

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

**MÉMOIRE DE MASTER**

Spécialité : Modélisation Mathématique des systèmes complexes

présenté par

DOUZI mohammed el amin

Soutenu le : 5 juin 2016

---

**Analyse de bifurcation de Hopf dans un modèle proie-prédateur avec retard**

---

Soutenu devant le jury composé de :

M. A. MOUSSAOUI.	Professeur, Université de Tlemcen.	Président
Mme. D. HADJ-SLIMANE.	Professeur, Université de Tlemcen.	Examinatrice
Mme. M.DALI-YOUCHEF.	Maître de Conférences, Université de Tlemcen.	Examinatrice
M. S.M.BOUGUIMA.	Professeur, Université de Tlemcen.	Encadreur

Année Universitaire : 2015-2016

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes parents, mes frères, mes soeurs et à tous ceux qui me sont chers.

mohammed el amin DOUZI

# Remerciements

Je remercie en priorité **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage, la force, et la volonté d'achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur Sidi Mohammed BOUGUIMA qui m'a encadré tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Ali MOUSSAOUI de l'Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance pour son aide et son soutien.

Mes plus vifs remerciements à Madame Djamila HADJ-SLIMANE, pour le temps qu'elle a consacré à examiner ce mémoire, et aussi d'avoir bien voulu faire partie du jury.

J'adresse toute ma gratitude à Madame Malika DALI-YOUCHEF de l'Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen qui m'a fait l'honneur de faire partie du jury.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

# Sommaire

<b>Table des figures</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Outils mathématique fondamentaux</b>	<b>11</b>
<b>2 Comportement asymptotique d'un modèle proie-prédateur avec retard</b>	<b>15</b>
2.1 Présentation du modèle . . . . .	15
2.2 Existence des points d'équilibre . . . . .	17
2.3 La bornitude et permanence de la solution . . . . .	18
2.4 Attractivité de $(1,0)$ . . . . .	29
2.5 Analyse de stabilité du point d'équilibre $E_1^*$ . . . . .	32
<b>3 Bifurcation de Hopf</b>	<b>35</b>
<b>Perspectives</b>	<b>46</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Table des figures

2.1	Attractivité de point $(0,0)$ pour $\alpha = 1.55, \beta = 0.566, \delta = 0.4, \mu = 0.05, \tau = 15$	28
2.2	Attractivité de point $(1,0)$ pour $\alpha = 0.95, \beta = 0.36, \delta = 0.4, \mu = 0.05, \tau = 15$	32
3.1	$\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.2, \mu = 0.6, \tau = 5$ . . . . .	40
3.2	$\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.2, \mu = 0.6, \tau = 19$ . . . . .	40
3.3	$E^*$ est un foyer stable ( $\tau < \tau_0$ ) $\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.4, \mu = 0.05, \tau = 5$	44
3.4	apparition d'un cycle limite ( $\tau > \tau_0$ ) $\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.4, \mu = 0.05,$ $\tau = 15$ . . . . .	45

# Introduction

Un modèle écologique est caractérisé par l'interaction de plusieurs individus et espèces au sein d'un environnement soumis à plusieurs paramètres. La modélisation mathématique a largement contribué à la compréhension des phénomènes écologiques, notamment l'interaction proie-predateurs. Un élément crucial dans cette modélisation est la fonction réponse qui a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. Cette section présente une revue des modèles les plus classiques. Dans le cas d'une population isolée,  $x(t)$  est la densité de cette population à un instant  $t$ . La forme générale de la loi de croissance de la population est la suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## Le Modèle de Malthus

En 1798, l'économiste britannique Thomas Malthus a proposé le premier modèle décrivant l'évolution d'une population dans le temps. Soit  $n$  le taux de natalité par unité de temps et par individu. Soit de même  $m$  le taux de mortalité. Les taux de natalité et de mortalité sont supposés être constants, ce qui conduit au modèle linéaire suivant :

$$x'(t) = nx - mx = rx$$

La solution de cette équation différentielle sera de la forme :

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

Le signe de  $r$  (taux de croissance) détermine si la population est en croissance ( $r > 0$ ) ou en extinction ( $r < 0$ ). Le cas  $r = 0$  correspond à une population dont la taille reste constante et égale à sa valeur initiale.

Dans un environnement où les ressources sont limitées le modèle de Malthus ne peut être appliqué .

### **Modèle de croissance logistique**

Ce modèle a été élaboré par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst en 1838. Il a supposé que le taux de natalité n'est pas constant mais diminue avec l'effectif. En effet, lorsque le nombre d'individus d'une population augmente, les ressources étant limitées, on peut penser que la natalité va diminuer. Dans le cas le plus simple on choisit pour le taux de natalité une fonction linéaire décroissante de l'effectif :

$$n(x) = \alpha - \beta x$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes positives. De la même manière, il est raisonnable de supposer que le taux de mortalité va, au contraire du taux de natalité, augmenter avec l'effectif, par exemple :

$$m(x) = \gamma + \delta x$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des constantes positives.

La substitution des taux de natalité et de mortalité dépendants de l'effectif dans l'équation précédente conduit à l'équation de croissance suivante :

$$x'(t) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

avec  $r = \alpha - \gamma$ , qui est le taux de croissance intrinsèque de la population. On suppose que  $\alpha > \gamma$ , c'est-à-dire que le taux de croissance intrinsèque  $r$  est positif.  $K > 0$  s'appelle la capacité limite du milieu et est égal à :

$$k = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$$

Cette équation différentielle s'appelle l'équation logistique. Elle admet deux points d'équilibre, l'origine est instable et  $K$  est un équilibre stable. Pour toute condition initiale positive, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = k$$

### Modèles avec deux populations

Dans la nature, deux populations peuvent être influencées l'une par l'autre ainsi lorsque l'effectif d'une population varie, ceci peut avoir des répercussions sur l'effectif de l'autre. Parmi ces interactions, il y a **la prédation** qui est comptée positivement pour l'une des deux espèces, **la compétition** qui est négative pour chacune des deux espèces. Enfin, **le mutualisme** dans lequel chaque population favorise la croissance de l'autre.

### Les modèles proie-prédateur

Dans la dynamique des populations, on décrit sous le nom proie- prédateurs le fait qu'un être vivant capture un autre être vivant, dans le but de se nourrir .

Il y a eu de nombreux modèles proie-prédateur, depuis le modèle original de Lotka-Volterra (1926 ) ; tels que Tanner Holling Type II (1959 ) ; Modèle Rosenzweig-MacArthur (1963 ) ; le modèle Yodzis(1989) ; Modèle Leslie-Gower,...

### Modèle de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = rx - axy \\ y'(t) = -my + bxy \end{cases}$$

### Modèle généralisé :

Le modèle de Lotka-Volterra a permis de développer d'autres modèles proie-prédateur de façon à s'approcher de plus en plus de la réalité du vivant, en prenant en considération les conditions environnementales qui influencent la croissance.



La forme assez générale (standard) d'un modèle proie-prédateur est la suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x(t)) - F_2(x(t), y(t)) \cdot y(t) \\ y'(t) = -my(t) + eF_2(x(t), y(t)) \cdot y(t) \end{cases}$$

où  $x(t)$  et  $y(t)$  désignent les densités de proies et de prédateurs respectivement, à l'instant  $t$ .

- $F_1$  représente le taux de croissance de proies en l'absence de prédateur.
- $m$  est le taux de mortalité du prédateur par unité de biomasse.
- $e$  est une constante positive qui représente le taux de conversion de la proie en prédateur.
- $F_2$  c'est le nombre de proies consommées par un prédateur et par unité de temps. Elle est appelée **réponse fonctionnelle** du prédateur.

Le modèle de Lotka-Volterra n'est pas réaliste, pour trois raisons :

- en absence de prédateur, la croissance des proies est illimitée ( loi malthusienne).
- les solutions périodiques correspondant les effectifs des proies et des prédateurs ne sont pas conservées en général pour de petites perturbations de ce modèle.
- $F_2(x, y) = ax$  (de type I) si  $x$  est très grand un prédateur consomme une quantité très grande (plus que sa capacité)

### La réponse fonctionnelle du prédateur :

La fonction réponse a été modifiée à maintes reprises par plusieurs chercheurs. Il est donc plus réaliste de concevoir une fonction réponse présentant un effet de saturation avec la densité des proies, cette fonction dite de Holling de type II est la suivante [3] :

$$F_2(x, y) = \frac{\beta x}{x + D}$$

En 1989, P. Arditi propose une équation qui prend en compte le nombre de prédateurs. Il montre qu'une telle réponse ajuste mieux les données de nombreuses expériences de laboratoires. La

forme de cette réponse est donnée par l'équation suivante :

$$F_2(x, y) = \frac{\alpha \left( \frac{x}{y} \right)}{\gamma + \beta \left( \frac{x}{y} \right)} = \frac{\alpha x}{\gamma y + \beta x}$$

avec  $x$  et  $y$  représentent la population de proies et de prédateurs ,

- $\alpha$  : le taux d'ingestion maximum
- $\beta$  : constante de demi-saturation
- $\gamma$  : le coefficient de dépendance au nombre de prédateurs dans le milieu.

