République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Différents Concepts de Fermabilité des Opérateurs Linéaires sur un Espace de Hilbert. Stabilité et Complétion

Présentée par

Mme MESSIRDI Sanaa

Devant le jury composé de :

Président :		
Mr SENOUCI BEREKSI Ghouti	M.C.A	Univ. Tlemcen
Directeur de thèse :		
Mr MESSIRDI Miloud	M.C.A	Univ. Tlemcen
Examinateurs :		
Mr LANSARI Azzedine	Professeur	Univ. Tlemcen
Mr DJAA Mustapha	Professeur	C. Univ. Relizane
Mr OULDALI Mohand	M.C.A	Univ. Mostaganem
Mr DJELLOULI Ghouti	M.C.A	Univ. Saida
Invité :		
Mr DERHAB Mohammed	Professeur	Univ. Tlemcen

Année universitaire 2015-2016

Soutenue le 30 juin 2016

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Université ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat en Mathématiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

Intitulé de la thèse :

Différents Concepts de Fermabilité des Opérateurs Linéaires sur un espace de Hilbert. Stabilité et Completion.

Presentée par Mme Sanaa MESSIRDI
Devant le jury :

Président :
Mr SENOUCI BEREKSI Ghouti, M.C.A, Univ. Tlemcen

Directeur de thèse :
Mr MESSIRDI Miloud, M.C.A, Univ. Tlemcen

Examinateurs :
Mr LANSARI Azzedine, Professeur, Univ. Tlemcen
Mr DJAA Mustapha, Professeur, C. Univ. Relizane
Mr OULDALI Mohand, M.C.A, Univ. Mostaganem
Mr DJELLOULI Ghouti, M.C.A, Univ. Saida

Invité : DERHAB Mohammed, Professeur, Univ. Tlemcen

Année universitaire 2015-2016
Soutenue le 30 juin 2016

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à monsieur le Professeur Miloud MESSIRDI, qui a dirigé ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Je remercie monsieur le Professeur Ghouti SENOUCI BEREKSI qui me fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Mes remerciements vont également à messieurs les Professeurs, Azzedine LANSARI, Mustapha DJAA, Mohammed DERHAB, Mohand OULDALI et Ghouti DJELLOULI qui ont porté de l'intérêt à mon travail en accéptant de participer au jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail scientifique.

Liste des publications

1) Sanaa Messirdi, Mustapha Djaa, Bekkai Messirdi, Stability of Almost Closed Operators on a Hilbert Space, Sarajevo J. Math., Vol. 5/17 (2009), 133-141.

2) Sanaa Messirdi, Bekkai Messirdi, Miloud Messirdi, On Different Concepts of Closedness of Linear Operators, Operators and Matrices, Volume 8, (2014), 139-156.

3) Bekkai Messirdi, Sanaa Messirdi, Miloud Messirdi, Drazin Invertibility of Sum and Product of Closed Linear Operators, Malaya Journal of Matematik, 2 (4) (2014) 472–481.

Sommaire

Chapitre I
Introduction

1 Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. $\langle .,. \rangle_H$ désigne le produit scalaire sur H et $\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$ sa norme associée. Si M est un sous-ensemble de H, $M^{\perp}$ est l'orthogonal de M par rapport au produit scalaire de H. Si A est un opérateur linéaire défini sur H; le domaine, le noyau et l'image de A sont notés respectivement par $D(A), N(A)$ et $R(A)$. A^* est l'opérateur adjoint de A, il est bien défini lorsque le domaine $D(A)$ de A est supposé dense dans H. Notons par $B(H;K)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis de H dans un autre espace de Hilbert K et on pose $B(H;H) = B(H)$. On considère dans ce travail d'une manière générale des opérateurs non bornés définis sur leurs domaines de H dans lui même. Le graphe $G(A)$ de A est un sous-espace vectoriel de $H \oplus H$ définit par $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$. L'opérateur A est dit fermé si son graphe $G(A)$ est un sous-espace fermé de $H \oplus H$ où $H \oplus H$ est muni de la structure hilbertienne produit. $C(H)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires fermés définis sur H et à domaine dense dans H.

Si $A \in C(H)$, alors son adjoint A^* est fermé. En particulier, les opérateurs autoadjoints sont fermés. Il est intéressant de rappeler au début qu'on peut assimiler un opérateur linéaire fermé sur H à un opérateur borné, lorsqu'il est muni de la norme du graphe $\|x\|_{G(A)} = \left(\|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2\right)^{1/2}$, en introduisant sur son domaine $D(A)$ le produit scalaire du graphe $\langle x, y \rangle_{G(A)} = \langle x, y \rangle_H + \langle Ax, Ay \rangle_H$ pour tout $x, y \in D(A)$.

En effet, A est fermé si et seulement si $H_A = (D(A), \langle .,. \rangle_{G(A)})$ est un espace de Hilbert. Dans ce cas $A \in B(H_A; H)$. D'après le théorème du graphe fermé, on a $B(H) \subset C(H)$.

La notion de fermabilité est une généralisation importante de celle de la fermeture, par le fait que les opérateurs fermables peuvent être traités de manière similaire que celles des opérateurs fermés.

A est fermable si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de son graphe $G(A)$ dans $H \oplus H$, est le graphe d'un opérateur linéaire non borné que l'on notera $\overline{A}$ de domaine $D(\overline{A})$. $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ est appelé la fermeture de A.

Donc si A est fermable alors:

$$D\left(\overline{A}\right)=\left\{\begin{array}{l} x\in H\ ;\ \text{il existe une suite } \left(x_n\right)_n\in\ D\left(A\right)\ \text{telle que } \left(x_n\right)_n \text{ converge} \\ \text{vers } x \text{ et } \left(Ax_n\right)_n \text{ ait une limite dans } H\ \} \end{array}\right. \tag{1}$$

et

$$\overline{A}x=\lim_{n\rightarrow+\infty}Ax_n,\ \text{pour } x\in D\left(\overline{A}\right) \tag{2}$$

En utilisant la linéarité de A on peut reformuler la définition de la fermeture $\overline{A}$ de A de la manière suivante :

A est fermable si et seulement si pour toute suite $\left(x_n\right)_n$ de $D\left(A\right)$ convergente vers 0 dans H telle que la suite des images $\left(Ax_n\right)_n$ converge aussi dans H, alors $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}Ax_n\ =0$.

On remarque alors que fermer un opérateur c'est, en quelque sorte, le prolonger au maximum par des procédés purement topologiques et que, pour aller plus loin, on doit utiliser des propriétés algébriques.

Proposition 1.1 *([17]) **1)** Tout opérateur $(A, D(A))$ borné est fermable, $D\left(\overline{A}\right)=\overline{D\left(A\right)}$ et $\overline{A}$ est borné sur $D\left(\overline{A}\right)$.*

***2)** Si $(A, D(A))$ est fermable injectif, alors A^{-1} est fermable si et seulement si $\overline{A}$ est injectif, on a dans ce cas $\overline{A^{-1}}=\overline{A}^{-1}$. Si de plus $\overline{A}^{-1}$ est borné alors $R\left(\overline{A}\right)=\overline{R(A)}$.*

On note $A\subset B$ lorsque B est une extension de A, c'est à dire $D(A)\subset D(B)$ et la restriction de B à $D(A)$ coïncide avec A. En particulier, $A\subset B$ est équivalente à $G(A)\subset G(B)$. Il s'ensuit immédiatement que l'adhérence $\overline{A}$ de A, lorsqu'elle existe, est la plus petite extension fermée de A. Tout opérateur fermé est fermable sur H, mais l'inverse n'est pas vrai.

Si A n'est pas fermable, alors l'adhérence $\overline{G(A)}$ de $G(A)$ n'est pas nécessairement un graphe ($\overline{G(A)}$ peut contenir des vecteurs de type $(0,y)$, $y\neq 0$), et A n'a pas d'extension fermée.

Remarque 1.2 *Tout opérateur fermable de rang fini est borné. Par conséquent, une forme linéaire non bornée n'est jamais fermable.*

Rappelons qu'un opérateur linéaire A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense dans H, dans ce cas, $\overline{A} = A^{**}$.

Ainsi, un opérateur linéaire A perd sa fermabilité dès que le domaine $D(A^*)$ de son adjoint est assez petit, et même, il peut arriver que $D(A^*) = \{0\}$.

L'opérateur suivant représente un bon exemple d'opérateur non borné dont le domaine de son adjoint est réduit à $\{0\}$.

Soit $H = L^2\left(\left]-1;1\right[\right)$,

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{c} f \in C^{\infty}\left(\left]-1;1\right[\right) \cap L^2\left(\left]-1;1\right[\right) \ ; \\ \left|f^{(j)}(0)\right| \leq C_f \ 2^{-j} j! \ , \ j \geq 0 \ , \ C_f > 0 \end{array} \right\} \tag{3}$$

et

$$Af(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j \tag{4}$$

A est bien défini de plus $N(A)$ et $R(A)$ sont denses dans H.

En effet, $D(A)$ et $R(A)$ contiennent l'espace $\mathcal{P}$ des polynomes définis sur $\left]-1;1\right[$ et $N(A)$ contient l'espace $\mathcal{P}_e = \{\exp\left(-x^{-2}\right) P : P \in \mathcal{P}\}$ sachant que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2\left(\left]-1;1\right[\right)$.

On conclu alors que $D(A^*) = \{0\}$ en utilisant le résultat suivant :

Lemme 1.3 *([17])*

1) Si A est un opérateur linéaire non borné tel que $N(A)$ est dense, alors $D(A^*) = N(A^*)$.

2) Si de plus $R(A)$ est dense, alors $D(A^*) = \{0\}$.

Les opérations naturelles, somme, produit et limites sont bien définies sur $B(H)$, cependant, il faut être prudent avec ces manipulations lorsqu'il s'agit d'opérateurs non bornés, c'est essentiellement dû aux domaines. Ceci fait que le maniement des opérateurs non bornés est toujours très delicat et en particulier la notion de la somme, du produit, de l'adjoint, des limites et aussi celles des opérateurs commutables.

$D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ ou $D(AB) = B^{-1}(D(A))$ peut être trivial, c'est à dire réduit à zéro, d'autre part, si $A, B \in C(H)$, alors $A+B$ et AB ne sont pas généralement fermés sur H, même si de fortes conditions sont imposées sur A et B. Pour ces différentes questions et pour la construction d'exemples explicites et détaillés le lecteur intéressé pourra consulter [26], [28].

Pour éviter les problèmes de la fermeture de la somme, du produit et des limites d'opérateurs, mais aussi des questions relatives à la formule classique de l'adjoint de la somme et du produit, certains auteurs ont tenté d'affaiblir la notion de fermabilité des opérateurs ([5], [6], [25]).

Dixmier [6] a défini en 1947 un nouveau produit entre les éléments de $C(H)$, noté $A \times B$, de la manière suivante:

$x \in D(A \times B)$ et $y = (A \times B)x$, s'il existe une suite $(x_n)_n$ dans $D(B)$ convergente dans H vers x et une suite $(y_n)_n$ dans $R(A)$ convergente dans H vers y telles que la suite $(A^{-1}y_n - Bx_n)_n$ converge dans H vers 0.

Il montre en particulier que si $A, B \in C(H)$, alors :

$$\begin{cases} (A \times B) \in C(H) \\ A \times B = AB \text{ si } B \in B(H) \text{ ou } A^{-1} \in B(H) \\ A \times B = \overline{AB} \text{ si } B^{-1} \in B(H) \text{ ou } A \in B(H) \end{cases} \tag{5}$$

mais il n'obtient pas la formule classique sur l'adjoint du produit usuel des opérateurs bornés, il trouve seulement $(AB)^* = B^* \times A^*$.

Le produit $\star$ proposé par Messirdi et Mortad dans leurs article [25] utilise la notion du bissecteur d'un opérateur de $C(H)$ par transport du produit de $B(H)$ vers $C(H)$.

Ce nouveau produit est autant plus intéréssant dans la mesure où il comble les défaillences du produit de Dixmier en vérifiant essentiellement les deux propriétés suivantes: $\forall\ A, B \in C(H)$,

$$\begin{cases} A \star B \in C(H) \\ (A \star B)^* = B^* \star A^* \end{cases} \tag{6}$$

D'autres auteurs ont donné suffisamment de conditions topologiques sur le graphe de deux opérateurs de $C(H)$ de sorte que leur somme et leur produit restent dans $C(H)$ ([24], [26], [3]).

Une autre manière de conserver le caractère fermé de la somme, du produit et par passage à la limite des opérateurs de $C(H)$ consiste à introduire des définitions plus adaptées à la fermeture des opérateurs ([7], [5], [19], [26], [27]).

