{cases}$$

Lemme 2.6.1. *[46]* $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ *et* $|(\lambda I - A)^{-1}| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ *pour* $\lambda > 0$.

De plus, $\overline{D(A)} = \Big\{ y \in \mathbb{E} : y(0) = y(\pi) = 0 \Big\}$. Soit A_0 la partie de A dans $\overline{D(A)}$. Alors A_0 est donné par

$$\begin{cases} D(A_0) = \Big\{ y \in C^2([0, \pi]; \mathbb{R}) : y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0 \Big\}, \\ \\ A_0 y = Ay \quad \text{pour} \;\; y \in D(A_0). \end{cases}$$

A_0 est le générateur d'un semi-groupe fortement continu compact $(T_0(t))_{t \geq 0}$ sur $\overline{D(A)}$. Par conséquent, les conditions $\mathbf{(H_0)}$ et $\mathbf{(H_1)}$ sont vérifiées.

Pour écrire l'équation (2.11) sous la forme abstraite (2.2), on introduit l'opérateur

$L : C \longrightarrow \mathbb{E}$ défini par

$$L(\phi)(x) = \int_{-r}^{0} q(\theta)\ \phi(\theta)(x)\ d\theta \quad \text{pour } x \in [0, \pi] \text{ et } \phi \in C,$$

et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est définie par

$$f(t)(x) = z(t,x) = \psi(t) \quad \eta(x) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } \quad x \in [0,\pi].$$

Alors, L est un opérateur linéaire borné de C dans $\mathbb{E}$ et de la continuité de ψ on obtient que f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

Alors, l'équation (2.11) prendra la forme abstraite

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

Pour étudier l'existence et l'unicité d'une solution bornée de l'équation (2.12), on supposera que :

($\mathbf{H_4}$) $\displaystyle\int_{-r}^{0} |q(\theta)|\, d\theta < 1.$

Proposition 2.6.2. *Supposons que* ***(H_4)*** *est vérifiée. Alors, le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable : il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega > 0$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M\ e^{-\omega t} \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_T)$. Alors il existe $x \in D(A)$, $x \neq 0$ tel que $\Delta(\lambda)\ x = 0$.

Ce qui donne que

$$\lambda x - Ax - \Big(\int_{-r}^{0} q(\theta)\ e^{\lambda\theta}\ d\theta\Big)x = 0,$$

et

$$\lambda - \int_{-r}^{0} q(\theta)\ e^{\lambda\theta}\ d\theta \in \sigma_p\ (A),$$

où $\sigma_p\ (A)$ est le spectre ponctuel de A et est

$$\sigma_p\ (A) = \Big\{ -n^2 : n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

Par conséquent, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_T)$ si et seulement si

$$\lambda - \int_{-r}^{0} q(\theta)\ e^{\lambda\theta}\ d\theta = -\ n^2 \quad \text{pour cetain } n \geq 1. \tag{2.13}$$

Prenons la partie réelle dans la formule (2.13), on obtient que

$$Re(\lambda) = \int_{-r}^{0} q(\theta)\ e^{Re(\lambda\theta)}\ cos(Im\lambda\ \theta)\ d\theta - n^2 \qquad \text{pour}\ \ n \geq 1.$$

Supposons que $Re(\lambda) \geq 0$, alors

$$Re(\lambda) \leq \int_{-r}^{0} |q(\theta)|\ d\theta - 1 < 0. \tag{2.14}$$

Ce qui donne une contradiction. Par conséquent, $\sigma(\mathcal{A}_T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\ (\lambda) < 0\}$, puisque $T(t)$ est compacte pour $t \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable.

Pour $\beta > 0$, posons la fonction poids suivante :

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si}\ \ t \leq 0, \\ \\ e^{-\beta t} & \text{si}\ \ t \geq 0\ \ \text{et}\ \beta > 0. \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{R\to+\infty} m(R,\rho) = +\infty$ et par conséquent $\rho \in \mathbb{U}_\infty$.

Proposition 2.6.3. *[24] De plus, supposons que* $0 < \alpha < \beta$. *Alors, l'équation* (2.12) *a une unique solution bornée et pseudo presque-périodique avec poids.*

Preuve

Si $\alpha < \beta$, la condition (2.6) est vérifiée, comme

$$P(\omega) := \sup_{R>0} \Big(\frac{1}{e^{\omega R}} \int_{-R}^{R} e^{-\omega t} \rho(t)\ dt \Big) = \frac{1}{\omega} < \infty.$$

Il est facile de voir que ψ n'appartient pas à $PAP(\mathbb{R})$ car on a que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} e^{\alpha t}\ dt = \infty.$$

et $\psi \in PAP(\mathbb{R},\rho)$ avec $sin\ t + sin(\sqrt{2}\ t)$ comme sa composante presque-périodique et $e^{\alpha t}$ sa composante ergodique avec poids qui vérifie

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} e^{\alpha t} \quad \rho(t)\ dt = 0.$$

D'aprés le Théorème 2.4.1, on déduit que l'équation (2.12) a une unique solution pseudo presque-périodique avec poids.

Chapitre 3

Propriétés des Solutions Pseudo-presqu'automorphes avec Poids pour les Équations Différentielles à Retard en Dimension Infinie

3.1 Introduction

L'objectif de ce travail est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pseudo-presqu'automorphes avec poids pour l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

où $A : D(A) \to \mathbb{E}$ est un opérateur linéaire (pas nécessairement dense) sur un espace de Banach $\mathbb{E}$, on suppose que A vérifie la condition de Hille-Yoshida , qui signifie que A vérifie la condition spectrale suivante : il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A) \text{ et } |(\lambda I - A)^{-n}| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda > \omega,$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A, ici $C := C([-r, 0], \mathbb{E})$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur $[-r, 0]$ sur $\mathbb{E}$ muni de la topologie de la norme uniforme, L est un opérateur linéaire borné de C vers $\mathbb{E}$ et f est une fonction pseudo-presqu'automorphe avec poids de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Pour chaque $t \geq 0$, la fonction $x_t \in C$ est définie par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \qquad \text{pour } -r \leq \theta \leq 0.$$

Il existe plusieurs exemples où A n'est pas à domaine dense. En particulier, on rencontre la nondensité dans plusieurs situations due à des restrictions de l'espace où l'équation est considérée (par exemple, les fonctions continues périodiques, les fonctions continues au sens de Hölder) ou due aux conditions limites (par exemple, l'espace C^1 avec une valeur nulle sur la frontière est non dense dans l'espace des fonctions continues).

Plusieurs auteurs s'intéressent à l'existence de solutions pseudo- presque périodiques des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles et des équations différentielles fonctionnelles et ont fait plusieurs contributions là dessus : E. Aitdads, O. Arino et K. Ezzinbi [6, 8, 9], T. Diagana, E.M. Hernàndez, G.M. Mahop, G.M. N'Guérékata [35, 37, 39, 40, 41]. La notion de presque automorphie, a été introduite dans la littérature par Bochner il ya une cinquantaine d'années comme une généralisation de la presque-périodicité classique au sens de Bohr (voir [89], [91]). Dans cette dernière décennie plusieurs auteurs B. Basit, H.S. Ding, K. Ezzinbi, J.A. Goldstein, J. Liang, J. Liu, L. Maniar, N'Guérékata, A. Pankov, T.J. Xiao, J. Zhang et d'autres, ont donné une riche littérature sur la théorie de presque automorphie et ces applications aux équations différentielles [46, 47, 54, 89, 90, 91, 92].

Récemment, Xiao, Liang et Zhang [106] introduisent une nouvelle classe de fonctions dite fonctions pseudo-presqu'automorphes et établient deux théorèmes intéressants sur la composition de fonctions presqu'automorphes ainsi que les fonctions asymptotiquement presqu'automorphes (Théorème 2.3 et 2.4, [72]). Les fonctions pseudo-presqu'automorphes avec poids généralisent les fonctions pseudo-presque périodiques avec poids qui ont été introduites par Diagana [38, 34, 36] ; recemment, J. Blot, G.M. Mophou, G.M. N'guérékata et D. Pennequin [16] ont établi des propriétés intéressantes sur les fonctions pseudo-presqu'automorphes avec poids lequel sert de support lorsqu'on étudie l'existence et l'unicité de solutions pseudo-presqu'automorphes avec poids de certaines équations différentielles abstraites semi-linéaires.

Ce travail se présente comme suit : Dans le paragraphe 2, on rappelle quelques propriétés de fonctions pseudo presqu'automorphes avec poids. Dans le paragraphe 3, on donne la formule de variation de la constante et quelques résultats fondamentaux sur la décomposition spectrale des solutions qui est l'outil principal de ce travail. Dans le paragraphe 4, on prouve le théorème fondamental de l'existence et l'unicité de solutions pseudo-presqu'automorphes avec poids de l'équation (3.1). Dans le paragraphe 5 on applique le résultat dans le paragraphe précédent à l'équation à retard non linéaire. En particulier, le pargraphe 6 est pour illustrer notre résultat fondamental (Théorème 3.4.1), on examine les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions pseudo presqu'automorphes avec poids de l'équation de diffusion à retard.

3.2 Fonctions Pseudo Presqu'automorphes avec Poids

Soit $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ un espace de Banach et $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est l'espace de toutes les fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathbb{E}$ muni de la norme du sup définie par $\|\phi\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|$.

Dans ce paragraphe on rappelle quelques propriétés intéressantes des fonctions pseudo-presqu'automorphes avec poids. En particulier, on établit le résultat d'invariance par translation de l'espace $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ qui est nécessaire pour l'étude de l'existence de solutions pseudo presqu'automorphes avec poids pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.

Définition 3.2.1. *(Bochner,[20]) Une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est dite presqu'automorphe si pour toute suite de nombres réels $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, on peut extraire une sous-suite $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que :*

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} f(t + \tau_n) \quad \textit{est bien définie pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} g(t - \tau_n) = f(t) \quad \textit{pour chaque} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $AA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ dénote l'ensemble des fonctions presqu'automorphes.

Définition 3.2.2. *[106] Une fonction continue $f : \mathbb{R}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est dite presqu'automorphe si $f(t, x)$ est presqu'automorphe pour $t \in \mathbb{R}$ uniformément pour tout x dans n'importe quel sous-ensemble borné de $\mathbb{E}$.*

L'ensemble de ces fonctions est dénoté par $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$.

Remarque 3.2.3. *Si dans les deux limites la convergence est uniforme en $t \in \mathbb{R}$, alors f est presque périodique. La notion de presqu'automorphie est plus générale que la presque périodicité. Si f est presqu'automorphe, alors son image est relativement compacte, ainsi bornée en norme.*

Exemple 3.2.4. *[92] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f(t) = sin\frac{1}{2 + cost + cos\sqrt{2}t}$$

alors f est presqu'automorphe, mais f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que f n'est pas presque périodique.

Un autre exemple donné par W.A. Veech

Exemple 3.2.5. *[88] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f(t) = \frac{2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2}t}}{|2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2}t}|}$$

alors f est presqu'automorphe, mais f n'est pas presque périodique.

De ([87], Theorems 2.1.3 et 2.1.10), nous avons les Lemmes suivants sur les propriétés intéressantes des fonctions presqu'automorphes.

