

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Modélisation Mathématique des Systèmes complexes

présenté par

MENACER Youssaf Ammar

Soutenu le : 04 Juin 2016

Système parabolique non-linéaire issu d'un modèle biologique : Existence et Comportement asymptotique

Soutenu devant le jury composé de :

M. MOUSSAOUI ALI	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. TOUAOULA MOHAMED TARIK	Professeur, Université de Tlemcen	Examineur
M. MIRI SOFIANE	M.C.A. Université de Tlemcen	Examineur
M. ABDELLAOUI BOUMEDIENE	Professeur, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2015-2016

Département de Mathématiques

Faculté des sciences

BP 119 Tlemcen

Email : amar_menacer@yahoo.com

A ma chère mère en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accordent et tout l'amour dont elle m'entoure.

A mon cher père qui est le plus bon père dans ce monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A mes chers frères Mouhammed, Imad et à mes soeurs Assia et Yousra.

*"Vivre avec l'espoir est une vie qui en vaut bien d'autres." Philosophe :
Blaise Pascal.*

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Monsieur le Professeur Abdellaoui. B. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger mon mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur Moussaoui.A, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées ; aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Un grand merci aussi à Monsieur le Professeur Touaoula M.T, pour avoir accepté de faire partie du jury. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance pour son aide et son soutien.

Mes plus vifs remerciements à Monsieur Miri.S, pour le temps qu'il a consacré à examiner ce mémoire, et aussi d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je remercie également : M.Attar.A et M.Bentifour.R, qui m'ont facilité d'intégrer leur groupe de recherche et aussi pour leur soutien et encouragements tout au long de ce mémoire.

Mes remerciements chaleureux : à Monsieur le Professeur Dib.H, j'ai beaucoup appris à son contact. Je remercie en lui la personne qui m'a donné des conseils avisés et des indications fructueuses.

Enfin je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Notations	1
Introduction	3
1 Préliminaires	5
1.1 Quelques outils dans les espaces de Lebesgue	5
1.2 Quelques outils dans les espaces de Sobolev	8
1.3 Quelques outils dans les espaces de Sobolev paraboliques	12
2 La méthode de monotonie	19
2.1 La méthode de monotonie pour les problèmes paraboliques	20
2.2 Méthode de monotonie pour les systèmes parabolique couplés	30
3 Applications	51
3.1 Introduction	51
3.2 Existence et unicité de problème parabolique	53
3.3 Existence d'une solution de coexistence	57
3.4 Le comportement asymptotique	64
3.5 Simulations numériques	73
3.6 Conclusion	80
Bibliographie	81

Notations

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$	Élément de \mathbb{R}^N
$r = x = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)}$	Module de x
$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
p'	Exposant conjugué de p , $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$p^* = \frac{Np}{(N-p)}$	Exposant critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$\partial_p\Omega_T$	Le bord parabolique de Ω_T
$\text{supp}(u)$	Support de la fonction u
$\text{meas}(A) = A $	Mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$
$\ \cdot\ _s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\ \cdot\ _X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de \mathbb{R}^N de rayon R centrée à l'origine
$B_R(x_0)$	Boule de \mathbb{R}^N de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^N$

Notation	Définition
X'	Espace dual de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans \mathbb{R}^N / crochet de dualité X, X'
\setminus	Différence d'ensemble
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Ω' sous ensemble ouvert de Ω avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
$p.p$	Presque partout
V^+	Partie positive de la fonction V , $V^+ = \max(V, 0)$
V^-	Partie negative de la fonction V , $V^- = \max(-V, 0)$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes sur Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Espace des fonctions Hölderiennes de classe k sur Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ positives
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$\mathcal{C}^{\alpha,\beta}(\Omega \times (0, T))$	Espace des fonctions de classe α dans Ω par rapport à x , et de classe β dans $(0, T)$ par rapport à t .
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable, } \int_\Omega u ^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable } \exists C \text{ tal que } u(x) \leq C \text{ en p.p. } x \in \Omega \}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	$W_0^{k,2}(\Omega)$

Introduction

La théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires a connu récemment un très grand avancement théorique et pratique, cette évolution a été motivée par des applications des systèmes EDP en physique, biologie, chimie et d'autres sciences.

Notre but dans ce mémoire est de considérer une classe de systèmes elliptiques et paraboliques non linéaires couplés qui modélisent un événement d'interaction entre deux populations biologiques.

Les termes non linéaires intègrent les interactions entre les deux espèces occupant un domaine commun. Les cas de concurrence (compétition), de coopération ou relation proie-prédateur sont couvertes par le modèle proposé.

Plus précisément, on considère le système parabolique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \sigma_1 \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2), \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \sigma_2 \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2), \quad (x, t) \in Q_T \\ u_1(x, t) = g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\ u_2(x, t) = g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right. \quad (1)$$

Où $\Omega \in \mathbb{R}^N$ est un domaine borné avec $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f_i \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$, et $g_i \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ avec un certain $0 < \alpha < 1$ pour chaque $i = 1, 2$. Ainsi que le cas stationnaire associé

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_1 \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2), \quad x \in \Omega, \\ -\sigma_2 \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2), \quad x \in \Omega, \\ u_1 = 0 \quad x \in \partial\Omega, \\ u_2 = 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2)$$

L'existence d'une solution pour le système parabolique (1) peut être démontré en utilisant la théorie des semi-groupes. Dans ce mémoire on va développer la méthode de monotonie pour prouver l'existence des solutions positives pour les deux systèmes (elliptique et parabolique).

L'avantage de cette méthode est quelle peut être appliquée à une classe très grande de systèmes non linéaires une fois qu'on a un principe de comparaison. On peut couvrir même le cas où l'opérateur principal n'est pas linéaires (de type p-laplacien,...).

A l'aide de cette méthode on va analyser aussi le comportement asymptotique de la solution de système parabolique. L'idée consiste à utiliser un argument d'encadrement et de passer à la limite dans le temps.

L'exemple typique qu'on va analyser en détail est le suivant :

$$f_1(u, v) = u(a - bu - cv), \quad f_2(u, v) = v(e - gv - du).$$

Il est clair que cet exemple généralise le modèle logistique pour deux populations distincts. Suivant les valeurs des paramètres a, b, c, d, e et g , on va couvrir les trois cas importants : Concurrence, coopération ou relation proie-prédateur.

Le mémoire est divisé en trois chapitres : Le premier chapitre est dédié à présenter des outils d'analyse non linéaire nécessaire pour étudier nos systèmes et présenter d'une manière complète la méthode de monotonie.

Dans le chapitre deux on présente la méthode de monotonie (connue aussi sous le nom de méthode de sous-sur solutions) dans un cadre général. Notons que la situation est différente en comparant avec le cas d'une équation unique.

Suivant des hypothèses naturelles sur les fonctions f_1 et f_2 , on va classier le problème en trois grandes catégories : Quasi-monotone-croissante, décroissante ou mixte. Le but du chapitre est de démontrer l'existence d'une solution sous la condition d'existence d'une sous et sur solution ordonnées.

Enfin dans le dernier chapitre on applique notre étude théorique pour traiter le système (1).

Chapitre 1

Préliminaires

Nous présentons quelques outils d'analyse non-linéaire qui seront utilisés au cours de ce mémoire. Notons qu'on va étudier deux types de problèmes "elliptiques et paraboliques", nous allons donc subdiviser ce chapitre en trois parties : Dans la première partie nous faisons appel à des résultats de base, comme les notions des espaces de Lebesgue et quelques résultats de compacité d'usage important comme le théorème de **Rellich-Kondrachov**.

La deuxième partie est consacrée à présenter les outils nécessaires dans les espaces de Sobolev pour étudier les problèmes elliptiques.

Enfin dans la dernière section nous présentons les notions et les propositions nécessaires dans les espaces de Sobolev paraboliques pour étudier les problèmes paraboliques associés.

1.1 Quelques outils dans les espaces de Lebesgue

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue dx . Voici quelques définitions de base dans les espaces de Lebesgue :

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \ ; f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

C'est la norme dans l'espace de Lebesgue L^p .

Définition 1.2. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

On note $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$

Définition 1.3. Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si

$f \mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Notation On désigne par $C_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de C^k sur Ω à support compact, $\forall k \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k; f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \text{ où } K \subset \Omega \text{ est un compact et } \forall k \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 1.1. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int f u = 0 \quad \forall u \in C_0(\Omega).$$

Alors $f = 0$ p.p. sur Ω

Remarque 1.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p

i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On représente maintenant l'inégalité de Young qui sera un outil puissant pour la démonstration de l'inégalité de Hölder (voir [4]) :

Théorème 1.2. (Inégalité de Young)

Soient p et q sont deux exposants conjugués, alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0.$$

Théorème 1.3. (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$ deux exposants conjugués.

Alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Le théorème suivant donne un sens à la norme $\|\cdot\|_{L^p}$, pour la démonstration voir [4].

Théorème 1.4. L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.5. (Fischer-Riesz)

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Pour la preuve de ce théorème il est conseillé de voir [4]. Voici quelques outils fondamentaux pour montrer la convergence d'une suite mesurable dans les espaces L^p :

Théorème 1.6. (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)

Soit $\{f_n\}$ une suite croissante de fonctions de L^1 telle que $\sup_n \int f_n < \infty$.

Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Théorème 1.7. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .

b) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Lemme 1.1. (Lemme de Fatou)

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de L^1 telle que

(1) Pour chaque n , $f_n(x) \geq 0$ p.p. sur Ω

(2) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

.

Le lemme suivant est l'une des versions de lemme de Fatou :

Lemme 1.2. (Brézis-Lieb)(Correction de lemme de Fatou)

Pour $1 \leq p < \infty$, soit $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ bornée telle que

$f_n \rightarrow f$ p.p., alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| |f_n(x)|^p - |f(x)|^p - |f_n(x) - f(x)|^p \right| d\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \int |f_n - f|^p = \int |f_n|^p - \int |f|^p + o(1)$$

On présente ici le lemme suivant qui sera très utile pour montrer les résultats d'existence.

Lemme 1.3. (Lemme de Vitali)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , $\mu(\Omega) < \infty$ avec

$f_n \rightarrow f$ p.p. dans Ω et $\|f_n\|_{L^p} \leq C$, pour $1 \leq p \leq \infty$

Si $\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0$ telle que

$$\forall E \subset \Omega \text{ un ensemble mesurable avec } \mu(E) < \eta \Rightarrow \int_E |f_n|^p d\mu \leq \varepsilon$$

Alors $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Pour plus de détails sur les espaces de Lebesgue voir [4] et [7].

1.2 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Nous allons présenter dans cette section quelques définitions utiles qui seront utilisées pour étudier les problèmes elliptiques.

Définition 1.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^p(\Omega); \text{ tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1 \dots N \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou bien de la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (\text{si } 1 \leq p < +\infty)$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|.$$

En particulier pour $p = 2$, on note $W^{1,2} = H^1$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}, \quad \text{pour tout } u, v \in H^1.$$

Et la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à celle de $W^{1,2}$.

La proposition suivante représente les propriétés fondamentales de l'espace $W^{1,p}$, pour la preuve on renvoie le lecteur à la référence [4] :

Proposition 1.1. L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Voici un premier résultat de densité :

Théorème 1.8. (Friedrichs).

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

- (1) $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$.
- (2) $\nabla u_n|_{\omega} \rightarrow \nabla u|_{\omega}$ dans $(L^p(\omega))^N$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.

(Nous rappelons que la notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est un compact).

Pour la démonstration il est conseillé de voir [4].

Remarque 1.2. L'espace $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$i.e \quad \overline{C_0^1(\mathbb{R}^N)} = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Nous présentons maintenant un théorème important qui affirme que si $1 \leq p < \infty$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, et on prend $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 1.9. (Inégalité de Sobolev) Soit $1 \leq p < \infty$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{où } p^* \text{ est donné par } \quad p^* = \frac{Np}{N-p},$$

Et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

La preuve de ce théorème se trouve dans [4].

Définition 1.5. Soit $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Remarque 1.3. D'après la remarque (1.2), on a

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Mais dans le cas général *i.e pour* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 1.4. Une fonction $v \in L_{loc}^p(\Omega)$ alors $v \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$, si pour tout $K \subset\subset \Omega$ (compact), $v \in W^{1,p}(K)$.

Lemme 1.4. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, avec **Supp u compact** inclus dans Ω , alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le corollaire suivant représente un résultat très important dans les espaces H_0^1 .

Corollaire 1.1. (Inégalité de Poincaré) on suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

L'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.

Remarque 1.5. L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné dans une direction.

Maintenant on présente le théorème de **Rellich-Kondrachov** qui est un résultat très important dans l'étude des EDP elliptiques, parce que il montre l'injection entre les espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et certains espaces de Lebesgues L^p , ce résultat de compacité est un outil fort dans l'étude des EDP qui nous permet de passer d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.10 (Rellich-Kondrachov). Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N tel que Ω est de classe C^1 ,

- Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ avec $p^* = \frac{pN}{N-p}$.
- Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
- Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Si on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors les injections précédente sont vérifiées indépendamment de la régularité du domaine Ω .

Nous recueillons ici un théorème qui sera d'un usage fréquent dans ce qui suit, c'est l'inégalité de **Gagliardo-Nirenberg**.

Théorème 1.11. (Gagliardo-Nirenberg)

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. Pour tout nombre fixé $s \geq 1$, il existe une constante C qui dépend uniquement de N, p et s telle que :

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|v\|_{L^s(\Omega)}^{1-\alpha} \quad (1.1)$$

Où $\alpha \in [0, 1]$, $p, q \geq 1$ vérifie :

$$\alpha = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p} + \frac{1}{s} \right)^{-1} \quad (1.2)$$

Et valable si :

- (1.1.i) $Si N = 1, q \in [s, +\infty], \alpha \in \left[0, \frac{p}{p+s(p-1)} \right]$
 (1.1.ii) $Si 1 \leq p < N, \alpha \in [0, 1] et q \in \left[s, \frac{Np}{N-p} \right] si s \leq \frac{Np}{N-p}$

$$q \in \left[\frac{Np}{N-p}, s \right] si s \geq \frac{Np}{N-p}$$

- (1.1.iii) $Si p \geq N > 1, q \in [s, +\infty) et \alpha \in \left[0, \frac{Np}{Np+s(p-N)} \right]$.

Il est conseillé de voir [1], [4] et [6] pour avoir plus sur les espaces de Sobolev

1.3 Quelques outils dans les espaces de Sobolev paraboliques

De même que dans la section précédente, on va présenter dans cette section quelques outils qui seront utilisés pour étudier les problèmes paraboliques.

1.3.1 Quelques notations

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^N de frontière $\partial\Omega$ et pour $0 < T < \infty$ on note $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ c'est le domaine cylindrique.

Et aussi soit $S_T \equiv \partial\Omega \times (0, T], \Gamma \equiv S_T \cup (\Omega \times \{0\})$ indiquent le bord latéral et le bord parabolique de Ω_T respectivement.

Nous introduisons des espaces de fonctions de $(x, t) \in \Omega_T$, qui présentent une régularité différente dans les variables d'espaces et de temps.

1.3.2 Quelques définitions et propriétés fondamentales

Définition 1.6. Soient $q, r \geq 1$, f est une fonction définie et mesurable, elle appartient à $L^{q,r}(\Omega_T) \equiv L^r(0, T; L^q(\Omega))$ si :

$$\|f\|_{L^{q,r}(\Omega_T)} = \left(\int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |f(x, t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

En général pour X un espace de Banach $1 \leq q \leq \infty$

$$f \in L^q(0, T; X) \text{ ssi } \left(\int_0^T \|f(\cdot, t)\|_X^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Définition 1.7.

On dit que $f \in L_{loc}^{q,r}(\Omega_T)$ si $f \in L^{q,r}(K)$ tell que $K \subset\subset \Omega_T$ (un compact).

Remarque 1.6. Si $q = r$ ceci implique que

$$\|f\|_{L^{q,r}(\Omega_T)} = \left(\int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^q(\Omega_T)}$$

D'où $L^{q,r}(\Omega_T) \equiv L^q(\Omega_T)$, de même pour $L_{loc}^{q,r}(\Omega_T) \equiv L_{loc}^q(\Omega_T)$.

Définition 1.8.

Soient $m, p \geq 1$ et on considère les espaces de Banach.

$$V^{m,p}(\Omega_T) \equiv L^\infty(0, T; L^m(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$$

Et

$$V_0^{m,p}(\Omega_T) \equiv L^\infty(0, T; L^m(\Omega)) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

Et muni de la norme, pour $v \in V^{m,p}(\Omega_T)$ on a :

$$\|v\|_{V^{m,p}(\Omega_T)} \equiv \|v\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))} + \|v\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$$

D'autre part on a

$$\|v\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Et on a

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v(x, t)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\iint_{\Omega_T} |\nabla v(x, t)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)} \end{aligned}$$

Par conséquence $\|v\|_{V^{m,p}(\Omega_T)} \equiv \sup_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^m(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)}$, est une norme pour les deux espaces ci-dessus.