En effet, S. Messirdi et al. ont introduit dans leur article [26] une nouvelle classe d'opérateurs linéaires, appelés opérateurs presque fermés et ont montré que cette classe est notamment stable par rapport aux opérations usuelles: somme finie et infinie, produit, passage à l'adjoint et à la limite.

Les opérateurs presque fermés sont des opérateurs non bornés sur H sur lesquels on impose une condition topologique inspirée du résultat qui dit qu'un opérateur A est fermé si et seulement si $(D(A), \langle .,. \rangle_{G(A)})$ est un espace de Hilbert. Cette condition rend ces opérateurs à graphes fermés sur un espace de Hilbert intermédiaire entre le domaine de l'opérateur et l'espace total H.

Cependant, la somme, le produit et les limites d'opérateurs fermés sont nécessairement des opérateurs presque fermés ou quotient d'opérateurs linéaires bornés. On rappelle dans le deuxième chapitre la notion d'opérateurs linéaires presque fermés agissant dans un espace de Hilbert. Cette classe d'opérateurs contient l'ensemble de tous les opérateurs linéaires fermés et est stable par rapport aux opérations usuelles: somme finie et infinie, produit, passage à l'adjoint et à la limite.

Signalons maintenant qu'un opérateur non fermable (n'admettant pas d'extension fermée) peut être presque fermé sur H et inversement il existe des opérateurs fermables sur H qui ne sont pas presque fermés sur H. Deux exemples d'opérateurs montrant que les classes d'opérateurs fermables et presque fermés ne sont pas emboitées, sont explicitement construits et introduits dans [26].

Cette dernière remarque nous mène vers une question pertinente celle de l'existence des extensions presque fermées des opérateurs linéaires. En s'appuyant sur les travaux de Kaufman ([19], [18]), on présente aussi quelques résultats préliminaires sur les extensions presque fermées.

Une autre façon de traiter cette question consiste à définir un espace d'opérateurs linéaires non bornés sur H contenant simultanément l'ensemble des opérateurs linéaires fermables sur H ainsi que la classe des opérateurs presque fermés sur H. On présente dans le troisième chapitre les résultats originaux obtenus dans [27], il s'agit de la notion nouvelle d'opérateurs linéaires presque fermables sur les espaces de Hilbert et de Banach obtenus par des extensions presque fermées. Cette classe d'opérateurs ne déborde pas de l'ensemble des opérateurs linéaires non bornés, elle englobe la classe des opérateurs fermables et presque fermés et elle est à son tour stable par l'addition, la composition, l'inversion, la restriction, les limites et les intégrales. On fourni aussi quelques propriétés importantes de ces opérateurs et on les représente à l'aide de produits d'opérateurs linéaires.

Par ailleurs, $C(H)$ muni de la métrique du gap g est un espace métrique non complet:

$$g(A,B) = \left\| P_{G(A)} - P_{G(B)} \right\|_{B(H\times H)} \ , A, B \in C(H) \tag{7}$$

$P_{G(A)}$ et $P_{G(B)}$ désignent respectivement la projection orthogonale dans $H \times H$ sur le graphe $G(A)$ de A et le graphe $G(B)$ de B. Mezroui dans [29] ainsi que Fernandez Miranda et Labrousse dans [9] ont montré que le complété de $C(H)$ pour la topologie définie par la métrique g atteint l'ensemble des relations linéaires fermées de H (c'est à dire l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de $H \times H$ de dimension et codimension infinies), où les opérateurs linéaires fermés sont identifiés comme des relations linéaires par leurs graphes. La topologie induite par g sur $C(H)$ possède de bonnes propriétés concernant la stabilité du produit des opérateurs , mais les résultats sont beaucoup moins bons en ce qui concerne la stabilité du spectre d'un opérateur. Donc il est nécessaire d'avoir d'autres métriques sur $C(H)$, qui sont plus pratiques ou alors plus fortes que g pour pouvoir raffiner le complété de $C(H)$ en ramenant dans la mesure du possible le complété de $C(H)$ vers une certaine classe d'opérateurs non bornés.

De nouvelles métriques sont introduites sur $C(H)$, une caractérisation de la fermeture des sous-ensembles bornés de $C(H)$ par ces métriques y est aussi donnée. Il devient alors intéressant de comparer le complété de $C(H)$ par ces métriques avec l'espace des opérateurs presque fermables sur H. En d'autres termes, est-il possible de déterminer une métrique d sur $C(H)$ plus forte que g telle que le complété de $C(H)$ par d coïncide avec l'espace des operateurs presque fermables sur H?.

Enfin on introduit au chapitre quatre une topologie de Hausdorf τ localement convexe dans l'ensemble de tous les opérateurs presque fermables et on étudie cette structure topologique en utilisant la méthode de décomposition des opérateurs presque fermables. τ induite sur $C(H)$ est métrisable, elle est strictement plus forte que celle induite par la métrique g et elle coïncide avec la topologie de convergence uniforme sur $B(H)$ ([27]). On définie aussi la notion de la convergence quotient dans l'espace des opérateurs presque fermés et on montre que la topologie induite par la convergence quotient est aussi strictement plus forte que la topologie induite par la métrique du gap g sur $C(H)$.

Les opérateurs d'évolutions linéaires (Problèmes de Cauchy abstraîts [12]) définis sur un espace produit font intervenir des éléments matriciels décomposables en sommes et produits d'opérateurs fermés, ils sont en géneral ni fermés ni fermables.

Si un opérateur d'évolution est fermable on est confronté à deux difficultés majeures. Celles de la description du domaine de la fermeture et du risque de la disparition des informations nécessaires sur l'évolution du problème dans le temps après extension du domaine car ces informations sont contenues en général dans le domaine initial de l'opérateur (cf. [12]).

Ainsi, à cause des propriétés de stabilité des opérations usuelles les problèmes d'évolutions sont en particulier rigoureusement formulés dans la classe des opérateurs presque fermables car la somme et le produit d'opérateurs fermables sont toujours des opérateurs presque fermables.

Dans le cinquième et dernier chapitre sont traités les problèmes de Cauchy abstraits du type:

$$\frac{du}{dt} = Au(t)\ ,\ t \in [0, T[,\ T \leq \infty,\ u(0) = x \tag{ACP}$$

où $(t, x) \in [0, T[\times\Omega$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ouvert), $u(t) = u(t, .) \in E$ un espace de Banach complexe et l'opérateur A de domaine $D(A)$ n'est pas fermable dans E.

En utilisant la représentation de Laplace et la théorie des semi-groupes, on peut construire une solution dans E du problème (ACP), où A est supposé presque fermable sur E. Il est connu que beaucoup d'informations sur le problème (ACP) sont contenues en particulier dans le domaine de A, donc cela signifie que le changement de la structure de E ou celle de $D(A)$ peut influer fortement sur le caractère du problème étudié. Il est plutôt convenable de considérer le graphe de A dans un espace de Banach auxiliaire $E_B \times E$, où $A \subset B$, B est borné de l'espace de Banach E_B dans E et $D(A) \subseteq E_B \hookrightarrow E$ (E_B s'injecte continuellement dans E).

Chapitre II
Opérateurs presque fermés

2 Opérateurs presque fermés

2.1 Concept des opérateurs presque fermés

On inroduit dans ce chapitre la classe des opérateurs presque fermés qui sont des opérateurs non bornés sur H sur lesquels on impose une condition topologique qui consiste à renormer leurs domaines. Cette condition rend ces opérateurs à graphes fermés sur un espace de Hilbert intermédiaire entre le domaine de l'opérateur et l'espace total H.

On donne également les résultats de base sur ces opérateurs et on présente aussi les diférentes caractérisations obtenues par Kaufman dans [19] sur les extensions presque fermées d'opérateurs linéaires.

Ces opérateurs ont été étudiés par plusieurs auteurs, souvent introduits avec des appellations différentes. Dixmier utilise dans [7] l'appellation "opérateurs de Julia", Agmon et Nirenberg les ont introduit dans [1] sous le nom d'opérateurs relativement fermés", ils sont appelées respectivement opérateurs images "operator ranges" par Fillmore et Williams dans [10], opérateurs paracomplets par Labrousse dans [20] et opérateurs semi-fermés par Foias [11], Caradus [5] et Kaufman [19]. Kaufman utilise également le terme quotient d'opérateurs bornés, enfin Messirdi et al. les ont appelé opérateurs presque fermés [26]. Cette classe d'opérateurs non bornés est notamment stable par rapport aux opérations usuelles : somme finie et infinie, produit et passage à la limite [26].

Définition 2.1 *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ défini sur un espace de Hilbert H est dit presque fermé s'il existe un produit scalaire $[.,.]_A$ sur $D(A)$ tel que l'espace auxilliaire $H_A = (D(A), [.,.]_A)$ est complet, s'injecte continuement dans H (on note $H_A \hookrightarrow H$) et $A \in B(H_A, H)$.*

Il est évident que si H_A est un espace de Hilbert, alors A est presque fermé si et seulement si le graphe $G(A)$ de A est fermé dans $H_A \oplus H$, donc si $(x_n)_n$ converge vers x dans H_A et $(Ax_n)_n$ converge vers y dans H, alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

En particulier, tout opérateur fermé $(A, D(A))$ est presque fermé lorsque $H_A = D(A)$ est muni du produit scalaire et de la norme du graphe $\langle x, y\rangle_A = \langle x, y\rangle + \langle Ax, Ay\rangle$ et $\|x\|_A = (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{1/2}$, $x, y \in D(A)$.

Un opérateur presque fermé peut être également caractérisé par le moyen de sous-espaces presque fermés ou d'opérateurs images (operator ranges selon Fillmore et Williams [10]). Soit M un sous-espace de H, M est dit un sous-espace presque fermé de H, s'il existe un produit scalaire $\langle .,. \rangle_M$ sur M tel que M est complet par rapport à $\langle .,. \rangle_M$ et que $(M, \langle .,. \rangle_M)$ s'injecte continuellement dans $(H, \langle .,. \rangle_H)$. Fillmore et Williams ont établi la relation entre les sous-espaces presque fermés et les opérateurs images, ils ont montré dans [10] que M est presque fermé dans H si et seulement si M est l'image d'un opérateur de $B(H)$. On a le résultat de caractérisation suivant :

Théorème 2.2 *Soit $A : D(A) \to H$ un opérateur linéaire de domaine $D(A) \subseteq H$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) A est presque fermé sur H.

2) $D(A)$ est un sous-espace presque fermé de H de telle sorte que A est borné par rapport à une norme hilbertienne sur $D(A)$.

3) Le graphe $G(A)$ de A est un sous-espace presque fermé dans $H \times H$.

Notons par $AC(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires presque fermés sur H. On sait d'après les travaux suscités que $AC(H)$ est la plus petite famille contenant la classe des opérateurs fermés sur H qui est stable par les opérations somme finie et dénombrable, produit et passage à la limite**.**

Si $A, B \in C(H)$ alors $S = A + B$ et $C = BA$ sont évidemment presque fermés si on prend comme espace de Hilbert auxilliaire $H_S = H_C = D(A)$ muni du produit scalaire du graphe $\langle\ ,\rangle_A$.

En effet, soient $(x_n)_n$ une suite de $D(S) = D(A) \cap D(B)$ et $(y_n)_n$ une suite de $D(C) = \{z \in D(A)\ ;\ Az \in D(B)\}$ convergentes respectivement dans $H_S = H_C$ vers x et y, telles que $(Sx_n)_n$ ainsi que $(Cy_n)_n$ convergent dans H respectivement vers z et t. Comme H_A est complet et A est fermé, alors $x, y \in D(A)$, $(Ax_n)_n$ converge vers Ax et $(\widetilde{y}_n)_n = (Ay_n)_n$ converge vers Ay dans H . Or, $(Bx_n)_n$ et $(B\widetilde{y}_n)_n$ convergent respectivement dans H vers $(z - Ax)$ et t, de plus puisque B est fermé $z - Ax = Bx$ ou bien $z = Sx$ et $t = Cy$.

On remarque que, même si A et B ne sont pas fermés sur H, les opérateurs S et C peuvent être presque fermés sur H. Considérons pour cela l'exemple de deux opérateurs non fermés A et B qui sont conjointement fermés, c'est à dire vérifiant la condition de la fermeture seulement sur la partie commune $D(A) \cap D(B)$ de leurs domaines $D(A)$ et $D(B)$ ou bien si $(x_n)_n$ est une suite de $D(A) \cap D(B)$ convergente dans H vers x telle que les suites des images $(Ax_n)_n$ et $(Bx_n)_n$ convergent dans H respectivement vers y_1 et y_2, alors $x \in D(A) \cap D(B)$, $Ax = y_1$ et $Bx = y_2$.

