REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques

Mémoire de Fin d'études En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Numérique des E.D.P

sous le Thème:

Etude de la persistance uniforme d'un système dynamique

Par: Safsaf Abdelhadi

Soutenu le : 05/06/2016 devant le jury composé de:

M^r	F. Abi ayad	Dr. UABB-TLEMCEN	Président
M^r	S.M. Bouguima	Pr. UABB-TLEMCEN	Examinateur
M^r	T. Mahdjoub	Dr.UABB-TLEMCEN	Examinateur
M^m	Dj. Hadj Slimane	Pr. UABB-TLEMCEN	Encadreur

Année universitaire : 2015 − 2016

Remerciements

Avant tous je remercie ALLAH qui m'a donné la force, le courage et la force de volonté d'achever ce travail.

J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude en particulier à mon encadreur M^m Dj. Hadj Slimane qui a dirigé ce travail, de m'avoir proposé un sujet aussi passionnant et intéressant.Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissant. Sa compétence et ses conseils m'ont été d'un grand secours.

Je tiens à remercie mon professeur F. Abi ayad le responsable de ma formation en Master et pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier les Professeurs S.M. Bouguima et T. Mahdjoub d'avoir accepter de participer au jury .

Je tiens enfin à remercier toute ma famille,mes amis ,ma promotions.

Safsaf Abdelhadi

Table des Matières

Partie I

Introduction

Les mathématiques sont un outil indispensable pour la résolution de problèmes concrets, en particulier ceux relatifs à la dynamique des populations.Il existe diverses méthodes pour approcher les phénomènes réels.Ces méthodes se sont développées et améliorées et ceci pour permettre de concevoir ces phénomènes réels d'une façon plus rigoureuse et plus précise.

Différentes applications au vivant sont données par la communauté scientifique, essentiellement centré sur l'analyse et la théorie des systèmes dynamiques dissipatifs réels régis en particulier par des équations différentielles ordonaires (EDO).Les outils utilisés sont ceux de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires,

Dans ce qui suit, on focalise essentiellement notre étude sur la notion de la persistence uniforme des systèmes dynamiques.

Dans le premier chapitre,on rappelle les définitions de base concernant l'existence et l'unicité de solution du système considéré.Nous introduisons aussi, la notion de la stabilité au sens de Lyapunov,l'ensemble invariant,l'ensemble limite, leurs propriétés...

Le second chapitre est consacré à un théorèmes qui caractérise la persistence uniforme d'un système dynamique.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de cette notion sur quelques modèles des systèmes dynamiques.

Le but de ce paragraphe est d'introduire quelques notions fondamentales dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques modélisés par des équations différentielles ordinaires.

Chapitre 1

Rappels de quelques notions de base

Le but de ce paragraphe est d'introduire quelques notions fondamentales dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques modélisés par des équations différentielles ordinaires, pour plus de details voir [7]

1.1 Equations différentielles et flot

Définition 1.1 *On note $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $x = (x_1, ..., x_n)$ un élément de E. Sa norme $\parallel x \parallel_E$sera l'une quelconque des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times E$ et $f : \Omega \to E$ une fonction continue. Pour tout $(t; x) \in \Omega$, on notera $f(t; x) = (f_1(t; x), ..., f_n(t; x))$où chaque fonction f_i est continue de Ω dans $\mathbb{R}$.On s'intéresse ici à la description des solutions d'un système dynamique modélisé par une équation différentielle du premier ordre*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Définition 1.2 *Une solution de (1.1) est un couple (φ, J) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans E telle que $(t; \varphi(t)) \in \Omega$
pour tout $t \in J$ et $\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi(t)), \forall t \in J, \forall i = 1, ..., n.$*

Remarque 1.1 *On remarque que f et φ étant deux fonctions continues, par composition $\varphi' = (\varphi_1', ..., \varphi_n')$ est également continue sur Jet φ est de classe C^1 sur J.*

Définition 1.3 *Soit* $(t_0; x_0) \in \Omega$. *Résoudre le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \\ \quad x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) *où* J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*contenant* t_0 *et* φ *une fonction dérivable de* J*dans* E *telle que* $(t; \varphi(t)) \in \Omega$ *pour tout* $t \in J$, $\varphi'(t) = f(t; \varphi(t))$ *pour tout* $t \in J$ *et* $\varphi(t_0) = x_0$.

En intégrant l'équation différentielle du problème de Cauchy entre t_0 *et* t *et en tenant compte de la condition* $x(t_0) = x_0$, *on obtient :*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \tag{1.3}$$

Réciproquement, toute fonction φ*vérifiant (1.3) est bien une solution de classe* C^1 *de l'équation (1.2).*

1.2 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy (1.2)

Définition 1.4 *On dira que* f *est lipschitzienne en* x *uniformément par rapport à* t,*si il existe* $k > 0$ *tel que :*

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \|_E < k \| x_1 - x_2 \|_E, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega \tag{1.4}$$

Théorème 1.1 *On suppose que* I_0 *est de la forme* $[t_0, t_0 + \alpha]$, $(\alpha > 0)$,*et que* f *est continue* *sur* $I_0 \times \mathbb{R}^n$ *et qu'il existe une fonction* $g \in L^1(I_0)$ *tel que:*

$$\forall t \in I_0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, < f(t,y) - f(t,z), y - z > \leq g(t) \parallel y - z \parallel^2, \text{ où } \quad <,> \text{ est le produit scalaire}$$

alors le problème de Cauchy (1.2) admet une solution locale et une seule.

Théorème 1.2 *Soit* $f(t,x)$ *une fonction continue en* t *sur* $[t_0, t_0+\alpha]$, $(\alpha \geq 0)$ *et pour tout* $t \in [t_0, t_0+\alpha]$*,elle vérifie la condiition de Lipschitz locale en* x*,et il éxiste des constantes* c, k *tel que*

$$\begin{aligned} \parallel f(t,x) \parallel &\leq c, \\ \parallel f(t,x_1) - f(t,x_2) \parallel_E &< k \parallel x_1 - x_2 \parallel_E, \end{aligned} \tag{1.5}$$

pour tout $t \in [t_0, t_0+\alpha]$*,et* $\forall x, x_1, x_2 \in B_r(x_0)$*,ou* $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\parallel x - x_0 \parallel \leq r\}$ *alors il existe une unique solution au problème de Cauchy (1.2) sur l'intervalle* $[t_0, t_0+\alpha_1]$*, où* $\alpha_1 < \min\{\frac{r}{c}, \frac{1}{k}, \alpha\}$.

Théorème 1.3 *On considère le problème de Cauchy (1.2), où la fonction* $f(t,x)$ *est continue sur*

$$B := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mid t - t_0 \mid \leq \alpha \leq t_0, \ \parallel x - x_0 \parallel \leq r\}, \text{avec } t_0 > 0; \text{l'instant initial} \tag{1.6}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x} : B \to \mathbb{R}^n$$

est aussi continue sur B.On définie les ensembles:

$$M := \max_{(t,x)\in B} \parallel f(t,x) \parallel$$
$$L := \max_{(t,x)\in B} \parallel \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \parallel$$

et on choisit un nombre réel α tel que

$$0 < \alpha \leq r,\ \ \alpha M \leq r,\ \ q := \alpha L < 1$$

alors

le problème de Cauchy (1.2) possède unique solution sur B.

On considère le problème de Cauchy (1.2), où la fonction $f(t,x)$ est continue sur B,et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que:

$$0 < \alpha \leq r$$
$$\alpha M \leq r$$

alors le problème de Cauchy (1.2) admet au plus une solution sur B.

Définition 1.5 ***(solution locale)****On note (J,x) une solution de (1.2) où $J \subset I$ interalle contenant t_0*
On dit (J,x) solution locale si (J,x) solution et J voisinage

Définition 1.6 ***(solution maximale)*** *une solution locale (J,x)est dite maximale si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle même .*

Définition 1.7 ***(solution globale)*** *une solution locale (J,x) est dite globale si elle est d ´efinie partout, i.e. si $I = J$.*

1.3 Notion de flot

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs f de classe C^k sur U est la donnée d'une application

$$f : x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto (f_1(x), ..., \ f_n(x)). \tag{1.7}$$

On lui associe le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., n \tag{1.8}$$

où les fonctions $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f_i(x_1, ..., x_n)$,sont appelées composantes du champ de vecteurs f .Ce sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U.

D'après les théorèmes précédents, il existe une solution maximale unique $x(.)$ de (1.8) telle que $x(0) = x_0$.