Cette réponse fonctionnelle est dite ratio-dépendante (dépendant du rapport ).

Ceci conduit au modèle avec une réponse dépendant du rapport :

$$\begin{cases} x'(t) = x(1-x) - \frac{axy}{my+x} \\ y'(t) = y \left( -d + \frac{bx}{my+x} \right) \end{cases}$$

Ici,  $x(t)$  et  $y(t)$  représentent la population des proies et des prédateurs à l'instant  $t$ , respectivement;  $d > 0$  est le taux de mortalité des prédateurs,  $a$  et  $b$  sont des constantes positives représentant le taux de capture et le taux de conversion des prédateurs.

Pour les lecteurs intéressés , nous nous référons à Arditi [2] , Abrams [1] . Les modèles de rapport dépendant sont capables de produire des dynamiques plus riches et plus raisonnables. Cela a été bien documenté dans l'étude de Kuang et Beretta [7] et par Hsu et Huang [6].

En introduisant la compétition entre prédateurs on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(1-x) - \frac{axy}{my+x} \\ y'(t) = y \left( -d + \frac{bx}{my+x} \right) - hy^2 \end{cases}$$

ce modèle a été étudié dans Bazykin [4]

# Chapitre 1

## Outils mathématique fondamentaux

Nous présentons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

### **Théorème d'existence et d'unicité de solutions**

Considérons le système différentiel à retard suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t) & \text{pour } t > 0 \\ x_t = \varphi & \text{pour } t = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction donnée,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^2)$  l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la norme de la convergence uniforme,  $\tau > 0$ ,  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ .

**Théorème 1.1.** Supposons que la fonction  $f$  est continue. Alors pour toute donnée initiale  $\varphi \in \mathcal{C}$ , le système (1.1) admet au moins une solution locale. De plus, si la fonction  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x_t$ , alors la solution est unique.

### **Définition 1.1. (Notions sur la stabilité dans $\mathbb{R}^2$ )**

La notion de stabilité permet de savoir le comportement de la solution lorsque le temps devient grand.

Soit le système décrit par l'équation différentielle à retard , il est non linéaire et autonome

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (1.2)$$

**Définition 1.2. (Point d'équilibre)**

Un vecteur  $x^*$  est dit point critique ou point d'équilibre pour (1.2) si  $f(x^*, x^*) = 0$

**Définition 1.3. (Stabilité)**

La fonction initiale de l'équation (1.2) est donnée par  $x(\theta) = \Phi(\theta) > 0 \quad \theta \in [-\tau, 0]$  .

L'équilibre  $x = x^*$  de l'équation (1.2) est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$\|\Phi(t) - x^*\|_{\mathbb{R}^2} \leq \delta \quad \forall t \in [-\tau, 0]$  implique que toute solution  $x$  de (1.2) avec fonction initial  $\Phi$  sur  $[-\tau, 0]$  satisfaisant  $\|x(t) - x^*\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

**Définition 1.4.** Un point d'équilibre  $x^*$  est dit asymptotiquement stable si en plus il existe

$\delta_0 > 0$  tel que

$$\|\Phi(t) - x^*\|_{\mathbb{R}^2} \leq \delta_0 \quad \forall t \in [-\tau, 0] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

**Définition 1.5.** Le point d'équilibre  $x^*$  est dit instable s'il n'est pas stable.

**Définition 1.6. (Attractivité)**

On dit que l'origine  $x = 0$  est :

- un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine  $U(0)$ , tel que

$$\forall x_0 \in U(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

- un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^2, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

**Stabilité de Lyapunov**

*Stabilité locale :*

soit  $\Omega$  une région autour de l'origine, L'état d'équilibre  $x^* = 0$  est stable s'il existe une fonction  $V(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant :

- $V(0) = 0$ ;
- $V(x) > 0, \forall x \neq 0, x \in \Omega$ ;
- $V'(x) \leq 0, \forall x \neq 0, x \in \Omega$ ;

*Stabilité asymptotique :*

Si la dernière condition était plutôt,  $V'(x) < 0$  pour  $x \in \Omega, x \neq 0$  alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

**Proposition 1.1.** Si  $x^*$  est un équilibre asymptotiquement stable et que  $V(x)$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini, toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $x^*$  tendent vers  $x^*$  : on dit alors que le point  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 1.1. bifurcation de Hopf** [3]

Ce théorème de bifurcation valable en dimension  $n \geq 2$  qui permet de démontrer l'existence d'un cycle limite. Soit le système d'équations différentielles sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \tau) \\ y' = g(x, y, \tau) \end{cases}$$

où  $\tau$  est un paramètre réel strictement positif. Supposons que  $(x^*, y^*)$  est un point d'équilibre du système pour toute valeur du paramètre  $\tau$ .

Soient  $\lambda_1(\tau)$  et  $\lambda_2(\tau)$  les racines de l'équation caractéristique de système linéaire :

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$$

Le théorème de Hopf s'énonce ainsi :

supposons que les trois hypothèses suivantes soient vérifiées :

1. la partie réelle des racines s'annulent pour une valeur  $\tau_0$  du paramètre,  $\alpha(\tau_0) = 0$ .
2. pour  $\tau = \tau_0$ , la partie imaginaire des racines est différente de zéro,  $\beta(\tau_0) \neq 0$ . Cela revient à dire que les racines sont imaginaires pures.

3. Supposons de plus que  $\frac{d\alpha}{d\tau}(\tau_0) > 0$ .

Alors on peut conclure :

- $\tau = \tau_0$  est une valeur de bifurcation du système.
- il existe  $\tau_a < \tau_0$  tel que pour tout  $\tau \in [\tau_a, \tau_0[$  le point  $(x^*, y^*)$  est un foyer stable.
- il existe  $\tau_b > \tau_0$  tel que pour tout  $\tau \in [\tau_0, \tau_b[$  le point  $(x^*, y^*)$  est un foyer instable entouré d'un cycle limite .

### **Théorème 1.2. (Comparaison des solutions)**

Soient  $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions localement lipschitziennes. On considère les solutions  $x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que  $f(t, x) \leq g(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et que  $x_0 \leq y_0$ . Alors  $x(t) \leq y(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

# Chapitre 2

## Comportement asymptotique d'un modèle proie-prédateur avec retard

Ce travail constitue une synthèse de l'article [5].

Dans ce memoire nous considérons la fonction de réponse dépendant du rapport.

### 2.1 Présentation du modèle

Le modèle que nous allons étudier dans ce document prend en compte à la fois le retard et la compétition entre prédateurs.

Sa forme est la suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{x(t) + y(t)} \\ y'(t) = -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t - \tau)}{x(t - \tau) + y(t - \tau)} - \mu y^2(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$x(t)$  et  $y(t)$  représentent la population des proies et des prédateurs à l'instant  $t$ .

Dans ce modèle, le retard représente le temps nécessaire pour que le prédateur consomme des proies et puisse reproduire la prochaine génération .

La quantité  $\mu y^2$  représente la compétition entre prédateurs.

$k = 1$  est la capacité limite du milieu,  $\delta$  est le taux de mortalité des prédateurs,  $\alpha$  le taux maximum de consommation de proie,  $\beta$  le taux de conversion des prédateurs, Tous les paramètres sont strictement positifs.

Avec :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) , x_0(\theta) = \Phi_1(\theta) \geq 0 \text{ et } y_0(\theta) = \Phi_2(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad x(0) > 0, y(0) > 0,$$

tel que  $(\Phi_1, \Phi_2) \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+^2)$

La dynamique du système sans retard a été traité dans Saleh [9] , dans Nindjin [8], les auteurs étudient la stabilité globale des équilibres intérieurs d'un modèle Leslie - Gower modifiée avec une fonction réponse de Holling.

Il est clair que d'après le théorème (1.1), le système décrit par (2.1) admet une solution unique, en fait, comme la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ; de ce fait elle est localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+^2$ , on en déduit l'existence et l'unicité de la solution.

**Lemme**

Le quadrant positif est positivement invariant pour le système (2.1).

