REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences

Dépatement de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Systèmes Dynamiques et Applications

Présentée par :

HERIS Amel

Sous le thème :

Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire

sous la direction de :
M**^{r}**. **M. Benchohra.** Professeur à l'université de SBA

Soutenu le:.......

A ma mère et mon père...

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur, Mouffak Benchohra, professeur à l'université de Sidi Bel-Abbes d'avoir accepter la direction de mon mémoire. Il m'a guide durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur Yebdri Mustapha, professeur à l'université de Tlemcen de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Messieurs Bouguima Sidi Mohamed, professeur à l'université de Tlemcen et Lakmeche Abdelkader, professeur à l'université de Sidi Bel-Abbes d'avoir accepter de faire partie de ce jury.

Je suis également très reconnaissante envers ma famille qui s'est constamment préoccupée de m'a scolarité et soutenu pendant toutes mes études universitaires.

Table des matières

Introduction

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour le problème de Darboux pour des équations et des inclusions différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire. Le contenu de ce mémoire est basée sur la thèse de doctorat [1].

Le terme "*calcul fractionnaire*" n'est pas nouveau. Il s'agit d'une généralisation de la différentiation et l'intégration d'ordre entier à la différentiation et l'intégration d'ordre non entier. Le sujet est aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps quand Leibniz, Gauss, Newton ont inventé ce type de calcul. A la fin de XIX siècle, plusieurs mathématiciens, comme P. S. Laplace (1812), J.B. J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A. K. Grunwald (1867-1872) [36] et A.V. Letnikov (1868-1872) [51, 52] ont contribué à ce sujet (Voir les références [29, 30, 41, 45, 53, 54, 59, 61]). Plusieur articles s'intéressent à l'étude de quelques classes d'équations différentielles d'ordre entier,voir [8, 12, 13, 14, 21, 44, 64]. Il y a eu un développement considérable dans l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire, ces dernières années ; voir les ouvrages de Kilbas et *al* [46], Miller et Ross [54], Podlubny [59], Samko et *al* [61], les articles de Delbosco et Rodino [23], Diethelm et *al* [26, 27, 28], El-Sayed [31], Mainardi [53], Momani et Hadid [55], Momani et *al* [56], Podlubny et *al* [60], Yu et Gao [65], les articles de Abbas et Benchohra [2, 3, 4]. Le livre de M. Caputo [15], publié en 1969, il est utilisé leur définition originale de la dérivée fractionnaire pour formuler et résoudre des problèmes en Viscoélasticité. Le calcul fractionnaire a plusieurs applications, (voir [26, 32, 33, 41, 53]), par exemples : viscoélasticité, théorie du contrôle, equation de diffusion, éléctricité, éléctromagnitiques, biologie...

La théorie de la dérivation fractionnaire remonte à plusieurs siècles : un exposé historique détaillé est donné en introduction de K.B. Oldham et J. Spanier [57] ; de plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars. Une synthèse théorique a été proposée dans le livre de K.S. Miller et B. Ross [54], où certains aspects algébriques des équations différentielles d'ordre fractionnaire sont complètement développés. Sur le plan mathématique, l'ouvrage russe [61] fait autorité ; il regroupe un ensemble de définitions et de théories absolument unique.

La méthode des sous et sur solutions a été appliquée pour étudier l'existence des solutions pour des problèmes à valeur initiale et problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires. Voir [5, 6, 39, 48, 49, 58].

Ce mémoire se compose en cinq chapitres et d'une bibiliographie. Dans le premier Chapitre, nous donnons notations, définitions, quelques propriétés du calcul fractionnaire, résultats préliminaires issu de l'analyse multivoque, et dans la dernière section on donne quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude du problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire avec condition locale suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u), \qquad (x,y) \in J := [0,a] \times [0,b], \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b]. \tag{2}$$

Ensuite nous étudierons ce problème avec condition non locale suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u), \qquad (x,y) \in J, \tag{3}$$

$$u(x,0) + Q(u) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) + H(u) = \psi(y),\ y \in [0,b]. \tag{4}$$

Le troisième chapitre présente quelques résultas d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire avec retard fini. Premièrement dans le cas fonctionnel suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u_{(x,y)}), \qquad (x,y) \in J, \tag{5}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y), \qquad (x,y)\in \tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{6}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{7}$$

Deuxièment nous étudierons ce problème dans le cas de type neutre suivant :

$${}^cD_0^r\Big[u(x,y)-g(x,y,u_{(x,y)})\Big]=f(x,y,u_{(x,y)}), \quad si \quad (x,y)\in J, \tag{8}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y); \quad si \quad (x,y)\in \tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{9}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{10}$$

Troisièment on va étudier le problème de Darboux pour des équations differentielles hyperboliques perturbées; d'abord on donnera des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux avec condition locale suivant :

$$({}^cD_0^ru)(x,y)=f(x,y,u_{(x,y)})+g(x,y,u_{(x,y)}), \qquad (x,y)\in J \tag{11}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y), \qquad (x,y)\in \tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{12}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{13}$$

Ensuite on donnera des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux avec condition non locale suivant :

$$({}^cD_0^ru)(x,y)=f(x,y,u_{(x,y)})+g(x,y,u_{(x,y)}), \qquad (x,y)\in J, \tag{14}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y), \qquad (x,y)\in \tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{15}$$

$$u(x,0)+Q(u)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)+K(u)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{16}$$

Puis on va utiliser la méthode des sous et sur solution pour étudier le problème de Darboux suivant :

$$({}^cD_0^ru)(x,y)=f(x,y,u(x,y)); \ si \quad (x,y)\in J, \tag{17}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{18}$$

Enfin on considère l'existence des solutions du problème suivant :

$$^{c}D_0^r\left(\frac{u(x,y)}{f(x,y,u(x,y))}\right)=g(x,y,u(x,y)),\quad si\ (x,y)\in J, \tag{19}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{20}$$

Pour la quatrième chapitre on donne des conditions suffisantes pour montrer l'existence et l'unicité des solutions du problème de Darboux pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires avec retard infini. On donnera la définition axiomatique et des exemple pour l'espace de phase $\mathcal{B}$.

Ensuite on va traiter le problème de Darboux dans le cas fonctionnel suivant :

$$(^{c}D_0^r u)(x,y)=f(x,y,u_{(x,y)}),\quad (x,y)\in J, \tag{21}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y),\quad (x,y)\in\tilde{J}':=]-\infty,a]\times]-\infty,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{22}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{23}$$

De plus on va étudier ce problème dans le cas de type neutre suivant :

$$^{c}D_0^r\Big(u(x,y)-g(x,y,u_{(x,y)})\Big)=f(x,y,u_{(x,y)}),\quad (x,y)\in J, \tag{24}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y),\quad (x,y)\in\tilde{J}':=]-\infty,a]\times]-\infty,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{25}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{26}$$

Le dernier chapitre introduit quelques conditions suffisantes pour montrer l'existence des solutions du problème de Darboux pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire.
La deuxième section est consacré à l'étude du problème de Darboux suivant :

$$(^{c}D_0^r u)(x,y)\in F(x,y,u_{(x,y)}),\ si\ (x,y)\in J, \tag{27}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y),\ si\ (x,y)\in \tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{28}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b], \tag{29}$$

où F est une application multivoque à valeurs compactes et convexes.

Ensuite on va étudier ce problème où le second membre est à valeurs non convexes.

Puis on va utiliser la méthode des sous et sur solutions pour étudier le problème de Darboux suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y)\in F(x,y,u(x,y)),\ si\ (x,y)\in J, \tag{30}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \tag{31}$$

Phrases et mots clés :Problème de Darboux, équation différentielle hyperbolique d'ordre fractionnaire, point fixe, dérivée de Caputo, solution, solutions extrémales, sous et sur solutions, inclusions différentielles, semi continuité supérieure.

Classifications A.M.S : 26**A**33, 26**A**42, 34**K**05, 34**A**60.

Chapitre Un

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit des notations, définitions, lemmes et théorèmes qui seront utilisés à travers les chapitres suivants.

1.1 Notations et définitions

Soit $J := [0, a] \times [0, b],\ a, b > 0$ et $\rho > 0$.
$L^\rho(J, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions u définies de J dans $\mathbb{R}^n$ intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\rho} = \Big(\int_0^a \int_0^b \|u(x, y)\|^\rho dsdt\Big)^{\frac{1}{\rho}},$$

où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
$L^\infty(J, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions mesurable $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ borné, muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \|u(x, y)\| \leq c,\ p.p\ (x, y) \in J\}.$$

$AC(J, \mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions absolument continues définie de J dans $\mathbb{R}^n$.
$C(J, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions u définies de J dans $\mathbb{R}^n$ continues muni de la norme :

$$\|u\|_\infty = \sup\{\|u(x, y)\| : (x, y) \in J\}.$$

$C(J,\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ definie par $\|u\|_\infty = \sup_{(x,y)\in J} |u(x,y)|$.
L'algèbre de Banach $C(J,\mathbb{R})$ muni d'une loi interne " $\cdot$ " définie par

$$(u \cdot v)(x,y) = u(x,y)v(x,y), \quad pour \ (x,y) \in J.$$

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F. f est dite compacte si $f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.2 *Soient E un espace de Banach et $A : E \longrightarrow E$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\|x - y\|_E, \ pour\ tout\ x, y \in E.$$

1.2 Quelques propriétés du calcul fractionnaire

Dans cette section, on introduit des notations, définitions et des lemmes concernant le calcul fractionnaire.

Définition 1.2.1 ([63]) *Soit $r = (r_1, r_2) \in]0,\infty[\times]0,\infty[$ et $u \in L^1(J,\mathbb{R}^n)$. L'intégrale d'ordre fractionnaire r au sens de Riemann-Liouville pour une fonction u est définie par :*

$$(I_0^r u)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} u(s,t)dsdt,$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma eulerienne définie par :

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty t^{\xi-1}e^{-t}dt, \ \xi > 0.$$

En particulier,

$$(I_0^0 u)(x,y) = u(x,y), \ (I_0^1 u)(x,y) = \int_0^x \int_0^y u(s,t)dsdt; \ p.p\ (x,y) \in J.$$

$I_0^r u$ existe pour tout $r_1, r_2 > 0$, où $u \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$.
Si $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$, alors $(I_0^r u) \in C(J, \mathbb{R}^n)$, en plus

$$(I_0^r u)(x, 0) = (I_0^r u)(0, y) = 0; \ x \in [0, a], \ y \in [0, b].$$

On a $(1 - r_1, 1 - r_2) \in]0, 1] \times]0, 1]$. Notons par $D_{xy}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, la dérivée mixte du second ordre.

Définition 1.2.2 ([63]) *Soit $r \in]0, 1] \times]0, 1]$ et $u \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$. La dérivée d'ordre fractinnaire r de type Caputo pour une fonction u est définie par l'expression :*

$$({}^c D_0^r u)(x, y) = (I_0^{1-r} D_{xy}^2 u)(x, y).$$

Et La dérivée d'ordre r de type Riemann-Liouville pour une fonction u est définie par l'expression :

$$({}^{RL} D_0^r u)(x, y) = (D_{xy}^2 I_0^{1-r} u)(x, y).$$

Pour le cas $r = (1, 1)$ on a

$$({}^c D_0^1 u)(x, y) = ({}^{RL} D_0^1 u)(x, y) = (D_{xy}^2 u)(x, y), \ \ \textit{pour} \ (x, y) \in J.$$

Soit $a_1 \in [0, a], \ z^+ = (a_1, 0) \in J, \ J_z = [a_1, a] \times [0, b]$. pour $w \in L^1(J_z, \mathbb{R}^n)$, l'expression

$$(I_{z^+}^r w)(x, y) = \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{a_1}^x \int_0^y (x - s)^{r_1 - 1} (y - t)^{r_2 - 1} w(s, t) ds dt,$$

est dite l'intégral d'ordre r de type Riemann-Liouville pour w.
La dérivée d'ordre fractinnaire r de type Caputo pour w est définie par :

$$({}^c D_{z^+}^r w)(x, y) = (I_{z^+}^{1-r} D_{xy}^2 w)(x, y).$$

La dérivée d'ordre r de type Riemann-Liouville pour w est définie par :

$$({}^{RL} D_{z^+}^r w)(x, y) = (D_{xy}^2 I_{z^+}^{1-r} w)(x, y).$$

Remarque 1.2.1 *Relation entre ${}^{RL} D_0^r$ et ${}^c D_0^r$*
Soit $u \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ et $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [0, b] \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions

absolument continues tel que $u(x,0)=\varphi(x);\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y);\ y\in[0,b]$ *et* $\varphi(0)=\psi(0)$. *Alors on a*

$$({}^{RL}D_0^r u)(x,y)=\lambda(x,y)+({}^{c}D_0^r u)(x,y);\ (x,y)\in J,$$

où

$$\begin{aligned}\lambda(x,y) &= \frac{x^{-r_1}}{\Gamma(r_2)\Gamma(1-r_1)}\int_0^y (y-t)^{-r_2}\dot{\psi}(t)dt\\ &+ \frac{y^{-r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(1-r_2)}\int_0^x (x-t)^{-r_1}\dot{\varphi}(t)dt+\frac{x^{-r_1}y^{-r_2}\varphi(0)}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}.\end{aligned}$$

1.3 Quelques notions d'analyse multivoque

Soit $(X,\|\cdot\|)$ un espace normé. On note :
$\mathcal{P}(X)=\{Y\in X: Y\neq\emptyset\}$, $\mathcal{P}_{cl}(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): Y\ \textit{fermé}\}$,
$\mathcal{P}_b(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): Y\ \textit{borné}\}$, $\mathcal{P}_{cp}(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): Y\ \textit{compact}\}$
et $\mathcal{P}_{cp,cv}(X)=\{Y\in\mathcal{P}(X): Y\ \textit{compact et convexe}\}$.
Pour plus de détails sur les applications multivoques voir les références [34, 62, 22, 43].

Définition 1.3.1 *Soit* $(X,\|\cdot\|)$ *un espace de Banach et* $G: X\longrightarrow\mathcal{P}(X)$ *est une application multivoque (ou une multifonction).*

- *Une application multivoque* $G: X\longrightarrow\mathcal{P}(Y)$ *est dite à valeurs convexes (resp.fermées) si pour tout* $x\in X$, $G(x)$ *est convexe (resp.fermé).*

- G *est borné si pour tout ensemble borné* B *dans* X *l'ensemble* $G(B)$ *est borné dans* X *;*

$$\sup_{x\in B}\{\sup\{\|y\|: y\in G(x)\}\}<\infty.$$

- G *est dite semi continue supérieurement (s.c.s) au ponit* $x_0\in X$ *si pour tout ouvert* W *contenant* $G(x_0)$ *il existe un voisinage ouvert* $V(x_0)$ *dans* X *tel que pour tout* $x\in V(x_0)$ *on a* $G(x)\subset W$.

- G *est dite complètement continue si* $G(B)$ *continue et relativement compact pour tout ensemble* B *borné de* X.

- *G admet un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.*

Définition 1.3.2 *Soit $G : J \longrightarrow \mathcal{P}_{cl}(\mathbb{R}^n)$ une application multivoque à valeurs fermées. On dit que G est mesurable si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la fonction*

$$(x, y) \mapsto d(u, G(x, y)) = \inf\{\|u - z\| : z \in G(x, y)\}$$

est mesurable sur J, où d est la distance induite par l'espace de Banach.

Lemme 1.3.1 *[22] Soit $G : J \longrightarrow \mathcal{P}_{b,cl,cv}(\mathbb{R})$ une application multivoque complètement continue. G est s.c.s si et seulement si le graghe de G est fermé ; i.e si $u_n \longrightarrow u_*$, $w_n \longrightarrow w_*$, avec $w_n \in G(u_n)$ alors $w_* \in G(u_*)$.*

Définition 1.3.3 *Une application multivoque $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est dite de Carathéodory si elle vérifie :*
(i) $(x, y) \longmapsto F(x, y, u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $u \longmapsto F(x, y, u)$ est semi continue supérieurement p.p $(x, y) \in J$.
De plus, si
(iii) pour tout $q > 0$, il existe une fonction $\varphi_q \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ avec $\|u\| \leq q$;

$$\|F(x, y, u)\| = \sup\{\|f\| : f \in F(x, y, u)\} \leq \varphi_q(x, y) \quad p.p \quad (x, y) \in J;$$

alors la fonction F est dite L^1-Carathéodory.

Définition 1.3.4 *Soit (X, d) un espace métrique, A et B deux parties non vides de X. On considère l'application $H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ donnée par :*

$$H_d(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\right\},$$

où $d(A, b) = \inf_{a \in A} d(a, b)$ et $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$. On convient que $d(x, \emptyset) = \infty$. H_d est une distance de Pompeiu - Hausdorff induite par la métrique d et l'espace $(\mathcal{P}_{cl}(X), H_d)$ est un espace métrique généralisé [47].

Pour chaque $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$, on définit l'ensemble :

$$S_{F,u} = \{f \in L^1(J, \mathbb{R}^n) : f(x, y) \in F(x, y, u(x, y)) \text{ p.p. } (x, y) \in J\}.$$

$S_{F,u}$ est l'ensemble des séléctions de F. Si F est à valeurs fermées, bornées et convexes et X est de dimension fini, alors $S_{F,y}$ est non vide.

Définition 1.3.5 *Un opérateur multivoque* $N : X \longrightarrow \mathcal{P}_{cl}(X)$ *est dit :*

a) γ*-Lipschitz s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que :*

$$H_d(N(u), N(v)) \leq \gamma d(u, v), \quad \textit{pour tout } u,\ v \in X,$$

b) contractant s'il est γ*-Lipschitz avec* $\gamma < 1$.

Maintenant, nous donnons quelques notions de base sur la théorie des algèbres de Banach. Soit X une algèbre de Banach muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.3.6 *Une fonction* $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite* Chandrabhan *si*
(i) la fonction $(x, y) \to f(x, y, z)$ *est mesurable pour tout* $z \in \mathbb{R}$,
(ii) la fonction $z \to f(x, y, z)$ *est croissante* $\quad$ *p.p* $(x, y) \in J$.

Définition 1.3.7 *Soit X une algèbre de Banach. On appelle cône de X, tout ensemble non vide fermé* K *de* X *verifiant :*
(i) $K + K \subseteq K$,
(ii) $\lambda K \subseteq K$ *pour* $\lambda \geq 0$,
(iii) $\{-K\} \cap K = \{0\}$, *où 0 est l'élément neutre de X.*
Un cône K *est appelé* positif *si*
(iv) $K \circ K \subseteq K$, *où "*$\circ$*" est la multiplication dans* X.

Définition 1.3.8 *Un cône* K *est appelé normal si la norme* $\|\cdot\|$ *est semi-monotone sur* K, *i.e il existe une constante* $\xi > 0$ *telle que* $\|u\| \leq \xi\|v\|$, *pour* $u \leq v$.

Nous équipons l'espace X par la relation d'ordre " $\leq$ " définie par :
pour tout $u, v \in X$: $u \leq v$ si et seulement si $v - u \in K$.

Si le cône K est normal dans X, alors tout ensemble ordonné borné dans X est de norme bornée.

Lemme 1.3.2 *(Dhage [25]) Soit* K *un cône positif dans une algèbre de Banach réelle* X *et soit* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$ *tel que* $u_1 \leq v_1$ *et* $u_2 \leq v_2$. *Alors* $u_1 u_2 \leq v_1 v_2$.

Pour tout $v, w \in X, v \leq w$, l'intervalle ordonné $[v, w]$ est un ensemble dans X donné par

$$[v, w] = \{u \in X : v \leq u \leq w\}.$$

Les cônes et leurs proriétés sont détaillés dans les références [32, 38].

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 1.4.1 *(Théorème du point fixe de Banach) [35].*
Soient X un espace de Banach, et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique. i.e $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.

Théorème 1.4.2 *(Alternative non linéaire de Leray - Schauder)[1934] [35].*
Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un convexe fermé. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$, $N : \overline{U} \longrightarrow C$ un opérateur complètement continu , alors on a l'alternative suivant : ou bien

1. *N admet un point fixe ; ou bien*
2. *il existe $u \in \partial U$; $u = \lambda N(u)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.*

Lemme 1.4.1 *(Alternative Non Linéaire de Leray - Schauder)[35].*
Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un convexe. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$, $N : \overline{U} \longrightarrow C$ une application multivoque s.c.s et compacte, alors on a l'alternative suivant : ou bien

1. *N admet un point fixe ; ou bien*
2. *il existe $u \in \partial U$; $u \in \lambda N(u)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.*

Théorème 1.4.3 *(Schauder)[66].*
Soit E un espace de Banach, M un convexe fermé borné de E et $A : M \longrightarrow M$ un opérateur continu et compact, alors A admet au moins un point fixe dans M.

Théorème 1.4.4 *(Théorème du point fixe de Schaefer)[35, 38].*
Soient X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu.
Si l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda Au = u, \text{ pour un certain } \lambda \in]0, 1[\ \}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.4.5 *(Dhage) ([24])*
Soit X une algèbre de Banach et soit $A, B : X \to X$ deux opérateurs tels que
- *(a) A est Lipschizien avec une constante de Lipschitz α,*
- *(b) B est compact et continu,*

(c) $\alpha M < 1$, *où* $M = \|B(X)\| := \sup\{\|Bz\| : z \in X\}$.
Alors ou bien
(i) l'équation $Au\,Bu = u$ *admet une solution, ou bien*
(ii) l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda[Au\,Bu] = u,\, 0 < \lambda < 1\}$ *est borné.*

Théorème 1.4.6 *(Théorème du point fixe de Burton et Kirk)([10]) .*
Soient X *un espace de Banach,* $A,\ B : X \longrightarrow X$ *sont deux opérateurs tels que :*

(i) A *est une contraction,*

(ii) B *est complètement continu. Alors ou bien*

- *l'équation opérationnelle* $u = A(u) + B(u)$ *admet une solution, ou bien*
- *l'ensemble*

$$\mathcal{E} = \left\{ u \in X : \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \lambda B(u) = u,\ pour\ \lambda \in]0,1[\ \right\}$$

est non borné.