Définition 1.8 *La correspondance π qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$au temps t, qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du de vecteurs f. Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à $(x;t)$ la solution maximale $x(t)$au temps t qui correspond à la donnée initiale x_0 :*

$$(x, t) \longmapsto \pi(x, t) = \pi_t(x) = x(t)$$

et vérife :

$$(i) \qquad \frac{d}{dt} \pi(x, t) = f(\ \pi(x, t))$$

$$(ii) \qquad \pi(x, 0) = x, \ \forall x \in U$$

$$(iii) \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) \ \ \textit{pour tout } x \in U \ \textit{ et } s, t \in R$$

Introduisons quelques notations : si x est un point de U ,on note $\gamma(x)$ la trajectoire issue de x et $\gamma^+(x)$ la demi trajectoire correspondant aux temps positifs:

$$\gamma(x) := \{\pi(x, t), \ t \in \mathbb{R}\},$$
$$\gamma^+(x) := \{\pi(x, t), \ t \in \mathbb{R}^+\},$$

Dans ce qui suit, on rapelle les définitions de l'ensemble invariants, ses propriétés ainsi que le théorème qui caractérise la notion de persistance uniforme pour plus de détails, voir [6]

1.4 Ensemble invariant

Définition 1.9 *Un ensemble $M \subset U$ est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution du système différentiel associé au champ de vecteurs issue de M vérifie $x(t) \subset M$,pour tout t pour lequel cette solution est définie.*
Si cette propriété est satisfaite uniquement pour $t > 0$ (resp. $t < 0$), l'ensemble M est un ensemble invariant positif càd $\forall t > 0, \pi(M,t) \subset M$.
(resp. invariant négatif càd $\forall t < 0, \pi(M,t) \subset M$.).

Une partie invariante piège donc les trajectoires : si une trajectoire rentre dans M, elle n'en sort plus.

$M \subset U$ s'appelle invariant ssi $\pi(M,R) = M$

$M \subset U$ s'appelle positivement invariant ssi $\gamma^{+}(M) = M$

$M \subset U$ s'appelle négativement invariant ssi $\gamma^{-}(M) = M$

On note par :

∂M est le bord de M ($M \subset U$)

$\overline{M}$ la fermeture de M

$\overset{\circ}{M}$ l'interieur de M

$\forall \epsilon > 0$ et $M \subset U$,on définit:

$$\begin{aligned} S(M,\epsilon) &= \{x : x \in U, d(x,M) < \epsilon\}, \\ S[M,\epsilon] &= \{x : x \in U, d(x,M) \leq \epsilon\}, \\ H(M,\epsilon) &= \{x : \ x \in U, d(x,M) = \epsilon\}, \end{aligned}$$

1.5 Les proprietés de l'ensemble invariant

Dans tout ce qui suit U est un voisinage d'un espace localement compact noté par X.

Théorème 1.4 *Soit $M_i, i = 1, .., k$ des ensembles positivement invariants ou négativement invariants ou bien sous ensemble invariants de U, alors leurs intersections et leurs réunions ont la même propriété .*

Preuve: On suppose que les M_i , $i = 1, ..., k$ sont positivement invariants,
On note par:

$$M' = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$$
$$M'' = \bigcap_{i=1}^{k} M_i$$

Pour tout $x \in M'$, on a $x \in M_{i_0}$ pour certain i_0 donc $\pi(x,t) \in M_{i_0}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, puisque M_{i_0} est positivement invariant alors on déduit que $\pi(x,t) \in M'$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $M_{i_0} \subset M'$ donc M' est positivement invariant.

Soit $x \in M''$ alors $x \in M_i$ pour chaque $i = 1, ..., k$ et puisque chaque M_i est positivement invariant on a $\pi(x,t) \in M_i$ pour chaque $i = 1, ..., k$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$donc $\pi(x,t) \in M''$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ alors M''est positivement invariant.

La preuve pour le cas négativement invariant et invariant est analogue. ■

Théorème 1.5 *Soit $M \subset U \subset X$*
(i)Si M est invariant alors $\overline{M}$ est invariant.
(ii)Si M est positivement invariant alors $\overline{M}$ est positivement invariant.
(iii)Si M est négativement invariant alors $\overline{M}$ est négativement invariant.

Preuve: i)Soit $x \in \overline{M}$ alors il éxiste une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans M tel que $x_n \to x$ qd $n \to +\infty$.Par l'invariance de M on a $\pi(x_n,t) \in M$, pour tout n, puisque $\pi(x_n,t) \to \pi(x,t)$,qd $n \to +\infty$ par continuité de π on a
$\pi(x,t) \in \overline{M}$. Donc $\overline{M}$ est invariant.

ii)Soit $x \in \overline{M}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ alors il éxiste une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans M tel que $x_n \to x$ qd $n \to +\infty$,or M est positivement invariant par hypothèse donc $\pi(x_n, t) \in M$,pour tout $t \in \mathbb{R}^+$et pour tout n et puisque $\pi(x_n, t) \to \pi(x, t)$,qd $n \to +\infty$ on a $\pi(x, t) \in \overline{M}, \forall t \in \mathbb{R}^+$,donc $\overline{M}$ est positivement invariant.

iii)Soit $x \in \overline{M}$ et $t \in \mathbb{R}^-$alors il éxiste une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans M tel que $x_n \to x$ qd $n \to +\infty$.or M est négativement invariant on a $\pi(x_n, t) \in M$,pour tout $t \in \mathbb{R}^-$ et pour tout n

et puisque $\pi(x_n, t) \to \pi(x, t)$,qd $n \to +\infty$, on a $\pi(x, t) \in \overline{M}, \forall t \in \mathbb{R}^-$,donc $\overline{M}$ est négativement invariant.

■

Théorème 1.6 *Soit $M \subset U$*

i) M est positivement invariant si est seulement si l'ensemble $X - M$ est négativement invariant.

ii)M est négativement invariant si est seulement si l'ensemble $X - M$ est positivement invariant.

iii)M est invariant si est seulement si l'ensemble $X - M$ est invariant.

Preuve: i) raisonnons par l'absurde et supposons que M est positivement invariant et que $X - M$ n'est pas négativement invariant ie$\exists x_0 \in X - M$ tel que $\pi(x_0, t) \notin X - M,\ \forall t \in \mathbb{R}^-$ donc $\pi(x_0, t) \in M$, et puisque $-t \in \mathbb{R}^+$on a $\pi(\pi(x_0, t), -t) = \pi(x_0, t - t) = \pi(x_0, 0) = x_0 \in M$ par l'invariance positivité de M,ceci contredit l'hypothèse $x_0 \in X - M$, donc $X - M$ est négativement invariant.

Réciproquement montrons que si $X - M$ est négativement invariant alors M est positivement invariant.c-à-d $\forall x \in M$ et $t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \pi(x, t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

raisonnons par l'absurde et supposons que $X - M$ est négativement invariant et que M n'est pas positivement invariant ie $\exists x_0 \in M$ tq $\pi(x_0, t) \notin M$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$alors $\pi(x_0, t) \in X - M$ et puisque $-t \in \mathbb{R}^-$ on a $\pi(\pi(x_0, t), -t) = \pi(x_0, t - t) = \pi(x_0, 0) = x_0 \in X - M$ puisque $X - M$ est négativement invariant .Contradiction avec le fait que $x_0 \in M$, d'ou le résultat.

les preuves de ii) et iii) sont analogues à celle de la preuve de i).

■

Théorème 1.7 *Soit $M \subset U$*

i)M est positivement invariant alors $\overset{0}{M}$ est positivement invariant.

ii)M est négativement invariant alors $\overset{0}{M}$ est négativement invariant.

Preuve: i) On suppose que M est positivement invariant alors $X - M$ est négativement invariant par le théorème 1.6 et $\overline{X - M}$ est aussi négativement invariant par le théorème 1.5.

Donc $\overset{0}{M} = X - \overline{X - M}$ est positivement invariant d'aprés le théorème 1.6

ii) Si M est négativement invariant alors $X-M$ est positivement invariant d'aprés le théorème1.6 et $\overline{X - M}$ est positivement invariant d'aprés le théorème 1.5, alors $\overset{0}{M} = X - \overline{X - M}$ est négativement invariant d'aprés le théorème 1.6.