Posons:

$$H_S = D(A) \cap D(B) \tag{8}$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_S = \langle x, y \rangle + \langle Ax, Ay \rangle + \langle Bx, By \rangle \tag{9}$$

H_S est un espace de Hilbert, $H_S \hookrightarrow H$ de plus il apparait facilement que $S = A + B$ est presque fermé.

Tout opérateur presque fermé sur H de domaine fermé est borné.

En effet, si $A \in AC(H)$, il existe H_A un espace de Hilbert, de tel sorte que $D(A) = H_A \hookrightarrow H$ et $A \in B(H_A, H)$, mais comme $D(A)$ est fermé alors $D(A) = H$ et $A \in B(H)$.

De plus, si $A \in AC(H)$, alors $N(A)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert auxiliaire H_A; en particulier si $R(A) = H$ et A est inversible alors $A \in B(H)$.

Cependant, S. Messirdi et al. ont montré dans [26], à l'aide d'exemples typiques, qu'il n'ya pas de lien entre les opérateurs fermables et les opérateurs presque fermés. En effet, il existe des opérateurs presque fermés qui ne sont pas fermables et des opérateurs fermables qui ne sont pas presque fermés. Dans un but d'étendre l'application de cette nouvelle génération d'opérateurs à l'extérieur du champ des espaces de Hilbert on donne ici des exemples d'opérateur sur un espace de Banach qui montrent bien qu'il n'y'a pas de relation d'inclusion entre $AC(H)$ et la classe des opérateurs fermables sur H.

L'extension naturelle de la définition 2.1 aux espaces de Banach consiste à remplacer dans cette définition les espaces de Hilbert H et H_A par des espaces de Banach X et X_A.

Exemple 2.3 *Soient* $X = C([0,1])$ *l'espace des fonctions continues sur l'intervalle* $[0,1]$ *muni de sa norme naturelle,* $A = \frac{d}{dx}$ *de domaine* $D(A) = C^1([0,1])$ *l'espace des fonctions de classe* C^1 *sur* $[0,1]$ *et* $Bf(x) = f(0)g(x)$ *de domaine* $D(B) = X$ *où* $g \neq 0$ *est arbitrairement fixé dans* X.

A est fermé et B est borné sur X donc leur produit $C\ f = BAf = \frac{df}{dx}(0)g$ *de domaine* $D(C) = D(A)$ *est presque fermé sur* X.

Soit la suite $f_n(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$. *Alors,*

- $f_n \in D(C)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)|^2 = \frac{e^{-2nx}}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $|f_n(x)|^2 \leq 1, \forall x \in [0,1], \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. *Avec* $1 \in L^1([0,1])$.

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} |f_n(x)|^2\, dx = 0$$

D'où, $(f_n)_n$ *converge vers 0 dans* X.

- $Cf_n = \frac{d\,f_n}{dx}(0)g = g \neq 0$.

Or, $(0,g)$ *ne peut pas appartenir au graphe d'un opérateur linéaire. Ainsi,* C *ne peut pas être fermable.*

Exemple 2.4 *Considérons l'opérateur identité* I, *sur l'espace de Banach* $X = C([0,1])$ *muni de la norme banachique de la convergence uniforme, de domaine* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des polynômes sur* $[0,1]$.

En vertu du théorème de Weierstrass il apparaît évident que I *est fermable. Supposons aussi que* I *est presque fermé alors il existe un espace de Banach* X_I, $X_I \hookrightarrow X$, *tel que le graphe* $G(I) = \{(P,P)\ ;\ P \in \mathcal{P}\}$ *de* I *est fermé dans* $X_I \times X$. $G(I)$ *est alors un espace métrique complet.*

Or, $G(I) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(P_n, P_n)\ ;\ d\,^oP_n \leq n\}$ *est une réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels de dimensions finies et d'intérieurs vides.* $G(I)$ *est alors un espace de première catégorie.*

Mais $G(I)$ *est un espace de Baire de seconde catégorie ce qui est contradictoire. Alors* I *de domaine* $\mathcal{P}$ *ne peut pas être presque fermé sur* $C([0,1])$.

D'autre part, en utilisant le Lemme de Mac Nearney [22]:

Lemme 2.5 *([22])*

Soit $A \in AC(H)$, alors il existe un unique opérateur linéaire borné positif B sur H et un produit scalaire $\langle .,. \rangle'$ sur le domaine $D(A)$ de A tels que $(D(A), \langle .,. \rangle')$ est complet, s'injecte continuement dans H, $R(B) = D(A)$ et $\langle x, y \rangle' = \langle B^{-1}x, B^{-1}y \rangle_H$ pour tout $x, y \in D(A)$.

Kaufman a obtenu dans [18] une représentation quotient des opérateurs presque fermés de la manière suivante:

Théorème 2.6 *([18])*

Soit A un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$.

$A \in AC(H)$ si et seulement si il existe B et C un couple d'opérateurs bornés sur H tel que $A = C/B$ (le quotient de C par B de domaine $R(B)$ est défini sur H lorsque $N(B) \subset N(C)$, par l'application $Bx \longrightarrow Cx$, $x \in H$).

Notons que $AC(H)$ n'est pas un espace vectoriel sachant que la représentation quotient de l'opérateur nul n'est pas unique. On rappelle ici que la somme, le produit et le passage à la limite sur des opérateurs quotients sont aussi des opérateurs quotients. Le caractère presque fermé des opérateurs persiste aussi sous d'autres opérations comme le montre le résultat suivant (cf. [5], [19], [26]):

Théorème 2.7 *Soit $A \in AC(H)$.*

1) La restriction de A à son espace auxilliaire H_A est un opérateur fermé dans H_A.

2) $R(A)$ est un sous-espace presque fermé de H. L'image et l'image réciproque par A de tout sous-espace presque fermé de H est un sous-espace presque fermé de H.

3) La restriction de A à tout sous-espace presque fermé de H inclu dans $D(A)$ est un opérateur presque fermé dans H.

4) $(A + B) \in AC(H)$ si et seulement si B est A-relativement borné de borne relative strictement inférieure à 1.

On rappelle que B est A-relativement borné de borne relative strictement inférieure à 1 si $D(A) \subset D(B)$ et pour tout $x \in D(A)$ on ait:

$$\|Bx\|_H \leq a\,\|Ax\|_H + b\,\|x\|_H \tag{10}$$

où a et b sont des constantes positives et $a < 1$ (on dit que B est A-directement borné si (10) *est satisfaite avec $b = 0$).*

5) Si A est inversible alors $A^{-1} \in AC(H)$.

6) Il existe $B, C \in B(H)$ inversibles tels que $R(B) = R(C) = D(A)$ et $A = B^{-1} + C^{-1}$.

7) Si B est un opérateur fermé sur H tel que $D(B) \subset D(A)$, $B + \lambda A$ est une famille analytique d'opérateurs fermés sur H pour λ complexe de module assez petit.

8) Si A,$B \in AC(H)$, alors $A + B$ et AB sont dans $AC(H)$.

9) X est un espace de Banach et $A \in AC(X)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $A_\varepsilon \in AC(X)$ d'espace de Banach auxilliaire $X_\varepsilon = (D(A_\varepsilon), [.,.]_{A_\varepsilon})$. Supposons qu'il existe un espace de Banach G tel que $G \hookrightarrow X_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|A_\varepsilon x\|_X < +\infty$, pour tout $x \in G$.

Alors, $Ax = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon x$ de domaine:

$$D(A) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{\varepsilon>0} D(A_\varepsilon) \right) \cap G \ : \ \lim_{\varepsilon\to0} A_\varepsilon x \text{ existe dans } X \right\} \tag{11}$$

est un operateur linéaire presque fermé sur X, son espace de Banach auxilliaire X_A est donné par:

$$X_A = \left\{ x \in \left(\bigcap_{\varepsilon>0} D(A_\varepsilon) \right) \cap G \ ; \|x\|_G + \sup_{\varepsilon>0} \|A_\varepsilon x\|_X < +\infty \right\} \tag{12}$$

2.2 Extensions des opérateurs presque fermés

Soit A un opérateur non borné sur un espace de Banach. Est-il possible de prolonger A en un opérateur linéaire presque fermé dans cet espace? Cette question a été résolue par Caradus dans [5] lorsque l'espace est supposé de Hilbert séparable, elle a été par la suite étudiée par Kaufman [19] dans des situations plus générales.

Théorème 2.8 *([5], [26]) Si H est un espace de Hilbert séparable, alors A a une extension densément définie presque fermée sur H.*

Si H est un espace de Hilbert non nécessairement séparable, Kaufman a affirmé que la question précédente est affirmative sous des hypothèses de bornitude relative sur l'opérateur A.

Théorème 2.9 *([19]) Soit A un opérateur linéaire sur H. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1) A admet une extension presque fermée sur H.
2) A est directement B^{-1}-borné où $B \in B(H)$ inversible.
3) A est directement B-borné où B est un opérateur auto-adjoint sur H.
4) A est directement B-borné où B est un opérateur fermé sur H.
5) A est directement B-borné où $B \in AC(H)$.

Techniquement, Kaufman à prouvé que étant donnés un sous-ensemble dénombrable linéairement indépendant $\mathcal{M}$ de H et un opérateur linéaire A définie du sous-espace $span\mathcal{M}$, sous-espace engendré par $\mathcal{M}$, dans H, alors A admet une extension presque fermée sur H. Ce dernier résultat est une conséquence du résultat général suivant d'éxistence des extensions presque fermées d'opérateurs linéaires.

Théorème 2.10 *([19]) Soit A un opérateur linéaire non borné sur H de domaine $D(A)$. On suppose qu'il existe un recouvrement monotone $\mathcal{M}$ de sous-espaces fermés de H tel que $\mathcal{M}$ recouvre $D(A)$ et pour tout M dans $\mathcal{M}$, la restriction de A à $M \cap D(A)$ est bornée. Alors A admet une extension presque fermée sur H.*

Observons maintenant que le sous-espace vectoriel engendré par un sous-ensemble $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linéairement indépendant et dénombrable dans H est l'union de la suite croissante des espaces de dimension finie $M_k = span\{e_j : j \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Donc comme conséquence immédiate de théorème 2.10, on a:

Corollaire 2.11 *Tout opérateur linéaire défini dans H sur l'espace engendré par une famille dénombrable linéairement indépendante de H admet une extension dans $AC(H)$.*

Remarque 2.12 *Il s'agit alors d'un problème mathématiquement intéressant celui de construire un opérateur linéaire sur H sans extension presque fermée sur H. Pour cela, on aura besoin de définir un opérateur A sur un sous-ensemble J linéairement indépendant non dénombrable de H (J aura la puissance du continu) afin que l'extension naturelle de A en un opérateur linéaire sur $span(J)$ n'ait pas d'extension presque fermée sur H. Nous traiterons avec détails cette question dans la section suivante en utilisant l'axiome du choix et le lemme de Zorn.*

Chapitre III

Concept des opérateurs presque fermables

3 Concept des opérateurs presque fermables

3.1 Opérateurs presque fermables sur un espace de Hilbert

L'idée développée dans ce chapitre consiste à définir, à l'aide des extensions presque fermées, une autre classe d'opérateurs linéaires non bornés sur H appelés opérateurs presque fermables, contenant les classe $AC(H)$ et l'ensemble de tous les opérateurs fermables sur H. Cette nouvelle classe d'opérateurs est stable par les opérations de restriction, somme finie et dénombrable, composition, limites et intégrales. On fourni aussi des propriétés importantes des opérateurs presque fermables et on les représente à l'aide du produit d'opérateurs fermables.

Définition 3.1 *([27]) Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire de domaine $D(A) \subseteq H$. A est dit opérateur presque fermable sur H si A admet une extension presque fermée sur H.*

Ainsi, A est presque fermable sur H si et seulement si il existe $B \in AC(H)$ telle que $A \subset B$ ou de façon équivalente $G(A) \subset G(B)$. Comme $G(B)$ est presque fermé dans l'espace de Hilbert produit $H \times H$ muni de sa topologie naturelle, on peut appeler dans ce cas $G(A)$ un sous-espace presque fermable de $H \times H$.

En d'autres termes, A est presque fermable sur H si et seulement si $A \subset B$ tel que il existe un produit scalaire $[.,.]_B$ sur $D(B)$ pour lequel l'espace auxiliaire $H_B = (D(B), [.,.]_B)$ est complet, $H_B \hookrightarrow H$ et $B \in B(H_B, H)$. En particulier, si $(D(A), [.,.]_B)$ est complet alors A est presque fermé sur H.

Par conséquent, si A est presque fermable d'extension $B \in AC(H)$ et d'espace de Hilbert auxiliaire H_B, alors pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $D(A)$ de telle que $x_n \to x$ dans H_B et $Ax_n \to y$ dans H, on a $x \in D(B)$ et $Ax = y$. Comme la topologie induite par H_B est moins fine que celle induite par celle de H, on peut voir que tout ensemble de H_B fermé pour la topologie de H est également fermé dans H_B pour la topologie de H_B et alors $\overline{G(A)}^{H_B \times H} \subset \overline{G(A)}^{H \times H}$.