Lemme 3.2.6. *[87]*

Supposons que $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ sont presqu'automorphes et λ, τ sont des scalaires. Alors on a :

1. *$f + g$, λf, $f_\tau(t) := f(t+\tau)$ pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$ et $\widehat{f}(t) := f(-t)$ sont presqu'automorphes.*
2. *L'image R_f de f est précompacte, ainsi f est bornée.*

Lemme 3.2.7. *[87]*

Si f_n est une suite de fonctions presqu'automorphe et $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, alors f est presqu'automorphe.

Définition 3.2.8. *[106] On définit*

$$AA_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) := \Big\{ f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f(t)\| \, dt = 0 \Big\},$$

$$AA_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E}) := \Big\{ f(t,x) \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E}) : \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f(t,x)\| \, dt = 0 \\ \text{uniformément pour } x \text{ dans n'importe quel sous-ensemble borné de } \mathbb{E} \Big\},$$

Définition 3.2.9. *[106] Une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ (resp. $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$) est dite pseudo-presqu'automorphe si elle se décompose comme suit*

$$f = g + \phi$$

où $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (resp. $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$) et $\phi \in AA_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (resp. $\phi \in AA_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$).

Soit $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (resp. $PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$) dénote l'ensemble de toutes ces fonctions.

Nous citons quelques propriétés importantes des fonctions pseudo presqu'automorphes

Lemme 3.2.10. *[16] Supposons que C est un nombre réel fini, soit $\Omega = [C, +\infty[\subset \mathbb{R}$ (resp. $\Omega =]-\infty, C]$), $f = g + \phi$ est une fonction pseudo-presqu'automorphe. Alors nous avons*

$$\{g(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f(t); t \in \Omega\}}$$

Corollaire 3.2.11. *[73] La décomposition de fonctions pseudo-presqu'automorphes est unique.*

L'espace des fonctions pseudo presqu'automorphes est invariant par translation et ceci est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.2.12. *[105] Si $x(\cdot) \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $x(\cdot - h) \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, où $h \geq 0$ est une constante fixé.*

Théorème 3.2.13. *[106] $\Big(PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \|\|_\infty\Big)$ est un espace de Banach.*

On supposera les hypothèses suivantes

- **(H_5)** $f(t, x)$ est uniformément continue sur n'importe quel sous-ensemble borné $K \subset \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$.
- **(H_6)** $g(t, x)$ est uniformément continue sur n'importe quel sous-ensemble borné $K \subset \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

Maintenant, nous ennonçons le Théorème de composition des fonctions pseudo presqu'automorphes.

Théorème 3.2.14. *[72] Soit $f = g + \phi \in PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$ et on suppose que **(H_5)** et **(H_6)** soient vérifiées.*
Si $h \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $f(\cdot, h(\cdot)) \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Dénotons par $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions locallement intégrables sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathbb{U}$ défini par

$$\mathbb{U} := \left\{\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \rho(x) > 0 \quad \text{presque pour tout} \quad x \in \mathbb{R}\right\}$$

Pour $R > 0$ donné, posons

$$m(R,\rho) := \int_{-R}^{R} \rho(x)\, dx \quad \text{pour tout } \rho \in \mathbb{U}.$$

Définissons

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_\infty &:= \Big\{\rho \in \mathbb{U} : \lim_{R\to\infty} m\,(R,\rho) = \infty\Big\} \\ &et \\ \mathbb{U}_B &:= \Big\{\rho \in \mathbb{U}_\infty :\ \rho \text{ est bornée et } \inf_{x\in\mathbb{R}} \rho(x) > 0\Big\}. \end{aligned}$$

Définition 3.2.15. *[16] Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. On définit*

$$PAA_0(\mathbb{R},\rho) := \Big\{f \in BC(\mathbb{R},\mathbb{E}) :\ \lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|f(s)\|\rho(s)\, ds = 0\Big\},$$

Similairement,

Définition 3.2.16. *[16] On définit $PAA_0(\mathbb{R}\times\mathbb{E},\rho)$ comme la collection de toutes les fonctions $F : \mathbb{R}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ qui sont continues par rapport aux deux variables et $F(\cdot,y)$ est bornée pour chaque $y \in \mathbb{E}$, et*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|F(s,y)\|\rho(s)\, ds = 0$$

uniformément par rapport à $y \in \mathbb{E}$.

Définition 3.2.17. *[16] Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ (resp. $\mathbb{R}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$) est dite pseudo-presqu'automorphe avec poids (ou ρ-pseudo-presqu'automorphe) si elle s'écrit comme suit*

$$f = g + \phi$$

où $g \in AA(\mathbb{R},\mathbb{E})$ (resp. $AA(\mathbb{R}\times\mathbb{E},\mathbb{E})$) et $\phi \in PAA_0(\mathbb{R},\rho)$ (resp. $\phi \in PAA_0(\mathbb{R}\times\mathbb{E},\rho)$).

Dénotons par $WPAA(\mathbb{R},\rho)$ (resp. $WPAA(\mathbb{R}\times\mathbb{E},\rho)$) l'ensemble de toutes ces fonctions.

Remarque 3.2.18. *[16] Quand $\rho = 1$, on obtient les espaces standard $PAA(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $PAA(\mathbb{R}\times\mathbb{E},\mathbb{E})$.*

On donne un exemple d'une fonction qui est pseudo presqu'automorphe avec poids et qui n'est pas pseudo presqu'automorphe.

Exemple 3.2.19. *Soit* $\rho(t) = e^t \quad$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$.
Il est facile de voir que $m(R, \rho) = e^R - e^{-R}$ *et d'ici* $\rho \in \mathbb{U}_\infty$.

Posons $f(t) = sin\ \dfrac{1}{2 + cos\ t + cos\ \sqrt{2}t} + e^{-t}$. *Il est clair que* f *appartient à* $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.

La fonction $sin\ \dfrac{1}{2 + cos\ t + cos\ \sqrt{2}t}$ *est sa composante presqu'automorphe, la composante ergodique avec poids de* f *vérifie*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^R - e^{-R}} \int_{-R}^{R} e^{-t}\ e^t\ dt = 0,$$

tandis que $\qquad \displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} e^{-t}\ dt = +\infty.$

D'ici, on déduit que f *n'appartient pas à* $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Citons quelques propriétés fondamentales des fonctions pseudo-presqu'automorphes avec poids.

Lemme 3.2.20. *[16] Si* $f = g + \phi$ *avec* $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *et* $\phi \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ *où* $\rho \in \mathbb{U}_B$, *alors* $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$.

Théorème 3.2.21. *[16] Pour chaque* $\rho \in \mathbb{U}_B$. *La décomposition de fonctions pseudo-presqu'automorphes avec poids* $f = g + \phi$, *où* $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *et* $\phi \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ *est unique.*

Théorème 3.2.22. *[16] Si* $\rho \in \mathbb{U}_B$, *alors* $\Big(WPAA(\mathbb{R}, \rho), \|\cdot\|_\infty\Big)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 3.2.23. *[16] Soient* $\rho \in \mathbb{U}_B$, $f \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R})$. *Alors* $f \star g$, *la convolution de* f *et* g *sur* $\mathbb{R}$, *appartient à* $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.

Définition 3.2.24. *[38] Soit* $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. *On dit que* ρ_1 *est équivalent à* ρ_2 *ou* $\rho_1 \sim \rho_2$ *si et seulement si* $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathbb{U}_B$.

Si deux poids sont équivalents alors les espaces pseudo presqu'automorphes avec poids correspondant coïncident, ainsi on a :

Théorème 3.2.25. *[16] Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. Si ρ_1 est équivalent à ρ_2, alors $WPAA(\mathbb{R}, \rho_1) = WPAA(\mathbb{R}, \rho_2)$.*

Nous citons le Théorème de composition des fonctions pseudo presqu'automorphes avec poids.

Théorème 3.2.26. *[16] Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$, $f = g + \phi \in WPAA(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \rho)$ et on suppose que **(H_5)** et **(H_6)** soient vérifiées.*
Si $h \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$, alors $f(\cdot, h(\cdot)) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.

Une conséquence immédiate du Lemme 3.2.20, on a :

Corollaire 3.2.27. *[16] Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$, $f = g + \phi \in WPAA(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \rho)$ et supposons que f et g sont Lipschitziennes en $x \in \mathbb{E}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$.*
Si $h \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$, alors $f(\cdot, h(\cdot)) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.

Agarwal [4] donne une condition suffisante qui assure l'invariance par translation de l'espace $PAP(\mathbb{E}, \rho)$. Nous allons établir une condition suffisante qui assure l'invariance par translation de l'espace $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.

Proposition 3.2.28. *Soit $\rho \in U_\infty$ et supposons que les limites*

$$\limsup_{s \to \infty} \left[\frac{\rho(s + \tau)}{\rho(s)} \right] \ \ et \ \limsup_{R \to \infty} \left[\frac{m(R + \tau, \rho)}{m(R, \rho)} \right]$$

sont finies pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Alors l'espace $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ est invariant par translation.

preuve.

Nous allons montrer que $f_\tau(\cdot) := f(\cdot - \tau) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.
Puisque $f_\tau \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ alors, $f_\tau = g_\tau + \phi_\tau$ où $g_\tau \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\phi_\tau \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$.
Il est facile de voir que $g_\tau \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Il reste à montrer que $\phi_\tau \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$.
Rappelons que $\phi_\tau \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ si et seulement si

$$\phi_\tau \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \text{ et } \quad \lim_{R \to \infty} \frac{1}{m(R, \rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi_\tau(t)\| \ \rho(t) dt = 0.$$

Nous avons que

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\phi_\tau(t)\|\rho(t)dt &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\phi(t-\tau)\|\rho(t)dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}\|\phi(s)\|\rho(s+\tau)ds \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\frac{1}{m(R+\tau,\rho)}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}\|\phi(s)\|\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\rho(s)ds
\end{aligned}$$

Puisque les limites

$$\limsup_{s\to\infty}\left[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\right] \text{ et } \limsup_{R\to\infty}\left[\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\right]$$

sont finies pour tout $\tau\in\mathbb{R}$, et $\phi\in PAA_0\ (\mathbb{R},\rho)$.

Alors, il s'ensuit que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\phi_\tau(t)\|\ \rho(t)dt=0,$$

et finallement $\phi_\tau\in PAA_0\ (\mathbb{R},\rho)$.

3.3 Formule de la Variation de la Constante et Décomposition Spectrale

On assoscie à l'équation (3.1) le problème avec condition initiale suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,x(t)=Ax(t)+L(x_t)+f(t) & \text{pour } t\geq 0, \\ \\ x_0=\varphi\in C. \end{cases} \tag{3.2}$$

Par la suite, on supposera que

- **($\mathbf{H_7}$)** A vérifie la condition de Hille-Yoshida : il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A) \text{ et } |(\lambda I - A)^{-n}| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda > \omega,$$

  où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A.

Définition 3.3.1. *[2] On dit qu'une fonction continue x de $[-r, \infty)$ sur $\mathbb{E}$ est une solution intégrale de l'équation* (3.2), *si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\displaystyle\int_0^t x(s)\ ds \in D(A) \quad$ *pour* $t \geq 0$,

(ii) $\displaystyle x(t) = \varphi(0) + A\int_0^t x(s)\ \ ds + \int_0^t \Big(L(x_s) + f(s)\Big)\ ds \quad$ *pour* $t \geq 0$,

(iii) $x_0 = \varphi$.