Théorème 1.4.7 *(Krasnoselskii) ([7])*
Soit X *un espase de Banach, soit* $D \subset X$ *un convexe fermé borné, et soit* $A, B : D \to X$ *tel que* $Au + Bv \in D$ *pour tout* $(u,v) \in D$*. Si* A *est une contraction et* B *est complètement continu , alors l'équation*
$Aw + Bw = w$ *admet une solution* w *sur* D*.*

Théorème 1.4.8 *(Bohnenblust-Karlin)([9])*
Soient X *un espace de Banach et* $K \in \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ *et supposons que l'opérateur* $G : K \to \mathcal{P}_{cl,cv}(K)$ *est s.c.s et l'ensemble* $G(K)$ *est relativement compact dans* X*. Alors* G *admet un point fixe dans* K*.*

Théorème 1.4.9 *(Covitz-Nadler)[18].*
Soit (X,d) *un espace métrique complet. Si* $N : X \longrightarrow \mathcal{P}_{cl}(X)$ *est une contraction alors* N *admet un point fixe (i.e* $FixN \neq \emptyset$*).*

On utilise les théorèmes du point fixe suivants de Dhage [25] pour montrer l'éxistence des solutions extrémales.

Théorème 1.4.10
Soit K *un cône de l'algèbre de Banach* X *et soit* $v, w \in X$*. Supposons que* $A, B : [v,w] \to K$ *sont deux opérateurs tels que*

(a) A est complètement continu,
(b) B est totalement borné,
(c) $Au_1Bu_2 \in [v, w]$ pour tout $u_1, u_2 \in [v, w]$, et
(d) A et B sont croissants.

Si le cône K est positif et normal, alors l'équation opérationnelle $Au\,Bu = u$ admet un plus petit et un plus grand points fixes positifs dans $[v, w]$.

Théorème 1.4.11
Soit K un cône dans une algèbre de Banach X et soit $v, w \in X$. Supposons que $A, B : [v, w] \to K$ sont deux opérateurs tels que
(a) A est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz α,
(b) B est totalement borné,
(c) $Au_1\,Bu_2 \in [v, w]$ pour tout $u_1, u_2 \in [v, w]$, et
(d) A et B sont croissants.

En plus si le cône K est positif et normal, alors l'équation opérationnelle $Au\,Bu = u$ admet un plus petit et un plus grand points fixes positifs dans $[v, w]$, quand $\alpha M < 1$, où $M = \|B([v, w])\| := \sup\{\|Bu\| : u \in [v, w]\}$.

Remarque 1.4.1
L'hypothèses (c) des théorèmes 1.4.10 et 1.4.11 est satisfaite si les opérateurs A et B sont positifs croissants et ils existent des éléments v et w dans X tels que $v \leq Av\,Bv$ et $Aw\,Bw \leq w$.

Lemme 1.4.2 *(Lemme de Gronwall)([40])*
Soit $\upsilon : J \to [0, \infty)$ une fonction réelle et $\omega(.,.)$ une fonction positive et localement intégrable sur J. S'ils existent des constantes $c > 0$ et $0 < r_1, r_2 < 1$ tel que

$$\upsilon(x, y) \leq \omega(x, y) + c \int_0^x \int_0^y \frac{\upsilon(s, t)}{(x - s)^{r_1}(y - t)^{r_2}} dsdt,$$

alors il existe $\delta = \delta(r_1, r_2)$ tel que

$$\upsilon(x, y) \leq \omega(x, y) + \delta c \int_0^x \int_0^y \frac{\omega(s, t)}{(x - s)^{r_1}(y - t)^{r_2}} dsdt,$$

pour tout $(x, y) \in J$.

Lemme 1.4.3 *(Lemme d'Ascoli-Arzelà)[38]*
Soit $A \subset C(J, \mathbb{R}^n)$, A est relativement compact (i.e $\overline{A}$ est compact) si et seulement si :

1. *A est uniformément borné.*
2. *A est équicontinu.*

Chapitre Deux

Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire.

Dans la deuxième section on va étudier le problème de Darboux avec condition locale suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u), \qquad (x,y) \in J, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b]. \tag{2.2}$$

où ${}^cD_0^r$ est la dérivé de Caputo d'ordre $r = (r_1, r_2) \in]0,1]\times]0,1]$,
$f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, $\varphi : [0,a] \to \mathbb{R}^n, \psi : [0,b] \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions absolument continues telle que $\varphi(0) = \psi(0)$.

La troisième section est consacrée à l'étude du problème de Darboux avec condition non locale suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u), \qquad (x,y) \in J, \tag{2.3}$$

$$u(x,0)+Q(u)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)+K(u)=\psi(y),\ y\in[0,b]. \quad (2.4)$$

où f,φ,ψ sont comme dans le problème (2.1)-(2.2) et $Q,H : C(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Nous allons donnés trois résultats, le premier est un résultat d'unicité basé sur le théorème de Banach, le deuxième et le troisième sont des résultats d'existence basés respectivement sur le théorème de Schauder et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

2.2 Problème de Darboux avec condition locale

Soit le problème linéaire suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y)=f(x,y), \qquad (x,y)\in J, \qquad (2.5)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,y)=\psi(y), \qquad (x,y)\in J, \qquad (2.6)$$

où $f : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Définition 2.2.1 *Une fonction $u\in C(J,\mathbb{R}^n)$ avec sa dérivée mixte D^2_{xy} existe et intégrable sur J est dite solution du problème* (2.5)-(2.6) *si u satisfait les équations* (2.5) *et* (2.6) *sur J.*

Lemme 2.2.1 *La solution $u\in AC(J,\mathbb{R}^n)$ du problème* (2.5)-(2.6) *est définie par :*

$$u(x,y)=\mu(x,y)+I_0^r f(s,t)dsdt, \qquad (x,y)\in J \qquad (2.7)$$

où

$$\mu(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(0).$$

Preuve : Soit $u(x,y)$ solution du problème (2.5)-(2.6) .Alors d'après la définition de la dérivée $({}^cD_0^r u)(x,y)$, on a :

$$I_0^{1-r}(D^2_{xy}u)(s,t)=f(x,y).$$

Donc, on obtient

$$I_0^r(I_0^{1-r}D^2_{xy}u)(s,t)=(I_0^r f)(x,y),$$

alors
$$I_0^1 D_{xy}^2 u(s,t) = (I_0^r f)(x,y).$$
Puisque
$$I_0^1 (D_{xy}^2 u)(s,t) = u(x,y) - u(x,0) - u(0,y) + u(0,0),$$
on a
$$u(x,y) = \mu(x,y) + (I_0^r f)(x,y).$$
Maintenant soit $u(x,y)$ satisfait (2.7). Il est clair que $u(x,y)$ satisfait
$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y), \qquad sur\ J.$$

Corollaire 2.2.1 *Soit $f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction $u \in AC(J, \mathbb{R}^n)$ est une solution du problème* (2.1)-(2.2) *si et seulement si u satisfait l'équation intégrale :*
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u)dsdt \\ &\quad + \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0). \end{aligned}$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.2), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.2.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H1)$ *$f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.*

$(H2)$ *Il existe une constante $k > 0$ telle que :*
$$\|f(x,y,u_1) - f(x,y,u_2)\| \leq k\|u_1 - u_2\|_\infty,$$
pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ et $(x,y) \in J$.

Si
$$\frac{k a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1,$$
alors, le problème (2.1)-(2.2) *admet une seule solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur $A : C(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(J, \mathbb{R}^n)$ défini par :
$$(Au)(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u(s,t))dsdt.$$

A est bien défini, en effet : si $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ alors, $(Au) \in C(J, \mathbb{R}^n)$.
Pour montrer que A admet un point fixe il suffit de montrer que A est une contraction, en effet : si $u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R}^n)$ pour tout $(x, y) \in J$ alors,

$$\|(Au_1)(x,y) - (Au_2)(x,y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}\|f(s,t,u_1(s,t)) - f(s,t,u_2(s,t))\|dsdt \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u_1(s,t) - u_2(s,t)\|dsdt \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \|u_1 - u_2\|_\infty \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt \\
&\leq \frac{kx^{r_1}y^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \|u_1 - u_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|(Au_1) - (Au_2)\|_\infty \leq \frac{ka^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Donc A est une contraction et d'après le théorème de Banach A admet un seul point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

Notre deuxième résultat d'existence des solutions de (2.1)-(2.2) est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.2.2 *Supposons que* $(H1)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H3)$ *Il existe* $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$ *et* $\phi : [0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ *continue et croissante telle que :*

$$|f(x, y, u(x, y)| \leq p(x, y)\phi(\|u\|) \quad \forall\ (x, y) \in J \ et\ u \in \mathbb{R}^n.$$

$(H4)$ *Il existe* $r > 0$ *tel que :*

$$\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} p^*\phi(r) \leq r,$$

où $p^* = \sup_{(s,t)\in J} p(s, t)$,

alors, le problème (2.1)-(2.2) *admet au moins une solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur A défini dans le Théorème 2.2.1.

Soit :

$$M = \{u \in C(J, \mathbb{R}^n) : ||u||_\infty \leq r\},$$

où r est la constante définie dans $(H4)$.
Il est clair que M est convexe fermé et borné.
Montrons que si $u \in M$ alors, $Au \in M$:
Soit $u \in M$:

$$\|(Au)(x,y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\mu(x,y)\| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|f(s,t,u(s,t))\|dsdt \\
&\leq \|\mu(x,y)\| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s,t)\phi(\|u\|_\infty) \\
&\leq \|\mu\| + \frac{a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} p^*\phi(r) := r.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$||Au||_\infty \leq r.$$

Donc $Au \in M$.

- Montrons que A est continu, en effet : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C(J, \mathbb{R}^n)$ convergente pour la norme $||.||_\infty$ vers une limite u, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - u||_\infty = 0$. Il faut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||Au_n - Au||_\infty = 0$.
Soit $(x,y) \in J$

$$\|(Au_n)(x,y) - (Au)(x,y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}\|f(s,t,u_n(s,t)) - f(s,t,u(s,t))\|dsdt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1} \sup_{(s,t)\in J} \|f(s,t,u_n(s,t)) - f(s,t,u(s,t))\|dsdt \\
&\leq \frac{\|f(.,.,u_n) - f(.,.,u)\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}dsdt \\
&\leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,u_n) - f(.,.,u)\|_\infty}{r_1 r_2\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue alors,

$$\|A(u_n)-A(u)\|_\infty \leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,u_n)-f(.,.,u)\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \to 0 \ quand \ n \to \infty.$$

D'o$\grave{u}$ A est continu.

- Montrons que A est compact, en effet :
  $A(M)$ est relativement compact, c'est à dire :
  (a) $A(M)$ borné car $\|(Au)\| \leq r \quad \forall u \in M$.
  (b) $A(M)$ est équicontinu, en effet :
  Soit $u \in M$ et $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in J,\ x_1 < x_2 \ et \ y_1 < y_2$:

$$\begin{aligned}
&\|(Au)(x_2,y_2)-(Au)(x_1,y_1)\| \leq \|\mu(x_2,y_2)-\mu(x_1,y_1)\| \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}-(x_1-s)^{r_1-1} \\
&\times(y_1-t)^{r_2-1}]f(s,t,u(s,t))dsdt \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u(s,t))dsdt \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u(s,t))dsdt \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u(s,t))dsdt\| \\
\leq\ &\|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)\|+\frac{p^*\phi(r)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \\
&\times\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1}-(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}]dsdt \\
&+\frac{p^*\phi(r)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt \\
&+\frac{p^*\phi(r)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt \\
&+\frac{p^*\phi(r)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt \\
\leq\ &\|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)\| \\
&+\frac{p^*\phi(r)}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}
\end{aligned}$$

$$+x_1^{r_1}y_1^{r_2} - x_2^{r_1}y_2^{r_2} - 2(x_2 - x_1)^{r_1}(y_2 - y_1)^{r_2}].$$

Si $(x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$: $(Au)(x_2, y_2) \to (Au)(x_1, y_1)$, d'où A est équi-continue.

Alors, A est compact.

Donc d'après le théorème de Schauder l'opérateur A admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

Notre prochain résultat d'existence des solutions de problème (2.1)-(2.2) est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 2.2.3 *Supposons que* $(H1)$ *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

$(H5)$ *Il existe deux fonctions* $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$\|f(x, y, u(x, y))\| \leq p(x, y) + q(x, y)\|u(x, y)\|, \quad \forall\ (x, y) \in J \text{ et } u \in C(J, \mathbb{R}^n).$$

Alors, le problème (2.1)-(2.2) *admet au moins une solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur A défini dans le Théorème 2.2.1.

- A est continu d'après le théorème 2.2.2.
- A est complètement continu : c'est à dire $A(B_\eta)$ est relativement compact pour tout borné B_η.

  Soit l'ensemble :

$$B_\eta = \{u \in C(J, \mathbb{R}^n) : ||u||_\infty \leq \eta\}.$$

$A(B_\eta)$ est relativement compact si :

(i) $A(B_\eta)$ est borné, en effet : Soit $u \in B_\eta$ et $(x, y) \in J$ alors,

$$\|A(u)(x, y)\| \leq \|\mu(x, y)\|$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|f(s, t, u(s, t))\|dsdt \\
\leq\ & \|\mu(x, y)\| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left\| \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s, t)dsdt\right\| \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s, t)\|u(s, t)\|_\infty dsdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\mu(x,y)\| + \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} dsdt \\
&\quad + \frac{\|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} dsdt \\
&\leq \|\mu\|_\infty + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} a^{r_1} b^{r_2} := \ell.
\end{aligned}
$$

Donc $||Au||_\infty \leq \ell$ et par suite $A(B_\eta)$ est borné.

(ii) $A(B_\eta)$ est équicontinu, en effet :

Soit $u \in B_\eta$ et $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in J,\ x_1 < x_2\ et\ y_1 < y_2$:

$$
\|A(u)(x_2,y_2) - A(u)(x_1,y_1)\| \leq
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\mu(x_1,y_1) - \mu(x_2,y_2)\| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \| \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} [(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} - (x_1-s)^{r_1-1} \\
&\quad \times (y_1-t)^{r_2-1}] f(s,t,u(s,t)) dsdt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} f(s,t,u(s,t)) dsdt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} f(s,t,u(s,t)) dsdt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{y_1} (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} f(s,t,u(s,t)) dsdt \| \\
&\leq \|\mu(x_1,y_1) - \mu(x_2,y_2)\| + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \\
&\quad \times \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} [(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1} - (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}] dsdt \\
&\quad + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} dsdt \\
&\quad + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} dsdt \\
&\quad + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{y_1} (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} dsdt \\
&\leq \|\mu(x_1,y_1) - \mu(x_2,y_2)\| \\
&\quad + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} [2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1} + 2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}
\end{aligned}
$$

$$+x_1^{r_1}y_1^{r_2} - x_2^{r_1}y_2^{r_2} - 2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].$$

Si $(x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$: $(Au)(x_2, y_2) \to (Au)(x_1, y_1)$, d'où A est équicontinu.

Alors, A est complètement continu.

Soit $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ tel que $u = \lambda A(u)$ pour $\lambda \in]0,1[$. Alors, d'après $(H5)$ et pour tout $(x, y) \in J$, on a :

$$\|u(x,y)\| \leq \|\mu(x,y)\|$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}[p(s,t)+q(s,t)\|u(s,t)\|]dsdt \\
\leq\ & \|\mu(x,y)\| + \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2} \\
&+\frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u(s,t)\|dsdt.
\end{aligned}$$

D'après lemme de Gronwall, on a :

$$\begin{aligned}
\|u(x,y)\| &\leq [\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}] \\
&\quad \times[1 + \frac{\delta\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt] \\
&\leq [\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}] \\
&\quad \times[1 + \frac{\delta a^{r_1}b^{r_2}\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}] := M.
\end{aligned}$$

Alors, $||u||_\infty \leq M$.
Soit :

$$U = \{u \in C(J, \mathbb{R}^n) : ||u||_\infty < M+1\}.$$

Comme $\forall u \in \partial U$ et $\forall \lambda \in]0,1[$, on a : $u \neq \lambda A(u)$.

Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder A admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

2.3 Problème de Darboux avec condition non locale

Définition 2.3.1 *Une fonction $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ avec sa dérivée mixte D^2_{xy} existe et intégrable sur J est dite solution du problème* (2.3)-(2.4) *si u satisfait les équations* (2.3) *et* (2.4) *sur J.*

Lemme 2.3.1 *$u \in AC(J, \mathbb{R}^n)$ est solution du problème* (2.3)-(2.4) *si et seulement si satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mu(x,y) - Q(u) - H(u) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u(s,t))dsdt. \end{aligned}$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (2.3)-(2.4), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.3.1 *Supposons que* $(H1)$, $(H2)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H2')$ *Il existe une constante $\tilde{k} > 0$ telle que :*

$$\|Q(u_1) - Q(u_2\| \le \tilde{k}\|u_1 - u_2\| \text{ pour tout } u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R}^n) \text{ et } (x,y) \in J.$$

$(H2'')$ *Il existe une constante $k^* > 0$ telle que :*

$$\|H(u_1) - H(u_2)\| \le k^*\|u_1 - u_2\| \text{ pour tout } u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R}^n) \text{ et } (x,y) \in J.$$

Si

$$\tilde{k} + k^* + \frac{k a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1,$$

alors, le problème (2.3)-(2.4) *admet une seule solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur $\overline{A} : C(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(J, \mathbb{R}^n)$
défini par :

$$\overline{A}u(x,y) = \mu(x,y) - Q(u) - H(u) + \frac{1}{\Gamma(r1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u(s,t))dsdt.$$

$\overline{A}$ est bien défini, en effet : si $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ alors, $(\overline{A}u) \in C(J, \mathbb{R}^n)$.
Pour montrer que $\overline{A}$ admet un point fixe il suffit de montrer que $\overline{A}$ est une

contraction,en effet : si $u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R}^n)$ pour tout $(x, y) \in J$ alors,

$$\|(\overline{A}u_1)(x,y) - (\overline{A}u_2)(x,y)\| \leq$$

$$\leq \|Q(u_1) - Q(u_2)\| + \|H(u_1) - H(u_2)\| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \|f(s,t,u_1(s,t)) - f(s,t,u_2(s,t))\| dsdt.$$

Et par $(H2), (H2')$ et $(H2'')$

$$\|(\overline{A}u_1)(x,y) - (\overline{A}u_2)(x,y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \tilde{k}\|u_1 - u_2\| + k^*\|u_1 - u_2\| \\
+ & \frac{k}{\Gamma(r1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \|u_1 - u_2\| dsdt \\
\leq & \tilde{k}\|u_1 - u_2\| + k^*\|u_1 - u_2\| \\
+ & \frac{k}{\Gamma(r1)\Gamma(r_2)} \|u_1 - u_2\| \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} dsdt \\
\leq & \tilde{k}\|u_1 - u_2\| + k^*\|u_1 - u_2\| + \frac{k\|u_1 - u_2\| a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r1+1)\Gamma(r_2+1)}.
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|(\overline{A}u_1) - (\overline{A}u_2)\|_\infty \leq \left[\tilde{k} + k^* + \frac{k a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r1+1)\Gamma(r_2+1)}\right] \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Donc $\overline{A}$ est une contraction et d'après le théorème de Banach $\overline{A}$ admet un seul point fixe qui est une solution du problème (2.3)-(2.4).

Maintenant nous donnons un résultat de l'existence basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.3.2 *Supposons que* $(H1)$ *et* $(H3)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H3')$ *Il existe* $\tilde{d} > 0$ *tel que :*

$$\|Q(u)\| \leq \tilde{d}(1 + \|u\|) \quad \textit{pour tout } u \in C(J, \mathbb{R}^n).$$

$(H3'')$ *Il existe* $d^* > 0$ *tel que :*

$$\|H(u)\| \leq d^*(1 + \|u\|) \quad \textit{pour tout } u \in C(J, \mathbb{R}^n).$$

$(H4')$ *Il existe* $r > 0$ *tel que :*

$$\|\mu\|_\infty + [\tilde{d} + d^*](1 + r) + \frac{a^{r_1} b^{r_2} p^* \phi(r)}{\Gamma(r_1 + 1)\Gamma(r_2 + 1)} \leq r,$$

où $p^* = \sup\limits_{(s,t)\in J} p(s,t)$.

Alors, le problème (2.3)-(2.4) *admet au moins une solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur $\overline{A}$ défini dans le théorème 2.3.1.

Soit :

$$M = \{u \in C(J, \mathbb{R}^n) : ||u||_\infty \leq r\},$$

où r est la constante définie dans $(H4')$.
Il est clair que M est convexe fermé et borné.
Montrons que si $u \in M$ alors, $\overline{A}u \in M$:
Soit $u \in M$:

$$\|(\overline{A}u)(x,y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \|\mu(x,y)\| + \|Q(u)\| + \|H(u)\| \\
& + \frac{1}{\Gamma(r1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \|f(s,t,u(s,t))\| dsdt \\
\leq\ & \|\mu\|_\infty + \tilde{d}(1 + \|u\|) + d^*(1 + \|u\|) \\
& + \frac{1}{\Gamma(r1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} p(s,t)\phi(\|u\|) dsdt \\
\leq\ & \|\mu\|_\infty + [\tilde{d} + d^*](1 + r) + \frac{a^{r_1} b^{r_2} p^* \phi(r)}{\Gamma(r1 + 1)\Gamma(r_2 + 1)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$||\overline{A}u||_\infty \leq r.$$

Donc $\overline{A}u \in M$.

- Montrons que $\overline{A}$ est continu et compact.

Donc d'après le théorème de Schauder l'opérateur $\overline{A}$ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.3)-(2.4).

Utilisons l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour donner un autre résultat d'existence des solutions du problème (2.3)-(2.4).

Théorème 2.3.3 *Supposons que* $(H1), (H3'), (H3'')$ *et* $(H5)$ *sont satisfaites. Alors, le problème* (2.3)-(2.4) *admet au moins une solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur $\overline{A}$ défini dans le Théorème 2.3.1.

- $\overline{A}$ est continu
- $\overline{A}$ est complètement continu

Soit $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ tel que $u = \lambda\overline{A}(u)$ pour $\lambda \in]0,1[$. Alors, d'après $(H5)$ et pour tout $(x,y) \in J$, on a :

$$\|u(x,y)\| \leq \|\mu(x,y)\| + [\tilde{d} + d^*](1 + \|u\|_\infty)$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}[p(s,t)+q(s,t)\|u(s,t)\|]dsdt \\
\leq\ & \|\mu(x,y)\| + [\tilde{d} + d^*](1+\eta) + \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2} \\
&+\frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u(s,t)\|dsdt.
\end{aligned}$$

D'après lemme de Gronwall, on a :

$$\begin{aligned}
\|u(x,y)\| \ &\leq \ \Big[\|\mu\|_\infty + [\tilde{d} + d^*](1+\eta) + \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big] \\
&\quad \times\Big[1 + \frac{\delta\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\Big] \\
&\leq \ \Big[\|\mu\|_\infty + [\tilde{d} + d^*](1+\eta) + \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big] \\
&\quad \times\Big[1 + \frac{\delta a^{r_1}b^{r_2}\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big] := M^*.
\end{aligned}$$

Alors, $||u||_\infty \leq M^*$.
Soit :

$$U = \{u \in C(J, \mathbb{R}^n) : ||u||_\infty < M^* + 1\}.$$

Comme $\forall u \in \partial U$ et $\forall \lambda \in]0,1[$, on a : $u \neq \lambda \overline{A}(u)$.

Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder A admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.3)-(2.4).

Chapitre Trois

Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques avec retard fini

3.1 Introduction

Ce chapitre présente quelques résultas d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire avec retard fini.

Dans la deuxième section on va étudier le problème de Darboux dans le cas fonctionnel suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u_{(x,y)}), \qquad (x,y) \in J, \tag{3.1}$$

$$u(x,y) = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \tilde{J} := [-\alpha, a] \times [-\beta, b] \backslash]0,a] \times]0,b], \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b], \tag{3.3}$$

où $\alpha, \beta, a, b > 0$, $C = C([-\alpha, 0] \times [-\beta, 0], \mathbb{R}^n)$, $f : J \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée,φ, ψ sont comme dans le problème (2.1)-(2.2), $\phi : \tilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction continue telle que :

$$\begin{array}{ll} \phi(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0,a]. \\ \phi(0,y) = \psi(y) & \forall y \in [0,b]. \end{array}$$

Pour tout $u \in C(\tilde{J}, \mathbb{R}^n)$ et pour tout $(x,y) \in J$ la fonction $u_{(x,y)} \in C([-\alpha, 0] \times [-\beta, 0], \mathbb{R}^n)$ définie par :

$$u_{(x,y)}(s,t) = u(x+s, y+t).$$

Ici $u_{(x,y)}(.,.)$ représente l'histoire de l'état u.

La troisième section est consacrée à l'étude du problème de Darboux dans le cas de type neutre suivant :

$$^{c}D_0^r\Big[u(x,y)-g(x,y,u_{(x,y)})\Big]=f(x,y,u_{(x,y)}),\quad si\quad (x,y)\in J, \tag{3.4}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y);\quad si\quad (x,y)\in\tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{3.5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b], \tag{3.6}$$

où f,ϕ,φ et ψ sont comme dans le problème (3.1) – (3.3) et
$g:J\times C([-\alpha,0]\times[-\beta,0],\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Pour la quatrième section on va étudier le problème de Darboux pour des équations differentielles hyperboliques perturbées ; d'abord on donnera des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux avec condition locale suivant :

$$(^{c}D_0^r u)(x,y)=f(x,y,u_{(x,y)})+g(x,y,u_{(x,y)}),\qquad (x,y)\in J \tag{3.7}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y),\qquad (x,y)\in\tilde{J}:=[-\alpha,a]\times[-\beta,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{3.8}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b], \tag{3.9}$$

où $f,g:J\times C([-\alpha,0]\times[-\beta,0],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ sont des fonctions données, $\phi:\tilde{J}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, $\varphi:[0,a]\to\mathbb{R},\ \psi:[0,b]\to\mathbb{R}$ sont des fonctions absolument continues tel que $\varphi(x)=\phi(x,0),\ \psi(y)=\phi(0,y)$ pour $x\in[0,a],\ y\in[0,b]$.

En suite on donnera des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux avec condition non locale suivant :

$$(^{c}D_0^r u)(x,y)=f(x,y,u_{(x,y)})+g(x,y,u_{(x,y)}),\qquad (x,y)\in J, \tag{3.10}$$

$$u(x,y)=\phi(x,y),\qquad (x,y)\in J, \tag{3.11}$$

$$u(x,0)+Q(u)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)+K(u)=\psi(y),\ y\in[0,b], \tag{3.12}$$

où f,g,ϕ,φ,ψ sont comme dans le problème (3.7)-(3.9) et $Q,K:C(J,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Puis on va utiliser la méthode des sous et sur solution pour étudier le problème de Darboux suivant :

$$(^{c}D_0^r u)(x,y)=f(x,y,u(x,y));\ si\ (x,y)\in J, \tag{3.13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b], \tag{3.14}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi : [0,a] \to \mathbb{R}$, $\psi : [0,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions absolument continues avec $\varphi(0) = \psi(0)$.

Pour la dernière section, on considère l'existence des solutions du problème suivant :

$${}^cD_0^r\left(\frac{u(x,y)}{f(x,y,u(x,y))}\right) = g(x,y,u(x,y)), \quad si\ (x,y) \in J, \tag{3.15}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b], \tag{3.16}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données et $\varphi : [0,a] \to \mathbb{R}$, $\psi : [0,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions absolument continues avec $\varphi(0) = \psi(0)$.

3.2 Problème de Darboux dans le cas fonctionnel

Définition 3.2.1 *Une fonction $u \in C([-\alpha,a] \times [-\beta,b], \mathbb{R}^n)$ avec sa dérivée mixte D^2_{xy} existe et intégrable sur J est dite solution du problème* (3.1)-(3.3) *si u satisfait les équations* (3.1) *et* (3.3) *sur Jet la condition* (3.2) *sur $\tilde{J}$.*

Lemme 3.2.1 *$u \in AC([-\alpha,a] \times [-\beta,b], \mathbb{R}^n)$ est solution du problème* (3.1)-(3.3) *si et seulement si u satisfait la condition* (3.2) *sur $\tilde{J}$ et u est solution de l'équation suivante :*

$$u(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt;$$

pour $(x,y) \in J$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.3), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H1)$ $f : J \times C([-\alpha,0] \times [-\beta,0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une fonction continue.*

$(H2)$ *Il existe une constante $k > 0$ tel que :*

$$\|f(x, y, u_1) - f(x, y, u_2)\| \leq k\|u_1 - u_2\|_C,$$

pour tout $u_1, u_2 \in C([-\alpha, 0] \times [-\beta, 0], \mathbb{R}^n)$ et $(x, y) \in J$.

Si

$$\frac{ka^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1 + 1)\Gamma(r_2 + 1)} < 1,$$

alors, le problème (3.1)-(3.3) *admet une seule solution sur $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.*

Preuve : Considérons l'opérateur suivant :
$F : C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n)$ défini par :

$$(Fu)(x, y) =$$

$$\begin{cases} \mu(x, y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x - s)^{r_1 - 1}(y - t)^{r_2 - 1} f(s, t, u_{(s,t)}) dsdt, & (x, y) \in J, \\ \phi(x, y), & (x, y) \in \tilde{J}. \end{cases}$$

Pour montrer que F admet un point fixe il suffit de montrer que F est une contraction, en effet : si $u_1, u_2 \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n)$ pour tout $(x, y) \in [-\alpha, a] \times [-\beta, b]$ alors,

$$\|(Fu_1)(x, y) - (Fu_2)(x, y)\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |(x - s)|^{r_1 - 1}|(y - t)|^{r_2 - 1}\|f(s, t, u_{1_{(s,t)}}) - f(s, t, u_{2_{(s,t)}})\| dsdt \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x - s)^{r_1 - 1}(y - t)^{r_2 - 1}\|u_{1_{(s,t)}} - u_{2_{(s,t)}}\|_C dsdt \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|u_1 - u_2\|_J \int_0^x \int_0^y (x - s)^{r_1 - 1}(y - t)^{r_2 - 1} dsdt \\ &\leq \frac{kx^{r_1}y^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|u_1 - u_2\|_J. \end{aligned}$$

Et par suite

$$\|Fu_1) - (Fu_2)\|_J \leq \frac{ka^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|u_1 - u_2\|_J.$$

Donc F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.1)-(3.3).

Notre prochain résultat d'existence des solutions du problème (3.1)-(3.3) est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 3.2.2 *Supposons que* $(H1)$ *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

$(H3)$ *Il existe deux fonctions* $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$\|f(x,y,u)\| \leq p(x,y)+q(x,y)\|u\|_C \quad \forall\, (x,y) \in J \text{ et } u \in C([-\alpha,0]\times[-\beta,0], \mathbb{R}^n).$$

alors, le problème (3.1)-(3.3) *admet au moins une solution sur* $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur F qu'on a défini dans le Théorème 3.2.1.

- F est continu, en effet : Soit $u_n \in C([-\alpha,a]\times[-\beta,b], \mathbb{R}^n)$ convergente pour la norme $||.||_\infty$ vers une limite u, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n-u||_\infty = 0$.
  Il faut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||Fu_n - Fu||_\infty = 0$.
  Soit $(x,y) \in J$

$$\|(Fu_n)(x,y) - (Fu)(x,y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}\|f(s,t,u_{n_{(s,t)}}) - f(s,t,u_{(s,t)})\|dsdt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1} \sup_{(s,t)\in J} \|f(s,t,u_{n_{(s,t)}}) - f(s,t,u_{(s,t)})\|dsdt \\
&\leq \frac{\|f(.,.,u_{n_{(.,.)}}) - f(.,.,u_{(.,.)})\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}dsdt \\
&\leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,u_n) - f(.,.,u)\|_\infty}{r_1 r_2\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}.
\end{aligned}$$

  Puisque f est continue alors,

$$\|F(u_n)-F(u)\|_\infty \leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,u_{n_{(.,.)}}) - f(.,.,u_{(.,.)})\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

  D'où F est continu.

- F est complètement continu : c'est à dire $F(B_\eta)$ est relativement compact pour tout borné B_η.
  Soit l'ensemble :

$$B_\eta = \{u \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n) : ||u||_\infty \leq \eta\}.$$

$F(B_\eta)$ est relativement compact si :

(i) $F(B_\eta)$ est borné, en effet : Soit $u \in B_\eta$ et $(x, y) \in J$ alors,

$$\|F(u)(x,y)\| \leq \|\mu(x,y)\|$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|f(s,t,u_{(s,t)})\|dsdt \\
\leq\ & \|\mu(x,y)\| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left\|\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s,t)dsdt\right\| \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)\|u_{(s,t)}\|_\infty dsdt \\
\leq\ & \|\mu(x,y)\| + \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt \\
&+\frac{\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt \\
\leq\ & \|\mu\|_\infty + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2} := \ell.
\end{aligned}$$

Donc $||Fu||_\infty \leq \ell$ et par suite $F(B_\eta)$ est borné.
(ii) $F(B_\eta)$ est équicontinu, en effet :
Soit $u \in B_\eta$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in J$, $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$:

$$\|F(u)(x_2,y_2) - F(u)(x_1,y_1)\| \leq \|\mu(x_1,y_1) - \mu(x_2,y_2)\|$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} - (x_1-s)^{r_1-1} \\
&\times(y_1-t)^{r_2-1}]f(s,t,u_{(s,t)})dsdt \\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt\|\\
\leq\ & \|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)\|+\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\\
&\times\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1}-(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}]dsdt\\
&+\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\\
&+\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\\
&+\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\\
\leq\ & \|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)\|\\
&+\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}\\
&+x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}-2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].
\end{aligned}
$$

Si $(x_2,y_2)\to(x_1,y_1)$: $(Fu)(x_2,y_2)\to(Fu)(x_1,y_1)$, d'où F est équi-continu.

Alors, F est complètement continu.

Soit $u\in C([-\alpha,a]\times[-\beta,b],\mathbb{R}^n)$ tel que $u=\lambda F(u)$ pour $\lambda\in]0,1[$. Alors, d'après $(H3)$ et pour tout $(x,y)\in J$, on a :

$$\|u(x,y)\|\leq\|\mu(x,y)\|$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}[p(s,t)+q(s,t)\|u_{(s,t)}\|]dsdt\\
\leq\ & \|\mu(x,y)\|+\frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2}\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)\|u_{(s,t)}\|dsdt. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Nous considérons la fonction τ définie par :

$$\tau(x,y)=\sup\{\|u(s,t)\|:-\alpha\leq s\leq x,\ -\beta\leq t\leq y,\ 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b\}.$$

Soit $(x^*,y^*)\in[-\alpha,x]\times[-\beta,y]$ tel que $\tau(x,y)=\|u(x^*,y^*)\|$.
alors, par l'inégalité (3.17), nous avons pour $(x,y)\in J$

$$\begin{aligned}\tau(x,y) &\leq \|\mu(x,y)\|+\frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2}\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)\tau(s,t)dsdt\\ &\leq \|\mu(x,y)\|+\frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2}\\ &\quad+\frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\tau(s,t)dsdt.\end{aligned}$$

Si $(x^*,y^*)\in J$ alors, $\tau(x,y)=||\phi||_C$.
Par lemme de Gronwall il existe une constante $\delta=\delta(r_1,r_2)$ tel que :

$$\begin{aligned}\tau(x,y) &\leq \Big[\|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big]\\ &\quad\times\Big[1+\frac{\delta\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\Big]\\ &\leq \Big[\|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big]\\ &\quad\times\Big[1+\frac{\delta a^{r_1}b^{r_2}\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big]:=M.\end{aligned}$$

Puisque $||u_{(x,y)}||_C\leq\tau(x,y)$ pour tout $(x,y)\in J$, nous avons

$$||u||_\infty\leq max(||\phi||_C,M):=R.$$

Soit :

$$U=\{u\in C([-\alpha,a]\times[-\beta,b]):||u||_\infty<R+1\}.$$

Comme $\forall u\in\partial U$ et $\forall\lambda\in]0,1[$, on a : $u\neq\lambda F(u)$.

Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder F admet au moins un point fixe qui une est solution du problème (3.1)-(3.3).

3.3 Problème de Darboux dans le cas de type neutre

Soit le problème linéaire suivant :

$$^{c}D_0^r\Big[u(x,y)-g(x,y)\Big]=f(x,y), \quad si \quad (x,y)\in J, \tag{3.18}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,b], \tag{3.19}$$

avec $\varphi(0)=\psi(0)$, $f\in C(J,\mathrm{I\!R}^n)$ *et* $g\in AC(J,\mathrm{I\!R}^n)$.

Définition 3.3.1 *Une fonction* $u\in C(J,\mathrm{I\!R}^n)$ *avec sa dérivée mixte* D^2_{xy} *existe et intégrable sur* J *est dite solution du problème* (3.18)-(3.19) *si* u *satisfait les équations* (3.18) *et* (3.19) *sur* J.

Lemme 3.3.1 *une fonction* $u\in AC(J,\mathrm{I\!R}^n)$ *est solution du problème* (3.18)-(3.19) *si et seulement si* u *satisfait*

$$u(x,y)=\mu(x,y)+g(x,y)-g(x,0)-g(0,y)+g(0,0)+I_0^r(f)(x,y),\quad (x,y)\in J. \tag{3.20}$$

Preuve : Soit $u(x,y)$ solution du problème (3.18)-(3.19) .Alors d'après la définition de la dérivée $(^{c}D_0^r u)(x,y)$ on a :

$$I_0^{1-r}D^2_{xy}(u(x,y)-g(x,y))=f(x,y).$$

Donc, on obtient

$$I_0^r(I_0^{1-r}D^2_{xy})(u(x,y)-g(x,y))=(I_0^r f)(x,y),$$

alors

$$I_0^1D^2_{xy}(u(x,y)-g(x,y))=(I_0^r f)(x,y).$$

Puisque

$$\begin{aligned} I_0^1(D^2_{xy})(u(x,y)-g(x,y)) &= u(x,y)-u(x,0)-u(0,y)+u(0,0)\\ &\quad -[g(x,y)-g(x,0)-g(0,y)+g(0,0)], \end{aligned}$$

on a

$$u(x,y)=\mu(x,y)+g(x,y)-g(x,0)-g(0,y)+g(0,0)+(I_0^r f)(x,y).$$

Maintenant soit $u(x,y)$ satisfait (3.20). Il est clair que $u(x,y)$ satisfait (3.18)-(3.19).

Corollaire 3.3.1 *Une fonction $u \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n)$ avec sa dérivée mixte D^2_{xy} existe et intégrable sur J est une solution du problème* (3.4)-(3.6) *si et seulement si u satisfait la condition* (3.5) *sur $\tilde{J}$ et u est une solution de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt + \mu(x,y) \\ &\quad + g(x,y,u_{(x,y)}) - g(x,0,u_{(x,0)}) - g(0,y,u_{(0,y)}) + g(0,0,u(0,0)), \end{aligned}$$

pour tout $(x,y) \in J$.

Théorème 3.3.1 *Supposons que $(H1)$ et $(H2)$ et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

$(H2')$ *Il existe une constante $k' > 0$ tel que :*

$$||g(x,y,u_1) - g(x,y,u_2)|| \leq k'||u_1 - u_2||_C$$

pour tout $u_1, u_2 \in C([-\alpha, 0] \times [-\beta, 0], \mathbb{R}^n)$ et $(x,y) \in J$.

Si

$$4k' + \frac{k a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1,$$

alors, le problème (3.4)-(3.6) *admet une seule solution sur $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.*

Preuve : Considérons l'opérateur suivant :
$\overline{F} : C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}^n)$ défini par :

$$(\overline{F}u)(x,y) =$$

$$\begin{cases} \mu(x,y) & (x,y) \in J, \\ +g(x,y,u_{(x,y)}) - g(x,0,u_{(x,0)}) - g(0,y,u_{(0,y)}) + g(0,0,u(0,0)) & \\ +\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt & \\ \phi(x,y), & (x,y) \in \tilde{J}. \end{cases}$$

Pour montrer que $\overline{F}$ admet un point fixe il suffit de montrer que $\overline{F}$ est une contraction, en effet : si $u_1, u_2 \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R})$ pour tout $(x,y) \in J$ alors,

$$||(\overline{F}u_1)(x,y) - (\overline{F}u_2)(x,y)||$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & ||g(x,y,u_{1_{(x,y)}}) - g(x,y,u_{2_{(x,y)}})|| + ||g(x,0,u_{1_{(x,0)}}) - g(x,0,u_{2_{(x,0)}})|| \\
& + ||g(0,x,u_{1_{(0,x)}}) - g(0,x,u_{2_{(0,x)}})|| + ||g(0,0,u_{1_{(0,0)}}) - g(0,0,u_{2_{(0,0)}})|| \\
& + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} ||f(s,t,u_{1_{(s,t)}}) - f(s,t,u_{2_{(s,t)}})|| dsdt. \\
& \leq k'(||u_{1_{(x,y)}} - u_{2_{(x,y)}}||_C + ||u_{1_{(x,0)}} - u_{2_{(x,0)}}||_C + ||u_{1_{(0,y)}} - u_{2_{(0,y)}}||_C + ||u_1 - u_2||_C) \\
& + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \|u_{1_{(s,t)}} - u_{2_{(s,t)}}\|_C dsdt \\
& \leq 4k'||u_1 - u_2||_\infty + \frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} ||u_1 - u_2||_\infty \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} dsdt \\
& \leq 4k'||u_1 - u_2||_\infty + \frac{kx^{r_1}y^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} ||u_1 - u_2||_\infty.
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|(\overline{F}u_1) - (\overline{F}u_2)\|_\infty \leq \left[4k' + k\frac{ka^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right] \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

D'où $\overline{F}$ est une contraction.
Donc d'après le théorème de Banach, $\overline{F}$ admet un unique point fixe qui est une solution du problème (3.4)-(3.6).

Maintenant nous donnons un résultat de l'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Soit

$$f^* = \sup_{(x,y)\in J} \|f(x,y,0)\|, \ g^* = \sup_{(x,y)\in J} \|g(x,y,0)\|.$$

Théorème 3.3.2 *supposons que* $(H1), (H2)$ *et* $(H2')$ *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

$(H4)$ *g est une fonction continue et complètement continu et pour tout ensemble borné D dans $C([-\alpha,a]\times[-\beta,b],\mathbb{R}^n)$, l'ensemble $\{(x,y) \longrightarrow g(x,y,u_{(x,y)}) : u \in D\}$ est équicontinu dans $C([-\alpha,0]\times[-\beta,0],\mathbb{R}^n)$.*

Alors, le problème (3.4)-(3.6) *admet au moins une solution sur* $[-\alpha,a]\times[-\beta,b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur $\overline{F}$ défini dans le Théorème 3.3.1.
Montrons que $\overline{F}$ est continu et complètement continu. Montrons d'abord que

l'opérateur $F : C([-\alpha,a]\times[-\beta,b],\mathbb{R}^n) \to C([-\alpha,a]\times[-\beta,b],\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$(Fu)(x,y) =$$

$$\begin{cases} \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt, & (x,y)\in J \\ \phi(x,y), & (x,y)\in\tilde{J} \end{cases}$$

est continu et complètement continu, ce qui été prouvé dans le théorème 3.2.2. Donc d'après $(H4)$ $\overline{F}$ est continu et complètement continu.
Soit $u \in C([-\alpha,a]\times[-\beta,b],\mathbb{R}^n)$ tel que $u = \lambda\overline{F}(u)$ pour $0<\lambda<1$.
Alors pour tout $(x,y)\in J$,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \lambda[\mu(x,y) + g(x,y,u_{(x,y)}) - g(x,0,u_{(x,0)}) - g(0,y,u_{(0,y)}) + g(0,0,u_{(0,0)}) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt]. \end{aligned}$$

D'après $(H2)$ *et* $(H2')$ et pour tout $(x,y)\in J$ ona :

$$\begin{aligned} \|u(x,y)\| &\le \|\mu(x,y)\| + k'(\|u_{(x,y)}\|_C + \|u_{(x,0)}\|_C + \|u_{(0,y)}\|_C + \|u\|_C) + 4g^* \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}[f(s,t,0) + k\|u(s,t)\|_C dsdt] \\ &\le \|\mu\|_\infty + 4g^* + 4k'\|u\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}f^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \end{aligned}$$

$$+\frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u(s,t)\|_C dsdt. \qquad (3.21)$$

Nous considérons la fonction τ définie par :

$$\tau(x,y) = \sup\{\|u(s,t)\| : -\alpha\le s\le x,\ -\beta\le t\le y,\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}.$$

Soit $(x^*,y^*)\in[-\alpha,x]\times[-\beta,y]$ tel que $\tau(x,y) = \|u(x^*,y^*)\|$.
alors, par l'inégalité (3.21), nous avons pour $(x,y)\in J$

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &\le \frac{1}{1-4k'}\Big[\|\mu\|_\infty + 4g^* + \frac{a^{r_1}b^{r_2}f^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \\ &\quad + \frac{k}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\tau(s,t)dsdt\Big]. \end{aligned}$$

Si $(x^*, y^*) \in \tilde{J}$ alors, $\tau(x,y) = ||\phi||_C$.
Soit

$$c = \frac{1}{1-4k'}\left[\|\mu\|_\infty + 4g^* + \frac{a^{r_1}b^{r_2}f^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right]$$

Par lemme de Gronwall, nous avons :

$$\begin{aligned}\tau(x,y) &\leq c + \frac{\delta kc}{(1-4k')\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\\ &\leq c + \frac{a^{r_1}b^{r_2}\delta kc}{(1-4k')\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} := \overline{M}.\end{aligned}$$

Puisque $\|u_{(x,y)}\|_C \leq \tau(x,y)$ pour tout $(x,y) \in J$, nous avons

$$||u||_\infty \leq max(||\phi||_C, \overline{M}) := \overline{R}.$$

Soit :

$$U = \{u \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b]) : ||u||_\infty < \overline{R} + 1\}.$$

Comme $\forall u \in \partial U$ et $\forall \lambda \in]0,1[$, on a : $u \neq \lambda \overline{F}(u)$.

Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder $\overline{F}$ admet au moins un point fixe qui une est solution du problème (3.4)-(3.6).

3.3.1 Exemple

Considérons le proplème suivant :

$$^cD_0^r\left(u(x,y) - \frac{1}{4e^{x+y+5}(1+|u(x-1,y-2)|)}\right)$$

$$= \frac{|u(x-1,y-2)|+2}{10e^{x+y+4}(1+|u(x-1,y-2)|}, \quad si(x,y) \in [0,1]\times[0,1], \tag{3.22}$$

$$u(x,0) = x,\ x \in [0,1],\ u(0,y) = y^2,\ y \in [0,1], \tag{3.23}$$

$$u(x,y) = x + y^2,\ (x,y) \in [-1,1]\times[-2,1]\backslash(0,1]\times(0,1]. \tag{3.24}$$

On a

$$f(x,y,u_{(x,y)}) = \frac{|u(x-1,y-2)|+2}{10e^{x+y+4}(1+|u(x-1,y-2)|}, \ (x,y) \in [0,1]\times[0,1],$$

et

$$g(x,y,u_{(x,y)}) = \frac{1}{4e^{x+y+5}(1+|u(x-1,y-2)|)}, \ (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

Pour chaque $u_1, u_2 \in C([-1,1] \times [-2,1])$ et $(x,y) \in J$ on a

$$|f(x,y,u_{1_{(x,y)}}) - f(x,y,u_{2_{(x,y)}})| \leq \frac{1}{10e^4}\|u_1 - u_2\|_C,$$

et

$$|g(x,y,u_{1_{(x,y)}}) - g(x,y,u_{2_{(x,y)}})| \leq \frac{1}{4e^5}\|u_1 - u_2\|_C.$$

D'ou les conditions $(H1), (H2)$ et $(H2')$ sont satisfaites avec $K = \dfrac{1}{10e^4}$ et $K' = \dfrac{1}{4e^5}$. Puisque $a = b = 1$, nous obtenons

$$4k' + \frac{ka^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} = \frac{1}{e^5} + \frac{1}{10e^4\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1.$$

Et par suite, d'après le théorème 3.3.2 le problème (3.22)-(3.24) admet au moins une solution définie sur $[-1,1] \times [-2,1]$.

3.4 Problème de Darboux pour des équations différentielles perturbées

3.4.1 Problème de Darboux avec condition locale

Définition 3.4.1 *Une fonction $u \in C([-\alpha,a] \times [-\beta,b], \mathbb{R})$ avec sa dérivée mixte D^2_{xy} existe et intégrable sur J est dite solution du problème* (3.7)-(3.9) *si u satisfait les équations* (3.7) *et* (3.9) *sur J et la condition* (3.8) *sur $\tilde{J}$.*

Lemme 3.4.1 *$u \in AC([-\alpha,a] \times [-\beta,b], \mathbb{R})$ est solution du problème* (3.7)-(3.9) *si et seulement si u satisfait la condition* (3.8) *sur $\tilde{J}$ et u est une solution de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}g(s,t,u_{(s,t)})dsdt \qquad (x,y) \in J. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
$(H5)$ *Les fonctions* $f,\ g : J \times C \to \mathbb{R}$ *sont continues.*
$(H6)$ *il existe une constante* $k'' > 0$ *tel que*

$$|g(x,y,u)-g(x,y,v)| \le k''\|u-v\|_C, \ \textit{pour tout } u_1,\ u_2 \in C, \ \textit{et } (x,y) \in J.$$

$(H7)$ *il existe* $p,q \in C(J, \mathbb{R}^+)$ *tel que*

$$|f(x,y,u)| \le p(x,y) + q(x,y)\|u\|_C, \ \textit{pour } (x,y) \in J \textit{ et } u \in C.$$

Si

$$\frac{k'' a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1, \tag{3.25}$$

alors le problème(3.7)-(3.9) admet une seule solution sur $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.

Preuve : Considérons les opérateurs : $F, G : C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R}) \to C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R})$ définis par :

$$F(u)(x,y) = \begin{cases} \phi(x,y), & (x,y) \in \tilde{J}, \\ \mu(x,y) & \\ +\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt, & (x,y) \in J, \end{cases}$$

et

$$G(u)(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \tilde{J}, \\ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s,t,u_{(s,t)})dsdt, & (x,y) \in J. \end{cases}$$

Le problème est de trouver les solutions de (3.7)-(3.9) réduit à rechercher des solutions pour l'équation $F(u)(x,y) + G(u)(x,y) = u(x,y)$, pour tout $(x,y) \in J$. Nous devons montrer que les opérateurs F et G satisfont toutes les conditions du Théorème 1.4.6

- F est continu, en effet : Soit $u_n \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R})$ convergente pour la norme $||.||_\infty$ vers une limite u, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - u||_\infty = 0$.
  Il faut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||Fu_n - Fu||_\infty = 0$.
  Soit $(x,y) \in J$
  $$|(Fu_n)(x,y) - (Fu)(x,y)| \le$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}|f(s,t,u_{n_{(s,t)}})-f(s,t,u_{(s,t)})|dsdt\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}\sup_{(s,t)\in J}|f(s,t,u_{n_{(s,t)}})-f(s,t,u_{(s,t)})|dsdt\\
&\leq \frac{\|f(.,.,u_{n_{(.,.)}})-f(.,.,u_{(.,.)})\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}dsdt\\
&\leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,u_n)-f(.,.,u)\|_\infty}{r_1r_2\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue alors,

$$\|F(u_n)-F(u)\|_\infty \leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,u_{n_{(.,.)}})-f(.,.,u_{(.,.)})\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \to 0 \ quand \ n\to\infty.$$

D'où F est continu.

- F est complètement continu : c'est à dire $F(B_\eta)$ est relativement compact pour tout borné B_η.
  Soit l'ensemble :

  $$B_\eta=\{u\in C([-\alpha,a]\times[-\beta,b],\mathbb{R}) : ||u||_\infty\leq\eta\}.$$

  $F(B_\eta)$ est relativement compact si :

  (i) $F(B_\eta)$ est borné, en effet : Soit $u\in B_\eta$ et $(x,y)\in J$ alors,

$$\begin{aligned}
&|F(u)(x,y)| \leq |\mu(x,y)|\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|f(s,t,u_{(s,t)})|dsdt\\
&\leq |\mu(x,y)|+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}|\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s,t)dsdt|\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)\|u_{(s,t)}\|_\infty dsdt\\
&\leq |\mu(x,y)|+\frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\\
&+\frac{\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\\
&\leq \|\mu\|_\infty+\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2} := \tilde{\ell}.
\end{aligned}$$

Donc $||Fu||_\infty \leq \tilde{\ell}$ et par suite $F(B_\eta)$ est borné.

(ii) $F(B_\eta)$ est équicontinu, en effet :

Soit $u \in B_\eta$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in J,\ x_1 < x_2,\ et\ y_1 < y_2$:

$$|F(u)(x_2, y_2) - F(u)(x_1, y_1)| \leq |\mu(x_2, y_2) - \mu(x_1, y_1)|$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} - (x_1-s)^{r_1-1}\\
&\times(y_1-t)^{r_2-1}]f(s,t,u_{(s,t)})dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt|\\
\leq\ & |\mu(x_2,y_2)-\mu(x_1,y_1)| + \frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\\
&\times\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1} - (x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}]dsdt\\
&+\frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\\
&+\frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\\
&+\frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\\
\leq\ & |\mu(x_2,y_2)-\mu(x_1,y_1)|\\
&+\frac{\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1} + 2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}\\
&+x_1^{r_1}y_1^{r_2} - x_2^{r_1}y_2^{r_2} - 2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].
\end{aligned}$$

Si $(x_2, y_2) \to (x_1, y_1)$: $(Fu)(x_2, y_2) \to (Fu)(x_1, y_1)$, d'où F est équicontinu.

Alors, F est complètement continu.

- G est une contraction, en effet :
  soit $u_1, u_2 \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R})$ pour tout $(x, y) \in [-\alpha, a] \times [-\beta, b]$

alors,

$$\begin{aligned}\|G(u_1)(x,y)-G(u_2)(x,y)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\\ &\quad \times|g(s,t,u_{1_{(s,t)}})-g(s,t,u_{2_{(s,t)}})|dsdt\\ &\leq \frac{k''\|u_1-u_2\|_\infty}{r_1r_2\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt.\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|(Gu_1)-(Gu_2)\|_\infty \leq \frac{k''a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|u_1-u_2\|_\infty.$$

Donc G est une contraction

- Montrons que l'ensemble

$$\mathcal{E}=\{u\in C(J,\mathrm{I\!R}) : u=\lambda F(u)+\lambda G(\frac{u}{\lambda}),\qquad 0<\lambda<1\}$$

est borné. soit $u\in\mathcal{E}$, tel que $u=\lambda F(u)+\lambda G(\frac{u}{\lambda})$ pour $\lambda\in]0,1[$.
Pour tout $(x,y)\in J$ on a :

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \lambda\mu(x,y)+\frac{\lambda}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt\\ &\quad +\frac{\lambda}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}g(s,t,\frac{u_{(s,t)}}{\lambda})dsdt.\end{aligned}$$

Alors, d'après $(H6)$ et $(H7)$, et pour tout $(x,y)\in J$, on a

$$\begin{aligned}|u(x,y)| &\leq |\mu(x,y)|+\frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\\ &\quad +\frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u_{(s,t)}\|_C dsdt\\ &\quad +\frac{\lambda}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|g(s,t,\frac{u_{(s,t)}}{\lambda})-g(s,t,0)|dsdt\\ &\quad +\frac{\lambda}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|g(s,t,0)|dsdt\\ &\leq |\mu(x,y)|+\frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u_{(s,t)}\|_C dsdt\\
&+\frac{k''}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|u_{(s,t)}\|_C dsdt
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{a^{r_1}b^{r_2}g^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}, \tag{3.26}
$$

où $g^* = \sup\limits_{(s,t)\in J} |g(s,t,0)|$.
Nous considérons la fonction τ définie par :

$$
\tau(x,y) = \sup\{|u(s,t)| : 0 \leq s \leq x,\ 0 \leq t \leq y,\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}.
$$

soit $(x^*, y^*) \in [-\alpha, x] \times [-\beta, y]$ tel que $\tau(x,y) = |u(x^*, y^*)|$. si $(x^*, y^*) \in J$, alors, par l'inégalité (3.26), nous avons pour $(x,y) \in J$

$$
\begin{aligned}
\tau(x,y) \quad &\leq \quad |\mu(x,y)| + \frac{a^{r_1}b^{r_2}(\|p\|_\infty + g^*)}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\\
&\quad +\frac{\|q\|_\infty + k''}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\tau(s,t)dsdt.
\end{aligned}
$$

Si $(x^*, y^*) \in \tilde{J}$,alors $\tau(x,y) = \|\phi\|_C$.
Par Lemme de Gronwall, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\tau(x,y) \quad &\leq \quad \Big(|\mu(x,y)| + \frac{a^{r_1}b^{r_2}(\|p\|_\infty + g^*)}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big)\\
&\quad \times\Big(1 + \delta\frac{\|q\|_\infty + k''}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\Big)\\
&\leq \quad \Big(|\mu(x,y)| + \frac{a^{r_1}b^{r_2}(\|p\|_\infty + g^*)}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big)(1 + \delta\frac{(\|q\|_\infty + k'')a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big) := \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Puisque $||u_{(x,y)}||_C \leq \tau(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in J$, nous avons

$$
\|u\|_\infty \leq \max(\|\phi\|_C, \tilde{R}) := A.
$$

Ceci implique que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné. Donc d'après Théorème 1.4.6, $F+G$ admet un point fixe qui une est solution du problème (3.7)-(3.9).

3.4.2 Problème de Darboux avec condition non locale

Nous présentons (sans démonstration) deux résultats d'existence pour le problème (3.10)-(3.12).

Définition 3.4.2 *Une fonction* $u \in C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R})$ *avec sa dérivée mixte* D^2_{xy} *existe et intégrable sur* J *est dite solution du problème* (3.10)-(3.12) *si* u *satisfait les équations* (3.10) *et* (3.12) *sur* J *et la condition* (3.11) *sur* $\tilde{J}$.

Théorème 3.4.2 *Supposons que* $(H5) - (H7)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H5')$ *il existe* $\tilde{k} > 0$ *tel que*

$$|Q(u_1) - Q(u_2)| \leq \tilde{k}\|u_1 - u_2\|_\infty, \quad \textit{pour tout } u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R}).$$

$(H5'')$ *il existe* $k^* > 0$ *tel que*

$$|K(u_1) - K(u_2)| \leq k^*\|u_1 - u_2\|_\infty, \quad \textit{pour tout } u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R}).$$

Si

$$\tilde{k} + k^* + \frac{k a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1 + 1)\Gamma(r_2 + 1)} < 1,$$

alors le problème (3.10)-(3.12) *admet une seule solution sur* $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.

Théorème 3.4.3 *Supposons que* $(H1) - (H3)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H7')$ *il existe* $\tilde{d} > 0$ *tel que*

$$|Q(u)| \leq \tilde{d}(1 + \|u\|_\infty), \quad \textit{pourtout } u \in C(J, \mathbb{R}).$$

$(H7'')$ *il existe* $d^* > 0$ *tel que*

$$|K(u)| \leq d^*(1 + \|u\|_\infty), \quad \textit{pour tout } u \in C(J, \mathbb{R}).$$

Si la condition (3.25) *est satisfaite, alors le problème* (14)-(3.12) *admet au moins une solution sur* $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.

3.5 Méthode des sous et sur solutions

Définition 3.5.1 *Une fonction $u \in C(J, \mathbb{R})$ avec sa dérivée mixte D^2_{xy} existe et intégrable est dite solution du problème (3.13)-(3.14) si u satisfait les équations (3.13) et (3.14) sur J.*

Définition 3.5.2 *Une fonction $z \in C(J, \mathbb{R})$ est dite sous solution du problème (3.13)-(3.14) si z satisfait*

$$({}^cD^r_0 z)(x, y) \leq f(x, y, z(x, y)),\ z(x, 0) \leq \varphi(x),\ z(0, y) \leq \psi(y) \quad sur \quad J,$$

$$et \quad z(0, 0) \leq \varphi(0).$$

La fonction z est dite sur solution du problème (3.13)-(3.14)si z satisfait

$$({}^cD^r_0 z)(x, y) \geq f(x, y, z(x, y)),\ z(x, 0) \geq \varphi(x),\ z(0, y) \geq \psi(y) \quad sur \quad J,$$

$$et \quad z(0, 0) \geq \varphi(0).$$

Théorème 3.5.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
- ($H1$) *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*
- ($H2$) *Il existe v et $w \in C(J, \mathbb{R})$, sous et sur solutions du problème (3.13)-(3.14) tel que $v \leq w$.*

Alors le problème (3.13)-(3.14) admet au moins une solutuion u tel que

$$v(x, y) \leq u(x, y) \leq w(x, y) \quad pour\ tout\ (x, y) \in J.$$

Preuve : On transforme le problème (3.13)-(3.14) à un problème du point fixe. Considérons le problème suivant :

$$({}^cD^r_0 u)(x, y) = g(x, y, u(x, y)), \quad si \quad (x, y) \in J, \tag{3.27}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u(0, y) = \psi(y),\ x \in [0, a],\ y \in [0, b], \tag{3.28}$$

où

$$g(x, y, u(x, y)) = f(x, y, h(x, y, u(x, y))),$$

$$h(x, y, u(x, y)) = \max\{v(x, y), \min\{u(x, y), w(x, y)\}\},$$

pour tout $(x, y) \in J$. Une solution de (3.27)-(3.28) est un point fixe de l'opérateur $N : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ défini par :

$$N(u)(x, y) = \mu(x, y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s, t, u(s, t)) ds dt.$$

g est une fonction continue, et d'après $(H2)$ il existe $M > 0$ tel que

$$|g(x,y,u)| \leq M, \quad pour\ tout\ (x,y) \in J, \quad et\ u \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Soit

$$\eta = \|\mu\|_\infty + \frac{Ma^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)},$$

et

$$D = \{u \in C(J,\mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq \eta\}.$$

Il est clair que D est un sous ensemble convexe fermé de $C(J,\mathbb{R})$ et N applique D dans D.
Nous montrons que N satisfait les conditions du théorème du point fixe de Schauder.

- N est continu, en effet :
  Soit $\{u_n\}$ une suite tel que $u_n \to u$ dans D. Alors

$$\begin{aligned}
&|N(u_n)(x,y) - N(u)(x,y)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}|g(s,t,u_n(s,t)) - g(s,t,u(s,t))|dsdt \\
\leq\ & \frac{\|g(.,.,u_n(.,.)) - g(.,.,u)\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^a\int_0^b |x-s|^{r_1-1}|y-t|^{r_2-1}dsdt.
\end{aligned}$$

  Puisque g est une fonction continue, on a

$$\|N(u_n)-N(u)\|_\infty \leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|g(.,.,u_n(.,.)) - g(.,.,u(.,.))\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \to 0\ quand\ n \to \infty.$$

- Montrons que N est compact, en effet : $N(D)$ est relativement compact, c'est à dire :
  (a) $N(D)$ est borné, ceci est clair car $N(D) \subset D$ et D est borné..
  (b) $N(D)$ est equicontinu, en effet :
  Soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in J$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ et $u \in D$. Alors

$$|N(u)(x_2,y_2) - N(u)(x_1,y_1)| =$$

$$\begin{aligned}
&|\mu(x_1,y_1) - \mu(x_2,y_2)| \\
&+\Big|\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} - (x_1-s)^{r_1-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times(y_1-t)^{r_2-1}]g(s,t,u(s,t))dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}g(s,t,u(s,t))dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{0}^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}g(s,t,u(s,t))dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{0}^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}g(s,t,u(s,t))dsdt\Big|\\
\leq\ &|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)|\\
&+\frac{M}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}\\
&+x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}-2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].
\end{aligned}$$

Si $(x_1,y_1)\to(x_2,y_2)$: $N(u)(x_1,y_1)\to N(u)(x_2,y_2)$.

Alors, $N(D)$ est compact.
Donc d'après le théorème de Schauder l'opérateur N admet un point fixe qui est une solution du problème (3.27)-(3.28).

- La solution u du (3.27)-(3.28) satisfait

$$v(x,y)\leq u(x,y)\leq w(x,y)\quad \textit{pour tout}\ \ (x,y)\in J.$$

On montre que

$$u(x,y)\leq w(x,y)\quad \textit{pour tout}\ \ (x,y)\in J.$$

Supposons que $u-w$ atteint un Maximum positif sur J pour $(\overline{x},\overline{y})\in J$;

$$(u-w)(\overline{x},\overline{y})=\max\{u(x,y)-w(x,y):\ (x,y)\in J\}>0.$$

On distingue les cas suivants.
Cas 1. Si $(\overline{x},\overline{y})\in(0,a)\times[0,b]$ il existe $(x^*,y^*)\in(0,a)\times[0,b]$ tel que

$$u(x^*,y^*)-w(x^*,y^*)\leq 0, \tag{3.30}$$

et

$$u(x,y)-w(x,y)>0,\ \ \textit{pour tout}\ (x,y)\in(x^*,\overline{x}]\times[y^*,b]. \tag{3.31}$$

D'après la définition du h

$$^{c}D^{r}u(x,y) = f(x,y,w(x,y)) \ \ pour\ tout \ \ (x,y) \in [x^*,\overline{x}] \times [y^*,b].$$

Une intégration sur $[x^*,x] \times [y^*,y]$ pour tout $(x,y) \in [x^*,\overline{x}] \times [y^*,b]$ donne

$$\begin{aligned} u(x,y) - u(x^*,y) - u(x,y^*) + u(x^*,y^*) &= \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{x^*}^{x}\int_{y^*}^{y} (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \\ &\quad \times f(s,t,w(s,t))dsdt. \qquad (3.32) \end{aligned}$$

D'après (3.32) et l'utilisation du fait que w est une sur solution de (3.13)-(3.14) on obtient

$$u(x,y) - u(x^*,y^*) \leq w(x,y) - w(x^*,y^*). \qquad (3.33)$$

D'après (3.30), (3.31) et (3.33) on obtient une contradiction

$$0 < u(x,y) - w(x,y) \leq u(x^*,y^*) - w(x^*,y^*) \leq 0,$$

pour tout $(x,y) \in [x^*,\overline{x}] \times [y^*,b]$.
Cas 2. Si $\overline{x} = 0$, alors $w(0,\overline{y}) < u(0,\overline{y}) \leq w(0,\overline{y})$ qui est une contradiction. Donc

$$u(x,y) \leq w(x,y) \ \ pour\ tout\ (x,y) \in J.$$

D'une méthode analogique, nous pouvons montrer que $u(x,y) \geq v(x,y)$, pour tout $(x,y) \in J$. Ceci montre que le problème (3.27)-(3.28) admet une solution u satisfait $v \leq u \leq w$ qui est une solution du problème (3.13)-(3.14).

3.6 Problème de Darboux pour des équations différentielles dans une algèbre de Banach

Définition 3.6.1 *Une fonction $u \in AC(J,\mathbb{R})$ est dite solution du (3.15)-(3.16), si*

(i) la fonction $(x,y) \mapsto \frac{u(x,y)}{f(x,y,u(x,y))}$ est absolument continue,

(ii) u satisfait les équations (3.15)-(3.16) sur J.

On considère le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_0^r\Big(\dfrac{u(x,y)}{f(x,y)}\Big) = g(x,y), \quad (x,y) \in J, \\ u(x,0) = \varphi(x);\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y);\ y \in [0,b], \\ \varphi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{3.34}$$

où $f \in C(J, \mathbb{R}^*), g \in L^1(J, \mathbb{R})$.