Quand $m = p$, on a

$$\begin{cases} V_0^{p,p}(\Omega_T) \equiv V_0^p(\Omega_T) \\ Et \\ V^{p,p}(\Omega_T) \equiv V^p(\Omega_T) \end{cases}$$

La proposition suivante montre l'injection continue de $V^{m,p}(\Omega_T)$ dans $L^q(\Omega_T)$:

Proposition 1.2. Il existe une constante γ qui dépend uniquement de N, p et m telle que :

$$\iint_{\Omega_T} |v(x, t)|^q dx dt \leq \gamma^p \left(\iint_{\Omega_T} |\nabla v(x, t)|^p dx dt \right) \left(\sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{N}} \quad (1.3)$$

Où $q = p \frac{N+m}{N}$

De plus

$$\|v\|_{L^q(\Omega_T)} \leq \gamma \|v\|_{V^{m,p}(\Omega_T)} \quad (1.4)$$

Démonstration. On suppose que $N(p - m) + mp > 0$

Pour $q = p \frac{N+m}{N} = p + \frac{pm}{N}$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x, t)|^q dx &= \int_{\Omega} |v(x, t)|^p |v(x, t)|^{\frac{pm}{N}} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(|v(x, t)|^{\frac{pN}{N-p}} \right)^{\frac{N-p}{N}} (|v(x, t)|^m)^{\frac{p}{N}} dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\leq \left(\int_{\Omega} |v(x, t)|^{\frac{pN}{N-p}} dx \right)^{\frac{N-p}{N}} \left(\int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{N}}$$

Et d'après l'inégalité de Sobolev on a :

$$\left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{Np}{N-p}} \right)^{\frac{N-p}{Np}} \leq \gamma \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ceci implique

$$\left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{Np}{N-p}} \right)^{\frac{N-p}{N}} \leq \gamma^p \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \right)$$

Donc

$$\int_{\Omega} |v(x, t)|^q dx \leq \gamma^p \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \right) \left(\int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{N}} \quad \text{pour } 0 < t < T$$

On sait que $v \in L^\infty(0, T; L^m(\Omega))$, d'où

$$\int_{\Omega} |v|^m dx \leq \text{Supess}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx$$

Ceci nous donne

$$\int_{\Omega} |v(x, t)|^q dx \leq \gamma^p \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \right) \left(\text{Supess}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{N}}, \quad \text{pour } 0 < t < T$$

Et par suite, on intègre sur $(0, T)$ i.e.

$$\iint_{\Omega_T} |v(x, t)|^q dx dt \leq \gamma^p \left(\iint_{\Omega_T} |\nabla v|^p \right) \left(\text{Supess}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{N}} \quad \text{d'où (1.3)}$$

Pour montrer (1.4) on réécrit (1.3) sous la forme

$$\|v\|_{L^q(\Omega_T)} = \left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} |v(x, t)|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^q(\Omega_T)} &\leq \gamma^{\frac{p}{q}} \left(\iint_{\Omega_T} |\nabla v|^p dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\text{Supess}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{qN}} \\ &\leq \gamma \|\nabla v\|_{L^q(\Omega_T)}^{\frac{p}{q}} \left(\text{Supess}_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^m dx \right)^{\frac{p}{qN}} \end{aligned}$$

Et par suite

$$\|v\|_{L^q(\Omega_T)} \leq \gamma \|\nabla v\|_{L^q(\Omega_T)}^{\frac{p}{q}} \left(\text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^m(\Omega)} \right)^{\frac{mp}{qN}}$$

On a $q = p + p\frac{m}{N} \Leftrightarrow \frac{p}{q} + \frac{pm}{qN} = 1 \Leftrightarrow \frac{pm}{qN} = 1 - \frac{p}{q}$

On applique l'inégalité de Young, on aura donc

$$\|v\|_{L^q(\Omega_T)} \leq \gamma \left[\frac{\left(\|\nabla v\|_{L^q(\Omega_T)}^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{q}{p}}}{\frac{q}{p}} + \frac{\left(\text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^m(\Omega)} \right)^{\frac{\frac{mp}{qN}}{1 - \frac{p}{q}}}}{\frac{1}{1 - \frac{p}{q}}} \right]$$

Alors

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^q(\Omega_T)} &\leq M\gamma \left[\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)} + \text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^m(\Omega)} \right] \\ &\leq \gamma \left[\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)} + \text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^m(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

telle que $M = \max \left\{ \frac{p}{q}, 1 - \frac{p}{q} \right\} < 1$

D'où

$$\|v\|_{L^q(\Omega_T)} \leq \gamma \|v\|_{V^{m,p}(\Omega_T)}, \forall v \in V^{m,p}(\Omega_T)$$

Par conséquence $v \in L^q(\Omega_T)$ c-à-d $V^{m,p}(\Omega_T) \hookrightarrow L^q(\Omega_T)$ (c'est l'injection continue de $V^{m,p}(\Omega_T)$ dans $L^q(\Omega_T)$), d'où (1.4). \square

Un résultat important pour le cas où $p = m$ et par l'utilisation du théorème 1.11 c'est la proposition suivante :

Proposition 1.3. Il existe une constante γ qui dépend uniquement de N et p , telle que pour tout $v \in V_0^p(\Omega_T)$:

$$\|v\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq \gamma \|v\|_{V^p(\Omega_T)} \quad (1.5)$$

Où les nombres $q, r \geq 1$, sont reliés par :

$$\frac{1}{r} + \frac{N}{pq} = \frac{N}{p^2} \quad (1.6)$$

Et valable si :

$$\begin{cases} q \in (p, \infty), & r \in [p^2, \infty); & \text{si } N = 1 \\ q \in \left[p, \frac{Np}{N-p} \right], & r \in [p, \infty]; & \text{si } 1 \leq p < N \\ q \in [p, \infty), & r \in \left[\frac{p^2}{N}, \infty \right]; & \text{si } 1 < N \leq p \end{cases} \quad (1.7)$$

Démonstration.

Soit $v \in V_0^p(\Omega_T)$ et soit $r \geq 1$ choisi à partir du théorème 1.11 pour $s = p$

Il en résulte que :

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)} \leq \beta \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^{1-\alpha}$$

Ceci veut dire

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega_T)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \beta \left(\int_0^T \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha r} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^{(1-\alpha)r} dt \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \beta \text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^{1-\alpha} \left(\int_0^T \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha r} dt \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

On choisit $\alpha r = p$, ceci nous donne

$$\left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega_T)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \leq \beta \text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^{1-\alpha} \left(\int_0^T \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

D'où

$$\|v\|_{L^r(0, T; L^q(\Omega))} \leq \beta \left(\text{Supess}_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1-\frac{p}{r}} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)}^{\frac{p}{r}}$$

On applique l'inégalité de Young encore une fois on obtient

$$\left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega_T)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \leq \gamma \|v\|_{V^p(\Omega_T)}, \text{ où } \gamma = \beta \max \left\{ 1 - \frac{p}{r}, \frac{p}{r} \right\}.$$

On a $\frac{p}{r} = N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$, d'où

$$\gamma = \beta \max \left\{ 1 - N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right), N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right\}.$$

D'où (1.5).

Et (1.2), (1.1.i), (1.1.ii) et (1.1.iii) donnent (1.6), (1.7). \square

La proposition suivante est valable pour les fonctions $v \in V^p(\Omega_T)$ non nécessairement nulles sur le bord latéral de Ω_T .

Proposition 1.4. Il existe une constante γ qui dépend uniquement de N, p, m , et la structure de $\partial\Omega$, telle que pour tout $v \in V^p(\Omega_T)$:

$$\|v\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq \gamma \left(1 + \frac{T}{|\Omega|^{\frac{p}{N}}}\right)^{\frac{1}{r}} \|v\|_{V^p(\Omega_T)} \quad (1.8)$$

Où q et r satisfassent (1.6) et (1.7).

Définition 1.9. (Moyennes de Steklov)

Soit v est une fonction dans $L^1(\Omega_T)$ et pour $0 < h < T$, on introduit les moyennes de **Steklov** :

$v_h(\cdot, t)$ est défini pour tout $0 < h < T$ par

$$v_h \equiv \begin{cases} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\cdot, \tau) d\tau, & \text{si } t \in (0, T-h) \\ 0, & \text{si } t > T-h \end{cases}$$

$$v_{\bar{h}} \equiv \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t v(\cdot, \tau) d\tau, & \text{si } t \in (h, T] \\ 0, & \text{si } t < h \end{cases}$$

Voici le lemme suivant qui utilise les les moyennes de **Steklov**, et pour sa démonstration il suffit d'utiliser les propriétés des espaces L^p .