Si $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$, les solutions intégrales coïncident avec les solutions faibles. Si x est une solution intégrale de l'équation (3.2), alors $x(t) \in \overline{D(A)}$ pour tout $t \geq 0$, en particulier $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$.

Introduisons la part A_0 de l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$ qui est définie par

$$\begin{cases} D(A_0) = \Big\{ y \in D(A) : \ Ay \in \overline{D(A)} \Big\}, \\ A_0 y = Ay \quad \text{pour } y \in D(A_0). \end{cases}$$

Lemme 3.3.2. *[46] A_0 est le générateur d'un semi-groupe fortement continue $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sur $\overline{D(A)}$.*

Pour l'existence de solutions intégrales, on a le résultat suivant

Théorème 3.3.3. *[2] Supposons que* ***(H$_7$)*** *est vérifiée. Alors pour tout $\varphi \in C$ tel que $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$, l'équation (3.2) a une unique solution intégrale x sur $[-r, +\infty)$. De plus, x est donnée par*

$$x(t) = T_0(t)\ \varphi(0) + \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda \Big(L(x_s) + f(s) \Big)\ ds \quad pour \ \ t \geq 0,$$

où $B_\lambda = \lambda R(\lambda I - A)^{-1}$ pour $\lambda > \omega$.

L'espace de phase C_0 de l'équation (3.2) est défini par

$$C_0 = \Big\{ \varphi \in C : \varphi(0) \in \overline{D(A)} \Big\}.$$

Pour chaque $t \geq 0$, on définit l'opérateur linéaire $T(t)$ sur C_0 par

$$T(t)\varphi = x_t(0, \varphi) \quad \text{pour } t \geq 0.$$

où $x(0, \varphi)$ est la solution de l'équation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ \\ x_0 = \varphi \in C := C([-r, 0]; \mathbb{E}). \end{cases} \tag{3.3}$$

Proposition 3.3.4. *[2] $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur C_0 :*

(i) Pour tout $t \geq 0$, $T(t)$ est un opérateur linéaire borné sur C_0;

(ii) T(0)=I;

(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$;

(iv) Pour tout $\varphi \in C_0$, $T(t)\varphi$ est une fonction continue de $t \geq 0$ à valeurs dans C_0.

Théorème 3.3.5. *[3] Soit $\mathcal{A}_T$ défini sur C_0 par :*

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}_T) = \Big\{ \varphi \in C^1([-r, 0]; \mathbb{E}) :\ \varphi(0) \in D(A),\ \varphi'(0) \in \overline{D(A)}\ et\ \varphi'(0) = A\varphi(0) + L(\varphi) \Big\} \\ \mathcal{A}_T \varphi = \varphi' \quad pour\ \varphi \in D(\mathcal{A}_T). \end{cases}$$

Alors, $\mathcal{A}_T$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur C_0.

Pour donner la formule de variation de la constante , on rappelle quelques notations et résultats qui sont pris de [3].

Soit $\langle X_0 \rangle$ l'espace défini par

$$\langle X_0 \rangle = \Big\{ X_0 c : c \in \mathbb{E} \Big\},$$

où la fonction $X_0 c$ est définie par

$$(X_0 c)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in [-r, 0), \\ c & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

L'espace $C_0 \oplus \langle X_0 \rangle$ est muni de la norme

$$|\phi + X_0 c| = |\phi|_C + |c| \quad \text{ pour } (\phi, c) \in C_0 \times \mathbb{E},$$

est un espace de Banach et considérons l'extension $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ definie sur $C_0 \oplus \langle X_0 \rangle$ par

$$\begin{cases} D(\widetilde{\mathcal{A}}_T) = \Big\{ \varphi \in C^1([-r, 0]; \mathbb{E}) : \ \varphi(0) \in D(A) \ \text{ et } \varphi'(0) \in \overline{D(A)} \Big\} \\ \mathcal{A}_T \varphi = \varphi' + X_0 \Big(A\varphi(0) + L(\varphi) - \varphi'(0) \Big). \end{cases}$$

Lemme 3.3.6. *[3] Supposons que* ***(H₇)*** *soit vérifiée. Alors,* $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ *vérifie la condition de Hille-Yoshida sur* $C_0 \oplus \langle X_0 \rangle$ *: il existe* $\widetilde{M} \geq 0$ *et* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$(\widetilde{\omega}, +\infty) \subset \rho(\widetilde{\mathcal{A}}_T) \quad et \quad |(\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_T)^{-n}| \leq \frac{\widetilde{M}}{(\lambda - \widetilde{\omega})^n} \quad pour\ n \in \mathbb{N} \quad et \quad \lambda > \widetilde{\omega}. \tag{3.4}$$

De plus, la part de $\widetilde{\mathcal{A}}_T$ *sur* $\overline{D(\widetilde{\mathcal{A}}_T)} = C_0$ *est exactement l'opérateur* $\mathcal{A}_T$.

Théorème 3.3.7. *[3] Supposons que* ***(H₇)*** *soit vérifiée. Alors pour tout* $\varphi \in C_0$*, la solution* x *de l'équation* (3.2) *est donnée par la formule de variation de la constante suivante*

$$x_t = T(t)\ \varphi + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t T(t-s) \widetilde{B}_\lambda (X_0 f(s))\ ds \quad pour \ \ t \geq 0,$$

où $\widetilde{B}_\lambda = \lambda\ (\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_T)^{-1} \quad pour\ \lambda > \widetilde{\omega}.$

Dans la suite, on supposera que

($\mathbf{H_8}$) L'opérateur $T_0(t)$ est compact sur $\overline{D(A)}$ pour tout $t > 0$.

Théorème 3.3.8. *[3] Supposons que **(H_7)** et **(H_8)** soient vérifiées, alors $T(t)$ est compact pour $t > r$.*

Comme conséquence de la propriété de compacité de l'opérateur $T(t)$, nous avons que le spectre $\sigma(\mathcal{A}_T)$ est le spectre ponctuel. De plus, on a

Lemme 3.3.9. *$\sigma(\mathcal{A}_T)$ est est donnée par la formule suivante :*

$$\sigma(\mathcal{A}_T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : ker\Delta(\lambda) \neq \{0\}\big\}$$

où l'opérateur linéaire $\Delta(\lambda) : D(A) \to \mathbb{E}$ est donné par :

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - A - L(e^{\lambda} I)$$

et $e^{\lambda} I : \mathbb{E} \to C$, est défini par :

$$(e^{\lambda} x)(\theta) = e^{\lambda\theta} x, \quad pour \;\; x \in \mathbb{E} \;\; et \; \theta \in [-r, 0].$$

Définition 3.3.10. *[59] On dit que le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est hyperbolique si*

$$\sigma(\mathcal{A}_T) \cap i\mathbb{R} = \varnothing.$$

Théorème 3.3.11. *[46] Supposons que **(H_7)** et **(H_8)** soient vérifiées. Si le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est hyperbolique, alors l'espace C_0 est décomposé comme somme directe de sous-espace stable et instable*

$$C_0 = S \oplus U$$

et il existe des constantes positives K et c tel que

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi\| &\leq Ke^{-ct}\|\varphi\| \quad pour \;\; t \geq 0 \;\; et \;\; \varphi \in S, \\ \|T(t)\varphi\| &\leq Ke^{ct}\|\varphi\| \quad pour \;\; t \leq 0 \;\; et \;\; \varphi \in U. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Théorème 3.3.12. *[46] Supposos que **(H₇)** et **(H₈)** soient vérifiées et le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est hyperbolique. Si f est bornée sur $\mathbb{R}$, alors l'équation* (3.2) *a une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par la formule suivante*

$$x_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau)\Big)\ d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau)\Big)\ d\tau$$

où, Π^s et Π^u sont les projections de C sur les sous-espaces stables et instables, respectivement, T^s et T^u sont les restrictions de $T(t)$ à S et U respectivement.

3.4 Solution Pseudo-presqu'automorphe avec Poids

Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. Dans ce paragrahe, On établit le résultat fondamental de ce travail, qui montre l'existence et l'unicité de solutions $\rho-$pseudo presqu'automorphes de l'Eq. (3.1) si la fonction d'entrée f est $\rho-$pseudo presqu'automorphe.

Théorème 3.4.1. *Fixons $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. Supposons que **(H₇)** et **(H₈)** soient vérifiées et le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est hyperbolique. Si f est ρ-pseudo-presqu'automorphe en $t \in \mathbb{R}$ et ρ est décroissante avec*

$$P(c) := \sup_{R>0} \Big(\int_{-R}^{R} e^{-c(t+R)}\rho(t)\ dt\Big) < \infty. \tag{3.6}$$

Alors, Eq. (3.1) *a une et une seule solution bornée qui est aussi ρ-pseudo-presqu'automorphe.*

Preuve. Eq. (3.1) a une et une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par

$$x_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau)\Big)\ d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau)\Big)\ d\tau.$$

Posons :

$$\begin{aligned} F^s(t) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau)\Big)\ d\tau \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ &\text{et} \\ F^u(t) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 f(\tau)\Big)\ d\tau \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On montre que les fonctions $F^s(t)$ et $F^u(t)$ sont pseudo-presqu'automorphes avec poids.

Puisque $f \in WPAA(\mathbb{R},\rho)$ alors, $f = g + \phi$ où $g \in AA(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $\phi \in PAA_0(\mathbb{R},\rho)$. Rappelons que $\phi \in PAA_0(\mathbb{R},\rho)$ si et seulement si

$$\phi \in BC(\mathbb{R},\mathbb{E}) \text{ et } \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(t)\|\ \rho(t)dt = 0.$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$F^s(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\ d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau)\Big)\ d\tau$$

et

$$F^u(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\ d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau)\Big)\ d\tau$$

Posons

$$\begin{aligned} G^s(t) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\ d\tau \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ &\text{et} \\ G^u(t) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\ \Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\ d\tau \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nous montrons d'abord que $G^s(t)$ et $G^u(t)$ sont presqu'automorphes.

