Université Aboubekr BELKAID Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles

Thème

Problèmes aux valeurs propres associés à des équations fractionnaires

Présenté par : M[lle] Fatima Zohra BENSIDHOUM

Composition du jury

Président :	M[r] M.YEBDRI	Professeur
Rapporteur :	M[r] H.DIB	Professeur
Examinateurs :	M[r] S.BOUGUIMA	Professeur
	M[r] B.MEBKHOUT	Chargé de cours

Année universitaire : 2010 - 2011

Dedicace

A mes parents

A mes soeurs et mon frère

A toute ma famille

A tous mes amis

et

A toi …

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, Le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.
Je remercie du fond de mon coeur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

A messieurs les membres du jury
Je remercie :
Monsieur H.DIB qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.
Monsieur M.YEBDRI qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.
Messieurs les examinateurs S.BOUGUIMA et B.MEBKHOUT.
Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

F.BENSIDHOUM

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe.
Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne.
Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière.
Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude des valeurs propres de certaines équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux bords de type Dirichlet. L'image d'arrière-plan qu'il faut avoir est celle d'une équation différentielle ordinaire de type $y''(x) + \lambda\, y(x) = 0$ soumise aux conditions limites $y(0) = 0 = y(1)$.
Cette équation différentielle a deux solutions indépendantes qui donnent la combinaison linéaire

$$y(x) = A\, cos\,(\sqrt{\lambda}\, x) + B\, sin\,(\sqrt{\lambda}\, x)$$

L'application des conditions limites donne $A = 0$ et $B\, sin\,(\sqrt{\lambda}) = 0$.
Pour $B \neq 0$, la relation $\sqrt{\lambda} = n\,\pi,\ n \in \mathbb{N}$ fournit les valeurs propres $\lambda_n = (n\,\pi)^2$.
Pour des raisons de simplicité nous étudierons ces problèmes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Nous commençons par rappeler, dans le chapître 1, la notion de dérivation et intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que quelques fonctions spéciales.

Dans le chapître 2, nous commençons par étudier l'existence et l'unicité du problème à valeurs initiales. Ensuite, nous considérons le problème aux limites en deux points suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, D^{\alpha}y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

présenté et étudié par A.Yu.Popov [8].
On peut tout de suite remarquer que, quand $\alpha \to 0^+$, (notons que : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} D^{\alpha}y(x) = y(x)$), ce problème (cas fractionnaire) se réduit au problème (cas ordinaire).
Dans [4], A.M.Nahušev a posé le problème concernant le nombre de valeurs propres réelles et il a conjecturé leur existence pour α une valeur assez petite. Cette conjecture n'a pas eu (en son temps) de justifications théoriques mais a été confirmée par des calculs numériques dont les résultats sont présentés dans [4].
Dans [8], Popov a proposé une démonstration régoureuse.
La démarche qu'on a adoptée peut se décomposer selon les grandes lignes suivantes :

1. Montrer l'existence des valeurs propres réelles, pour $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$.
2. Présenter leur localisation.
3. Etablir que ces valeurs propres réelles sont positives, simples et ordonnées en ordre croissant pour $\alpha \in (0, \frac{1}{6}]$.
4. Effectuer leur minimisation.
5. Déduire que $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \lambda_n(\alpha) = (\pi\, n)^2$ c'est à dire que les valeurs propres du problème dans le cas fractionnaire généralisent celles du problème dans le cas ordinaire.
6. Trouver le comportement asymptotique du nombre des valeurs propres réelles quand $\alpha \to 0^+$ et en déduire qu'il y a une infinité quand $\alpha \to 0^+$.

Dans le chapître 3, nous aborderons une application à une équation différentielle fractionnaire.
On commence par étudier l'existence et l'unicité du problème de Cauchy puis on s'intéresse aux valeurs propres du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (D^{\alpha})^2\, y(x) + \lambda\, y(x) = 0 \quad ,0 < x < 1,\ 0 < \alpha < 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} I^{1-\alpha}\, y(x) = 0 \quad , y(1) = 0. \end{cases}$$

dont on va démontrer l'existence des valeurs propres.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, certains théorèmes et lemmes sont donnés en annexe.

Enfin, nous terminons notre travail par une brève conclusion.

Chapître 1
Dérivation fractionnaire

Le but de ce chapître est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur la théorie du calcul fractionnaire sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans les chapîtres 2 et 3.

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma d'Euler et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapîtres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières.

1.1.1.1 Défintion de la fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\,z-1}\, dt, \qquad (Re\, z > 0) \tag{1.1}$$

1.1.1.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{1.2}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\,z}\, dt = \left[-e^{-t}\, t^{\,z}\right]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\,z-1}\, dt = z\,\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
On définit le prolongement de $\Gamma(z)$ pour z négatif comme suit :
Supposons $-1 < z < 0$ alors $0 < z+1 < 1$ et $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$.
On convient alors de définir $\Gamma(z)$ par la relation $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, et on étend le procédé de proche en proche.
Ainsi pour $-(n+1) < z < -n$ (n entier positif ou nul), on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n)}, \qquad (0 < z+n+1 < 1)$$

Pour $z = 0$, $\Gamma(z)$ est infinie : il en sera de même pour toutes les valeurs entières négatives de z, c'est à dire $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$, ..., $\Gamma(-n)$, ... sont infinies.
On a $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.
Dans l'intervalle $]0, +\infty[$, l'abscisse et l'ordonnée du minimum sont $z_{min} \approx 1.465$ et $\Gamma(z_{min}) \approx 0.8856$. Cette dernière valeur est évidemment proche de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862$.
De plus, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement croissante pour $z \geq 2$ donc elle est convexe pour $z \in]0, +\infty[$.
Le graphe de la fonction $\Gamma(z)$ pour $z = x \in \mathbb{R}$ est tracé sur la figure ci-dessous :

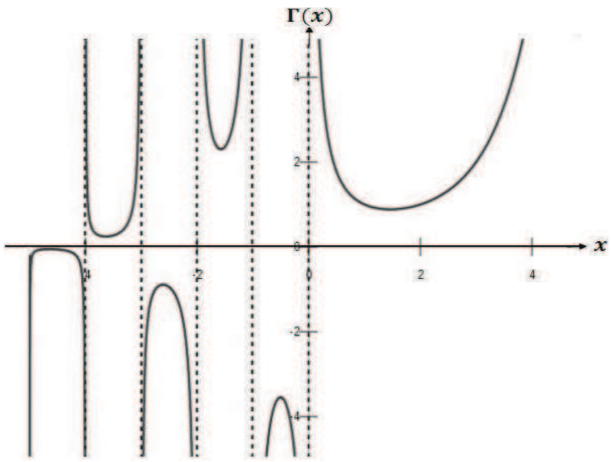


FIGURE 1.1 – Variation de $\Gamma(z)$ pour z réel

1.1.1.3 La fonction Bêta

La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\, t^{\,y-1}\, dt, \qquad (Re\, x > 0,\ Re\, y > 0) \tag{1.3}$$

La relation entre la fonction Bêta d'Euler et Gamma d'Euler est donnée par :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.4}$$

1.1.1.4 La fonction Digamma

La fonction $\psi(z)$ d'Euler aussi appelée fonction digamma est la dérivée logarithmique de $\Gamma(z)$:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{1.5}$$

Comme $\Gamma(z)$ ne s'annule pas, et que les pôles de $\Gamma'(z)$ sont les mêmes que ceux de $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ est une fonction méromorphe ayant des pôles simples en $-n$ $(n \in \mathbb{N})$, avec un résidu égal à -1.

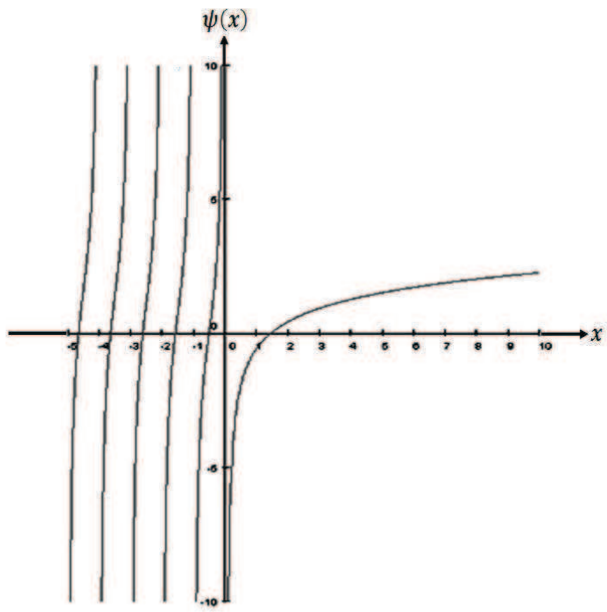


FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction Digamma

1.1.1.5 La représentation intégrale de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$

La représentation intégrale de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ sur le contour de Hankel est donnée par :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\,\pi\,i} \int\limits_{H_\varepsilon} e^{\,t}\, t^{\,-z}\, dt. \tag{1.6}$$

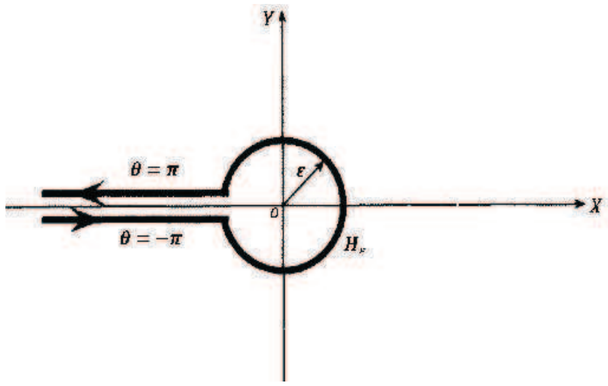


FIGURE 1.3 – Le contour de Hankel H_ε

1.1.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, $e^{\,z}$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle est définie par la fonction de Mittag-Leffler.

1.1.2.1 Définition de la fonction Mittag-Leffler

On appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\,k}}{\Gamma(\alpha\, k + 1)}, \quad \alpha > 0. \tag{1.7}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction est définie par un développement en série suivant :

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\,k}}{\Gamma(\frac{k}{\rho} + \mu)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

1.1.2.2 Quelques relations avec les fonctions classiques

D'après la définition de la fonction $E_\rho(z,\mu)$ on a les relations suivantes :

$$E_\alpha(z) = E_{1/\alpha}(z,1)$$

$$E_{\frac{1}{2}}(z,1) = \cosh\sqrt{z}, \qquad E_{\frac{1}{2}}(z,2) = \frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

$$E_1(z,1) = e^{\,z}, \qquad E_1(z,2) = \frac{e^{\,z}-1}{z}$$

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = e^{\,z^2}\,[1+\operatorname{erf}(z)] = e^{\,z^2}\left[1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right]$$

1.1.2.3 Comportement asymptotique de la fonction de Mittag-Leffler

Soit $\rho > \dfrac{1}{2}$. On a les développements asymptotiques suivants quand $|z| \to +\infty$:

$$E_{\frac{1}{\rho}}(z) \;\sim\; \rho\, exp\,(z^{\,\rho}) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{\,-k}}{\Gamma(1-\frac{k}{\rho})} \qquad \text{si} \quad |arg\, z| < \frac{\pi}{2\,\rho}$$

$$E_{\frac{1}{\rho}}(z) \;\sim\; -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{\,-k}}{\Gamma(1-\frac{k}{\rho})} \qquad \text{si} \quad |arg\, z| > \frac{\pi}{2\,\rho}$$

$$E_\rho(z,\mu) \;\sim\; \rho\, z^{\,\rho\,(1-\mu)}\, exp\,(z^{\,\rho}) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{\,-k}}{\Gamma(\mu-\frac{k}{\rho})} \qquad \text{si} \quad |arg\, z| \le \theta \quad \text{où} \quad \frac{\pi}{2\,\rho} < \theta < min(\pi,\frac{\pi}{\rho})$$

Pour plus d'informations sur les fonctions Gamma et Mittag-Leffler voir par exemple ([2], [3])

1.2 Théorie de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répandue. Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville.

1.2.1 Intégrales d'ordre arbitraire

On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fontion continue par exemple.
Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.
Une primitive de f est donnée par

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\, dt \right) ds$$

Le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t)\; f(t)\, dt$$

Puis une itération donne

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{\,n-1}}{(n-1)!}\; f(t)\, dt$$

Définition 1.2.1. *Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\,\alpha-1}\; f(t)\, dt \tag{1.9}$$

où α est un réel (ou même complexe) convenablement choisi.

On remarque que la formule (1.9) est (du moins formellement) une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de "primitivation" α non entier.
Voyons un exemple :

Exemple 1.2.2. *Considérons la fonction* $f(x) = (x-a)^{\beta}$. *Alors*

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,(t-a)^{\beta}\,dt$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\,\tau$, *d'où*

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\,\tau^{\beta}\,d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned} \tag{1.10}$$

après utilisation de la relation (1.4).
On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ *où on a*

$$I_a^{1}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}\,(x-a)^{\beta+1} = \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1}$$

à cause de la relation (1.2).

Voici des identités qui serviront beaucoup par la suite.

Proposition 1.2.3. *Soit* $f \in C^0([a,b))$.
Pour α, β *complexes tels que* $Re\,(\alpha) > 0$ *et* $Re\,(\beta) > 0$ *on a*

$$I_a^{\alpha}(I_a^{\beta}\,f) = I_a^{\alpha+\beta}\,f \tag{1.11}$$

Pour $Re\,(\alpha) > 1$ *on a*

$$\frac{d}{dx}I_a^{\alpha}\,f = I_a^{\alpha-1}\,f \tag{1.12}$$

Et pour $Re(\,\alpha) > 0$ *on a*

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\,(I_a^{\alpha}\,f)\,(x) = f(x) \tag{1.13}$$

Démonstration. La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned} \left[I^{\alpha}(I_a^{\beta}\,f)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\,(I_a^{\beta}\,f)(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1}\,(s-t)^{\beta-1}\,f(t)\,dt\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\,\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}\,(s-t)^{\beta-1}\,ds\right]\,dt \end{aligned}$$

A présent on pose $s = t + (x-t)\,\tau$, ce qui donne

$$\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}\,(s-t)^{\beta-1}\,ds = (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\,\tau^{\beta-1}\,d\tau = (x-t)^{\alpha+\beta-1}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

D'où

$$\left[I^{\alpha}(I_a^{\beta} f)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha+\beta-1}\,dt$$

c'est-à-dire le résultat annoncé.

La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$.

Pour la dernière, soit $f \in C^0([a,b))$ alors

$$(I_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,f(t)\,dt.$$

et grâce à l'exemple (1.10), on a

$$(I_a^{\alpha}\,1)(x) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 1$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^{\alpha} f)(x) - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,f(x)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,f(t)\,dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,f(x)\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,|f(t)-f(x)|\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1}\,|f(t)-f(x)|\,dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1}\,|f(t)-f(x)|\,dt
\end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b)$ donc

$$\forall\, x,t \in [a,b),\quad \forall\,\varepsilon > 0,\quad \exists\,\delta > 0 \;\; / \;\; |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| < \varepsilon$$

ce qui donne

$$\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1}\,|f(t)-f(x)|\,dt \le \varepsilon\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1}\,dt = \frac{\varepsilon\,\delta^{\alpha}}{\alpha}.$$

D'autre part,

$$\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \; |f(t)-f(x)| \; dt \leq \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \; (|f(t)|+|f(x)|) \; dt$$

$$\leq 2 \sup_{\xi\in[a,x]} |f(\xi)| \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \, dt, \quad \forall x \in [a,b)$$

$$= 2\, M \left(\frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} \right) \quad \text{avec } M = \sup_{\xi\in[a,x]} |f(\xi)|$$

d'où

$$\begin{aligned}\left| (I_a^{\alpha} \, f)(x) - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \, f(x) \right| &\leq \frac{1}{\alpha\, \Gamma(\alpha)} \left[\varepsilon\, \delta^{\alpha} + 2\, M \, \left((x-a)^{\alpha} - \, \delta^{\alpha}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \; \left[\varepsilon\, \delta^{\alpha} + 2\, M \, \left((x-a)^{\alpha} - \, \delta^{\alpha}\right)\right]\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers 0^+, on obtient

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} \left| (I_a^{\alpha} \, f)(x) - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \, f(x) \right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} \, (I_a^{\alpha} \, f)(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Donc

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} \, (I_a^{\alpha} \, f)(x) = f(x)$$

■

1.2.2 Dérivées d'ordre arbitraire

Définition 1.2.4. *Soit $\alpha \in]m-1, m[$ avec $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$(D_a^{\alpha} \, f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[(I_a^{m-\alpha} \, f)(x) \right] \tag{1.14}$$

Exemple 1.2.5. *Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$. On aura*

$$D_a^{\alpha} \, (x-a)^{\beta} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \, (x-a)^{\beta+m-\alpha} \right]$$

alors

$$D_a^{\alpha}\,(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\,\frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\,(x-a)^{\beta-\alpha}$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\,(x-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.15}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\lambda} = \lambda\,(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1)\,(x-a)^{\lambda-m} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)}\,(x-a)^{\lambda-m}$$

Il est clair que la formule de dérivation (1.15) se réduit pour $\alpha = 1$ à

$$D_a^1\,(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}\,(x-a)^{\beta-1} = \beta\,(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}\,(x-a)^{\beta}.$$

Dans l'exemple précédent si on prend $\beta = 0$ on obtient le résultat "troublant" suivant :

$$D_a^{\alpha}\,1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

c'est à dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ! Ceci n'est pas vraiment un handicap pour développer la théorie comme nous le verrons plus loin.

Lemme 1.2.6. *Soit $\alpha \in]m-1, m[$ et f une fonction vérifiant $D_a^{\alpha} f = 0$ (appartenant au noyau de l'opérateur D_a^{α}). Alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j\,\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}\,(x-a)^{j+\alpha-m} \tag{1.16}$$

où les c_j sont des constantes quelconques.

Démonstration. Partons de $(D_a^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$, alors on a d'abord

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j\,(x-a)^j$$

et par appliction de I_a^{α} on obtient

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j\,I_a^{\alpha}((x-a)^j)$$

En tenant compte de la relation (1.10), on aura

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j}$$

Ensuite par dérivation classique et en utilisant le fait que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)} (x-a)^{\lambda-m} \tag{1.17}$$

on aura le résultat. ■

Proposition 1.2.7. *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville D_a^α possède les propriètés suivantes :*

1. *D_a^α est linéaire.*

2. $\lim\limits_{\substack{\alpha \longrightarrow m-1 \\ >}} (D_a^\alpha f)(x) = f^{(m-1)}(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{\alpha \longrightarrow m \\ <}} (D_a^\alpha f)(x) = f^{(m)}(x)$

3. $D_a^\alpha \; o \; I_a^\alpha \; = id$

4. $[(I_a^\alpha \; o \; D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} \dfrac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^j [I_a^{m-\alpha} f](x) \right\}$

Démonstration. Pour la linéarité c'est une simple vérification.
Montrons la deuxième égalité de la propriété 2. Partons de l'hypothèse que f est de classe C^m, alors on peut écrire :

$$\left(I_a^m f^{(m)}\right)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

d'où

$$f(x) = \left(I_a^m f^{(m)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(I_a^{m-\alpha} f\right)(x) &= \left[I_a^{m-\alpha}\left(I_a^m f^{(m)}\right)\right](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} I_a^{m-\alpha} (x-a)^j \\ &= \left(I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} (x-a)^{j+m-\alpha} \end{aligned}$$

d'aprés l'identité (1.11) et le résultat de l'exemple (1.10).

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(I_a^{m-\alpha} f\right)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\left(I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} (x-a)^{j+m-\alpha}\right\} \\ &= \left(I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha}. \end{aligned}$$

grâce à l'identité (1.12) et la formule (1.17). Alors d'une part, on a

$$\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow m \\ <}} \left(I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right)(x) = \left(I_a^{0} f^{(m)}\right)(x) = f^{(m)}(x)$$

d'aprés la propriété (1.13), d'autre part la somme est nulle puisque chaque terme $\dfrac{1}{\Gamma(j+1-m)}$ est nul (voir les propriétés de la fonction Γ).

La première égalité dans la propriété 2 se démontre de la même façon que la deuxième.

La propriété 4 s'en déduit d'aprés la définition (1.14) et l'identité (1.12). En effet,

$$D_a^{\alpha} \; o \; I_a^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m o \; I_a^{m-\alpha} \; o \; I_a^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m o \; I_a^{m} = id$$

Pour la dernière propriété on démarre, grâce à la propriété 4, avec

$$(D_a^{\alpha} \; o \; I_a^{\alpha} \; o \; D_a^{\alpha}) f = D_a^{\alpha} f$$

qui donne

$$D_a^{\alpha} \left[(I_a^{\alpha} \; o \; D_a^{\alpha}) f - f\right] = 0$$

Maintenant à partir du lemme caractérisant le noyau de D_a^{α} on aura

$$[(I_a^{\alpha} \; o \; D_a^{\alpha}) f](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \,(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}.$$

Cherchons les coefficients $c_j \,(f)$:

Par application aux deux membres de $I_a^{m-\alpha}$ on obtient

$$[(I_a^{m} \; o \; D_a^{\alpha}) f](x) - [I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \,(f) \,(x-a)^{j}$$

Or si $0 \leq j \leq m-1$ alors $\lim\limits_{x \to a+} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^j \left[I_a^m \; g\right](x) = \lim\limits_{x \to a+} \left[I_a^{m-j} \; g\right](x) = 0$ et aussi

$$\lim_{x \to a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j (x-a)^k = \begin{cases} j! & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$j! \, c_j \, (f) = \; - \lim_{x \to a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j \left[I_a^{m-\alpha} \; f\right](x)$$

c'est-à-dire le résultat annoncé. ■

Lemme 1.2.8. *Soit f continue sur $[a,b]$ et $\alpha > 0$, alors* $\lim\limits_{x \to a+} (I_a^\alpha \; f)(x) = 0.$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |(I_a^\alpha \; f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \; |f(t)| \; dt \\ &\leq \frac{\|f\|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \; dt \\ &\leq \frac{\|f\|}{\Gamma(\alpha+1)} \, (x-a)^\alpha \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ telle que $\dfrac{\|f\|}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha < \varepsilon$ alors $0 < x - a < \left[\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\,\varepsilon}{\|f\|}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$
c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta = \left[\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\,\varepsilon}{\|f\|}\right]^{\frac{1}{\alpha}} > 0 \; / \; 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |(I_a^\alpha \; f)(x)| < \varepsilon$
d'où le résultat. ■
Comme conséquence regardons comment devient la propriété 4 de la proposition (1.2.7) si $0 < \alpha < 1$ et f continue :

$$[(I_a^\alpha \; o \; D_a^\alpha) \, f\,](x) \; = \; f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \left(I_a^{1-\alpha} \; f\right)(x) \right\} = \; f(x).$$

Corollaire 1.2.9. *Si $0 < \alpha < 1$ et f de classe C^1 alors*

$$(I_a^\alpha \; o \; D_a^\alpha) \, f \; = \; f$$

Remarque 1.2.10. *Dans la suite de ce mémoire, nous allons travailler avec la dérivée au sens de Riemann-Liouville en prenant $a = 0$ et $0 < \alpha < 1$ pour plus de commodité et nous allons adopter les notations I^α et D^α au lieu de I_a^α et D_a^α.*

Chapitre 2

Equations différentielles fractionnaires linéaires d'ordre deux

Dans ce chapître, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre deux. Puis, nous nous intéressons aux valeurs propres du problème aux limites présenté et étudié par A.Yu.Popov [8].