Lemme 1.5.

Soit $v \in L^{q,r}(\Omega_T)$, alors

$$v_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} v \text{ dans } L^{q,r}(\Omega_{T-\epsilon}), \forall \epsilon \in (0, T).$$

Si $v \in C(0, T; L^q(\Omega))$, alors

$$v_h(\cdot, t) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} v(\cdot, t) \text{ dans } L^q(\Omega), \forall t \in (0, T-\epsilon), \forall \epsilon \in (0, T).$$

Et on refait les mêmes démarches pour $v_{\bar{h}}$.

Pour plus de détails voir [5].

Chapitre 2

La méthode de monotonie

La méthode de sous et sur-solutions est un outil puissant pour établir des résultats d'existence pour les équations différentielles. De plus, cette méthode peut également être appliquée à des systèmes. L'idée de base de cette méthode est d'utiliser une sous-solution ou une sur-solution comme une itération initiale dans un processus itératif approprié, de sorte que la suite résultante d'itérations soit monotone et converge vers une solution de ce problème.

Dans ce chapitre, la méthode de sous et sur-solutions et de son itération monotone associée sont introduites pour une équation de la chaleur scalaire et un système d'équations de chaleur couplées. Similairement cette méthode peut être appliquée à des équations et des systèmes paraboliques dans une forme plus générale et également à des équations et des systèmes elliptiques.

Nous faisons appel à un théorème nécessaire pour la suite :

Théorème 2.1. (Le principe du maximum :le cas elliptique)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N et $u \in W^{1,2}(\Omega)$, alors si :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Ceci implique que $u \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$.

Et de même pour le cas parabolique :

Théorème 2.2. (Le principe du maximum : le cas parabolique)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N et $u \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, si

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \geq 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T \\ u(x, 0) \geq 0, & (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ u(x, t) \geq 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.2)$$

Alors $u \geq 0$ dans $\overline{Q_T}$. En plus si $u \neq 0$, alors $u > 0$ dans Q_T .

Par conséquence on obtient le principe de comparaison suivant :

Théorème 2.3. (Principe de comparaison)

Soit $u, v \in C^{2,1}(Q_T)$ tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v, & (x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T \\ u \geq v, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.3)$$

alors $u \geq v$ dans $\overline{Q_T}$. En plus si $u(x_0, t_0) = v(x_0, t_0)$ pour $(x_0, t_0) \in Q_T$, alors $u = v$ dans Q_T .

Voir [9].

2.1 La méthode de monotonie pour les problèmes paraboliques

Nous considérons le problème parabolique non-linéaire

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T \\ u(x, t) = g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.4)$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, avec $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ et $g \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ pour un certain $0 < \alpha < 1$.

Notre objectif dans ce chapitre est d'avoir des solutions classiques dans $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$.

2.1.1 Définition de sous et sur-solution

Définition 2.1. Une fonction $\tilde{u} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ est dite sur-solution du problème (2.4), si

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} & \geq f(\tilde{u}), & (x, t) \in Q_T \\ \tilde{u}(x, t) & \geq g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.5)$$

De même, une fonction $\underline{u} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ est dite sous-solution du problème (2.4), si

$$\begin{cases} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} & \leq f(\underline{u}), & (x, t) \in Q_T \\ \underline{u} & \leq g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.6)$$

\underline{u}, \tilde{u} sont dites ordonnées si $\underline{u}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$.

Définition 2.2. Pour toute sous et sur-solution ordonnées nous définissons le secteur $[\underline{u}, \tilde{u}]$ comme un intervalle fonctionnel :

$$[\underline{u}, \tilde{u}] = \left\{ u \in C(\overline{Q_T}); \underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), (x, t) \in \overline{Q_T} \right\}$$

2.1.2 Itération et la propriété de monotonie

Il est clair que toute solution du problème (2.4) dans $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ est une sous-solution ainsi qu'une sur-solution. Donc, des sous et sur-solutions existent à moins que le problème n'a pas de solution dans $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ (c-à-d c'est une condition nécessaire).

Afin d'assurer l'existence d'une solution il est nécessaire de poser plus de conditions sur la fonction de réaction f . Une hypothèse de base est la condition de Lipschitz unilatéral suivante :

$$f(u_1) - f(u_2) \geq -\underline{c}(u_1 - u_2), \quad \underline{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \tilde{u} \quad (2.7)$$

Où \underline{c} est une constante de Lipschitz et \underline{u}, \tilde{u} sont des sous et sur-solution ordonnées Si $\underline{c} = 0$, la condition précédente est vérifiée si f est monotone (croissante) dans \mathbb{R} .

A partir de (2.7) la fonction $F(u) = \underline{c}u + f(u)$ est croissante en u pour $u \in [\underline{u}, \tilde{u}]$.

On ajoute $\underline{c}u$ dans les deux côtés de la première équation de (2.4), et en choisissant une itération initiale appropriée $u^{(0)} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, nous construisons une suite $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ à partir du processus d'itération

$$\begin{cases} u_t^{(k)} - \Delta u^{(k)} + \underline{c}u^{(k)} = f(u^{(k-1)}) + \underline{c}u^{(k-1)} = F(u^{(k-1)}), & (x, t) \in Q_T \\ u^{(k)}(x, t) = g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.8)$$

Etant donné que pour chaque $k \geq 1$, le côté droit de la première équation de (2.8) est connu, la théorie de L^2 et le *principe du maximum* nous garantissent que la suite $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ est bien définie. De la régularité des solutions des équations de la chaleur

$$u^{(1)} \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T), u^{(k)} \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T), k = 2, 3, \dots$$

Un choix naturel de $u^{(0)}$ est $u^{(0)} = \underline{u}$ et $u^{(0)} = \tilde{u}$. Notons les suites définies pour (2.8) avec $\underline{u}^{(0)} = \underline{u}$ et $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$ par

$$\{\overline{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}, \{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$$

respectivement la suite supérieure et la suite inférieure de (2.8).

Le lemme suivant présente la propriété de monotonie de ces deux suites.

Lemme 2.1. Soient \underline{u}, \tilde{u} des sous et sur-solution ordonnées du problème (2.4) et f satisfait (2.7). Alors les suites $\{\overline{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ et $\{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ possèdent la propriété de monotonie :

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, t) = \underline{u}^{(0)}(x, t) &\leq \underline{u}^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}^{(k+1)}(x, t) \\ &\leq \overline{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \overline{u}^{(k)}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t) = \overline{u}^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Démonstration.

Soit $w(x, t) = \overline{u}^{(0)}(x, t) - \overline{u}^{(1)}(x, t) = \tilde{u}(x, t) - \overline{u}^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$

Alors $w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, et vérifie

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + \underline{c}w \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ w \geq 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Alors d'après le principe du maximum $w \geq 0$ dans $\overline{Q_T}$.

Ceci implique $\overline{u}^{(1)}(x, t) \leq \overline{u}^{(0)}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$.

De même $\underline{u}(x, t) = \underline{u}^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$.

Maintenant soit $w^{(1)}(x, t) = \overline{u}^{(1)}(x, t) - \underline{u}^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$

Alors $w^{(1)} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, et il vérifie

$$\begin{cases} w_t^{(1)} - \Delta w^{(1)} + \underline{c}w^{(1)} \geq F(\tilde{u}) - F(\underline{u}) \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ w^{(1)} \geq g(x, t) - g(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Et encore par le principe du maximum $w^{(1)} \geq 0$, dans $\overline{Q_T}$

Alors nous avons

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}^{(1)}(x, t) \leq \overline{u}^{(1)}(x, t) \leq \overline{u}^{(0)}(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

On Suppose que

$$\underline{u}^{(k-1)}(x, t) \leq \underline{u}^{(k)}(x, t) \leq \overline{u}^{(k)}(x, t) \leq \overline{u}^{(k-1)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T}, \text{ pour } k \geq 1.$$

Pour certains $k \geq 1$, la fonction

$$w^{(k)}(x, t) = \overline{u}^{(k)}(x, t) - \overline{u}^{(k+1)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

Satisfait

$$\begin{cases} w_t^{(k)} - \Delta w^{(k)} + \underline{c}w^{(k)} = F(\overline{u}^{(k-1)}) - F(\overline{u}^{(k)}) \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ w^{(k)} \geq g(x, t) - g(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Le principe du maximum implique $w^{(k)} \geq 0$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$

i.e.

$$\bar{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Un raisonnement similaire donne :

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}^{(k+1)}(x, t), \underline{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k+1)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

D'où par récurrence on a (2.9) est bien démontré. \square

2.1.3 Résultats d'existence

La relation (2.9) implique que la suite supérieure $\{\bar{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite décroissante et minorée, et la suite inférieure $\{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite croissante et majorée donc elles convergent, d'où les limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)}(x, t) = \bar{u}(x, t) \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}^{(k)}(x, t) = \underline{u}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T. \quad (2.10)$$

Existent et satisfont

$$\underline{u}(x, t) \leq \underline{u}(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Nous allons montrer que tous les deux \underline{u}, \bar{u} sont des solutions du problème (2.4).