Soit $s = (s_m)$ une suite de nombres réelles. Puisque g est presqu'automorphe, il existe une sous-suite de s_m notée par σ_m et une fonction continue $\widetilde{g}(t)$ telle que

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(t) &= \lim_{m\to\infty} g(t+\sigma_m) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ &\text{et} \\ g(t) &= \lim_{m\to\infty} \widetilde{g}(t-\sigma_m) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors, on montre que

$$\begin{aligned} \widetilde{G^s}(t) &= \lim_{m\to\infty} G^s(t+\sigma_m) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ &\text{et} \\ G^s(t) &= \lim_{m\to\infty} \widetilde{G^s}(t-\sigma_m) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Maintenant pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$G^s(t+\sigma_m) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t+\sigma_m} T^s(t+\sigma_m-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\ d\tau$$

ce qui donne pour $t \in \mathbb{R}$

$$G^s(t+\sigma_m) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\ \Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau+\sigma_m)\Big)\ d\tau$$

Ainsi, on doit montrer que

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau+\sigma_m)\Big)d\tau\Big] = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau)\Big)d\tau$$

et

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau-\sigma_m)\Big)d\tau\Big] = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)d\tau$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Posons

$$A := \Big\|\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau+\sigma_m)\Big)d\tau - \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau)\Big)d\tau\Big\|$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A &= \Big\|\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big[\widetilde{B}_n X_0\Big(g(\tau+\sigma_m)-\widetilde{g}(\tau)\Big)\Big]d\tau\Big\| \\
&\leq K\widetilde{M}\int_{-\infty}^{t} e^{-c(t-\tau)}\Big\|g(\tau+\sigma_m)-\widetilde{g}(\tau)\Big\|d\tau \\
&\leq K\widetilde{M}\int_{0}^{+\infty} e^{-cs}\Big\|g(t-s+\sigma_m)-\widetilde{g}(t-s)\Big\|ds \\
&\leq 2K\widetilde{M}\|g\|_\infty\int_{0}^{+\infty} e^{-cs}ds
\end{aligned}$$

Puisque $2K\widetilde{M}\ \|g\|_\infty e^{-ct} \in L^1(0,\infty)$.

Alors, d'aprés le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons que

$$\widetilde{G^s}(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau)\Big)d\tau \qquad \text{pour chaque } t \in \mathbb{R}.$$

D'une façon analogue à ce qui précède, on peut montrer que

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\lim_{n\to\infty}\int_{+\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau-\sigma_m)\Big)d\tau\Big] = G^s(t) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Similairement, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on montre que

$$\widetilde{G^u}(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau)\Big)d\tau$$

et

$$\lim_{m\to\infty} \Big[\lim_{n\to\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 \widetilde{g}(\tau - \sigma_m)\Big)d\tau \Big] = G^u(t).$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\, d\tau \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 g(\tau)\Big)\, d\tau$$

sont presqu'automorphes.

Il resta à montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big\| \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau)\Big)\, d\tau \Big\| \rho(t)\, dt = 0$$

et

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big\| \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau)\Big)\, d\tau \Big\| \rho(t)\, dt = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} I(t) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau)\Big)\, d\tau \\ J(t) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 \phi(\tau)\Big)\, d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.4) et (3.5) il existe des constantes positives K and $\widetilde{M}$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|I(t)\|\, \rho(t)\, dt &\leq \lim_{R\to\infty} \frac{K\,\widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-\infty}^{t} e^{-c(t-\tau)}\, \|\phi(\tau)\|\, d\tau \Big] \rho(t)\, dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\,\widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{t} e^{-c(t-\tau)}\, \|\phi(\tau)\|\, d\tau \Big] \rho(t)\, dt \\ &+ \lim_{R\to\infty} \frac{K\,\widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{-c(t-\tau)}\, \|\phi(\tau)\|\, d\tau \Big] \rho(t)\, dt \\ &= I_1(\rho) + I_2(\rho). \end{aligned}$$

Par le Théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} I_1(\rho) &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{t} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau \Big] \rho(t)\ dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(\tau)\| \Big[\int_{\tau}^{R} e^{-c(t-\tau)}\ \rho(t)\ dt \Big]\ d\tau. \end{aligned}$$

Puisque ρ est une fonction décroissante alors on a

$$I_1(\rho) \leq \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(\tau)\|\ \ \rho(\tau) \Big[\frac{1}{c} \Big(1 - e^{-c(R-\tau)}\Big) \Big]\ d\tau.$$

De plus $-R \leq t \leq R$ et $c > 0$ alors $\frac{1}{c}\ \Big(1 - e^{-c(R-\tau)}\Big)$ est borné uniformément en τ.

$$I_1(\rho) \leq \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{c\ m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|\phi(\tau)\|\ \rho(\tau)\ d\tau = 0.$$

d'aprés (3.6) on a

$$\begin{aligned} I_2(\rho) &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{-c(t-\tau)}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau \Big] \rho(t)\ dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} e^{-ct} \Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{c\tau}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau \Big] \rho(t)\ dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} e^{-ct}\ \ \rho(t)\ dt \Big[\int_{-\infty}^{-R} e^{c\tau}\ \|\phi(\tau)\|\ d\tau \Big] \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{K\ \widetilde{M}}{c\ m(R,\rho)\ e^{cR}}\ \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|\phi(\tau)\| \int_{-R}^{R} e^{-ct}\ \rho(t)\ dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'une manière similaire on montre que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|J(t)\|\ \rho(t)\ dt = 0.$$

Ceci complète la preuve du théorème.

3.5 Equation aux Dérivées Partielles Non Linéaires

Dans ce paragraphe, on considère l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = Ax(t) + L(x_t) + h(t, x(t-r)) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions $\rho-$pseudo-presqu'automorphes de l'Eq. (3.7), on supposera les hypothèses suivantes :

- $(\mathbf{H_9})$ $h = g + \phi \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ où $\rho \in U_\infty$.

- $(\mathbf{H_{10}})$ $\|h(t,x) - h(t,y)\| \leq L_h \ \|x - y\|$ pour tout $x,\ y \in \mathbb{E}$ et $t \in \mathbb{R}$.

- $(\mathbf{H_{11}})$ Supposons que les deux limites
$$\limsup_{s\to\infty} \left[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\right] \text{ et } \limsup_{T\to\infty} \left[\frac{m(T+\tau,\rho)}{m(T,\rho)}\right]$$
sont finies pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, alors l'espace $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ est invariant par translation.

Théorème 3.5.1. *Supposons que $(\mathbf{H_7}) - (\mathbf{H_{11}})$ soient vérifiées. Alors,*

si $u \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$, alors $h(\cdot, u(\cdot - r)) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$.

Preuve. La preuve découle de la Proposition 3.2.28 et du Corollaire 3.2.27.

Théorème 3.5.2. *Supposons que $(\mathbf{H_7}) - (\mathbf{H_{11}})$ soient vérifiées, le semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est hyperbolique et ρ est décroissante avec*

$$P(c) := \sup_{R>0} \Big(\int_{-R}^{R} e^{-c(t+R)} \rho(t)\ dt \Big) < \infty.$$

Alors, (3.7) a une et une seule solution bornée qui est aussi ρ-pseudo-presqu'automorphe pour $\widetilde{K}$ assez petit.

Preuve. Soit $v \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ considérons l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}\, u(t) = Au(t) + L(u_t) + h(t, v(t-r)) \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

$WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ est invariant par translation et d'aprés le Théorème 3.5.1, on a

$$h(t, v(t-r)) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho).$$

Alors l'Eq. (3.8) a une et une seule solution u dans $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ qui est donnée par

$$u_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} T^s(t-\tau)\Pi^s\Big(\widetilde{B}_n X_0 h(\tau, v(\tau-r)\Big) d\tau + \lim_{n\to+\infty} \int_{+\infty}^{t} T^u(t-\tau)\Pi^u\Big(\widetilde{B}_n X_0 h(\tau, v(\tau-r))\Big) d\tau.$$

Soit l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} : WPAA(\mathbb{R}, \rho) & \longrightarrow & WPAA(\mathbb{R}, \rho) \\ v & \longmapsto & \mathcal{H}(v) = u. \end{array}$$

De l'hyperbolicité, on peut voir que pour une constante $\widetilde{N}$ positive

$$\|\mathcal{H}(v) - \mathcal{H}(w)\| \leq \widetilde{N} L_f \;\|v - w\|_\infty.$$

Si $\widetilde{N} L_f < 1$, alors $\mathcal{H}$ a un unique point fixe qui est l'unique solution ρ-pseudo-presqu'automorphe de l'Eq. (3.7).

3.6 Exemple

Pour illustrer les résultats précédents, nous considérons l'équation aux dérivées partielles avec diffusion qui décrit l'évolution de l'espèce animale diffusive simple avec une densité de population v. Pour plus de détails sur ce modèle, nous référons à [104].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, y(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\, y(t,x) + \displaystyle\int_{-r}^{0} q(\theta)\; y(t+\theta, x)\; d\theta + z(t,x) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0, \pi], \\[2em] y(t,0) = y(t,\pi) = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.9}$$

où $q : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $z : \mathbb{R} \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et définie par

$$z(t, x) = \psi(t) \ \ \eta(x), \quad \eta : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ est une fonction continue,}$$

où $\psi(t) = sin \ \dfrac{1}{2 + cos\ t + cos\ \sqrt{2}t} + e^{\alpha t}$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Soit $\mathbb{E} = C([0, \pi]; \mathbb{R})$ est l'espace de fonctions continues de $[0, \pi]$ sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la norme uniforme.

Définissons l'opérateur $A : D(A) \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ par

$$\begin{cases} D(A) = \Big\{ y \in C^2([0, \pi]; \mathbb{R}) : y(0) = y(\pi) = 0 \Big\}, \\ \\ Ay = y''. \end{cases}$$

Lemme 3.6.1. *[46]* $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ *et* $|(\lambda I - A)^{-1}| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ *pour* $\lambda > 0$.

De plus, $\overline{D(A)} = \Big\{ y \in \mathbb{E} : y(0) = y(\pi) = 0 \Big\}$. Par conséquent, les conditions $\mathbf{(H_7)}$ et $\mathbf{(H_8)}$ sont vérifiées.

Pour écrire l'Eq. (3.9) sous la forme abstraite (3.1), on introduit l'opérateur

$L : C \longrightarrow \mathbb{E}$ défini par

$$L(\phi)(x) = \int_{-r}^{0} q(\theta) \ \phi(\theta)(x) \ d\theta \quad \text{pour } x \in [0, \pi] \text{ et } \phi \in C,$$

et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est définie par

$$f(t)(x) = z(t, x) = \psi(t) \ \ \eta(x) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } \quad x \in [0, \pi].$$

Alors, L est un opérateur linéaire borné de C sur $\mathbb{E}$ et de la continuité de ψ on a que f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{E}$.

Ainsi, l'équation (3.9) prendra la forme abstraite (3.1).

Soit A_0 est la part de A dans $\overline{D(A)}$. Alors, A_0 est donnée par

$$\begin{cases} D(A_0) = \Big\{ y \in C^2([0,\pi];\mathbb{R}) : y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0 \Big\}, \\ \\ A_0 y = Ay \quad \text{pour } y \in D(A_0). \end{cases}$$

A_0 est le générateur d'un semi-groupe fortement continue compact $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sur $\overline{D(A)}$.

Pour étudier l'existence et l'unicité de solutions bornées de l'Eq. (3.1), on supposera que

($\mathbf{H_{12}}$) $\displaystyle\int_{-r}^{0} |q(\theta)| \, d\theta < 1.$

Proposition 3.6.2. *supposons que **(H_{12})** soit vérifiée. Alors, le semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable : il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega > 0$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M \; e^{-\omega t} \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_T)$, alors il existe $x \in D(A)$, $x \neq 0$ tel que $\Delta(\lambda) \; x = 0$.