2.1 Existence et unicité

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, D^{\alpha}y(x) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \quad y_0, y_1 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.1. *Le problème de Cauchy* (2.1) *admet une solution unique dans l'espace* $C[0,1]$.

Démonstration. Déja remarquons qu'une application y dans $C[0,1]$ vérifiant l'équation différentielle $y''(x) + \lambda\, D^{\alpha}y(x) = 0$ est nécéssairement de classe C^2.
On commence par transformer l'équation différentielle fractionnaire en une équation intégrale.
Si y est une solution du problème (2.1), alors pour tout $x \in [0,1]$ et en appliquant l'opérateur inverse I^1 défini par $(I^1 y)(x) = \int_0^x y(t)dt$, on obtient

$$y'(x) = y'(0) - \lambda\,(I^{1-\alpha}y)(x)$$

Aprés une deuxième intégration, on aura

$$y(x) = y(0) + y'(0)\,x - \lambda\, I^1(I^{1-\alpha}y)(x)$$

En vertu de la composition de l'intégration d'ordre réel quelconque positif et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$y(x) = y_0 + y_1\, x - \lambda\, (I^{\,2-\alpha} y)(x)$$

Réciproquement, toute application y de classe C^2 vérifiant l'équation ci-dessus est solution du problème (2.1).
On a donc l'équivalence :

$$(2.1) \Longleftrightarrow y(x) = y_0 + y_1\, x - \frac{\lambda}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, y(t)dt$$

On sait bien que $C[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.
Considérons l'application :

$$\begin{array}{llllll} T: & C[0,1] & \longrightarrow & C[0,1] & & \\ & y & \longmapsto & Ty: & [0,1] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & & & x & \longmapsto y_0 + y_1\, x - \dfrac{\lambda}{\Gamma(2-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{1-\alpha} y(t)dt \end{array}$$

(T est bien définie puisque Ty est continue (car dérivable) sur [0,1]).
Montrons que T admet un point fixe.
Soient y et z deux éléments de $C[0,1]$

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| = \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, (y(t) - z(t))dt \right|$$

Alors

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| \leq \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)}\, \|y - z\| \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt$$

Aprés le calcul de l'intégrale et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction gamma d'Euler : $\Gamma(z+1) = z\, \Gamma(z)$, on aura

$$\|Ty - Tz\| \leq \frac{|\lambda|\, x^{\,2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\, \|y - z\|$$

Nous allons faire les estimations dans l'espace $C[0, b_1]$ avec $0 < b_1 \leq 1$ et choisir b_1 de façon à ce que la constante de contraction soit < 1 effectivement.

D'où

$$\|Ty - Tz\| \leq \frac{|\lambda|\; b_1^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \|y - z\|$$

Il suffit de choisir b_1 afin que la constante $k = \dfrac{|\lambda|\; b_1^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$ soit < 1, i.e.

$$b_1 < min\left(1, \left(\frac{\Gamma(3-\alpha)}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)$$

Le prolongement de la solution au delà de b_1 se fait en résolvant l'équation intégrale dans $[b_1, b_2]$, en choisissant b_2 comme nous l'avons fait pour b_1 et ainsi de suite .
En conséquence, T est contractante.
Comme $C[0,1]$ est complet, le théorème du point fixe de Banach permet d'affirmer que T admet un point fixe $y \in C[0,1]$ d'où l'existence de solution du problème de Cauchy (2.1).

Montrons maintenant l'unicité de la solution.
Soient y et z deux solutions du problème de Cauchy, alors on a

$$y(x) = y_0 + y_1\; x - \frac{\lambda}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, y(t)dt \qquad y_0, y_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$z(x) = z_0 + z_1\; x - \frac{\lambda}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, z(t)dt \qquad z_0, z_1 \in \mathbb{R}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|y(x) - z(x)| &\leq |y_0 - z_0| + |y_1 - z_1|\; x + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\; |y(t) - z(t)|\, dt \\
&\leq |y_0 - z_0| + |y_1 - z_1|\, b_1 + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\; |y(t) - z(t)|\, dt \\
&\leq C + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\; |y(t) - z(t)|\, dt, \qquad \forall x \in [0, b_1] \\
&\text{avec } C = |y_0 - z_0| + |y_1 - z_1|\, b_1 \geq 0
\end{aligned}$$

On a donc

$$\varphi(x) \leq C + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\, \varphi(t)dt, \qquad \forall x \in [0, b_1],\; \forall C \in \mathbb{R}_+$$

où : $\varphi(x) = |y(x) - z(x)|$ est une fonction positive et continue sur $[0, b_1]$.

Pour pouvoir appliquer le lemme de Gronwall, essayons de se débarasser de x à l'intérieur de l'intégrale et cela en utilisant l'inégalité de Hölder.
D'où, $\forall\, p, q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq C + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\int_0^x (x-t)^{q-q\alpha} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x \varphi^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall x \in [0, b_1],\ \forall C \in \mathbb{R}_+ \\
&\leq C + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{x^{q-q\alpha+1}}{q-q\alpha+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x \varphi^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall x \in [0, b_1],\ \forall C \in \mathbb{R}_+ \\
&\leq C + \frac{|\lambda|}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{b_1^{1-\alpha+\frac{1}{q}}}{1-\alpha+\frac{1}{q}} \right) \left(\int_0^x \varphi^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall x \in [0, b_1],\ \forall C \in \mathbb{R}_+ \\
&\leq C + K \left(\int_0^x \varphi^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{avec} \quad K = \frac{|\lambda|\ b_1^{1-\alpha+\frac{1}{q}}}{\left(1-\alpha+\frac{1}{q}\right)\ \Gamma(2-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi^p(x) \leq \left(C + K \left(\int_0^x \varphi^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p, \qquad \forall x \in [0, b_1],\ \forall C,\ K \in \mathbb{R}_+$$

Soit la fonction h définie par $h(u) = u^s = e^{s\, ln\, u}$, $\forall u > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ alors h est une fonction convexe c'est à dire
$\forall\, \alpha,\ \beta > 0/\alpha + \beta = 1$ on a $h(\alpha\, u + \beta\, v) \leq \alpha\, h(u) + \beta\, h(v)$, $\forall u > 0,\ v > 0$.
d'où

$$\begin{aligned}
\varphi^p(x) &\leq 2^p \left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} K \left(\int_0^x \varphi^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\
&\leq 2^{p-1}\, C^p + 2^{p-1}\, K^p \int_0^x \varphi^p(t) dt
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant le lemme de Gronwall (voir annexe)

$$\varphi^p(x) \leq 2^{p-1}\, C^p\, exp \left(2^{p-1}\, K^p \int_0^x dt \right) = 2^{p-1}\, C^p\, exp\, (\, 2^{p-1}\, K^p\, x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \leq 2^{\frac{1}{q}}\, C\, exp\, (\, \frac{1}{p}\, 2^{p-1}\, K^p\, x), \qquad \forall x \in [0, b_1],\ \forall C,\ K \in \mathbb{R}_+$$

Si on fixe x dans $]0, 1]$ alors en tenant compte des égalités suivantes : $y_0 = z_0$, $y_1 = z_1$ et le fait que $\varphi(x) > 0$, on aura $\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow y(x) = z(x)$.
D'où l'énoncé. ■

2.2 Problème aux limites

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, D^{\alpha} y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Définition 2.2.1. *Le nombre λ est appelé une valeur propre du problème* (2.2) *s'il existe une fonction à valeur complexe $y \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, non identiquement nulle, pour laquelle les relations du problème* (2.2) *sont vérifiées.*

2.2.1 Equation des valeurs propres

On a transformé le problème (2.1) en une équation intégrale donnée par :

$$y(x) + \lambda (I^{2-\alpha} y)(x) = y_0 + y_1\, x$$

et qui peut s'écrire comme suit :

$$(id + \lambda I^{2-\alpha}) y(x) = y_0 + y_1\, x$$

Maintenant on peut facilement montrer que dans l'espace des fonctions continues $C[0,1]$ l'opérateur $I^{2-\alpha}$ est borné et pour $|\lambda|$ petit on a $||\lambda I^{2-\alpha}|| < 1$. Ceci nous permet d'inverser $(id + \lambda I^{2-\alpha})$ par la série de Neumann :

$$(id + \lambda I^{2-\alpha})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda I^{2-\alpha})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k I^{(2-\alpha)k}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k I^{(2-\alpha)k} (y_0 + y_1\, x) \\ &= y_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k I^{(2-\alpha)k}(1) + y_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k I^{(2-\alpha)k}(x) \end{aligned}$$

D'aprés la définition de l'intégrale de Riemann Liouville, on obtient

$$y(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \frac{x^{(2-\alpha)k}}{\Gamma((2-\alpha)k+1)} + y_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \frac{x^{(2-\alpha)k+1}}{\Gamma((2-\alpha)k+2)}$$

Alors

$$y(x) = y_0\, E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-\lambda\, x^{2-\alpha}, 1) + y_1\, x\, E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-\lambda\, x^{2-\alpha}, 2)$$

En tenant compte des conditions de Dirichlet du problème (2.2) ($y(0) = y_0 = 0$, $y(1) = 0$) et $y_1 \in \mathbb{R}^*$, on obtient l'équation des valeurs propres suivante :

$$E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-\lambda, 2) = 0 \tag{2.3}$$

Par conséquent, étudier les valeurs propres du problème (2.2) revient à étudier les zéros de la fonction $\quad E_\rho(-\lambda, 2), \quad \rho = (2-\alpha)^{-1}$.

2.2.2 Etude des valeurs propres

2.2.2.1 Existence des valeurs propres

Lemme 2.2.2. $\forall \rho \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}],\ z \in \mathbb{C},\ Re\, z > 0,\ \left(\rho = \dfrac{1}{2-\alpha}\right)$, *on a la représentation suivante :*

$$E_\rho(-z^{2-\alpha}, 2) = \ 2\ \rho\ z^{-1}\ exp\ (z\ cos\ (\pi\rho))\ cos\ (z\ sin(\ \pi\rho) -\ \pi\rho) + \frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} - \Omega_\rho(z) \tag{2.4}$$

dont le reste est donné par l'estimation suivante :

$$|\Omega_\rho(z)| \leq \frac{1}{|\pi z|}\ (Re\, z)^{2\alpha-3}\ \Gamma(3-2\alpha)\ (sin\ (2\pi\alpha) + \frac{1}{2}\ sin\ (\pi\alpha)) \tag{2.5}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la première identité pour z = x>0, puisque ses deux côtés sont holomorphes dans le demi plan droit.
La représentation intégrale de la fonction $\dfrac{1}{\Gamma(w)}$ sur le contour de Hankel est donnée par :

$$\frac{1}{\Gamma(w)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\varepsilon} e^{\,z}\ z^{\,-w}\ dz$$

On en déduit la représentation intégrale de la fonction de Mittag-Leffler définie par :

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\,k}}{\Gamma(\frac{k}{\rho} + \mu)}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_\rho(z,\mu) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{H_\varepsilon} e^{\,\xi}\ \xi^{\,-\frac{k}{\rho}-\mu}\ d\xi \right)\ z^{\,k} \\ &= \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\varepsilon} e^{\,\xi}\ \xi^{\,-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (z\ \xi^{\,-\frac{1}{\rho}})^{\,k}\ d\xi \end{aligned}$$

Si $\left|\dfrac{z}{\xi^{\frac{1}{\rho}}}\right| < 1$ alors

$$\begin{aligned} E_\rho(z,\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{H_{\varepsilon'}} e^{\xi}\, \xi^{-\mu} \, (1-\frac{z}{\xi^{\frac{1}{\rho}}})^{-1} \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\xi}\, \xi^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{\xi^{\frac{1}{\rho}} - z} \, d\xi \end{aligned}$$

En posant $z = -x^{\frac{1}{\rho}} > 0$, on obtient

$$E_\rho(-x^{\frac{1}{\rho}},\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\xi}\, \xi^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{\xi^{\frac{1}{\rho}} + x^{\frac{1}{\rho}}} \, d\xi$$

Pour $\rho = \dfrac{1}{2-\alpha}$ et $\mu = 2$, on aura

$$E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-x^{2-\alpha},2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\xi}\, \xi^{-\alpha}}{\xi^{2-\alpha} + x^{2-\alpha}} \, d\xi$$

avec

$$\left|\frac{-x^{\frac{1}{\rho}}}{\xi^{\frac{1}{\rho}}}\right| < 1 \Longleftrightarrow \frac{x}{|\xi|} < 1 \Longleftrightarrow 0 < x < \varepsilon'$$

Les points singuliers de cette intégrale vérifient l'équation suivante :

$$\xi^{\frac{1}{\rho}} + x^{\frac{1}{\rho}} = 0 \Longleftrightarrow \xi^{\frac{1}{\rho}} = -x^{\frac{1}{\rho}}$$

Soit $\xi = |\xi|\, e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ alors l'équation précédente est équivalente à

$$\begin{cases} |\xi| = x \\ \frac{1}{\rho}\,\theta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\xi| = x \\ \theta = \pi\rho\,(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On a

$$-\pi < \theta < \pi$$

Ce qui implique que

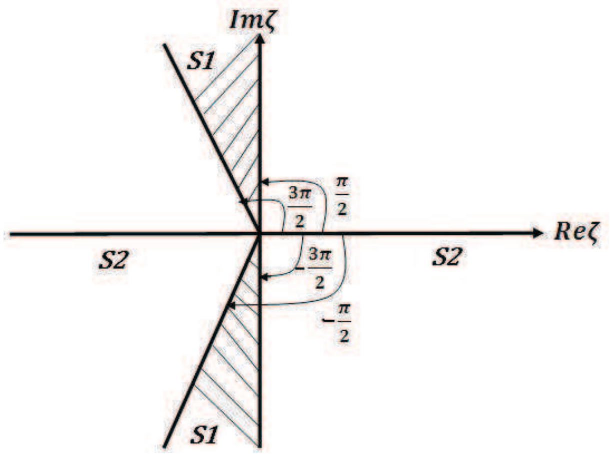
$$-\pi < \pi\rho\,(2k+1) < \pi$$

Et puis

$$-\frac{\frac{1}{\rho}+1}{2} < k < \frac{\frac{1}{\rho}-1}{2}$$

Comme $\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ alors les entiers relatifs k possibles sont 0 et -1.

D'où les points singuliers sont $\xi_+ = x\, e^{i\pi\rho}$ et $\xi_- = x\, e^{-i\pi\rho}$ qui sont deux pôles simples et le domaine où ils se trouvent est donné par $S_1 = [-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ comme il est montré dans la figure ci-dessous.



Si $\theta \in S_2$ alors

$$E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-x^{\,2-\alpha}, 2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi$$

sinon d'aprés le théorème de Cauchy, on aura

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-x^{\,2-\alpha}, 2) &= Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}},\ \xi_+)\ +\ Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}},\ \xi_-) \\ &+\ \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi \end{aligned}$$

où $Res\,(f,\ a)$ est le résidu de f en un point a.
Maintenant on calcule les résidus, commençons d'abord par le résidu en ξ_+

$$Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}},\ \xi_+) = \lim_{\xi \to \xi_+} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}$$

Puisque

$$\lim_{\xi \to \xi_+} e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha} \neq 0,\ \lim_{\xi \to \xi_+} \xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha} \ =\ 0$$

et

$$\lim_{\xi \to \xi_+} \frac{d}{d\xi}\,(\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}) = \lim_{\xi \to \xi_+} (2-\alpha)\,\xi^{1-\alpha} = (2-\alpha)\,x^{1-\alpha} e^{\,i\,\pi\,\frac{1-\alpha}{2-\alpha}} \ \neq\ 0$$

Alors

$$Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}},\ \xi_+) = \lim_{\xi \to \xi_+} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{(2-\alpha)\,\xi^{1-\alpha}} = \lim_{\xi \to \xi_+} \frac{1}{2-\alpha}\,\frac{e^{\,\xi}}{\xi} = \rho\,\frac{e^{\,x\,e^{\,i\pi\rho}}}{x\,e^{\,i\pi\rho}} \quad (\,\rho = \frac{1}{2-\alpha})$$

Ainsi le résidu en ξ_+ est donné par :

$$\begin{aligned}
Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha}+x^{\,2-\alpha}},\ \xi_+) &= \rho\, x^{-1}\, exp\,(\ x\cos(\pi\rho)+i\,x\,sin\,(\pi\rho)-i\pi\rho\ ) \\
&= \rho\, x^{-1}\, exp\,(\ x\cos(\pi\rho))\ exp\,[i\,(\ x\,sin\,(\pi\rho)-\pi\rho\ )]
\end{aligned}$$

Si on procède de la même façon pour le résidu en ξ_- on aura

$$Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha}+x^{\,2-\alpha}},\ \xi_-)=\lim_{\xi\to\xi_+}\ \rho\ \frac{e^{\,\xi}}{\xi}=\lim_{\xi\to\xi_+}\ \rho\ \frac{e^{\,x\,e^{\,-i\pi\rho}}}{x\ e^{\,-i\pi\rho}}$$

Puis

$$\begin{aligned}
Res\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha}+x^{\,2-\alpha}},\ \xi_-) &= \rho\, x^{-1}\, exp\,(\ x\cos(\pi\rho)-i\,x\,sin\,(\pi\rho)+i\pi\rho\ ) \\
&= \rho\, x^{-1}\, exp\,(\ x\cos(\pi\rho))\ exp\,[-i\,(\ x\,sin\,(\pi\rho)-\pi\rho\ )]
\end{aligned}$$

D'où la somme des résidus est donnée par :

$$2\ \rho\ x^{-1}\ exp\,(\ x\cos(\pi\rho))\ cos\,(x\ sin\,(\pi\rho)-\pi\rho)$$

à cause de la propriètè suivante :

$$\forall\ t\in\mathbb{R},\ cos\,(t)=Re\,(e^{\,i\,t})=\frac{e^{\,i\,t}+e^{\,-\,i\,t}}{2}.$$

Par conséquent, si $\theta\in S_1$ alors

$$E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-x^{\,2-\alpha},2)=2\ \rho\ x^{-1}\ exp\,(\ x\cos(\pi\rho))\ cos\,(x\ sin\,(\pi\rho)-\pi\rho)+\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_{\varepsilon'}}\ \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,-\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha}+x^{\,2-\alpha}}\ d\xi$$

Transformons l'intégrale dans la formule précédente en utilisant l'identité suivante :

$$(\xi^{\,2-\alpha}\ +\ x^{\,2-\alpha})^{-1}=x^{\,\alpha-2}\ -\ x^{\,\alpha-2}\,\xi^{\,2-\alpha}\,(\xi^{\,2-\alpha}\ +\ x^{\,2-\alpha})^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-x^{\,2-\alpha},2) &= 2\ \rho\ x^{-1}\ exp\,(\ x\cos(\pi\rho))\ cos\,(x\ sin\,(\pi\rho)-\pi\rho) \\
&\quad +\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_{\varepsilon'}}\ x^{\,\alpha-2}\ e^{\,\xi}\ \xi^{\,-\alpha}\ d\xi-\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_{\varepsilon'}}\ \frac{e^{\,\xi}\ \xi^{\,2-2\alpha}\ x^{\,\alpha-2}}{\xi^{\,2-\alpha}+x^{\,2-\alpha}}\ d\xi
\end{aligned}$$

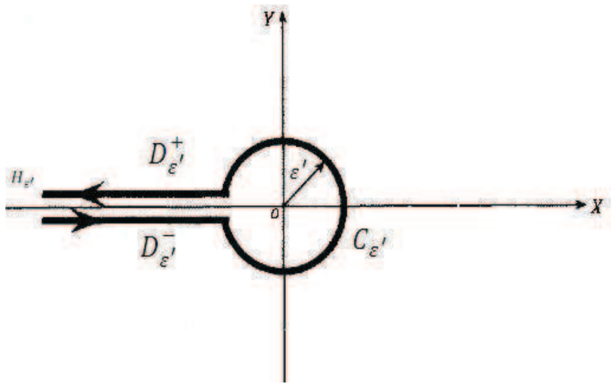
En vertu de la représentation intégrale (1.6), on obtient

$$E_{\frac{1}{2-\alpha}}(-x^{\,2-\alpha}, 2) = 2\,\rho\, x^{-1}\, exp\,(\,x\cos(\pi\rho))\; cos\,(x\; sin\,(\pi\rho) - \pi\rho) + \frac{x^{\,\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} - \Omega_\alpha(x)$$

où

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{x^{\,\alpha-2}}{2\pi i} \int\limits_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi$$

On a abouti à la partie principale de la représentation (2.4), essayons maintenant d'estimer le reste $\Omega_\alpha(x)$.