■

Définition 1.10 *Pour tout $x \in U$,on définit les ensembles suivant:*

$\Lambda^+(x) = \{y \in U, \{t_n\} \subset R^+, t_n \to +\infty,\ et\ \pi(x,t_n) \to y, qd\ n \to +\infty\}$ *est l'ensemble limite positif ou bien Omega limite .*

$\Lambda^-(x) = \{y \in U, \{t_n\} \subset R^-, t_n \to -\infty,\ et\ \pi(x,t_n) \to y, qd\ n \to +\infty\}$ *est l'ensemble limite négatif ou bien Alpha limite .*

1.6 Les proprietés de l'ensemble omega limite

Lemme 1.1 *L'ensemble Omega limite est fermé.*

Preuve: Soit une suite $\{x_n\} \subset \Lambda^+(x)$,tel que $x_n \to x$ par définition de l'ensemble oméga limite il existe une suite $\{t_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Lambda^+(x), t_{n,k} \to +\infty$ avec $\pi(x, t_{n,k}) \to x_n,$
pour tout n , on choisit $k(n)$ de telle sorte que :

$$\| \pi(x, t_{n,k}) - x_n \| < 1/n \qquad \forall k > k(n)$$

alors pour tout $\epsilon \succ 0$,on choisit N assez grand de telle sorte que :

$$\| \ x - x_n \ \| < \epsilon/2 \quad \textbf{\textit{si}} \ \ n > N$$

ceci implique que:

$$\begin{aligned} \| \pi(x, t_{n,k(n)}) - x_n \| &\leq \| \pi(x, t_{n,k(n)}) - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &< \ 1/n + \epsilon/2 \\ &< \ \epsilon \quad \textbf{si} \ \ n > \max(N, 2/\epsilon) \end{aligned}$$

donc x est défini dans l'ensemble oméga limite.

■

Définition 1.11 *un sous -ensemble non vide $M \subset X$ s'appelle ensemble isolé s'il existe $\epsilon \succ 0$ tel que pour toute ensemble invariant N est contenu entièrement dans $S[M, \epsilon]$,et $N \subset M$.*

où $S[M, \epsilon] \ := \ \{x : x \in U, d(x, M) \leq \epsilon\}$,

1.7 Notions de la stabilité au sens de Lyapunov

Reprenons le système non linéaire autonome de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x(t)) \tag{1.9}$$

avec$f : R^n \to R^n$ une fonction continue en t, localement Lipchitzienne en x de sorte qu'une solution maximale locale du problème de Cauchy associé à ce système existe et on suppose que $f(0) = 0$, pour tout $t \geq 0$,

Les points d'equilibre (ou ´etats stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés qualitatives du système.

Définition 1.12 *Un point x_0 est un dit point d'´equilibre du système (1.9) ,s'il satisfait $f(x_0) =$* 0.

Définition 1.13 ***(Stabilité)*** *On dit que $x_0 = 0$,est un point d'équilibre stable, si*

$\forall \epsilon \succ 0, \forall t_0 \succeq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0,$ *tel que* $\| x_0 \| < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$

En d'autres termes, pour tout $t \geq t_0$, une petite perturbation de la condition initiale x_0 autour de l'origine donne naissance à une solution $x(.)$ qui reste proche de l'origine.

Notons que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions.

On définit alors la notion d'attractivité.

Définition 1.14 ***(Attractivité).****On dit que l'origine $x_0 = 0$ est*

-un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine $V(0)$, tel que:

$$\forall x_0 \in V(0), \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

-un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

Définition 1.15 ***(Stabilité asymptotique)*** *On dit que l'origine $x_0 = 0$ est*
-un point d'équilibre asymptotiquement stable , s'il est stable et attractif.
-un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

Définition 1.16 ***(Bornitude uniforme).*** *Les solutions du système (1.9) sont dites uniformément bornées, si : $\exists a \geq 0$ et une fonction croissante $c :]0, a[\to R$ telles que $\forall \alpha \in]0, a[$,*

$$\| x_0 \| < \alpha \Rightarrow \| x(t) \| < c(\alpha), \ \forall t \geq t_0,$$

Les solutions sont dites globalement uniformément bornées, si la propriété précédente est vraie pour $a = +\infty$

Définition 1.17 ***(Stabilité uniforme)*** *On dit que*
- l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable (noté US) si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \ \textit{tel que } \forall t_0 \geq 0, \| x_0 \| < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

-l'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable , s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.

Définition 1.18 ***(Attractivité uniforme)*** *On dit que*
- l'origine $x_0 = 0$ est un point d'équilibre uniformément attractif, si :

$$\exists c > 0, \textit{tel que}, \forall \| x_0 \| < c, \ \forall \epsilon > 0, \exists T := T(\epsilon, c) \ \textit{tel que}, \ \| x(t) \| < \epsilon, \ \forall t \geq T + t_0,$$

- l'origine $x_0 = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément attractif, si

$$\forall c > 0, \ \forall \epsilon > 0, \exists T := T(\epsilon, c) \ \textit{tel que}, \ \| x(t) \| < \epsilon, \ \forall t \geq T + t_0,$$

Définition 1.19 ***(Stabilité asymptotique uniforme)*** *On dit que*

-l'origine $x_0 = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable, s'il est uniformément stable et uniformément attractif.

-l'origine $x_0 = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquementstable, s'il est globalement uniformément stable et globalementuniformément attractif.

Définition 1.20 ***(Stabilité exponentielle)*** *On dit que*

l'origine $x_0 = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine noté $U(0), \exists\lambda_1 > 0$ et $\exists\lambda_2 > 0$ tels que

$$\| x(t) \| \leq \lambda_1 \| x_0 \| e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \ \forall x_0 \in U(0), \ \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable, si $U(0) = R^n$.

Remarque 1 *Etant donné le système (1.9) et le flot associé'$\pi(x,t)$ sur U, l'orbite d'un point $x_0 \in U$ est l'ensemble*

$$\gamma(x_0) = \{x \in U : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \pi(x_0, t)\}$$

De la définition de l'orbite d'un point x_0, on déduit que l'orbite d'un point d'´equilibre est réduite au point lui-même :

$$\gamma(x_0) = \{x_0\}$$

Par contre l'orbite d'un point ordinaire est une courbe au moins de classe C^1qui admet en chaque point x le vecteur $f(x)$ comme vecteur tangent.

1.8 Variété stable, instable et centre

Considérons toujours un système $\dot{x} = f(x)$ où f au moins de classe C^1sur son ensemble de définition et soit x_0 un point d'´equilibre ($f(x_0) = 0$). Le système linèaire:

$$x' = Ax \text{ avec } A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)) \tag{1.10}$$

s'appelle le linéarisé du système au point d'équilibre x_0.

Etant donné un système linéaire $\dot{x} = Ax$ dans $\mathbb{R}^n$, on considère les valeurs propres de la matrice A, qui sont complexes et non distinctes en général, et les sous espaces vectoriels carractéristiques associés E_λ .

Théorème 1.8 *Soit $x' = Ax$ un système linéaire et soitent $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. Alors :*

i) Si $\forall i$ $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0,$alors x_0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable de (1.10).

ii) S'il existe i_0 tel que $\mathrm{Re}(\lambda_{i_0}) > 0$ alors x_0 est un équilibre instable de (1.10).

iii) Si $\forall i$, $i = 1..r-1$ $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ et il existe $i_0$tel que $\mathrm{Re}(\lambda_{i_0}) = 0$ cas critique.

On d´efinit:

$$\text{la variété stable } E^s = \{x : e^{At}x \to 0, qd\ t \to +\infty\}$$
$$\text{la variété instable } E^u = \{x : e^{At}x \to 0, qd\ t \to -\infty\}$$

Par conséquent toutes les solutions issues de conditions initiales dans le sous espace stable sont attirées vers l'origine tandis que celles issues de conditions initiales dans le sous espace instable sont repoussées par l'origine. En particulier, lorsque $E^s = \mathbb{R}^n$ toutes les solutions tendent vers l'origine qui est appelée un puits, et lorsque $E^u = \mathbb{R}^n$, toutes les solutions proviennent de l'origine qui est appelée une source.

Définition 1.21 *Le point d'equilibre x_0 du système $x' = Ax$ est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice A sont a une parties réelles non nulles.*

Définition 1.22 ***Fonction définie positive*** *On appelle fonction définie positive (respectivement négative) une fonction $V \; : \Omega \to \mathbb{R}$ continue sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) contenant l'équilibre x_0 et vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $V(x_0) = 0$,

ii)$\forall x \in \Omega \backslash \{x_0\}, \; V(x) > 0$ *(respectivement $V(x) < 0$).*

Elle est dite semi-définie positive (respectivement semi-défnie négative) si'il vérifie les propriétés suivantes::

i) $V(x_0) = 0$;

ii) $V(x) \leq 0$ *(respectivement $V(x) \leq 0$), $\forall x \in \Omega$*

Théorème 1.9 *Soit $x_0$est un point d'équilibre du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine.S'il existe une fonction de Lyapunov V définit sur D,alors le point d'equilibre $x_0 = 0$ est stable si en plus $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{x_0\}$,alors $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable.