Par ailleurs, si il existe une constante $\bar{c} \leq \underline{c}$ telle que

$$f(u_1) - f(u_2) \leq -\bar{c}(u_1 - u_2), \underline{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \tilde{u}, \quad (2.11)$$

alors la solution est aussi unique dans $\left[\underline{u}, \tilde{u} \right]$.

Nous présentons un lemme très important pour la suite de cette section, c'est le lemme de l'estimation de Schauder.

Lemme 2.2.

Soient $f \in C^\alpha(\bar{Q}_T), g \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, pour $0 < \alpha < 1$, et $c(x, t) \leq 0$, non identiquement nulle

u est une solution du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu &= f, & (x, t) \in Q_T \\ u(x, t) &= g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Alors, il exist $C > 0$, tell que

$$\|u\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}} \leq C \left(\|f\|_{C^\alpha} + \|g\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}} \right)$$

Pour plus de détails voir [10]. Le théorème suivant montre l'unicité de la solution du problème (2.4) :

Théorème 2.4.

Soient \underline{u}, \tilde{u} est une sous-solution et une sur-solution ordonnées du problème (2.4) et f satisfait (2.7), alors :

i) La suite supérieure $\{\bar{u}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ converge de façon monotone vers une solution \bar{u} , et la suite inférieure $\{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ converge vers une solution \underline{u} , et on a

$$\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

ii) Toute solution $u^* \in [\underline{u}, \tilde{u}]$ du problème (2.4) satisfait :

$$\underline{u}(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \bar{u}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

iii) Si en plus, la condition (2.11) est vérifiée, alors $\bar{u} = \underline{u}$ et est l'unique solution dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$.

Démonstration.

On pose $\{u^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ comme étant soit $\{\bar{u}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ ou $\{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$, et u comme étant soit \bar{u} ou \underline{u} repectivement.

On a $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$, d'où $F \in C^\alpha(\mathbb{R})$ où F est définie précédemment.

Comme $\{u^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ converge de manière monotone vers u , de même $F\left(\{u^{(k)}\}_{k=0}^\infty\right)$ converge de manière monotone vers $F(u)$ (car F est continue).

Comme il est indiqué plus haut, nous avons

$$u^{(1)} \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T), u^{(k)} \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T), k = 2, 3, \dots$$

De plus, il résulte de principe du maximum et l'estimation de Schauder

$$\|u^{(k)}\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq C \left(\|g\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} + \|u^{(k-1)}\|_{C(Q_T)} \right), k = 2, 3, \dots$$

De la propriété de monotonie (2.9)

$$\underline{u} \leq u^{(k)} \leq \tilde{u}, \forall k \geq 0$$

Donc $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ est uniformément bornée dans $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, alors $u \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ est une solution du problème(2.4).

D'après (2.8) on a

$$\underline{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(j)} \forall k, j$$

Alors quand $k \rightarrow \infty$

$$\underline{u} \leq \bar{u}^{(j)} \forall j$$

De même quand $j \rightarrow \infty$

$$\underline{u} \leq \bar{u} \text{ d'où } i)$$

Pour *ii*), si $u^* \in [\underline{u}, \tilde{u}]$ une solution du (2.4), alors \underline{u}, u^* sont une sous-solution et une sur-solution (respectivement) du (2.4), d'après *i*) on a

$$\underline{u} \leq u^*.$$

D'autre part on considère u^*, \tilde{u} comme une sous-solution et une sur-solution (respectivement) du (2.4) de même on a

$$u^* \leq \bar{u}, \quad \text{ceci implique le } ii).$$

Enfin pour montrer *iii*), il suffit de démontrer que :

$$\bar{u}(x, t) \leq \underline{u}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}_T.$$

On pose $w(x, t) = \underline{u}(x, t) - \bar{u}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

On prend en compte $\bar{c} \geq 0$, d'où w satisfait

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f(\underline{u}) - f(\bar{u}) \geq -\bar{c}(\underline{u} - \bar{u}) \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ w = g(x, t) - g(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Alors par (2.11), le principe du maximum assure que $w \geq 0$ i.e. $\bar{u} \leq \underline{u}$, d'où *iii*). \square

Remarque 2.1.

– Dans les conditions (2.7), (2.11); \underline{c}, \bar{c} ne sont pas nécessairement positives

En effet d'après la démonstration précédente

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f(\underline{u}) - f(\bar{u}) \geq -\bar{c}(\underline{u} - \bar{u}) = -\bar{c}w, & (x, t) \in Q_T \\ w = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} (e^{\bar{c}t}w)_t - \Delta(e^{\bar{c}t}w) \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ e^{\bar{c}t}w = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

On pose $v = e^{\bar{c}t}w$, d'où par le principe du maximum $v = e^{\bar{c}t}w \geq 0$, ceci implique $w \geq 0$.

– Encore une fois pour les conditions : (2.7) et (2.11)

Quand $f \in C^1$ dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$, nous pouvons prendre ces constantes

$$\underline{c} = -\min \left\{ f'(u); u \in [\underline{u}, \tilde{u}] \right\}$$

et

$$\bar{c} = -\max \left\{ f'(u); u \in [\underline{u}, \tilde{u}] \right\}$$

Si f est lipschitzienne continue dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$, il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq k|u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in [\underline{u}, \tilde{u}], \quad u_2 \leq u_1$$

donc nous pouvons prendre

$$\underline{c} = k, \bar{c} = -k.$$

Corollaire 2.1.

Soient \underline{u}, \tilde{u} est une sous-solution et une sur-solution ordonnées du problème (2.4), $f \in C^1$ sur $[\underline{u}, \tilde{u}]$, alors d'après le théorème 2.4 le problème (2.4) a une solution unique dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$. De plus cette solution est la limite de la suite définie par (2.8) avec $u^{(0)} = \underline{u}$ ou $u^{(0)} = \tilde{u}$. Si f est lipschitzienne continue dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$, on a le même résultat.

Si f et g sont des fonctions positives alors d'après le principe du maximum la fonction triviale $\underline{u} = 0$ est une sous solution du problème (2.4). Alors l'existence des solutions est possible si il existe une sur-solution positive. Une condition suffisante est :

Pour certains $\rho \geq 0$,

$$f(\rho) \leq 0, \rho \geq g(x, t), (x, t) \in \partial_p Q_T. \quad (2.12)$$

Ceci implique à partir de (2.5) que $\tilde{u} = \rho$ est une sur-solution du problème (2.4). Par l'application du théorème 2.4 nous avons la conclusion suivante, qui est très utile dans les applications.

Théorème 2.5.

Soit \tilde{u} est une sur-solution du problème (2.4) et f est une fonction de C^1 sur $[0, \tilde{u}]$

Si

$$f(0) \geq 0, g(x, t) \geq 0, (x, t) \in \partial_p Q_T.$$

Alors il existe une unique solution du problème (2.4) dans $[0, \tilde{u}]$. Si (2.12) est vérifiée donc pour certains $\rho \geq 0$, alors $\tilde{u} = \rho$ est une sur-solution positive.

Pour établir le théorème 2.4, l'existence d'une sous solution et une sur-solution ordonnées est nécessaire. Dans la suite, nous allons démontrer que sous les conditions (2.7) et (2.11) toute sous-solution et sur-solution sont ordonnées et $\bar{u}^{(k)}, \underline{u}^{(k)}$ sont des sous-solution et sur-solution ordonnées pour $k = 1, 2, \dots$

Théorème 2.6.

Soient \underline{u}, \tilde{u} sont des sous-solution et sur-solution du problème (2.4) respectivement. Supposons que f vérifie (2.7) et (2.11) pour tout u_1 et u_2 entre \underline{u} et \tilde{u} avec $u_2 \leq u_1$ Alors

$$\bar{u}^{(k)} \text{ et } \underline{u}^{(k)}$$

sont des sous-solution et sur-solution ordonnées du problème (2.4) pour $k = 1, 2, \dots$

Démonstration.