**Preuve**

$\forall t \in [-\tau, +\infty)$ , la solution de (2.1) est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{\int_0^t 1 - x(s) - \frac{\alpha y(s)}{x(s) + y(s)} ds} \\ y(t) = y(0)e^{\int_0^t -\delta - \mu y(s) + \frac{\beta x(s - \tau)}{x(s - \tau) + y(s - \tau)} ds} \end{cases}$$

on a

$$x(0) > 0 \text{ et } y(0) > 0$$

donc  $x(t) > 0$  et  $y(t) > 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$

car la fonction exponentielle est positive



## 2.2 Existence des points d'équilibre

La recherche des points d'équilibre du système (2.1), se traduit par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} x(1 - x - \frac{\alpha y}{x + y}) = 0 \\ y(-\delta - \mu y + \frac{\beta x}{x + y}) = 0 \end{cases}$$

L'origine  $O$  est un point d'équilibre.

On considère la fonction  $F$  définie dans  $\mathbb{R}_+^{*2} - (0, 0)$

$$\text{par : } F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 - x - \frac{\alpha y}{x + y}) \\ y(-\delta - \mu y + \frac{\beta x}{x + y}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(1 - x - \frac{\alpha y}{x + y}) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{\alpha xy}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{\alpha}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}. \text{ Or } (x, y) \rightarrow (0^+, 0^+) \end{aligned}$$

Et donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = -\frac{\alpha}{+\infty} = 0.$$

De même, nous prouvons aussi que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = \frac{\beta}{+\infty} = 0.$$

donc  $F(x, y)$  admet un prolongement par continuité en  $(0, 0)$

$(1, 0)$  est trivialement un point d'équilibre. Il existe aussi d'autres points d'équilibres qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - x - \frac{\alpha xy}{x + y} = 0 \\ -\delta - \mu y + \frac{\beta x}{x + y} = 0 \end{cases}$$

Les points d'équilibre intérieurs sont donnés par  $E_1 = (x_1^*, y_1^*)$  et  $E_2 = (x_2^*, y_2^*)$

où

$$x_{1,2}^* = \frac{2\beta + \alpha(\delta + \mu - 2\beta) \pm \alpha\sqrt{(\delta - \mu)^2 + 4\mu(\beta + \alpha\delta - \alpha\beta)}}{2(\beta + \alpha\mu)}$$

et

$$y_{1,2}^* = \frac{x_{1,2}^*(1 - x_{1,2}^*)}{x_{1,2}^* + \alpha - 1}$$

**Lemme 2.1.** si  $(\delta - \mu)^2 + 4\mu(\beta + \alpha\delta - \alpha\beta) < 0$  alors le système (2.1) n'admet pas d'équilibre dans le quadrant positif .

si  $(\delta - \mu)^2 + 4\mu(\beta + \alpha\delta - \alpha\beta) > 0$  et  $\alpha > 1$ ,  $0 < x_i < 1$  pour  $i = 1, 2$  alors le système (2.1) admet deux points d'équilibres dans le quadrant positif .

## 2.3 La bornitude et permanence de la solution

**Définition 2.1.** le système (2.1) est dit permanent s'il existe deux constantes  $M, m$  ( $0 < m < M$ ) tel que toute solution de (2.1) vérifie :

$$\min\{\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t)\} \geq m \text{ (persistence)}$$

et

$$\max\{\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t), \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t)\} \leq M \text{ (dissipativité)}$$

### Proposition

si  $\alpha < 1$  et  $\beta > \delta + \mu M$  alors le système (2.1) est permanent

avec :

$$M = \max\{1, (\frac{\beta}{\delta} - 1)e^{\beta\tau}\} > 0 \text{ et } m = \inf\{1 - \alpha, \frac{(1 - \alpha)(\beta - (\delta + \mu M))e^{-(\delta + \mu M)\tau}}{(\delta + \mu M)}\} > 0$$

### 2.3.1 Dissipativité

Cette propriété fournit une base théorique afin d'étudier le comportement asymptotique des solutions de ce système.

Soit  $(x(t), y(t))$  la solution de (2.1), elle satisfait l'équation suivante :

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{x(t) + y(t)}$$

La majoration implique que

$$x'(t) \leq x(t)(1 - x(t))$$

Par l'application du principe de comparaison, on a :

$$x(t) \leq \bar{x}(t) \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

où  $\bar{x}(t)$  est la solution de problème avec valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = \bar{x}(t)(1 - \bar{x}(t)) \\ \bar{x}(0) = x(0) > 0 \end{cases}$$

Et donc,  $\bar{x}(t)$  s'écrit sous la forme suivante

$$\bar{x}(t) = \frac{x(0)e^t}{1 - x(0) + x(0)e^t}$$

Par passage à la limite

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t) = 1$$

Ce qui implique

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1$$

pour la seconde équation de système (2.1)

$$y'(t) = -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t - \tau)}{x(t - \tau) + y(t - \tau)} - \mu y^2(t)$$

La majoration implique que

$$y'(t) \leq \beta y(t) \quad (1)$$

L'intégration entre 0 et t, donne :

$$y(t) \leq y(0)e^{\beta t}$$

Ainsi, pour  $t > \tau$  l'intégration de (1) sur  $[t-\tau, t]$ , donne :

$$\ln \frac{y(t)}{y(t-\tau)} \leq \beta \tau$$

Ce qui implique :

$$y(t)e^{-\beta \tau} \leq y(t-\tau)$$

et donc

- $\frac{1}{y(t-\tau)} \leq \frac{1}{y(t)e^{-\beta \tau}}$

- on a  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1$  donc  $\exists T$  (assez grand) tel que  $\forall t > T + \tau$   $x(t) \leq 1$

Ce qui implique :

$$y'(t) \leq y(t) \left( -\delta + \frac{\beta}{1 + y(t)e^{-\beta \tau}} \right)$$

ainsi

$$y'(t) \leq \frac{y(t)}{1 + y(t)e^{-\beta \tau}} (\beta - \delta - \delta y(t)e^{-\beta \tau})$$

on pose  $\beta > \delta$ , l'intégration nous donne

$$y(t) \leq \frac{(\beta - \delta)e^{\beta t}}{1 + \delta e^{\beta(t-\tau)}}$$

Ce qui implique pour  $\beta > \delta$  :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \left( \frac{\beta}{\delta} - 1 \right) e^{\beta \tau}$$

**Conclusion :**

Ce résultat signifie bien que les solutions sont bornées, autrement dit, le système (2.1) est dissipatif.

### 2.3.2 Persistance

#### Proposition

Si  $\alpha < 1$  et  $\beta > \delta + \mu M$  alors le système (2.1) est persistant.

#### Preuve

soit  $(x(t), y(t))$  la solution de (2.1), elle satisfait l'équation suivante :

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{x(t) + y(t)}$$

La minoration implique que

$$x'(t) \geq x(t)(1 - x(t) - \alpha)$$

Par l'application du principe de comparaison, on a :

$$x(t) \geq \underline{x}(t) \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

où  $\underline{x}(t)$  est la solution de problème avec valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = \underline{x}(t)(1 - \alpha) \left(1 - \frac{\underline{x}(t)}{1 - \alpha}\right) \\ \underline{x}(0) = x(0) > 0 \end{cases}$$

Et donc,  $\underline{x}(t)$  s'écrit sous la forme suivante

$$\underline{x}(t) = \frac{(1 - \alpha)x(0)e^{(1-\alpha)t}}{1 - x(0) - \alpha + x(0)e^{(1-\alpha)t}}$$

si  $\alpha < 1$  alors par passage à la limite

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \underline{x}(t) = 1 - \alpha > 0$$

Ce qui implique

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq 1 - \alpha > 0$$

Soit  $V > 1$ , il existe  $T_V$  (assez grand) tel que  $\forall t > T_V + \tau$  on a :

$$x(t) \geq 1 - \alpha > \frac{1 - \alpha}{V} > 0 \quad \text{et} \quad y(t) \leq M < VM$$

pour la seconde équation du système (2.1)

$$y'(t) = -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau) + y(t-\tau)} - \mu y^2(t)$$

La minoration implique que

$$y'(t) > (-\delta - \mu VM)y(t) \quad (2)$$

L'intégration de (2) sur  $[t - \tau, t]$ , donne

$$y(t - \tau) < y(t)e^{(\delta + \mu VM)\tau}$$

Du fait que

$$y(t - \tau) < y(t)e^{(\delta + \mu VM)\tau} \quad \text{et} \quad x(t - \tau) > \frac{1 - \alpha}{V}$$

on obtient

$$\frac{x(t - \tau)}{x(t - \tau) + y(t - \tau)} > \frac{\frac{1 - \alpha}{V}}{\frac{1 - \alpha}{V} + y(t)e^{(\delta + \mu VM)\tau}}$$

donc

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau) + y(t-\tau)} - \mu y^2(t) \\
&\geq y(t) \left( \frac{\beta \frac{1-\alpha}{V}}{\frac{1-\alpha}{V} + y(t)e^{(\delta+\mu VM)\tau}} - \delta - \mu VM \right) \\
&\geq \frac{y(t)}{\frac{1-\alpha}{V} + y(t)e^{(\delta+\mu VM)\tau}} \left( (\beta - \delta - \mu VM) \frac{1-\alpha}{V} - (\delta + \mu VM)y(t)e^{(\delta+\mu VM)\tau} \right)
\end{aligned}$$

si  $\beta > \delta + \mu VM$  et  $\alpha < 1$ , on obtient :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \left( \frac{(1-\alpha)(\beta - (\delta + \mu VM))e^{-(\delta+\mu VM)\tau}}{(\delta + \mu VM)V} \right) > 0$$

pour  $V \rightarrow 1$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \left( \frac{(1-\alpha)(\beta - (\delta + \mu M))e^{-(\delta+\mu M)\tau}}{(\delta + \mu M)} \right) > 0$$

Ce résultat signifie bien que le système (2.1) est persistant .