Ainsi, la presque fermabilité consiste à raffiner le graphe $G(A)$ de A en renormant $D(A)$ en utilisant la structure hilbertienne de l'espace auxiliaire.

Ce changement de topologie, tend à extraire de $\overline{G(A)}^{H\times H}$ les vecteurs singuliers $(0,v)$, $v\in H$ et $v\neq 0$.

Les opérateurs presque fermables sont des opérateurs non bornés A sur H sur lesquels on impose une condition topologique, moins fine que celle de H, inspirée des opérateurs presque fermés. Cette condition permet à ces opérateurs d'avoir des extensions bornées sur des espaces de Hilbert auxiliaires, intermédiaires entre le domaine $D(A)$ de A et H.

Étant donné que chaque opérateur fermé est presque fermé, il est clair que tous les opérateurs fermables sont presque fermables, mais il existe des opérateurs presque fermables A sur H qui ne sont pas fermables si par exemple le graphe $G(A)$ de A est dense dans H.

Comme exemple d'opérateur presque fermable mais non fermable, on considère un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie muni d'une base hilbertienne orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose:

$$D=\{x\in H\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} n^4\left|\langle x,e_n\rangle_H\right|^2<+\infty\}\ ,\ y=\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}e_n \tag{13}$$

Soient l'opérateur B dans $B(H)$ défini sur H par $Bx=\langle x,y\rangle\, y$ et A défini sur D par:

$$Ax=\sum_{n=2}^{\infty} n^2\left\langle x,e_n\right\rangle_H e_n \qquad (x\in D) \tag{14}$$

Alors, A est linéaire densément défini (D est dense dans H) et fermable sur H, BA n'est pas fermable (cf. Problème 2.8.43 de [16]) mais BA est un opérateur presque fermable sur H, c'est un produit d'un opérateur borné par un opérateur fermable.

Comme mentionné ci-dessus, on peut aussi construire des opérateurs linéaires fermables (donc presque fermables) qui ne sont pas presque fermés (voir un exemple type dans [26]).

On note par $ACl(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs presque fermables sur H. On a par définition, les inclusions suivantes:

$$
\begin{aligned}
B(H) &\subset C(H) \subset AC(H) \subset ACl(H) \\
&\text{et} \\
B(H) &\subset C(H) \subset Cl(H) \subset ACl(H)
\end{aligned} \tag{15}
$$

où $Cl(H)$ désigne l'ensemble de tous les opérateurs fermables sur H.

Une classe importante d'opérateurs presque fermables sont la somme et le produit d'opérateurs fermables sur un espace de Hilbert. En général, la somme $A+B$ de domaine $D(A)\cap D(B)$ et le produit AB de domaine $B^{-1}(D(A))$ ne seront pas fermables sur H si A et B sont fermables sur H. Toutefois, $A+B$ et AB sont presque fermables lorsque $D(A)\cap D(B)$ et $D(AB)$ ne sont pas triviales (réduits à $\{0\}$) et si on prend les espaces auxiliaires $H_{\overline{A}+\overline{B}} = (D(\overline{A})\cap D(\overline{B}), [.,.]_{\overline{A}+\overline{B}})$ et $H_{\overline{AB}} = (D(\overline{A}\ \overline{B}), [.,.]_{\overline{A}\ \overline{B}})$, où

$$
\begin{aligned}
[x,y]_{\overline{A}+\overline{B}} &= \langle x,y\rangle_{G(\overline{A})} + \langle x,y\rangle_{G(\overline{B})} \ , \ x,y\in D(\overline{A})\cap D(\overline{B}) \\
[x,y]_{\overline{A}\ \overline{B}} &= \langle x,y\rangle_{G(\overline{B})} + \left\langle \overline{B}x,\overline{B}y\right\rangle_{G(\overline{A})} \ , \ x,y\in D(\overline{A}\ \overline{B})
\end{aligned} \tag{16}
$$

Il est clair que, $H_{\overline{A}+\overline{B}}$ et $H_{\overline{A}\ \overline{B}}$ sont des espaces de Hilbert, $H_{\overline{A}+\overline{B}} \hookrightarrow H$, $H_{\overline{A}\ \overline{B}} \hookrightarrow H$ et $\overline{A}+\overline{B} \in B(H_{\overline{A}+\overline{B}}, H)$, $\overline{A}\ \overline{B} \in B(H_{\overline{A}\ \overline{B}}, H)$. Ainsi, $\overline{A}+\overline{B}$ et $\overline{A}\ \overline{B}$ sont respectivement les extensions presque fermées de $A+B$ et AB sur H, ce qui montre que $A+B$, $AB\in ACl(H)$.

Il existe aussi des opérateurs linéaires non bornés qui ne sont pas presque fermables, on montre alors le résultat général suivant:

Théorème 3.2 *Sur tout espace de Hilbert complexe de dimension infinie, il existe des opérateurs linéaires non bornés qui ne sont pas presque fermables.*

Preuve. La preuve est constructive, elle nécessite l'axiome du choix et le lemme de Zorn. Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, on peut toujours construire un opérateur linéaire non borné A sur H de domaine $D(A) = H$. En effet, soit A un opérateur linéaire non borné sur un domaine $D \subsetneq H$. A existe dès que nous disposons d'une base de Hamel sur H, en général, l'existence d'une base de Hamel sur un espace vectoriel est assurée par le lemme de Zorn. Alors, si $(a_i)_i$ est une base de Hamel de H et $(x_i)_i$ est une famille de vecteurs de H indexée sur le même ensemble, l'application linéaire envoyant a_i vers x_i n'est certainement pas bornée si, par exemple, les $(x_i)_i$ sont choisis de telle sorte que $\frac{\|x_i\|_H}{\|a_i\|_H}$ est non borné.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ de toutes les extensions de A sur H, c'est l'ensemble des opérateurs A' de domaine D', $D \subset D' \subset H$, tels que A et A' coincident sur D. Alors, $\mathcal{E}$ est partiellement ordonné pour l'inclusion sur les domaines. En outre, toute chaine d'opérateurs linéaires de $\mathcal{E}$ possède une borne supérieure, en prenant l'union des domaines. $\mathcal{E}$ possède alors un élément maximal en vertu du lemme de Zorn. Enfin, supposons que l'élément maximal A' de $\mathcal{E}$ est définie sur un domaine D' qui n'est pas égal à H donc strictement inclu dans H. Soit v un vecteur quelconque différent de zéro dans le complèmentaire de D' dans H et définissons une extension de A' sur $D' + \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, nulle en v . Ce qui contredit la maximalité. Ainsi, tout élément maximal de $\mathcal{E}$ est globalement définie sur H.

Maintenant, si A est un opérateur linéaire non borné définie sur H de domaine $D(A) = H$, alors A ne peut pas être prolongé en un opérateur presque fermé sur H. En effet, si A' est une extension presque fermée de A alors $D(A) = D(A') = H$ et A' est borné de $H_{A'}$ vers H où $H_{A'}$ est l'espace de Hilbert auxiliaire de A'. Ainsi, $H_{A'}$ et H sont des espaces de Hilbert isométriquement isomorphes car l'injection de $H_{A'}$ à H est nécessairement bicontinue par le théorème de l'application inverse, puis $A \in B(H)$, ce qui est une contradiction. ■

Les propriétés fondamentales suivantes liées à la presque fermabilité des opérateurs sont des conséquences immédiates de la définition 3.1:

Théorème 3.3 *Soit $A \in ACl(H)$ d'extension presque fermée B et d'espace de Hilbert auxiliaire H_B. Alors,*

1) $\overline{N(A)}^{H_B} \subset N(B) \cap \overline{N(A)}$ où $\overline{N(A)}^{H_B}$ est la fermeture de $N(A)$ par rapport à la topologie de H_B.

2) Si $D(A) = H$, alors $A = B \in B(H)$.

3) Si B est inversible alors $A^{-1} \in ACl(H)$. En outre, si $R(A) = H$ alors $A \in B(H)$.

4) Il existe $A_0 \in B(H_B, H)$ et C fermable dans H_B tels que $A = A_0C$ sur $D(A)$.

5) Si H_0 est un espace de Hilbert tel que $D(A) \subseteq H_0 \hookrightarrow H_B$, alors A est presque fermable de H_0 dans H.

Preuve. 1) L'assertion est vraie puisque B est borné de H_B dans H.

2) En effet, les topologies induites sur H par les normes de H et H_B sont équivalentes, alors $A \in B(H)$ puisque $B \in B(H_B, H)$.

3) Etant donné que B est une extension inversible de A, alors A est aussi inversible et $D(B^{-1}) = R(B)$ est un espace de Hilbert, notée H_{-1}, pour le produit scalaire:

$$[y, z]_{-1} = \langle y, z \rangle_H + [B^{-1}y, B^{-1}z]_B \tag{17}$$

où $[., .]_B$ est le produit scalaire de H_B. B^{-1} est borné de H_{-1} dans H et est donc une extension presque fermée de A^{-1} ce qui signifie que A^{-1} est presque fermable sur H.

4) On adopte ici la même idée que celle utilisée dans ([19], p. 69) au moyen du lemme 2.5 de Mac Nearney. Puisque B est borné de H_B dans H, soit

$$\langle x, y \rangle' = [x, y]_B + \langle Bx, By \rangle_H \ \ , \ x, y \in D(B) \tag{18}$$

$H'_B = (D(B), \langle ., . \rangle')$ est un espace de Hilbert et on a pour tout $x \in D(B)$,

$$\max([x, x]_B; \|Bx\|_H^2) \leq \langle x, x \rangle'$$

Ainsi $H'_B \hookrightarrow H_B \hookrightarrow H$ et $B \in B(H'_B, H)$. Il en résulte qu'il existe un opérateur positif $B_0 \in B(H_B)$ tel que $R(B_0) = D(B)$ et pour tout $x, y \in D(B)$,

$$\langle x, y \rangle' = [B_0^{-1}x, B_0^{-1}y]_B \tag{19}$$

Soit $C = B_0^{-1}$ l'inverse de la restriction de B_0 à $N(B_0)^{\perp}$ dans H_B. Notons que C est défini de $R(B_0)$ dans $N(B_0)^{\perp}$, C est un opérateur fermé et $P = CB_0$

est la projection orthogonale sur $N(B_0)^{\perp}$ dans H_B. Soit $A_0 = BB_0$, alors $B = A_0C$. Pour tout x dans H_B, on a:

$$\|A_0x\|_H^2 = \|BB_0x\|_H^2 \leq \langle B_0x, B_0y\rangle' \leq [x,x]_B$$

Ainsi, $A_0 \in B(H_B, H)$ et $A_0P = A_0$. On a aussi $A = B_{|D(A)} = A_0C_{|D(A)} = A_0(C_{|D(A)})$ où la restriction $C_{|D(A)}$ est fermable de $D(A)$ dans H_B de fermeture égal à C.

5) Soit i l'opérateur identité de H_0 dans H_B. Puisque $Bi = B_{|H_0}$ est borné sur H_0, alors $A \in ACl(H_0)$. ■

Remarque 3.4 *En vertu du théorème* 3.3, (4), *on peut représenter chaque opérateur presque fermable par un quotient d'opérateurs linéaires non bornés et inversement. On traitera cette question en détail dans un prochain article.*

On vérifie maintenant que la somme et le produit d'opérateurs presque fermables sont également des opérateurs presque fermables.

Théorème 3.5 *Soit $A, B \in ACl(H)$. Alors $A+B$, $AB \in ACl(H)$ dès que $D(A) \cap D(B)$ et $D(AB)$ sont non triviales.*

Preuve. Si A' et B' sont respectivement les extensions presque fermées de A et B sur H, en utilisant le fait que A' et B' sont bornées sur les espaces de Hilbert auxiliaires correspondants $H_{A'} = (D(A'), [.,.]_{A'})$ et $H_{B'} = (D(B'), [.,.]_{B'})$, on prend alors $H_{A'+B'} = (D(A') \cap D(B'), [.,.]_{A'+B'})$ et $H_{A'B'} = (D(A'B'), [.,.]_{A'B'})$ où

$$\begin{aligned} [x,y]_{A'+B'} &= [x,y]_{A'} + [x,y]_{B'} + \langle A'x, A'y\rangle_H + \langle B'x, B'y\rangle_H \\ x,y &\in D(A') \cap D(B') \\ [x,y]_{A'B'} &= [x,y]_{B'} + [B'x, B'y]_{A'} + \langle A'B'x, A'B'y\rangle_H \\ x,y &\in D(A'B') \end{aligned} \tag{20}$$

Il est clair que $H_{A'+B'}$ et $H_{A'B'}$ sont des espaces de Hilbert s'injectant continûment dans H. $A' + B'$ et $A'B'$ sont respectivement des extensions presque fermées de $A+B$ et AB (voir [26]), ce qui signifie que $A+B$ et AB sont presque fermables sur H. ■

3.2 Opérateurs presque fermables sur un espace de Banach

La définition des opérateurs presque fermables sur un espace de Banach complexe de dimension infinie $(E, \|.\|_E)$ est similaire à celle proposée dans la section précédente, dans le cas d'un espace de Hilbert.