Lemme 3.6.1 *Le problème (3.34) admet une seule solution donnée par :*

$$u(x,y) = f(x,y)\Big(\mu_0(x,y) + (I_0^r g)(x,y)\Big);\ (x,y) \in J, \tag{3.35}$$

pour $(x,y) \in J$*,où*

$$\mu_0(x,y) = \frac{\varphi(x)}{f(x,0)} + \frac{\psi(y)}{f(0,y)} - \frac{\varphi(0)}{f(0,0)}.$$

Preuve : Soit $u(x,y)$ une solution du problème (3.34). Alors, d'après la définition de la dérivée ${}^cD_0^r$, on a :

$$I_0^{1-r}(D_{xy}^2)\frac{u(x,y)}{f(x,y)} = g(x,y).$$

Donc, on obtient

$$I_0^r(I_0^{1-r}D_{xy}^2)\frac{u(x,y)}{f(x,y)} = (I_0^r g)(x,y),$$

alors

$$I_0^1(D_{xy}^2)\frac{u(x,y)}{f(x,y)} = (I_0^r g)(x,y).$$

Puisque

$$I_0^1(D_{xy}^2)\frac{u(x,y)}{f(x,y)} = \frac{u(x,y)}{f(x,y)} - \frac{u(x,0)}{f(x,0)} - \frac{u(0,y)}{f(0,y)} + \frac{u(0,0)}{f(0,0)},$$

on a

$$u(x,y) = f(x,y)\Big(\mu_0(x,y) + (I_0^r g)(x,y)\Big).$$

Maintenant soit $u(x,y)$ satisfait (3.35). Il est clair que $u(x,y)$ satisfait

$${}^cD_0^r\Big(\frac{u(x,y)}{f(x,y)}\Big) = g(x,y), sur\ J.$$

Corollaire 3.6.1 *Une fonction $u \in AC(J, \mathbb{R})$ est solution du (3.15)-(3.16), si et seulement si u satisfait l'équation*

$$u(x,y) = f(x,y,u(x,y))\Big(\mu(x,y)$$

$$+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}g(s,t,u(s,t))dsdt\Big), \qquad (3.36)$$

pour $(x,y) \in J$, où

$$\mu(x,y) = \frac{\varphi(x)}{f(x,0,\varphi(x))} + \frac{\psi(y)}{f(0,y,\psi(y))} - \frac{\varphi(0)}{f(0,0,\varphi(0))}.$$

3.6.1 Existence des solutions

Théorème 3.6.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(A1) La fonction f est continue sur $J \times \mathbb{R}$,

(A2) Il existe une fonction $\alpha \in C(J, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$|f(x,y,z) - f(x,y,\overline{z})| \leq \alpha(x,y)|z - \overline{z}|, \quad \text{pour tout } (x,y) \in J, \ \text{ et } z, \overline{z} \in \mathbb{R},$$

(A3) g est une fonction de Carathéodory, et il existe $h \in L^\infty(J, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$|g(x,y,z)| \leq h(x,y), \quad p.p\ (x,y) \in J, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\|\alpha\|_\infty \left[\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right] < 1, \qquad (3.37)$$

alors le problème (3.15)-(3.16) admet au moins une solution sur J, où

$$h^* = \|h\|_{L^\infty}.$$

Preuve : Soient $X := C(J, \mathbb{R})$, $A, B : X \to X$ deux opérateurs définis par :

$$Au(x,y) = f(x,y,u(x,y)); \quad (x,y) \in J, \qquad (3.38)$$

$$Bu(x,y) = \mu(x,y)$$

$$+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}g(s,t,u(s,t))\,dsdt; \ (x,y) \in J. \qquad (3.39)$$

Le problème est de trouver les slutions de (3.15)-(3.16) est équivalent à rechercher des solutions pour l'équation opérationnelle

$$Au(x,y)\,Bu(x,y)=u(x,y), \quad (x,y)\in J. \tag{3.40}$$

Nous devons montrer que les opérateurs A, B satisfont toutes les conditions du Théorème 1.4.5. Premièrement nous montrons que A est Lipschitzien. Soient $u_1, u_2 \in X$. Alors d'après (A2),

$$\begin{aligned}|Au_1(x,y)-Au_2(x,y)| &= |f(x,y,u_1(x,y))-f(x,y,u_2(x,y))|\\ &\le \alpha(x,y)|u_1(x,y)-u_2(x,y)|\\ &\le \|\alpha\|_\infty\|u_1-u_2\|_\infty,\end{aligned}$$

d'où

$$\|Au_1-Au_2\|_\infty \le \|\alpha\|_\infty\|u_1-u_2\|_\infty.$$

Donc A est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz $\|\alpha\|_\infty$.
Ensuite, nous montrons que B est un opérateur compact sur X. Soit $\{u_n\}$ une suite dans X. D'après $(A3)$ on a

$$\|Bu_n\|_\infty \le \|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}.$$

Alors $\{Bu_n : n\in\mathbb{N}\}$ est uniformément borné dans X.
Soient $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\in J$. Alors

$$\begin{aligned}&|Bu_n(x_1,y_1)-Bu_n(x_2,y_2)| \le |\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)|\\
+\ &\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\Big|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}-(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1}]\\
\times\ &g(s,t,u_n(s,t))dsdt\Big|\\
+\ &\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left|\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}g(s,t,u_n(s,t))dsdt\right|\\
+\ &\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left|\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}g(s,t,u_n(s,t))dsdt\right|\\
+\ &\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left|\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}g(s,t,u_n(s,t))dsdt\right|\\
\le\ &|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \frac{h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\left|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}-(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1}]dsdt\right| \\
&\quad +\frac{h^*}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left|\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\right| \\
&\quad +\frac{h^*}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left|\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\right| \\
&\quad +\frac{h^*}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\left|\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}dsdt\right| \\
&\leq \quad |\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)| \\
&+ \quad \frac{h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2} \\
&\quad +x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}-2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}]. \\
&\to \quad 0,\ \textit{quand}\ (x_1,y_1)\to(x_2,y_2).
\end{aligned}$$

Donc on déduit que $\{Bu_n : n\in\mathbb{N}\}$ est équicontinu dans X. D'où d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli $B : X\to X$ est compact. En plus,

$$\begin{aligned}
M &= \|B(X)\| \\
&\leq |\mu(x,y)|+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|g(s,t,u(s,t))|dsdt \\
&\leq \|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\alpha M\leq\|\alpha\|_\infty\left(\|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right)<1.$$

Il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E}=\{u\in X : \lambda[Au\,Bu]=u,\ 0<\lambda<1\}$$

est borné. En effet soit $u\in\mathcal{E}$, alors pour $\lambda\in(0,1)$ et $(x,y)\in J$ nous avons

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \lambda[f(x,y,u(x,y))]\Big(\mu(x,y) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}g(s,t,u(s,t))dsdt\Big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| &\leq |f(x,y,u(x,y))|\Big(|\mu(x,y)| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|g(s,t,u(s,t))|dsdt\Big) \\
&\leq [|f(x,y,u(x,y))-f(x,y,0)|+|f(x,y,0)|] \\
&\times \Big(|\mu(x,y)|+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}h(s,t)\,dsdt\Big) \\
&\leq (\|\alpha\|_\infty\|u\|_\infty+f^*)\left(\|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right),
\end{aligned}$$

où $f^*=\sup\limits_{(x,y)\in J}|f(x,y,0)|$.
Par conséquent

$$\|u\|_\infty \leq \frac{f^*\left[\|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right]}{1-\|\alpha\|_\infty\left[\|\mu\|_\infty+\frac{a^{r_1}b^{r_2}h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right]} := M.$$

Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné, donc d'après le Théorème 1.4.5 on déduit que le problème (3.15)-(3.16) admet une solution sur J.

3.6.2 Existence des solutions extrémales

Soit "$\leq$" une relation d'ordre sur $C(J,\mathbb{R})$ et soit le cône K défini par

$$K=\{u\in C(J,\mathbb{R}):\ u(x,y)\geq 0,\quad \forall (x,y)\in J\}.$$

$u\leq \bar{u}$ si et seulement si $u(x,y)\leq \bar{u}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in J$.
Il est clair que le cône K est positif et normal dans $C(J,\mathbb{R})$ ([39]).
Si $\underline{u},\bar{u}\in C(J,\mathbb{R})$ et $\underline{u}\leq\bar{u}$, on a

$$[\underline{u},\overline{u}]=\{u\in C(J,\mathbb{R}):\underline{u}\leq u\leq \bar{u}\}.$$

Définition 3.6.2 *Une fonction* $\underline{u}(\cdot,\cdot)\in C(J,\mathbb{R})$ *est dite une sous solution du problème* $(3.15)-(3.16)$ *si*

$$\begin{gathered}
{}^cD_0^r\Big[\frac{\underline{u}(x,y)}{f(x,y,\underline{u}(x,y))}\Big]\leq g(x,y,\underline{u}(x,y)),\quad (x,y)\in J,\\
\underline{u}(x,0)\leq\varphi(x),\quad \underline{u}(0,y)\leq\psi(y),\ (x,y)\in J.
\end{gathered}$$

De même une fonction $\bar{u}(\cdot,\cdot) \in C(J, \mathrm{I\!R})$ *est dite une sur solution de (3.15)-(3.16) si*

$$
\begin{aligned}
{}^cD_0^r\Big[\frac{\bar{u}(x,y)}{f(x,y,\bar{u}(x,y))}\Big] &\geq g(x,y,\bar{u}(x,y)), \quad (x,y) \in J,\\
\bar{u}(x,0) \geq \varphi(x), \quad \bar{u}(0,y) &\geq \psi(y), \ (x,y) \in J.
\end{aligned}
$$

Définition 3.6.3 *Une solution* u_M *du problème (3.15)-(3.16) est dite maximale (resp.* u_m *une solution minimale) si pour toutes solutions* u *de (3.15)-(3.16), nous avons* $u(x,y) \leq u_M(x,y)$ *(resp.* $u(x,y) \geq u_m(x,y)$*), pour tout* $(x,y) \in J$*.*

Introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) $f : J \times \mathrm{I\!R}_+ \to \mathrm{I\!R}_+^*$, $g : J \times \mathrm{I\!R}_+ \to \mathrm{I\!R}_+$, $\psi(y) \geq 0$ sur $[0,b]$ et

$$\frac{\varphi(x)}{f(x,0,\varphi(x))} \geq \frac{\varphi(0)}{f(0,0,\varphi(0))} \quad \textit{pour tout } x \in [0,a],$$

(H_2) Les fonctions f et g sont Chandrabhan,

(H_3) Il existe une fonction $\tilde{h} \in L^\infty(J, \mathrm{I\!R}_+)$ tel que

$$|g(x,y,z)| \leq \tilde{h}(x,y), \quad \textit{p.p } (x,y) \in J, \quad \textit{pour tout } z \in \mathrm{I\!R},$$

(H_4) Le problème (3.15)-(3.16) possède une sous solution $\underline{u}$ et une sur solution $\overline{u}$ avec $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Soit

$$\tilde{h}^* = \|\tilde{h}\|_{L^\infty}.$$

Théorème 3.6.2 *On suppose que les hypothèses* $(A2), (H_1) - (H_4)$ *sont satisfaites. Si*

$$\|\alpha\|_\infty \left[\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1} b^{r_2} \tilde{h}^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\right] < 1,$$

alors le problème (3.15)-(3.16) admet une solution minimale et une solution maximale positives sur J.

Preuve : Soit $X = C(J, \mathrm{I\!R})$ et considérons un intervalle fermé $[\underline{u}, \overline{u}]$ dans X qui est défini à partir de l'hypothèses (H_4).

Considérons les opérateurs $A, B : [\underline{u}, \overline{u}] \to K$ définis respectivement par (3.38) et (3.39).

Le problème est de trouver les solutions de (3.15)- (3.16) est équivalent à rechercher des solutions pour l'équation opérationnelle

$$Au(x,y)\,Bu(x,y) = u(x,y), \quad (x,y) \in J. \tag{3.41}$$

Nous devons montrer que les opérateurs A, B satisfont toutes les conditions du Théorème 1.4.11. Comme dans le Théorème 3.6.1 on peut montrer que A est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz $\|\alpha\|_\infty$ et B est un opérateur complètement continu sur $[\underline{u}, \overline{u}]$. L'hypothèse (H_2) implique que A et B sont croissants sur $[\underline{u}, \overline{u}]$. En effet soient $u_1, u_2 \in [\underline{u}, \overline{u}]$ tel que $u_1 \leq u_2$. Alors par (H_2), on a

$$Au_1(x,y) = f(x,y,u_1(x,y)) \leq f(x,y,u_2(x,y)) = Au_2(x,y), \quad \forall\ (x,y) \in J,$$

et

$$\begin{aligned}
Bu_1(x,y) &= \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s,t,u_1(s,t))dsdt \\
&\leq \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s,t,u_2(s,t))dsdt \\
&= Bu_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in J.
\end{aligned}$$

Donc A et B sont des opérateurs croissants sur $[\underline{u}, \overline{u}]$.
L' hypothèses (H_4) implique

$$\begin{aligned}
\underline{u}(x,y) &= [f(x,y,\underline{u}(x,y))]\Big(\mu(x,y) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s,t,\underline{u}(s,t))\ dsdt\Big) \\
&\leq [f(x,y,z(x,y))]\Big(\mu(x,y) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s,t,z(s,t))dsdt\Big) \\
&\leq [f(x,y,\overline{u}(x,y))]\Big(\mu(x,y) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(s,t,\overline{u}(s,t))dsdt\Big) \\
&\leq \overline{u}(x,y),
\end{aligned}$$

pour tout $(x,y) \in J$ et $z \in [\underline{u}, \overline{u}]$.

$$\underline{u}(x,y) \leq Az(x,y)Bz(x,y) \leq \overline{u}(x,y), \quad \forall (x,y) \in J \ et\ z \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

D'où $Az\,Bz \in [\underline{u}, \overline{u}]$, pour tout $z \in [\underline{u}, \overline{u}]$. On a pour tout $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$,

$$\begin{aligned} M &= \|B([\underline{u}, \overline{u}])\| \\ &\leq |\mu(x,y)| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \left| \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} g(t,s,u(t,s))dsdt \right| \\ &\leq \|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1} b^{r_2} \tilde{h}^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\alpha M \leq \|\alpha\|_\infty \left(\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1} b^{r_2} \tilde{h}^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \right) < 1.$$

Alors les opérateurs A et B satisfont toutes les conditions du Théorème 1.4.11 et donc l'équation opérationnelle (3.39) possède une solution minimale et une solution maximale sur $[\underline{u}, \overline{u}]$. Ceci implique que le problème (3.15)-(3.16) possède une solution minimale et une solution maximale positives sur J.

Théorème 3.6.3 *Supposons que les hypothèses $(A1), (H_1) - (H_4)$ sont satisfaites. Alors le problème(3.15)-(3.16) possède une solution minimale et maximale positives sur J.*

Preuve : Soit $X = C(J, \mathbb{R})$. Considérons l'intervalle ordonné $[\underline{u}, \overline{u}]$ dans X et les deux opérateurs A et B définis respectivement sur $[\underline{u}, \overline{u}]$ par (3.38) et (3.39). Alors le problème (3.15)-(3.16) est transformé en une équation opérationnelle $Au(x,y)\,Bu(x,y) = u(x,y)$, $(x,y) \in J$ dans l'algèbre de Banach X. L'hpothése (H_1) implique que $A, B : [\underline{u}, \overline{u}] \to K$. Puisque le cône K est normale dans X, $[\underline{u}, \overline{u}]$ est un ensemble de norme bornée dans X.

En suite nous montrons que A est complètement continu sur $[\underline{u}, \overline{u}]$. Le cône K est normal dans X, donc l'intervalle ordonné $[\underline{u}, \overline{u}]$ est de norme bornée. D'où il existe une costante $\varrho > 0$ tel que $\|u\| \leq \varrho$ pour tout $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$. puisque f est continue sur l'ensemble compact $J \times [-\varrho, \varrho]$, elle atteint son maximum M. Donc, pour tout sous ensemble S de $[\underline{u}, \overline{u}]$ on a

$$\begin{aligned} \|A(S)\| &= \sup\{|Au| : u \in S\} \\ &= \sup\left\{ \sup_{(x,y)\in J} |f(x,y,u(x,y))| : u \in S \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \sup_{(x,y)\in J} |f(x,y,u)| : u \in [-\varrho, \varrho] \right\} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Ceci montre que $A(S)$ est uniformément borné.
La fonction $f(x,y,u)$ est uniformément continue sur $J\times[-\varrho,\varrho]$. Donc, pour chaque $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in J$ on a

$$|f(x_1,y_1,u)-f(x_2,y_2,u)|\to 0 \ \ quand\ (x_1,y_1)\to(x_2,y_2),$$

pour tout $u\in[-\varrho,\varrho]$. De même pour chaque $u_1,u_2\in[-\varrho,\varrho]$

$$|f(x,y,u_1)-f(x,y,u_2)|\to 0 \ \ quand\ u_1\to u_2,$$

pour tout $(x,y)\in J$. Donc pour $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in J$ et pour tout $u\in S$ on a

$$\begin{aligned}|Au(x_1,y_1)-Au(x_2,y_2)| &= |f(x_1,y_1,u(x_1,y_1))-f(x_2,y_2,u(x_2,y_2))|\\ &\le |f(x_1,y_1,u(x_1,y_1))-f(x_2,y_2,u(x_1,y_1)|\\ &\quad +|f(x_2,y_2,u(x_1,y_1))-f(x_2,y_2,u(x_2,y_2))|\\ &\qquad \to 0 \quad quand\ (x_1,y_1)\to(x_2,y_2).\end{aligned}$$

Ceci montre que $A(S)$ est un ensemble equi-continu dans K. Donc d'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli A est complètement continu sur $[\underline{u},\overline{u}]$.

Ensuite on peut montrer comme dans le preuve du Théorème 3.6.2 que B est compact sur $[\underline{u},\overline{u}]$. Une application du Théorème 1.4.10 prouve que le problème (3.15)-(3.16) possède une solution minimale et une solution maximale positives sur J.

3.6.3 Exemple

Considérons le proplème suivant :

$$^cD_0^r\left(\frac{u(x,y)}{f(x,y,u(x,y))}\right)=g(x,y,u(x,y)),\ si\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \tag{3.42}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,1],\ u(0,y)=\psi(y),\ y\in[0,1], \tag{3.43}$$

où $f,g:[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y,u)=\frac{1}{e^{x+y+10}(1+|u|)} \tag{3.44}$$

et

$$g(x,y,u)=\frac{1}{e^{x+y+8}(1+u^2)}. \tag{3.45}$$

les fonctions $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$\varphi(x) = x^2 e^{-10} \quad et \quad \psi(y) = ye^{-10}, \quad pour\ tout\ x, y \in [0,1]. \tag{3.46}$$

Nous montrons que les fonctions φ, ψ, f et g satisfont toutes les hypothèses du Théorème 3.6.1.
On a $f : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $g : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
La fonction f satisfait (A1) et (A2) avec $\alpha(x,y) = \dfrac{1}{e^{x+y+10}}$ et $\|\alpha\|_\infty = \dfrac{1}{e^{10}}$.
aussi,la fonction g satisfait (A3) avec $h(x,y) = \dfrac{1}{e^{x+y+8}}$ et $h^* = \dfrac{1}{e^8}$.
Un calcule simple donne

$$\mu(x,y) = e^x x^2(1 + x^2) + e^y y(1 + |y|),$$

et

$$\|\mu\|_\infty \leq 4e.$$

Nous montrons que la condition (3.37) est satisfaite. En effet

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_\infty \left[\|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1} b^{r_2} h^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \right] &\leq \frac{1}{e^{10}} \left[4e + \frac{1}{e^8 \Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \right] \\ &< 1, \end{aligned}$$

pour quelque $(r_1, r_2) \in (0,1] \times (0,1]$. D'où d'après le Théorème 3.6.1, le problème (3.42)-(3.43) admet une solution définie sur $[0,1] \times [0,1]$.

Chapitre Quatre

Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques avec retard infini

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions du problème de Darboux pour équations différentielles hyperbolique d'ordre fractionnaire avec retard infini.

Dans la deuxième section on donnera la définition axiomatique et quelques exemples des espaces des phases $\mathcal{B}$, et la troisième section est consacrée à l'étude du problème de Darboux dans le cas fonctionnel suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u_{(x,y)}), \quad (x,y) \in J, \tag{4.1}$$

$$u(x,y) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \tilde{J}' =]-\infty,a]\times]-\infty,b]\backslash]0,a]\times]0,b], \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b], \tag{4.3}$$

où $f : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, et $\mathcal{B}$ est un espace de phase, $\phi : \tilde{J}' \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue telle que :

$$\begin{array}{ll} \phi(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0,a] \\ \phi(0,y) = \psi(y) & \forall y \in [0,b]. \end{array}$$

On note par $u_{(x,y)}$ l'element de $\mathcal{B}$ defini par

$$u_{(x,y)}(s,t) = u(x+s, y+t); \ (s,t) \in]-\infty, 0]\times]-\infty, 0],$$

Ici $u_{(x,y)}(.,.)$ représente l'histoire de l'état u.

Pour la quatrième section on va étudier ce problème dans le cas de type neutre suivant :

$$^{c}D_0^r\Big(u(x,y) - g(x,y,u_{(x,y)})\Big) = f(x,y,u_{(x,y)}), \quad (x,y) \in J, \tag{4.4}$$

$$u(x,y) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \tilde{J}', \tag{4.5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ x \in [0,a], \ u(0,y) = \psi(y), \ y \in [0,b], \tag{4.6}$$

où f, ϕ, φ, ψ sont comme dans le problème (4.1)-(4.3) et $g : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

4.2 Espace de phase $\mathcal{B}$

La notation de l'espace de phase joue un rôle important dans l'étude de la théorie qualitative et quantitative pour les équations différentielles fonctionnelles. On utilise la définition axiomatique de l'espace de phase $\mathcal{B}$ introduite par Hale et Kato dans [37]. Pour plus de détaille voir [19, 20, 38, 42, 50].

Pour tout $(x,y) \in J$, on note $E_{(x,y)} := [0,x] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,y]$, si $x = a, y = b$ nous écrivons simplement E.

Soit $(\mathcal{B}, ||(.,.)||_{\mathcal{B}})$ l'espace des fonctions linéaires de $]-\infty,0]\times]-\infty,0]$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de la semi norme $||(.,.)||_{\mathcal{B}}$ et qui vérifie les axiomes suivantes :

(A_1) Si $y :]-\infty,0]\times]-\infty,0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur J et $y_{(x,y)} \in \mathcal{B}, \forall (x,y) \in E$, alors, il existe les constantes $H, K, M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in J$ les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $y_{(x,y)} \in \mathcal{B}$.