On pose :

$$m = \inf \left\{ 1 - \alpha, \frac{(1-\alpha)(\beta - (\delta + \mu M))e^{-(\delta+\mu M)\tau}}{(\delta + \mu M)} \right\} > 0$$

**corollaire :**

si  $\beta > \delta$ ,  $\forall \alpha > 0$  alors le système (2.1) est dissipatif.

si  $\alpha < 1$ ,  $\beta > \delta + \mu M$  alors le système (2.1) est persistant.

**Définition 2.2.** le système (2.1) n'est pas persistant si :

$$\min(\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t)) = 0$$

**Proposition**

Si  $\alpha > 1 + \delta$  alors le système (2.1) n'est pas persistant.

**Preuve**

si  $\alpha > 1 + \delta$  alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\frac{\alpha}{1 + \varepsilon} = 1 + \delta$

Soit  $(x(\cdot), y(\cdot))$  la solution du système (2.1), prenons les conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  tel que

$$\frac{x(0)}{y(0)} < \frac{\delta}{\delta + \mu y(0)} \varepsilon < \varepsilon$$

on souhaite montrer que

$$\frac{x(t)}{y(t)} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

La preuve se fera par l'absurde

Supposons qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\frac{x(t)}{y(t)} < \varepsilon \quad \forall t \in [0, t_0)$ ,

et  $\frac{x(t_0)}{y(t_0)} = \varepsilon$

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \left( 1 - x(t) - \frac{\alpha y(t)}{x(t) + y(t)} \right) \quad \forall t \in [0, t_0] \\ &= x(t) \left( 1 - x(t) - \frac{\alpha}{1 + \frac{x(t)}{y(t)}} \right) \\ &\leq x(t) \left( 1 - x(t) - \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \right) \quad \text{car } \frac{x(t)}{y(t)} \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, t_0] \\ &\leq x(t) \left( 1 - \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \right) \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

L'intégration de (I) entre 0 et t donne :

$$x(t) \leq x(0) e^{(1 - \frac{\alpha}{1 + \varepsilon})t} \quad \forall t \in [0, t_0]$$

Du fait que  $1 - \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} = -\delta$  nous obtenons :



$$x(t) \leq x(0)e^{-\delta t} \quad \forall t \in [0, t_0]$$

Pour la seconde équation du système (2.1)

$$y'(t) = -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau) + y(t-\tau)} - \mu y^2(t)$$

La minoration implique que

$$y'(t) \geq -y(t)(\delta + \mu y(t))$$

Du fait que

$$\frac{1}{y(t)(\delta + \mu y(t))} = \frac{1}{\delta y(t)} - \frac{\mu}{\delta(\delta + \mu y(t))}$$

Nous obtenons

$$\frac{y'(t)}{y(t)} - \frac{\mu y'(t)}{\delta + \mu y(t)} \geq -\delta \quad (II)$$

L'intégration de (II) entre 0 et t donne

$$y(t) \geq \frac{\delta y(0)}{\delta + \mu y(0)} e^{-\delta t} \quad \forall t \in [0, t_0]$$

et on a posé

$$\frac{x(0)}{y(0)} < \frac{\delta}{\delta + \mu y(0)} \varepsilon$$

donc

$$\frac{x(t)}{y(t)} \leq \frac{x(0)}{y(0)} \frac{\delta + \mu y(0)}{\delta} < \varepsilon$$

implique que  $\frac{x(t)}{y(t)} < \varepsilon \quad \forall t \in [0, t_0]$  contradiction avec  $\frac{x(t_0)}{y(t_0)} = \varepsilon$

**Conclusion :**

pour  $\frac{x(0)}{y(0)} < \varepsilon$

$$\text{si } \alpha > 1 + \delta \text{ alors } \frac{x(t)}{y(t)} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

ainsi

$$x(t) \leq x(0)e^{-\delta t} \quad \forall t \geq 0$$

Ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (\text{le système (2.1) n'est pas persistant})$$

**Proposition**

si  $\alpha > 1 + \delta$ ,  $\beta < \frac{\alpha\delta}{\alpha - 1 - \delta}$  alors il existe une solution  $(x(\cdot), y(\cdot))$  de (2.1) tel que :

$(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)) = (0, 0)$  ie  $(0, 0)$  est attractif

**Preuve :**

soit  $(x(\cdot), y(\cdot))$  la solution de (2.1)

si  $\alpha > 1 + \delta$  et  $\frac{x(0)}{y(0)} \leq \varepsilon$  alors (d'après Proposition précédente) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x(t)}{y(t)} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

or

$$\frac{\alpha}{1 + \varepsilon} = 1 + \delta \Rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha}{1 + \delta} - 1$$

donc

$$\frac{x(0)}{y(0)} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{x(t)}{y(t)} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x(0)}{y(0)} \leq \frac{\alpha}{1 + \delta} - 1 \Rightarrow \frac{x(t - \tau)}{y(t - \tau)} \leq \frac{\alpha}{1 + \delta} - 1 \quad \forall t \geq \tau$$

La minoration implique que

$$\left( \frac{y(t - \tau)}{x(t - \tau)} + 1 \right) \geq \left( \frac{1}{\frac{\alpha}{1 + \delta} - 1} + 1 \right)$$

Ce qui implique

$$\left( \frac{1}{\frac{y(t-\tau)}{x(t-\tau)} + 1} \right) \leq \left( \frac{\alpha - (1 + \delta)}{\alpha} \right) \quad (II)$$

d'autre part la solution  $(x(\cdot), y(\cdot))$  vérifie l'équation suivante :

$$y'(t) = y(t) \left( \frac{\beta x(t-\tau)}{x(t-\tau) + y(t-\tau)} - \delta - \mu y(t) \right)$$

implique que

$$y'(t) = y(t) \left( \frac{\beta}{1 + \frac{y(t-\tau)}{x(t-\tau)}} - \delta - \mu y(t) \right)$$

on utilise le résultat (II)

$$y'(t) \leq y(t) \left( \frac{\beta(\alpha - 1 - \delta)}{\alpha} - \delta - \mu y(t) \right)$$

La majoration implique que

$$y'(t) \leq y(t) \left( \frac{\beta(\alpha - 1 - \delta)}{\alpha} - \delta \right) \quad (III)$$

L'intégration de (III) sur  $[0, t]$ , donne

$$y(t) \leq y(0)e^{(\frac{\beta(\alpha-1-\delta)}{\alpha}-\delta)t}$$

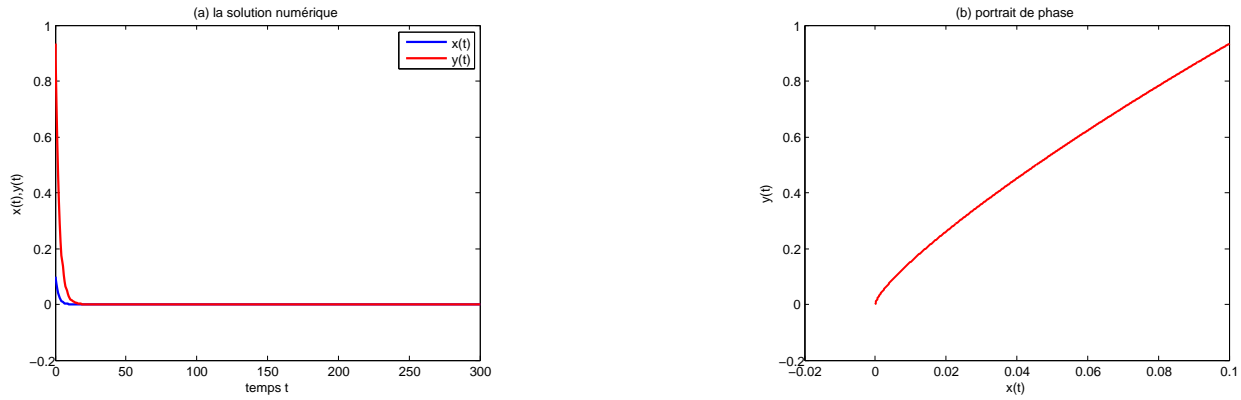
si  $\beta < \frac{\alpha\delta}{\alpha - 1 - \delta}$  alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