$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha(x) &= \frac{x^{\,\alpha-2}}{2\pi i} \int\limits_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi \\
&= \frac{x^{\,\alpha-2}}{2\pi i} \left[\int\limits_{D^+_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi + \int\limits_{C_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi + \int\limits_{D^-_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi \right]
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{\xi\to 0} \xi\,(\frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}) = \lim\limits_{\xi\to 0} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,3-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}} = 0$ (car $\rho = \frac{1}{2-\alpha} \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \Rightarrow \alpha \in (0, \frac{1}{2}]$)
alors d'aprés le lemme de Jordan (voir annexe) on a

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} \int\limits_{C_{\varepsilon'}} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi = 0$$

Il en résulte que

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{x^{\,\alpha-2}}{2\pi i} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\,\xi}\,\xi^{\,2-2\alpha}}{\xi^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi - \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\,e^{\,2\pi i}\xi}\,(e^{\,2\pi i}\xi)^{\,2-2\alpha}}{(e^{\,2\pi i}\xi)^{\,2-\alpha} + x^{\,2-\alpha}}\, d\xi \right]$$

En remplaçant ξ par $e^{-\pi i}\xi$, on obtient

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-2}}{2\pi i}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\xi}\,(e^{-\pi i}\xi)^{2-2\alpha}}{(e^{-\pi i}\xi)^{2-\alpha}+x^{2-\alpha}}\,d\xi - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\xi}\,(e^{\pi i}\xi)^{2-2\alpha}}{(e^{\pi i}\xi)^{2-\alpha}+x^{2-\alpha}}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{x^{\alpha-2}}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-(2-2\alpha)\pi i}}{e^{-(2-\alpha)\pi i}\,\xi^{2-\alpha}+x^{2-\alpha}} - \frac{e^{(2-2\alpha)\pi i}}{e^{(2-\alpha)\pi i}\,\xi^{2-\alpha}+x^{2-\alpha}}\right)e^{-\xi}\,\xi^{2-2\alpha}\,d\xi$$

$$= \frac{x^{\alpha-2}}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{2\alpha\pi i}}{e^{\alpha\pi i}\,\xi^{2-\alpha}+x^{2-\alpha}} - \frac{e^{-2\alpha\pi i}}{e^{-\alpha\pi i}\,\xi^{2-\alpha}+x^{2-\alpha}}\right)e^{-\xi}\,\xi^{2-2\alpha}\,d\xi$$

A présent on pose $\xi = x\,t$, ce qui donne

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-2}\,x^{3-2\alpha}}{2\pi i\,x^{2-\alpha}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{2\alpha\pi i}}{e^{\alpha\pi i}\,t^{2-\alpha}+1} - \frac{e^{-2\alpha\pi i}}{e^{-\alpha\pi i}\,t^{2-\alpha}+1}\right)e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}\,dt$$

En réduisant les deux fractions sous l'intégrale au même dénominateur, on aura

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i\,x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{2\alpha\pi i}-e^{-2\alpha\pi i}+t^{2-\alpha}\,(e^{\alpha\pi i}-e^{-\alpha\pi i})}{1+t^{2-\alpha}(e^{\alpha\pi i}+e^{-\alpha\pi i})+t^{4-2\alpha}}\right)e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}\,dt$$

En tenant compte des propriètés suivantes :

$$\forall\ t\in\mathbb{R},\ cos\,(t) = Re\,(e^{i\,t}) = \frac{e^{i\,t}+e^{-i\,t}}{2} \quad et \quad sin\,(t) = Im\,(e^{i\,t}) = \frac{e^{i\,t}-e^{-i\,t}}{2\,i}$$

on obtient

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i\,x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{sin\,(2\alpha\pi)+t^{2-\alpha}\,sin\,(\alpha\pi)}{1+2\,t^{2-\alpha}\,cos\,(\alpha\pi)+t^{4-2\alpha}}\right)2\,i\,e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}\,dt$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Omega_\alpha(x) &= \frac{1}{\pi\,x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{sin\,(2\alpha\pi)+t^{2-\alpha}\,sin\,(\alpha\pi)}{1+2\,t^{2-\alpha}\,cos\,(\alpha\pi)+t^{4-2\alpha}}\right)e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}\,dt\\ &= \frac{1}{\pi\,x}\left(\int_0^{+\infty}\frac{sin\,(2\alpha\pi)\,e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}}{1+2\,t^{2-\alpha}\,cos\,(\alpha\pi)+t^{4-2\alpha}}\,dt + \int_0^{+\infty}\frac{t^{2-\alpha}\,sin\,(\alpha\pi)\,e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}}{1+2\,t^{2-\alpha}\,cos\,(\alpha\pi)+t^{4-2\alpha}}\,dt\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{1}{\pi\,x}\left[I_{1,\alpha}(x)\,sin\,(2\alpha\pi)+I_{2,\alpha}(x)\,sin\,(\alpha\pi)\right]$$

où

$$I_{1,\alpha}(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\,t^{2-2\alpha}}{1+2\,t^{2-\alpha}\,cos\,(\alpha\pi)+t^{4-2\alpha}}\,dt$$

et

$$I_{2,\alpha}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\, t^{2-2\alpha}}{t^{\alpha-2} + 2\, cos\,(\alpha\pi) + t^{2-\alpha}}\, dt$$

On veut majorer $I_{1,\alpha}(x)$ et $I_{2,\alpha}(x)$, pour cela essayons de minorer les dénominateurs

on a $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ alors $cos\,(\pi\alpha) \geq 0$

ainsi $1 + 2\, t^{2-\alpha}\, cos\,(\pi\alpha) + t^{4-2\alpha} \geq 1 + t^{4-2\alpha} > 1 \quad \forall t > 0.$

et $t^{2-\alpha} + 2\, cos\,(\pi\alpha) + t^{\alpha-2} \geq t^{2-\alpha} + t^{\alpha-2} > 2 \quad \forall t > 0.$

où on a utilisé le fait que $t^{2-\alpha} + t^{\alpha-2} = e^{(2-\alpha)\, ln\, t} + e^{-(2-\alpha)\, ln\, t} = 2\, ch\,((2-\alpha)\, ln\, t) > 2.$

d'où

$$|I_{k,\alpha}(x)| \leq \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{2-2\alpha}\, dt \qquad \text{pour} \quad k = 1 \text{ et } 2$$

Pour évaluer cette intégrale, on pose le changement $\tau = x\, t$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{2-2\alpha}\, dt = x^{2\alpha-3} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{2-2\alpha}\, d\tau = x^{2\alpha-3}\, \Gamma\,(3-2\alpha).$$

et donc

$$|I_{k,\alpha}(x)| \leq \frac{1}{k}\, x^{2\alpha-3}\, \Gamma\,(3-2\alpha) \qquad \text{pour} \quad k = 1 \text{ et } 2$$

Il en résulte que

$$|\Omega_\alpha\,(x)| \leq \frac{1}{\pi\, x} \left[sin\,(2\alpha\pi) + \frac{1}{2}\, sin\,(\alpha\pi) \right] x^{2\alpha-3}\, \Gamma\,(3-2\alpha).$$

■

Notons

$$F_\rho(z) = z\, E_\rho(-z^{2-\alpha}, 2) \quad et \quad f_\rho(z) = 2\,\rho\, exp\,(z\, cos\,(\pi\rho))\, cos\,(z\, sin(\,\pi\rho) - \,\pi\rho) \quad (2.6)$$

Lemme 2.2.3. $\forall\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}],\ z \in \mathbb{C},\ Re\, z > 0,\ (\rho = \dfrac{1}{2-\alpha})$, *on a la représentation suivante :*

$$F_\rho(z) = f_\rho(z) + \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - w_\rho(z) \qquad (2.7)$$

où $w_\rho(z)$ est une fonction holomorphe dans le demi plan $Re\, z > 0$ admettant l'estimation suivante :

$$|w_\rho(z)| \leq min\,(1{,}5\,\alpha)\,(Re\, z)^{2\,\alpha-3}. \qquad (2.8)$$

Démonstration. La représentation (2.7) s'en déduit d'aprés l'identité (2.4) et la notation (2.6) avec $w_\rho(z) = z\, \Omega_\rho(z)$.

D'aprés l'estimation (2.5), il en résulte que :

$$|w_\rho(z)| \leq |z| \; \frac{1}{|\pi z|} \; (Re\, z)^{2\alpha-3} \, \Gamma(3-2\alpha) \; (sin\;(2\pi\alpha) + \frac{1}{2}\; sin\;(\pi\alpha))$$

comme $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ alors $(3-2\,\alpha) \in [2,3)$ d'où $\Gamma(3-2\alpha) < 2$
et donc

$$|w_\rho(z)| \leq \; \frac{2}{\pi} \; (Re\, z)^{2\alpha-3} \; (sin\;(2\pi\alpha) + \frac{1}{2}\; sin\;(\pi\alpha))$$

En appliquant l'estimation suivante : $|sin\, u| \leq min\,(1, |u|), \quad u \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} |w_\rho(z)| &\leq \; \frac{2}{\pi} \; (Re\, z)^{2\alpha-3} \; min\,(1, 2\pi\alpha + \frac{1}{2}\;\pi\alpha) \\ &\leq \; (Re\, z)^{2\alpha-3} \; min\,(1, 5\,\alpha) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 2.2.4. *Pour* $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{3}$*, le problème* (2.2) *a au moins deux valeurs propres réelles.*

Démonstration. D'aprés la définition de la fonction de Mittag-Leffler, on a bien $E_\rho(0,2) = 1 > 0$.
Le comportement asymptotique de la fonction de Mittag-Leffler nous donne :

$$E_\rho(-\lambda, \mu) \;\sim\; \frac{1}{\lambda\, \Gamma(\mu - \frac{1}{\rho})}, \qquad \lambda \to +\infty, \qquad \forall \rho > \frac{1}{2}, \qquad \mu \neq \frac{1}{\rho}$$

ainsi $E_\rho(-\lambda, 2)$ est positive pour $\rho > \frac{1}{2}$ et λ suffisamment grand.
Et donc pour montrer que $E_\rho(-\lambda, 2)$ admet au moins deux zéros réels il suffit de trouver au moins $t_\rho > 0$ telle que $E_\rho(-t_\rho, 2) < 0$.

En remplaçant $z^{2-\alpha}$ par t_ρ dans l'identité (2.4), on aura

$$E_\rho(-t_\rho, 2) = \; 2\,\rho\; t_\rho^{\frac{-1}{2-\alpha}} \; exp\;(t_\rho^{\frac{1}{2-\alpha}} \; cos\;(\pi\rho)) \; cos\;(t_\rho^{\frac{1}{2-\alpha}} \; sin(\;\pi\rho) - \;\pi\rho) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\; t_\rho} - \Omega_\rho(t_\rho^{\frac{1}{2-\alpha}})$$

A présent, posons
$cos\;(t_\rho^{\frac{1}{2-\alpha}} \; sin(\;\pi\rho) - \;\pi\rho) = -1 \Rightarrow t_\rho^{\frac{1}{2-\alpha}} \; sin(\;\pi\rho) - \;\pi\rho = \pi \Rightarrow t_\rho = \left(\dfrac{(1+\rho)\pi}{sin(\;\pi\rho)}\right)^{2-\alpha}$

et vérifions que $E_\rho(-t_\rho, 2) < 0$ pour $t_\rho = \left(\dfrac{(1+\rho)\pi}{sin(\;\pi\rho)}\right)^{2-\alpha}$.
D'aprés le lemme (2.2.3) on a

$$F_\rho(z) = z\; E_\rho(-z^{2-\alpha}, 2) \Longrightarrow F_\rho(t_\rho^\rho) = t_\rho^\rho \; E_\rho(-t_\rho, 2).$$

Puisque $t_\rho^\rho > 0$, pour $0.5 < \rho \leq 0.6$ alors pour montrer que $E_\rho(-t_\rho, 2) < 0$ il suffit de montrer que $F_\rho(t_\rho^\rho) < 0$.
Soit $x = t_\rho^\rho$ alors on a

$$F_\rho(x) = -2\,\rho\; exp\,(x\; cos\,(\pi\rho)) + \frac{x^{\,\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - w_\rho(x)$$

avec $w_\rho(x)$ est une quantité positive d'aprés le lemme (2.2.2)
d'où

$$-2\,\rho\; exp\,(x\; cos\,(\pi\rho)) + \frac{x^{\,\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - w_\rho(x) < -2\,\rho\; exp\,(x\; cos\,(\pi\rho)) + \frac{x^{\,\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

donc il suffit de vérifier que

$$\frac{x^{\,\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} < 2\,\rho\; exp\,(x\; cos\,(\pi\rho)), \quad \alpha \in (0, \frac{1}{3}].$$

Si on essaye de majorer $\frac{x^{\,\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ par une valeur et minorer $exp\,(x\; cos\,(\pi\rho))$ par une autre valeur et on obtient que la première valeur est plus petite que la deuxième alors on aura l'existence.
D'une part, on a

$$\frac{1}{2} < \rho \leq \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < (1+\rho)\pi \leq \frac{8\pi}{5}$$

et

$$\frac{\pi}{2} < \pi\rho \leq \frac{3\pi}{5} \Rightarrow sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \leq sin\,(\pi\rho) < sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 < \frac{1}{sin\,(\pi\rho)} \leq \frac{1}{sin\,(\frac{3\pi}{5})}$$

d'où

$$\begin{aligned}
x = \frac{(1+\rho)\pi}{sin\,(\pi\rho)} > \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow ln\, x > ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\
&\Rightarrow (\alpha-1)\; ln\, x < (\alpha-1)\; ln\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad (car\; -1 < \alpha - 1 \leq \frac{-2}{3})\\
&\Rightarrow (\alpha-1)\; ln\, x \leq \frac{-2}{3}\; ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\
&\Rightarrow x^{\,\alpha-1} \leq \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{-2}{3}}
\end{aligned}$$

on a aussi

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \overset{\Gamma\searrow}{\Longrightarrow} \Gamma(\alpha) \geq \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})} < 0.38$$

donc

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} < 0.38 \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{-2}{3}} \Longrightarrow \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} < 0.14.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\pi}{2} < \pi\rho \leq \frac{3\pi}{5} \Rightarrow cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \leq cos\,(\pi\rho) < 0$$

et comme

$$\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{\frac{8\pi}{5}}{sin\,(\frac{3\pi}{5})}$$

alors

$$x\,cos\,(\pi\rho) \geq \frac{8\pi}{5}\,cotg\,(\frac{3\pi}{5})$$

donc

$$exp\,(x\,cos\,(\pi\rho)) \geq exp\left(\frac{8\pi}{5}\,cotg\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) > exp\,(-1.6328) > 0.17$$

d'où l'énoncé. ■

2.2.2.2 Localisation des valeurs propres

Lemme 2.2.5. $\forall\,\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$, *on a les inégalités suivantes :*

$$4 < \alpha\,R\,(\alpha) < 2.5\,ln^2\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

où $\quad R\,(\alpha) = 2\left(ln\,\frac{2}{\alpha} + ln\left(ln\,\frac{2}{\alpha}\right)\right) csc\,(\pi\,\varepsilon) \quad$ *et* $\quad \varepsilon = \rho - \frac{1}{2}.$

Démonstration. Commençons par la première inégalité.
On sais que $\quad sin\,(\pi\,\varepsilon) < \pi\,\varepsilon \quad$ d'où $\quad csc\,(\pi\,\varepsilon) = \dfrac{1}{sin\,(\pi\,\varepsilon)} > \dfrac{1}{\pi\,\varepsilon}$
et comme

$$\alpha \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} \geq 6 \Rightarrow ln\,\frac{2}{\alpha} \geq ln\,6$$

alors on a

$$R\,(\alpha) > \frac{2}{\pi\,\varepsilon}\,(ln\,6 + ln\,ln\,6) = \frac{4.6}{\pi\,\varepsilon} = \frac{4.6}{\pi}\,\frac{4-2\,\alpha}{\alpha}$$

et puis

$$\alpha\,R(\alpha) > \frac{4-2\,\alpha}{\pi} \geq \frac{10}{3}\,\frac{4.6}{\pi} = 4.883$$

d'où

$$\alpha\,R\,(\alpha) > 4.$$

Considérons maintenant la fonction f définie par : $\quad f\,(x) = ln\,x - \dfrac{x}{2}, \quad \forall x > 0$
alors $\quad f\,(x) < 0, \quad \forall x > 0 \Longrightarrow ln\,x < \dfrac{x}{2}, \quad \forall x > 0.$

En particulier pour $\quad x = ln\,\dfrac{2}{\alpha} > 0 \quad \left(\text{car} \quad 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{3}\right) \quad$ on a $\quad ln\left(ln\,\dfrac{2}{\alpha}\right) < \dfrac{ln\,\frac{2}{\alpha}}{2}$ donc

$$\begin{aligned}
R(\alpha) = 2\left(ln\,\frac{2}{\alpha} + ln\left(ln\,\frac{2}{\alpha}\right)\right) csc\,(\pi\,\varepsilon) &\Rightarrow R(\alpha) < \frac{2}{3\,\varepsilon}\left(ln\,\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2}\,ln\,\frac{2}{\alpha}\right) \\
&\Rightarrow R(\alpha) < \frac{1}{\varepsilon}\,ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) \qquad \left(\varepsilon = \frac{\alpha}{4-2\alpha}\right) \\
&\Rightarrow R(\alpha) < \frac{4-2\alpha}{\alpha}\,ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\alpha\,R(\alpha) < (4-2\alpha)\,ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) \overset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \alpha\,R(\alpha) < 4\,ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) \Longrightarrow \alpha\,R(\alpha) < (2.5)\,(1.6)\,ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

et puisque $\quad ln\,\dfrac{2}{\alpha} \geq ln\,6 \quad$ alors $\quad \alpha\,R(\alpha) < (2.5)\,ln^2\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)$. ■

Lemme 2.2.6. *$\forall\alpha \in [0,1]$, la fonction $E_\rho(z,2)$ ($\rho = \dfrac{1}{2-\alpha}$) n'a pas de zéros dans le disque $\quad |z| \leq \Gamma(4-\alpha)$.*

Démonstration. Puisque la fonction $E_\rho(z,2)$ est une fonction holomorphe dans le demi plan ($Re\,z > 0$) donc elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. Par suite, ses parties réelles et imaginaires vérifient les équations de Laplace c'est à dire elles sont deux fonctions harmoniques.
Pour montrer que $E_\rho(z,2)$ n'a pas de zéros dans le disque $|z| \leq \Gamma(4-\alpha)$ il suffit de montrer l'assertion suivante : $\quad Re\;E_\rho(z,2) > 0 \quad |z| \leq \Gamma(4-\alpha)$.
Comme $Re\;E_\rho(z,2)$ est harmonique dans le disque ouvert $|z| < \Gamma(4-\alpha)$ et le cercle de centre 0 et de rayon $\Gamma(4-\alpha)$ est une courbe fermée continue par morçeaux alors d'aprés le principe du maximum $Re\;E_\rho(z,2)$ atteint son minimum et son maximum sur le cercle et jamais dans le disque ouvert, pour cela il suffit de montrer que
$Re\;E_\rho(z,2) > 0 \quad$ pour $\quad z = \Gamma(4-\alpha)\,e^{i\,\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
Re\;E_\rho(\Gamma(4-\alpha)\,e^{i\,\varphi},2) &= Re\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^k(4-\alpha)}{\Gamma(\frac{k}{\rho}+2)}\,e^{\,i\,k\,\varphi}, \quad \rho = \frac{1}{2-\alpha} \\
&= Re\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^k(4-\alpha)}{\Gamma(2\,k+2-k\,\alpha)}\,e^{\,i\,k\,\varphi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^k(4-\alpha)}{\Gamma(2\,k+2-k\,\alpha)}\,cos\,(k\,\varphi)
\end{aligned}$$

Donc $\quad Re\;E_\rho(\Gamma(4-\alpha)\;e^{i\,\varphi},2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\;cos\,(k\,\varphi) \quad$ où les coefficients $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont définis par : $\quad a_k = \dfrac{\Gamma^k(4-\alpha)}{\Gamma(2\,k+2-k\,\alpha)} \quad (k \in \mathbb{N})$.

On a la propriété importante suivante :
La somme d'une série arbitraire $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\,(k\,\varphi)$, avec $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convexe décroissante et $a_k > 0$, est positive et elle est supérieur à $(\dfrac{a_0}{2} - a_1 + \dfrac{a_2}{2})$. (voir [14])

Montrons que $Re\ E_\rho(\Gamma(4-\alpha)\ e^{i\,\varphi}, 2) > 0$ c'est à dire les coefficients $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forme une suite convexe (voir annexe), décroissante et $a_k > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.
En d'autre terme, $\quad a_k > 0, \quad a_{k+1} < a_k$ et $\quad a_k - 2\,a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Puisque $\quad \alpha \in [0,1] \Rightarrow (4-\alpha) \in [3,4] \Rightarrow \Gamma(4-\alpha) > 0$
et $\quad (2k+2-k\alpha) \in [k+2, 2k+2] \Rightarrow \Gamma(2k+2-k\alpha) > 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$
alors $\quad a_k > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Montrons maintenant l'inégalité forte suivante :

$$2\,a_{k+1} \leq a_k,\ \forall k \geq 2. \tag{2.9}$$

On a

$$\begin{aligned}
2\,a_{k+1} \leq a_k &\Longleftrightarrow 2\,\frac{\Gamma^{k+1}(4-\alpha)}{\Gamma(2(k+1)+2-(k+1)\alpha)} \leq \frac{\Gamma^{k}(4-\alpha)}{\Gamma(2k+2-k\alpha)} \\
&\Longleftrightarrow 2\,\Gamma(4-\alpha)\,\Gamma(2k+2-k\alpha) \leq \Gamma(2(k+1)+2-(k+1)\alpha)
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $(\alpha = 1-t,\ \forall \alpha \in [0,1])$, on obtient

$$\begin{aligned}
& 2\,\Gamma(4-1+t)\,\Gamma(2k+2-k(1-t)) \leq \Gamma(2(k+1)+2-(k+1)(1-t)), \quad \forall t \in [0,1] \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\,\Gamma(3+t)\,\Gamma(k+2+kt) \leq \Gamma(k+3+(k+1)t), \qquad \forall t \in [0,1] \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{2\,\Gamma(3+t)\,\Gamma(k+2+kt)}{\Gamma(k+3+(k+1)t)} \leq 1 \qquad \forall t \in [0,1] \\
\overset{ln\,\nearrow}{\Longleftrightarrow}\quad & ln\,2 + ln\,\Gamma(3+t) + ln\,\Gamma(k+2+kt) - ln\,\Gamma(k+3+(k+1)t) \leq 0, \qquad \forall t \in [0,1]
\end{aligned}$$

ce qui revient à montrer que

$f_k(t) = ln\,\Gamma(k+3+(k+1)t) - ln\,\Gamma(k+2+kt) - ln\,\Gamma(3+t) - ln\,2 \geq 0, \qquad \forall t \in [0,1]$.