Ce qui donne

$$\lambda x - Ax - \Big(\int_{-r}^{0} q(\theta) \; e^{\lambda\theta} \; d\theta \Big) x = 0,$$

et

$$\lambda - \int_{-r}^{0} q(\theta) \; e^{\lambda\theta} \; d\theta \in \sigma_p \; (A),$$

où $\sigma_p \; (A)$ est le spectre ponctuel de A et est

$$\sigma_p \; (A) = \Big\{ -n^2 : n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

Par conséquent, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_T)$ si et seulement si

$$\lambda - \int_{-r}^{0} q(\theta) \; e^{\lambda\theta} \; d\theta = - \, n^2 \quad \text{pour certain } n \geq 1. \tag{3.10}$$

En prennant la partie réelle dans la formule (3.10), on obtient que

$$Re(\lambda) = \int_{-r}^{0} q(\theta)\ e^{Re(\lambda\theta)}\ cos(Im\lambda\ \theta)\ d\theta - n^2 \qquad \text{pour} \ \ n \geq 1.$$

Supposons que $Re(\lambda) \geq 0$, alors

$$Re(\lambda) \leq \int_{-r}^{0} |q(\theta)|\ d\theta - 1 < 0.$$

Ce qui donne une contradiction. Par conséquent, $\sigma(\mathcal{A}_T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\ (\lambda) < 0\}$, ainsi le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable.

Posons

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \ t < 0, \\ \\ e^{-\beta t} & \text{si} \ \ t \geq 0 \ \ \text{et} \ \beta > 0. \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{R\to+\infty} m(R,\rho) = +\infty$ et d'ici $\rho \in \mathbb{U}_\infty$.

Proposition 3.6.3. *Supposons que* $0 < \alpha < \beta$. *Alors, l'Eq.* (3.9) *a une unique solution bornée et pseudo-presque autromorphe avec poids.*

Preuve. Si $\alpha < \beta$, la condition (3.6) est vérifiée

$$P(\omega) := \sup_{R>0} \Big(\frac{1}{e^{\omega R}} \int_{-R}^{R} e^{-\omega t} \rho(t)\ dt \Big) < \infty.$$

Il est facile de voir que ψ n'appartient pas à $PAA(\mathbb{R},\mathbb{E})$ puisque

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} e^{\alpha t}\ dt = \infty.$$

et $\psi \in WPAA(\mathbb{R},\rho)$ avec $sin\ \dfrac{1}{2 + cos\ t + cos\ \sqrt{2}t} + e^{\alpha t}$ comme sa composante presqu'automorphe et $e^{\alpha t}$ comme sa composante ergodique avec poids qui vérifie

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} e^{\alpha t} \ \ \rho(t)\ dt = 0.$$

D'aprés le Théorème 3.4.1, on déduit que l'Eq. (3.9) a une unique solution bornée et pseudo-presqu'automorphe avec poids .

Chapitre 4

Problèmes de Valeurs Propres à Deux Paramètres en Trois Points avec Conditions aux Limites Dépendant du Temps

4.1 Introduction

La méthode de séparation des variables utilisée dans la résolution des problèmes avec conditions aux limites pour l'équation de Laplace ou l'équation d'onde d'Helmhotz, nous ramène souvent à un problème de valeurs propres à deux paramètres pour les équations différentielles ordinaires (voir [11]). Pour résoudre ces problèmes, on spécifie les conditions aux limites en trois points consécutifs. Ceci nous conduit à une classe intéressante de problèmes aux valeurs limites, qui est connue comme problèmes aux valeurs limites en plusieurs points, et qui est considérée par plusieurs auteurs (voir [12], [22], [48], [49], [95]). Pour les travaux numériques sur le sujet, le lecteur pourra se référer à [17], [28], [53]. En plus, les problèmes avec conditions aux limites dépendant du temps ont été étudiés en relation avec plusieurs phénomènes physiques (voir par exemple [43], [94]). Dans ce travail on s'intéresse à l'analyse de la dépendance des valeurs propres et des fonctions propres du paramètre t du problème suivant

$$\begin{cases} y'' + (\lambda g(x,t) + \mu h(x,t))y = 0, \quad x \in I, \quad t \in J \\ y(0) = y'(0) \tan \alpha(t) \\ y(c) = y'(c) \tan \beta(t) \\ y(1) = y'(1) \tan \gamma(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\; ' = \dfrac{d}{dx}, \; I := [0,1], \; J := [0,1], \; 0 < c < 1, \quad \lambda$ et μ sont des paramètres réels.

On supposera par la suite que

(a) $g : I \times J \to \mathbb{R}$ est positive, continue en x et continûment différentiable en t ;

(b) $h : I \times J \to \mathbb{R}$ est continue en x, continûment différentiable en t et vérifiant

- **(i)** $h(x,t) > 0$ pour tout $(x,t) \in [0,c) \times J$
- **(ii)** $h(x,t) < 0$ pour tout $(x,t) \in (c,1] \times J$
- **(iii)** $h(c,t) \equiv 0$ pour tout $t \in J$.

(c) Les fonctions α, β et γ sont à valeurs réelles, continûment différentiables sur J, et tel que $\alpha(t),\ \gamma(t) \in [0, \frac{\pi}{2})$ pour tout $t \in J$, $\beta(t) \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ pour tout $t \in J$.

Une valeur propre du problème (4.1) revient à chercher les valeurs des paramètres λ et μ pour lesquelles le problème a une solution non triviale.

Notre objectif dans ce travail est d'étendre les résultats obtenus dans Sager [94] dans le cas des problèmes de valeurs propres à un paramètre avec conditions aux limites dépendant du temps au cas des problèmes de valeurs propres à deux paramètres avec conditions aux limites dépendant du temps imposées en trois points, notre problème (4.1). De cette façon, on aura une généralisation des résultats de Boucherif [22].

4.2 Existence des Valeurs Propres et leurs Propriétés

Le résultat fondamental de ce paragraphe est l'existence des valeurs propres et leurs dépendance du paramètre t. En effet, nous avons

Théorème 4.2.1. *[23] Supposons que les hypothèses* ***(a)***,***(b)***, ***(c)*** *soient vérifiées. Alors le problème de valeurs propres à deux paramètres* (4.1) *a un nombre infini de valeurs propres* $(\lambda_m(t), \mu^n(t))$, *qui sont continûment différentiable en* t. *De plus, les fonctions propres correspondantes* y_{mn} *ont exactement* m *zéros sur* $(0, c)$ *et* n *zéros sur* $(c, 1)$.

Preuve. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Etape 1. Considérons le problème de valeurs propres à deux paramètres (4.1) pour t fixé dans J, sans perdre de généralité on prendra $t = 0$.

Considérons le problème

$$\begin{cases} y'' + (\lambda g(x,0) + \mu h(x,0))y = 0, \\ y(0) = y(c) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Soit $\mu = k\lambda$ et posons $q(x,k) = g(x,0) + kh(x,0)$. Alors le problème (4.2) prendra la forme

$$\begin{cases} y'' + \lambda q(x,k)y = 0, \\ y(0) = y(c) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il s'ensuit des hypothèses sur les fonctions g et h que

(i) il n'existe pas un k tel que $q(x,k) < 0$ pour tout $x \in (0,c)$.

(ii) $\lambda q(x,k)$ ne peut pas être négatif pour tout x si $\lambda > 0$.

(iii) Si $k_0 = -\min_{0 \le x \le c} \dfrac{g(x,0)}{h(x,0)}$ alors $q(x,k) > 0$ pour tout $x \in (0,c)$ si et seulement si $k > k_0$, et $\lambda q(x,k) < 0$ si et seulement si $k > k_0$ et $\lambda > 0$. Aussi, si $k < k_0$ alors $q(x,k)$ change de signe sur $(0,c)$.

Pour $k > k_0$, les méthodes classiques (transformation de Prüfer, théoreme de comparaison de Sturm) montre que le problème (4.3) a une suite infinie de valeurs propres $(\lambda_m(k))_{m \in \mathbb{N}^*}$ tel que :

(a) $0 < \lambda_1(k) < \lambda_2(k) < \cdots < \lambda_m(k) < \cdots$

(b) $\lim_{m \to \infty} \lambda_m(k) = +\infty$

(c) Le problème (4.3) a une solution non triviale si et seulement si $\lambda = \lambda_m(k)$ pour certain $m \in \mathbb{N}^*$. Cette solution non triviale a exactement $(m-1)$ zéros sur $(0,c)$.

(d) Pour chaque $\lambda_m(k)$ il existe un unique $\mu_m(k) = k\lambda_m(k)$ tel que $(\lambda_m(k), \mu_m(k))$ est une valeur propre du problème (4.2).

Maintenant, si $k < k_0$ les fonctions $q(x,k)$ change de signe sur $(0,c)$. Il s'ensuit qu'il existe une suite infinie double $(\lambda_m(k))_{m \in \mathbb{Z}^*}$ de valeurs propres de (4.3) tel que

(i) $\cdots < \lambda_{-m}(k) < \cdots < \lambda_{-1}(k) < 0 < \lambda_1(k) < 0 < \cdots < \lambda_m(k) < \cdots$

(ii) Les fonctions propres correspondantes ont exactement $(m-1)$ zéros sur $(0,c)$,

(iii) Dans chaque cas, on a $\mu_m(k) = k\lambda_m(k)$ et le couple $(\lambda_m(k), \mu_m(k))$ est une valeur propre du problème (4.2).

Du Lemme 4.8 dans [26], il est facile de voir que si (λ, μ) est une valeur propre du problème (4.2) alors μ, comme fonction de λ, est une fonction régulière.
Ceci définit une courbe unique Γ_m , tel que chaque $(\lambda, \mu) \in \Gamma_m$ est une valeur propre du problème (4.2) et la fonction propre correspondante y_m a exactement $(m-1)$ zéros sur $(0,c)$.

D'une manière similaire, le problème

$$\begin{cases} y'' + (\lambda g(x,0) + \mu h(x,0))y = 0, \\ y(c) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

a une suite infinie de valeurs propres (λ^n, μ^n) dont les fonctions propres correspondantes ont exactement $(n-1)$ zéros sur $(c,1)$. Il découle du lemme 4.8 dans [26] qu'il existe une courbe unique Γ^n passant par (λ^n, μ^n) tel que tout $(\lambda, \mu) \in \Gamma^n$ est une valeur propre du problème (4.4).

Finallement, considérons le problème (4.1) pour $t = 0$ fixé, i.e. le problème

$$\begin{cases} y'' + (\lambda g(x,0) + \mu h(x,0))y = 0, \\ y(0) = y(c) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Si (λ, μ) est une valeur propre du problème (4.5), alors il existe la fonction propre correspondante y, qui est une solution nontriviale du problème (4.5). Mais, les restrictions de y aux intervalles $[0,c]$ et $[c,1]$ respectivement, sont des solutions nontriviales des problèmes (4.2) et (4.3) respectivement. Ceci implique que y a exactement $(m-1)$ zéros sur $(0,c)$ et $(n-1)$ zéros sur $(c,1)$. De plus, (λ, μ) est une valeur propre des problèmes (4.2) et (4.3). Par conséquent $(\lambda, \mu) \in \Gamma_m \cap \Gamma^n$. D'une autre façon, on peut voir facilement que si $(\lambda, \mu) \in \Gamma_m \cap \Gamma^n$, alors (λ, μ) est une valeur propre du problème (4.5) dont la fonction propre correspondante qu'on dénote par y_{mn}, a exactement $(m-1)$ zéros sur $(0,c)$ et $(n-1)$ zéros sur $(c,1)$. Le lecteur pourra voir [26] pour plus de détails.