### Conclusion

si  $\beta < \frac{\alpha\delta}{\alpha - 1 - \delta}$  et  $\alpha > 1 + \delta$  alors l'origine O est un point d'équilibre attractif

Simulation numérique :



(a) la solution tend vers le point d'équilibre (0,0)      (b) l'évolution vers l'origine correspond à la solution

FIGURE 2.1 – **Attractivité de point (0,0)** pour  $\alpha = 1.55, \beta = 0.566, \delta = 0.4, \mu = 0.05, \tau = 15$

Par la suite , nous allons parler de l'attractivité et de la stabilité des équilibres

## 2.4 Attractivité de (1,0)

Soit  $(x(\cdot), y(\cdot))$  la solution de (2.1), on a

$$y'(t) = -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau) + y(t-\tau)} - \mu y^2(t)$$

La majoration implique que

$$y'(t) \leq y(t)(\beta - \delta) \tag{2.2}$$

L'intégration de (2.2) sur  $[0, t]$ , donne

$$y(t) \leq y(0)e^{(\beta-\delta)t}$$

si  $\beta < \delta$  alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

on a montré dans le chapitre précédent que si  $\alpha < 1$  alors  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) > 1 - \alpha > 0$

donc si  $\alpha < 1$  et  $\beta < \delta$  alors il existe  $T(\varepsilon) > 0$  (assez grand),  $\varepsilon > 0$  tel que

$$x(t) \geq \varepsilon(1 - \alpha) \quad \forall t > T(\varepsilon) \tag{2.3}$$

$$y(t) \leq \frac{\varepsilon^2(1 - \alpha)}{\alpha - \varepsilon} \quad \forall t > T(\varepsilon) \tag{2.4}$$

or

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{x(t) + y(t)}$$

On utilise (2.3) et (2.4), la minoration implique que

$$x'(t) \geq x(t)(1 - x(t) - \varepsilon)$$

Par l'application du principe de comparaison, on a :

$$x(t) \geq \underline{x}(t) \quad \forall t \geq 0$$

où  $\underline{x}(\cdot)$  est la solution de l'équation logistique :

$$\underline{x}'(t) = \underline{x}(t)(1 - \underline{x}(t) - \varepsilon)$$

Et donc,  $\underline{x}(\cdot)$  s'écrit sous la forme suivante

$$\underline{x}(t) = \frac{c(1 - \varepsilon)e^{(1-\varepsilon)t}}{1 - c - \varepsilon + ce^{(1-\varepsilon)t}}$$

Par passage à la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{x}(t) = 1 - \varepsilon$$

on pose  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$  (une suite)

Ce qui implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq 1 \tag{2.5}$$

d'autre part

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{x(t) + y(t)}$$

La majoration implique que

$$x'(t) \leq x(t)(1 - x(t))$$

Par l'application du principe de comparaison, on a :

$$x(t) \leq \bar{x}(t) \forall t \geq 0$$

où  $\bar{x}(\cdot)$  est la solution de l'équation logistique :

$$\bar{x}'(t) = \bar{x}(t)(1 - \bar{x}(t))$$

Et donc,  $\bar{x}(t)$  s'écrit sous la forme suivante

$$\bar{x}(t) = \frac{ce^t}{1 - c + ce^t}$$

Par passage à la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t) = 1$$

Ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1 \tag{2.6}$$

En combinant les inégalités en (2.5) et (2.6)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$$

### conclusion

si  $\beta < \delta$  et  $\alpha < 1$  alors

$$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right) = (1, 0)$$

donc (1,0) est attractif

### Simulation numérique :

On constate que les proies se rapprochent de la capacité limite, par contre les prédateurs tendent vers l'extinction (**a**) . Le portrait de phase montre que la solution tend vers le point

d'équilibre  $A = (1.0)$  (b).

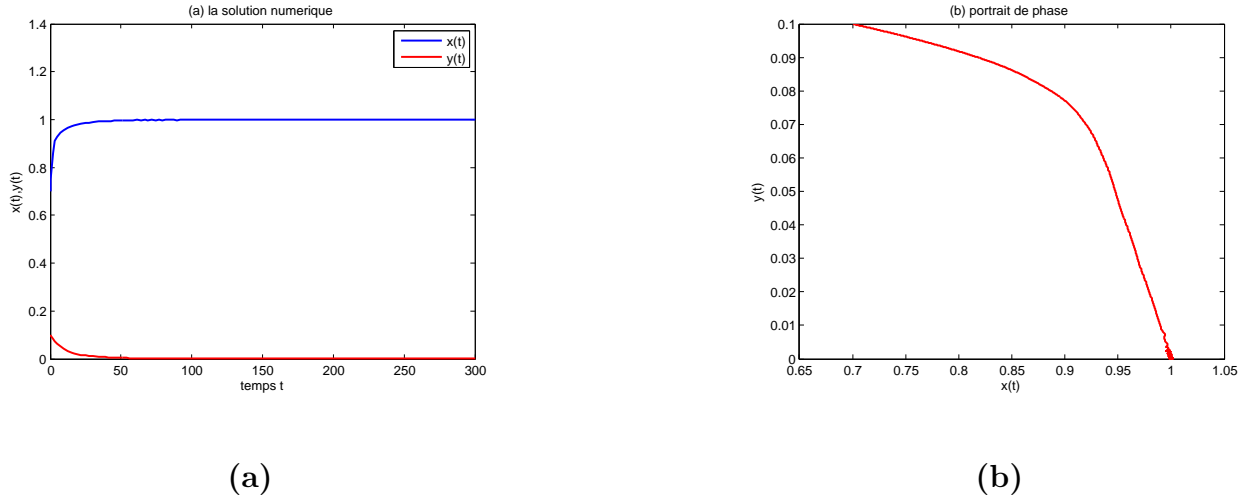


FIGURE 2.2 – **Attractivité de point (1,0)** pour  $\alpha = 0.95, \beta = 0.36, \delta = 0.4, \mu = 0.05, \tau = 15$

## 2.5 Analyse de stabilité du point d'équilibre $E_1^*$

Soit la fonction  $V(x, y)$  définie, différentiable et continue sur  $\mathbb{R}_+^{*2}$ .

$$V(x, y) = (x - x^*) - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) + C(y - y^*) - Cy^* \ln\left(\frac{y}{y^*}\right)$$

où  $C$  est une constante à déterminer

La fonction  $V(x, y)$  est définie positive sur  $\mathbb{R}_+^{*2}$ .

Cette fonction admet un extremum en  $E^* = (x^*, y^*)$ . En effet ;

$$\nabla V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^*}{x} \\ c(1 - \frac{y^*}{y}) \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



et

$$\text{Hess}V_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^*} & 0 \\ 0 & \frac{C}{y^*} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont positives

Cela signifie donc que la fonction  $V(x, y)$  présente un minimum au point d'équilibre intérieur positif  $(x^*, y^*)$ . avec  $V(x^*, y^*) = 0$

donc  $V(x, y) > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^2 - (x^*, y^*)$

Calculons la dérivée par rapport au temps de la fonction  $V(x, y)$  :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' \\ &= (x - x^*) \left( 1 - x - \frac{\alpha y}{x + y} \right) + C(y - y^*) \left( -\delta - \mu y + \frac{\beta x}{x + y} \right) \end{aligned}$$