Théorème 1.10 *Soit $x_0$est un point d'équilibre pour le système (1.11).Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1vérifiant:*

$$V(x) > 0 \; \forall x \neq 0, \; V(0) = 0.$$
$$\dot{V}(x) < 0 \; \forall x \neq 0,$$
$$\parallel x \parallel \to +\infty \Rightarrow V(x) \to +\infty$$

alors $x_0 = 0$ *est globalement asymptotiquement stable.*

Lemme 1.2 *Soit* f *une fonction positif définie sur* $]0, +\infty[$

i) *Si* f *est intégrable au sens de Lesbegue et uniformément continue alors*

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

ii) *Si* f *est intégrable au sens de Lesbegue et* $\dot{f}$ *est uniformément continue alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{f}(t) = 0$$

Lemme 1.3 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.12}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue de classe* C^1 *et supposons que sa solution* $x(.)$*est défnie pour tout* $t \geq 0$

Soit l'inégalité différentielle

$$\begin{cases} \dot{u} \leq f(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \tag{1.13}$$

avec $u_0 \leq x_0$

Alors la solution $u(.)$*de 1.13 est définie pour tout* $t \geq 0$ *et vérifie*

$$u(t) \leq x(t), \forall t \geq 0$$

Théorème 1.11 *Soit le système (1.12), avec* $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)),\ f(t,x) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ *tel que* f *est définit pour tout* $t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n, t_0 \geq 0.$

Si pour tout $i = 1, .., n, t \geq 0 : f_i(t, x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n), \forall x_0 \in [0, +\infty[^n$ *,alors* $x(t) \in [0, +\infty[^n$ *pour tout* $t \geq t_0 \geq 0.$

Définition 1.23 *[6] Le système (1.12) est dit persistent uniformement si* $\exists\ \delta > 0$ *tel que tout* x *la solution de (1.12), avec* $x(0) > 0$ *vérifie:*

$$\lim_{t \to +\infty} \inf x(t) > \delta \tag{1.14}$$

Définition 1.24 *On dit que (1.12) est dissipatif ,s'il existe* $M > 0$*tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup x(t) < M \tag{1.15}$$

Théorème 1.12 ***La positivité des solutions****:On considère le système (1.11) avec* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *si* $\forall i = 1, ..., n\ ,\ f_i(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0$*,alors les solutions de système (1.11) sont définit positives dans leurs dmaine de définition*

Chapitre 2

Notions de persistance d'un systeme dynamique

Dans ce chapitre, on présente la notion de la persistance ainsi que le théorème caractérisant cette propriété pour les systèmes dynamiques modélisés par:

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{2.1}$$

où

$$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

on suppose que f satisfait des hypothèses du théorèmes de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence et l'unicité de la solution locale maximale définie sur un intervalle maximale de $\mathbb{R}^+$.

2.1 La persistence faible et la persistence uniformément faible

soit X un espace métrique, muni d'une distance d et soit f un champ de vecteur continue définie sur X.Soit E un sous-ensemble fermé de X, avec ∂E et $\overset{\circ}{E}$ non vide.

Définition 2.1 *Le système (2.1) est dit :*

1-Persistent faiblement si pour tout $x \in \overset{\circ}{E}$ *on a:*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup d(\pi(x,t), \partial E) > 0 \tag{2.2}$$

2-Persistent si pour tout $x \in \overset{\circ}{E}$ *on a:*

$$\lim_{t \to +\infty} \inf d(\pi(x,t), \partial E) > 0 \tag{2.3}$$

3-Persistent uniformement faible s'il existe $\epsilon_0 \succ 0$ *tel que pour tout* $x \in \overset{\circ}{E}$ *on a:*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup d(\pi(x,t), \partial E) > \epsilon_0 \tag{2.4}$$

4-Persistent uniforme s'il existe $\epsilon_0 \succ 0$ *tel que pour tout* $x \in \overset{\circ}{E}$ *on a:*

$$\lim_{t \to +\infty} \inf d(\pi(x,t), \partial E) > \epsilon_0 \tag{2.5}$$

Définition 2 *Un sous-ensemble non vide* M *de* X*, invariant par* (2.1)*, est appelé un ensemble invariant isolé si il est l'ensemble invariant maximal dans certain voisinage de lui même. Le voisinage est appelé un voisinage isolé.*
Un ensemble invariant isolé est nécessairement fermé.

Définition 3 *La variété stable* $W^{+}(M)$ *d'un ensemble invariant isolé* M *est défini par :*
$W^{+}(M) = \{x \in X : \Lambda^{+}(x) \neq \emptyset, \Lambda^{+}(x) \subset M\}$.
où $\Lambda^{+}(x) = \{y \in X, \{t_n\} \subset R^{+}, t_n \to +\infty,\ et\ \pi(x,t_n) \to y, qd\ n \to +\infty\}$
De la même manière on définie l'ensemble instable $W^{-}(M)$ *de* M *par:*
$W^{-}(M) = \{x \in X : \Lambda^{-}(x) \neq \emptyset, \Lambda^{-}(x) \subset M\}$.
Notons que si M *est compact :*$x \in W^{+}(M)$ *est équivalent à* $\lim\limits_{t \to +\infty} d(\pi(x,t), M) = 0$, *et si*

$x \in W^{-}(M)$ *est équivalent à* $\lim\limits_{t \to -\infty} d(\pi(x,t), M) = 0.$

Définition 4 *L'ensemble faiblement stable* $W_w{}^{+}(M)$ *d'un ensemble invariant isolé* M *est défini par :*

$$\{x \in X : \Lambda^{+}(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

.

et de même on défini l'ensemble faiblement instable $W_w{}^{-}(x)$ *d'un ensemble invariant isolé* M *par:*

$$\{x \in X : \Lambda^{-}(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

Définition 5 *Soit* M, N *deux ensembles invariant isolés (pas nécessairement distincts), On dit que* M *est enchainé à* N*,(et on écrit* $M \to N$ *) s'il éxiste* $x \notin M \cup N$ *tel que* $x \in W^{-}(M) \cap W^{+}(N)$.

Définition 6 *Une suite finie* $M_1, M_2, ...M_k$ *d'un ensemble invariant isolé est appelé une chaine si* $M_1 \to M_2 \to \ ... \ \to M_k$ *(* $M_1 \to M_1$ *si* $k = 1$*), cette chaine est appelée un cycle si* $M_k = M_1$

Lemme 2.1 *Soit* M *ensemble compacte, invariant isolée,supposons que* $W_w{}^{+}(M) \setminus M \neq \emptyset$ *alors* $W^{+}(M) \backslash M \neq \emptyset$*. (cet résultat est similaire pour les ensembles instables et faiblement instables.)*

Lemme 2.2 *Soit* M *ensemble compact, invariant isolé* $\mathcal{F}$ *est un champ de vecteur continue sur un espace localement compact* E*. Alors: pour tout* $x \in W_w{}^{+}(M) \backslash W^{+}(M)$ *vérifie que:*

$$\Lambda^{+}(x) \cap W^{+}(M) \backslash M \neq \emptyset.$$
$$\Lambda^{+}(x) \cap W^{-}(M) \backslash M \neq \emptyset.$$

Théorème 2.1 *Soit* $\mathcal{F}$ *un champ de vecteur continue sur un espace localement compact* E *avec* ∂E *invariant.On suppose que le flux* $\mathcal{F}$ *est dissipatif et le* $\partial\mathcal{F}$ *est isolé et acyclique avec recouverement acyclique* μ*,alors* $\mathcal{F}$ *est uniformément persistent si seulement si:*

$$\text{(H) Pour chaque } M_i \in \mu, W^{+}(M_i) \cap \overset{0}{E} = \emptyset.$$

Preuve: 1) Si (H) n'est pas satisfaite, alors il existe $M_i \in \mu$ tq $W^{+}(M_i) \cap \overset{0}{E} \neq \emptyset$.c.à.d il existe $x \in \overset{0}{E}$ tel que $\Lambda^+(x) \subset M_i \subset \partial E$,et dans ce cas, $\mathcal{F}$ n'est pas faiblement persistent.donc n'est pas uniformément persistent, et par suite (H) est nécessaire.

2) Raisonnons alors par l'absurde et supposons que (H) est satisfaite et que $\mathcal{F}$ n'est pas uniformément persistant càd il existe $x \in \overset{0}{E}$ tel que $\Lambda^+(x) \cap \partial E \neq \emptyset$.

Par la compacité et l'invariance ona $\Lambda^+(x) \cap \Omega(\partial\mathcal{F}) \neq \emptyset$.Par conséquent, on peut choisir $i_1$de tel sorte que $\Lambda^+(x) \cap M_{i_1} \neq \emptyset$.