Un opérateur linéaire défini sur E de domaine $D(A)$ est dit presque fermable sur E si et seulement si il possède une extension presque fermée B sur E. B est presque fermé sur E signifie qu'il existe une norme $\|.\|_B$ sur $D(B)$ telle que $E_B = (D(B), \|.\|_B)$ est un espace de Banach, $E_B \hookrightarrow E$ et B est bornée de E_B dans E.

Toutes les propriétés satisfaites par les opérateurs presque fermables sur un espace de Hilbert restent vraies dans le cas des espaces de Banach. Toutefois, certains résultats nouveaux sont techniquement valables sur les espaces de Banach et que nous devons utiliser dans certaines applications [12]. On reprend ici les notations précédentes avec E à la place de H.

Remarque 3.6 *Soient A' et B' les extensions presque fermées respectives des opérateurs linéaires non bornés A et B sur E telles que B' est A'-relativement borné avec une A'-borne relative strictement inférieure à 1. Alors, à partir d'un résultat de [26], A est presque fermable sur E si et seulement si $(A+B)$ est presque fermable sur E. La bornitude relative de B par rapport à A n'est pas suffisante pour assurer ce résultat.*

On établi dans ce qui suit des résultats nouveaux et originaux en montrant que la classe des opérateurs presque fermables est également invariante par passage à la limite, les sommes infinies et les intégrales.

Théorème 3.7 *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $A_\varepsilon \in ACl(E)$ d'extension $B_\varepsilon \in AC(E)$ et d'espace de Banach auxiliaire $E_\varepsilon = (D(B_\varepsilon), \|.\|_{B_\varepsilon})$. Supposons qu'il existe un espace de Banach L tel que $L \hookrightarrow E_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|A_\varepsilon x\|_E < +\infty$, pour tout $x \in L$.*

Alors, $Ax = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x$ de domaine:

$$D(A) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{\varepsilon>0} D(A_\varepsilon) \right) \cap L \ : \ \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x \text{ existe dans } E \right\} \qquad (21)$$

est un opérateur linéaire presque fermable sur E.

Preuve. On définit $Bx = \lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon x$ sur

$$D(B) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{\varepsilon > 0} D(B_\varepsilon) \right) \cap L : \lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon x \text{ existe dans } E \text{ et } \sup_{\varepsilon > 0} \|B_\varepsilon x\|_E < +\infty \right\} \tag{22}$$

et on pose $\|x\|_B = \|x\|_L + \sup_{\varepsilon > 0} \|B_\varepsilon x\|_E$ pour $x \in D(B)$.

Il est clair que, $\|x\|_B = \|x\|_L + \sup_{\varepsilon > 0} \|B_\varepsilon x\|_E$ est une norme sur $D(B)$, montrons maintenant que $F = (D(B), \|x\|_B)$ est complet.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F. Alors, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L, E et E_ε pour tout $\varepsilon > 0$, et $(B_\varepsilon x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans L, E et E_ε pour tout $\varepsilon > 0$ et $(B_\varepsilon x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers y_ε pour tout $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, il existe $M > 0$ tel que $\|x_n\|_B \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. D'où, $\|B_\varepsilon x_n\|_E \leq \|x_n\|_B \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \varepsilon > 0$. Alors puisque $x_n \longrightarrow x$ dans E_ε, $\|B_\varepsilon x\|_E = \lim_{n \to \infty} \|B_\varepsilon x_n\|_E \leq M$, $\forall \varepsilon > 0$. Il en résulte que $\sup_{\varepsilon > 0} \|B_\varepsilon x\|_E \leq M$.

Posons $y_n = \lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $\delta > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x_m\|_B \leq \frac{\delta}{3}$ pour tout $n, m \geq N$. Donc

$$\|B_\varepsilon x_n - B_\varepsilon x_m\|_E \leq \|x_n - x_m\|_B \leq \frac{\delta}{3}\ ,\ \ \forall n, m \geq N,\ \forall \varepsilon > 0$$

Fixons $m \geq N$ et $n \geq N$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\|y_m - B_\varepsilon x_m\|_E < \frac{\delta}{3}$ et $\|y_n - B_\varepsilon x_n\|_E < \frac{\delta}{3}$ pour $0 < \varepsilon < \delta_0$. Fixons ε, $0 < \varepsilon < \delta_0$. Alors, $\forall m, n \geq N$,

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|_E &\leq \|y_m - B_\varepsilon x_m\|_E + \|B_\varepsilon x_m - B_\varepsilon x_n\|_E + \|B_\varepsilon x_n - y_n\|_E \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta \end{aligned}$$

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. Ainsi il existe y dans E tel que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y dans E.

Soit $\delta > 0$. Alors, il existe un entier naturel N tel que $\|x_m - x_n\|_B < \frac{\delta}{3}$ pour tout $m, n \geq N$. D'où, $\|B_\varepsilon x_m - B_\varepsilon x_n\|_E \leq \|x_m - x_n\|_B < \frac{\delta}{3}$ pour $m, n \geq N$ et $\forall \varepsilon > 0$. Alors, $\|B_\varepsilon x - B_\varepsilon x_n\|_E = \lim_{m\to\infty} \|B_\varepsilon x_m - B_\varepsilon x_n\|_E \leq \frac{\delta}{3}$, $\forall n \geq N$ et $\forall \varepsilon > 0$. Ce qui donne aussi $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} \|B_\varepsilon x - y\|_E &\leq \|B_\varepsilon x - B_\varepsilon x_n\|_E + \|B_\varepsilon x_n - y_n\|_E + \|y_n - y\|_E \\ &\leq \frac{\delta}{3} + \|B_\varepsilon x_n - y_n\|_E + \|y_n - y\|_E \end{aligned}$$

Choisissons $n \geq N$ tel que $\|y_n - y\|_E < \frac{\delta}{3}$. Il existe alors $t > 0$ tel que $\|B_\varepsilon x_n - y_n\|_E < \frac{\delta}{3}$ pour $0 < \varepsilon < t$. Donc $\|B_\varepsilon x - y\|_E < \delta$ pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $0 < \varepsilon < t$. Ainsi, $\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon x = y$ dans E.

Par conséquent, $x \in F$. On peut aussi facilement voir que $\|x - x_n\|_B \to 0$. Alors, F est un espace de Banach et $F \hookrightarrow E$.

Il reste à montrer que B est un opérateur borné de F dans E. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(B)$ convergeant vers 0 dans F. Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans L, E, et E_ε, $\forall \varepsilon > 0$, en particulier $(B_\varepsilon x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans E uniformément par rapport à $\varepsilon > 0$. Ainsi on peut permuter les limites dans $\lim_{n\to\infty} Bx_n = \lim_{n\to\infty}(\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon x_n) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\lim_{n\to\infty} B_\varepsilon x_n) = 0$ puisque B_ε est borné de E_ε dans E. Finalement, B est bien une extension presque fermée sur E de A. ■

Théorème 3.8 *Soit $A_n \in ACl(E)$ d'extension $B_n \in AC(E)$ et d'espace de Banach auxiliaire $E_n = (D(B_n), \|.\|_{B_n})$, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que L est un espace de Banach tel que $L \hookrightarrow E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors l'opérateur $Ax = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x$ de domaine:*

$$D(A) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A_n) \right) \cap L \, : \, \sum_{n=0}^{\infty} A_n x \textit{ existe dans } E \right\} \tag{23}$$

est linéaire presque fermable sur E.

Preuve. Posons $Bx = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x$ de domaine:

$$D(B) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(B_n) \right) \cap L : \sum_{n=0}^{\infty} B_n x \text{ existe dans } E \right\} \tag{24}$$

et $\|x\|_B = \|x\|_L + \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^{N} B_n x \right\|_E$.

Soit la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} B_n$ de domaine $D(S_N) = \left(\bigcap_{n=0}^{N} D(B_n) \right) \cap L$, $N \in \mathbb{N}$. En vertu du théorème 3.5, il en découle que S_N est presque fermable sur E où $\left(\bigcap_{n=0}^{N} D(B_n) \right) \cap L$ est son espace de Banach auxiliaire associé muni de la norme $\|x\|_{S_N} = \|x\|_L + \|S_N x\|_E$, $N \in \mathbb{N}$. Montrons d'abord que $F = (D(B), \|x\|_B)$ est un espace de Banach. On vérifie facilement que $\|x\|_B$ est bien une norme sur $D(B)$. D'autre part si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F, alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans L, E et E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $x \in D(B_n) \cap L$ et $\lim_{k\to+\infty} B_n x_k = B_n x$, puisque B_n est borné de E_n dans E pour tout $n \in \mathbb{N}$. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est en particulier une suite bornée dans F, il existe alors $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\|_E \le \|x_k\|_B \le M \tag{25}$$

Vérifions en fait que $\sum_{i=0}^{\infty} B_i x$ existe dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel N tel que pour $m, k \ge N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|S_n x_m - S_n x_k\|_E \le \|x_m - x_k\|_B < \frac{\varepsilon}{3}$$

Alors, $\|S_n x - S_n x_k\|_E = \lim_{m\to\infty} \|S_n x_m - S_n x_k\|_E \le \frac{\varepsilon}{3}$ pour $k \ge N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fixons $k \geq N$. Comme la limite $\lim_{n\to\infty} S_n x_k$ converge dans E, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \geq N$, tel que $\|S_m x_k - S_n x_k\|_E < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $m, n \geq N_0$. D'où,

$$\begin{aligned} \|S_m x - S_n x\|_E &\leq \|S_m x - S_m x_k\|_E + \|S_m x_k - S_n x_k\|_E + \|S_n x_k - S_n x\|_E \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

quelque soit $m, n \geq N_0$.

Ainsi $(S_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Alors, $\sum_{i=0}^{\infty} B_i x = \lim_{n\to\infty} S_n x$ existe dans E. D'où, $x \in D(B)$.

Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, k \geq k_0$,

$$\|x_m - x_k\|_L \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n x_m - S_n x_k\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \varepsilon > 0 \tag{26}$$

D'où, pour tout $m, k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \|x_m - x\|_B &= \|x_m - x\|_L + \sup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \lim\nolimits_{k\to\infty} \|S_n x_m - S_n x_k\|_E \\ &\leq \|x_m - x\|_L + \|x_m - x_k\|_B \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{27}$$

Donc F est un espace de Banach et $F \hookrightarrow E$. D'autre part, $F \hookrightarrow (D(S_N), \|.\|_{S_N})$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. On a aussi, $Ax = \lim_{N\to\infty} S_N x$ et

$$D(B) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(S_n) \right) \cap L :\ \lim_{N\to\infty} S_N x \text{ existe dans } E \right\} \tag{28}$$

Ainsi, en vertu du théorème 3.7, on conclu que B est bien une extension preque fermée de A. ■

Théorème 3.9 *Soit J un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ et $A_t \in ACl(E)$ d'extension $B_t \in AC(E)$ et d'espace de Banach auxiliaire associé $E_t = (D(B_t), \|.\|_{B_t})$ pour tout $t \in J$.*

Soit $Ax = \int\limits_J A_t x \; dt$ de domaine:

$$D(A) = \left\{ x \in \left(\bigcap_{t \in J} D(A_t) \right) \cap L \; : \; A_t x \in L^1(J, E) \right\} \tag{29}$$

où L est un espace de Banach tel que $L \hookrightarrow E_t$ pour tout $t \in J$.