On a

$$\begin{aligned}
f_k(0) &= ln\,\Gamma(k+3) - ln\,\Gamma(k+2) - ln\,\Gamma(3) - ln\,2 \\
&= ln\,(k+2)\,\Gamma(k+2) - ln\,\Gamma(k+2) - ln\,2 - ln\,2 \\
&= ln\,(k+2) - ln\,4 \geq 0, \qquad \forall k \geq 2.
\end{aligned}$$

et

$f'_k(t) = (k+1)\ \psi(k+3+(k+1)t) - k\ \psi(k+2+kt) - \psi(3+t), \qquad \forall t \in [0,1]$

étudions le signe de la dérivée

$$\forall t \in [0,1],\ \forall k \geq 2 \quad \text{on a} \quad 3 \leq 3+t \leq 4 \quad \text{et} \quad k+2+kt \geq 4$$

d'où

$$3+t \leq k+2+k\,t \overset{\psi \nearrow}{\Longrightarrow} \psi(3+t) \leq \psi(k+2+kt) \Rightarrow -\psi(k+2+kt) \leq -\psi(3+t)$$

donc

$$f_k'(t) \geq (k+1)\,\psi(k+3+(k+1)t) - (k+1)\,\psi(k+2+kt) > 0$$

enfin, on a

$$\forall k \geq 2,\ \forall t \in [0,1],\ f_k(0) \geq 0 \text{ et } f_k'(t) > 0 \text{ donc } \forall k \geq 2,\ \forall t \in [0,1],\ f_k(t) > 0$$

d'où l'inégalité (2.9).

En tenant compte de l'inégalité (2.9) et puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k > 0$
alors $a_{k+1} - a_k \leq -a_{k+1} < 0$ d'où la décroissance de $\{a_k\}_{k\geq 2}$
et $a_k - 2\,a_{k+1} + a_{k+2} \geq a_{k+2} > 0$ d'où la convexité de $\{a_k\}_{k\geq 2}$.
Pour k=0 on a $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$ d'où $a_1 < a_0$ et $a_0 - 2a_1 + a_2 = a_2 > 0$.
Traitons maintenant le cas où k=1, on a d'abord

$$\forall t \in [0,1]\,,\ a_2 < a_1 \Leftrightarrow \Gamma^2(3+t) < \Gamma(4+2t) \Leftrightarrow \frac{\Gamma^2(3+t)}{\Gamma(4+2t)} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2\,ln\,\Gamma(3+t) - ln\,\Gamma(4+2t) < 0 \Leftrightarrow ln\,\Gamma(4+2t) - 2\,ln\,\Gamma(3+t) > 0$$

Soit la fonction f définie par : $\forall t \in [0,1]\,,\quad f(t) = ln\,\Gamma(4+2t) - 2\,ln\,\Gamma(3+t)$.
Montrons que $\forall t \in [0,1]\,,\ f(t)$ est positive.
On a

$$f(0) = ln\,\Gamma(4) - 2\,ln\,\Gamma(3) = ln\,6 - ln\,4 = ln\,\frac{3}{2} > 0.$$

et

$$f'(t) = 2\psi(4+2t) - 2\psi(3+t)$$

comme ψ est croissante et $\forall t \in [0,1]\,,\ 4+2t \geq 3+t$ alors $\forall t \in [0,1]\,,\ f'(t) \geq 0$.
Pour la deuxième inégalité, on a

$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 1 - 2\,\frac{\Gamma^2(3+t)}{\Gamma(4+2t)} + \frac{\Gamma^3(3+t)}{\Gamma(5+3t)}$$

aprés faire le changement de variable $\alpha = 1-t$.
Soit la fonction g définie par $\quad \forall t \in [0,1], g(t) = 1 - 2\,\dfrac{\Gamma^2(3+t)}{\Gamma(4+2t)} + \dfrac{\Gamma^3(3+t)}{\Gamma(5+3t)}$.
On a

$$g(0) = 1 - 2\,\frac{\Gamma^2(3)}{\Gamma(4)} + \frac{\Gamma^3(3)}{\Gamma(5)} = 1 - 2\,\frac{4}{6} + \frac{8}{24} = 0.$$

Pour montrer que $\forall t \in [0,1],\ g(t) \geq 0$ il suffit de montrer que g est croissante sur $[0,1]$.

Cherchons la dérivée :

$$
\begin{aligned}
g'(t) = -2 \, & \frac{2\Gamma'(3+t)\Gamma(3+t)\Gamma(4+2t) - 2\Gamma'(4+2t)\Gamma^2(3+t)}{\Gamma^2(4+2t)} \\
& + \frac{3\Gamma^2(3+t)\Gamma'(3+t)\Gamma(5+3t) - 3\Gamma'(5+3t)\Gamma^3(3+t)}{\Gamma^2(5+3t)} \\
& = 4\,\Gamma(3+t)^2 \, \frac{\psi(4+2t) - \psi(3+t)}{\Gamma(4+2t)} - 3\,\Gamma^3(3+t)\, \frac{\psi(5+3t) - \psi(3+t)}{\Gamma(5+3t)} \\
& = 4\, \frac{\Gamma^2(3+t)}{\Gamma(4+2t)} \left(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\right) - 3\, \frac{\Gamma^3(3+t)}{\Gamma(5+3t)} \left(\psi(5+3t) - \psi(3+t)\right) \\
& = 4\, a_2 \, \left(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\right) - 3\, a_3 \, \left(\psi(5+3t) - \psi(3+t)\right).
\end{aligned}
$$

L'une des propriètés de la fonction digamma est qu'elle est convexe sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire :

$$
\forall t \in \mathbb{R}^+, \; \psi'(t) \leq 0 \Longleftrightarrow \psi(a) - 2\psi(a+h) + \psi(a+2h) \leq 0, \quad h > 0
$$

En appliquant cette dernière inégalité pour $a = 3+t$ et $h = 1+t$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\psi(3+t) - 2\psi(4+2t) + \psi(5+3t) \leq 0 \Leftrightarrow \psi(3+t) - \psi(4+2t) &\leq \psi(4+2t) - \psi(5+3t) \\
\Leftrightarrow \psi(5+3t) - \psi(4+2t) &\leq \psi(4+2t) - \psi(3+t)
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\psi(5+3t) - \psi(3+t) &= \psi(5+3t) - \psi(4+2t) + \psi(4+2t) - \psi(3+t) \\
&\leq 2\left(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\right)
\end{aligned}
$$

Il en résulte que

$$
\begin{aligned}
g'(t) &\geq 4\, a_2 \, \left(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\right) - 6\, a_3 \, \left(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\right) \\
&= 4\, (a_2 - \frac{3}{2}\, a_3) \left(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\right).
\end{aligned}
$$

En tenant compte de l'inégalité (2.9) pour $k = 2$, on obtient

$$
2\, a_3 \leq a_2 \Leftrightarrow 2\, a_3 - \frac{1}{2}\, a_3 \leq a_2 - \frac{1}{2}\, a_3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\, a_3 - a_2 \leq -\frac{1}{2}\, a_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\, a_3 - a_2 < 0
$$

et on a $\psi(4+2t) - \psi(3+t) > 0$
d'où

$\forall t \in [0,1], \; g(t) \geq 0$ c'est à dire le résultat. ■

Lemme 2.2.7. $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{3}]$ $\left(\rho = \dfrac{1}{2-\alpha}\right)$ *la fonction f définie par*

$$\forall x \geq -\frac{1}{cos\,(\pi\rho)}, \qquad f(x) = x^{2\alpha-2} + x\ exp\,(x\ cos\pi\rho)$$

est décoissante.

Démonstration. Soit $x \geq -\dfrac{1}{cos\,(\pi\rho)}$, vérifions que $f'(x) < 0$

$$f(x) = x^{2\alpha-2} + x\ exp\,(x\ cos\pi\rho) \Rightarrow f'(x) = (2\alpha-2)\,x^{2\alpha-3} + (1 - x\ sin\,(\pi\rho))\ exp\,(x\ cos\pi\rho)$$

D'une part, on a

$$\frac{1}{2} < \rho \leq \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \pi\rho \leq \frac{3\pi}{5} \overset{cos\searrow}{\Rightarrow} cos\,(\frac{3\pi}{5}) \leq cos\,(\pi\rho) < cos\,(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{1}{cos\,(\pi\rho)} \leq \frac{1}{cos\,(\frac{3\pi}{5})} < 0$$

et

$$\frac{\pi}{2} < \pi\rho \leq \frac{3\pi}{5} \overset{sin\searrow}{\Longrightarrow} 0 < sin\,(\frac{3\pi}{5}) \leq sin\,(\pi\rho) < sin\,(\frac{\pi}{2})$$

d'où

$$tg\,(\pi\rho) \leq tg\,(\frac{3\pi}{5})$$

et puisque $x \geq -\dfrac{1}{cos\,(\pi\rho)} > 0$ alors

$$-sin\,(\pi\rho)x \leq tg\,(\pi\rho) \leq tg\,(\frac{3\pi}{5}) \Rightarrow 1 - sin\,(\pi\rho)x \leq 1 + tg\,(\frac{3\pi}{5}) < -2$$
$$\Rightarrow (1 - sin\,(\pi\rho)x)\ exp\,(x\ cos\,(\pi\rho)) < \ -2\,exp\,(x\ cos\,(\pi\rho) < 0.$$

D'autre part, comme $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{3}$ et $x > 0$ alors $(2\,\alpha - 2)\,x^{\,2\alpha-3} < 0$.
D'où la décroissance de f pour $x \geq -\dfrac{1}{cos\,(\pi\rho)}$. ∎

Théorème 2.2.8. $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{3}]$, *toutes les valeurs propres réelles du problème* (2.2) *sont dans l'intervalle* $(\Gamma(4-\alpha), R^{\,2-\alpha}(\alpha))$
où :

$$R\,(\alpha) = 2\,\left(ln\,\frac{2}{\alpha} + ln\,ln\,\frac{2}{\alpha}\right)\,csc\,(\pi\,\varepsilon), \qquad \varepsilon = \rho - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{4 - 2\,\alpha}.$$

Démonstration. A cause de la positivité des coefficients de Taylor de la fonction $E_\rho(z, 2)$, l'équation (2.3) n'a pas de racines négatives.
L'absence des racines dans l'intervalle fermé $[0, \Gamma(4-\alpha)]$ s'en déduit d'aprés le lemme précédent.
Montrer l'absence des racines de l'équation (2.3) dans $[R^{\,2-\alpha}, +\infty)$ est équivalent à prouver que $F_\rho(x)$ est de signe constant pour $x \geq R\,(\alpha)$.

On a
$$F_\rho(x) = 2\,\rho\; exp\,(x\; cos\,\pi\,\rho)\; cos\,(x\; sin\,\pi\,\rho - \pi\,\rho) + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - w_\rho(x)$$
où
$$|w_\rho(x)| \leq \frac{2}{\pi}\;\; x^{2\,\alpha-3}\; (sin\,(2\,\pi\,\alpha) + \frac{1}{2}\; sin\,(\pi\,\alpha))$$
comme $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$ alors
$$0 < sin\,(2\,\pi\,\alpha) < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{2}\; sin\,(\pi\,\alpha) < \frac{1}{2}$$
d'où
$$-\frac{2}{\pi}\; (sin\,(2\,\pi\,\alpha) + \frac{1}{2}\; sin\,(\pi\,\alpha)) > -\frac{3}{\pi} > -1$$
et on a aussi
$$2\,\rho\; cos\,(x\;\; sin\,\pi\,\rho - \pi\,\rho) > -1 \quad \text{car} \quad \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{3}{5}$$
il en résulte que
$$F_\rho(x) > -exp\,(x\; cos\,\pi\,\rho) + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - x^{2\,\alpha-3}$$
si on arrive à montrer que
$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} > exp\,(x\; cos\,\pi\,\rho) + x^{2\,\alpha-3}, \quad \forall x \geq R\,(\alpha)$$
alors on aura le résultat.
En multipliant les deux cotés de l'inégalité précédente par $x > 0$, on obtient
$$x^{2\,\alpha-2} + x\; exp\,(-x\;\; sin\,\pi\,\varepsilon) < \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)},\; \forall x \geq R\,(\alpha), 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$
Or $\forall x \geq R\,(\alpha), 0 < \alpha < \dfrac{1}{3}$ on a $\alpha < \dfrac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$. En effet,
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \alpha - \psi(1)\;\alpha^2 + \;o\,(\alpha^3) = \alpha + \gamma\;\alpha^2 + \;o\,(\alpha^3)$$
et
$$x^{\,\alpha} = e^{\,\alpha\, ln\, x} = 1 + ln\, x\;\alpha + \frac{ln^2\, x}{2}\;\alpha^2 + \;o\,(\alpha^3)$$
d'où
$$\frac{x^{\,\alpha}}{\Gamma(\alpha)} = \alpha + (\gamma + ln\,x)\;\alpha^2 + (\gamma\; ln\,x + \frac{ln^2\,x}{2})\;\alpha^3 + \;o\,(\alpha^4)$$
puisque $x \geq R\,(\alpha) > \dfrac{4}{\alpha}$ d'aprés le lemme (2.2.5) alors $ln\,x > 2\,ln\,2 - ln\,\alpha > 0$ car

$0 < \alpha < \dfrac{1}{3}$ et on a $\gamma = 0.5772\ldots$ (la constante d'Euler) d'où

$$\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} - \alpha > (\gamma + ln\, x)\, \alpha^2 + (\gamma\, ln\, x + \frac{ln^2 x}{2})\, \alpha^3 > 0.$$

Alors montrons l'inégalité suivante :

$$x^{2\alpha-2} + x\; exp\,(x\; cos\pi\rho) < \alpha, \quad \forall x \geq R\,(\alpha),\; 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

Puisque la fonction $f(x) = x^{2\alpha-2} + x\; exp\,(x\; cos\pi\rho)$, est décroissante $\forall x \geq -\dfrac{1}{cos\,(\pi\rho)}$ d'aprés le lemme (2.2.7) et $R\,(\alpha) > -\dfrac{1}{cos\,(\pi\,\rho)}$ alors il suffit de montrer l'inégalité pour $x = R\,(\alpha)$.

C'est à dire $\quad R\,(\alpha)^{2\,\alpha-2} + R\,(\alpha)\; exp\,(R\,(\alpha)\; cos\,(\pi\,\rho)) < \alpha, \quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{3}$

où $\quad R\,(\alpha) = -2\,\left(ln\,\dfrac{2}{\alpha} + ln\,\left(ln\,\dfrac{2}{\alpha}\right)\right)\,\dfrac{1}{cos\,(\pi\,\rho)}.$

On a

$$R\,(\alpha) > -\frac{1}{cos\,(\pi\,\rho)} \geq -\frac{1}{cos\,\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)} > 3 \Rightarrow ln\,R\,(\alpha) > 0$$

de plus $\qquad \alpha \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow 2\,\alpha - 2 \leq -\dfrac{4}{3} < -1$

alors

$$(2\,\alpha - 2)\; ln\,R\,(\alpha) < -\; ln\,R\,(\alpha) \Rightarrow R^{2\,\alpha-2}\,(\alpha) < R^{-1}\,(\alpha)$$

et

$$exp\,(R\,(\alpha)\; cos\,(\pi\,\rho)) = exp\,\left(-2\,\left(ln\,\frac{2}{\alpha} + ln\,ln\,\frac{2}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{-2}\; ln^{\,-2}\,\left(\frac{2}{\alpha}\right) = \frac{1}{4}\,\alpha^2\; ln^{\,-2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

d'où

$$R\,(\alpha)^{2\,\alpha-2} + R\,(\alpha)\; exp\,(R\,(\alpha)\; cos\,(\pi\,\rho) < R^{-1}\,(\alpha) + R\,(\alpha)\; 0.25\;\alpha^2\; ln^{-2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

Or d'aprés le lemme (2.2.5) on a $\quad \alpha\; R\,(\alpha)\; ln^{-2}\left(\dfrac{2}{\alpha}\right) \leq 2.5 \quad$ et $\quad R^{-1}(\alpha) < 0.25\;\alpha.$

En tenant compte de ces manipulations, on obtient

$$R^{-1}\,(\alpha) + 0.25\;\alpha^2\; ln^{-2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)\; R\,(\alpha) < 0.25\;\alpha\; +\; 0.625\;\alpha < \alpha.$$

Ce qui achève la démonstration. $\blacksquare$

Lemme 2.2.9. $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{6}]$ *et* $\rho = \dfrac{1}{2-\alpha}$, *on a l'inégalité suivante :*

$$\pi\,\rho < sin^2\,(\pi\rho)\,\Gamma^{\rho}\,(4-\alpha).$$

Démonstration. D'une part, on a

$$\begin{aligned}
0 < \alpha \leq \frac{1}{6} &\Longleftrightarrow \frac{11}{6} \leq 2-\alpha < 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{6}{11} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} < \pi\,\rho \leq \frac{6\,\pi}{11} \\
&\overset{sin\searrow}{\Longleftrightarrow} sin\left(\frac{6\,\pi}{11}\right) \leq sin\,(\pi\,\rho) < sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{sin\nearrow}{\Longleftrightarrow} sin^2\left(\frac{6\,\pi}{11}\right) \leq sin^2\,(\pi\,\rho) \\
&\Longleftrightarrow sin^{-2}\,(\pi\,\rho) \leq sin^{-2}\left(\frac{6\,\pi}{11}\right) \Longleftrightarrow (\pi\,\rho)\;sin^{-2}\,(\pi\,\rho) \leq \frac{6\,\pi}{11}\;sin^{-2}\left(\frac{6\,\pi}{11}\right) < 1.8.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
0 < \alpha \leq \frac{1}{6} &\Longrightarrow \frac{23}{6} \leq 4-\alpha < 4 \overset{\Gamma\nearrow}{\Longrightarrow} \Gamma\,(4-\alpha) \geq \Gamma\left(\frac{23}{6}\right) > 1 \\
&\overset{ln\nearrow}{\Longrightarrow} ln\,\Gamma\,(4-\alpha) \geq ln\,\Gamma\left(\frac{23}{6}\right) > 0 \overset{\rho>\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \rho\;ln\,\Gamma\,(4-\alpha) \geq \frac{1}{2}\;ln\,\Gamma\left(\frac{23}{6}\right) \\
&\overset{e\nearrow}{\Longrightarrow} \Gamma^{\rho}\,(4-\alpha) \geq \sqrt{\Gamma\left(\frac{23}{6}\right)} \geq 2.
\end{aligned}$$

D'où l'énoncé. ■

Soient $R_1(\alpha) = 2\;ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\;\dfrac{1}{sin\,(\pi\,\varepsilon)}$ et $x_n(\alpha) = \dfrac{\pi\,(n+\rho)}{sin\,(\pi\,\rho)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.2.10. $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{6}]$, *toutes les valeurs propres du problème* (2.2) $\lambda_n(\alpha)$ *qui se situent dans le disque* $|\lambda| \leq R_1^{2-\alpha}(\alpha)$ *sont réelles et elles sont ordonnées dans l'ordre croissant commençant par* $\lambda_1(\alpha)$, *elles satisfont les inégalités suivantes :*

$$x_{n-1}^{2-\alpha}(\alpha) < \lambda_n(\alpha) < x_n^{2-\alpha}(\alpha).$$

Démonstration. D'aprés le lemme (2.2.6), l'équation (2.3) n'a pas de racines pour $|\lambda| \leq \Gamma(4-\alpha)$ et d'aprés l'article [5], elle n'a pas de racines en dehors de l'angle $|arg\lambda| \leq \dfrac{\pi\,\alpha}{2}$.
Alors, on restreint notre étude au compact suivant :

$$D_\alpha = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/\Gamma(4-\alpha) \leq |\lambda| \leq R_1^{2-\alpha}(\alpha), |arg\lambda| \leq \frac{\pi\alpha}{2}\right\}$$

En posant, $z = \lambda^{\rho}$, le compact D_α devient :

$$G_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C}/\Gamma^{\rho}(4-\alpha) \leq |z| \leq R_1(\alpha), |arg\;z| \leq \pi\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Puisque $F_\rho(z) = z\ E_\rho(-z^{2-\alpha}, 2)$ alors il suffit de démontrer que toutes les racines de $F_\rho(z)$ noté par z_m qui se situent dans G_α sont réelles, simples, ordonnées dans l'ordre croissant et elles satisfont $x_{m-1} < z_m < x_m$.

Soit $M(\alpha)$ le plus petit nombre naturel M telle que $R_1(\alpha) \leq x_M$, notons par $\Pi_m = \{z \in \mathbb{C} / x_{m-1} \leq Re\, z \leq x_m\}$ et $\Pi_\alpha = \bigcup_{m=1}^{M(\alpha)} \Pi_m$ alors on a $G_\alpha \subset \Pi_\alpha$.
En effet, Soit $z \in G_\alpha$ alors $\Gamma^\rho(4-\alpha) \leq |z| \leq R_1(\alpha)$ et $|arg\ z| \leq \pi(\rho - \frac{1}{2})$.
Pour montrer que $z \in \Pi_\alpha$ il suffit de montrer qu'il existe $m \in \{1, \ldots, M(\alpha)\}$ telle que $x_{m-1} \leq Re\, z \leq x_m$.
Soit $z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = |z|\ e^{i(arg\ z)} \Longleftrightarrow Re\ z = |z|\ cos\,(arg\ z)$
D'une part, on a

$$\begin{aligned}
0 < \alpha \leq \frac{1}{6} \Longleftrightarrow \frac{11}{6} \leq 2-\alpha < 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{6}{11} \Longleftrightarrow 0 < \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi \leq \frac{\pi}{22} \\
\overset{cos\searrow}{\Longleftrightarrow} cos\,(arg\ z) \geq cos\left(\pi\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\right) \\
\overset{z\in G_\alpha}{\Longleftrightarrow} |z|\ cos\,(arg\ z) \geq \Gamma^\rho(4-\alpha)\ cos\left(\pi\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\right) \\
\Longleftrightarrow Re\ z \geq \Gamma^\rho(4-\alpha)\ sin\,(\pi\,\rho) > \frac{\pi\,\rho}{sin\,(\pi\,\rho)}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme (2.2.9). Alors $\exists\ m = 0 /\ Re\ z \geq x_0$ avec $x_0 = \dfrac{\pi\rho}{sin\ \pi\rho}$.
D'autre part,

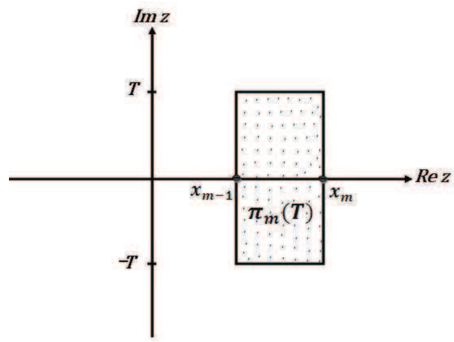
$$Re\ z = |z|\ cos(arg\ z) \leq R_1(\alpha)\ cos(arg\ z) \leq R_1(\alpha) \Longrightarrow \exists\ M(\alpha) /\ Re\ z \leq x_M.$$

D'où l'inclusion.