Par (H) on a $W^{+}(M_{i_1}) \subset \partial E$ et que $x \in W_w{}^{+}(M_{i_1}) \backslash W^+(M_{i_1})$.Par le lemme 2.2 $\Lambda^+(x) \cap W^{+}(M_{i_1}) \backslash M_{i_1} \neq \emptyset$.

Soit $p_{i_1} \in \Lambda^+(x) \cap W^{+}(M_{i_1}) \backslash M_{i_1}$, puisque M_i sont disjoints.Par la compacité et l'invariance, on a $\Lambda^-(p_i)$ sous ensemble compact non vide de $\Lambda^+(x) \cap \partial E$.Alors $\Lambda^+(\Lambda^-(p_i))$ est un sous ensemble non vide de $\Omega(\partial\mathcal{F})$.

Il en résulte que $\Lambda^-(p_{i_1}) \cap (\underset{i}{\cup} M_i) \neq \emptyset$.. Il ya deux cas à considérer :

Cas 1:_on suppose que $\Lambda^-(p_{i_1})$ ne se trouve pas dans les M_i._.

Choisissons $i_2$de tel sorte que $\Lambda^-(p_{i_1}) \cap M_{i_2} \neq \emptyset$.Alors $p_{i_1} \in W_w{}^{-}(M_{i_2}) \backslash W^{-}(M_{i_2})$ .Par le lemme 2.2 il existe $q_{i_2} \in \Lambda^-(p_{i_1}) \cap W^-(M_{i_2}) \backslash M_{i_2}$.

Maintenant $q_{i_2} \in \partial E$ et $\Lambda^+(q_{i_2}) \subset \Omega(\partial\mathcal{F}) \subset (\underset{i}{\cup} M_i)$.Puisque $\Lambda^+(q_{i_2})$ est compact , il existe i_3 de tel sorte que $\Lambda^+(q_{i_2}) \subset M_{i_{i_3}}$.

Si on a $q_{i_2} \in M_{i_3}$, alors $\Lambda^-(q_{i_2}) \subset M_{i_3}$, et par l'invariance ce qui implique que $M_{i_3} = M_{i_2}$et $q_{i_2} \in M_{i_2}$,contradiction.

Par conséquent, on a $q_{i_2} \in W^{-}(M_{i_2}) \cap W^{+}(M_{i_3})$, $q_{i_2} \notin M_{i_2} \cup M_{i_3}$, c.à.d $M_{i_2} \to M_{i_3}$.

Maintenant, $q_{i_2} \in \Lambda(p_i)$, et par la compacité et l'invariance, on a $\Lambda^+(q_{i_2}) \subset \Lambda^-(p_{i_1})$, c.à.d $p_{i_1} \in W_w{}^{-}(M_{i_3}) \backslash W^{-}(M_{i_3})$.

On répète la procédure precedente,on trouve q_{i_3}et M_{i_4} tel que: $q_{i_3} \in W^{-}(M_{i_3}) \cap W^{+}(M_{i_4})$, $q_{i_3} \notin M_{i_3} \cup M_{i_4}$,c.à.d nous avons $M_{i_2} \to M_{i_3} \to M_{i_4}$.

On continue avec cette procédure jusqu'a arriver à un cycle, puisqu' on a un nombre fini de l'ensembles M_i.

Cas 2: Supposons que $\Lambda^-(p_{i_1}) \subset M_{j_1}$ pour un certain j_1 puisque p_i sont disjoints par rapport au M_i , on a $M_{j_1} \to M_{i_1}$.Par la compacité et l'invariance $\Lambda^+(x) \cap M_{j_1} \neq \emptyset$ et
$x \in {W_w}^+(M_{j_1}) \backslash W\ ^+(M_{j_1})$ et d'aprés le lemme 2.2, on trouve $p_{j_1} \in \Lambda^+(x) \cap W^+(M_{j_1}) \backslash M_{j_1}$,
Reprenant les arguments précèdent, nous devons finalement parvenir à un cycle
L'existence d'un cycle contredit le fait que M est un recouverement acyclique.

■

2.1.1 Exemple d'application

Pour plus de détails sur le modèle voir [6]

On considère le système dynamique suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(t)(a - bx(t) - cy(t)) \\ \dot{y} = \alpha y(t)(x(t) - \beta) \\ x(0) = x_{0,} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

où $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$ sont des paramètres strictement positifs.

1. On définit le demi plan positif:

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0\}$$

dans lequel les inégalités suivantes sont vérifées:

$$\frac{dx}{dt} \mid_{x=0}= 0, \quad \frac{dy}{dt} \mid_{y=0}= 0,$$

d'aprés le théorème de la positivité des solution cité dans le chapitre 1,On aura $\mathbb{R}^2_+$ est positivement invariant pour le système (2.6).

2. Pour la bornitude superieure des solutions, puisque $cy(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ on aura d'aprés la première équation du système (2.6):

$$\frac{dx(t)}{dt} \leq ax(t)(1-\frac{b}{a}x(t)) \tag{2.7}$$

Cherchons la solution de:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bx^2 \\ \dot{x}x^{-2} - a^{-1}x &= -b \end{aligned} \tag{2.8}$$

on pose $u = x^{-1}$

l'equation (2.8) devient:

$$\dot{u} + au = b, \tag{2.9}$$

la solution gérérale de l'equation différentielle (2.9) est:

$$u(t) = \frac{b}{a} + c_0 e^{-at} \tag{2.10}$$

on remplace $u(t)$ par $x^{-1}(t)$ dans (2.10) on trouve :

$$x(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + c_0 e^{-at}} \tag{2.11}$$

on determine la valeur de c_0 a partir de la condition initiale $x(0) = x_0$,on aura:

$$c_0 = \frac{1}{x_0} - \frac{b}{a}$$

on remplace c_0 dans l'equation (2.11) on obtient:

$$x(t) = \frac{ax_0e^{at}}{a+(e^{at}-1)x_0b}$$

par le lemme de comparaison on arrive à:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) \leq \frac{a}{b}$$

donc il éxiste M^* et T_1tel que $\forall t \geq T_1$ on a $x(t) \leq M^*$.

Maintenant, on pose:

$$w(t) = x(t) + \tfrac{c}{\alpha} y(t) \tag{2.12}$$

On dérive (2.12) par rapport au temp on trouve:

$$\dot{w}(t) = \dot{x}(t) + \tfrac{c}{\alpha} \dot{y}(t) \tag{2.13}$$

Par le système (2.6) ,on aura:

$$\dot{w}(t) = ax(t) - bx^2(t) - c\beta y(t) \tag{2.14}$$

on ajoute $\alpha\beta w(t)$ dans les deux coté on obtient:

$$\dot{w}(t) + \alpha\beta w(t) = (a + \alpha\beta)\, x(t) - bx^2(t),$$

or $f(x) = (a+\alpha\beta)\, x - bx^2$ est une fonction concave qui est majoré par m_1 où $m_1 = \underset{\mathbb{R}^+}{Max}((a+\alpha\beta)\, x - bx^2) = \frac{a+\alpha\beta}{2b}$,

Multipliant des deux coté par $\exp(\alpha\beta t)$ on aura

$$\begin{aligned} (\dot{w}(t) + \alpha\beta w(t)) \exp(\alpha\beta t) &\leq \frac{a+\alpha\beta}{2b} \exp(\alpha\beta t) \\ \frac{d}{dt}(w(t) \exp(\alpha\beta t)) &\leq \frac{a+\alpha\beta}{2b} \exp(\alpha\beta t) \end{aligned}$$

intégrant entre 0 et t on déduit que :

$$w(t) \leq m,$$

où $m = \frac{a+\alpha\beta}{2b\alpha\beta}$

Donc, il éxiste m et T_2tel que $\forall t \geq T_2$ on a $y(t) \leq m$..

on conclut que le système (2.6) est dissipatif.On déduit que l'ensemble des solutions positives de système (2.6)est compact noté par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tq } 0 \leq x \leq M^*, 0 \leq y \leq m\}$$

3. Déterminons des états d'équilibre de (2.6)

Pour trouver les états d'équilibre de (2.6), on doit résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} x(a - bx - cy) = 0 & (1) \\ \alpha y(x - \beta) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2)$\Rightarrow$ $y = 0$ dans l'equation (1) ona $x(a - bx) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{a}{b}$

Donc $E_1 = (\frac{a}{b}, 0)$

Etude de la stabilité des point d'equilibre E_0, E_1

a)stabilité du point $E_0(0, 0)$

calculons la matrice jaccobien au point E_0 on trouve:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \alpha y & -\alpha\beta \end{pmatrix}$$

on a deux valeurs propres:

$$\lambda_1 = a > 0$$

$$\lambda_2 = -\alpha\beta < 0$$

alors $E_0 = (0,0)$ est instable.

b) stabilité du point $E_1(\frac{a}{b}, 0)$:

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -a & -c\frac{a}{b} \\ 0 & \alpha(\frac{a}{b} - \beta) \end{pmatrix}$$

on a deux valeurs propres:

$$\lambda_1 = -a < 0$$
$$\lambda_2 = \alpha(\tfrac{a}{b} - \beta)$$

si $a - b\beta < 0$, alors le point E_1est stable.