Alors, $A \in ACl(E)$ d'extension presque fermée $Bx = \int\limits_J B_t x dt$ definie sur E et de domaine:

$$E_B = \left\{ x \in \left(\bigcap_{t \in J} D(B_t) \right) \cap L \; : \; B_t x \in L^1(J, E) \right\} \tag{30}$$

équipé de la norme $\|x\|_{E_B} = \|x\|_L + \int\limits_J \|B_t x\|_E \; dt$.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E_B. Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_t x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement des suites de Cauchy dans E et $L^1(J, E)$. Donc $x_n \to x$ dans L et il existe une fonction $y_t \in L^1(J, E)$ telle que $B_t x_n \to y_t$ dans $L^1(J, E)$. Ainsi, puisque $\|B_t x_n - y_t\|_E \to 0$ dans $L^1(J, \mathbb{R})$, on peut en extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $\|B_t x_{n_k} - y_t\|_E \to 0$ simplement et presque partout dans $L^1(J, \mathbb{R})$, ou bien, $(B_t x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et presque partout vers y_t dans E. Comme B_t est borné de E_t dans E alors $x \in D(B_t)$ et $B_t x = y_t$ presque partout sur J. En conséquence, $B_t x \in L^1(J, E)$ et $x \in E_B$. De plus,

$$\|x_n - x\|_{E_B} = \|x_n - x\|_L + \int\limits_J \|B_t x_n - y_t\|_E \, dt \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Donc E_B est bien un espace de Banach et $E_B \hookrightarrow E$. Comme

$$\begin{aligned} \|Bx - Bx_n\|_E &= \left\| \int_J (B_t x - B_t x_n) dt \right\|_E \\ &\leq \int_J \|B_t x - B_t x_n\|_E \, dt \leq \|x - x_n\|_{E_B} \end{aligned} \tag{31}$$

alors B est une extension bornée de l'opérateur A de E_B dans E. ■

Chapitre IV

Topologie sur l'espace des opérateurs presque fermables

4 Topologie sur l'espace des opérateurs presque fermables

On définit dans ce chapitre une topologie localement convexe dans la classe $ACl(E)$ des opérateurs linéaires presque fermables sur E et on étudie la relation de finesse entre cette topologie, la topologie de la métrique du gap g et la topologie induite par la convergence quotient sur l'espace $C(H)$.

4.1 Topologie d'ELC sur l'espace des opérateurs presque fermables

On utilise ici les constructions de Caradus entamées dans le cas des opérateurs presque fermés [5]. Soit $A \in ACl(E)$ d'extension B presque fermée sur l'espace de Banach auxiliaire E_B, on note par α la décomposition canonique $A = A_0C$ de A sur $D(A)$ obtenue dans la propriété (4) du théorème 3.3. On utilise la notation $A = A_0C[E_B]$ pour représenter cette décomposition. Il est clair que étant donné $A \in ACl(E)$, l'espace E_B est unique modulo un ismorphisme. Pour $\varepsilon > 0$, on définit un ε-voisinage d'opérateur presque fermable $A = A_0C[E_B]$ par:

$$\begin{aligned} V(A;\alpha,\varepsilon) &= \{S \in ACl(E) : D(S) = D(A),\ S \text{ admet une décomposition} \\ \text{canonique } S &= \widetilde{A_0}C[E_B] \text{ tel que } \left\| A_0 - \widetilde{A_0} \right\|_{B(E_B,E)} < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{32}$$

La famille $\{V(A;\alpha,\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ forme une base de voisinages de $ACl(E)$ puisque $\bigcup \{V(A;\alpha,\varepsilon) : A \in ACl(E),\ \varepsilon > 0\} = ACl(E)$. La topologie τ_α générée par la base $\{V(A;\alpha,\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ est l'ensemble de toutes les unions d'intersections finies d'éléments de $\{V(A;\alpha,\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$, c'est-à-dire τ_α est la plus petite topologie sur $ACl(E)$ pour laquelle les éléments $V(A;\alpha,\varepsilon)$ sont des ensembles ouverts.

Cette définition de ε-voisinages n'est pas restrictive sachant que dans la littérature mathématique il existe plusieurs travaux intéressants qui portent sur certaines catégories d'opérateurs non bornés tous considérés définits sur un même domaine, on peut consulter pour cela par exemple les travaux récents de Polakovic et Riečanová [30].

Remarque 4.1 *Si* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont deux normes sur le domaine* $D(B)$, *de l'extension presque fermée* B *de* $A \in ACl(E)$, *rendant* $D(B)$ *complet alors* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes, donc si on prend une autre représentation* β *au lieu de* α *les topologies* τ_α *et* τ_β *coïncident sur* $ACl(E)$. *Pour cette raison, on notera dorénavant* τ_α *par* τ.

Si $T \in B(E)$, *alors la représentation* α *de* T *est trivialement donnée par* $T = TI[E]$, *il en résulte alors que* τ *coïncide avec la topologie de convergence uniforme sur* $B(E)$.

τ *coïncide sur* $AC(E)$ *et sur l'ensemble* $C(E)$, *des opérateurs fermés densément définis sur* E, *avec la topologie construite par Caradus dans* [5] *sur l'espace des opérateurs presque fermés sur* E.

La topologie τ possède les propriétés fondamentales suivantes dans $ACl(E)$.

Théorème 4.2 τ *est une topologie de Hausdorff localement convexe sur* $ACl(E)$.

Preuve. On montre d'abord que chaque voisinage $V(A;\alpha,\varepsilon)$ est convexe dans $ACl(E)$. Soient $A^{(1)}, A^{(2)} \in V(A;\alpha,\varepsilon)$ où $A = A_0C[E_B]$.

Alors, $A^{(1)} = A_0^{(1)}C[E_B]$ et $A^{(2)} = A_0^{(2)}C[E_B]$ avec

$$\left\|A_0 - A_0^{(1)}\right\|_{B(E_B,E)} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|A_0 - A_0^{(2)}\right\|_{B(E_B,E)} < \varepsilon$$

Puisque $\lambda A^{(1)} + (1-\lambda)A^{(2)} = (\lambda A_0^{(1)} + (1-\lambda)A_0^{(2)})C[E_B]$, on a pour $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned} & \left\|A_0 - (\lambda A_0^{(1)} + (1-\lambda)A_0^{(2)})\right\|_{B(E_B,E)} \\ = & \left\|\lambda(A_0 - A_0^{(1)}) + (1-\lambda)(A_0 - A_0^{(2)})\right\|_{B(E_B,E)} \\ \leq & \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned} \tag{33}$$

Donc, $\lambda A^{(1)} + (1-\lambda)A^{(2)} \in V(A;\alpha,\varepsilon)$.

D'autre part, pour établir la séparabilité de Hausdorff de τ considérons $A^{(1)}, A^{(2)} \in ACl(E)$ tels que $A^{(1)} \neq A^{(2)}$.

Si $D(A^{(1)}) \neq D(A^{(2)})$ alors $V(A^{(1)};\alpha,\varepsilon) \cap V(A^{(2)};\alpha,\varepsilon) = \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Si $D(A^{(1)}) = D(A^{(2)})$, en vertu de la remarque précédente, on peut considérer $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ avec la même représentation α et le même espace auxiliaire E_B, $A^{(1)} = A_0^{(1)}C_1[E_B]$ et $A^{(2)} = A_0^{(2)}C_2[E_B]$. Supposons que $S \in V(A^{(1)};\alpha,\varepsilon) \cap V(A^{(2)};\alpha,\varepsilon)$.

Alors, $D(S) = D(A^{(1)}) = D(A^{(2)})$, $S = S_1C_1[E_B] = S_2C_2[E_B]$, et

$$\left\| S_1 - A_0^{(1)} \right\|_{B(E_B,E)} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\| S_2 - A_0^{(2)} \right\|_{B(E_B,E)} < \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $x \in D(A^{(1)}) = D(A^{(2)})$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| A^{(1)}x - A^{(2)}x \right\|_E &\leq \left\| A_0^{(1)}C_1x - S_1C_1x \right\|_E + \left\| A_0^{(2)}C_2x - S_2C_2x \right\|_E \\ &< \varepsilon(\|C_1x\|_{E_B} + \|C_2x\|_{E_B}) \end{aligned} \tag{34}$$

Alors, $A^{(1)} = A^{(2)}$ ce qui contredit notre hypothèse.

En conséquence,$V(A^{(1)};\alpha,\varepsilon) \cap V(A^{(2)};\alpha,\varepsilon) = \emptyset$. ■

Théorème 4.3 *Les applications* $s : (A^{(1)}, A^{(2)}) \to A^{(1)} + A^{(2)}$ *et* $p : (A^{(1)}, A^{(2)}) \to A^{(1)}A^{(2)}$ *sont continues sur* $(ACl(E), \tau)$.

Preuve. Soit $A^{(1)}, A^{(2)} \in ACl(E)$. $A^{(1)} = A_0^{(1)}C_1[E_{B_1}]$ et $A^{(2)} = A_0^{(2)}C_2[E_{B_2}]$ sont respectivement les decompostions canoniques α_1 et α_2 de $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$.

De la définition du ε-voisinage, on a:

$$V(A^{(1)};\alpha_1,\varepsilon_1) + V(A^{(2)};\alpha_2,\varepsilon_2) \subseteq V(A^{(1)} + A^{(2)};\alpha_1+\alpha_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2) \tag{35}$$

$$V(A^{(1)};\alpha_1,\varepsilon_1)V(A^{(2)};\alpha_2,\varepsilon_2) \subseteq V(A^{(1)}A^{(2)};\alpha_1\alpha_2,\varepsilon) \tag{36}$$

où $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \left\| A_0^{(2)} \right\|_{B(E_{B_2},E)} + \varepsilon_2 \left\| A_0^{(1)} \right\|_{B(E_{B_1},E)}$.

$\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$ sont obtenus à partir de α_1 et α_2 par les constructions (4) du théorème 3.3. Il en résulté donc de (34) et (35) la continuité de s et p. ■

4.2 Raffinement du complété de $C(H)$

On sait d'après [29] que $C(H)$ muni de la métrique du gap g n'est pas complet, le complété de $C(H)$ est un sous-ensembe de $LR(H)$ des relations linéaires fermées de $H\oplus H$, c'est à dire de l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels fermés de $H \oplus H$ de dimension et codimension infinies. Ainsi pour raffiner la complétion de $C(H)$ à partir de g, on construit dans ce qui suit quelques métriques strictement plus fortes que g.

Pour terminer cette section, on examine en particulier la structure topologique induite sur l'espace $C(H)$ par celle de $ACl(H)$. La topologie induite par τ sur $AC(H)$ coincide avec celle construite par Caradus sur $AC(H)$ et aussi sur $C(H)$. On rappel que si $A \in AC(H)$, alors A est représenté par un quotient B/A_+ d'opérateurs bornés sur H où A_+ est unique et positif sur H et $\|A\|_{B(H_A,H)} = \|B\|_{B(H)}$, H_A est l'espace auxiliaire de A.

Considérons α la correspondance entre un opérateur presque fermé A et l'opérateur borné positif A_+ associé à A. Un tel opérateur $A \in AC(H)$ est uniquement représenté à l'aide de la correspondance α par un quotient B/A_+, de sorte que l'on note $A \overset{\alpha}{=} B/A_+$.

Hirasawa [13], [14], défini d'une manière équivalente un ε-voisinage d'un opérateur presque fermé $A \overset{\alpha}{=} B/A_+$ sur H par:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(A,\alpha,\varepsilon) &= \{T \in AC(H) \ ; \ T \overset{\alpha}{=} C/A_+ \ , \ \|B-C\|_{B(H)} < \varepsilon\} \\ &= \{T \in AC(H) \ ; \ D(A) = D(T) \ , \ \|A-T\|_{B(H_A,H)} < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{37}$$

cela induit une topologie de Hausdorff localement convexe dans l'ensemble $AC(H)$ qui est indépendante de la correspondance α. En effet, $AC(H)$ devient métrisable par l'intermédiaire de la métrique

$$\rho(A,T) = \begin{cases} 1 \ \text{si} \ D(A) \neq D(T) \\ \frac{\|A-T\|_{B(H_A,H)}}{1+\|A-T\|_{B(H_A,H)}} \ \text{si} \ D(A) = D(T) \end{cases} \tag{38}$$

En particulier, une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A dans $AC(H)$ pour la métrique ρ si et seulement si le domaine $D(A_n)$ de A_n coincide avec le domaine $D(A)$ de A pour n assez grand et $\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\|_{B(H_A,H)} = 0$, où H_A est l'espace de Hilbert auxiliaire de A.

Théorème 4.4 *([13], [14]) La topologie induite par la métrique ρ sur $C(H)$ est plus forte que celle induite par la métrique g, autrement dit, si $\rho(A_n, A) \to 0$ alors $g(A_n, A) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour $A_n, A \in C(H)$.*

$B(H)$ est une composante connexe de $AC(H)$ et $C(H)$ est ouvert dans $AC(H)$.

Soit $A \in C(H)$, alors on peut écrire $A = \Gamma(B) = B/(I - B^*B)^{1/2} = B(I - B^*B)^{-1/2}$ avec une contraction positive unique $B \in C_0(H) = \{S \in B(H) : \|S\|_{B(H)} \leq 1$ et $N(I - B^*B) = \{0\}\}$ où Γ est une application inversible de $C_0(H)$ sur $C(H)$, l'application inverse de Γ est donnée par $\Gamma^{-1}(A) = A(I + A^*A)^{-1/2}$ (voir [18], [17]).