Maintenant, écrivons le problème (4.1) sous la forme équivalente suivante

$$\begin{cases} y'' + \Big[\lambda g(x,0) + \mu h(x,0)\Big]y = f(x,t;\lambda,\mu)y \\ y(0) = y'(0)\tan\alpha(t) \\ y(c) = y'(c)\tan\beta(t) \\ y(1) = y'(1)\tan\gamma(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

où $f(x,t;\lambda,\mu) := \lambda[g(x,0) - g(x,t)] + \mu[h(x,0) - h(x,t)]$.

Etape 2. Formulation opérationnelle du problème (4.6).

L'espace $Z = C([0,1];\mathbb{R})$ avec la norme usuelle du sup, i.e., $\|z\|_0 = sup\Big\{|z(x)|; x \in [0,1]\Big\}$ pour tout $z \in Z$, est un espace de Banach.

Soit $Y = C^2([0,1];\mathbb{R})$, et pour chaque $y \in Y$, on définit sa norme par

$$\|y\| = max(\|y\|_0, \|y^{'}\|_0, \|y^{''}\|_0).$$

On définit l'opérateur linéaire $L(\lambda,\mu) : Y \longrightarrow Z$ par

$$(L(\lambda,\mu)y)(x) := y^{''}(x) + [\lambda g(x,0) + \mu h(x,0)]y(x).$$

Aussi, soit $\mathcal{L}(\lambda,\mu) : Y \longrightarrow Z \times \mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{L}(\lambda,\mu)y = \Big(L(\lambda,\mu)y, y(0), y(c), y(1)\Big).$$

Soit $F : Y \times \mathbb{R}^2 \times J \longrightarrow Z \times \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(y,\lambda,\mu,t) = \Big(f(\cdot,t;\lambda,\mu)y, y^{'}(0)\tan\alpha(t), y^{'}(c)\tan\beta(t), y^{'}(1)\tan\gamma(t)\Big).$$

Le problème (4.6) est équivalent à l'équation opérationnelle

$$\mathcal{L}(\lambda,\mu)y = F(y,\lambda,\mu,t). \tag{4.7}$$

Considérons les problèmes suivants :

$$\begin{cases} y^{''} + [\lambda g(x,0) + \mu h(x,0)]y = f(x,t;\lambda,\mu)y \\ y(0) = y^{'}(0)\tan\alpha(t) \\ y(c) = y^{'}(c)\tan\beta(t) \end{cases} \tag{4.8}$$

et

$$\begin{cases} y^{''} + [\lambda g(x,0) + \mu h(x,0)]y = f(x,t;\lambda,\mu)y \\ y(c) = y^{'}(c)\tan\beta(t) \\ y(1) = y^{'}(1)\tan\gamma(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

Par la suite, on considère le problème (4.6) comme deux problèmes aux limites en deux points séparemment sur $[0, c]$ et $[c, 1]$, nomémment les problèmes (4.8) et (4.9). Puisque ces problèmes ont une nature similaire, on fait l'étude du premier et les résultats obtenus sont adaptés au second.

Etape 3. Le problème de valeurs propres (4.8). Ce problème est équivalent à

$$\mathcal{L}_1(\lambda, \mu)y = F(y, \lambda, \mu, t), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{4.10}$$

où $\mathcal{L}_1(\lambda, \mu)y = \Big(L(\lambda, \mu)y, y(0), y(c)\Big)$.

C'est montré dans [22] que, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$ il existe une valeur propre (λ_m, μ_m) de $\mathcal{L}_1$ avec la fonction propre correspondante y_m ayant m zéros sur $(0, c)$. De plus $ker(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m))$ est de dimention 1 et l'image de $\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m)$, dénotée par $\mathcal{R}(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m))$, est de codimention 1 ; i.e., $\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Ceci implique la décomposition suivante

$$Y = ker(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m)) \oplus Y_0 \ \text{ et } \ Z \times \mathbb{R}^2 = \mathcal{R}(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m)) \oplus (Z_0 \times \mathbb{R}^2)$$

On définit la projection $P_m : Y \longrightarrow ker(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m))$ par

$$(P_m y)(x) = \Big(\int_0^c y_m^2(s)ds\Big)^{-1}\Big(\int_0^c y_m y(s)ds\Big)y_m(x).$$

Il s'ensuit que $I - P_m$ est une projection sur Y_0. Puisque codim$\mathcal{R}(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m)) = 1$ il existe $z_m \in Z$ tel que Z_0 est engendré par z_m. Si B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors l'opérateur $Q_m : Z \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow Z_0 \times \mathbb{R}^2$ est défini par

$$Q_m(z, B)(x) = \Big(\Big(\int_0^c z_m^2(s)ds\Big)^{-1}\Big(\int_0^c z_m z(s)ds\Big)z_m(x), B\Big)$$

est une projection et $I - Q_m$ est une projection sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m))$.

Maintenant, tout $y \in Y$ peut être écrit comme $y = ey_m + v$, où $e \in \mathbb{R}$ et $v \in Y_0$. On appliquera la méthode de Liapunov-Schmidt à l'équation abstraite (4.16).

Soit $\lambda = \lambda_m + \sigma$ et $\mu = \mu_m + \tau$.

Soit $G(t) : Y \longrightarrow Z$ et $H(t) : Y \longrightarrow Z$ définie par

$$(G(t)y)(x) = -g(x,t)y(x) \quad \text{et} \quad (H(t)y)(x) = -h(x,t)y(x), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times [0,c].$$

Il s'ensuit des hypothèses sur les fonctions g et h que les opérateurs $G(t)$ et $H(t)$ sont des opérateurs linéaires bornés. De plus, pour chaque $y \in Y$ pas identiquement nulle sur $(0,c)$ ou $(c,1)$, $G(t)y$ et $H(t)y$ sont linéairement indépendants. Aussi $G(t)y$ et $H(t)y$ n'appartiennent pas à $\mathcal{R}(\mathcal{L}_1(\lambda_m,\mu_m))$.

On montre que l'équation (4.16) est équivalente à

$$\mathcal{L}_1(\lambda_m,\mu_m)v = \Phi(v,e,\sigma,\tau,t) \tag{4.11}$$

où $\Phi(v,e,\sigma,\tau,t) := (u_1,u_2,u_3)$ avec

$$\begin{aligned} u_1 &= -[\sigma G(t) + \tau H(t) + t\lambda_m G^{'}(t) + t\mu_m H^{'}(t)](ey_m + v), \\ u_2 &= (ey_m + v)^{'}(0) \tan\alpha(t), \\ u_3 &= (ey_m + v)^{'}(c) \tan\beta(t). \end{aligned}$$

Cette fonction vérifie

– $\Phi(0,0,\sigma,\tau,t) \equiv 0$ pour tout $(\sigma,\tau,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ et

– $D_v\Phi(v,e,\sigma,\tau,t)p = \varphi(\sigma,\tau,t)p$, avec

$\varphi(\sigma,\tau,t) := \Big(-\Big[\sigma G(t) + \tau H(t) + t\lambda_m G^{'}(t) + t\mu_m H^{'}(t)\Big]p,\ p^{'}(0)\ tan\alpha(t),\ p^{'}(c)\ tan\beta(t)\Big)$

En particulier $D_v\Phi(0,0,0,0,0) \equiv 0$ (l'application nulle).

Maintenant, appliquons les projections Q_m et $I - Q_m$ à l'équation (4.11) on obtient alors le système suivant

$$v = K(\lambda_m,\mu_m)\Phi(v,e,\sigma,\tau,t) \tag{4.12}$$

$$0 = Q_m\Phi(v,e,\sigma,\tau,t) \tag{4.13}$$

où $K(\lambda_m,\mu_m) := \Big[(I - Q_m)\mathcal{L}_1(\lambda_m,\mu_m)\Big]^{-1}(I - Q_m)$.

Il est facile de voir que l'équation auxiliaire (4.12) a une solution unique $v = v^*(e,\sigma,\tau,t)$ avec $v^*(0,0,0,0) = 0$ si et seulement si (e,σ,τ,t) vérifie l'équation de bifurcation

$$0 = Q_m\Phi(v^*(e,\sigma,\tau,t),e,\sigma,\tau,t) := \Psi(e,\sigma,\tau,t).$$

Il s'ensuit de la définition de la projection Q_m et z_m qu'on peut écrire

$$Q_m G(t) y_m = a_m(t) z_m \ \text{ et } \ Q_m H(t) y_m = b_m(t) z_m$$

et donc l'équation de bifurcation prendra la forme

$$a_m(t)\sigma + b_m(t)\tau + o(|\sigma|^2 + |\tau|^2) = 0 \tag{4.14}$$

où $a_m(\cdot)$ et $b_m(\cdot)$ sont des fonctions continûment différentiables en t. De plus $a_m(t) \neq 0$ et $b_m(t) \neq 0$ puisque $G(t)y_m$ et $H(t)y_m$ sont linéairement indépendants et n'appartiennent pas à $\mathcal{R}(\mathcal{L}_1(\lambda_m, \mu_m))$.

On définit $R(\sigma, \tau, t)$ par

$$R(\sigma, \tau, t) := a_m(t)\sigma + b_m(t)\tau + o(|\sigma|^2 + |\tau|^2).$$

Puisque $\left(\dfrac{\partial R}{\partial \sigma}, \dfrac{\partial R}{\partial \tau}\right) \neq 0$, il s'ensuit qu'il existe des fonctions continûment différentiables $\sigma = \sigma^*(t)$ et $\tau = \tau^*(t)$ qui sont solutions de (4.14). D'ici on a deux fonctions continûment différentiables définies sur $[0, 1]$ et données par

$$\begin{cases} \lambda(t) = \lambda_m + \sigma^*(t) \\ \mu(t) = \mu_m + \tau^*(t) \end{cases} \qquad \text{pour tout } \ t \in [0, 1].$$

D'ici, pour chaque entier $m \geq 1$, on a une seule courbe $C_m(t)$ continûment différentiable passant par (λ_m, μ_m)

$$C_m(t) = \Big\{(\lambda_m + \sigma^*(t), \mu_m + \tau^*(t)); \quad 0 \leq t \leq 1\Big\} \tag{4.15}$$

avec les propriétés suivantes :

(i) Pour chaque $(\lambda, \mu) \in C_m(t)$ le problème (4.8) a une solution non triviale avec m zéros sur $(0, c)$.

(ii) Il s'ensuit de l'équation (4.14) que la droite $a_m(t)\sigma + b_m(t)\tau = 0$ est tangente à la courbe $C_m(t)$. D'ici le vecteur $(a_m(t), b_m(t))$ est normal à la courbe. De plus ce vecteur peut être choisi proportionnel au vecteur :

$$\Big(\int_0^c g(x,t) y_m^2(x) dx, \int_0^c h(x,t) y_m^2(x) dx\Big).$$

(iii) Pour différentes valeurs de m, les courbes $C_m(t)$ ne se coupent pas et la distance minimale de l'origine à $C_m(t)$ croît sans limite.