4. On définit les ensembles suivants:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$M_1 = \overset{\circ}{M}$$
$$M_2 = \partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \ : x = 0, \text{ ou } y = 0\}$$

On a $M = M_1 \cup M_2$ et $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,Notons par $\varpi(x_0, y_0)$ l'ensemble limite des solutions de (2.6).

soit $p_0 = (x_0, y_0) \in M$,

$A_\partial = \underset{p_0 \in Y}{\cup} \omega(p_0)$ où $Y = \{p_0 \in M_2, \pi(p_0, t) \in M_2, \forall t > 0\}$

Dans lequel $\pi(p_0, t)$ représente le flot solution de (2.6)

$$Y = \{(x_0, y_0) \in M_2, \text{ tel que, soit } x_0 = 0, y_0 \text{ quelconque, soit } x_0 \neq 0 \text{ et } y_0 = 0\}$$

Maintenant, soit $p_0 = (x_0, y_0) \in Y$,

1. Cas 1: $x_0 = 0$ on aura, $\pi(p_0, t) \to (0, 0)$ donc $\omega(p_0) = \{E_0\}$.
2. Cas 2: $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$ on aura, $\pi(p_0, t) \to (\frac{a}{b}, 0)$ donc $\omega(p_0) = \{E_1\}$.

Au final,cela veut dire que $A_\partial = \{E_0\} \cup \{E_1\}$.Par conséquent, les ensembles $\{E_0\}$ et$\{E_1\}$ forment un recouvrement isolé et acyclique de A_∂, isolé et acyclique parce qu'il n'y a aucune solution non triviale de M_2qui relie E_0 et E_1 à lui même .

En effet, considérons la fonctionnelle $M = \frac{1}{xy}$,

on a

$$L = \frac{\partial}{\partial x}(M\frac{dx}{dt}) + \frac{\partial}{\partial y}(M\frac{dy}{dt}) < 0 \text{ sur } \overset{\circ}{D}$$

puisque $\frac{\partial}{\partial x}(M\frac{dx}{dt}) = -\frac{b}{y} < 0$ et $\frac{\partial}{\partial y}(M\frac{dy}{dt}) = 0$

Donc d'après le critère de Bendixon-Dulac on conclut que $\overset{\circ}{D}$ n'a pas de cycle limite.

Si $(a - b\beta) > 0$, on al$'$emergence d'un seul point endemique et E_0est hyperbolique et instable ceci implique alors que le systeme consideré qui n'a pas de cycle limite dans $\overset{0}{D}$ il s'ensuit que l'hypothèse (H) est vérifiée et donc le système (2.6) est uniformément persistant.

Chapitre 3

Analyse de la persistance uniforme d'un système dynamique en dimension trois

Ce travail est une synthèse de l'article [10]

Dans ce chapitre nous étudions la persistance uniforme d'un système dynamique de dimension trois, le modèle à étudier est basé sur le modèle de Lotka-Volterra.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_2(t) - r_1x_1(t) - bx_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ \dot{y}(t) = y(t)(-r + \frac{a_2x_2(t)}{my(t)+x_2(t)}), \end{cases} \tag{3.1}$$

avec :

$$\begin{aligned} x_1(0) > 0, \\ x_2(0) > 0, \\ y(0) > 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $a, a_1, a_2, b, b_1, m, r, r_1$ sont des paramètres strictement positifs.

Où $x_1(t); x_2(t)$ et $y(t)$ sont les densités respectives de la proie juvénile , du proie adulte et du prédateur au temps t.

$\frac{a}{b}$: est la capacité de charge de la proie.

d : est le taux de mortalité de prédateur.

c : le taux de capture de la proie par le predateur.

m : la constante moyenne de saturation.

$\frac{f}{c}$: le taux de conversion du prédateur.

Lemme 3.1 *Les solutions de système (3.1) avec les conditions initiales (3.2) sont positives.*

Preuve: *1. Considérons le cone positif*

$$\mathbb{R}_+^3 = \left\{ (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 tq\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

dans lequel, les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$f_1(0, x_2, y) = ax_2 \geq 0, \text{ pour } x_2 \geq 0$$
$$f_2(x_1, 0, y) = bx_1 \geq 0, \text{pour } x_1 \geq 0$$
$$f_3(x_1, x_2, 0) = 0$$

D'aprés le théorème (1.11) cité dans le chapitre 1 , donc le cone positif est bien positivement invariant par le système (3.1) ■

Lemme 3.2 *Les solutions du système (3.1) avec les conditions initiale (3.2) est dissipatif sur* $D = \left\{ (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}_+^3 tq\ x_1 + x_2 + y \leq M^* \right\}$ *où* $M^* = \frac{(a+\beta)^2}{4\beta b_1}$ *et* $\beta = \min(r, r_1)$

Preuve: Soit $(x_1(.), x_2(.), y(.))$ une solution du système (3.1), les hypothèses d'existence d'une solution maximale locale du théorème étant vérifiées dans ce cas

Considérons la fonction:

$$w(t) = x_1(t) + x_2(t) + \frac{a_1}{a_2} y(t) \tag{3.3}$$

On dérive la fonction $w(t)$ par rapport au temps:

$$\dot{w}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) \tag{3.4}$$

multiplions la $3^{ème}$ équation du système (3.1) par $\frac{a_1}{a_2}$et rajoutons membre à membre :

$$\dot{w}(t) = ax_2(t) - r_1x_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1 r}{a_2}y(t), \tag{3.5}$$

Notons par $\beta = \min(r, r_1)$

$$\begin{gathered}
\dot{w}(t) \leq ax_2(t) - \beta x_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1\beta}{a_2}y(t), \\
\dot{w}(t) \leq ax_2(t) - \beta x_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1\beta}{a_2}y(t) + \beta x_2(t) - \beta x_2(t), \\
\dot{w}(t) \leq -\beta x_1(t) - \beta x_2(t) - \frac{a_1}{a_2}\beta y(t) + ax_2(t) + \beta x_2(t) - b_1x_2^2(t),
\end{gathered} \tag{3.6}$$

d'aprés l'équation (3.3),on obtient:

$$\dot{w}(t) \leq -\beta w(t) + (a+\beta)x_2(t) - b_1x_2^2(t), \tag{3.7}$$

Posons:

$$g(x_2) = (a+\beta)x_2 - b_1x_2^2, \tag{3.8}$$

Le maximum de la fonction g(.) sur $\mathbb{R}^{+}$est

$$\max_{x_2 \in \mathbb{R}^+} g(x_2) = \frac{(a+\beta)^2}{4b_1},$$

L'inégalité (3.7) devient

$$\begin{gathered} \dot{w}(t) \leq -\beta w(t) + \frac{(a+\beta)^2}{4b_1} \\ \dot{w}(t) + \beta w(t) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4b_1} \end{gathered}$$

on multiplie les deux membres de cette inégalité par $\exp(\beta t)$

$$(\dot{w}(t) + \beta w(t)) \exp(\beta t) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4b_1} \exp(\beta t)$$

ie

$$\frac{d}{dt}(w(t) \exp(\beta t)) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4b_1} \exp(\beta t)$$

intégrant entre 0 et t :

$$\begin{gathered} \int_0^t \left(\frac{d}{ds}(w(s) \exp(\beta s))\right) ds \leq \int_0^t \frac{(a+\beta)^2}{4b_1} \exp(\beta s) ds \\ w(t) \exp(\beta t) - w(0) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4b_1} \left[\frac{1}{\beta} \exp(\beta s)\right]_0^t \\ w(t) \exp(\beta t) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4\beta b_1} \exp(\beta t) - \frac{(a+\beta)^2}{4\beta b_1} + w(0) \end{gathered}$$

multiplions l'inégalité par $\exp(-\beta t)$

$$w(t) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4\beta b_1} - \frac{(a+\beta)^2}{4\beta b_1}\exp(-\beta t) + w(0)\exp(-\beta t)$$

Passons à la limite sup quant t tend vers $+\infty$,on aura:

$$\lim_{t\to+\infty}\sup w(t) \leq \frac{(a+\beta)^2}{4\beta b_1} := M^*$$

donc il existe une constante positive M^* et $T_1 > 0$ tel que $\forall\ t \geq T_1$, on a

$$w(t) \leq M^*$$

et comme $x_1(.), x_2(.), y(.)$ sont positives dans ce cas on aura le resulat.
ceci implique que les solutions sont définies pour tout $t \geq 0$, donc le système (3.1) est dissipatif.
■

Proposition 7 *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

(H1) $a_2 > r$,

(H2) $\frac{ab}{r_1+b} > \frac{a_1}{m}$,

alors le système (3.1) est uniformément persistant.