La convergence associée à cette représentation est appelée convergence quotient et est définie comme suit : $A_n = B_n/(I - B_n^*B_n)^{1/2}$ converge vers $A = B/(I - B^*B)^{1/2}$ si et seulement si B_n converge vers B dans $B(H)$ où $B_n, B \in C_0(H)$.

Proposition 4.5 *La projection orthogonale $P_{G(A)} : H \oplus H \to H \oplus H$ sur le graphe $G(A)$ de l'opérateur $A = B/(I - B^*B)^{1/2}$ peut être décrite par la matrice suivante (voir lemme 3.9, [13]):*

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} (I - B^*B) & (I - B^*B)^{1/2}B^* \\ B(I - BB^*)^{1/2} & BB^* \end{pmatrix} \tag{39}$$

Par conséquent, si B_n converge vers B dans $B(H)$, alors on a $(I - B_n^*B_n)^{1/2}B_n^* \longrightarrow (B(I - BB^*)^{1/2})^* = (I - B^*B)^{1/2}B^*$ ce qui assure la convergence $P_{G(A_n)} \longrightarrow P_{G(A)}$ lorsque $n \to \infty$, ou bien $\lim_{n \to +\infty} g(A, A_n) = 0$.

D'autre part, rappelons que si $A \in C(H)$ alors $R_A = (1 + A^*A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné positif et auto-adjoint sur H, $AR_Ax = R_{A^*}Ax$ sur $D(A)$, $\|R_A\|_{B(H)} \leq 1$ et $\|AR_A\|_{B(H)} \leq 1$.

$P_{G(A)}$ peut-être aussi représenté par la matrice suivante (Proposition 1.3, [21]):

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix} \tag{40}$$

Ainsi, vérifions que la topologie de la convergence quotient est en fait strictement plus forte que la topologie induite par la métrique g sur $C(H)$ ou bien montrons qu'il existe une suite d'opérateurs A_n de $C(H)$ telle que $g(A_n, A) \to 0$ quand $n \to \infty$ avec $A \in C(H)$ mais A_n ne converge pas en quotient vers A.

Considérons pour cela sur l'espace l^2, des suites complexes à carrés sommables, les opérateurs suivants:

$$[A_n(x)]_k = \begin{cases} kx_k & \text{si } \; k < n \\ -kx_k & \text{si } \; k \geq n \end{cases} \tag{41}$$

et

$$[A(x)]_k = kx_k \quad , \quad k \in \mathbb{N} \tag{42}$$

sur le domaine naturel $D(A) = D(A_n) = \left\{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2 : \sum_{n=0}^{\infty} k^2 \left| x_k \right|^2 < +\infty \right\}$.
Alors, $A, A_n \in C(l^2)$, $A^* = A$, $A_n^* = A_n$ et $[R_A(x)]_k = [R_{A^*}(x)]_k = [R_{A_n}(x)]_k = [R_{A_n^*}(x)]_k = \frac{x_k}{1+k^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$[A_n R_{A_n}(x)]_k = [A_n^* R_{A_n^*}(x)]_k = \begin{cases} \frac{k}{1+k^2} x_k & \text{si } \; k < n \\ \frac{-k}{1+k^2} x_k & \text{si } k \geq n \end{cases} \tag{43}$$

A l'aide de l'expression de $P_{G(A)}$, on voit que

$$\begin{aligned} g(A, A_n) &= \|AR_A - A_n R_{A_n}\|_{B(H)} \\ &\leq \frac{2n}{1+n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(A_n)_n$ converge vers 0 pour g mais n'a pas la même limite par la convergence quotient. En effet, $A_n = \Gamma(B_n)$ et $A = \Gamma(B)$ où $B_n = \Gamma^{-1}(A_n) = A_n(1 + A_n^* A_n)^{-1/2}$ et $B = \Gamma^{-1}(A) = A(1 + A^* A)^{-1/2}$ sont les contractions correspondantes respectivement à A_n et A. Notons que, $\|B_n\|_{B(H)} \leq 1$, $\|B\|_{B(H)} \leq 1$, $N(I - B_n^* B_n) = N(R_{A_n}) = \{0\}$ et $N(I - B^* B) = N(R_A) = \{0\}$. Ainsi, $B, B_n \in C_0(l^2)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$[B_n(x)]_k = [B_n^*(x)]_k = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} x_k & \text{si } \ k < n \\ -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} x_k & \text{si } \ k \geq n \end{cases} \tag{44}$$

et

$$[B(x)]_k = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} x_k \ , \ k \in \mathbb{N} \tag{45}$$

Comme

$$\begin{aligned} \|B_n - B\|_{B(H)} &= \left\| A_n(1 + A_n^* A_n)^{-1/2} - A(1 + A^* A)^{-1/2} \right\|_{B(H)} \\ &\geq \frac{2n}{\sqrt{1+n^2}} \longrightarrow 2 \end{aligned}$$

alors $(A_n)_n$ ne converge pas vers la même limite pour la convergence quotient.

On vient donc d'établir le résultat fondamental suivant:

Théorème 4.6 *La topologie induite sur $C(H)$ par la convergence quotient est strictement plus fort que la topolgie induite par la métrique du gap g.*

Remarque 4.7 *Il devient intéressant de comparer le complété de $C(H)$ par la métrique ρ avec $AC(H)$ et $ACl(H)$. En d'autres termes, est-il possible de déterminer une métrique d sur $C(H)$ telle que le complété de $C(H)$ pour d coïncide avec $AC(H)$ ou bien $ACl(H)$?.*

Chapitre V

Application aux problèmes de Cauchy abstraits

5 Application aux problèmes de Cauchy abstraits

5.1 Problème de Cauchy abstrait

De nombreux modèles mathématiques principalement en physique, ingénierie, finance, biologie, etc, sont étudiés dans des espaces de Banach ou Hilbertiens à l'aide de problèmes de Cauchy abstraits:

$$u'(t) = Au(t),\ t \geq 0,\ u(0) = x \tag{46}$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ et à valeurs dans E un espace de Banach.

Une fonction $u : [0, +\infty[\longrightarrow E$ est dite une solution (ou bien solution classique) du problème (46) si $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, u est différentiable par rapport à la variable temporelle t et les égalités dans (46) sont conservées.

Le problème (46) est dit bien posé si pour tout $x \in D(A)$ il existe une unique solution $u(., x)$ de (46) dépendant continûment des données intiales :

$$\exists C > 0 \quad ; \quad \sup_{t \in [0,1]} \|u(t, x)\|_E \leq C \|x\|_E \tag{47}$$

Il est bien connu qu'il existe une relation étroite et intéressante entre les C_0-semi-groupes d'opérateurs (semi-groupes fortement continus) et le problème (46). En effet, si A est fermé, l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapports aux données initiales du problème (46) ont été largement étudiées par plusieurs auteurs, citons par exemple les travaux de Melnikova et Filinikov [23] et Jara et al. [15]. L'idée pour résoudre le problème de Cauchy abstrait (46) est d'appliquer la transformée de Laplace à l'équation $u'(t) = Au(t)$ ce qui conduit à une équation où la fonction inconnue pourra être calculée. L'approche des semi-groupes est souvent utilisée lorsque l'opérateur A possède suffisamment de propriétés spectrales acceptables. Cette approche permet d'obtenir des solutions de (46) dans l'espace presque fermé $E_A = (D(A), \|x\|_A = \|x\|_E + \|Ax\|_E)$, ces solutions sont stables par rapport à des perturbations de la condition initiale en norme de E_A. Si A ne génère pas un semi-groupe fortement continu, par exemple lorsque A n'a pas de résolvante ou la résolvante de A ne satisfait pas une estimation adéquate, on utilise la méthode d'approximation des solutions par les opérateurs de régularisation ainsi que la méthode de la construction de solutions généralisées.

Si on traite le problème (46) lorsque l'opérateur A est une somme, produit ou limite d'opérateurs fermable sur E, A est alors presque fermables sur E, ayant ainsi une extension B bornée sur un espace de Banach auxiliaire approprié $E_B = (D(B), \|x\|_B)$ où $D(A) \subseteq E_B \hookrightarrow E$.

Considérons dans ce qui suit le problème $(46)_B$, où $A \in ACl(E)$ est remplacé dans (46) par son extension B bornée sur E_B et la donnée initiale $x \in E_B$.

Théorème 5.1 *([8], [23]) Si E_B est dense dans E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) Le problème $(46)_B$ est bien posé.

2) Il existe un C_0-semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $x \in E_B$ la fonction $u(t,x) = S_t x$ est une solution de $(46)_B$.

3) Il existe un C_0-semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que pour la fonction $u(t,x) = S_t x$ on a:

$$D(B) = \{x \in E \,:\, u(.,x) \,:\, [0,+\infty[\longrightarrow E_B \textit{ est différentiable } \} \tag{48}$$

et $u'(.,x)(0) = Bx$ pour tout $x \in D(B)$.

Ces résultats montrent qu'il est d'un grand intérêt de savoir si un opérateur génère ou non un C_0-semi-groupe. Si c'est le cas, le problème de Cauchy abstrait associé est bien posé, en particulier il existe une unique solution du problème, cette solution est exprimée en termes du C_0-semi-groupe associé. Même si nous ne pouvons obtenir une expression explicite de S_t (et donc de la solution), la théorie des semi-groupes nous aide à obtenir des informations utiles sur le comportement qualitatif des solutions, par exemple, la régularité et le comportement asymptotique uniquement à partir de la connaissance du générateur du semi-groupe.

Rappelons maintenant quelques résultats de base sur les C_0-semi-groupes, les détails et les preuves peuvent être trouvées dans [8], [12] et [23]. Commençons d'abord par un résultat qui est en quelque sorte une généralisation au cas des espaces de Banach du théorème fondamental classique du calcul intégral, où l'intégrale de Riemann d'une fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est remplacée par l'intégrale de Bochner de $f : [a,b] \longrightarrow E_B$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i,n})(x_{i+1,n} - x_{i,n}) \\ x_{i,n} &= a + i\frac{(b-a)}{n} \end{aligned} \tag{49}$$

De la définition, découle immédiatement que

$$B\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Bf(t)dt \tag{50}$$

D'autre part, si $(S_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de générateur B et $x \in E_B$ alors:

$$S_t x \in E_B, \;\; BS_t x = S_t B x = \lim_{h\to 0} \frac{S_{t+h}x - S_t x}{h}$$

et pour tout $t, r \geq 0$,

$$S_t x - S_r x = \int_r^t S_\rho B x d\rho = \int_r^t BS_\rho x d\rho = B\int_r^t S_\rho x d\rho$$

Le deuxième résultat important qu'on rappelle ici est l'estimation exponentielle d'un C_0-semi-groupe dans la mesure où il existe des constantes $M > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \geq 0$, on ait:

$$\|S_t\|_{B(E_B,E)} \leq Me^{\omega t} \tag{51}$$

La borne inférieure de tous les nombres $\omega \in \mathbb{R}$ tels que (51) est satisfaite pour $M > 0$ est appelée la borne de croissance du semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$. Si la borne de croissance de $(S_t)_{t\geq 0}$ est négative, i.e. s'il existe $\omega < 0$ tel que (51) est satisfaite, le semi-groupe est appelé dans ce cas exponentiellement stable. Si $\omega = 0$ dans (51), le semi-groupe est dit borné. Finalement, si l'on prend $M = 1$ et $\omega = 0$ dans (51), le semi-groupe est appelé un semi-groupe de contraction.

En outre, pour tous les $z \in \mathbb{C}$, tels que $\operatorname{Re} z > \omega$, l'opérateur résolvant $R_B(z) = (z - B)^{-1}$ de B existe et on a:

$$R_B(z)x = \int_0^{+\infty} e^{-zt} S_t x dt, x \in E_B$$

La condition de Miyadera-Feller-Phillips-Hille-Yosida sur la résolvante de B sur E_B est exprimée par:

$$\left\| \frac{d^k R_B}{dz^k}(z) \right\|_{B(E,E_B)} \leq \frac{Mk!}{(\operatorname{Re} z - \omega)^{k+1}}\ ,\ k = 0, 1, ... \tag{52}$$

Remarque 5.2 *Comme $D(A) \subseteq E_B \hookrightarrow E$, alors toute solution $u \in C^1([0,T]; E) \cap C([0,T]; E_B)$ du problème $(46)_B$ est aussi une solution de (46) si $x \in E$. Une solution du problème $(46)_B$ est une fonction $u \in C([0,T]; E)$ satisfaisant $\int_0^t u(s)ds \in E_B$ et $u(t) = B \int_0^t u(s)ds + x$ pour tout $t \in [0,T]$.*

Si $u(.) : [0, +\infty[\longrightarrow E_B$ et $Au(.) : [0, +\infty[\longrightarrow E$ sont Bochner intégrables au sens généralisé, alors $\int_0^{+\infty} u(t)dt \in D(A)$ et $\int_0^{+\infty} Au(t)dt = A \int_0^{+\infty} u(t)dt$.