Soient

$$c^* = \max \{|\underline{c}|, |\bar{c}|\}, \quad w(x, t) = \tilde{u}(x, t) - \underline{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Où \underline{c} et \bar{c} sont les constantes dans (2.7) et (2.11). On définit

$c(x, t) = c^* \operatorname{sgn} w(x, t)$, où sgn est la fonction signe, définie par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si, } x > 0 \\ 0 & \text{si, } x = 0 \\ -1 & \text{si, } x < 0 \end{cases}$$

Alors

$$w_t - \Delta w = f(\tilde{u}) - f(\underline{u}) \geq -cw, \quad (x, t) \in Q_T$$

Puisque c est bornée dans \bar{Q}_T , le principe du maximum implique

$$w \geq 0 \text{ dans } \bar{Q}_T.$$

i.e.

$$\underline{u}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Pour toute $k = 1, 2, \dots$, par (2.8)

$$\begin{aligned} \bar{u}_t^{(k)} - \Delta \bar{u}^{(k)} = -\underline{c}\bar{u}^{(k)} + F(\bar{u}^{(k-1)}) &= \left[\underline{c} \left(\bar{u}^{(k-1)} - \bar{u}^{(k)} \right) + f(\bar{u}^{(k-1)}) - f(\bar{u}^{(k)}) \right] \\ &\quad + f(\bar{u}^{(k)}) \\ &\geq f(\bar{u}^{(k)}), \end{aligned}$$

pour $(x, t) \in Q_T$. Et

$$\begin{aligned} \underline{u}_t^{(k)} - \Delta \underline{u}^{(k)} = -\underline{c} \underline{u}^{(k)} + F(\underline{u}^{(k-1)}) &= \left[\underline{c} (\underline{u}^{(k-1)} - \underline{u}^{(k)}) + f(\underline{u}^{(k-1)}) - f(\underline{u}^{(k)}) \right] + \\ &f(\underline{u}^{(k)}) \\ &\leq f(\underline{u}^{(k)}), \end{aligned}$$

pour $(x, t) \in Q_T$.

D'autre part, (2.8) et (2.9) impliquent

$$\bar{u}^{(k)}(x, t) \geq g(x, t), \quad \underline{u}^{(k)}(x, t) \leq g(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T$$

Et

$$\bar{u}^{(k)}(x, t) \geq \underline{u}^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T$$

D'où $\bar{u}^{(k)}, \underline{u}^{(k)}$ sont des sous-solution et sur-solution ordonnées. \square

Voir [10].

2.2 Méthode de monotonie pour les systèmes parabolique couplés

La méthode de monotonie et sa sous-solution et sur-solution associée pour les équations scalaires, discutée dans la section précédente, peut être étendue à des systèmes d'équations couplés paraboliques et elliptiques. Toutefois, pour les systèmes couplés d'équations, la définition des sous-solutions et sur-solutions et la construction de suites monotones dépendent de la propriété de quasi-monotone des fonctions de réaction dans le système. Pour illustrer l'idée de base de la méthode, nous considérons un système couplé de deux équations paraboliques de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = f_1(u_1, u_2), & (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = f_2(u_1, u_2), & (x, t) \in Q_T \\ u_1(x, t) = g_1(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \\ u_2(x, t) = g_2(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.13)$$

Où $\Omega \in \mathbb{R}^N$ est un domaine borné avec $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f_i \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$, et $g_i \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ pour un certain $0 < \alpha < 1$ pour chaque $i = 1, 2$.

2.2.1 Fonctions de réaction quasi-monotone

Soit J_i , $i = 1, 2$ des ensembles ouverts de \mathbb{R} .

Définition 2.3. Une fonction $f_i = f_i(u_1, u_2)$, $i = 1, 2$ est dite quasi-monotone croissante (**resp** décroissante) dans $J_1 \times J_2$, si pour toute $u_i \in J_i$ fixée, f_i est croissante (**resp** décroissante) par rapport $u_j \in J_j$ pour $i \neq j$.

Définition 2.4. Une fonction vectorielle $f = (f_1, f_2)$ est dite quasi-monotone croissante (**resp** décroissante) dans $J_1 \times J_2$ si les f_1, f_2 sont quasi-monotones croissantes (**resp** décroissantes). Si l'une des composantes de f est quasi-monotone croissante et l'autre est quasi-monotone décroissante, alors f est dite quasi-monotone mixte.

La fonction f est dite quasi-monotone dans $J_1 \times J_2$ si elle a une des propriétés quasi-monotone ci-dessus.

Nous disons que f est une fonction de C^γ , $0 \leq \gamma \leq 1$ dans $J_1 \times J_2$ si $f_1, f_2 \in C^\gamma$. Si $f_1(u_1, \cdot)$ est continûment différentiable dans J_2 , pour toute $u_1 \in J_1$ et $f_2(\cdot, u_2)$ est continûment différentiable dans J_1 , pour toute $u_2 \in J_2$ et, alors nous appelons $f = (f_1, f_2)$ une quasi-fonction de C^1 dans $J_1 \times J_2$.

Si $f = (f_1, f_2)$ est régulière, alors les trois types de fonctions quasi-monotones dans la définition précédente correspondent à

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \geq 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \geq 0; \quad (u_1, u_2) \in J_1 \times J_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \leq 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \leq 0; \quad (u_1, u_2) \in J_1 \times J_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \leq 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \geq 0; \quad (u_1, u_2) \in J_1 \times J_2 \end{aligned}$$

2.2.2 Définition de sous-solution et sur-solution

Supposons la fonction de réaction $f = (f_1, f_2)$ définie dans \mathbb{R}^2 possède les propriétés quasi-monotone décrites en définition (2.4). Alors, nous pouvons étendre la méthode de monotonie pour des équations scalaires du système couplés (2.13) en utilisant une sous-solution et une sur-solution comme des itérations initiales.

La sous-solution et la sur-solution, notées par $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ et $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, respectivement sont nécessaires pour satisfaire l'inégalité,

$$\underline{u}(x, t) \leq g(x, t) \leq \tilde{u}(x, t); (x, t) \in \partial_p Q_T. \quad (2.14)$$

Où $g = (g_1, g_2)$. L'inégalité $u = (u_1, u_2) \geq v = (v_1, v_2)$ signifie que $u_1 \geq v_1$ et $u_2 \geq v_2$.

Semblables à des problèmes scalaires la sous-solution \underline{u} et la sur-solution \tilde{u} sont définies par des inégalités différentielles. Cependant, la forme d'inégalités différentielles pour \underline{u} et \tilde{u} dépendent des différentes propriétés quasi-monotones de f . Nous considérons toujours le cas où f_1 est quasi-monotone décroissante et f_2 est quasi-monotone croissante quand f est quasi-monotone mixte.

Définition 2.5. Une paire de fonctions $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ et $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ dans $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ sont appelées sous-solution et sur-solution du problème (2.13), si ils vérifient

$$\underline{u}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t); (x, t) \in \overline{Q}_T$$

et l'inégalité(2.14), et si

$$\begin{cases} (\tilde{u}_1)_t - \Delta \tilde{u}_1 - f_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_1)_t - \Delta \underline{u}_1 - f_1(\underline{u}_1, \underline{u}_2), & (x, t) \in Q_T \\ (\tilde{u}_2)_t - \Delta \tilde{u}_2 - f_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_2)_t - \Delta \underline{u}_2 - f_2(\underline{u}_1, \underline{u}_2), \end{cases} \quad (2.15)$$

Quand (f_1, f_2) est quasi-monotone croissante.

$$\begin{cases} (\tilde{u}_1)_t - \Delta \tilde{u}_1 - f_1(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_1)_t - \Delta \underline{u}_1 - f_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2), & (x, t) \in Q_T \\ (\tilde{u}_2)_t - \Delta \tilde{u}_2 - f_2(\underline{u}_1, \tilde{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_2)_t - \Delta \underline{u}_2 - f_2(\tilde{u}_1, \underline{u}_2), \end{cases} \quad (2.16)$$

Quand (f_1, f_2) est quasi-monotone décroissante.

$$\begin{cases} (\tilde{u}_1)_t - \Delta \tilde{u}_1 - f_1(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_1)_t - \Delta \underline{u}_1 - f_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2), & (x, t) \in Q_T \\ (\tilde{u}_2)_t - \Delta \tilde{u}_2 - f_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_2)_t - \Delta \underline{u}_2 - f_2(\underline{u}_1, \underline{u}_2), \end{cases} \quad (2.17)$$

Quand (f_1, f_2) est quasi-monotone mixte.

Remarque 2.2.