Du fait que

$$1 = x^* + \frac{\alpha y^*}{x^* + y^*} \quad -\delta = \mu y^* - \frac{\beta x^*}{x^* + y^*}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x - x^*) \left( -(x - x^*) + \frac{\alpha y^*}{x^* + y^*} - \frac{\alpha y}{x + y} \right) + C(y - y^*) \left( -\mu(y - y^*) + \frac{\beta x}{x + y} - \frac{\beta x^*}{x^* + y^*} \right) \\ &= (x - x^*) \left( -(x - x^*) + \frac{\alpha y^*(x - x^*) - \alpha x^*(y - y^*)}{(x^* + y^*)(x + y)} \right) - \mu C(y - y^*)^2 \\ &\quad + C(y - y^*) \left( \frac{\beta y^*(x - x^*) - \beta x^*(y - y^*)}{(x^* + y^*)(x + y)} \right) \end{aligned}$$

on pose  $C = \frac{\alpha x^*}{\beta y^*}$

$$\frac{dV}{dt} = \left( -1 + \frac{\alpha y^*}{(x^* + y^*)(x + y)} \right) (x - x^*)^2 + \frac{\alpha x^*}{\beta y^*} \left( -\mu - \frac{\beta x^*}{(x^* + y^*)(x + y)} \right) (y - y^*)^2$$

si  $\alpha < 1$  et  $\beta > \delta + \mu M$  alors il existe  $T > 0$  (assez grand) tel que

$$m \leq x(t) \leq M \text{ et } m \leq y(t) \leq M \quad \forall t \geq T$$

La majoration implique que

$$\frac{dV}{dt} \leq \left( -1 + \frac{\alpha y^*}{2m(x^* + y^*)} \right) (x - x^*)^2 + \frac{\alpha x^*}{\beta y^*} \left( -\mu - \frac{\beta x^*}{2M(x^* + y^*)} \right) (y - y^*)^2$$

on peut vérifier facilement que si  $\frac{1 - x^*}{2m} < 1$  alors  $\frac{dV}{dt} < 0$

donc le point d'équilibre  $E^*$  est localement asymptotiquement stable .

# Chapitre 3

## Bifurcation de Hopf

Le système (2.1) est sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = G(x(t - \tau), y(t - \tau), y(t)) \end{cases}$$

avec

$$F(x(t), y(t)) = x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{x(t) + y(t)}$$

et

$$G(x(t - \tau), y(t - \tau), y(t)) = -\delta y(t) + \frac{\beta y(t)x(t - \tau)}{x(t - \tau) + y(t - \tau)} - \mu y^2(t)$$

tel que

$$F(x^*, y^*) = 0, \quad G(x^*, y^*, y^*) = 0$$

On linéarise le système (2.1) au voisinage du point d'équilibre intérieur positif  $E^* = (x^*, y^*)$  pour la fonction  $F(x(t), y(t))$ , définissons des nouvelles variables locales

$$u(t) = x(t) - x^*, \quad v(t) = y(t) - y^*$$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= x'(t) = F(u(t) + x^*, v(t) + y^*) \\
&= F(u(t) + x^*, v(t) + y^*) - F(x^*, y^*) \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)v(t) + \dots
\end{aligned}$$

pour la fonction  $G(x(t - \tau), y(t - \tau), z(t))$ , définissons des nouvelles variables locales

$$u(t - \tau) = x(t - \tau) - x^*, \quad v(t - \tau) = y(t - \tau) - y^*, \quad z(t) = y(t) = v(t) + y^*$$

$$\begin{aligned}
v'(t) &= y'(t) = G(u(t - \tau) + x^*, v(t - \tau) + y^*, v(t) + y^*) \\
&= G(u(t - \tau) + x^*, v(t - \tau) + y^*, v(t) + y^*) - G(x^*, y^*, y^*) \\
&= \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*, y^*)u(t - \tau) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*, y^*)v(t - \tau) + \frac{\partial G}{\partial z}(x^*, y^*, y^*)v(t) + \dots
\end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1 dans le développement de Taylor, nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = a_{11}u(t) + a_{12}v(t) \\ v'(t) = a_{21}u(t - \tau) + a_{22}v(t - \tau) - \mu y^*v(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$a_{11} = -x^* + \frac{\alpha x^* y^*}{(x^* + y^*)^2} = -x^* + \frac{(1 - x^*)(x^* + \alpha - 1)}{\alpha}$$

$$a_{12} = -\frac{\alpha x^{*2}}{(x^* + y^*)^2} = -\frac{(x^* + \alpha - 1)^2}{\alpha}$$

$$a_{21} = \frac{\beta y^{*2}}{(x^* + y^*)^2} = \frac{\beta(1 - x^*)^2}{\alpha^2}$$

$$a_{22} = -\frac{\beta x^* y^*}{(x^* + y^*)^2} = \frac{-\beta(1 - x^*)(x^* + \alpha - 1)}{\alpha^2}$$

supposons que la solution de (3.1) est sous la forme

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

donc

$$u(t - \tau) = c_1 e^{\lambda(t - \tau)} \quad v(t - \tau) = c_2 e^{\lambda(t - \tau)}$$

on remplace  $u$  et  $v$  dans (3.1) :

$$\begin{cases} \lambda c_1 e^{\lambda t} = a_{11} c_1 e^{\lambda t} + a_{12} c_2 e^{\lambda t} \\ \lambda c_1 e^{\lambda t} = a_{11} c_1 e^{\lambda t} + a_{12} c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})c_1 - a_{12}c_2 = 0 \\ -a_{21}c_1 + (\lambda - a_{11} + \mu y^* e^{-\lambda\tau})c_2 = 0 \end{cases}$$

pour que la solution non nulle existe il faut que :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ -a_{21}e^{-\lambda\tau} & \lambda - a_{22}e^{-\lambda\tau} + \mu y^* \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^2 + (\mu y^* - a_{11})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{22}\lambda - a_{21}a_{12})e^{-\lambda\tau} - \mu y^* - a_{11} = 0 \quad (3.2)$$

on pose :

$$A = -a_{11} + \mu y^*, \quad B = -a_{11}\mu y^*$$

$$C = -a_{22}, \quad D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

On obtient

$$\lambda^2 + A\lambda + B + (C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.3)$$

1<sup>er</sup> cas si  $\tau = 0$  alors (3.3) devient :

$$\lambda^2 + (A + C)\lambda + B + D = 0$$

Le discriminant

$$\Delta = (A + C)^2 - 4(B + D)$$

elle admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{-(A + C) - \sqrt{(A + C)^2 - 4(B + D)}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-(A + C) + \sqrt{(A + C)^2 - 4(B + D)}}{2}$$

$\lambda_{1,2}$  ont une partie réelle négative si et seulement si  $A + C > 0$ ,  $B + D > 0$

Dans ce cas,  $E^*$  est localement asymptotiquement stable

2<sup>ème</sup> cas  $\tau \neq 0$

on pose  $\lambda = i\omega$  avec ( $\omega > 0$ ) on remplace dans l'équation(3.3)

$$-\omega^2 + iA\omega + (iC\omega + D)(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) + B = 0$$

Ce qui implique

$$-\omega^2 + iA\omega + iC\omega \cos \omega\tau + C\omega \sin \omega\tau + D \cos \omega\tau - iD \sin \omega\tau + B = 0$$

donc

$$C\omega \sin \omega\tau - \omega^2 + B + D \cos \omega\tau + i(C\omega \cos \omega\tau - D \sin \omega\tau + A\omega) = 0 \quad (3.4)$$

de (3.4) on obtient :

$$C\omega \sin \omega\tau + D \cos \omega\tau + B - \omega^2 = 0$$

et

$$C\omega \cos \omega\tau - D \sin \omega\tau + A\omega = 0$$

donc

$$C\omega \sin \omega\tau + D \cos \omega\tau = \omega^2 - B \quad (1)$$

et

$$C\omega \cos \omega\tau - D \sin \omega\tau = -A\omega \quad (2)$$

En utilisant (1) et (2) , on obtient

$$\omega^4 + (A^2 - C^2 - 2B)\omega^2 + B^2 - D^2 = 0 \quad (3.5)$$

si  $A^2 - C^2 - 2B > 0$  et  $B^2 - D^2 > 0$  alors l'équation (3.5) n'a pas de solution positive .