(ii) $||y(x,y)|| \leq H||y_{(x,y)}||_{\mathcal{B}}$.

(*iii*) $||y_{(x,y)}||_{\mathcal{B}} \leq K \sup_{(s,t)\in J} ||y(s,t)|| + M \sup_{(s,t)\in E_{(x,y)}} ||y_{(s,t)}||_{\mathcal{B}}.$

(A_2) $y_{(x,y)} \in \mathcal{B}$ est une fonction continue sur J.

(A_3) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Maintenant, nous présentons quelques exemples des espaces des phases [19, 20].

Exemple 4.2.0.1 *Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\phi :]-\infty, 0]\times]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont continues sur $[-\alpha, 0] \times [-\beta, 0], \alpha, \beta \geq 0$, muni de la semi norme suivante :*

$$||\phi||_{\mathcal{B}} = \sup_{(s,t)\in[-\alpha,0]\times[-\beta,0]} ||\phi(s,t)||.$$

Alors, nous avons $H = K = M = 1$.

Exemple 4.2.0.2 *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et soit C_γ l'ensemble de toutes les fonctions continues $\phi :]-\infty, 0]\times]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que la limite $\lim_{||(s,t)||\to\infty} e^{\gamma(s+t)}\phi(s,t)$ existe avec la norme*

$$||\phi||_{C_\gamma} = \sup_{(s,t)\in(-\infty,0]\times(-\infty,0]} e^{\gamma(s+t)}||\phi(s,t)||.$$

Alors, nous avons $H = 1$ et $K = M = \max\{e^{-\gamma(a+b)}, 1\}$.

Exemple 4.2.0.3 *Soit $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ et soit*

$$||\phi||_{CL_\gamma} = \sup_{(s,t)\in[-\alpha,0]\times[-\beta,0]} ||\phi(s,t)|| + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma(s+t)}||\phi(s,t)||dsdt.$$

est la semi norme pour l'espace CL_γ des fonctions $\phi :]-\infty, 0]\times]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont continues sur $[-\alpha, 0] \times [-\beta, 0]$ et mesurable sur $]-\infty, -\alpha]\times]-\infty, 0]\cup]-\infty, 0]\times]-\infty, -\beta]$, et tel que $||\phi||_{C_\gamma} < \infty$. Alors,

$$H = 1, \quad K = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma(s+\tau)}dsdt, \quad M = 2.$$

4.3 Problème de Darboux dans le cas fonctionnel

Soit :

$\Omega = \{u :]-\infty, a]\times]-\infty, b] \to \mathbb{R}^n$ *tel que* : $u_{(x,y)} \in \mathcal{B}$ *pour* $(x,y) \in E$ *et* $u|_J \in C(J, \mathbb{R}^n)\}$.

Définition 4.3.1 *Une fonction* $u \in \Omega$ *est dite solution du problème* (4.1)-(4.3) *si* u *satisfait les équations* (4.1) *et* (4.3) *sur* J *et la condition* (4.2) *sur* $\tilde{J}'$.

Lemme 4.3.1 $u \in AC(]-\infty, a]\times]-\infty, b], \mathbb{R}^n)$ *est solution du problème* (4.1)-(4.3) *si et seulement si* u *satisfait la condition* (4.2) *sur* $\tilde{J}'$ *et* u *est solution de l'équation suivante*

$$u(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt \quad (x,y) \in J. \tag{4.7}$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (4.1)-(4.3), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 4.3.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H1)$ $f : J \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une fonction continue.*
$(H2)$ *Il existe une constante* $\ell > 0$ *tel que :*

$$||f(x,y,u_1) - f(x,y,u_2)|| \le \ell ||u_1 - u_2||_{\mathcal{B}} \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathcal{B} \text{ et } (x,y) \in J.$$

Si

$$\frac{\ell K a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1,$$

alors, le problème (4.1)-(4.3) *admet une seule solution sur* $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur $G : \Omega \longrightarrow \Omega$ défini par :

$$(Gu)(x,y) =$$

$$\begin{cases} \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \displaystyle\int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt, & (x,y) \in J, \\ \phi(x,y), & (x,y) \in \tilde{J}. \end{cases}$$

Soit $v(.,.) : (-\infty, a] \times (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction définie par :

$$v(x,y) = \begin{cases} \phi(x,y), & (x,y) \in \tilde{J}', \\ \mu(x,y), & (x,y) \in J. \end{cases}$$

Alors, $v(x,y) = \phi$ pour tout $(x,y) \in E$. Pour tout $w \in C(J, \mathbb{R}^n)$ avec $w(x,y) = 0$ pour chaque $(x,y) \in E$, nous dénotons par $\overline{w}$ la fonction définie par :

$$\overline{w}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \tilde{J}', \\ w(x,y), & (x,y) \in J. \end{cases}$$

Si $u(.,.)$ satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(t,x) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt.$$

nous pouvons décomposer $u(.,.)$ comme $u(x,y) = \overline{w}(x,y) + v(x,y), \;\; (x,y) \in J$, ce qui implique que $u_{(x,y)} = \overline{w}_{(x,y)} + v_{(x,y)}$, pour chaque $(x,y) \in J$ et la fonction $w(.,.)$ satisfait

$$w(x,y) = \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,\overline{w}_{(s,t)} + v_{(s,t)})dsdt.$$

Soit l'ensemble

$$C_0 = \{w \in C(J, \mathbb{R}^n) : w(x,y) = 0 \text{ } pour \text{ } (x,y) \in E\},$$

et soit $||.||_{(a,b)}$ est une semi norme dans C_0 définie par :

$$||w||_{(a,b)} = \sup_{(x,y)\in E} ||w_{(x,y)}||_{\mathcal{B}} + \sup_{(x,y)\in J} ||w(x,y)|| = \sup_{(x,y)\in J} ||w(x,y)||, \quad w \in C_0.$$

C_0 est un espace de Banach muni de la norme $||.||_{(a,b)}$.
Soit l'opérateur $N : C_0 \longrightarrow C_0$ défini par :

$$(Nw)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,\overline{w}_{(s,t)} + v_{(s,t)})dsdt. \tag{4.8}$$

Alors, l'opérateur G admet un point fixe est équivalent à N admet un point fixe.
Pour montrer que N admet un point fixe il suffit de montrer que N est une contraction, en effet : si $w_1, w_2 \in C_0$, pour tout $(x,y) \in J$ on a :

$$||(Nw_1)(x,y) - (Nw_2)(x,y)|| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|f(s,t,\overline{w}_{1_{(s,t)}}+v_{(s,t)})-f(s,t,\overline{w}_{2_{(s,t)}}+v_{(s,t)})\|dsd \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\ell\|\ \overline{w}_{1_{(s,t)}}-\overline{w}_{2_{(s,t)}}\|dsdt \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\ell K \\
\times & \sup_{(s,t)\in[0,x]\times[0,y]}||\overline{w}_1(s,t)-\overline{w}_2(s,t)||dsdt \\
\leq & \frac{\ell K}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt\|\overline{w}_1-\overline{w}_2\|_{(a,b)}.
\end{aligned}$$

Et par suite :

$$\|(Nw_1)-(Nw_2)\|_{(a,b)}\leq \frac{\ell K a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\|\ \overline{w}_1-\overline{w}_2\|_{(a,b)}.$$

Donc N est une contraction et d'après le théorème de Banach N admet un seul point fixe qui est une solution du problème (4.1)-(4.3).

Notre deuxième résultat d'existence des solutions du problème (4.1)-(4.3) est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 4.3.2 *Supposons que* $(H1)$ *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

$(H3)$ *Il existe deux fonctions* $p,q\in C(J,\mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$\|f(x,y,u)\|\leq p(x,y)+q(x,y)\|u\|_{\mathcal{B}}\quad \forall\ (x,y)\in J \text{ et } u\in\mathcal{B}.$$

Alors, le problème (4.1)-(4.3) *admet au moins une solution sur* $(-\infty,a]\times(-\infty,b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur N défini dans (4.8).

- N est continu, en effet : Soit w_n *une suite dans* C_0 convergente pour la norme $||.||_\infty$ vers une limite w, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}||w_n-w||_\infty=0$.
  Il faut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}||Nw_n-Nw||_\infty=0$.
  Soit $(x,y)\in J$:

$$\begin{aligned}
||(Nw_n)(x,y)-(Nw)(x,y)|| \leq & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \\
\times & \|f(s,t,\overline{w}_{n(s,t)}+v_{n(s,t)})-f(s,t,\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)})\|dsdt.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on a

$$\begin{aligned}
||(Nw_n)(x,y)-(Nw)(x,y)||_\infty &\leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}\|f(.,.,\overline{w_n}_{(.,.)}+v_{n(.,.)})-f(.,.,\overline{w}_{(.,.)}+v_{(.,.)})\|_\infty}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \\
&\to 0 \ \ quand \ \ n\to\infty.
\end{aligned}$$

D'où N est continu.

- N est complètement continu : c'est à dire $N(B_\eta)$ est relativement compact pour tout borné B_η.
Soit l'ensemble :

$$B_\eta=\{w\in C_0 : ||w||_{(a,b)}\leq\eta\}.$$

$N(B_\eta)$ est relativement compact si :

(i) $N(B_\eta)$ est borné, en effet : Soit $w\in B_\eta$ et $(x,y)\in J$ alors,

$$\begin{aligned}
||(Nw)(x,y)|| &\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|f(s,t,\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)})\|dsdt \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^x(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt \\
&\quad +\frac{\|q\|_\infty\eta^*}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}a^{r_1}b^{r_2}:=\ell^*,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
||\overline{w}_{(s,\tau)}+v_{(s,\tau)}||_{\mathcal{B}} &\leq ||\overline{w}_{(s,\tau)}||_{\mathcal{B}}+||v_{(s,\tau)}||_{\mathcal{B}} \\
&\leq K\eta+K||\mu||_\infty+M||\phi||_{\mathcal{B}}:=\eta^*.
\end{aligned}$$

Donc $||Nw||_\infty\leq\ell^*$ et par suite $N(B_\eta)$ est borné.

(ii) $N(B_\eta)$ est équicontinue, en effet :
Soit $w\in B_\eta$ et $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in J,\ x_1<x_2,\ y_1<y_2$:

$$||(Nu)(x_2,y_2)-(Nu)(x_1,y_1)||\leq$$
$$\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}-(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1}]$$

$$
\begin{aligned}
& \times f(s,t,u_{(s,t)})dsdt + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} \\
& \times f(s,t,\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)})dsdt\| \\
& +\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|\int_{0}^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)})dsdt\| \\
& +\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\|\int_{x_1}^{x_2}\int_{0}^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t,\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)})dsdt\| \\
\leq\ & \frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2} \\
& -(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}+x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}] \\
& +\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2} \\
& +\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[x_2^{r_1}-(x_2-x_1)^{r_1}](y_2-y_1)^{r_2} \\
& +\frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}(x_2-x_1)^{r_1}[y_2^{r_2}-(y_2-y_1)^{r_2}] \\
\leq\ & \frac{\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2} \\
& +x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}-2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].
\end{aligned}
$$

Si $(x_2,y_2)\to(x_1,y_1)$: $(Nw)(x_2,y_2)\to(Nw)(x_1,y_1)$, et par suite N est équicontinu.

Alors, N est complètement continu.

Soit $w\in C_0$ tel que $w=\lambda N(w)$ pour $\lambda\in]0,1[$.
Pour tout $(x,y)\in J$, on a :

$$w(x,y)\leq\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t,u_{(s,t)})dsdt.$$

Alors, d'après $(H3)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\|w(x,y)\| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}[p(s,t) \\
& +q(s,t)\|\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)}\|_{\mathcal{B}}]dsdt \\
\leq\ & \frac{\|p\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)\|\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)}\|_{\mathcal{B}}dsdt.$$

Mais

$$\begin{aligned}\|\overline{w}_{(s,t)}+v_{(s,t)}\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\overline{w}_{(s,t)}\|_{\mathcal{B}}+\|v_{(s,t)}\|_{\mathcal{B}}\\ &\leq K\sup\{w(\tilde{s},\tilde{t}) : (\tilde{s},\tilde{t})\in[0,s]\times[0,t]\}\\ &\quad +K||\mu||_\infty+M||\phi||_{\mathcal{B}}\\ &\leq z(x,y),\end{aligned}$$

où $z(x,y)=K\sup\{w(\tilde{s},\tilde{t}) : (\tilde{s},\tilde{t})\in[0,s]\times[0,t]\}+K||\mu||_\infty+M||\phi||_{\mathcal{B}}$.
et par suite, pour chaque $(x,y)\in J$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|w(x,y)\| &\leq \frac{\|p\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\\ &+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)z(s,t)dsdt. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (4.9) et la définition de z pour tout $(x,y)\in J$ on a :

$$\begin{aligned}z(x,y) &\leq K||\mu||_\infty+M||\phi||_{\mathcal{B}}+\frac{K\|p\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\\ &+\frac{K\|p\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}z(s,t)dsdt.\end{aligned}$$

D'aprés lemme de Gronwall il existe $\delta=\delta(r_1,r_2)$ tel que :

$$\|z(x,y)\| \leq R+\delta\frac{K\|q\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}Rdsdt,$$

où

$$R=K||\mu||_\infty+M||\phi||_{\mathcal{B}}+\frac{K\|p\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}.$$

Donc

$$\|z\|_\infty\leq R+\frac{R\delta K\|q\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}:=M^*.$$

Alors, l'inégalité (4.9) devient :

$$\|w\|_\infty\leq\frac{a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}(\|p\|_\infty+M^*\|q\|_\infty):=\tilde{M}.$$

Soit :

$$U = \{w \in C_0 : ||w||_{(a,b)} < \tilde{M} + 1\}.$$

Comme $\forall w \in \partial U$ et $\forall \lambda \in]0,1[$, on a : $w \neq \lambda N(w)$.

Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder N admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (4.1)-(4.3).

4.4 Problème de Darboux dans le cas de type neutre

Définition 4.4.1 *Une fonction $u \in \Omega$ est dite solution du problème* (4.4)-(4.6) *si u satisfait les équations* (4.4) *et* (4.6) *sur J et la condition* (4.5) *sur $\tilde{J}'$.*

Lemme 4.4.1 *$u \in AC((-\infty, a] \times (-\infty, b], \mathbb{R}^n)$ est solution du problème* (4.4)-(4.6) *si et seulement si u satisfait la condition* (4.5) *sur $\tilde{J}'$ et u est une solution de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mu(x,y) + g(x,y,u_{(x,y)}) - g(x,0,u_{(x,0)}) - g(0,y,u_{(0,y)}) + g(0,0,u_{(0,0)}) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt. \end{aligned}$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (4.4)-(4.6), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 4.4.1 *Supposons que* $(H1)$, $(H2)$ *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

$(H2')$ *Il existe une constante $\ell' > 0$ telle que :*

$$||g(x,y,u_1) - g(x,y,u_2)|| \leq \ell' ||u_1 - u_2||_{\mathcal{B}} \ \text{pour tout } u_1, u_2 \in \mathcal{B} \text{ et } (x,y) \in J.$$

Si

$$K[4\ell' + \frac{\ell a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}] < 1,$$

alors, le problème (4.4)-(4.6) *admet une seule solution sur* $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur $\overline{G} : \Omega \longrightarrow \Omega$ défini par :

$$(\overline{G}u)(x,y) = \begin{cases} \mu(x,y) + g(x,y,u_{(x,y)}) - g(x,0,u_{(x,0)}) & (x,y) \in J, \\ -g(0,y,u_{(0,y)}) + g(0,0,u_{(0,0)}) & \\ +\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,u_{(s,t)})dsdt, & \\ \phi(x,y), & (x,y) \in \tilde{J}'. \end{cases}$$

Par analogie au Théorème 4.3.1, nous considérons l'opérateur $\overline{N} : C_0 \longrightarrow C_0$ défini par :

$$\begin{aligned} (\overline{N}w)(x,y) &= g(x,y,\overline{w}_{(x,y)} + v_{(x,y)}) - g(x,0,\overline{w}_{(x,0)} + v_{(x,0)}) \\ &- g(0,y,\overline{w}_{(0,y)} + v_{(0,y)}) + g(0,0,\overline{w}_{(0,0)} + v_{(0,0)}) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t,\overline{w}_{(s,t)} + v_{(s,t)})dsdt, (x,y) \in J. \end{aligned}$$

Nous montrerons que l'opérateur $\overline{N}$ est une contraction, en effet : si $w_1, w_2 \in C_0$, pour tout $(x,y) \in J$ on a :

$$||(\overline{N}w_1)(x,y) - (\overline{N}w_2)(x,y)|| \leq$$

$$\begin{aligned} & \|g(x,y,\overline{w}_{1_{(x,y)}} + v_{(x,y)}) - g(x,y,\overline{w}_{2_{(x,y)}} + v_{(x,y)})\| \\ + & \|g(x,0,\overline{w}_{1_{(x,0)}} + v_{(x,0)}) - g(x,0,\overline{w}_{2_{(x,0)}} + v_{(x,0)})\| \\ + & \|g(0,y,\overline{w}_{1_{(0,y)}} + v_{(0,y)}) - g(0,y,\overline{w}_{2_{(0,y)}} + v_{(0,y)})\| \\ + & \|g(0,0,\overline{w}_{1_{(0,0)}} + v_{(0,0)}) - g(0,0,\overline{w}_{2_{(0,0)}} + v_{(0,0)})\| \\ + & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \\ \times & \|f(s,t,\overline{w}_{1_{(s,t)}} + v_{(s,t)}) - f(s,t,\overline{w}_{2_{(s,t)}} + v_{(s,t)})\|dsdt \\ \leq & 4\ell' K \|\overline{w}_1 - \overline{w}_2\|_{(a,b)} + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \\ \times & \ell K \|\overline{w}_1 - \overline{w}_2\| dsdt. \end{aligned}$$

et par suite :

$$||(\overline{N}w_1) - (\overline{N}w_2)||_{(a,b)} \leq K[4\ell' + \frac{\ell a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}]\|\overline{w}_1 - \overline{w}_2\|_{(a,b)}.$$

Donc $\overline{N}$ est une contraction et d'après le théorème de Banach $\overline{N}$ admet un seul point fixe.

Maintenant nous donnons un résultat de l'existence des solutions du problème (4.4)-(4.6) basé sur l'aletarnative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 4.4.2 *Supposons que* $(H1)$, $(H3)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H4)$ *g est une fonction continue et complètement continue et pour tout ensemble borné D dans Ω, l'ensemble $\{(x,y)) \longrightarrow g(x,y,u_{(x,y)}) : u \in D\}$ est équicontinu dans $C(J,\mathbb{R}^n)$.*

$(H5)$ *Il existe $0 \leq d_1K < \frac{1}{4}, d_2 \geq 0$ tel que :*

$$||g(x,y,u)|| \leq d_1||u||_{\mathcal{B}} + d_2 \qquad (x,y) \in J, u \in \mathcal{B}.$$

Alors, le problème (4.4)-(4.6) *admet au moins une solution sur* $(-\infty,a] \times (-\infty,b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur $\overline{N}$ défini dans le Théorème 4.4.1.
On a prouvé d'après le théorème 4.3.2 que l'opérateur N défini dans (4.8) est continu et complètement continu, donc d'après (H4) $\overline{N}$ est continu et complètement continu.
Soit $w \in C_0$ tel que $w = \lambda\overline{N}(w)$ pour $0 < \lambda < 1$. pour tout $(x,y) \in J$,

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \lambda[g(x,y,\overline{w}_{(x,y)} + v_{(x,y)}) - g(x,0,\overline{w}_{(x,0)} + v_{(x,0)}) \\ &\quad -g(0,y,\overline{w}_{(0,y)} + v_{(0,y)}) + g(0,0,\overline{w}_{(0,0)} + v_{(0,0)})] \\ &\quad +\frac{\lambda}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t,\overline{w}_{(s,t)} + v_{(s,t)})dsdt, \end{aligned}$$

et

$$\|w(x,y)\| \;=\; 4d_1\|\overline{w}_{(x,y)} + v_{(x,y)}\|_{\mathcal{B}} + \frac{\|p\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}q(s,t)\|\overline{w}_{(s,t)} + v_{(s,t)}\|_{\mathcal{B}}dsdt. \quad (4.10)$$

En utilisant l'inégalité (4.10) et la définition de z pour tout $(x,y) \in J$ ona :

$$\|z\|_\infty \leq R_1 + \frac{R_1\delta K\|q^*\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{(1-4d_1K)\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} := L,$$

où

$$R_1 = \frac{1}{1-4d_1K}\Big[8d_2K + \frac{K\|p\|_\infty a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\Big],$$

et

$$\|q^*\|_\infty = \frac{\|q\|_\infty}{1 - 4d_1 K}.$$

Alors

$$\|w\|_\infty \leq 4d_1\|\phi\|_{\mathcal{B}} + 8d_2 + 4Ld_1 + \frac{a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}(\|p\|_\infty + L\|q\|_\infty) := L^*.$$

Soit

$$U = \{w \in C_0 : \|w\|_{(a,b)} < L^* + 1\}.$$

Comme $\forall w \in \partial U$ et $\forall \lambda \in (0,1)$, ona $w \neq \lambda \overline{N}(w)$. Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder $\overline{G}$ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (4.4)-(4.6).