Maintenant le but sera atteint si on montre que toutes les racines de $F_\rho(z)$ qui se situent dans Π_α vérifient que exactement un zéro est contenu dans chaque intervalle (x_{m-1}, x_m), pour $1 \leq m \leq M(\alpha)$.

Puisque $F_\rho(z)$ est à valeurs réelles pour $x > 0$ alors le zéro est réel c'est à dire qu'il est dans (x_{m-1}, x_m).

Soit $\Pi_m(T) = \{z \in \Pi_m\ /\ |Im\ z| \leq T\}$ comme il est montré dans la figure ci-contre.
T peut être choisi arbitrairement grand.



Montrons l'inégalité suivante :

$$|f_\rho(z)| > \left|\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right| + |w_\rho(z)| \quad sur \quad \partial\Pi_m(T) \tag{2.10}$$

Tout d'abord $\forall x \geq x_0(\rho),\ \exists T \geq \dfrac{3\,x}{sin\,\pi\rho} \in \mathbb{R}$ tel qu'on a l'inégalité (2.10) pour $z = x \pm i\,T$.
En effet, d'une part on a

$$\begin{aligned}|f_\rho(z)| &= |2\,\rho\,exp\,(z\,cos\,\pi\,\rho)\,cos\,(z\,sin\,\pi\,\rho - \pi\,\rho)| \\ &= 2\,\rho\,\ |exp\,(x\,cos\,\pi\,\rho \pm i\,T\,cos\,\pi\,\rho)|\ \ |cos\,((x \pm i\,T)\,sin\,\pi\,\rho - \pi\,\rho)| \\ &= 2\,\rho\,exp\,(x\,cos\,\pi\,\rho)\,|cos\,((x - \pi\,\rho) \pm i\,(T\,sin\,\pi\,\rho))|\end{aligned}$$

comme $2\,\rho > 1,\ cos\,\pi\,\rho > -1$ et $|cos\,(\xi \pm i\,\eta)| \geq |sinh\,\eta|\,,\ \eta,\ \xi \in \mathbb{R}$ alors

$$|f_\rho(z)| > e^{-x}\ \ |sinh\,(T\,sin\,\pi\rho)|$$

or $T \geq \dfrac{3\,x}{sin\,\pi\,\rho}$ et $sinh$ est une fonction croissante d'où

$$|f_\rho(z)| > e^{-x}\,sinh\,(3\,x) = \frac{e^{2\,x} - e^{-4\,x}}{2} > 2, \qquad \forall x \geq 1.$$

D'autre part, on a $|z^{\,\alpha-1}| = |z|^{\,\alpha-1} = (x^2 + T^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}$

comme $T \geq \dfrac{3\,x}{sin\,\pi\rho}$ et $x \geq 1$ alors $x^2 + T^2 > 10\,x^2 > 10$

ce qui donne $\dfrac{\alpha-1}{2}\,ln\,(x^2 + T^2) < \dfrac{-5}{12}\,ln\,10 \ \left(\text{car } 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{6}\right)$ d'où $|z^{\,\alpha-1}| < 1$

et $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{6} \Longrightarrow \Gamma(\alpha) > 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} < 1 \Longrightarrow \dfrac{|z^{\,\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha)} < 1$

et on a aussi $|w_\rho(z)| < 1$ d'aprés lemme (2.2.3).

Il en résulte que $\dfrac{|z^{\,\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha)} + |w_\rho(z)| < 2.$
Ce qu'il fallait démontrer.
Maintenant on montre l'inégalité (2.10) sur les verticales $Re\,z = x_m\,,\ 0 \leq m \leq M(\alpha)$.
En utilisant l'estimation suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{\alpha}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} < 1.1\,\alpha$$

et le fait que

$$|w_\rho(z)| \leq min\,(1, 5\,\alpha)\,x^{2\,\alpha-3} < 5\,\alpha\,x^{2\,\alpha-3} \ \text{ car } \ \alpha \in (0, \frac{1}{6}]$$

on aura

$$5\,\alpha\, x_m^{2\,\alpha-3} + 1.1\,\alpha\, x_m^{\alpha-1} < \left|\frac{z^{\,\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right| + |w_\rho(z)|\,.$$

et comme pour $z = x_m \pm i\,y$ et $x_m(\alpha) = \dfrac{\pi\,(m+\rho)}{sin\,(\pi\,\rho)}$, on a

$$\begin{aligned}
|f_\rho(z)| &= |2\,\rho\, exp\,(\,(x_m + i\,y)\, cos\,(\pi\,\rho))\, cos\,((x_m + i\,y)\, sin\,(\pi\,\rho) - \pi\,\rho)| \\
&= 2\,\rho\, exp\,(x_m\, cos\,(\pi\,\rho))\ |cos\,(\pi\, m + i\,y\, sin\,(\pi\,\rho)| \\
&= 2\,\rho\, exp\,(x_m\, cos\,(\pi\,\rho)\, ch\,(y\, sin\,(\pi\,\rho)) > 2\,\rho\, exp\,(x_m\, cos\,(\pi\,\rho)).
\end{aligned}$$

Alors il suffit de montrer l'inégalité suivante :

$$5\,\alpha\, x_m^{2\,\alpha-3} + 1.1\,\alpha\, x_m^{\alpha-1} < 2\,\rho\, exp\,(x_m\, cos\,(\pi\rho)). \tag{2.11}$$

Traitons d'abord le cas $m = 0$

$$5\,\alpha\, x_0^{2\,\alpha-3}+1.1\,\alpha\, x_0^{\alpha-1} < 2\,\rho\, exp(\,x_0\, cos\,(\pi\,\rho)) \Leftrightarrow 5\,\alpha\, x_0^{2\,\alpha-3}+1.1\,\alpha\, x_0^{\alpha-1} < 2\,\rho\, exp\,(\pi\,\rho\, cotg\,(\pi\,\rho))$$

On a $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{6}$ et $x_0 = \dfrac{\pi\,\rho}{sin\,(\pi\,\rho)}$ donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} < \rho \leq \frac{6}{11} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \pi\rho \leq \frac{6\,\pi}{11} \overset{sin\searrow}{\Rightarrow} sin\,\frac{6\,\pi}{11} < sin\,(\pi\,\rho) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{sin\,(\pi\rho)} \geq 1 \\
&\qquad \Rightarrow \frac{\pi\,\rho}{sin\,(\pi\,\rho)} > \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} \overset{ln\nearrow}{\Rightarrow} ln\, x_0 > ln\,\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

et puisque $-3 < 2\,\alpha - 3 \leq -\dfrac{8}{3}$ et $-1 < \alpha - 1 \leq -\dfrac{5}{6}$
alors

$$(2\,\alpha-3)\, ln\, x_0 < (2\,\alpha-3)\, ln\,\frac{3}{2} \leq -\frac{8}{3}\, ln\,\frac{3}{2} \overset{e\nearrow}{\Longleftrightarrow} x_0^{2\alpha-3} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{8}{3}}$$

et

$$(\alpha-1)\, ln\, x_0 < (\alpha-1)\, ln\,\frac{3}{2} \leq -\frac{5}{6}\, ln\,\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_0^{\alpha-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}}.$$

Par conséquent,

$$5\,\alpha\, x_0^{2\,\alpha-3} + 1.1\,\alpha\, x_0^{\alpha-1} \leq \frac{5}{6}\,\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{8}{3}} + 0.2\,\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}} < 0.5$$

et

$$2\,\rho\, exp\,(\,\pi\,\rho\, cotg\,(\pi\,\rho)) > 0.7, \qquad \forall\,\rho \in \left(\frac{1}{2}, \frac{6}{11}\right].$$

D'où l'inégalité (2.11) pour $m = 0$.

Pour $m \geq 1$, on a $x_m = \dfrac{\pi\,(m+\rho)}{sin\,(\pi\,\rho)}$, $1 \leq m \leq M(\alpha)$
alors

$$x_m \geq x_1 > \pi\,(1+\rho) > \frac{3\pi}{2} > 4.7$$

d'où

$$5\,x_m^{2\,\alpha-3} \leq 5\,x_1^{\alpha-2}\,x_m^{\alpha-1} < 5\,(4.7)^{-\frac{11}{6}}\,x_m^{\alpha-1} < 0.3\,x_m^{\alpha-1}$$

En tenant compte de cette estimation, pour $m \geq 1$, l'inégalité (2.11) devient

$$1.4\,\alpha\,x_m^{\alpha-1} < 2\,\rho\,exp\,(\,x_m\,cos\,(\pi\,\rho)), \qquad 1 \leq m \leq M(\alpha) \tag{2.12}$$

Pour montrer cette dernière inégalité traitons deux cas :
Soit $x_m < -\dfrac{1}{cos\,(\pi\,\rho)}$ alors $\forall\,\rho \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{6}{11}\right]$ on a

$$cos\,(\pi\,\rho)\;x_m > -1 \Longrightarrow 2\,\rho\,exp\,(cos\,(\pi\,\rho)\;x_m) > e^{-1}.$$

Or $x_m > 4.7 \Leftrightarrow ln\,x_m > ln\,4.7$ et puisque $-1 < \alpha - 1 \leq -\dfrac{5}{6}$ alors

$$x_m^{\alpha-1} < (4.7)^{-\frac{5}{6}} < 1 \Longleftrightarrow 1.4\,\alpha\,x_m^{\alpha-1} < 1.4\,\alpha \leq \frac{1.4}{6} < 0.3 < e^{-1}.$$

D'où l'inégalité (2.11).
Soit $x_m \geq -\dfrac{1}{cos\,\pi\rho}$. En multipliant les deux cotés de (2.11) par x_m, on obtient

$$1.4\,\alpha\,x_m^{\alpha} < 2\,\rho\,x_m\,exp\,(x_m\,cos\,(\pi\,\rho)), \qquad 1 < m \leq M(\alpha). \tag{2.13}$$

Considérons la fonction f définie par $\forall\,x \geq -\dfrac{1}{cos\,\pi\rho}$, $f(x) = x\,exp\,(x\,cos\,(\pi\,\rho))$ alors f est une fonction décroissante.

En effet, on a $f'(x) = \;(1 - x\,sin\,\pi\rho)\;exp\,(x\,cos\,(\pi\,\rho))$
et

$$x \geq -\frac{1}{cos\,(\pi\,\rho)} \Leftrightarrow -x\,sin\,(\pi\,\rho) \leq tg\,(\pi\,\rho) \Leftrightarrow 1 - x\,sin\,(\pi\,\rho) \leq 1 + tg\,(\pi\,\rho) \leq 1 + tg\,(\frac{6\,\pi}{11}) < 0$$

d'où $\quad \forall\,x \geq -\dfrac{1}{cos\,(\pi\,\rho)}, \quad f'(x) < 0.$
Et la fonction g définie par $\forall\,x \geq -\dfrac{1}{cos\,\pi\rho}$, $g(x) = x^{\alpha}$ est croissante car on a

$$g'(x) = \alpha\,x^{\alpha-1} > 0, \qquad \forall x \geq -\frac{1}{cos\,(\pi\,\rho)}.$$

Alors il suffit de montrer (2.13) pour $m = M(\alpha)$.

On a $R_1(\alpha) = -2\, ln\, \frac{1}{\alpha}\, \left(\frac{1}{cos\,(\pi\,\rho)}\right)$ avec $x_{M(\alpha)-1} < R_1(\alpha) \leq x_{M(\alpha)}$ par le choix de $M(\alpha)$.
Donc

$$x_{M(\alpha)} < R_1(\alpha) + (x_{M(\alpha)} - x_{M(\alpha)-1}) = R_1(\alpha) + \frac{\pi}{sin\,(\pi\,\rho)} < \frac{3}{2}\, R_1(\alpha)$$

$$\begin{aligned} x_{M(\alpha)} &\leq \frac{3}{2}\, 2\, ln\, \frac{1}{\alpha}\, \left(\frac{1}{sin\,(\pi\,(\rho-\frac{1}{2}))}\right) \leq 3\, ln\, \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\pi\,(\rho-\frac{1}{2})}\right) \qquad \text{car } 0 < \rho - \frac{1}{2} < \frac{1}{6} \\ &\leq 3\, ln\, \frac{1}{\alpha}\, \left(\frac{1}{3\,(\rho-\frac{1}{2})}\right) \leq \frac{4-2\alpha}{\alpha}\, ln\, \frac{1}{\alpha} \leq \frac{4}{\alpha}\, ln\, \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Or on a $\forall\, 0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$, $\left(\frac{1}{\alpha} \geq 6\right)\, 3\, ln\, \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha}$. D'où

$$\begin{aligned} x_{M(\alpha)} \leq \frac{4}{3\,\alpha^2} &\Longleftrightarrow ln\, x_{M(\alpha)} \leq ln\, \frac{4}{3\,\alpha^2} \\ &\overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha\, ln\, x_{M(\alpha)} \leq \alpha\, ln\, \frac{4}{3\,\alpha^2} \leq \frac{1}{6}\, ln\, \frac{4}{3\,\alpha^2} \\ &\Longleftrightarrow x^{\alpha}_{M(\alpha)} \leq (48)^{\frac{1}{6}} \\ &\Longleftrightarrow 1.4\, \alpha\, x^{\alpha}_{M(\alpha)} \leq 1.4\, \alpha\, (48)^{\frac{1}{6}} < 2.8\, \alpha. \end{aligned}$$

Maintenant essayons de minorer le coté droit de (2.13)
On a

$$\forall\, \rho \in \left(\frac{1}{2}, \frac{6}{11}\right], \quad 2\, \rho\, x_{M(\alpha)}\, exp\,(x_{M(\alpha)}\, cos\, \pi\rho) \geq R_1(\alpha)\, exp\,(x_{M(\alpha)}\, cos\, \pi\rho)$$

Puisque $x_{M(\alpha)} < R_1(\alpha) + \frac{\pi}{sin\, \pi\rho}$ et $cos\, \pi\rho < 0$ alors

$$cos\,(\pi\rho)\, x_{M(\alpha)} > R_1(\alpha)\, cos\, \pi\rho + \pi\, cotg\, \pi\rho$$

$$\Longleftrightarrow exp\,(cos\, \pi\rho\, x_{M(\alpha)}) > exp\,(R_1(\alpha)\, cos\, \pi\rho + \pi\, cotg\, \pi\rho).$$

D'où

$$\begin{aligned} 2\, \rho\, x_{M(\alpha)}\, exp\,(cos\, \pi\rho\, x_{M(\alpha)}) &> R_1(\alpha)\, exp\,(R_1(\alpha)\, cos\, \pi\rho + \pi\, cotg\, \pi\rho) \\ &= -2\, ln\, \left(\frac{1}{\alpha}\right)\, \frac{1}{cos\, \pi\rho}\, exp\,(-2\, ln\, \frac{1}{\alpha} + \pi\, cotg\, \pi\rho) \\ &= -2\, \alpha^2\, ln\, \left(\frac{1}{\alpha}\right)\, \frac{1}{cos\, \pi\rho}\, exp\,(\pi\, cotg\, \pi\rho) \\ &= 2\, \alpha^2\, ln\, \left(\frac{1}{\alpha}\right)\, \frac{1}{sin\, \pi(\rho-\frac{1}{2})}\, exp\,(\pi\, cotg\, \pi\rho) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2\,\rho\, x_{M(\alpha)}\; exp\,(cos\;\pi\rho\; x_{M(\alpha)}) &> \frac{2\,\alpha^2}{\pi\;(\rho-\frac{1}{2})}\; ln\;\left(\frac{1}{\alpha}\right)\; exp\,(\pi\; cotg\;\pi\rho)\\
&> \frac{8-4\alpha}{\pi}\;\alpha\; ln\;\left(\frac{1}{\alpha}\right)\; exp\,(\pi\; cotg\;\frac{6\pi}{11})\\
&> \frac{8}{\pi}\;0.63\;\alpha\; ln\;\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 1.6\;\alpha\; ln\;6 > 2.8\;\alpha.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (2.11) pour $1 \le m \le M(\alpha)$. Par suite l'inégalité (2.10).

Evidemment, la fonction $f_\rho(z)$ a un zéro unique dans $\Pi_m,\; m \in \mathbb{N}$.
En effet, on a $f_\rho(z) = 2\rho\; exp\,(z\; cos\;\pi\rho)\; cos\,(z\; sin\;\pi\rho - \pi\rho)$
alors

$$\begin{aligned}
f_\rho(z) = 0 \Longleftrightarrow cos\,(z\; sin\;\pi\rho - \pi\rho) = 0 &\Longleftrightarrow z\; sin\;\pi\rho - \pi\rho = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{N}\\
\Longleftrightarrow z = \left(\frac{2k+1}{2} + \rho\right)\;\frac{\pi}{sin\;\pi\rho}, &\quad k \in \mathbb{N}\\
\overset{k=k-1}{\Longleftrightarrow} z_k = \left(\frac{2k-1}{2} + \rho\right)\;\frac{\pi}{sin\;\pi\rho}, &\quad k \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*\;\; x_{k-1} \le z_k \le x_k,$ avec $x_k = \dfrac{\pi(k+\rho)}{sin\;\pi\rho}.$

On a $F_\rho(z) = f_\rho(z) + \dfrac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - w_\rho(z).$

Comme $F_\rho(z)$ et $f_\rho(z)$ sont analytiques sur et dans $\Pi_m(T)$ et en tenant compte de l'inégalité (2.10) alors le théorème de Rouché (Voir annexe) nous affirme que $f_\rho(z)$ et $\left[f_\rho(z) + \dfrac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - w_\rho(z)\right]$ ont le même nombre de zéros à l'intèrieur de $\Pi_m(T)$.
Par conséquent, les zéros de $F_\rho(z)$ sont réelles, positives, simples et ordonnés dans l'ordre croissant. ■

2.2.2.3 Minimisation des valeurs propres

Théorème 2.2.11. $\forall\;\alpha \in (0, 0.1]$, *toutes les valeurs propres du problème* (2.2) *se situent dans le disque* $|\lambda| \le \alpha^{-2}$ *sont réelles et positives.*
Elle sont localisées dans l'ordre croissant et elles satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\pi\,(n+\varepsilon)}{cos\;\pi\,\varepsilon}\right)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < \left(\frac{\pi\,(n+2\,\varepsilon)}{cos\;\pi\,\varepsilon}\right)^{2-\alpha} \qquad si\; n\; est\; impair\\
&\left(\frac{\pi\,n}{cos\;\pi\,\varepsilon}\right)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < \left(\frac{\pi\,(n+\varepsilon)}{cos\;\pi\,\varepsilon}\right)^{2-\alpha} \qquad si\; n\; est\; pair
\end{aligned} \tag{2.14}$$

avec $\quad \varepsilon = \dfrac{\alpha}{4-2\,\alpha} = \rho - \dfrac{1}{2}.$

Démonstration. D'aprés le théorème (2.2.10), on a les valeurs propres du problème (2.2) sont dans le disque $|\lambda| \leq R_1^{2-\alpha}$ et puisque pour $\alpha \in (0, 0.1]$ on a

$$\begin{aligned} R_1^{2-\alpha} &> \left(2\, ln\, \frac{1}{\alpha}\, (\pi\varepsilon)^{-1}\right)^{2-\alpha} = \left(\frac{8-4\alpha}{\pi}\, \alpha^{-1}\, ln\, \frac{1}{\alpha}\right)^{2-\alpha} \\ &> \left(\frac{7}{\pi}\, \alpha^{-1}\, ln\, 10\right)^{2-\alpha} > \left(4\, \alpha^{-1}\right)^{2-\alpha} = 16\, \alpha^{-2}\, \left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\alpha} > 4\, \alpha^{-2}. \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation suivante : $\min\limits_{\alpha\in(0,1]} \left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\alpha} = \frac{1}{4}$
alors les valeurs propres du problème (2.2) sont dans le disque $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$.
La réalité et la positivité des valeurs propres qui se situent dans le disque $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$ s'en déduit d'aprés le théorème (2.2.10).
D'aprés la définition de $x_n(\alpha)$, on a les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in (0,1), \quad x_{n-1}(\alpha) < \frac{\pi\, n}{sin\, \pi\, \rho} = \pi\, n\, sec\, (\pi\, \varepsilon) < \pi\, (n{+}2\, \varepsilon)\, sec\, (\pi\, \varepsilon) < x_n(\alpha)$$

où on a utilisé le fait que : $\rho \in (-\frac{1}{2}, 0)$ et $sec\, (\pi\, \varepsilon) = csc\, (\pi\, \rho)$.
Donc les inégalités (2.14) donnent plus de préçision que celles du théorème (2.2.10).
Puisque on s'intéresse aux valeurs propres λ_n qui se situent dans le disque $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$, alors on a

$$\pi\, n\, sec\, \pi\, \varepsilon \leq \alpha^{-2\, \rho}. \tag{2.15}$$

Pour montrer (2.14), il suffit de vérifier que la fonction $F_\rho(z)$ a différents signes au paire de points :

$(\pi\, (n+\varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon,\ \pi\, (n+2\, \varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon)$ pour n impair.

$(\pi\, n\, sec\, \pi\, \varepsilon,\ \pi\, (n+\varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon)$ pour n pair.