En intégrant (46) par rapport à la variable t à partir de 0, on obtient $u(t) = Av(t) + x$ où $v(t) = \int\limits_0^t u(s)ds$. En intégrant une fois de plus, on a $v(t) = A\int\limits_0^t v(s)ds + tx$. En répétant ce processus $(n+1)$-fois, on obtient le problème de Cauchy suivant:

$$v(t) = A\int\limits_0^t v(s)ds + \frac{t^n}{n!}x \tag{46(n)}$$

Toute fonction $v(.) \in C([0,T]; E_B)$ satisfaisant $(46n)$ pour tout $t \geq 0$ est appelée une solution intégrale de (46). Il est clair que, si u vérifie le problème (46), alors $v(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)ds$ est solution de $(46(n))$. Aussi, si $v(.)$ est solution de $(46(n))$ et est $(n+1)$-fois continûment différentiable, alors $u(.) = \frac{d^n}{dt^n}v(.)$ est solution de (46). Pour $v(.) \in L^1_{loc}([0, +\infty[; E)$ on note $abs_E(v)$ la borne inférieure de tous les nombres a pour lesquels la transformée de Laplace de v :

$$\widehat{v}(z) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-zt}v(t)dt \tag{53}$$

existe pour $\operatorname{Re} z > a$. Si $\omega \geq 0$, alors $abs_E(v) \leq \omega$ si et seulement si $\omega_E(\int\limits_0^t v(s)ds) \leq \omega$, où la borne de croissance exponentielle $\omega_E(\int\limits_0^t v(s)ds)$ est définie comme étant la borne inférieure des nombres $\omega' \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe un constante M telle que $\left\| \int\limits_0^t v(s)ds \right\|_E \leq Me^{\omega' t}$ pour tout $t \geq 0$.

Théorème 5.3 *([2], [4])*

Soit $A \in ACl(E)$ *d'extension* B *bornée sur l'espace de Banach* $E_B = (D(B), \|x\|_B)$ *où* $D(A) \subseteq E_B \hookrightarrow E$, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\omega \geq 0$. *Soit* $v(.) \in L^1_{loc}([0, +\infty[; E)$ *avec* $\int\limits_0^t v(s)ds \in L^1_{loc}([0, +\infty[; E_B)$, $abs_E(v) \leq \omega$ *et* $abs_{E_B}(\int\limits_0^t v(s)ds) \leq \omega$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) $\int\limits_0^t v(s)ds \in D(A)$ *et* $v(t) = A\int\limits_0^t v(s)ds + \frac{t^n}{n!}x$ *pour tout* $t \geq 0$.

2) $\widehat{v}(z) \in D(A)$ *et* $z^n(zI - A)\widehat{v}(z) = x$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re} z > \omega$.

5.2 Equation de Contrôle par Feedback

On reprend ici un exemple d'équation d'évolution avec un opérateur non fermable traité par Baumer et Neubrander dans [4] où ils ont examiné le problème de Cauchy abstrait suivant:

$$u'(t) = Au(t),\, u(0) = x \in E$$

où $E = C_0([0, +\infty[)$ (espace des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ ayant une limite égale à 0 à l'infini),

$$\begin{aligned} Ax &= A_0x + B_0x \\ A_0x(r) &= r\frac{dx}{dr}(r) = rx'(r) \end{aligned}$$

de domaine

$$D(A_0) = \left\{ x \in E \cap C^1(]0, +\infty[) \text{ tel que } \lim_{r \to \infty} rx'(r) = 0 \text{ et } \lim_{r \to 0} rx'(r) \text{ existe} \right\} \tag{54}$$

et

$$B_0x = x'(0)c(r)$$

$c(r)$ est un élément quelconque de E.

L' opérateur A_0 génére sur l'espace de Banach E le semi-groupe fortement continu $S_tx(r) = x(re^t)$, $t \geq 0$, $S_tx(0) = x(0)$, $\|S_tx\|_E = \|x\|_E$ et $S_tx(r) \to 0$ quand $t \to +\infty$ pour tout $r > 0$.

Soit $x_n = -\frac{e^{-nr}}{n}$ une suite d'éléments dans E, alors $x_n \to 0$ et $Ax_n \to c$ dans E lorsque n tend vers l'infini, donc l'opérateur A ne sera pas fermé dans E dès que la fonction $c \neq 0$. Cependant, pour tout $c \in E$, $A \in ACl(E)$ où on associe à A l'extension B de domaine $D(B)$ le complété de $D(A_0) \cap D(B_0)$ par rapport à la norme du graphe $\|x\|_B = \|x\|_E + \|A_0 x\|_E + \|B_0 x\|_E$.

Si x et c sont différentiables sur $[0, +\infty[$, Baumer et Neubrander ont montré dans [4] que l'équation de la résolvante $(zI - A)y(z) = x$ admet une solution unique

$$y(z) = R(z, A_0)x + \frac{x'(0)}{z - 1 - c'(0)} R(z, A_0)c \tag{55}$$

$1 + c'(0) \neq z$, $\operatorname{Re} z > 1$ et $y(z) = \widehat{v}(z)$ pour tout $z > \omega = \max\{1, \operatorname{Re}(1 + c'(0))\}$ où

$$v(t) = S_t x + x'(0) \int_0^t e^{(1+c'(0))(t-s)} S_s c ds \tag{56}$$

Il est claire que $v \in L^1_{loc}([0, +\infty[; D(B))$ et $abs_E(v) \leq \omega$. D'autre part, il en découle d'après (56) que $\int_0^t v(s)ds \in L^1_{loc}([0, +\infty[; E_B)$ et $abs_{E_B}(\int_0^t v(s)ds) \leq \omega$. Ainsi, en vertu du théorème 5.3, la fonction v définie dans (56) est l'unique solution de (46(1)) pour tout $x, c \in E$ différentiables en 0. Puisque $v(t)$ et $\int_0^t v(s)ds$ sont différentiables dans E_B, il s'ensuit que $v_{|D(A)}$ est une solution du problème $v'(t) = Av(t)$, $v(0) = x$.

Perspectives du travail

- Les exemples explicites établis dans la thèse peuvent jouer un rôle important dans certaines applications pédagogiques et de recherche. D'autres exemples et contre exemples doivent être explicitement construits.

- Une autre direction est possible en généralisant les résultats obtenus par passage aux quotients des opérateurs non bornés.

- On peut aussi regarder le lien entre la presque fermabilité des opérateurs linéaires non bornés et la factorisation des opérateurs.

- Il sera aussi très intéressant de trouver une métrique d **sur** $ACl(H)$ **plus forte que** g, **telle que le complété de** $C(H)$ **pour cette nouvelle métrique coincide avec l'espace des opérateurs linéaires presque fermables sur** H.

References

[1] S. Agmon, L. Nirenberg, Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 121-239.

[2] W. Arendt, Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, Israel J. Math. 59 (1987), 327-352.

[3] A. Azzouz, B. Messirdi, G. Djellouli, New results on the closedness of the product and sum of closed linear operators, Bull. Math. Anal. Appl., Vol.3, 2 (2011), 151-158.

[4] B. Baumer, F. Neubrander, Laplace transform methods for evolution equations, Conferenze del Seminario di Matematica dell' Universita di Bari 259 (1995), 27-60.

[5] S. R. Caradus, Semiclosed operators, Pacific J. Math., Vol. 44, 1 (1973), 75-79.

[6] J. Dixmier, L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 4ème série, 11 (1974), 101-106.

[7] J. Dixmier, Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications, Bulletin de la S.M.F., Tome 77 (1949), 11-101.

[8] R. Engel, K.J. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations, Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 2000.

[9] M. Fernandez Miranda, J. Ph. Labrousse, On the closure of the product and sum of linear relations, Complex Anal. Oper. Theory, 2011, DOI : 10.1007/s11785-011-0166-x.

[10] P. A. Fillmore, J. P. Williams, On operator ranges, Adv. Math., 7 (1971), 254-281.

[11] C. Foias, Invariant semiclosed subspaces, Preprint, Institute of Mathematics, Bucarest, Romania, 1970.

[12] E. Hille, R.S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1957.

[13] G. Hirasawa, A topology for semiclosed operators in a Hilbert space, Acta Sci. Math. (Szeged), 73 (2007), 271-282.

[14] G. Hirasawa, A metric for unbounded linear operators in a Hilbert space, Integr. Equ. Oper. Theory, 70 (2010), 363-378.

[15] P. Jara, F. Neubrander, K. Özer, Rational inversion of the Laplace transform, Preprint 2012.

[16] R. V. Kadilon and J. R. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras (I), Acad. Press, 1983.

[17] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[18] W.E. Kaufman, Representing a closed operator as a quotients of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978), 531-534.

[19] W.E. Kaufman, Semiclosed operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 76 (1979), 67-73.

[20] J. Ph. Labrousse, Les opérateurs quasi Fredholm : Une généralisation des opérateurs semi Fredholm, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., Tomo XXIX (1980), 161-258.

[21] J. Ph. Labrousse, B. Mercier, Equivalences compactes entre deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert, Math. Nachr. 133 (1987), 91-105.

[22] J. S. Mac Nearney, Investigation concerning positive definite continued fractions, Duke Math. J. 26 (1959), 663-678.

[23] I. V. Melnikova, A. Filinikov, Abstract Cauchy problems : Three approaches, Chapman and Hall/CRC Monographs ans Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca, Raton, London, New York, Washington, D.C., 2001.

[24] B. Messirdi, M.H. Mortad, A. Azzouz, G. Djellouli, A Topological Characterization of the Product of Two Closed Operators, Colloq. Math., 112/2 (2008), 269-278.

[25] B. Messirdi, M.H. Mortad, On Different Products of Closed Operators, Banach J. Math. Anal. 2/1 (2008), 40-47.

[26] S. Messirdi, M. Djaa, B. Messirdi, Stability of Almost Closed Operators on a Hilbert Space, Sarajevo J. Math., Vol. 5/17 (2009), 133-141.

[27] S. Messirdi, B. Messirdi, M. Messirdi, On Different Concepts of Closedness of Linear Operators, Operators and Matrices, 8 (2014), 139-156.

[28] B. Messirdi, S. Messirdi, M. Messirdi, Drazin Invertibility of Sum and Product of Closed Linear Operators, Malaya Journal of Matematik, 2 (4) (2014), 472–481.

[29] Y. Mezroui, Le complété des opérateurs fermés à domaine dense pour la métrique du gap, J. Operator Theory, 41 (1999), 69-92.

[30] M. Polakovic, Z. Riecanova, Generalized effects algebras of positive operators densely defined on Hilbert spaces, Int. J. Theor. Phys. 50 (2011), 1167-1174.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéressé aux différents concepts de fermabilité des opérateurs linéaires. On introduit une notion nouvelle d'opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert et les espaces de Banach, appelés opérateurs presque fermables obtenus par des extensions presque fermées. Cette classe est stable par l'addition, la composition, l'inversion, la restriction, les limites et les intégrales, sur laquelle on introduit une topologie de Hausdorff localement convexe strictement plus forte que celle induite par la métrique du gap. On montre aussi que les problèmes de Cauchy abstraits sont en particulier rigoureusement formulés dans la classe des opérateurs presque fermables.

Mots clés : Extensions presque fermées, Opérateurs presque fermables, Somme, Produit, Limites, Intégrales, Topologie de Hausdorff localement convexe, Problèmes de Cauchy abstraits pour des opérateurs presque fermables.

Abstract

In this thesis we focus on different concepts of closedness of linear operators. We introduce a new concept of linear operators on Hilbert spaces and Banach spaces, called almost closable operators, obtained by almost closed extensions. This class is is invariant under sums, products, inversion, restrictions, limits and integrals, on which we introduce a locally convex Hausdorff topology strictly stronger than that induced by the gap metric. It also shows that the abstract Cauchy problems are particularly rigorously formulated in the class of almost closable operators.

ملخص

في هذه الأطروحة نهتم بدراسة مختلف مفاهيم الغلق للمؤثرات الخطّية. نقوم بتقديم المفهوم الجديد للمؤثرات الخطية على فضاءات هلبرت و باناخ، الموسومة بالمؤثرات القابلة تقريبا للغلق و المحّصل عليها بتمديد المؤثرات المغلقة تقريبا. هذه الفئة صامدة في ظل الجمع، الجداء، الانعكاس، النهايات و التكامل، كما نعّرف عليها طوبولوجيا لهاوسدورف محدبة محّليا أقوى تماما من تلك الناجمة عن مسافة الفجوة. يظهر أيطا ان مشاكل كوشي التجريدية يتم صيغتها بذقة على فئة المؤثرات القابلة تقريبا للغلق.