4.4.1 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = \frac{e^{x+y-\gamma(x+y)}\|u_{(x,y)}\|}{c(e^{x+y} + e^{-x-y})(1 + \|u_{(x,y)}\|)}, \quad si(x,y) \in J := [0,1] \times [0,1], \tag{4.11}$$

$$u(x,0) = x, \ u(0,y) = y^2, \ x \in [0,1], y \in [0,1], \tag{4.12}$$

$$u(x,y) = x + y^2, \ (x,y) \in \tilde{J}', \tag{4.13}$$

où $\tilde{J}' := (-\infty,1] \times (-\infty,1] \backslash (0,1] \times (0,1]$, $c = \frac{2}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}$ et γ est une constante réelle positive.
Soit

$$\mathcal{B}_\gamma = \{u \in C((-\infty,0]\times(-\infty,0], \mathbb{R}) : \lim_{\|(\theta,\eta)\|\to\infty} e^{\gamma(\theta+\eta)}u(\theta,\eta) \ \ existe\, dans\, \mathbb{R}\}.$$

la norme de $\mathcal{B}_\gamma$ est donnée par :

$$\|u\|_\gamma = \sup_{(\theta,\eta)\in(-\infty,0]\times(-\infty,0]} e^{\gamma(\theta+\eta)}|u(\theta,\eta)|.$$

Soit

$$E := [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1],$$

et $u : (-\infty,1] \times (-\infty,1] \to \mathbb{R}$ tel que $u_{(x,y)} \in \mathcal{B}_\gamma$ pour $(x,y) \in E$, alors

$$\lim_{\|(\theta,\eta)\|\to\infty} e^{\gamma(\theta+\eta)}u_{(x,y)}(\theta,\eta) = \lim_{\|(\theta,\eta)\|\to\infty} e^{\gamma(\theta-x+\eta-y)}u(\theta,\eta)$$

$$= e^{-\gamma(x+y)} \lim_{\|(\theta,\eta)\|\to\infty} e^{\gamma(\theta+\eta)} u(\theta,\eta) < \infty.$$

d'ou $u_{(x,y)} \in \mathcal{B}_\gamma$. Finallement nous prouvons que :

$$\|u_{(x,y)}\|_\gamma = K \sup\{|u(s,t)| : (s,t) \in [0,x]\times[0,y]\} + M \sup\{\|u_{(s,t)}\|_\gamma : (s,t) \in E_{(x,y)}\},$$

où $K = M = 1$ et $H = 1$.
Si $x+\theta \leq 0,\ y+\eta \leq 0$, nous obtenons

$$\|u_{(x,y)}\|_\gamma = \sup\{|u(s,t)| : (s,t) \in (-\infty,0] \times (-\infty,0]\},$$

et si $x+\theta \geq 0,\ y+\eta \geq 0$ alors, nous avons

$$\|u_{(x,y)}\|_\gamma = \sup\{|u(s,t)| : (s,t) \in [0,x] \times [0,y]\}.$$

Donc pour tout $(x+\theta, y+\eta) \in [0,1] \times [0,1]$, nous obtenons

$$\|u_{(x,y)}\|_\gamma = \sup\{|u(s,t)| : (s,t) \in (-\infty,0]\times(-\infty,0]\} + \sup\{|u(s,t)| : (s,t) \in [0,x]\times[0,y]\}.$$

Alors

$$\|u_{(x,y)}\|_\gamma = \sup\{\|u_{(s,t)}\|_\gamma : (s,t) \in E\} + \sup\{|u(s,t)| : (s,t) \in [0,x] \times [0,y]\}.$$

$(\mathcal{B}_\gamma, \|.\|_\gamma)$ est un espace de Banach. Nous concluons que $\mathcal{B}_\gamma$ est un espace de phase.

$$f(x,y,u_{(x,y)}) = \frac{e^{x+y-\gamma(x+y)}\|u_{(x,y)}\|}{c(e^{x+y}+e^{-x-y})(1+\|u_{(x,y)})\|},\ (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

pour tout $u,\ \overline{u} \in \mathcal{B}_\gamma$ et $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned} |f(x,y,u_{(x,y)}) - f(x,y,\overline{u}_{(x,y)})| &\leq \frac{e^{x+y}\|u-\overline{u}\|_B}{c(e^{x+y}+e^{-x-y})} \\ &\leq \frac{1}{c}\|u-\overline{u}\|_B. \end{aligned}$$

D'ou la condition (H_1) est satisfaite avec $\ell = \frac{1}{c}$. Puisque $a = b = K = 1$ nous obtenons

$$\frac{\ell a^{r_1} b^{r_2} K}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} = \frac{1}{c\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} = \frac{1}{2} < 1,$$

pour tout $(r_1, r_2) \in (0,1] \times (0,1]$. et par suite, d'après le théorème 4.3.1 le problème (4.11)-(4.13) admet une seule solution sur $(-\infty,1] \times (-\infty,1]$.

Chapitre Cinq

Problème de Darboux pour des inclusions différentielles

5.1 Introduction

Ce chapitre introduit quelques conditions suffisantes pour montrer l'existence des solutions du problème de Darboux pour des inclusions différentielles, les résultats de ce chapitre sont basés sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Dans une autre résultat on étulise le théorème de point fixe de Covitz- Nadler.

La deuxième section est consacré à l'étude du problème de Darboux suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) \in F(x,y,u_{(x,y)}),\ si\ (x,y) \in J, \tag{5.1}$$

$$u(x,y) = \phi(x,y),\ si\ (x,y) \in \tilde{J} := [-\alpha, a] \times [-\beta, b] \backslash (0,a] \times (0,b], \tag{5.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b], \tag{5.3}$$

où $\alpha, \beta > 0,\ F : J \times C \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque à valeurs compactes et convexes, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de sous ensembles de $\mathbb{R}$, $\phi \in C(\tilde{J}, \mathbb{R}),\ \varphi : [0,a] \to \mathbb{R},\ \psi : [0,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions absolument continues avec $\varphi(x) = \phi(x,0),\ \psi(y) = \phi(0,y)$ pour tout $x \in [0,a],\ y \in [0,b]$ et $C := C([-\alpha,0] \times [-\beta,0], \mathbb{R})$.

Ensuite nous étudierons le problème (5.1)-(5.3) où le second membre est à valeurs non convexes.

Puis on va utiliser la méthode des sous et sur solutions pour étudier le problème de Darboux suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) \in F(x,y,u(x,y)),\ \text{si } (x,y) \in J, \tag{5.4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,a],\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in [0,b], \tag{5.5}$$

où $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une application multivoque compacte, φ, ψ sont comme dans le problème (5.1)-(5.3).

5.2 Cas d'un second membre convexe

Définition 5.2.1 *Une fonction $u \in C_{(a,b)} := C([-\alpha, a] \times [-\beta, b], \mathbb{R})$ tel que sa derivé mixte D^2_{xy} existe et intégrable sur J est dite solution du problème (5.1)-(5.3), s'il existe une fonction $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $f(x,y) \in F(x,y,u_{(x,y)})$ p. p $(x,y) \in J$, tel que*

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y),\quad p.p\ \ (x,y) \in J,$$

et u satisfait la condition (5.3) sur J et la condition (5.2) sur $\tilde{J}$.

Théorème 5.2.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H_1) *$F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est une application multivoque de Carathéodory.*

(H_2) *Il existent $p \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et $\Psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ est une fonction continue et croissante tel que :*

$$\|F(x,y,u)\|_{\mathcal{P}} \le p(x,y)\Psi(|u|)\ \ \text{pour } (x,y) \in J \text{ et } u \in \mathbb{R}.$$

(H_3) *Il exite $l \in C(J, \mathbb{R}_+)$ tel que*

$$H_d(F(x,y,u), F(x,y,\overline{u})) \le l(x,y)|u - \overline{u}| \quad \text{pour tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R},$$

et

$$d(0, F(x,y,0)) \le l(x,y),\quad p.p\ (x,y) \in J.$$

(H_4) *Il existe $M > 0$ tel que*

$$\frac{M}{\|\mu\|_\infty + \dfrac{\Psi(M)p^* a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}} > 1, \tag{5.6}$$

où $p^* = \sup\limits_{(x,y)\in J} p(x,y)$.
Alors le problème (5.1)-(5.3) admet au moins une solution sur $[-\alpha, a] \times [-\beta, b]$.

Preuve : Soit $N : C_{(a,b)} \to P(C_{(a,b)})$ un opérateur multivoque defini par $N(u) = \{h \in C_{(a,b)}\}$ avec

$$h(x,y) = \begin{cases} \phi(x,y), & (x,y) \in \tilde{J}, \\ \mu(x,y) & \\ +\dfrac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \displaystyle\int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t)dsdt, & (x,y) \in J, \end{cases}$$

où $f \in S_{F,u}$.

Remarque 5.2.1
D'après le lemme 3.2.1, Les points fixes de N sont solutions du problème(5.1)-(5.3).

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.
Etape 1 : N est à valeurs convexes.
En effet, soient $u \in C_{(a,b)}$, $h_1,\ h_2 \in N(u)$, alors ils existent $f_1,\ f_2 \in S_{F,u}$ tel que pour $(x,y) \in J$ on a

$$h_i(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f_i(s,t)dsdt, \quad i = 1, 2.$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Alors pour tout $(x,y) \in J$, on a

$$\begin{aligned}(dh_1 + (1-d)h_2)(x,y) &= \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \\ &\quad \times [df_1(s,t) + (1-d)f_2(s,t)]dsdt,\end{aligned}$$

et pour tout $(x,y) \in \tilde{J}$, on a

$$(dh_1 + (1-d)h_2)(x,y) = \phi(x,y).$$

Comme l'ensemble $S_{F,y}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), on aura

$$(dh_1 + (1-d)h_2)(x,y) \in N(u).$$

Soit $B_\eta=\{u\in C_{(a,b)}:\|u\|_\infty\leq\eta\}$ un ensemble borné dans $C_{(a,b)}$
Etape 2 : $N(B_\eta)$ est uniformément borné dans $C_{(a,b)}$.
Soit $u\in B_\eta$. Alors pour tout $h\in N(u)$, il existe $f\in S_{F,u}$ tel que

$$h(x,y) = \mu(x,y)+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}f(s,t)dsdt.$$

D'après (H_2) nous avons, pour tout $(x,y)\in J$,

$$\begin{aligned}|h(x,y)| &\leq |\mu(x,y)|+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|f(s,t)|dsdt\\ &\leq |\mu(x,y)|+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s,t)\Psi(\|u_{(s,t)}\|)dsdt.\end{aligned}$$

Alors

$$\|h\|_\infty\leq\|\mu\|_\infty+\frac{\Psi(\eta)a^{r_1}b^{r_2}p^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}:=\ell_1.$$

D'un autre côté, pour tout $(x,y)\in\tilde{J}$,

$$\|h\|_\infty\leq\|\phi\|_\infty:=\ell_2.$$

D'où, pour tout $(x,y)\in[-\alpha,a]\times[-\beta,b]$,

$$\|h\|_\infty\leq\min\{\ell_1,\ell_2\}:=\ell.$$

Etape 3 : $N(B_\eta)$ est equicontinu sur $C_{(a,b)}$.
Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in J,\ x_1<x_2,\ y_1<y_2$, soient $u\in B_\eta$ et $h\in N(u)$, alors

$$\begin{aligned}&|h(x_2,y_2)-h(x_1,y_1)| = \Big|\mu(x_2,y_2)-\mu(x_1,y_1)\\ +\ & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}-(x_1-s)^{r_1-1}(y_1-t)^{r_2-1}]f(s,t)dsdt\\ +\ & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t)dsdt\\ +\ & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t)dsdt\\ +\ & \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}f(s,t)dsdt\Big|\\ \leq\ & |\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)|\\ +\ & \frac{p^*\Psi(\eta)}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}\\ & +x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}-2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].\end{aligned}$$

Lorsque $(x_1, y_1) \longrightarrow (x_2, y_2)$, le membre droit de la dernière inégalité tend vers zéro. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà, nous pouvons conclure que N est complètement continu.

Etape 4 : Montrons que N est s.c.s.

Comme N est complètement continu, il suffit de montrer, d'après le Lemme 1.3.1 que N est à graphe fermé.

Soient $u_n \to u_*,\ h_n \in N(u_n)$ et $h_n \to h_*$. On va montrer que $h_* \in N(u_*)$.

$h_n \in N(u_n)$ implique qu'il existe $f_n \in S_{F,u_n}$ tel que, pour tout $(x, y) \in J$,

$$h_n(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f_n(s,t)dsdt,$$

et pour $(x, y) \in \tilde{J},\ h_n(x, y) = \phi(x, y)$.

On va prouver qu'il existe $f_* \in S_{F,u_*}$ tel que, pour tout $(x, y) \in J$,

$$h_*(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f_*(s,t)dsdt,$$

et pour $(x, y) \in \tilde{J},\ h_*(x, y) = \phi(x, y)$.

Puisque $F(x, y, \cdot)$ est s.c.s, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\epsilon) \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$f_n(x,y) \in F(x,y,u_{n(x,y)}) \subset F(x,y,u_{*(x,y)}) + \varepsilon B(0,1), \quad p.p\ (x,y) \in J.$$

comme $F(.,.,.)$ a valeurs compactes, il existe une sous suite f_{n_m} telle que

$$f_{n_m}(\cdot,\cdot) \to f_*(\cdot,\cdot) \ \ quand\ m \to \infty$$

et

$$f_*(x,y) \in F(x,y,u_{*(x,y)}), \quad p.p\ (x,y) \in J.$$

pour tout $w \in F(x, y, u_{*(x,y)})$, on a

$$|f_{n_m}(x,y) - f_*(x,y)| \leq |f_{n_m}(x,y) - w| + |w - f_*(x,y)|.$$

Alors

$$|f_{n_m}(x,y) - f_*(x,y)| \leq d\Big(f_{n_m}(x,y), F(x,y,u_{*(x,y)})\Big).$$

Par une relation analogue, et par échanger le rôle de f_{n_m} et f_* on obtient

$$\begin{aligned} |f_{n_m}(x,y) - f_*(x,y)| &\leq H_d\Big(F(x,y,u_{n(x,y)}), F(x,y,u_{*(x,y)})\Big) \\ &\leq l(x,y)\|u_n - u_*\|_\infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|h_{n(x,y)} - h_{*(x,y)}| &\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|f_{n_m}(s,t) \\
&- f_*(s,t)|dsdt \\
&\leq \frac{l^*\|u_{n_m} - u_*\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}dsdt,
\end{aligned}$$

où $l^* = \sup\limits_{(x,y)\in J} l(x,y)$. D'ou

$$\|h_{n_m} - h_*\|_\infty \leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}l^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}|u_{n_m} - u_*\|_\infty \to 0 \quad quand \quad m \to \infty.$$

D'où N est s.c.s.

Etape 5 : *Estimation à priori sur les solutions*

Soit u une solution du problème (5.1)-(5.3). Alors, il existe $f \in S_{F,u}$ tel que, pour tout $(x,y) \in J$,

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| &\leq |\mu(x,y)| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|f(s,t)|dsdt \\
&\leq |\mu(x,y)| + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s,t)\psi(\|u_{(s,t)}\|)dsdt \\
&\leq |\mu(x,y)| + \frac{\Psi(\|u_{(s,t)}\|)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}p(s,t)dsdt \\
&\leq \|\mu\|_\infty + \frac{\Psi(\|u\|_\infty)p^*a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)},
\end{aligned}$$

et pour tout $(x,y) \in \tilde{J},\ |u(x,y)| = |\phi(x,y)|$.

D'où pour tout $(x,y) \in J$, on a

$$\frac{\|u\|_\infty}{\|\mu\|_\infty + \dfrac{\Psi(\|u\|_\infty)p^*a^{r_1}b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}} < 1.$$

Alors par la condition (5.6), il existe M tel que $\|u\|_\infty \neq M$.

Soit

$$U = \{u \in C_{(a,b)} : \|u\|_\infty < M^*\},$$

où $M^* = \min\{M, \|\phi\|_C\}$.

L'opérateur $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(C_{(a,b)})$ est s.c.s et complètement continu. D'après le choix de U, il n'existe pas $u \in \partial U$ tel que $u \in \lambda N(u)$ pour un certain $\lambda \in (0,1)$. Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, nous déduisons que N a un point fixe qui est une solution du problème (5.1)-(5.3).

Maintenant nous présentons un autre résultat d'existence des solutions du problème (5.1)-(5.3) utilisant le théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin ([9]).

Théorème 5.2.2 *Supposons que les hypothèses* (H_1), (H_2) *et l'hypothèse suivante sont satisfaites.*

(H_5) *il existe* $p \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *tel que*

$$\|F(x,y,u)\|_{\mathcal{P}} \leq p(x,y)(|u|+1) \quad pour \quad (x,y) \in J \quad et\ pour\ u \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1) > p^* a^{r_1} b^{r_2}, \tag{5.7}$$

alors (5.1)-(5.3) admet au moins une solution.

Preuve : Considérons l'opérateur N défini dans le théorème 5.2.1.Soit $\rho > 0$ tel que

$$\rho > \frac{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)\|\mu\|_\infty + p^* a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1) - p^* a^{r_1} b^{r_2}},$$

et considérons le sous ensemble

$$D_\rho = \{u \in C_{(a,b)} : \|u\|_\infty \leq \rho\}.$$

Il est clair que D_ρ est fermé, borné et convexe.
D'aprés (5.7) on a $N(D_\rho) \subseteq D_\rho$. Comme précédemment l'operateur $N : D_\rho \to \mathcal{P}(D_\rho)$ est s.c.s et complètement continu. Donc d'après le théorème 1.4.8 N admet un point fixe qui est une solution du problème (5.1)-(5.3).

5.3 Cas d'un second membre non convexe

Théorème 5.3.1
Supposons que (H_3) *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*

(H_6) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$, *et* $F(\cdot, u) : J \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ *est mesurable pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

Si

$$\frac{l^* a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} < 1, \tag{5.8}$$

alors le problème (5.1)-(5.3) admet une seule solution sur J.

Remarque 5.3.1
Pour tout $u \in C_{(a,b)}$, l'ensemble $S_{F,u}$ est non vide, alors par (H_6), F a une selection mesurable ([16], Theorem III.6).

Preuve. On va montrer que N satisfait les conditions du théorème 1.4.9. La preuve sera donnée en deux étapes.
• $N(u) \in \mathcal{P}_{cl}(C_{(a,b)})$ pour tout $u \in C_{(a,b)}$.
Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in N(u)$ tel que $u_n \longrightarrow \tilde{u}$ dans $C_{(a,b)}$. Alors $\tilde{u} \in C_{(a,b)}$ et il existe $f_n(.,.) \in S_{F,u}$ tel que, pour tout $(x,y) \in J$,

$$u_n(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f_n(s,t)dsdt,$$

et pour tout $(x,y) \in \tilde{J}$,

$$u_n(x,y) = \phi(x,y).$$

En utilisant, le fait que F est à valeurs compactes et d'après $(H3)$, on peut extraire une sous suite de $f_n(.,.)$ qui converge fortement vers f dans $L^1_w(J, \mathbb{R})$, et donc $f \in S_{F,u}$. Alors pour tout $(x,y) \in J$, :

$$u_n(x,y) \longrightarrow \tilde{u}(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t)dsdt,$$

et pour tout $(x,y) \in \tilde{J}$, $u_n(x,y) \longrightarrow \tilde{u}(x,y) = \phi(x,y)$.
Donc, $\tilde{u} \in N(u)$.
• Il existe $\gamma < 1$ tel que

$$H_d(N(u), N(\overline{u})) \leq \gamma \|u - \overline{u}\|_\infty \ \ \textit{pour tout } u, \overline{u} \in C_{(a,b)}.$$

Soit $u, \overline{u} \in C_{(a,b)}$ et $h \in N(u)$. Alors, il existe $f(x,y) \in F(x,y,u_{(x,y)})$ tel que pour tout $(x,y) \in J$

$$h(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t)dsdt,$$

et pour tout $(x,y) \in \tilde{J}$, $h(x,y) = \phi(x,y)$.
L'hypothèse (H_3) affirme que

$$H_d(F(x,y,u_{(x,y)}), F(x,y,\overline{u}_{(x,y)})) \leq l(x,y)|u_{(x,y)} - \overline{u}_{(x,y)}|.$$

Or, il existe $w \in F(x,y,\overline{u}_{(x,y)})$ tel que

$$|f(x,y) - w| \leq l(x,y)|u_{(x,y)} - \overline{u}_{(x,y)}|,\ (x,y) \in J.$$

On considère l'opérateur $U : J \to \mathcal{P}(\mathrm{I\!R})$ donné par :

$$U(x,y) = \{w \in \mathrm{I\!R} : |f(x,y) - w| \leq l(x,y)|u_{(x,y)} - \overline{u}_{(x,y)}|\}.$$

Puisque l'opérateur $U_1(x,y) = U(x,y) \cap F(x,y,\overline{u}_{(x,y)})$ est mesurable, (Proposition III.4 in [16]), il existe alors une sélection mesurabl $\bar{f}$ de U_1. Donc, $\overline{f}(x,y) \in F(x,y,\overline{u}_{(x,y)})$, et pour tout $(x,y) \in J$,

$$|f(x,y) - \overline{f}(x,y)| \leq l(x,y)|u_{(x,y)} - \overline{u}_{(x,y)}|.$$

On définit pour tout $(x,y) \in J$

$$\overline{h}(x,y) \;=\; \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\overline{f}(s,t)dsdt,$$

et pour tout $(x,y) \in \tilde{J}$, $\overline{h}(x,y) = \phi(x,y)$.
Alors pour tout $(x,y) \in \tilde{J}$, $\|h - \overline{h}\|_\infty = 0$, et pour tout $(x,y) \in J$

$$\begin{aligned}
|h(x,y) - \overline{h}(x,y)| \;&\leq\; \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}|f(s,t) \\
&-\; \overline{f}(s,t)|dsdt \\
&\leq\; \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}l(s,t)\|u_{(s,t)} \\
&-\; \overline{u}_{(s,t)}\|dsdt \\
&\leq\; \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}l(s,t)\|u_{(s,t)} \\
&-\; \overline{u}_{(s,t)}\|dsdt \\
&\leq\; \frac{\|u_{(.,.)}) - \overline{u}_{(.,.)})\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}l(s,t)dsdt.
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $(x,y) \in [-\alpha, a] \times [-\beta, b]$

$$\|h - \overline{h}\|_\infty \leq \frac{l^* a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \|u - \overline{u}\|_\infty.$$

En inversant les rôles de u et $\overline{u}$, on arrive à prouver que

$$H_d(N(u), N(\overline{u})) \leq \frac{l^* a^{r_1} b^{r_2}}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)} \|u - \overline{u}\|_\infty.$$

Donc d'après(5.8), N est une contraction, et par le théorème 1.4.9 N a un point fixe u qui est solution du problème (5.1)-(5.3).