Etape 4. Le problème de valeurs propres (4.9).

On procède d'une manière similaire que l'étape 3. Ce problème est équivalent à

$$\mathcal{L}_2(\lambda,\mu)y = F(y,\lambda,\mu,t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{4.16}$$

où $\mathcal{L}_2(\lambda,\mu)y = \Big(L(\lambda,\mu)y, y(c), y(1)\Big)$.

De [22], pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une valeur propre (λ^n,μ^n) de $\mathcal{L}_2$ dont la fonction propre correspondante y^n a n zéros sur $(c,1)$.

Aussi dim $\ker(\mathcal{L}_2(\lambda^n,\mu^n)) = 1$ et codim $\mathcal{R}(\mathcal{L}_2(\lambda^n,\mu^n)) = 1$. Ceci implique qu'il existe un $w_n \in Z$ et une projection $Q^n : Z \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow Z_0 \times \mathbb{R}^2$ tel que $I - Q^n$ est une projection sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}_2(\lambda^n,\mu^n))$.

Soit $Q^nG(t)y^n = a^n(t)w_n$ et $Q^nH(t)y^n = b^n(t)w_n$. Comme dans la conclusion de l'étape 3, on obtient : pour chaque entier $n \ge 1$ il existe une seule courbe continûment différentiable $C^n(t)$, passant par (λ^n,μ^n) avec les propriétés :

(i) pour chaque $(\lambda,\mu) \in C^n(t)$ le problème (4.8) a une solution non triviale avec n zéros sur $(c,1)$.

(ii) Le vecteur $\Big(a^n(t), b^n(t)\Big)$ est normal à la courbe $C^n(t)$. Ce vecteur peut être choisi proportionnel au vecteur :

$$\Big(\int_c^1 g(x,t)y_n^2(x)dx, \int_c^1 h(x,t)y_n^2(x)dx\Big).$$

(iii) Pour différentes valeurs de n, les courbes propres $C^n(t)$ ne se coupent pas et la distance minimale de l'origine à $C^n(t)$ croît sans limite.

Etape 5. Le problème de valeurs propres (4.6).

On a montré que ce problème est équivalent à l'équation abstraite (4.7), qui est $\mathcal{L}(\lambda,\mu)y = F(y,\lambda,\mu,t)$. Il s'ensuit de l'étape 3 et l'étape 4 que tout $(\lambda,\mu) \in C_m(t) \cap C^n(t)$ a la propriété que dim $\ker(\mathcal{L}(\lambda,\mu)) = 1$ et la solution non triviale correspondante a m

zéros sur $(0,c)$ et n zéros sur $(c,1)$. Ceci implique que le problème (4.6) a un nombre infini de valeurs propres $(\lambda_m(t), \mu^n(t))$ qui sont des fonctions continûment différentiables de $t \in [0,1]$.

Maintenant, soit $\Big(\lambda_m(t), \mu^n(t)\Big) \in C_m(t) \cap C^n(t)$ et soit $y_{mn}(x,t)$ la fonction propre correspondante. Alors les restrictions de y_{mn} à $(0,c)$ et $(c,1)$ sont des solutions nontriviales de (4.8) et (4.9) respectivement.

On résume la discussion des étapes précédentes dans le théorème suivant

Théorème 4.2.2. *[23] Les courbes propres $C_m(t)$ et $C_n(t)$ se coupent transversallement à $\Big(\lambda_m(t), \mu^n(t)\Big)$ pour tout $t \in I$.*

Preuve. Il suit du Lemme 4.9 p. 184 dans [26] que les courbes $C_m(t)$ et $C^n(t)$ se coupent transversallement en $\Big(\lambda_m(t), \mu^n(t)\Big)$ pour tout $t \in I$ si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} a_m(t) & b_m(t) \\ a^n(t) & b^n(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Rappelons que les vecteurs $\Big(a_m(t), b_m(t)\Big)$ et $\Big(a^n(t), b^n(t)\Big)$ sont respectivement les vecteurs normaux à $C_m(t)$ et $C^n(t)$, qu'on peut choisir respectivement proportionnel aux vecteurs

$$\Big(\int_0^c g(x,t) y_{mn}^2(x) dx, \int_0^c h(x,t) y_{mn}^2(x) dx\Big).$$

et

$$\Big(\int_c^1 g(x,t) y_{mn}^2(x) dx, \int_c^1 h(x,t) y_{mn}^2(x) dx\Big).$$

Par conséquent, $\det \begin{pmatrix} a_m(t) & b_m(t) \\ a^n(t) & b^n(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in I$ si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} \int_0^c g(x,t) y_{mn}^2(x) dx & \int_0^c h(x,t) y_{mn}^2(x) dx \\ \\ \int_c^1 g(x,t) y_{mn}^2(x) dx & \int_c^1 h(x,t) y_{mn}^2(x) dx \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

grâce aux hypothèses sur les fonctions g et h et les propriétés des fonctions propres y_{mn} le déterminant ci-dessus ne s'annule pas sur I.

Ceci achève la preuve du théorème.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons contribué à l'étude qualitative d'une classe d'équations aux dérivées partielles fonctionnelles. Nous avons donné la formule de variation de la constante et quelques résultats fondamentaux sur la décomposition spectrale des solutions qui est l'outil principal de ce travail. Nous avons démontré le Théorème fondamental d'existence et d'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids et on a appliqué le résultat obtenu à l'équation à retard non linéaire. A la fin, on a illustré notre résultat théorique à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque-périodiques avec poids d'une équation de diffusion à retard.

On étend notre résultat d'existence et d'unicité de solutions pseudo presqu'automorphes avec poids d'une équation de diffusion à retard.

On s'est intéressé aussi à l'existence et aux propriétés des valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville à deux paramètres avec des conditions aux limites dépendant du temps et imposées en trois points. On a utilisé la méthode des bifurcations pour caractériser les courbes de valeurs propres, ainsi que leur dépendance par rapport au paramètre t.

Notre perspective c'est l'étude de solutions presque périodiques avec poids d'une équation aux dérivées partielles fonctionnelles avec retard infini, l'étude de solutions presque périodiques avec poids d'une équation aux dérivées partielles fonctionnelles avec dérivée fractionnaire et l'étude de solutions presque périodiques avec poids d'une équation aux dérivées partielles fonctionnelles avec impulsions.

Bibliographie

[1] M. Adimy, F. Crauste and S. Ruan, *A mathematical study of the hematopoiesis process with applications to chronic myelogenous leukemia*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 65, N° 4, (2005), 1328-1352.

[2] M. Adimy, K. Ezzinbi, *Existence and linearized stability for partial neutral functional differential equations*, Differential Equations and Dynamical Systems, Volume 7, (1999), 371-417.

[3] M. Adimy, K. Ezzinbi, M. Laklach, *Spectral decomposition for partial neutral functional differential equations*, Can. Appl. Math. Q., Volume 9, N° 1, (2001), 1-34.

[4] R.P. Agarwal, T. Diagana and E.M. Hernández, *Weighted pseudo-almost periodic solutions to some partial neutral functional differential equations*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Volume 8, N° 3, (2007), 397-415.

[5] E. Ait Dads and O. Arino, *A nonlinear delay differential equation whose solutions are asymptotically sums of periodic functions*, Funkcialaj Ekvacioj, Volume 32, (1989), 81-89.

[6] E. Ait Dads and O. Arino, *Exponential dichotomy and existence of pseudo almost periodic solutions of some differential equations*, Nonlinear Analysis, Volume 27, N° 4, (1996), 369-386.

[7] E. Ait Dads, K. Ezzinbi, *Existence of positive pseudo-almost-periodic solution for some nonlinear infinite delay integral equations arising in epidemic problems*, Nonlinear Analysis, Volume 41, N° 1-2, (2000), 1-13.

[8] E. Ait Dads, K. Ezzinbi and O. Arino, *Pseudo almost periodic solutions for some differential equations in Banach space*, Nonlinear Analysis, Volume 28, N° 7, (1997),

1141-1155.

[9] E. Ait Dads and K. Ezzinbi, *Pseudo almost periodic solutions of some delay differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 201, N° 287, (1996), 840-850.

[10] B. Amir, L. Maniar, *Composition of pseudo-almost periodic functions and Cauchy problems with operator of nondense domain*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, Tome 6, N° 1, (1999), 1-11.

[11] F.M. Arscott, *Paraboloïdal coordinates and Laplace's equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 66 (1963), 129-139.

[12] F.M. Arscott, *Two-parameter eigenvalue problems in differential equations*, Proc. London Math. Soc 14 (1964), 459-470.

[13] D. Auslander , G. F. Oster and C. Huffaker , *Dynamics of interacting population*, J. Franklin Institute, 297 (1974), 345-375.

[14] J.P. Bertrandias, *Espace de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p*, Bull. Soc. Math. de France, (1966).

[15] A.S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Dover publicatioins, New York, (1948).

[16] J. Blot, G.M. Mophou, G.M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Weighted pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations*, Nonlinear Analysis, (to appear).

[17] E.K. Blum and A.R. Curtis, *A convergent gradient method for matrix eigenvector-eigentuple problems*, Numer. Math. 31 (1978), 247-263.

[18] S. Bochner, *Beutrage zur theorie der fastperiodische functionen I*, functionen einer variablen. Math. Ann. 96 (1927).

[19] S. Bochner, *Uniform convergence of monotone sequences of functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Volume 47, (1961), 582-585.

[20] S. Bochner, *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*, Proc. Natl. Sci. USA, Volume 52, (1964), 907-910.

[21] P. Bohr, *Almost Periodic Functions*, (1968).

[22] A. Boucherif, *Non linear three-point boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 77 (1980), 577-600.

[23] **Abdelkader BOUCHERIF** and **Nadira BOUKLI-HACENE**, *Two-parameter problems with time-dependent three-point boundary conditions*, Maghreb Math. Rev., Volume 8, N° 1 et 2, (1999), 57-66.

[24] **Nadira BOUKLI-HACENE** and **Khalil EZZINBI**, *Weighted pseudo almost periodic solutions for some partial functional differential equations*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Volume 71, N° 9, 1 November 2009, Pages 3612-3621.

[25] M. Brelot, *Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévoré*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Volume 9, (1931), 57-74.

[26] S.N. Chow and J.K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[27] D. S. Cohen, P. S. Hagan and H. C. Simpson, *Spatial structures in predator-prey communities with hereditary effects and diffusion*, Mathematical Biosciences, Volume 44, (1979), 167-177.

[28] L. Collatz, *Multiparameter eigenvalue problems in inner-product spaces*, J. Comput. System Sci. 2 (1968), 333-341.

[29] W. A. Coppel, *Dichotomies in Stability Theory*, Lectures Notes in Mathematics N° 629, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[30] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Wiley, New York, 1968. Reprinted, Chelsea, New York, 1989.

[31] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Inter-science Publishers, Volume 1, New York, 1953.

[32] F. Crauste, *Etude mathématique d'équations aux dérivées partielles hyperboliques modélisant les processus de régulation des cellules sanguines - Applications aux maladies hématologiques cycliques*, Thèse de doctorat à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, France, (2005).