On voit d'après cette définition que lorsque (f_1, f_2) est quasi-monotone croissante, nous pouvons utiliser la première et la troisième inégalités dans (2.15) pour déterminer \tilde{u} et utiliser la deuxième et la quatrième inégalités dans (2.15) pour déterminer \underline{u} de façon indépendante; quand (f_1, f_2) est quasi-monotone décroissante, nous pouvons utiliser la première et la quatrième inégalités dans (2.16) pour déterminer $(\tilde{u}_1, \underline{u}_2)$ et utiliser la deuxième et la troisième inégalités dans (2.16) pour déterminer $(\underline{u}_1, \tilde{u}_2)$ de façon indépendante. Ainsi, quand (f_1, f_2) est quasi-monotone mixte, alors $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$ doivent être déterminés simultanément par l'ensemble des quatre inégalités de (2.17).

Définition 2.6. Pour toutes sous-solution $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ et sur-solution $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ ordonnées, nous définissons le secteur fonctionnel $[\underline{u}, \tilde{u}] = \left\{ u = (u_1, u_2) \in C(\overline{Q}_T); \underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T \right\}$.

2.2.3 Suites monotones

Supposons pour un type donné de la fonction de réaction quasi-monotone il existe une paire de sous-solution $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ et sur-solution $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$.

Dans la discussion qui suit, nous considérons chacun des trois types de fonctions de réaction du secteur $[\underline{u}, \tilde{u}]$. De plus, nous supposons qu'il existe des constantes $\underline{c}_i, i = 1, 2$ sachant que pour tous $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [\underline{u}, \tilde{u}]$, (f_1, f_2) satisfait la condition de Lipschitz unilatéral (pour assurer l'existence des solutions)

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) - f_1(v_1, u_2) \geq -\underline{c}_1(u_1 - v_1), & v_1 \leq u_1 \\ f_2(u_1, u_2) - f_2(u_1, v_2) \geq -\underline{c}_2(u_2 - v_2), & v_2 \leq u_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution, nous supposons également qu'il existe une constante $\bar{c}_i \leq \underline{c}_i, i = 1, 2$, sachant que pour tous $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [\underline{u}, \tilde{u}]$

avec $(u_1, u_2) \geq (v_1, v_2)$,

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) - f_1(v_1, v_2) \leq -\bar{c}_1 ((u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)), \\ f_2(u_1, u_2) - f_2(v_1, v_2) \leq -\bar{c}_2 ((u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)), \end{cases} \quad (2.19)$$

Il est clair que s'il existe des constantes $K_i \geq 0$, $i = 1, 2$ sachant que $f = (f_1, f_2)$ satisfait la condition de Lipschitz

$$|f_i(u_1, u_2) - f_i(v_1, v_2)| \leq K_i (|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|),$$

$$(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \left[\underline{u}, \tilde{u} \right], \quad i = 1, 2.$$

Puis les deux conditions (2.18), (2.19) sont vérifiées pour $\underline{c}_i = K_i$, $\bar{c}_i = -K_i$. En particulier, si $(f_1, f_2) \in C^1$ dans $\left[\underline{u}, \tilde{u} \right]$, alors les conditions (2.18) et (2.19) sont vérifiées.

Soit $F_i(u_1, u_2) = \underline{c}_i u_i + f_i(u_1, u_2)$, $(u_1, u_2) \in \left[\underline{u}, \tilde{u} \right]$, $i = 1, 2$.

Remarque 2.3. la condition (2.18) est équivalente à celle F_i est monotone croissante en u_i , pour $i = 1, 2$.

En effet,

Pour $i = 1, u_1 \geq v_1, u_2 \geq v_2$

$$F_1(u_1, u_2) - F_1(v_1, u_2) = \underline{c}_1(u_1 - v_1) + f_1(u_1, u_2) - f_1(v_1, u_2) \geq 0$$

De même pour F_2 .

A partir d'une itération initiale appropriée $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, nous construisons une suite $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} = \{(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$ du processus d'itération

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta u_1^{(k)} + \underline{c}_1 u_1^{(k)} = F_1(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)}), & (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta u_2^{(k)} + \underline{c}_2 u_2^{(k)} = F_2(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)}), & (x, t) \in Q_T \\ u_1^{(k)}(x, t) = g_1(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \\ u_2^{(k)}(x, t) = g_2(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases} \quad (2.20)$$

Il est clair que pour chaque $k = 1, 2, \dots$, le système ci-dessus se compose de deux problèmes linéaires découplés, et par conséquent l'existence de $u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$

est garanti par la théorie de L^2 et le principe du maximum.

De plus, à partir de la régularité des solutions d'équations de la chaleur,

$$u_i^{(1)} \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T), u_i^{(k)} \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T), i = 1, 2, k = 2, 3, \dots$$

Comme dans le cas scalaire, afin d'assurer que cette suite est monotone et converge vers une solution du problème (2.13), il est nécessaire de choisir une itération initiale appropriée. Le choix de cette fonction dépend du type de la propriété quasi-monotone de $f = (f_1, f_2)$.

Alors, pour les fonctions quasi-monotone croissantes, il suffit de prendre soit $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ ou $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Désignons ces deux suites par $\{(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, et $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, respectivement. Le lemme suivant présente la propriété de monotonie de ces deux suites.

Lemme 2.3. Pour $f = (f_1, f_2)$ quasi-monotone croissante, les deux suites $\{(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, et $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$ possèdent la propriété de monotonie

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k)}(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Démonstration.

Soit $w_i^{(0)}(x, t) = \bar{u}_i^{(0)}(x, t) - \bar{u}_i^{(1)}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t) - \bar{u}_i^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $i = 1, 2$

Par (2.14), (2.15) et (2.20),

$$\begin{cases} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t} - \Delta w_i^{(0)} + \mathcal{L}_i w_i^{(0)} \geq F_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - F_i(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = 0, & (x, t) \in Q_T \\ w_i^{(0)}(x, t) \geq g_i(x, t) - g_i(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Le principe du maximum implique $w_i^{(0)} \geq 0$ dans \overline{Q}_T , *i.e.*

$$\bar{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(0)}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T (i = 1, 2)$$

De même

$$\underline{u}_i(x, t) = \underline{u}_i^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(1)}(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T (i = 1, 2)$$

Soit $w_i^{(1)}(x, t) = \bar{u}_i^{(1)}(x, t) - \underline{u}_i^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $i = 1, 2$

Alors, d'après (2.20) et la monotonie de F_i , $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta w_i^{(1)} + c_1 w_i^{(1)} \geq F_i(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) - F_i(\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ w_i^{(1)}(x, t) = g_i(x, t) - g_i(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

Encore une fois le principe du maximum donne $w_i^{(1)} \geq 0$ dans \bar{Q}_T ($i = 1, 2$)

Alors, nous avons

$$\underline{u}_i^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad (i = 1, 2).$$

Supposons que

$$\underline{u}_i^{(k-1)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k-1)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

Pour certains $k \geq 1$. Alors d'après (2.20) et la monotonie de F_i , $i = 1, 2$, la fonction

$w_i^{(k)}(x, t) = \bar{u}_i^{(k)}(x, t) - \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t)$, satisfait la relation

$$\begin{cases} \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial t} - \Delta w_i^{(k)} + c_1 w_i^{(k)} \geq F_i(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - F_i(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \geq 0, & (x, t) \in Q_T \\ w_i^{(k)}(x, t) = g_i(x, t) - g_i(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

D'où

$$\bar{u}_i^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

Un argument similaire donne

$$\underline{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t), \quad \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k+1)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

D'où par récurrence on a (2.21). □

Remarque 2.4.

Quand la fonction de réaction $f = (f_1, f_2)$ est quasi-monotone décroissante, nous choisissons $(\tilde{u}_1, \underline{u}_2)$ ou $(\underline{u}_1, \tilde{u}_2)$ comme une itération initiale $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$ dans le processus d'itération (2.20), et on obtient le processus monotone d'itération pour

cet cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k)} + \underline{c}_1 \bar{u}_1^{(k)} = F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), \quad (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial \underline{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2^{(k)} + \underline{c}_2 \underline{u}_2^{(k)} = F_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), \quad (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial \underline{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1^{(k)} + \underline{c}_1 \underline{u}_1^{(k)} = F_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), \quad (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k)} + \underline{c}_2 \bar{u}_2^{(k)} = F_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), \quad (x, t) \in Q_T \\ \underline{u}_1^{(k)}(x, t) = \bar{u}_1^{(k)}(x, t) = g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\ \underline{u}_2^{(k)}(x, t) = \bar{u}_2^{(k)}(x, t) = g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right. \quad (2.22)$$

et on note les suites correspondantes par $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^\infty$, $\{(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^\infty$, respectivement. Le lemme suivant présente la propriété de monotonie de ces deux suites.

Lemme 2.4. Pour $f = (f_1, f_2)$ quasi-monotone décroissante, les deux suites $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^\infty$, et $\{(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^\infty$ possèdent la propriété de monotonie (2.21).