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes

Considérons une solution $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ du système (3.1) avec les conditions initiales (3.2), on s'interesse en premier lieu au sous système en $x_1$et x_2 :

étape 1

La $2^{ème}$ équation de système (3.1) donne

$$\begin{cases} \dot{x_2}(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ \dot{x_2}(t) = bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)}{m}(\frac{y(t)}{y(t)+\frac{x_2(t)}{m}}) \end{cases}$$

Or

$$\frac{y(t)}{y(t)+\frac{x_2(t)}{m}} \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}^+$$

multiplions cette inégalité par $(-\frac{a_1x_2(t)}{m})$:

$$(-\frac{a_1x_2(t)}{m})(\frac{y(t)}{y(t)+\frac{x_2(t)}{m}}) \geq -\frac{a_1x_2(t)}{m}$$

On ajoute $bx_1(t) - b_1x_2^2(t)$ des deux cotés:

$$bx_1(t) - b_1x_2^2(t) + (-\frac{a_1x_2(t)}{m})(\frac{y(t)}{y(t)+\frac{x_2(t)}{m}}) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1x_2(t)}{m}$$

on trouve

$$\dot{x_2}(t) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1}{m}x_2(t),$$

On a alors:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_2(t) - r_1x_1(t) - bx_1(t), \\ \dot{x}_2(t) \geq bx_1(t) - b_1x_2^2(t) - \frac{a_1}{m}x_2(t), \end{cases}$$

étape 2: a) Faisons une analyse de stabilité locale du système suivant:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = au_2(t) - r_1u_1(t) - bu_1(t), \\ \dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2^2(t) - \frac{a_1}{m}u_2(t), \end{cases} \tag{3.9}$$

cherchons les points d'équilibre et la matrice Jacobienne au points d'équilibre pour trouver les points d'équilibre de système (3.9) on doit résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} au_2(t) - r_1u_1(t) - bu_1(t) = 0, \\ bu_1(t) - b_1u_2^2(t) - \frac{a_1}{m}u_2(t) = 0, \end{cases}$$

il ya deux points d'équilibre :

$$E_0(0,0),$$
$$E_1(u_1^*, u_2^*)$$

où

$$u_1^* = \frac{au_2^*}{r_1+b}$$
$$u_2^* = \frac{1}{b_1}\left(\frac{ab}{r_1+b} - \frac{a_1}{m}\right)$$

b 1) analyse de stabilité locale de E_0:

Calculons la matrice jacobienne du système (3.9)au point d'équilibre $E_0(0,0)$:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -(r_1+b) & a \\ b & -\frac{a_1}{m} \end{pmatrix}$$

son déterminant est:

$$\det\ J_{E_0} = (r_1+b)\frac{a_1}{m} - ab,$$

Par hypothèse **(H2)** on a

$$\frac{ab}{r_1+b} > \frac{a_1}{m} \Rightarrow (r_1+b)\frac{a_1}{m} - ab < 0$$

donc det $J_{E_0} < 0$

et la trace vaut:

$$tr\ J_{E_0} = -(r_1+b) - \frac{a_1}{m} < 0$$

Alors le système (3.9)est un instable au point $E_0(0,0)$.

b 2) analyse de stabilité locale de $E_1(u_1^*, u_2^*)$

la matrice jacobienne du système (3.9)au point d'équilibre $E_1(u_1^*, u_2^*)$ est:

$$J_{E_1^*} = \begin{pmatrix} -(r_1+b) & a \\ b & -2(\frac{ab}{r_1+b} - \frac{a_1}{m}) - \frac{a_1}{m} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $J_{E_1^*}$

$$\begin{aligned}
\det\ J_{E_1^*} &= 2(r_1+b)(\tfrac{ab}{r_1+b} - \tfrac{a_1}{m}) + \tfrac{a_1}{m} \\
&= 2ab - \tfrac{2(r_1+b)a_1}{m} + \tfrac{(r_1+b)a_1}{m} \\
&= 2ab - \tfrac{(r_1+b)a_1}{m} > 0 \ \text{ par } \mathbf{(H2)}
\end{aligned}$$

et la trace vaut:

$$tr\ J_{E_1^*} = -(r_1+b) - 2(\tfrac{ab}{r_1+b} - \tfrac{a_1}{m}) - \tfrac{a_1}{m} < 0,$$

Alors le point $E_1^*(u_1^*, u_2^*)$ est stable.

étape 3: écrivant le système (3.9) en fonction de u_1^*, u_2^*

On a le système (3.9)

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = au_2(t) - r_1u_1(t) - bu_1(t), \\ \dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2^2(t) - \frac{a_1}{m}u_2(t), \end{cases}$$

La première équation de ce système donne

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t) &= au_2(t) - r_1u_1(t) - bu_1(t), \\
\dot{u}_1(t) &= au_2(t) - (r_1+b)u_1(t), \\
\dot{u}_1(t) &= a\left[u_2(t) - \tfrac{(r_1+b)}{a}u_1(t)\right],
\end{aligned}$$

Or

$$u_1^* = \frac{au_2^*}{r_1+b} \Rightarrow \frac{r_1+b}{a} = \frac{u_2^*}{u_1^*}$$

On remplace $\frac{r_1+b}{a}$ par sa valeur dans l'expression de $\dot{u}_1(t)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t) &= a\left[u_2(t) - \tfrac{u_2^*}{u_1^*}u_1(t)\right] \\
\dot{u}_1(t) &= \tfrac{a}{u_1^*}\left[u_2(t)u_1^* - u_2^*u_1(t)\right]
\end{aligned}$$

rajoutant et retranchons $u_2(t)u_1(t)$ dans le deuxième membre de l'équation de $\dot{u}_1(t)$

$$\dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*}\left[u_2(t)u_1^* - u_2^* u_1(t) + u_2(t)u_1(t) - u_2(t)u_1(t)\right]$$

On aura

$$\dot{u}_1(t) = \frac{a}{u_1^*}\left[-u_2(t)(u_1(t) - u_1^*) + u_1(t)(u_2(t) - u_2^*)\right]$$

La deuxième équation de système (3.9) est

$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1 u_2^2(t) - \frac{a_1}{m}u_2(t),$$
$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1 u_2(t)\left[u_2(t) + \frac{a_1}{m}\right],$$

Or

$$u_2^* = \frac{1}{b_1}\left(\frac{ab}{r_1+b} - \frac{a_1}{m}\right) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1 m} = -u_2^* + \frac{ab}{b_1(r_1+b)}$$

donc

$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1 u_2(t)\left[u_2(t) - u_2^* + \frac{ab}{b_1(r_1+b)}\right] \tag{3.10}$$

On a

$$u_1^* = \frac{au_2^*}{r_1+b} \Rightarrow \frac{a}{r_1+b} = \frac{u_1^*}{u_2^*}$$

On remplace dans l'équation (3.10), on trouve:

$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2(t)\left[u_2(t) - u_2^* + \tfrac{bu_1^*}{b_1u_2^*}\right]$$
$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - b_1u_2^2(t) + b_1u_2(t)u_2^* - \tfrac{bu_1^*u_2(t)}{u_2^*}$$
$$\dot{u}_2(t) = bu_1(t) - \tfrac{bu_1^*u_2(t)}{u_2^*} - b_1u_2^2(t) + b_1u_2(t)u_2^*$$
$$\dot{u}_2(t) = \tfrac{bu_2^*u_1(t) - bu_1^*u_2(t)}{u_2^*} - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)$$
$$\dot{u}_2(t) = \tfrac{b}{u_2^*}(u_2^*u_1(t) - u_1^*u_2(t)) - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)$$

rajoutant et retranchons $u_1(t)u_2(t)$ dans le premier terme du deuxième membre de l'expression de $\dot{u}_2(t)$

$$\dot{u}_2(t) = \tfrac{b}{u_2^*}(u_2^*u_1(t) - u_1^*u_2(t) + u_1(t)u_2(t) - u_1(t)u_2(t)) - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)$$