5.3.1 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$^cD^r u(x,y) \in F(x,y,u_{(x,y)}), \quad p.p\ (x,y) \in J = [0,1] \times [0,1], \tag{5.9}$$

$$u(x,y) = x + y^2, \quad p.p\ (x,y) \in ([-1,1] \times [-2,1]) \backslash (0,1] \times (0,1], \tag{5.10}$$

$$u(x,0) = x,\ u(0,y) = y^2,\ x \in [0,1],\ y \in [0,1], \tag{5.11}$$

où $r = (r_1, r_2) \in (0,1] \times (0,1]$. soit

$$F(x,y,u_{(x,y)}) = \{u \in \mathbb{R} : f_1(x,y,u_{(x,y)}) \leq u \leq f_2(x,y,u_{(x,y)})\},$$

où $f_1, f_2 : [0,1] \times [0,1] \times C([-1,0] \times [-2,0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $(x,y) \in J$, $f_1(x,y,.)$ est s.c.i (i.e, l'ensemble $\{z \in C([-1,0] \times [-2,0], \mathbb{R}) : f_1(x,y,z) > \mu\}$ est ouvert $\mu \in \mathbb{R}$), et supposons que pour tout $(x,y) \in J$, $f_2(x,y,.)$ est s.c.s (i.e l'ensemble $\{z \in C([-1,0] \times [-2,0], \mathbb{R}) : f_2(x,y,z) < \mu\}$ est ouvert pour tout $\mu \in \mathbb{R}$). supposons qu'ils existent $p \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et $\psi^* : [0,\infty) \to (0,\infty)$ continue et croissante tel que

$$\max(|f_1(x,y,z)|,\ |f_2(x,y,z)|) \leq p(x,y)\psi^*(\|z\|),$$

pour tout $(x,y) \in J$ et tout $z \in C([-1,0] \times [-2,0], \mathbb{R})$.
il est clair que F est à valeur compactes et convexes, et il est s.c.s (voir [22]). puisque toutes les conditions du Théorème 1.4.9 sont satisfaites, le problème(5.9)-(5.11) admet une unique solution u sur $[-1,1] \times [-2,1]$.

5.4 Méthode des sous et sur solutions

Définition 5.4.1 *Une fonction $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ est dite solution du problème (5.4)-(5.5), s'il existe une fonction $f \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ avec $f(x,y) \in F(x,y,u(x,y))$ tel que $({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y)$, et u satisfait l'équation (5.5) sur J.*

Soit $z, \ \bar{z} \in C(J, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$z(x,y) = (z_1(x,y), z_2(x,y), \ldots, z_n(x,y)), \ (x,y) \in J,$$

et

$$\bar{z}(x,y) = (\bar{z}_1(x,y), \bar{z}_2(x,y), \ldots, \bar{z}_n(x,y)), \ (x,y) \in J.$$

La notation $z \leq \bar{z}$ signifié que

$$z_i(x,y) \leq \bar{z}_i(x,y), \ i = 1, \ldots, n.$$

Introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est L^1-Carathéodory,

(H_2) Il existe $l \in C(J, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$H_d(F(x,y,u), F(x,y,\overline{u})) \leq l(x,y)\|u - \overline{u}\| \ \ \textit{pour tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R}^n, \ p\,p\ (x,y) \in J,$$

et

$$d(0, F(x,y,0)) \leq l(x,y), \quad p.p\ (x,y) \in J,$$

(H_3) Il existe v et $w \in C(J, \mathbb{R}^n)$, sous et sur solutions du prpblème (5.4)-(5.5) tel que $v(x,y) \leq w(x,y)$ pour tout $(x,y) \in J$.

Théorème 5.4.1 *supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ sont satisfaites. Alors le problème (5.4)-(5.5) admet au moins une solution u tel que*

$$v(x,y) \leq u(x,y) \leq w(x,y) \quad \textit{pour tout } (x,y) \in J.$$

Preuve. On transforme le problème (5.4)-(5.5) en un problème du point fixe. Considérons le problème suivant :

$$({}^cD_0^r u)(x,y) \in F(x,y,g(u(x,y))), \ \textit{si}\ (x,y) \in J, \tag{5.12}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u(0,y) = \psi(y), \ x \in [0,a] \ \ \textit{et} \ \ y \in [0,b], \tag{5.13}$$

où $g : C(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(J, \mathbb{R}^n)$ l'opérateur de truncation définie par

$$(gu)(x,y) = \begin{cases} v(x,y), & u(x,y) < v(x,y) \\ u(x,y), & v(x,y) \leq u(x,y) \leq w(x,y). \\ w(x,y), & u(x,y) > w(x,y). \end{cases}$$

Une solution de (5.12)-(5.13) est un point fixe de l'opérateur $G : C(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}^n))$ défini par :

$$G(u) = \begin{cases} h \in C(J, \mathbb{R}^n) : \\ h(x,y) = \mu(x,y) \\ +\dfrac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \displaystyle\int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t)dsdt, \quad (x,y) \in J, \end{cases}$$

où

$$f \in \tilde{S}_{F,g(u)} = \{f \in S_{F,g(u)} : f(x,y) \geq f_1(x,y) \ \ sur\ A_1 \ \ et\ \ f(x,y) \leq f_2(x,y) \ \ sur\ A_2\},$$

$$A_1 = \{(x,y) \in J : u(x,y) < v(x,y) \leq w(x,y)\},$$

et

$$A_2 = \{(x,y) \in J : v(x,y) \leq w(x,y) < u(x,y)\}.$$

Remarque 5.4.1

(A) pour tout $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$, l'ensemble $\tilde{S}_{F,g(u)}$ est non vide. En effet (H_1) implique qu'il existe $f_3 \in S_{F,g(u)}$, donc on pose

$$f = f_1\chi_{A_1} + f_2\chi_{A_2} + f_3\chi_{A_3},$$

où χ_{A_i} est la fonction charactéristic de A_i; $i = 1, 2,$ et

$$A_3 = \{(x,y) \in J : v(x,y) \leq u(x,y) \leq w(x,y)\}.$$

Alors, par decomposabilité, $f \in \tilde{S}_{F,g(u)}$,

(B) d'aprés la définition de g il est clair que $F(.,.,g(u)(.,.))$ est une application multivoque L^1-Carathéodory à valeur compacte et convexe et il existe $\phi_1 \in C(J, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\|F(x,y,g(u(x,y)))\|_{\mathcal{P}} \leq \phi_1(x,y) \ \ pour\ tout\ u \in \mathbb{R}^n.$$

posons

$$\eta = \|\mu\|_\infty + \frac{a^{r_1}b^{r_2}\phi_1^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)},$$

où

$$\phi_1^* = \sup\{\phi_1(x,y) : (x,y) \in J\},$$

et

$$D = \{u \in C(J, \mathbb{R}^n) : \|u\|_\infty \leq \eta\}.$$

D est un sous ensemble convexe fermé de $C(J, \mathbb{R}^n)$ et $G(D) \subset D$. Nous montrons que D satisfait les condition du théorème 1.4.8. La preuve est donné en étapes suivantes :

Etape 1 : *$G(u)$ est convexe pour tout $u \in D$.*

En effet, si $h_1,\ h_2$ appartint à $G(u)$, alors il existe $u_1,\ u_2 \in S_{F,g(u)}$ tel que pour tout $(x,y) \in J$ on a

$$h_i(x,y) = \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}u_i(s,t)dsdt, \quad i=1,2.$$

soit $0 \leq \xi \leq 1$. Alors pour tout $(x,y) \in J$, on a

$$\begin{aligned}(\xi h_1 + (1-\xi)h_2)(x,y) &= \mu(x,y) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} \\ &\quad \times[\xi u_1(s,t) + (1-\xi)u_2(s,t)]dsdt.\end{aligned}$$

Puisque $\tilde{S}_{F,g(u)}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), on a

$$\xi h_1 + (1-\xi)h_2 \in G(u).$$

Etape 2 : *$G(D)$ est borné.*

Ceci est clair puisque $G(D) \subset D$ et D est borné.

Etape 3 : *$G(D)$ est equicontinu.*

Soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in J,\ x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$, soit $u \in D$ et $h \in G(u)$, alors il existe $z \in S_{F,g(u)}$ tel pour tout $(x,y) \in J$ on a

$$\begin{aligned}&\|h(x_2,y_2) - h(x_1,y_1)\| \\ = \ &\Big\|\mu(x_2,y_2) - \mu(x_1,y_1) + \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}[(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1} - (x_1-s)^{r_1-1} \\ &\times(y_1-t)^{r_2-1}]z(s,t)dsdt \\ &+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}z(s,t)dsdt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{y_1}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}z(s,t)dsdt\\
&+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(x_2-s)^{r_1-1}(y_2-t)^{r_2-1}z(s,t)dsdt\Big\|\\
\leq\ & \|\mu(x_1,y_1)-\mu(x_2,y_2)\|\\
&+\frac{\phi_1^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}[2y_2^{r_2}(x_2-x_1)^{r_1}+2x_2^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}\\
&+x_1^{r_1}y_1^{r_2}-x_2^{r_1}y_2^{r_2}-2(x_2-x_1)^{r_1}(y_2-y_1)^{r_2}].
\end{aligned}
$$

Quand $x_1 \longrightarrow x_2$ et $y_1 \longrightarrow y_2$, $h(x_2,y_2) \longrightarrow (x_1,y_1)$. Comme une résultas de l'étape 1 à 3 et d'aprés le Théorème d'Arzelá-Ascoli , on déduit que $G : D \longrightarrow \mathcal{P}(D)$ est compact.

Etape 4 : *Le graphe de G est fermé .*

Soit $u_n \to u_*$, $h_n \in G(u_n)$ et $h_n \to h_*$.

Nous montrons que $h_* \in G(u_*)$.

$h_n \in G(u_n)$ signifie qu'il existe $z_n \in \tilde{S}_{F,g(u_n)}$ tel que, pour tout $(x,y) \in J$,

$$h_n(x,y)=\mu(x,y)+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}z_n(s,t)dsdt.$$

Nous montrons qu'il existe $z_* \in \tilde{S}_{F,g(u_*)}$ tel que, pour tout $(x,y) \in J$,

$$h_*(x,y) \;=\; \mu(x,y)+\frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y(x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}z_*(s,t)dsdt.$$

Puisque $F(x,y,\cdot)$ est semicontinue supérieurement, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0(\epsilon)\geq 0$ tel que pour chaque $n \geq n_0$, on a

$$f_n(x,y)\in F(x,y,u_n(x,y))\subset F(x,y,u_*(x,y))+\varepsilon B(0,1), \quad p.p\ (x,y)\in J.$$

Puisque $F(.,.,.)$ est à valeurs compactes, alors il existe une sous suite f_{n_m} tel que

$$f_{n_m}(\cdot,\cdot)\to f_*(\cdot,\cdot)\ \ quand\ m\to\infty$$

et

$$f_*(x,y)\in F(x,y,u_*)(x,y), \quad p.p\ (x,y)\in J.$$

Pour chaque $w \in F(x,y,u_*(x,y))$, on a

$$\|f_{n_m}(x,y)-f_*(x,y)\|\leq\|f_{n_m}(x,y)-w\|+\|w-f_*(x,y)\|.$$

alors
$$\|f_{n_m}(x,y)-f_*(x,y)\| \leq d\Big(f_{n_m}(x,y), F(x,y,u_*(x,y))\Big).$$
par une relation analogique, on obtient par interchanging les rôles de f_{n_m} et f_*, on trouve
$$\begin{aligned}\|f_{n_m}(x,y)-f_*(x,y)\| &\leq H_d(F(x,y,u_n(x,y)), F(x,y,u_*(x,y))\\ &\leq l(x,y)\|u_n-u_*\|_\infty.\end{aligned}$$
Alors
$$\begin{aligned}\|h_{n_m}(x,y)-h_*(x,y)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}\|f_{n_m}(s,t)\\ &- f_*(s,t)\|dsdt\\ &\leq \frac{\|u_{n_m}-u_*\|_\infty}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}\int_0^x\int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1}l(s,t)dsdt\\ &\leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}l^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\|u_{n_m}-u_*\|_\infty,\end{aligned}$$
où
$$l^* = \sup\{l(x,y) : (x,y)\in J\}.$$
Donc
$$\|h_{n_m}-h_*\|_\infty \leq \frac{a^{r_1}b^{r_2}l^*}{\Gamma(r_1+1)\Gamma(r_2+1)}\|u_{n_m}-u_*\|_\infty \to 0 \quad quand\ m\to\infty.$$

Etape 5 : *La solution u de (5.12)-(5.13) satisfait*
$$v(x,y)\leq u(x,y)\leq w(x,y) \quad pour\ tout\ \ (x,y)\in J.$$
Nous montrons que
$$u(x,y)\leq w(x,y) \quad pour\ tout\ \ (x,y)\in J.$$
Supposons que $u-w$ atteint un maximum positive sur J en $(\overline{x},\overline{y})\in J$,
$$(u-w)(\overline{x},\overline{y}) = \max\{u(x,y)-w(x,y) :\ (x,y)\in J\} > 0.$$
on distingue les cas suivantes.

Cas 1. Si $(\overline{x},\overline{y})\in(0,a)\times[0,b]$ il existe $(x^*,y^*)\in(0,a)\times[0,b]$ tel que
$$u(x^*,y^*)-w(x^*,y^*)\leq 0, \tag{5.14}$$

et
$$u(x,y) - w(x,y) > 0, \quad \textit{pour tout } (x,y) \in (x^*, \overline{x}] \times [y^*, b]. \tag{5.15}$$
D'après la définition de g on a
$$^cD_0^r u(x,y) \in F(x,y,g(u(x,y))) \ \ \textit{pour tout} \ \ (x,y) \in [x^*, \overline{x}] \times [y^*, b],$$
alors il existe $f \in F(x,y,g(u(x,y)))$ tel que
$$^cD_0^r u(x,y) = f(x,y) \ \ \textit{pour tout} \ \ (x,y) \in [x^*, \overline{x}] \times [y^*, b].$$
Une intégration sur $[x^*, x] \times [y^*, y]$ pour chaque $(x,y) \in [x^*, \overline{x}] \times [y^*, b]$ donne
$$u(x,y) - u(x^*,y) - u(x,y^*) + u(x^*,y^*) = \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_{x^*}^{x} \int_{y^*}^{y} (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t)\,dsdt. \tag{5.16}$$
D'après (5.16) et l'utilisation du fait que w est une sur solution de (5.4)-(5.5) on obtient
$$u(x,y) - u(x^*,y^*) \leq w(x,y) - w(x^*,y^*). \tag{5.17}$$
D'après (5.14), (5.15) et (5.17) on obtient la contradiction
$$0 < u(x,y) - w(x,y) \leq u(x^*,y^*) - w(x^*,y^*) \leq 0, \ \ \textit{pour tout} \ \ (x,y) \in [x^*, \overline{x}] \times [y^*, b].$$

Cas 2. Si $\overline{x} = 0$, alors $w(0,\overline{y}) < u(0,\overline{y}) \leq w(0,\overline{y})$ qui est une contradiction. Donc
$$u(x,y) \leq w(x,y) \ \ \textit{pour tout } (x,y) \in J.$$
De même, on peut montrer que $u(x,y) \geq v(x,y)$, *pour tout* $(x,y) \in J$.
Ceci montre que le problème (5.12)-(5.13) admet une solution u satisfait $v \leq u \leq w$ qui est une solution de (5.4)-(5.5).

Conclusion et Perspective

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Darboux sans retard, avec retard fini et infini. Les résultats obtenus sont basés sur l'argument du point fixe et la méthode des sous et sur solutions, en particulier on a utiliser le théorème du point fixe de Banach [35], Schaefer [38], Burton-Kirk [10], Covitz-Nadler [18], et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder [35].

Nous prévoyons dans le future l'étude qualitative de ces problèmes, en particulier, on examinera la stabilité et le comportement assymptotique des solutions.

Bibliographie

[1] S. Abbas, Contribution à l'étude de quelques classes d'équations et inclusions différentièlles hyperbolique d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat, université de Sidi Bel Abbès. 2011

[2] S. Abbas and M. Benchohra, Darboux problem for perturbed partial differential equations of fractional order with finite delay, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* **3** (2009), 597-604.

[3] S. Abbas and M. Benchohra, Partial hyperbolic differential equations with finite delay involving the Caputo fractional derivative, *Commun. Math. Anal.* **7** (2009), 62-72.

[4] S. Abbas and M. Benchohra, Darboux problem for partial functional differential equations with infinite delay and Caputo's fractional derivative, *Adv. Dynamical Syst. Appl.* **5** (1) (2010), 1-19.

[5] S. Abbas and M. Benchohra, The method of upper and lower solutions for partial hyperbolic fractional order differential inclusions with impulses, *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.* **30** (1) (2010), 141-161.

[6] S. Abbas and M. Benchohra, Upper and lower solutions method for the darboux problem for fractional order partial differential inclusions, *Int. J. Modern Math.* **5** (3) (2010), 327-338.

[7] R.P Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential equations, *Comput. Math. Appl.* **59** (3) (2010), 1095–1100.

[8] M. Benchohra and S.K. Ntouyas, The method of lower and upper solutions to the Darboux problem for partial differential inclusions. *Miskolc Math. Notes,* **4** (2003), no. 2, 81-88.

[9] H.F. Bohnenblust and S. Karlin , On a theorem of ville. Contribution to the theory of games.155-160, *Annals of Mathematics Studies,* no. 24. Priceton University Press, Princeton. N. G. 1950.

[10] T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, *Math. Nachr.* **189** (1998), 23-31.

[11] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equatioin,*Appl. Anal,* **40** (1991), 173-180.

[12] L. Byszewski, Differential and functional-differential problems with nonlocal coditions (in Polish), Cracow University of Technology Monograph, **184**, Cracow, (1995).

[13] L. Byszewski and V. Lakshmikanthama, Monotone iterative technique for nonlocal hyperbolic differential problem, *J. Math. Phys. Sci.* **26** (1992), no. 4, 345-359.

[14] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **3** (1990), 163-168.

[15] M. Caputo, *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.

[16] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics **580**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[17] M. Cichon and I. Kubiaczyk, Kneser-type theorem for the Darboux problem in Banach spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42** (2001), no. 2, 267-279.

[18] H. Covitz and S. B. Nadler Jr., Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, *Israel J. Math.* **8** (1970), 5-11.

[19] T. Czlapinski, On the Darboux problem for partial differential-functional equations with infinite delay at derivatives. *Nonlinear Anal.* **44** (2001), 389-398.

[20] T. Czlapinski, Existence of solutions of the Darboux problem for partial differential-functional equations with infinite delay in a Banach space. *Comment. Math. Prace Mat.* **35** (1995), 111-122.

[21] M. Dawidowski and I. Kubiaczyk, An existence theorem for the generalized hyperbolic equation $z''_{xy} \in F(x, y, z)$ in Banach space, *Ann. Soc. Math. Pol. Ser. I, Comment. Math.*, **30** (1) (1990), 41-49.

[22] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[23] D. Delbosco and L. Rodino, Existence and uniquencess for a nonlinear fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **204** (1996), 609-625.

[24] B. C. Dhage, A nonlinear alternative in Banach algebras with applications to functional differential equations, *Nonlinear Funct. Anal. Appl.* **8** (2004), 563-575.

[25] B. C. Dhage, Some algebraic fixed point theorems for multi-valued mappings with applications, *Diss. Math. Differential Inclusions, Control & Optim.* **26** (2006), 5-55.

[26] K. Diethelm and A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[27] K. Diethelm and N. J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **265** (2002), 229-248.

[28] K. Diethelm and G. Walz, Numerical solution of fractional order differential equations by extrpolation, *Numer. Algorithms* **16** (1997), 231-253.

[29] A. M. A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, *J. Fract. Calc.* **7** (1995), 89-100.

[30] A. M. A. El-Sayed, Fractional order diffusion-wave equations, *Intern. J. Theo. Physics* **35** (1996), 311-322.

[31] A. M. A. El-Sayed, Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders, *Nonlin. Anal.* **33** (1998), 181-186.

[32] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, *Mech. Systems Signal Processing* **5** (1991), 81-88.

[33] W. G. Glockle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of selfsimilar protein dynamics, *Biophys. J.***68** (1995), 46-53.

[34] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and its Applications*, 495, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[35] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory,* Sringer-Verlas, New York, 2003.

[36] A. K. Grünwald, Ueber "begrenzte" derivationen und deren anwendung, *Zeitschrift f. Mathematik u. Physik*, **12** (6), 441-480.

[37] J. Hale and J. Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcial. Ekvac.* **21** (1978), 11-41.

[38] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[39] S. Heikkila and V. Lakshmikantham, *Monotone Iterative Technique for Nonlinear Discontinuous Differential Equations*, Marcel Dekker Inc., New York, 1994.

[40] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.

[41] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics,* World Scientific, Singapore, 2000.

[42] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, in : Lecteur Notes in Mathematics, 1473, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[43] Sh. Hu and N. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Theory* **I**, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[44] Z. Kamont, *Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[45] A. A. Kilbas and S. A. Mazran, Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differential Equations.***41** (2005), 84 - 89.

[46] A. A. Kilbas, Hari. M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elesevier Science B. V. Amsterdam, 2006.

[47] M. Kisielewicz, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[48] G.S. Ladde, V. Lakshmikanthan and A. S. Vatsala, *Monotone Iterative Techniques for Nonliner Differential Equations*, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1985.

[49] V. Lakshmikantham and S. G. Pandit, The method of upper, lower solutions and hyperbolic partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **105** (1985), 466-477.

[50] V. Lakshmikantham, L. Wen and B. Zhang, *Theory of Differential Equations with Unbounded Delay*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[51] A. V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* **3** (1868), 1-68 (in Russian).

[52] A. V. Letnikov, On the historical development of the theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* **3** (1868), 85-112 (in Russian).

[53] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainaedi, Eds), Springer-Verlag, Wien, (1997), 291-348

[54] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential equations,* Jhon Wiley, New York, 1993.

[55] S. M. Momani and S. B. Hadid, Some comparison results for integro-fractional differntial inequlities. *J. Fract. Calc.* **24** (2003), 37-44.

[56] S. M. Momani, S. B. Hadid and Z. M. Alawenh, Some analytical properties of solutions of differential equations of noninteger order, *Int. J. Math. Sci.* (2004), 697-701.

[57] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus,* Academic Press, New York, London, 1974.

[58] S. G. Pandit, Monotone methods for systems of nonlinear hyperbolic problems in two independent variables, *Nonlinear Anal.*, **30** (1997), 235-272.

[59] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[60] I. Podlubny, I. Petraš, B. M. Vinagre, P. O'Leary and L. Dorčak, Analogue realizations of fractional-order controllers. Factional order calculus and its applications, *Nonlinear Dynam.* **29** (2002), 281-296.

[61] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marchev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications,* Gordon and Breach, Yverdon , 1993.

[62] G. V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions,* Graduate Studies in Mathematics **41**, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[63] A. N. Vityuk and A. V. Golushkov, Existence of solutions of systems of partial differential equations of fractional order, *Nonlinear Oscil.* **7** (3) (2004), 318-325.

[64] A. N. Vityuk and A. V. Golushkov, The Darboux problem for a differential equation containing a fractional derivative, *Nonlinear Oscil.* **8** (2005), 450-462.

[65] C. Yu and G. Gao, Existence of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **310** (2005), 26-29.

[66] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.