**Théorème 3.1.** si les conditions  $A + C > 0$  ,  $B + D > 0$  et

$A^2 - C^2 - 2B > 0$ ,  $B - D > 0$  sont satisfait alors les solutions de l'équation (3.3) ont une partie réelle négative  $\forall \tau \geq 0$

donc  $E^*$  est localement asymptotiquement stable  $\forall \tau \geq 0$  (pas de bifurcation).

simulation numérique :

les figures (3.1) et (3.2) représentent la coexistence des deux espèces

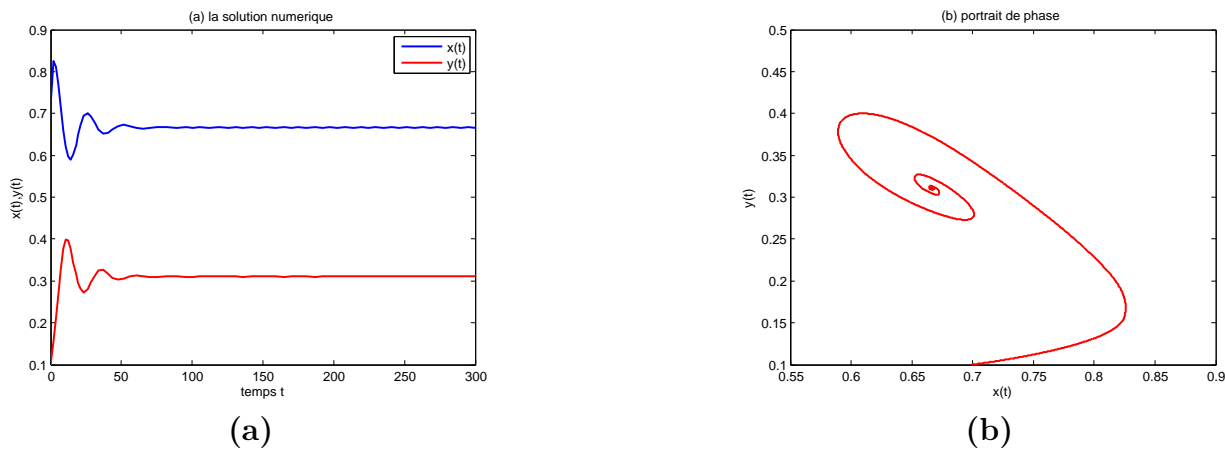


FIGURE 3.1 –  $\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.2, \mu = 0.6, \tau = 5$

(a) la solution tend vers le point d'équilibre  $E^*$ , (b) Portrait de phase d'un foyer stable. Les trajectoires spiralent en s'approchant de l'équilibre  $E^*$ .

Le point d'équilibre  $E^*$  est un foyer stable pour toute valeur du retard.

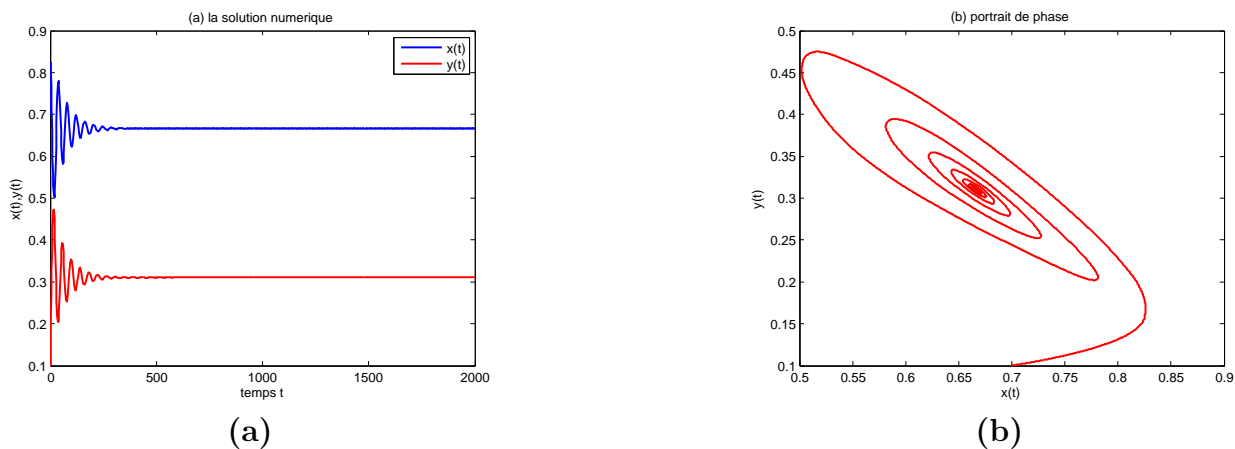


FIGURE 3.2 –  $\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.2, \mu = 0.6, \tau = 19$

(a) la solution tend vers le point d'équilibre  $E^*$ , (b) Portrait de phase d'un foyer stable. Les trajectoires spiralent en s'approchant de l'équilibre  $E^*$ .



Cas :  $B^2 - D^2 < 0$

on pose  $\delta = \omega^2$  l'équation (3.5) devient

$$\delta^2 + (A^2 - C^2 - 2B)\delta + B^2 - D^2 = 0$$

Le discriminant  $\Delta = (A^2 - C^2 - 2B)^2 - 4(B^2 - D^2) > 0$

admet deux racines :

$$\delta_0 = \frac{-(A^2 - C^2 - 2B) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2B)^2 - 4(B^2 - D^2)}}{2} > 0$$

$$\delta_1 = \frac{-(A^2 - C^2 - 2B) - \sqrt{(A^2 - C^2 - 2B)^2 - 4(B^2 - D^2)}}{2} < 0$$

Donc l'équation (3.5) admet une solution unique positive :

$$\omega_0 = \sqrt{\delta_0} = \sqrt{\frac{-(A^2 - C^2 - 2B) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2B)^2 - 4(B^2 - D^2)}}{2}}$$

Du fait que

$$C\omega_0 \sin \tau_0\omega_0 + D\omega_0 \cos \tau_0\omega_0 = \omega_0^2 - B$$

$$C\omega_0 \cos \tau_0\omega_0 - D\omega_0 \sin \tau_0\omega_0 = -A\omega_0$$

nous obtenons

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{(D - AC)\omega_0^2 - BD}{C^2\omega_0^2 + D^2} + \frac{2n\pi}{\omega_0} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

La dérivée de l'équation (3.3) par rapport à  $\tau$  est

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + A \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} - \frac{d\lambda}{d\tau} \tau(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} + C \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau}(2\lambda + A - \tau(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} + Ce^{-\lambda\tau}) = \lambda(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}$$

donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + A - \tau(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} + Ce^{-\lambda\tau}}{\lambda(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} \\ &= \frac{2\lambda + A}{\lambda(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} + \frac{C}{\lambda(C\lambda + D)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda(2\lambda + A)}{\lambda^2(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} + \frac{C\lambda}{\lambda^2(C\lambda + D)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

Du fait que

$$2\lambda^2 + A\lambda = \lambda^2 - B - (C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{\lambda^2 - B - (C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}}{\lambda^2(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} + \frac{C\lambda}{\lambda^2(C\lambda + D)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda^2 - B}{\lambda^2(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau}} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{C\lambda}{\lambda^2(C\lambda + D)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

Du fait que

$$\lambda^2(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau} = -\lambda^2(\lambda^2 + A\lambda + B)$$

nous obtenons

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{\lambda^2 - B}{-\lambda^2(\lambda^2 + A\lambda + B)} - \frac{D}{\lambda^2(C\lambda + D)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

pour  $\lambda = i\omega_0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)_{\lambda=i\omega_0}^{-1} &= \frac{\omega_0^2 + B}{\omega_0^2((\omega_0^2 - B) - iA\omega_0)} - \frac{D}{(i\omega_0)^2(iC\omega_0 + B)} + \frac{i\tau}{\omega_0} \\
&= \left[ \frac{\omega_0^2 + B}{\omega_0^2((\omega_0^2 - B) - iA\omega_0)} \frac{(\omega_0^2 - B) + i(A\omega_0)}{(\omega_0^2 - B) + iA\omega_0} \right] + \left[ \frac{D}{\omega_0^2(iC\omega_0 + B)} \frac{D - iC\omega_0}{D - iC\omega_0} \right] + \frac{i\tau_0}{\omega_0} \\
&= \left[ \frac{\omega_0^2 - B^2 + iA\omega_0^3 + iAB\omega_0}{\omega_0^2((\omega_0^2 - B)^2 + (A\omega_0)^2)} \right] + \frac{D^2 - iCD\omega_0}{\omega_0^2(D^2 + C^2\omega_0^2)} + \frac{i\tau_0}{\omega_0} \\
\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_0}^{-1} &= \frac{\omega_0^2 - B^2}{\omega_0^2((\omega_0^2 - B)^2 + (A\omega_0)^2)} + \frac{D^2}{\omega_0^2(D^2 + C^2\omega_0^2)}
\end{aligned}$$

or, d'après l'équation (3.5) :

$$\begin{aligned}
D^2 + C^2\omega_0^2 &= \omega_0^4 + B^2 + A^2\omega_0^2 - 2B\omega_0^2 \\
&= (\omega_0^2 - B)^2 + A^2\omega_0^2
\end{aligned}$$

implique

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_0}^{-1} = \frac{\omega_0^4 - B^2 + D^2}{\omega_0^2((\omega_0^2 - B)^2 + (A\omega_0)^2)}$$

or, d'après l'équation (3.5) :

$$D^2 - B^2 = \omega_0^4 + (A^2 - C^2 - 2B)\omega_0^2$$

donc

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_0}^{-1} = \frac{2\omega_0^2 + A^2 - C^2 - 2B}{(\omega_0^2 - B)^2 + (A\omega_0)^2} > 0$$