On trouve

$$\dot{u}_2(t) = \tfrac{b}{u_2^*}\left[-u_1(t)(u_2(t) - u_2^*) + u_2(t)(u_1(t) - u_1^*)\right] - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*)$$

Le système (3.9) devient

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \tfrac{a}{u_1^*}\left[-u_2(t)(u_1(t) - u_1^*) + u_1(t)(u_2(t) - u_2^*)\right] \\ \dot{u}_2(t) = \tfrac{b}{u_2^*}\left[-u_1(t)(u_2(t) - u_2^*) + u_2(t)(u_1(t) - u_1^*)\right] - b_1u_2(t)(u_2(t) - u_2^*) \end{cases} \tag{3.11}$$

étape 4: Cherchons une fonction de Lyapunov pour le système (3.11)

soit:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{2}c_i(u_i(t)-u_i^*-\ln\frac{u_i(t)}{u_i^*})$$

Où $c_i, i=1,2$ sont des constantes positive à determiner

V(.) est définie positive

on a:

$$\frac{dV(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{2}c_i(u_i(t)-u_i^*)\frac{\dot{u}_i(t)}{u_i(t)}$$

Par le système (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt}&=\frac{c_1a(u_1(t)-u_1^*)}{u_1^*u_1(t)}\left[-u_2(t)(u_1(t)-u_1^*)+u_1(t)(u_2(t)-u_2^*)\right]\\&+\frac{c_2b(u_2(t)-u_2^*)}{u_2(t)u_2^*}\left[-u_1(t)(u_2(t)-u_2^*)+u_2(t)(u_1(t)-u_1^*)\right]\\&-c_2b_1(u_2(t)-u_2^*)^2\end{aligned}$$

Posons

$$c_1=\frac{bu_1^*}{au_2^*},$$
$$c_2=1,$$

$$\frac{dV(t)}{dt}=-\frac{b_1}{u_2^*}\left[\sqrt{\frac{u_2(t)}{u_1(t)}}(u_1(t)-u_1^*)+\sqrt{\frac{u_1(t)}{u_2(t)}}(u_2(t)-u_2^*)\right]^2-b_1(u_2(t)-u_2^*)^2$$

On a

$$-\frac{b_1}{u_2^*}\left[\sqrt{\frac{u_2(t)}{u_1(t)}}(u_1(t)-u_1^*)+\sqrt{\frac{u_1(t)}{u_2(t)}}(u_2(t)-u_2^*)\right]^2<0$$

On aura

$$\frac{dV(t)}{dt}\leq -b_1(u_2(t)-u_2^*)^2<0,\forall t$$

Donc le système (3.11) est globalement stable au point d'equilibre E^*

intégrant $\frac{dV(.)}{dt}$ entre 0 et t

$$V(t) + b_1 \int_0^t (u_2(s) - u_2^*)^2 ds \leq 0,$$

ceci implique que $(u_2(t) - u_2^*)^2 \in L^1\,]0, +\infty[$,et $u_2(.) - u_2^*$ et $\dot{u}_2(.)$ sont uniformément continue; alors d'aprés le lemme (1.2) (de Chapitre 1), on conclut que

$$\lim_{t\to+\infty} (u_2(t) - u_2^*)^2 = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} \dot{u}_2(t) = 0,$$

ceci implique que

$$\lim_{t\to+\infty} u_2(t) = u_2^*,$$
$$\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = u_1^*$$

(d'aprés l'expression de $\dot{u}_2(.)$)

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe $T_2 \geq T_1$tel que $t \geq T_2$

Nous avons donc

$$u_1(t) \geq u_1^* - \epsilon,$$
$$u_2(t) \geq u_2^* - \epsilon$$

Par le lemme (1.3) on trouve alors que la solution $(x_1(.), x_2(.))$ du sytème (3.1) vérifie

$$\lim_{t\to+\infty} \inf x_1(t) \geq u_1^* - \epsilon$$
$$\lim_{t\to+\infty} \inf x_2(t) \geq u_2^* - \epsilon$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit il existe $T_2 \geq T_1$ tel que $t \geq T_2$ on a

$$x_1(t) \geq u_1^* - \epsilon$$
$$x_2(t) \geq u_2^* - \epsilon$$

étape 5:Calculons maintenant la limite inferieure de $y(.)$,quand t tend vers $+\infty$

On a

$$x_2(t) \geq \frac{x_2(t)}{2},$$

et pour $\epsilon > 0,\ x_2(t) \geq u_2^* - \epsilon \Rightarrow \frac{x_2(t)}{2} > \frac{u_2^*}{2} - \epsilon$

On a la troisième équation de système (3.1)

$$\dot{y}(t) = y(t)(-r + \frac{a_2 x_2(t)}{my(t)+x_2(t)}),$$

Par ailleurs

$$\frac{x_2(t)}{2} \geq \frac{u_2^*}{2} - \frac{\epsilon}{2}$$

On aura

$$\dot{y}(t) \geq y(t)\left(-r+\frac{a_2\frac{u_2^*}{2}}{my(t)+\frac{u_2^*}{2}}\right)$$
$$\dot{y}(t) \geq y(t)\left(\frac{-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}}{my(t)+\frac{u_2^*}{2}}\right)$$
$$\dot{y}(t) \geq \frac{y(t)}{my(t)+\frac{u_2^*}{2}}\left[-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}\right]$$
$$\dot{y}(t) \geq \frac{y(t)}{m\left(y(t)+\frac{u_2^*}{2m}\right)}\left[-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}\right]$$
$$\dot{y}(t) \geq \frac{y(t)}{\left(y(t)+\frac{u_2^*}{2m}\right)}\left[\frac{-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}}{m}\right]$$

Or

$$\frac{y(t)}{y(t)+\frac{u_2^*}{2}} \leq 1,$$

On obtient

$$\left[\frac{y(t)}{y(t)+\frac{u_2^*}{2}}\right]\left[\frac{-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}}{m}\right] \geq \left[\frac{-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}}{m}\right]$$
$$\dot{y}(t) \geq \left[\frac{-r\left(my(t)+\frac{u_2^*}{2}\right)+a_2\frac{u_2^*}{2}}{m}\right]$$
$$\dot{y}(t) \geq \frac{-rmy(t)+(a_2-r)\frac{u_2^*}{2}}{m}$$
$$\dot{y}(t) \geq -ry(t)+\frac{(a_2-r)u_2^*}{2m}$$
$$\dot{y}(t)+ry(t) \geq \frac{(a_2-r)u_2^*}{2m}$$
$$y(t) \geq y(0)\exp(-rt)+\frac{(a_2-r)u_2^*}{2m}$$

Passons à la limte infèrieure quant t tend vers $+\infty$, on trouve

avec $\alpha_2 - r > 0$ d'aprés (H1)

$$\liminf_{t\to+\infty} y(t) \geq \frac{(a_2-r)u_2^*}{2m}$$

Conclusion: Le système (3.1) est donc uniformément persistent sur sont domaine D. ■

Bibliographie

[1] G.BUTER and P.waltman, Persistence in dynamical systems. J,diff.Eqns 63,255-263(1986)

[2] G, J, BUTLER, H,I,FREEDMAN and P, WALTMAN, Uniformly persistence systems, Proc, Amer,Math,Soc„ 96(1986),425-430,

[3] H,I FREEDMAN and P.WALTMAN, Mathematical analysis of some three species food-chain models .Maths Biosc.33,257-276 (1977),

[4] H, I, FREEDMAN and P, WALTMAN, Persistence in models of three interacting predator-prey populations,Maths Biosci,68,213-231(1984),

[5] H,I, FREEDMAN and S, RUAN, Uniform persistence in functional differential equations, J, Differerential Equations, 115 (1995), 173-192,

[6] H.I.FREEDMAN and SHIGUI RUAN and MOXUN TANG, Uniform persistance and flows near a clowsed positively invariant set -October 30,-2002.

[7] J. K. HALE, Ordinary differential equations, Pure and Applied Mathematics, Vol. 21,Wiley-interscience, 1969,

[8] J, K, HALE, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Amer,Math, Soc„ Providence, 1988,

[9] J, HOFBAUER, A unified approach to persistence, Acta Appl, Math, (1989),14, 11-22

[10] Rui Xu , M.A.J. Chaplain, F.A. Davidson, Persistence and global stability of a ratio-dependent predator–prey model with stage structure 158 (2004) 729–744

[11] M, TANG, Persistence in a higher dimensional population dynamical systems, Acta Math„ Appl, Sinica, 13 (1990), 431-443,

[12] Z,D,TENG and K,C DUAN, Persistence in dynamical systems, Quart,Appl,Math„ 48 (1990), 463-472,