[33] C. Dafermos, *Almost periodic process and almost periodic solutions of evolution equations*, dynamical systems Proc. Univ. Florida Inter. Symp. (A.R. BEDMARCK and L. CESARI, Eds) Academic-Press, New-York, (1977), 43-57.

[34] T. Diagana, *Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations*, Nonlinear Analysis, Volume 68, (2008), N° 8, 2250-2260.

[35] T. Diagana, *Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some classes of partial evolution equations*, Nonlinear Analysis, Volume 66, N° 2, (2007), 384-395.

[36] T. Diagana, *Existence of weighted pseudo almost periodic solutions to some classes of hyperbolic evolution equations*, Nonlinear Analysis, Volume 350, (2009), 18-28.

[37] T. Diagana, *Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2007.

[38] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic functions and applications*, C.R.A.S, Volume 343, N° 10, (2006), 643-646.

[39] T. Diagana, C.M. Mahop, G.M. N'Guérékata, *Pseudo-almost-periodic solutions to some semilinear differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, Volume 43, N° 1-2, (2006), 89-96.

[40] T. Diagana, C.M. Mahop, G.M. N'Guérékata, B. Toni, *Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some classes of semilinear differential equations and applications*, Nonlinear Analysis, Volume 64, N° 11, (2006), 2442-2453.

[41] T. Diagana, *Pseudo almost periodic solutions to some differential equations*, Nonlinear Analysis, Volume 60, N° 7, (2005), 1277- 1286.

[42] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verdyn Lunel, H.-O. Walther, *Delay Equations*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[43] C.M. Elliot and J.R. Ockenden, *Weak and Variational methods for free and moving boundary problems*, Pitman, London, 1982.

[44] K.J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups of Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., Volume 194, Springer, 2001.

[45] K. Ezzinbi and A. Hachimi, *Existence of a positive almost periodic solution through the use of the Hilbert projective metric for a class of functional equations*, Nonlinear Analysis, Volume 26, N° 6, 1996, 1169-1176.

[46] K. Ezzinbi, G.M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for some partial functional differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 328, (2007), 344-358.

[47] K. Ezzinbi, V. Nelson, G.M. N'Guérékata, *C (n)-almost automorphic solutions of some nonautonomous differential equations*, Cubo, A Math. J. Volume 6, N° 2, (2008), 61-74.

[48] M. Faierman, *Asymptotic formulae for the eigenvalues of a two-parameter ordinary differential equation of the second order*, Trans. Amer. Math. Soc. 168 (1972), 1-52.

[49] M. Faierman, *Two-parameter eigenvalue problems in differential equations*, Pitman Research Notes in Mathematics, Volume 205, Longman (1991).

[50] A.M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 377, Springer-Verlag, New York, 1974.

[51] A. Fink and J. Gatica, *Positive almost periodic solutions of some delay integral equations*, J.D.E, Volume 83, (1991), 166-178.

[52] R. A. Fisher, *The wave of advance of advantageous Ann. Eugenics*, London, Vol. 7, (1937), 355-369.

[53] L. Fox et al., *The double eigenvalue problem*, Topics in numerical analysis, Proc. Royal Irish Ac. Conference on Numerical Analysis, 1972 (J. Miller, Ed.), Academic Press, London, New York (1973).

[54] J.A. Goldstein, G.M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions of semilinear evolution equations*, Proc. Am. Math. Soc. Volume 133, (2005), 2401-2408.

[55] N. Gregus, F. Neumann and F.M. Arscott, *Three-point boundary value problems in differential equations*, J. London Math. Soc. 3 (1971), 429-436.

[56] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Inter Science, A Division of John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto. (1969).

[57] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.

[58] J.K. Hale, X. B. Lin, *Heteroclinic orbit for retarded functional differential equations*, Journal of Differential Equations, Volume 65, (1986), 175-202.

[59] J.K. Hale and V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-verlag, New-York/Berlin, 1993.

[60] A. Haraux, *Asymptotic behavior of trajectories for some non autonomous almost periodic process*, preprint de l'université Pierre et Marie Curie (1982).

[61] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.

[62] G. Hetzer, *A functional reaction-diffusion equation from climate modelling : S- shapedness of the principle branch of fixed points of the time-1-map*, Differential and Integral equations, Volume 8, N° 5, (1995), 1047-1059.

[63] G. Hetzer, *Global existence, uniqueness, and continuous dependence for a reaction-diffusion equation with memory*, Electronic Journal of Differential Equations, Volume 5, (1996), 1-16.

[64] G. Hetzer, *S-shapedness for energy balance climate models of Sellers-type*, The mathematics of models for climatology and environment, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Puerto de la Cruz, Tenerife, Spain, Springer, Volume 48, N° 1, (1997), 253-287.

[65] G. Hetzer, H. Jarausch and W. Mackens, *A multiparameter sensitivity analysis of a 2D diffusive climate model*, Impact. Comput. Sci. End. 1, (1989), 327-393.

[66] Y. Hino, *Stability and existence of almost periodic solutions of functional differential equations with infinite retardation*, Tohoku Math. Journal.

[67] Z. Hitoshi and H. Ishii, *On the existence of almost periodic complete trajectories for contractive almost periodic processes*, J.D.E., Volume 43, (1982), 66-72.

[68] T. Kato and H. Tanabe, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J. 14 (1962). 107-133.

[69] G. H. Hutchinson , *Circular causal system in ecology*, Ann. Acad. Sci., 50, 221-2246, (1948).

[70] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Theory and Applications, Volume 1. Academic Press. (1969).

[71] B.M. Levitan and V.V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge University press (1983).

[72] J. Liang, J. Zhang, T.-J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 340, (2008), 1493-1499.

[73] J. Liang, G.M. N'Guérékata , T.-J. Xiao and J. Zhang, *Some properties of pseudo-almost automorphic functions and applications to abstract differential equations*, Nonlinear Analysis, to appear.

[74] X. B. Lin, *Exponential dichotomies and heteroclinic orbits in functional differential equations*, Journal of Differential Equations, Volume 63, (1986), 227-254.

[75] A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, (1925).

[76] W. Maak, *Fastperiodische Funktionen*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1967).

[77] N. MacDonald, *Time Lags in Biological Models*, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, New York, Vol. 27, (1978).

[78] M. C. Mackey, *Unified hypothesis of the origin of aplastic anemia and periodic hematopoiesis*, Blood, Vol. 51, N° 5, (1978), 941-956.

[79] M. C. Mackey, *Dynamic haematological disorders of stem cell origin, in Biophysical and Biochemical Information Transfer in Recognition*, J. Vassileva-Popova and E. Jensen, reds., Plenum Press, (1979), 373-409.

[80] M. C. Mackey, C. Ou, L. Pujo-Menjouet and J. Wu, *Periodic oscillations of blood cell populations in chronic myelogenous leukemia*, SIAM Journal of Mathematic Analysis, Vol. 38, No 1, (2006), 166-187.

[81] M. C. Mackey and A. Rey, *Multistability and boundary layer development in a transport equation with retarded arguments*, The Canadian Applied Mathematics Quarterly, Volume 1, Issue 1, (1993), 61-81.

[82] M. C. Mackey and A. Rey, *Transitions and kinematics of reaction-convection fronts in a cell population model*, Physica D 80, Issue 1-2, (1995), 120-139.

[83] M. C. Mackey and R. Rudnicki, *A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes*, Journal of Mathematical Biology, Vol. 38, N° 3, (1999), 195-219.

[84] W. Maak, *Fastperiodische Funktionen*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967).

[85] J. A. J. Metz and O. Diekmann, *The dynamics of physiologically structured populations*, Lect. Notes Biomath, vol. 68, Springer-Verlag, New York, (1986).

[86] J. D. Murray, *Spatial structures in predator-prey communities - a nonlinear time delay diffusional model*, Mathematical Biosciences, Vol. 31, (1976), 73-85.

[87] G.M. N'Guérékata, *Quelques remarques sur les fonctions asymptotiquement presqu'automorphes (Some remarks on asymptotically almost automorphic functions)*, Ann. Sci. Math. Quebec, Volume 7, N° 2, (1983), 185-191 (in French).

[88] G.M. N'Guérékata, *Notes on almost periodicity in topological vector spaces*, Int'l. J of Math. and Math Sci., Volume 9, (1986), 201-206.

[89] G.M. N'Guérékata, *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, Boston, Moscow, London, 2001.

[90] G.M. N'Guérékata, *Existence and uniqueness of almost automorphic mild solutions to some semilinear abstract differential equations*, Semigroup Forum, Volume 69, (2004), 80-86.

[91] G.M. N'Guérékata, *Topics in Almost Automorphy*, Springer, New York, 2005.

[92] G.M. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions to second-order semilinear evolution equations*, Nonlinear Analysis (to appear).

[93] L. Pujo-Menjouet, *Contribution à l'étude d'une équation de transport à retard décrivant une dynamique de population cellulaire*, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, (2001).

[94] H. Sager, *The Sturm-Liouville equation with time dependent boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. 102 (1984), 275-287.

[95] B.D. Sleeman, *The two-parameter Sturm-Liouville problem for ordinary differential equations, II*, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 165-170.

[96] H. L. Smith, *Reduction of structured population models to threshold-type delay equations and functionnal differential equations*, Math. Biosci., 113, 1-23, (1993).

[97] W. Stepanov, *Ueber einige verallgemeinerungen der fastperiodischen functionen*, Math. Ann., 95 (1926), 473-498.

[98] K. Sawano, *Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations*, Tohoku Mathematical J. 31 (1979) 363-382.

[99] G. Seifert, *Almost periodic solutions for delay differential equations with infinite delays*, J.D.E.(41) (1981) 410-425.

[100] R. Torrejón, *Positive almost periodic solutions of a nonlinear integral equation from the theory of epidemics*, J.M.A.A., Volume 156, (1991), 510-534.

[101] V. Volterra, *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, Journal de Math Pures et Appliquées, Volume 7, (1928), 249-298.

[102] P. J. Wangersky and W. J. Cunningham, *Timelag in population models*, Cold Springer Harbor Symp. Quant. Biol., 22, 71-89, (1957).

[103] G. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-dependent Population Dynamics*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Volume 89, New York, Marcel Dekker Inc, (1985).

[104] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-verlag, New-York/Berlin, 1996.

[105] T.-J. Xiao, X.-X. Zhu, J. Liang, *Pseudo-almost automorphic mild solutions to nonautonomous differential equations and applications*, Nonlinear Analysis, to appear.

[106] T.-J. Xiao, J. Liang, J. Zhang, *Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces*, Semigroup Forum 76, (2008).

[107] S. Zaidman, *Solutions preque-périodiques des équations différentielles abstraites*, Enseign. Math. 24. (1978), 87-110.

[108] C.Y. Zhang, *Integration of vector-valued pseudo almost periodic functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 121, N° 1, (1994), 167-174.

[109] C.Y. Zhang, *pseudo almost-periodic solutions of some Differential Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 181, N° 1, (1994), 62-76.

[110] C.Y. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations II*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 192, N° 2, (1995), 543-561.

[111] L. Zhang and Y. Xu, *Weighted pseudo almost periodic solutions for functional differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Volume 2007, N° 146, (2007), 1-7.