**remarque**

$$\lambda(\tau) = \operatorname{Re}\lambda(\tau) + i\operatorname{Im}\lambda(\tau)$$

donc

$$\frac{d\lambda}{d\tau}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\operatorname{Re}\lambda(\tau) + i\frac{d}{d\tau}\operatorname{Im}\lambda(\tau)$$

implique

$$\frac{1}{\frac{d\lambda}{d\tau}(\tau)} = \frac{1}{\frac{d}{d\tau}\operatorname{Re}\lambda(\tau) + i\frac{d}{d\tau}\operatorname{Im}\lambda(\tau)}$$

on pose

$$\xi(\tau) = \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}\lambda(\tau) \text{ et } \eta(\tau) = \frac{d}{d\tau} \operatorname{Im}\lambda(\tau)$$

implique

$$\left( \frac{1}{\frac{d\lambda}{d\tau}(\tau)} \right)_{\lambda=i\omega_0} = \frac{\xi(\tau_0) - i\eta(\tau_0)}{(\xi(\tau_0) + i\eta(\tau_0))(\xi(\tau_0) - i\eta(\tau_0))}$$

or

$$0 < \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\frac{d\lambda}{d\tau}(\tau)} \right)_{\lambda=i\omega_0} = \frac{\xi(\tau_0)}{\xi^2(\tau_0) + \eta^2(\tau_0)}$$

donc

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}\lambda(\tau_0) = \xi(\tau_0) > 0$$

les hypothèses de théorème de Hopf sont vérifiées

- $\operatorname{Re}\lambda(\tau_0) = 0$  et  $\operatorname{Im}\lambda(\tau_0) \neq 0$
- $\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda(\tau_0)) > 0$

**Théorème 3.2.** si  $A + C > 0$ ,  $B + D > 0$  et  $B - D < 0$  alors  $\forall \tau \in [0, \tau_0)$  le point l'équilibre intérieur positif  $E^* = (x^*, y^*)$  est localement asymptotiquement stable, instable pour  $\tau > \tau_0$ .

avec  $\tau_0$  la valeur de bifurcation

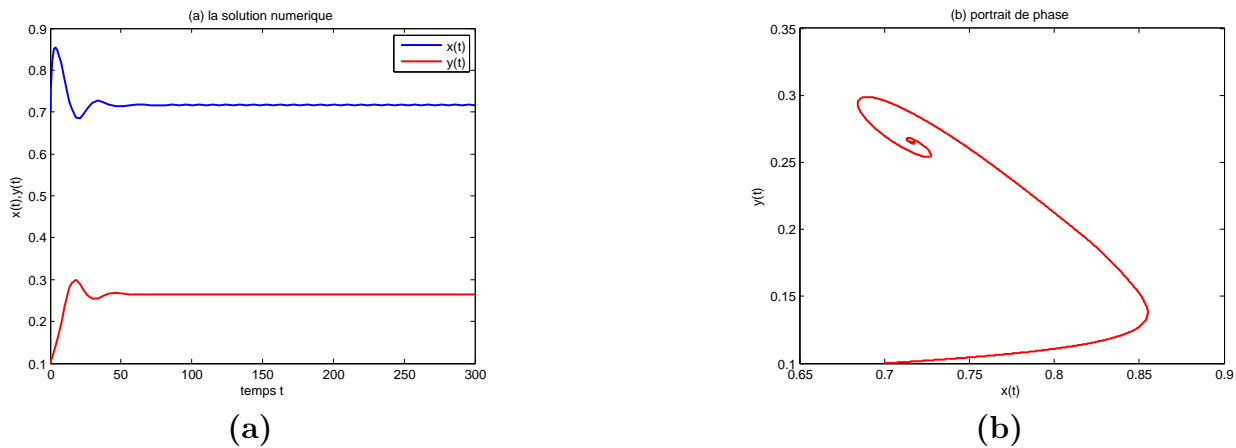


FIGURE 3.3 –  $E^*$  est un foyer stable ( $\tau < \tau_0$ )  $\alpha = 1.05$ ,  $\beta = 0.566$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\tau = 5$   
On constate que dans ce cas, la solution tend vers le point d'équilibre  $E^* \approx (0.7166, 0.2749)$ .

Dans le cas du théorème précédent, il y a une bifurcation de Hopf avec l'apparition d'un cycle limite pour des valeurs de  $\tau > \tau_0$ .

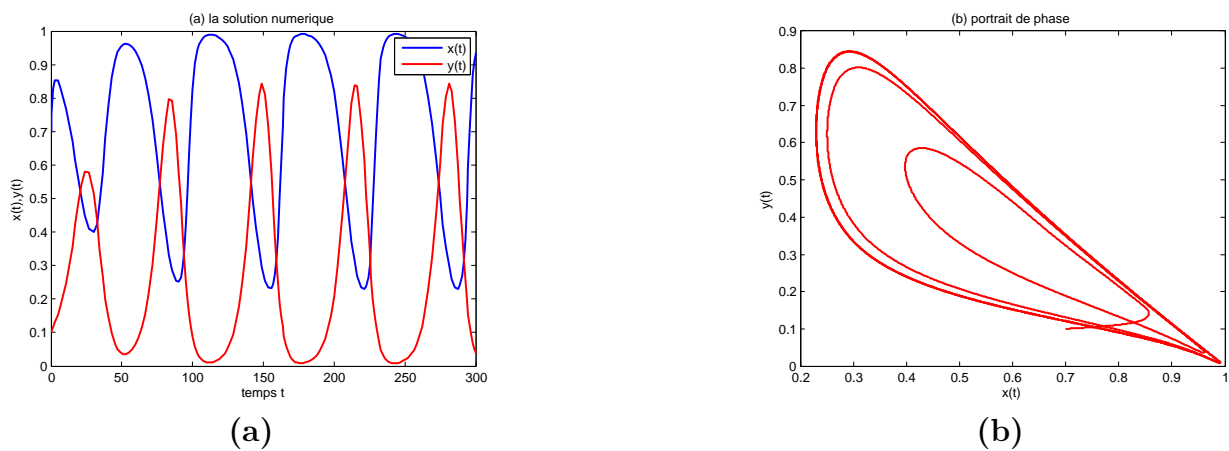


FIGURE 3.4 – **apparition d'un cycle limite** ( $\tau > \tau_0$ )  $\alpha = 1.05, \beta = 0.566, \delta = 0.4, \mu = 0.05, \tau = 15$

(a) oscillations générées, (b) l'évolution vers un cycle limite correspondant à la solution numérique en (a)

# Perspectives

Il est intéressant de considérer l'influence de l'environnement sur les interactions proie-prédateur.

Dans ce cadre nous nous adressons la question suivante : est ce que les résultats obtenus dans ce mémoire demeurent vrais lorsque nous introduisons une variation dans les caractéristiques de l'habitat des deux espèces ? Nous comptons ramener des éléments de réponse pour ce genre de questions.

# Bibliographie

- [1] Abrams,P. *The fallacies of ratio-dependent predation*, *Ecology* 75(6) . 1842-1850,(1994)
- [2] Arditi,R, Ginzburg, L.R, *Coupling in predator-prey dynamics : ratio dependence. J. Theor. Biol.* 139 . 311-326 ,(1989)
- [3] P.Auger. *Modélisation Mathématique En Écologie*. ISBN 978-2-10-054829-3 ,(2010)
- [4] A.Bazykin, A.Khibnick, B.Krauskopf. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations* . World Scientific ,(1998)
- [5] Peng Feng. *Analysis of a delayed predator-prey model with ratio-dependent functional response and quadratic harvesting*. J Appl Math Comput DOI 10.1007/s12190-013-0691-z (2013)
- [6] S.B.Hsu, T.W.Huang :, *Global stability for a class of predator-prey systems. SIAM J. Appl. Math.*55,.763-783 ,(1995).
- [7] Y.Kuang, E.Beretta :, *Global analysis of Gause-type ratio-dependent predator-prey systems. J.Math.Biol.* 36,. 389-406,(1998).
- [8] A.F.Nindjin, Aziz-Alaoui, M.Cadivel :, *Analysis of a predator-prey models with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with time delay. Nonlinear Anal.,. Real World Appl.* 7, 1104-1118 ,(2006).
- [9] K.Saleh :*A ratio-dependent predator-prey system with quadratic predator harvesting*.Asian Trans.Basic Appl. Sci. 02(4), 21-25 (2013).