Vérifions les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} &F_\rho(\pi\, (n+\varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon) > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ &F_\rho(\pi\, n\, sec\, \pi\, \varepsilon) < 0 \qquad \text{si n est pair} \\ &F_\rho(\pi\, (n+2\, \varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon) < 0 \qquad \text{si n est impair} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Commençons par la première.
Notons $\xi_n = \pi\, (n+\varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon$ et appliquons le lemme (2.2.3), on trouve

$$f_\rho(\xi_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En effet,

$$cos\, ((\pi\, (n{+}\varepsilon)\, sec\, \pi\, \varepsilon)\, sin\, \pi\, \rho{-}\pi\, \rho) = cos\, (\pi\, (n{+}\rho{-}\frac{1}{2}){-}\pi\, \rho) = cos\, (n\, \pi{-}\frac{\pi}{2}) = -sin\, (\pi\, n) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
F_\rho(\xi_n) &= \frac{\xi_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + w_\rho(\xi_n) > \frac{\xi_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - 5\ \alpha\ \xi_n^{2\alpha-3} \\
&= \alpha\ \xi_n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - 5\ \xi_n^{\alpha-2}\right) \\
&> \alpha\ \xi_n^{\alpha-1}(1 - 5\ \xi_n^{\alpha-2}) \geq \alpha\ \xi_n^{\alpha-1}(1 - 5\ \xi_1^{\alpha-2}) \\
&> \alpha\ \xi_n^{\alpha-1}(1 - 5\ \pi^{\alpha-2}) \geq \alpha\ \xi_n^{\alpha-1}(1 - 5\ \pi^{-1.9}) > 0.
\end{aligned}$$

où on a utilisé les relations suivantes : $\forall \alpha \in (0, 0.1]$, $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} > 1$ et $\xi_n > \xi_1$.
D'où l'inégalité.
Montrons maintenant la deuxième inégalité de (2.16)
Pour n pair, notons $\eta_n = \pi\ n\ sec\,\pi\,\varepsilon$
On a

$$cos\,(\eta_n\ sin\ \pi\,\rho - \pi\,\rho) = cos\,(\eta_n\ cos\,\pi\,\varepsilon - \pi\,\varepsilon - \tfrac{\pi}{2}) = cos\,(\pi\,n - \pi\,\varepsilon - \tfrac{\pi}{2}) = -sin\,\pi\,\varepsilon.$$

En tenant compte de la restriction (2.15), on aura

$$\begin{aligned}
f_\rho(\eta_n) &= -2\ \rho\ exp\,(-\eta_n\ sin\ \pi\,\varepsilon)\ sin\ \pi\,\varepsilon \\
&< -3\ \varepsilon\ exp\,(-\eta_n\ sin\ \pi\,\varepsilon) \\
&< -3\ \varepsilon\ exp\,(-\alpha^{-2\rho}\ \pi\ \varepsilon) = -3\ \varepsilon\ exp\left(\frac{-\alpha^{1-2\rho}\ \pi}{4 - 2\,\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha^{1-2\rho} = \alpha^{-\alpha/(2-\alpha)}$ et $\max\limits_{0<\alpha\leq 0.1} \alpha^{-\alpha/(2-\alpha)} = (0.1)^{-\frac{0.1}{1.9}} = 10^{\frac{1}{19}} < 1.2$
Alors $f_\rho(\eta_n) < -3\ \varepsilon\ exp\left(-\dfrac{1.2\,\pi}{3.8}\right) < -3\ \dfrac{\varepsilon}{e} < -1.1\ \varepsilon.$
On a la fonction $\dfrac{1}{\Gamma(t)}$ est une fonction croissante et concave dans l'intervalle fermé $1 \leq t \leq 1.1$ et d'aprés le lemme (2.2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
F_\rho(\eta_n) &< -1.1\ \varepsilon + \frac{\eta_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + 5\ \alpha\ \eta_n^{2\alpha-3} \\
&= -\frac{1.1\ \alpha}{4 - 2\alpha} + \frac{\alpha\ \eta_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + 5\ \alpha\ \eta_n^{2\alpha-3} \\
&< -\frac{1.1\ \alpha}{4} + \frac{\alpha\ \eta_n^{\alpha-1}}{\Gamma(1.1)} + 5\ \alpha\ \eta_n^{2\alpha-3} \\
&< -0.27\alpha + 1.06\ \alpha\ \eta_n^{\alpha-1} + 5\alpha\ \eta_n^{2\alpha-3}
\end{aligned}$$

Puisque n est pair alors $n \geq 2$ et $\eta_n \geq 2\,\pi$. Par conséquent,

$$\alpha^{-1}\ F_\rho(\eta_n) < -0.27 + 1.06\ (2\pi)^{\alpha-1} + 5\ (2\pi)^{2\alpha-3} \leq -0.27 + 1.06\ (2\pi)^{-0.9} + 5\ (2\pi)^{-2.8} < 0.$$

Montrons maintenant la dernière inégalité de (2.16)

En premier lieu, considèrons le cas où $n = 1$

Notons $\eta_n^{'} = \pi\,(n + 2\,\varepsilon)\,\dfrac{1}{cos\;\pi\,\varepsilon} = \eta_n + 2\,\pi\,\varepsilon\,\dfrac{1}{cos\;\pi\varepsilon}$.

Alors on a $cos(\eta_n^{'}\;sin\;\pi\,\rho - \pi\,\rho) = -sin\;\pi\,\varepsilon$

et en tenant compte que $sin\;\pi\,\varepsilon > 3.1\,\varepsilon$ pour $\varepsilon \in (0, \frac{1}{38}]$, on obtient

$$\begin{aligned} f_\rho(\eta_n^{'}) &= -2\;\rho\;exp\,(-\pi\,(1 + 2\,\varepsilon)\;tan\;\pi\;\varepsilon)\;sin\;\pi\;\varepsilon \\ &< -3.1\;\varepsilon\;exp\,(-\pi\,(1 + 2\,\varepsilon)\;tan\;\pi\,\varepsilon). \end{aligned}$$

Or $exp\,(-\pi\,(1+2\,\varepsilon)\;tan\;\pi\,\varepsilon) \geq exp\left(-\pi\left(1 + \dfrac{1}{19}\right)\right)\,tan\left(\dfrac{\pi}{38}\right) > 0.76, \quad 0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{38}$

d'où $f_\rho(\eta_n^{'}) < -2.356\;\varepsilon < -0.589\;\alpha$

et

$$\begin{aligned} F_\rho(\eta_n^{'}) &< -0.589\;\alpha + 1.06\;\alpha\;\eta_1^{'\alpha-1} + 5\;\alpha\;\eta_1^{'2\alpha-3} \\ &< -0.589\;\alpha + 1.06\;\alpha\;\pi^{\,\alpha-1} + 5\;\alpha\;\pi^{\,2\alpha-3} \\ &< \alpha\;(-0.589 + 1.06\;\pi^{\,-0.9} + 5\;\pi^{\,-2.8}) < 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où $n \geq 3$, n impair

Comme précédemment, on a $cos(\eta_1^{'}\;sin\;\pi\rho - \pi\rho) = -sin\;\pi\;\varepsilon.$

et

$$\begin{aligned} f_\rho(\eta_n^{'}) &= -2\;\rho\;exp\,(-\eta_n^{'}\;sin\;\pi\,\varepsilon)\;sin\;\pi\,\varepsilon \\ &= -(1 + 2\,\varepsilon)\;exp\,(-\eta_n\;sin\;\pi\,\varepsilon)\;exp\,(-2\,\pi\,\varepsilon\;tan\;\pi\;\varepsilon)\;sin\pi\,\varepsilon \\ &< -(1 + 2\,\varepsilon)\;exp\,(-2\;\pi\;\varepsilon\;tan\;\pi\,\varepsilon)\;1.1\;\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \in (0, 0.1]$ $\left(\varepsilon = \dfrac{\alpha}{4 - 2\alpha}\right)$ on a $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{38}$ et $(1+2\,\varepsilon)\;exp\,(-2\,\pi\,\varepsilon\;tan\;\pi\,\varepsilon) < 1$

d'où l'estimation suivante : $f_\rho(\eta_n^{'}) < -1.1\;\varepsilon$

et

$$F_\rho(\eta_n^{'}) < 1.1\;\varepsilon + \frac{\eta_n^{'\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + 5\;\alpha\;\eta_n^{'2\alpha-3} < -0.27\;\alpha + 1.06\;\alpha\;\eta_n^{'\alpha-1} + 5\;\alpha\;\eta_n^{'2\alpha-3}$$

Puisque $n \geq 3$ alors $\eta_n^{'} \geq \pi 3$ et $\alpha^{-1}\;F_\rho(\eta_n^{'}) < -0.27{+}1.06\;(3\,\pi)^{\,-0.9}{+}5\;(3\,\pi)^{\,-2.8} < 0.$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.2.12.

$$\forall\alpha \in (0, 0.1],\;\; \forall n \in \left[1, \frac{1}{4\alpha}\right] \quad on\ a: \quad (\pi\,n)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < (\pi\,n)^2 \tag{2.17}$$

Démonstration. Vérifions d'abord que toutes les valeurs propres du problème (2.2) avec la suite de nombres $n \leq n_0(\alpha) = \dfrac{1}{4\alpha}$ se situent dans le disque $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$.
D'aprés le théorème (2.2.11), il suffit de montrer que

$$\left(\pi\ (n_0(\alpha) + 2\ \varepsilon)\ \frac{1}{cos\ \pi\ \varepsilon}\right)^{2-\alpha} \leq \alpha^{-2} \Leftrightarrow n_0(\alpha) + 2\ \varepsilon \leq \alpha^{-2/(2-\alpha)}\ \frac{1}{\pi}\ cos\ \pi\ \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \alpha\ n_0(\alpha) \leq \alpha^{-\alpha/(2-\alpha)}\ \pi^{-1}\ cos\ \pi\ \varepsilon - 2\ \alpha\ \varepsilon.$$

On a bien $\alpha\ n_0(\alpha) \leq \dfrac{1}{4}$, alors que

$$\pi^{-1}\ cos\ \pi\ \varepsilon - 2\ \alpha\ \varepsilon \geq \pi^{-1}\ cos\left(\frac{\pi}{38}\right) - 0.2\ \varepsilon > 0.3 - \frac{0.2}{38} > 0.29.$$

Alors toutes les valeurs propres $\lambda_n(\alpha)_{n \leq \frac{1}{4\alpha}}$ se situent dans le disque $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$.
Il en résulte que les inégalités (2.14) sont vérifiées pour $\lambda_n(\alpha)_{n \leq \frac{1}{4\alpha}}$.
Alors il suffit de démontrer que

$$(\pi\, n)^{2-\alpha} < \left(\frac{\pi\, n}{cos\ \pi\ \varepsilon}\right)^{2-\alpha}\ ,\ \left(\frac{\pi\ (n + 2\ \varepsilon)}{cos\ \pi\ \varepsilon}\right)^{2-\alpha} < (\pi\, n)^2,\ 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{38},\ 0 < \alpha \leq 0.1,\ n \in \mathbb{N}.$$

La première inégalité est triviale.
Montrons la deuxième inégalité

$$\left(\frac{\pi\ (n + 2\ \varepsilon)}{cos\ \pi\ \varepsilon}\right)^{2-\alpha} < (\pi\, n)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left(1 + \frac{2\ \varepsilon}{n}\right)\ sec\ \pi\ \varepsilon\right)^{2-\alpha} < (\pi\, n)^{\alpha}$$

Quand $n \to +\infty$, le coté gauche de l'inégalité décroit et le coté droit croit donc il suffit de montrer cette dernière inégalité pour $n = 1$ c'est à dire $((1 + 2\ \varepsilon)\ \ sec\ \pi\ \varepsilon)^{2-\alpha} < \pi^{\alpha}$.
Puisque $\dfrac{\alpha}{2 - \alpha} = 2\ \varepsilon$ alors il suffit de montrer

$$(1 + 2\ \varepsilon)\ sec(\pi\ \varepsilon) < \pi^{2\ \varepsilon}\ = e^{2\ \varepsilon}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{2\ \varepsilon},\quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{38}.$$

Pour $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{38}$, on a

$$sec^2\ \pi\ \varepsilon = 1 + tan^2\ \pi\ \varepsilon\ < 1 + 16\ \varepsilon^2\ < exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Puisque $\dfrac{\pi}{e} >\ exp\left(\dfrac{1}{8}\right)$ alors

$$sec(\pi\ \varepsilon) < exp\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) < \left(\frac{\pi}{e}\right)^{2\ \varepsilon}.$$

D'aprés ça et l'inégalité $1 + 2\ \varepsilon < e^{2\ \varepsilon}$, on obtient le résultat. ■

Corollaire 2.2.13. *Si* $h(\alpha)$ *est une fonction positive arbitraire définie sur l'intervalle* $]0, 0.1]$ *et* $\lim_{\alpha \to 0^+} h(\alpha) = 0$*, alors*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left\{ max \left| \lambda_n(\alpha) - (\pi n)^2 \right| / \ \ 1 \leq n \leq \left(\alpha \ ln \ \frac{1}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} h(\alpha) \right\} = 0$$

Démonstration. On a

$$(\pi \, n)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < (\pi \, n)^2 \Longleftrightarrow \left| \lambda_n(\alpha) - (\pi \, n)^2 \right| < (\pi \, n)^2 - (\pi \, n)^{2-\alpha}$$

Or

$$(\pi \, n)^2 - (\pi \, n)^{2-\alpha} = (\pi \, n)^2 (1 - exp\,(-\alpha \ ln \ (\pi \, n)))$$

D'où

$$\left| \lambda_n(\alpha) - (\pi \, n)^2 \right| < (\pi \, n)^2 (1 - exp\,(-\alpha \ ln \ (\pi \, n))) = O\,(\alpha \ (\pi \, n)^2 \ ln\,(\pi \, n))$$

Pour $n \leq (\alpha \ ln \ \frac{1}{\alpha})^{-\frac{1}{2}} \ h(\alpha) \Longleftrightarrow (\pi \, n)^2 \leq \pi^2 \ \alpha^{-1} \ ln^{-1} \ h^2(\alpha)$, on trouve que

$$\left| \lambda_n(\alpha) - (\pi \, n)^2 \right| = O \left(ln^{-1} \ \left(\frac{1}{\alpha} \right) \ ln \ (\pi n) \ h^2(\alpha) \right) = O\,(h^2(\alpha)) = o\,(1), \quad \alpha \to 0^+.$$

d'où lénoncé. ■

2.2.2.4 Le nombre des valeurs propres

Les valeurs propres réelles du problème (2.2) sont dans le disque $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$ et puisque $E_\rho(-\lambda, 2)$ est une fonction holomorphe alors d'aprés le théorème concernant le nombre de zéros dans un disque (voir annexe) on a la fonction de Mittag-Leffler possède un nombre fini de zéros dont la représentation asymptotique est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.14. *La représentation asymptotique pour la quantité* $N(\alpha)$ *est égal au nombre des valeurs propres réelles du problème (2.2) :*

$$N(\alpha) = 8 \, \pi^{-2} \ \alpha^{-1} \ ln \ \frac{1}{\alpha} + O\,(\alpha^{-1} \ ln \ ln \ \frac{1}{\alpha}), \qquad \alpha \longrightarrow 0^+$$

Démonstration. On a déja vu que le nombre de valeurs propres réelles du problème (2.2) est égal au nombre de valeurs propres qui se situent dans le disque $|\lambda| \leq R_1^{2-\alpha}(\alpha)$ (qu'est égal à $M(\alpha)$ ou $M(\alpha) - 1$ avec $M(\alpha)$ est le plus petit nombre naturel telle que $R_1(\alpha) \leq x_M$) plus le nombre de valeurs propres vérifiant $R_1^{2-\alpha}(\alpha) < \lambda < R^{2-\alpha}(\alpha)$ qu'on note par $N_0(\alpha)$.

Donc

$$M(\alpha) - 1 \;\leq\; N(\alpha) \;\leq\; M(\alpha) + N_0(\alpha) \tag{2.18}$$

On a $\quad x_n = \dfrac{\pi(n+\rho)}{sin\;\pi\rho} \Longleftrightarrow n+\rho = \dfrac{1}{\pi}\; x_n\; sin\;\pi\rho$

et $\quad R_1(\alpha) \leq x_{M(\alpha)} \Longleftrightarrow x_{M(\alpha)} = R_1(\alpha) + o\,(1)$

d'où $\quad M(\alpha)+\rho = \pi^{-1}\;(R_1(\alpha)+o\,(1))\; sin\;\pi\,\rho \quad$ avec $\quad R_1(\alpha) = -2\; ln\;\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{cos\;\pi\rho}\right)$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
M(\alpha) &= \pi^{-1}\;(R_1(\alpha) + o(1))\; sin\;\pi\rho + o\,(1)\\
&= \frac{-2}{\pi}\;(ln\;\frac{1}{\alpha})\; tg\;\pi\rho + o\,(1)\\
&= \frac{2}{\pi}\;(ln\;\frac{1}{\alpha})\; cotg(\pi\varepsilon) + o\,(1)\\
&= \frac{2}{\pi}\;(ln\;\frac{1}{\alpha})\;(\pi\varepsilon)^{-1} + o\,(1)\\
&= \frac{2}{\pi^2}\;(ln\;\frac{1}{\alpha})\;\left(\frac{4-2\alpha}{\alpha}\right) + o\,(1)\\
&= \frac{8}{\pi^2}\;(ln\;\frac{1}{\alpha})\;\alpha^{-1}\;\; - 4\;\pi^{-2}\; ln\;\frac{1}{\alpha} + o\,(1)\\
&= 8\;\pi^{-2}\;\alpha^{-1}\; ln\;\frac{1}{\alpha} + o\left(ln\;\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{quand } \alpha \longrightarrow 0^+
\end{aligned}$$

En tenant compte de ces manipulations et l'inégalité (2.18), il suffit de démontrer que

$$N_0(\alpha) = \;O\,(\frac{1}{\alpha}\; ln\; ln\;\frac{1}{\alpha}), \quad \alpha \longrightarrow 0^+$$

Notons

$$a\,(\alpha) = max\,\{x_n(\rho),\; \text{n pair}/\; x_n(\rho) < R_1(\alpha)\}$$

et

$$b\,(\alpha) = min\,\{x_n(\rho),\; \text{n pair}/\; x_n(\rho) > R\,(\alpha)\}$$

Montrons que le nombre de zéros de $F_\rho(z)$ se situant non seulement dans l'intervalle $(R_1(\alpha), R\,(\alpha))$ mais aussi dans le rectangle
$P(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \;\;/\;\; a\,(\alpha) \leq Re\; z \leq b\,(\alpha), \;\;\; |Im\; z| \leq T\,(\alpha)\}$ est égal à $O\,(\alpha^{-1}\; ln\; ln\;\dfrac{1}{\alpha})$.
On a le périmètre du rectangle $P\,(\alpha)$ est d'ordre $(\alpha^{-1}\; ln\; ln\;\dfrac{1}{\alpha})$ quand $\alpha \longrightarrow 0^+$.
En effet, $p = (b\,(\alpha) - a\,(\alpha) + 2\; T\,(\alpha))\,2$.

$$a\,(\alpha) < R_1(\alpha) \Longrightarrow a\,(\alpha) = R_1(\alpha) + o\,(1)$$

$$b\,(\alpha) > R\,(\alpha) \Longrightarrow b\,(\alpha) = R\,(\alpha) - o\,(1)$$

Donc

$$p = 4\,T\,(\alpha) + 2\,(b\,(\alpha) - a\,(\alpha)) = 4\,T\,(\alpha) + 2\,(R,\,(\alpha) - R_1(\alpha)) - o\,(1)$$

Comme

$$R\,(\alpha) = 2\;(ln\;\frac{2}{\alpha} + \;ln\;ln\;\frac{2}{\alpha})\;csc\,(\pi\,\varepsilon),$$

$$R_1(\alpha)) = 2\;ln\;\frac{1}{\alpha}\;(csc\;\pi\,\varepsilon)$$

et

$$T\,(\alpha) = \frac{1}{sin\;\pi\,\varepsilon} = (csc\;\pi\,\varepsilon)$$

alors

$$\begin{aligned}
p &= 4\,(ln\;\frac{2}{\alpha}\;\; - ln\;\frac{1}{\alpha}\;\; + ln\;ln\;\frac{2}{\alpha})\;csc\;\pi\,\varepsilon + 4\;csc\;\pi\,\varepsilon + o\,(1)\\
&= 4\,(ln\;2\;\; - 1\;\; + ln\;ln\;\frac{2}{\alpha})\;csc\;\pi\,\varepsilon + o\,(1)\\
&= (4\,ln\;ln\;\frac{2}{\alpha})\;(\pi\,\varepsilon)^{-1} + o\,(1)\\
&= \frac{4\,(4 - 2\,\alpha)}{\pi\,\alpha}\;ln\;ln\;\frac{2}{\alpha} + o\,(1)\\
&= O\left(\alpha^{-1}\;ln\;ln\;\frac{2}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Donc il suffit de montrer que la dérivée logarithmique de la fonction $F_\rho(z)$ sur les côtés du rectangle $P(\alpha)$ est borné par une constante.
Montrons l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{F_\rho^{'}(z)}{F_\rho(z)}\right| \leq 2 \qquad \forall z \in \partial\;P\,(\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 0.1] \tag{2.19}$$

Commençons d'abord par montrer l'inégalité sur les verticales : $z = x_n + i\,y\;, y \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned}
cos\,((x_n + i\,y)\;sin\;\pi\,\rho - \pi\,\rho) &= cos\,((x_n\;sin\;\pi\,\rho - \pi\,\rho) + i\,y\;sin\;\pi\,\rho)\\
&= cos\,(\frac{\pi\,(n+\rho)}{sin\;\pi\,\rho}\;sin\;\pi\,\rho - \pi\,\rho + i\,y\;sin\;\pi\,\rho)\\
&= cos\,(\pi\,n)\;cos\,(i\,y\;sin\;\pi\,\rho)\\
&= (-1)^n\;ch\,(y\;sin\;\pi\,\rho)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

et

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = |z|\;\;e^{i\,arg\,z} \Rightarrow z^p = |z|^p\;\;e^{i\,p\,arg\,z}$$

d'où

$$Re\,(z^p) = |z|^p \;\; cos \left(p\; arctg \left(\frac{y}{Re\; z}\right)\right) \quad \text{avec} \;\; y = Im\; z, p \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de voir que

$$max \left\{ \left|\frac{y}{x}\right| \quad /x + i\,y \in P\,(\alpha) \right\} = \frac{T\,(\alpha)}{a(\alpha)}$$

car $|y| \leq T\,(\alpha)$ et $|x| \leq a\,(\alpha)$

La suite $x_n = \dfrac{\pi\,(n+\rho)}{sin\;\pi\,\rho}$ est une suite arithmitique où la raison est donnée par

$$\pi \;sec\,(\pi\,\varepsilon) < \; 3.142 \;sec \left(\frac{\pi}{38}\right) < \; 3.16, \qquad \varepsilon = \frac{4 - 2\,\alpha}{\alpha}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R_1(\alpha) - a\,(\alpha) < 6.32 &\Longrightarrow a\,(\alpha) > R_1(\alpha) - 6.32 \\ &\Longrightarrow a\,(\alpha) > \left(1 - \frac{6.32}{R_1(\alpha)}\right) R_1(\alpha) \end{aligned}$$

Pour $\alpha \leq 0.1$, on a

$$R_1(\alpha) \geq 2 \;csc\,(\pi\,\varepsilon)\; ln\; 10 \geq 2 \;csc\, \left(\frac{\pi}{38}\right)\; ln\; 10 > 55 \Longrightarrow \frac{1}{R_1(\alpha)} < \frac{1}{55}$$
$$\Longrightarrow \frac{-6.32}{R_1(\alpha)} > \frac{-6.32}{55} \Longrightarrow 1 - \frac{-6.32}{R_1(\alpha)} > 1 - \frac{-6.32}{55} > 0.88$$

d'où $a\,(\alpha) > 0.88\; R_1(\alpha)$.

Il en résulte les estimations suivantes : $\forall \alpha \in (0, 0.1]$,

$$\frac{y}{x} \leq \frac{T\,(\alpha)}{0.88\; R_1(\alpha)} = \frac{csc\,(\pi\,\varepsilon)}{(0.88)2\; ln\, \left(\frac{1}{\alpha}\right)\; csc\,(\pi\,\varepsilon)} < 0.6\; ln^{-1} \; \left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \frac{0.6}{ln\; 10} < 0.3, \;\; x{+}i\,y \in P\,(\alpha) \tag{2.21}$$

comme $arctg\,(0.3) = 0.3$ alors on a

$$Re\,(z^p) \geq |z|^p \;\; cos\,(0.3\;p), \quad z \in \partial\; P\,(\alpha), |p| \leq \pi \tag{2.22}$$

Pour n pair et $|y| \leq T\,(\alpha)$, on trouve d'aprés (2.20),(2.21) et (2.22) que

$$Re\; F_\rho(x_n + iy) \geq 2\;\rho\; exp\;(x_n\; cos\;\pi\,\rho)\; cos\,(y\; cos\;\pi\,\rho)\; ch\,(y\; sin\;\pi\,\rho)$$

$$+ \,|z|^{\alpha-1} \;\; \frac{cos\,(0.3\,(\alpha-1))}{\Gamma(\alpha)} - |w_\rho\;(x_n + i\,y)|\,.$$

Car

$$exp\,((x_n + i\,y)\;cos\;\pi\,\rho) = exp\,(x_n\;cos\;\pi\,\rho)\;e^{i\,y\,cos\,\pi\,\rho}$$

D'aprés (2.21) on a

$$\frac{y}{x} < 0.3 \Leftrightarrow y^2 < 0.09\;x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + x^2} < \sqrt{1.09\;x^2} \Leftrightarrow |z| \le 1.1\;Re\;z$$

Pour $z = x + i\,y \in P\,(\alpha)$, d'aprés ça, l'estimation du reste $w_\rho(z)$ et le fait que $\alpha < \dfrac{|z|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $0 < \alpha \le 0.1$ on trouve

$$\begin{aligned} |w_\rho(z)| &\le 5\;\alpha\;x^{2\,\alpha-3} = 5\;\alpha\;|z|^{\alpha-1}\;\frac{|z|^{1-\alpha}}{x}\;x^{2\,\alpha-2} \le \frac{5}{\Gamma(\alpha)}\;|z|^{\alpha-1}\;\frac{|z|}{x}\;a^{2\,\alpha-2}(\alpha) \\ &\le 5\;(1.1)\;\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\;(0.88\;R_1(\alpha))^{-1.8} \le 6\;(0.88 * 55)^{-1.8}\;\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &< 0.01\;\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Par le choix de $T\,(\alpha)$, on a l'inégalité suivante :

$$|y\;cos\;\pi\,\rho| \le T\,(\alpha)\,|cos\;\pi\,\rho| = T\,(\alpha)\;sin\;\pi\,\varepsilon = 1$$

On a donc

$$\begin{aligned} Re\;F_\rho\;(x_n + i\,y) &\ge 2\;\rho\;exp\,(x_n\;cos\;\pi\,\rho)\;cos(1)\;cosh\,(y\;sin\;\pi\,\rho) + 0.8\;\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &> 0.5\;\left(2\;\rho\;exp\,(x_n\;cos\;\pi\,\rho)\;ch\,(y\;sin\;\pi\,\rho) + \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

Estimons $\left|F'_\rho(z)\right|$.
On a

$$F'_\rho(z) = 2\;\rho\;exp\,(z\;cos\;\pi\,\rho)\;cos\,(z\;sin\;\pi\,\rho) + (\alpha - 1)\;\frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} + w'_\rho(z)$$

et l'estimation suivante :

$$|g'(a)| \le R^{-1}\;\max_{|z-a|\le R}\;|g(z)|\,, \qquad a \in \mathbb{C},\;R > 0,\;g \in A(|z-a| \le R) \tag{2.23}$$

pour le module d'une fonction analytique.
En appliquant (2.23) sur la fonction $w'_\rho(z)$ pour $R = \dfrac{x}{2}$ et $x = Re\;z \ge 2$, on obtient

$$\left|w'_\rho(z)\right| \le \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}\;5\;\alpha\;\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,\alpha-3} \le 5\;\alpha\;x^{2\,\alpha-3}\;\frac{16}{x} < 0.01\;\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

où on a utilisé le fait que $x > 16$, $\forall z \in P(\alpha)$ et $0 < \alpha \leq 0.1$. D'où

$$\begin{aligned}\left|F'_\rho(x+i\,y)\right| &\leq 2\rho\, exp\,(x\, cos\, \pi\, \rho)\, cosh\,(y\, sin\, \pi\, \rho) + \frac{|z|^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} + 0.01\,\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\ &< 2\,\rho\, exp\,(x\, cos\, \pi\, \rho)\, cosh\,(y\, sin\, \pi\, \rho) + \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

Donc

$$\left|F'_\rho(z)\right| \leq 2\; Re\; |F_\rho(z)|$$

sur la verticale du rectangle $P(\alpha)$.
Montrons maintenant (2.19) sur la partie horizontale sur le bord du rectangle considéré i.e. pour $z = x \pm i\,T(\alpha)$ et $a(\alpha) \leq x \leq b(\alpha)$
Dans ce cas, l'estimation de $\left|F'_\rho(z)\right|$ est valable et l'estimation de $|F(z)|$ est obtenue pour $|Im\; z| = T(\alpha)$ et $a(\alpha) \leq Re\; z \leq b(\alpha)$.
Le module de $f_\rho(z) = 2\,\rho\, exp\,(z\, cos\, \pi\, \rho)\, cos\,(z\, sin\, \pi\, \rho - \pi\, \rho)$ est considéré plus grand que

$$\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + |w_\rho(z)|\,.$$

De plus, pour $z = x \pm i\,T$ et $\rho > \dfrac{1}{2}$ on a

$$|f_\rho(z)| \geq 2\,\rho\, exp\,(x\, cos\, \pi\, \rho)\, sinh\,(T\, sin\, \pi\, \rho) \;=\; 2\,\rho\, exp\,(x\, cos\, \pi\, \rho)\, sinh\,(cot\, \pi\, \varepsilon)$$

Rappelons que $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{4-2\,\alpha} \leq \dfrac{\alpha}{3.8}$, et il est facile de montrer que

$$cot\,(\pi\,\varepsilon) \;\geq\; (3.8\,\varepsilon)^{-1} \qquad \text{pour}\;\; 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{20}$$

alors

$$sinh\,(cot\, \pi\, \varepsilon) \;>\; sinh\,(\frac{1}{\alpha}), \qquad 0 < \alpha \leq 0.1$$

Pour $z \in P(\alpha)$, on a $x = Re\; z \leq R(\alpha) + \dfrac{2\,\pi}{sin\, \pi\, \rho}$ et $R(\alpha)\, cos\, \pi\, \rho = -2\,(ln\,\dfrac{2}{\alpha} + ln\; ln\,\dfrac{2}{\alpha})$
Donc d'une part, on a

$$\begin{aligned} exp\,(x\, cos\, \pi\, \rho) &\geq exp\,(-2\,(ln\,\frac{2}{\alpha} + ln\; ln\,\frac{2}{\alpha}) - 2\,\pi\; |cot\, \pi\, \rho|)\\ &= \frac{\alpha^2}{4}\; ln^{-2}\,\frac{2}{\alpha}\; exp\,(-2\,\pi\, tan\, \pi\, \varepsilon)\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $ln^2\,(\dfrac{2}{\alpha}) < \dfrac{1}{\alpha}$ et $tan\, \pi\, \varepsilon \;<\; tan\, 5^0 \;<\; 0.1$ pour $0 < \alpha \leq 0.1$.

D'où

$$exp\,(x\;cos\;\pi\,\rho) > \frac{\alpha^3}{4}\;exp(-0.63) > \frac{\alpha^3}{8} \quad, \quad x = Re\;z,\;\; z \in P\,(\alpha),\;\; \alpha \leq 0.1.$$

Alors

$$|f_\rho(z)| \geq \frac{\alpha^3}{8}\;sinh\,(\frac{1}{\alpha}) > \frac{\alpha^3}{8}.\frac{\alpha^{-3}}{6} = \frac{1}{48}, \quad z = x \pm i\,T\,(\alpha)$$

D'autre part, pour $z \in P\,(\alpha)$,$\alpha \leq 0.1$ on a $Re\;z \geq 44$ et

$$\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leq \frac{44^{-0.9}}{\Gamma(0.1)} = \frac{0.1\;(44)^{-0.9}}{\Gamma(1.1)} < 0.11\;(44)^{-0.9} < \frac{1}{250}$$

Puisqu'on a l'inégalité suivante : $|w_\rho(z)| < 0.01\;\dfrac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ dans le rectangle $P\,(\alpha)$ alors

$$\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + |w_\rho(z)| < \frac{1}{5}\;f_\rho(z)$$

Donc

$$|F_\rho(z)| > \frac{4}{5}\;\;|f_\rho(z)|\;\;,\;\; z \in P\,(\alpha), \quad |Im\;z| = T\,(\alpha)$$

De même, on obtient l'inégalité suivante :

Pour $z \in P\,(\alpha)$, $|Im\;z| = T\,(\alpha)$, $\left|F'_\rho(z)\right| \leq\;|f_\rho(z)|\;\,coth\,(cot\;\pi\,\varepsilon) + \dfrac{1}{5}\;\,|f_\rho(z)| \leq \dfrac{7}{5}\;\,|f_\rho(z)|$

où on a utilisé le fait que $coth\;A < \dfrac{6}{5}$ pour $A > 2$.
On en déduit l'estimation

$$\left|\frac{F'_\rho(z)}{F_\rho(z)}\right| < \frac{7}{4} < 2 \;\;\text{pour}\;\; z \in P\,(\alpha)\;,\;|Im\;z| = T\,(\alpha)$$

D'où l'énoncé. ■

Chapître 3

Equations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire

Le but de ce chapître est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire ensuite on s'intéresse au problème des valeurs propres associés à cette équation.

3.1 Existence et unicité

Nous n'allons pas énoncé puis démontrer un théorème d'existence et d'unicité comme c'est souvent le cas, mais nous allons plutôt construire un tel théorème pas à pas. L'image d'arrière plan qu'il faut avoir est celle d'un théorème classique (dérivation entière) de ce genre.
Commençons d'abord par transformer l'équation différentielle suivante :

$$(D^{\alpha})^2\, y(x) + \lambda\, y(x) = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < \alpha < 1.$$

en une équation intégrale. Pour cela, on applique l'opérateur inverse I^{α}

$$(I^{\alpha}\ o\ D^{\alpha})(D^{\alpha}\, y)(x) + \lambda\, (I^{\alpha}\, y)(x) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

En vertu de la composition de l'intégrale de Riemann-Liouville et la dérivée de Riemann-Liouville, on obtient

$$(D^{\alpha}\, y)(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\ o\ D^{\alpha})\, y(x) + \lambda\, (I^{\alpha}\, y)\, y(x) = 0.$$

Aprés une deuxième application de l'opérateur I^{α} et en tenant compte de la composition de l'intégration d'ordre réel quelconque positif, on aura

$$y(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\, y)(x) - I^{\alpha} \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\; o\; D^{\alpha})\, y(x) + \lambda\, (I^{2\alpha}\, y)(x) = 0$$

ce qui donne

$$y(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\, y)(x) + \frac{x^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\; o\; D^{\alpha})\, y(x) - \lambda\, (I^{2\alpha}\, y)(x). \quad (3.1)$$

Les valeurs $\lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\ y)(x)$ et $\lim_{\alpha \to 0^+} (I^{1-\alpha}\ o\ D^{\alpha})\ y(x)$ tiennent lieu des conditions initiales et nous avons vu précédemment que ces valeurs sont nulles si y et $D^{\alpha}\, y$ sont deux fonctions continues sur [0,1]. De là, l'espace des foctions dans lequel nous allons travailler sera un espace où ces limites existent.

Lemme 3.1.1. *Supposons que f est continue sur]0,1] avec*

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha}\, f(x) = c\ (existe)$$

Alors

$$\lim_{x \to 0^+} (I^{1-\alpha}\, f)(x) = c\, \Gamma(\alpha).$$

Démonstration. Partons de l'expression de l'intégrale de Riemann-Liouville

$$(I^{1-\alpha}\, f)(x) - c\, \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, f(t)\, dt - c\, \Gamma(\alpha).$$

Remplaçons $\Gamma(\alpha)$ par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha}\, \tau^{\alpha-1}\, d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

(après le changement de variable $\tau = \dfrac{t}{x}$)
et puis

$$(I^{1-\alpha}\, y)(x) - c\, \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, [f(t) - c\, t^{\alpha-1}]\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}\, [t^{1-\alpha}\, f(t) - c]\, dt.$$

puisque $\lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha}\, f(x)$ existe, alors la fonction $f(x)\, x^{1-\alpha}$ est prolongeable par continuité à [0,1] d'où $f(x)\, x^{1-\alpha}$ est bornée sur [0,1].

Donc

$$\left|(I^{1-\alpha} f)(x) - c\,\Gamma(\alpha)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1} \left|t^{1-\alpha} f(t) - c\right| dt.$$

$$\leq \frac{\sup\limits_{t\in[0,x]} \left|t^{1-\alpha} f(t) - c\right|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}\, dt.$$

or

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}\, dt \;=\; \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)$$

alors

$$\left|(I^{1-\alpha} f)(x) - c\,\Gamma(\alpha)\right| \;\leq\; \Gamma(\alpha) \sup_{t\in[0,x]} \left|t^{1-\alpha} f(t) - c\right|$$

d'où le résultat. ■

Maintenant, introduisons l'espace suivant :

$$C_\alpha = \left\{ y :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{continue et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\, y(x) \;\; \text{existe} \right\}$$

et posons

$$\|y\|_\alpha = \sup_{x\in[0,1]} \left|x^{1-\alpha}\, y(x)\right|$$

On sait que $\|.\|_\alpha$ est bien une norme et $(C_\alpha, \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach.
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (D^\alpha)^2\, y(x) + \lambda\, y(x) = 0 \quad , 0 < x < 1,\; 0 < \alpha < 1. \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\, y(x) = \; a_1 \;\; , \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\, (D^\alpha\, y)(x) = \; a_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

En vertu de l'équation intégrale (3.1) et des conditions initiales, on aura

$$y(x) = x^{\alpha-1}\, a_1 + x^{2\alpha-1}\, a_2\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} - \lambda\, (I^{2\alpha}\, y)(x).$$

La manoeuvre consiste à écrire le second membre de cette équation intégrale comme l'action d'un opérateur Ty et montrer qu'il est contractant dans C_α pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Banach.
Posons pour $y \in C_\alpha$,

$$(T\, y)(x) = x^{\alpha-1}\, a_1 + x^{2\alpha-1}\, a_2\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\lambda}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\alpha-1}\, y(t)\, dt.$$

Il faut montrer d'abord que l'opérateur T envoie bien les éléments de C_α sur des éléments de même espace, ensuite qu'il est contractant.

Proposition 3.1.2. *L'équation intégrale (3.1) est bien une solution du problème de Cauchy (3.2).*

Démonstration. Soit $y \in C_\alpha$ alors

$$(T\,y)(x) = x^{\alpha-1}\,a_1 + x^{2\alpha-1}\,a_2\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} - \frac{\lambda}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,y(t)\,dt.$$

Appliquons l'opérateur D^α

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\,(T\,y)(x) &= a_1\,D^{\alpha}\,(x^{\alpha-1}) + a_2\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)}\,D^{\alpha}\,(x^{2\alpha-1}) - \lambda\,D^{\alpha}\,(I^{2\,\alpha}\,y)(x) \\ &= a_1\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)}\,x^{-1} + a_2\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)}\,\frac{\Gamma(2\,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1} - \lambda\,(D^{\alpha}\,o\,I^{2\,\alpha})\,y(x) \end{aligned}$$

Appliquons une deuxième fois D^{α} et en tenant compte que $D^{\alpha}\,o\,I^{\alpha} = id$, on obtient

$$(D^{\alpha})^2\,(T\,y)(x) = a_2\,D^{\alpha}\,(x^{\alpha-1}) - \lambda\,y(x)$$

d'où

$$(D^{\alpha})^2\,(T\,y)(x) + \lambda\,y(x) = 0.$$

Vérifions maintenant les conditions initiales :

$$x^{1-\alpha}\,(T\,y)(x) = a_1 + x^{\alpha}\,a_2\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} - \frac{\lambda\,x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,y(t)\,dt$$

Passons à la limite

$$\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha}\,(T\,y)(x) = a_1.$$

Pour la deuxième condition initiale on a

$$\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha}\,(D^{\alpha}\,T\,y)(x) \;=\; \lim_{x\to 0+} [a_2 - \lambda\,x^{1-\alpha}\,(D^{\alpha}\,o\,I^{2\,\alpha})\,y(x)] \;=\; a_2$$

d'où le résultat. ■

Proposition 3.1.3.

$$T:\; C_\alpha \;\longrightarrow\; C_\alpha.$$

Démonstration. Montrons que si $y \in C_\alpha$ alors $T\,y \in C_\alpha$.

Vérifions la condition au limite en 0^+.

$$\begin{aligned}
\left|x^{1-\alpha}\,(T\,y)(x) - a_1\right| &= \left|x^{\alpha}\,a_2\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} - \frac{\lambda\,x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,y(t)\,dt\right| \\
&\leq x^{\alpha}\;|a_2|\;\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} + \frac{|\lambda|\;x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,y(t)\,dt \\
&\leq x^{\alpha}\;|a_2|\;\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} + \frac{|\lambda|\;x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,t^{\alpha-1}(t^{1-\alpha}\;|y(t)|)\,dt \\
&\leq x^{\alpha}\;|a_2|\;\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} + \frac{|\lambda|\;x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\;\|y\|_{\alpha}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,t^{\alpha-1}\,dt \\
&\leq x^{\alpha}\;|a_2|\;\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} + \frac{|\lambda|\;x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\;\|y\|_{\alpha}\int_0^x (1-\tau)^{2\,\alpha-1}\,\tau^{\alpha-1}\,x^{3\,\alpha-1}\,d\tau
\end{aligned}$$

aprés le changement de variable $\tau = \dfrac{t}{x}$ et en utilisant la fonction Bêta d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|x^{1-\alpha}\,(T\,y)(x) - a_1\right| &\leq x^{\alpha}\;|a_2|\;\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} + \frac{|\lambda|\;x^{2\,\alpha}\;\|y\|_{\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\,\frac{\Gamma(2\,\alpha)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\,\alpha)} \\
&\leq x^{\alpha}\;|a_2|\;\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} + \frac{|\lambda|\;x^{2\,\alpha}\;\|y\|_{\alpha}\;\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\,\alpha)} \qquad \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad x \to 0^+
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

Proposition 3.1.4. *T est un opérateur contractant i.e.*

$$\exists\, 0 < b_1 \leq 1 \quad \textit{tel que} \quad T:\; C_{\alpha} \longrightarrow C_{\alpha} \;\; \textit{est contractant.}$$

Démonstration. On a

$$|(T\,y)(x) - (T\,z)(x)| \leq \frac{|\lambda|}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\;|y(t)-z(t)|\;dt$$

$$\leq \frac{|\lambda|\;\|y-z\|_{\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\,t^{\alpha-1}\,dt \;\leq\; \frac{|\lambda|\;\|y-z\|_{\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\,x^{3\,\alpha-1}\,\frac{\Gamma(2\,\alpha)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\,\alpha)}$$

donc

$$x^{1-\alpha}\ |(T\ y)(x) - (T\ z)(x)| \ \leq\ \frac{|\lambda|\ b_1^{2\,\alpha}\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\,\alpha)}\ \|y - z\|_\alpha$$

$$\Longrightarrow \|T\ y - T\ z\|_\alpha\ \leq\ \frac{|\lambda|\ b_1^{2\,\alpha}\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\,\alpha)}\ \|y - z\|_\alpha$$

Pour que T soit contractant il faut que $\dfrac{|\lambda|\ b_1^{2\,\alpha}\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\,\alpha)} < 1$ d'où $b_1 < \left(\dfrac{\Gamma(3\,\alpha)}{|\lambda|\ \Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2\,\alpha}}$

donc il faut choisir $b_1 < min\left(1, \left(\dfrac{\Gamma(3\,\alpha)}{|\lambda|\ \Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2\,\alpha}}\right)$. ■

Le théorème du point fixe de Banach montre l'existence de la solution du problème de Cauchy. D'où l'ensemble de solutions du problème de Cauchy n'est pas vide. Ennonçons maintenant le théorème d'unicité.

Théorème 3.1.5. *Le problème de Cauchy (3.2) admet une solution unique dans l'espace C_α avec*

$$b_1 < min\left(1, \left(\frac{\Gamma(3\,\alpha)}{|\lambda|\ \Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2\,\alpha}}\right)$$

Démonstration.

Soient y et z deux solutions de l'équation différentielle, alors on a

$$y(x) = a_1\ x^{\alpha-1} + a_2\ x^{2\,\alpha-1}\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} - \frac{\lambda}{\Gamma(2\,\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\ y(t)\ dt, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

et

$$z(x) = c_1\ x^{\alpha-1} + c_2\ x^{2\alpha-1}\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} - \frac{\lambda}{\Gamma(2\,\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\ z(t)\ dt, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$\begin{aligned}
|y(x) - z(x)| \ &\leq\ |a_1 - c_1|\ x^{\alpha-1} + |a_2 - c_2|\ x^{2\,\alpha-1}\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(2\,\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\ |y(t) - z(t)|\ dt. \qquad \forall x \in [0, b_1] \\
&\leq\ C + \frac{\lambda}{\Gamma(2\,\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\ |y(t) - z(t)|\ dt \\
&\text{avec } C = |a_1 - c_1|\ b_1^{\alpha-1} + |a_2 - c_2|\ b_1^{2\,\alpha-1}\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\,\alpha)} \geq 0
\end{aligned}$$

donc

$$x^{1-\alpha}\ |y(x)-z(x)| \leq C + \frac{\lambda\, x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\, t^{\alpha-1}\, t^{1-\alpha}\ |y(t)-z(t)|\ dt$$

$$\Longleftrightarrow\ w(x)\ \leq\ C + \frac{\lambda\, x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)} \int_0^x (x-t)^{2\,\alpha-1}\, t^{\alpha-1}\, w(t)\, dt$$

où : $w(x) = \|y-z\|_\alpha$ est une fonction positive sur $[0, b_1]$.
Pour pouvoir appliquer le lemme de Gronwall, essayons de se débarasser de x à l'intérieur de l'intégrale et cela en utilisant l'inégalité de Hölder.
D'où, $\forall\ p, q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on a :

$$w(x)\ \leq\ C + \frac{\lambda\, x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)} \left(\int_0^x (x-t)^{2\,q\,\alpha-q}\, t^{q\,\alpha-q}\ dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x w^p(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)^{2\,q\,\alpha-q}\, t^{q\,\alpha-q}\ dt\ &=\ x^{2\,q\,\alpha-q+q\,\alpha-q+1}\ \frac{\Gamma(2\,q\,\alpha-q+1)\ \Gamma(q\,\alpha-q+1)}{\Gamma(3\,q\,\alpha-2\,q+2)} \\ &=\ x^{3\,q\,\alpha-2\,q+1}\ \frac{\Gamma(2\,q\,\alpha-q+1)\ \Gamma(q\,\alpha-q+1)}{\Gamma(3\,q\,\alpha-2\,q+2)}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}w(x)\ &\leq\ C + \frac{\lambda\, x^{1-\alpha}}{\Gamma(2\,\alpha)}\ x^{3\,\alpha-2+\frac{1}{q}} \left(\frac{\Gamma(2\,q\,\alpha-q+1)\ \Gamma(q\,\alpha-q+1)}{\Gamma(3\,q\,\alpha-2\,q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x w^p(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq\ C + \frac{|\lambda|\ b_1^{2\,\alpha-1+\frac{1}{q}}}{\Gamma(2\,\alpha)} \left(\frac{\Gamma(2\,q\,\alpha-q+1)\ \Gamma(q\,\alpha-q+1)}{\Gamma(3\,q\,\alpha-2\,q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x w^p(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq\ C + K \left(\int_0^x w^p(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

d'où

$$w^p(x) \leq \left[C + K \left(\int_0^x w^p(t)\ dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p, \qquad \forall x \in [0, b_1],\ \forall C,\ K \in \mathbb{R}_+.$$

Soit la fonction h définie par $h(u) = u^s = e^{s\,ln\,u}$, $\forall u > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ alors h est une fonction convexe.

Ce qui donne

$$\begin{aligned} w^p(x) &\leq 2^p \left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} K \left(\int_0^x w^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\leq 2^{p-1} C^p + 2^{p-1} K^p \int_0^x w^p(t) dt \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le lemme de Gronwall (voir annexe)

$$\begin{aligned} & w^p(x) \leq 2^{p-1} C^p \, exp \left(2^{p-1} K^p \int_0^x dt \right) = 2^{p-1} C^p \, exp \, (2^{p-1} K^p \, x) \\ & \Rightarrow w(x) \leq 2^{\frac{1}{q}} C \, exp \, (\frac{1}{p} 2^{p-1} K^p \, x), \qquad \forall x \in [0, b_1], \ \forall C, \ K \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Si on fixe x dans $]0,1]$ alors en tenant compte des égalités suivantes : $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$ et le fait que $w(x) > 0$, on aura $w(x) = 0 \Longleftrightarrow y(x) = z(x)$.
D'où l'énoncé. ■

3.2 Problème aux limites

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (D^{\alpha})^2 \, y(x) + \lambda \, y(x) = 0 & , 0 < x < 1, \ 0 < \alpha < 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} I^{1-\alpha} \, y(x) = 0 & , y(1) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Définition 3.2.1. *Le nombre λ est appelé une valeur propre du problème* (3.3) *s'il existe une fonction à valeur complexe $y \in C[0,1]$ tel que $D^{\alpha} \, y \in C_{\alpha}(0,1)$, non identiquement nulle, pour laquelle les relations du problème* (3.3) *sont vérifiées.*

3.2.1 Equation des valeurs propres

On a déja obtenu l'équation intégrale suivante :

$$y(x) + \lambda \, (I^{2\alpha} \, y)(x) = a_1 \, x^{\alpha - 1} + a_2 \, x^{2\alpha - 1} \, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}.$$

d'où

$$(id + \lambda \, I^{2\alpha}) \, y(x) = a_1 \, x^{\alpha - 1} + a_2 \, x^{2\alpha - 1} \, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$$

Maintenant on peut facilement montrer que dans l'espace C_{α} l'opérateur $I^{2\alpha}$ est borné et pour $|\lambda|$ petit on a $\|\lambda \, I^{2\alpha}\| < 1$. Ceci nous permet d'inverser $(id + \lambda \, I^{2\alpha})$ par la série de Newmann :

$$(id + \lambda\, I^{2\alpha})^{-1} \;=\; \sum_{k\geq 0} (-\lambda\, I^{2\alpha})^k \;=\; \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, I^{2\alpha k}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
y(x) \;&=\; \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, I^{2\alpha k} \left(a_1\, x^{\alpha-1} + a_2\, x^{2\alpha-1}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \right) \\
&=\; a_1 \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, I^{2\alpha k}(x^{\alpha-1}) + \frac{a_2\, \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, I^{2\alpha}(x^{2\alpha-1}) \\
&=\; a_1 \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, \Gamma(\alpha)\, \frac{x^{2\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+\alpha)} + a_2\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, \Gamma(2\alpha)\, \frac{x^{2\alpha k+2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)} \\
&=\; a_1\, \Gamma(\alpha)\, x^{\alpha-1} \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(2\alpha k+\alpha)} + a_2\, \Gamma(\alpha)\, x^{2\alpha-1} \sum_{k\geq 0} (-\lambda)^k\, \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(2\alpha k+2\alpha)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$y(x) \;=\; a_1\, \Gamma(\alpha)\, x^{\alpha-1}\, E_{\frac{1}{2\alpha}}(-\lambda\, x^{2\alpha}, \alpha) + a_2\, \Gamma(\alpha)\, x^{2\alpha-1}\, E_{\frac{1}{2\alpha}}(-\lambda\, x^{2\alpha}, 2\alpha)$$

En appliquant les conditions aux limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0+} I^{1-\alpha}\, y(x) = 0$ et $y(1) = 0$ avec $a_2 \in \mathbb{R}^*$, on obtient l'équation des valeurs propres

$$E_{\frac{1}{2\alpha}}\,(\lambda\,,\; 2\alpha) \;=\; 0 \tag{3.4}$$

Par conséquant, étudier les valeurs propres du problème (3.3) revient à étudier les zéros de la fonction $E_\rho\,(-\lambda\,,\; \mu)$ avec $\rho = (2\alpha)^{-1}$ et $\mu = 2\alpha$.

3.2.2 Etude des valeurs propres

3.2.2.1 Existence des valeurs propres

Lemme 3.2.2. *$\forall \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, $z \in \mathbb{C}$, $Re\ z > 0$, on a la représentation suivante :*

$$E_{\frac{1}{2\alpha}}(-z^{2\alpha}, 2\alpha) = \frac{1}{\alpha}\, z^{2\alpha(1-2\alpha)}\, exp\left(z\, cos\, \frac{\pi}{2\alpha}\right)\, cos\left(z\, sin\, \frac{\pi}{2\alpha} + \pi\left(\frac{1-2\alpha}{2\alpha}\right)\right) + \Omega_\alpha(z)$$

dont le reste est donné par

$$\Omega_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{z^{2\alpha k+2\alpha}\, \Gamma(-2\alpha k)} + O\left(\frac{1}{z^{2\alpha(N+1)}}\right), \quad z \longrightarrow +\infty$$

Démonstration. La représentation intégrale de la fonction $\dfrac{1}{\Gamma(w)}$ sur le contour de Hankel est donnée par

$$\frac{1}{\Gamma(w)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\varepsilon} e^z \, z^{-w} \, dz$$

On en déduit la représentation intégrale de la fonction de Mittag Leffler définie par

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{\rho}+\mu)}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_\rho(z,\mu) &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{H_\varepsilon} e^\xi \, \xi^{-\frac{k}{\rho}-\mu} \, d\xi \right) z^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\varepsilon} e^\xi \, \xi^{-\mu} \sum_{k\geq 0} \left(z \, \xi^{-\frac{1}{\rho}} \right)^k d\xi \end{aligned}$$

si $\left| \dfrac{z}{\xi^{\frac{1}{\rho}}} \right| < 1$ alors

$$\begin{aligned} E_\rho(z,\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\varepsilon'}} e^\xi \, \xi^{-\mu} \left(1 - \frac{z}{\xi^{\frac{1}{\rho}}} \right)^{-1} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^\xi \, \xi^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{\xi^{\frac{1}{\rho}} - z} \, d\xi \end{aligned}$$

pour $z = -x^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho = \dfrac{1}{2\,\alpha}$ et $\mu = 2\,\alpha$, on aura

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2\alpha}}(-x^{2\,\alpha}, 2\,\alpha) &= \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^\xi \, \xi^{2\,\alpha-2\,\alpha}}{\xi^{2\,\alpha} + x^{2\,\alpha}} \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{H_{\varepsilon'}} \frac{e^\xi}{\xi^{2\,\alpha} + x^{2\,\alpha}} \, d\xi. \end{aligned}$$

avec

$$\left| \frac{-x^{2\,\alpha}}{\xi^{2\,\alpha}} \right| < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{|\xi|} < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < x < \varepsilon'$$

les points singuliers de cette intégrale vérifient l'équation suivante :

$$\xi^{2\,\alpha} + x^{2\,\alpha} = 0 \Leftrightarrow \xi^{2\,\alpha} = -x^{2\,\alpha}.$$

Soit $\xi = |\xi| \; e^{i\,\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ alors l'équation précédente est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} |\xi| = x \\ 2\,\alpha\,\theta = \pi + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\xi| = x \\ \theta = \dfrac{\pi}{2\,\alpha}\,(2\,k+1), \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

On a $-\pi < \theta < \pi$ ce qui implique que

$$-\pi \; < \; \frac{\pi}{2\,\alpha}\,(2\,k+1) \; < \; \pi$$

et puis

$$-\frac{2\,\alpha+1}{2} \; < \; k \; < \; \frac{2\,\alpha-1}{2}$$

Comme $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ alors les entiers relatifs k possibles sont 0 et -1.
D'où les points singuliers sont $\xi_+ = x\; e^{i\,\pi/2\,\alpha}$ et $\xi_- = x\; e^{-i\,\pi/2\,\alpha}$ qui sont deux pôles simples et le domaine où ils se trouvent est donné par $S_1 = [\frac{-2\,\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{2\,\pi}{3}]$.
Si $\theta \notin S_1$ alors

$$E_{\frac{1}{2\alpha}}(-x^{2\,\alpha}, 2\,\alpha) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{H_{\varepsilon}{}'} \frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}\,d\xi$$

sinon d'aprés le théorème de Cauchy, on aura

$$E_{\frac{1}{2\,\alpha}}(-x^{2\,\alpha}, 2\,\alpha) = Res\,\left(\frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}, \xi_+\right) + Res\,\left(\frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}, \xi_-\right) + \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{H_{\varepsilon}{}'} \frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}\,d\xi$$

Calculons maintenant les résidus, commençons d'abord par le résidu en ξ_+

$$Res\,\left(\frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}, \xi_+\right) \; = \; \lim_{\xi\to\xi_+} \frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}$$

puisque

$$\lim_{\xi\to\xi_+} e^{\xi} \neq 0, \quad \lim_{\xi\to\xi_+} (\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}) = 0$$

et

$$\lim_{\xi\to\xi_+} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}\right) \; = \; \lim_{\xi\to\xi_+} 2\,\alpha\,x^{2\,\alpha-1} = 2\,\alpha\,x^{2\,\alpha-1}\;e^{i\,\frac{\pi\,(2\,\alpha-1)}{2\,\alpha}} \; \neq \; 0$$

alors

$$\begin{aligned} Res\,(\frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}, \xi_+) \; &= \; \lim_{\xi\to\xi_+} \frac{e^{\xi}}{2\,\alpha\,\xi^{2\,\alpha-1}} \; = \; \frac{1}{2\,\alpha}\,e^{x\,e^{i\,\frac{\pi}{2\alpha}}}\,x^{1-2\,\alpha}\,e^{i\,\pi\,\frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}} \\ &= \; \frac{1}{2\,\alpha}\,x^{1-2\,\alpha}\,exp\left(x\,e^{i\,\frac{\pi}{2\alpha}} + i\,\pi\,\frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}\right) \\ &= \; \frac{1}{2\,\alpha}\,x^{1-2\,\alpha}\,exp\left(x\,cos\,\frac{\pi}{2\,\alpha}\right)\;exp\left[i\left(x\,sin\,\frac{\pi}{2\,\alpha} + \pi\,\frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)\right] \end{aligned}$$

si on procède de la même façon pour le résidu en ξ_-, on aura

$$\begin{aligned} Res\,\left(\frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha}+x^{2\,\alpha}}, \xi_-\right) \; &= \; \lim_{\xi\to\xi_-} \frac{e^{\xi}}{2\,\alpha\,\xi^{2\,\alpha-1}} \; = \; \frac{1}{2\,\alpha}\,x^{1-2\,\alpha}\,exp\left(x\,e^{i\,\frac{\pi}{2\alpha}} - i\,\pi\,\frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}\right) \\ &= \; \frac{1}{2\,\alpha}\,x^{1-2\,\alpha}\,exp\left(x\,cos\,\frac{\pi}{2\,\alpha}\right)\;exp\left[i\left(-x\,sin\,\frac{\pi}{2\,\alpha} - \pi\,\frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)\right] \end{aligned}$$

d'où la somme des résidus est donnée par

$$\frac{1}{\alpha}\, x^{1-2\,\alpha}\, exp\left(x\, cos\, \frac{\pi}{2\,\alpha}\right)\, cos\left(x\, sin\, \frac{\pi}{2\,\alpha} + \pi\, \frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)$$

à cause de la propriété suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad cos\; t = \frac{e^{i\,t} + e^{-it}}{2}.$$

Par conséquent, si $\theta \in S_1$ alors

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2\,\alpha}}(-x^{2\,\alpha}, 2\,\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\, x^{1-2\,\alpha}\, exp\left(x\, cos \frac{\pi}{2\,\alpha}\right)\, cos\left(x\, sin\, \frac{\pi}{2\,\alpha} + \pi\left(\frac{1-2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha} + x^{2\,\alpha}}\, d\xi. \end{aligned}$$

On a abouti à la partie principale de la première représentation du lemme (3.2.2). Transformons maintenant l'intégrale dans cette dernière représentation

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}(x) &= \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{e^{\xi}}{\xi^{2\,\alpha} + x^{2\,\alpha}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\,\pi\, i\, x^{2\,\alpha}} \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{e^{\xi}}{1 + (\frac{\xi}{x})^{2\,\alpha}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\,\pi\, i\, x^{2\,\alpha}} \int_{H_{\varepsilon}'} e^{\xi} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{-\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}\right)^{k} + \frac{(-1)^{N}\, (\frac{\xi}{x})^{2\,\alpha\, N}}{1 + \frac{\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}}\right] d\xi \end{aligned}$$

aprés l'utilisation de la relation suivante :

$$\frac{1}{1-q} \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} q^{k} + \frac{q^{N}}{1-q}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}(x) &= \frac{x}{2\,\pi\, i\, x^{2\,\alpha}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k}}{x^{2\,\alpha\, k}} \int_{H_{\varepsilon}'} e^{\xi}\, \xi^{2\,\alpha\, k}\, d\xi + \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{(-1)^{N}\, (\frac{\xi}{x})^{2\,\alpha\, N}}{1 + \frac{\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}}\, d\xi\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k}}{x^{2\,\alpha\, k + 2\,\alpha}} \left(\frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{H_{\varepsilon}'} e^{\xi}\, \xi^{2\,\alpha\, k}\, d\xi\right) + \frac{1}{2\,\pi\, i\, x^{2\,\alpha}} \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{(-1)^{N}\, (\frac{\xi}{x})^{2\,\alpha\, N}}{1 + \frac{\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}}\, d\xi. \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k}}{x^{2\,\alpha\, k+2\,\alpha}\; \Gamma(-2\,\alpha\, k)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^{2\,\alpha}\; \Gamma(-2\,\alpha)} < 0$$

et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}\right) = 1$$

alors

$$\frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{(-1)^N \, (\frac{\xi}{x})^{2\,\alpha\,N}}{1 + \dfrac{\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}} \, d\xi$$

est bornée à l'infini, par suite

$$\frac{1}{x^{2\,\alpha\,(N+1)}} \, \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{H_{\varepsilon}'} \frac{(-1)^N \, \xi^{2\,\alpha\,N}}{1 + \dfrac{\xi^{2\,\alpha}}{x^{2\,\alpha}}} \, d\xi \; = \; O\left(\frac{1}{x^{2\,\alpha\,(N+1)}}\right).$$

d'où le résultat. ∎

Théorème 3.2.3. $\forall \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$,*le problème (3.3) admet au moins une valeur propre.*

Démonstration. On a

$$E_{\frac{1}{2\,\alpha}}(0, 2\,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(2\,\alpha)} > 0 \qquad \forall \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$$

et d'aprés le lemme (3.2.2) on a

$$E_{\frac{1}{2\,\alpha}}\,(-\lambda, 2\,\alpha) \approx \frac{-1}{\lambda\,\Gamma(2\,\alpha)} < 0 \quad \text{ quand } \; \lambda \to +\infty$$

donc il existe au moins un zéro pour la fonction $E_{\frac{1}{2\,\alpha}}\,(-\lambda, 2\,\alpha)$. ∎

Conclusion

Ce mémoire est consacré à l'étude des valeurs propres de certaines équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux bords de type Dirichlet autrement dit à la résolution du problème de zéros de certaines fonctions de type Mittag-Leffler. Les résultats de l'existence des valeurs propres réelles pour $0 < \alpha < 1$ sont présentés dans le tableau suivant :

$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, D^{\alpha}\, y(x) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$	$0 < \alpha \leq \dfrac{1}{3}$	existence
	$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$	n'a pas été étudié
	$\frac{2}{3} \leq \alpha < 1$	non existence (A.V.Pskhu [9])
$\begin{cases} (D^{\alpha})^2\, y(x) + \lambda\, y(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} I^{\,1-\alpha}\, y(x) = y(1) = 0 \end{cases}$	$0 < \alpha < \dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{\pi}{\rho} \leq \lvert arg\ \lambda \rvert \leq \pi$	non existence (A.M.Sedletskii[12])
	$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$	existence

Il serait intéréssant de considérer l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$(D^{\alpha})^2\, y(x) + \lambda\, (D^{\beta}\, y)(x) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \beta < 1.$$

Construire les conditions aux limites correspondantes et étudier leur valeurs propres.

Annexe

Nous donnons dans cette annexe quelques lemmes et théorèmes qui sont utilisées dans ce mémoire.

Lemme (Gronwall , cf. [10])
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, ϕ *et* ψ : $[a, b] \to \mathbb{R}$ positives et continues. On suppose

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, t \in [a, b],\ \varphi(t) \leq C + \int_a^t \phi(s)\, \psi(s)\, ds$$

Alors

$$\forall\, t \in [a, b],\ \varphi(t) \leq C\, e^{\int_a^t \psi(s)\, ds}$$

Lemme (Jordan, cf. [13])
Soit f une fonction continue sur le secteur $S = \left\{ z = r\, e^{i\,\theta};\ r > 0 \quad et \quad 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi \right\}$ telle que $\lim\limits_{\substack{|z| \to 0 \\ z \in S}} z\, f(z) = A$.
Si l'on note $\gamma\,(r) = \left\{ r\, e^{i\,\theta};\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \right\}$ alors $\lim\limits_{r \to 0} \int\limits_{\gamma\,(r)} f(z)\, dz = i\, (\theta_2 - \theta_1)\, A$.

Théorème (Rouché, cf. [13])
Soientt f et g deux fonctions analytiques sur et dans le contour simple fermé C.
Si $|f(z)| > |g(z)|$ sur C alors $f(z)$ et $[f(z) + g(z)]$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du contour C.

Théorème (cf. [2]) (Nombre de zéros dans un disque)
Soit f une fonction holomorphe dans Ω, supposons que $\overline{B(a, \rho)} \subset \Omega$ et que f ne s'annule pas sur le cercle de centre a et de rayon ρ alors f possède un nombre fini de zéros dans $B(a, \rho)$.

Suites convexes (cf. [14]) On dit qu'une suite u_n est convexe si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\, u_n = u_{n+1} + u_{n-1}.$$

Bibliographie

[1] M.M. Djrbashian. *Harmonic analysis and boundary value problems in the complex domain*, pages 1–9. Operator Theory Advances and Applications,Vol. 65. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1993.

[2] M.O. González. *Complex Analysis :Selected Topics.* Pure and Applied Mathematics :Monographs and Textbooks. Marcel Dekker,Inc, New York–Basel–Hong kong, 1992.

[3] H.M. Kilbas, A.A. Srivastava and J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[4] A.M. Nahušev. *The Sturm–Liouville problem for an ordinary second–order differential equation with fractional derivatives in the lowest terms.* Soviet Math.Dok., Vol. 18(N° 3) :666–670, 1977.

[5] I.V. Ostrovskii and I.N. Peresyolkova. *Nonasymptotic results on distribution of zeros of the function $E_\rho(z, \mu)$.* Analysis Mathematica, Vol. 23 :283–296, 1997.

[6] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Mathematics in Science and Engineering,Vol. 198. Academic Press, San–Diego, 1999.

[7] A.Yu. Popov. *On zeros of certain family of Mittag–Leffler functions.* Mathematical Sciences, Vol. 144(N° 4) :4228–4231, 2007.

[8] A.Yu. Popov. *On the number of real eigenvalues of a certain boundary–value problem for a second–order equation with fractional derivative.* Mathematical Sciences, Vol. 151(N° 1) :2726–2740, 2008.

[9] A.V. Pskhu. *On the real zeros of functions of Mittag–Leffler type.* Mathematical Notes, Vol. 77(N° 4) :546–552, 2005.

[10] H. Reinhard. *Equations différentielles, fondements et applications.* Dunod, Paris, 1982.

[11] S. Saks and A. Zygmund. *Analytic Functions.* Monographie Matematyczne–Warszawa, Poland, 1952.

[12] A.M. Sedletskii. *Nonasymptotic properties of roots of a Mittag–Leffler type function.* Mathematical Notes, Vol. 75(N° 3) :372–386, 2004.

[13] B.V. Shabat. *Introduction to Complex Analysis(Part II) :Functions of Several Variables.* Translations of Mathematical Monographs,Vol. 110. American Mathematical Society, Providence–Rhode Island, 1992.

[14] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* Cambridge Mathematical Library,Vol. I. Cambridge University Press, London–New York–Melbourne, 2002.