Démonstration.

Soit $w_i^{(0)}(x, t) = \bar{u}_i^{(0)}(x, t) - \bar{u}_i^{(1)}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t) - \bar{u}_i^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$,
 $i = 1, 2$

Par (2.14), (2.16) et (2.22) et pour $i = 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(0)} + \underline{c}_1 w_1^{(0)} \geq F_1(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) - F_1(\bar{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = 0, \quad (x, t) \in Q_T \\ w_1^{(0)}(x, t) \geq g_1(x, t) - g_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right.$$

Le principe du maximum implique $w_1^{(0)} \geq 0$ dans \bar{Q}_T , *i.e.*

De même pour $i = 2$ *i.e.*

$$w_2^{(0)} \geq 0$$

dans \bar{Q}_T

C-à-d

$$\bar{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(0)}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

De même

$$\underline{u}_i(x, t) = \underline{u}_i^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(1)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

Soit $w_i^{(1)}(x, t) = \bar{u}_i^{(1)}(x, t) - \underline{u}_i^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $i = 1, 2$

Alors, d'après (2.18) et (2.22), et pour $i = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(1)} + c_1 w_1^{(1)} \geq F_1(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) - F_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2), \quad (x, t) \in Q_T \\ \qquad \qquad \qquad = c_1(\tilde{u}_1 - \underline{u}_1) + f_1(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) - f_1(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \\ \qquad \qquad \qquad + f_1(\underline{u}_1, \underline{u}_2) - f_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2) \geq 0 \\ w_1^{(1)}(x, t) = g_1(x, t) - g_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right.$$

Encore une fois le principe du maximum donne $w_1^{(1)} \geq 0$ dans \bar{Q}_T $i = 1, 2$

De même pour $i = 2$ i.e

$$w_i^{(1)} \geq 0, \text{ dans } \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

C-à-d, nous avons

$$\underline{u}_i^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(0)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2.$$

Supposons que

$$\underline{u}_i^{(k-1)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k-1)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

Pour certains $k \geq 1$. Alors, d'après (2.18) et (2.22), $i = 1, 2$, la fonction

$$w_i^{(k)}(x, t) = \bar{u}_i^{(k)}(x, t) - \bar{u}_i^{(k+1)}(x, t)$$

satisfait la relation pour $i = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(k)} + c_1 w_1^{(k)} \geq F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - F_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \\ \qquad \qquad \qquad = c_1(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) \\ \qquad \qquad \qquad + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \geq 0 \\ w_1^{(k)}(x, t) = g_1(x, t) - g_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right.$$

Alors le principe du maximum donne $w_1^{(k)}(x, t) \geq 0$, de même pour $i = 2$ i.e

$$\bar{u}_i^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

Un argument similaire donne

$$\underline{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t), \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k+1)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

D'où par récurrence on a (2.21). \square

Remarque 2.5.

La construction de suites monotones pour les fonctions quasi-monotones mixtes nécessite l'utilisation simultanée des deux sous-solution et sur-solution. Lorsque f_1 est quasi-monotone décroissante et f_2 est quasi-monotone croissante, le processus monotone d'itération est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k)} + \underline{c}_1 \bar{u}_1^{(k)} = F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k)} + \underline{c}_2 \bar{u}_2^{(k)} = F_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial \underline{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1^{(k)} + \underline{c}_1 \underline{u}_1^{(k)} = F_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial \underline{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2^{(k)} + \underline{c}_2 \underline{u}_2^{(k)} = F_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), (x, t) \in Q_T \\ \underline{u}_1^{(k)}(x, t) = \bar{u}_1^{(k)}(x, t) = g_1(x, t), (x, t) \in \partial_p Q_T \\ \underline{u}_2^{(k)}(x, t) = \bar{u}_2^{(k)}(x, t) = g_2(x, t), (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Et

$$\left(\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)} \right) = \left(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2 \right), \left(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)} \right) = \left(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \right). \quad (2.24)$$

L'idée de cette construction est d'obtenir la propriété de monotonie des suites présentées dans le lemme suivant.

Lemme 2.5. Pour $f = (f_1, f_2)$ quasi-monotone mixte, les deux suites $\left\{ (\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \right\}_{k=0}^{\infty}$, et $\left\{ (\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \right\}_{k=0}^{\infty}$ données par (2.23) et (2.24) possèdent la propriété monotone (2.21).

Démonstration.

Soit $w_i^{(0)}(x, t) = \bar{u}_i^{(0)}(x, t) - \bar{u}_i^{(1)}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t) - \bar{u}_i^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $i = 1, 2$

Par (2.17), (2.23) et (2.24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(0)} + c_1 w_1^{(0)} \geq F_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - F_1(\bar{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = 0, \quad (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial w_2^{(0)}}{\partial t} - \Delta w_2^{(0)} + c_2 w_2^{(0)} \geq F_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - F_2(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = 0, \quad (x, t) \in Q_T \\ w_1^{(0)}(x, t) \geq g_1(x, t) - g_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\ w_2^{(0)}(x, t) \geq g_2(x, t) - g_2(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \end{array} \right.$$

Le principe du maximum implique $w_i^{(0)} \geq 0$ dans \bar{Q}_T , *i.e.*

$$\bar{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(0)}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

De même

$$\underline{u}_i(x, t) = \underline{u}_i^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(1)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2$$

Soit $w_i^{(1)}(x, t) = \bar{u}_i^{(1)}(x, t) - \underline{u}_i^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $i = 1, 2$

Alors, d'après (2.23), (2.24) et la monotonie de F_i , $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(1)} + c_1 w_1^{(1)} &= F_1(\bar{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) - F_1(\underline{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) \\ &= F_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - F_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2) \\ &= c_1(\tilde{u}_1 - \underline{u}_1) + f_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - f_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2) + f_1(\underline{u}_1, \underline{u}_2) - f_1(\underline{u}_1, \tilde{u}_2) \geq 0, \\ \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial t} - \Delta w_2^{(1)} + c_2 w_2^{(1)} &= F_2(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) - F_2(\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}), \\ &= F_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - F_2(\underline{u}_1, \underline{u}_2), \\ &= c_2(\tilde{u}_2 - \underline{u}_2) + f_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - f_2(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) + f_2(\tilde{u}_1, \underline{u}_2) - f_2(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \geq 0, \\ &\quad (x, t) \in Q_T \\ w_1^{(1)}(x, t) &= g_1(x, t) - g_1(x, t) = 0, \\ w_2^{(1)}(x, t) &= g_2(x, t) - g_2(x, t) = 0, \\ &\quad (x, t) \in \partial_p Q_T. \end{aligned}$$

En utilisant le principe du maximum donne $w_i^{(1)} \geq 0$, dans \bar{Q}_T , $i = 1, 2$

Alors, nous avons

$$\underline{u}_i^{(0)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2.$$

Supposons que

$$\underline{u}_i^{(k-1)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k-1)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

Pour certains $k \geq 1$. Alors, d'après (2.23), (2.24) et la monotonie de F_i , $i = 1, 2$, la fonction

$w_i^{(k)}(x, t) = \bar{u}_i^{(k)}(x, t) - \bar{u}_i^{(k+1)}(x, t)$, satisfait la relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(k)} + \underline{c}_1 w_1^{(k)} &\geq F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - F_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \\ &= \underline{c}_1(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) + \\ &\quad f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \\ &\geq 0, (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial w_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta w_2^{(k)} + \underline{c}_2 w_2^{(k)} &\geq F_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - F_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\ &= \underline{c}_2(\bar{u}_2^{(k-1)} - \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) + \\ &\quad f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) - f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\ &\geq 0, (x, t) \in Q_T \\ w_1^{(k)}(x, t) = g_1(x, t) - g_1(x, t) &= 0, (x, t) \in \partial_p Q_T \\ w_2^{(k)}(x, t) = g_2(x, t) - g_2(x, t) &= 0, (x, t) \in \partial_p Q_T \end{aligned}$$

D'où par l'utilisation de principe du maximum

$$\bar{u}_i^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

Un argument similaire donne

$$\underline{u}_i^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t), \underline{u}_i^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}_i^{(k+1)}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}_T, i = 1, 2$$

D'où par récurrence on a (2.21). □

Le lemme suivant montre que la construction ci-dessus des suites monotones donne une suite de sous-solution et sur-solution ordonnées pour le problème (2.13).

Lemme 2.6.

Soient $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ est une sous-solution et une sur-solution ordonnées du problème (2.13), et (f_1, f_2) quasi-monotone et satisfait (2.18). D'où, pour chaque (f_1, f_2) quasi-monotone, les itérations correspondantes $\{(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, et $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots$, donné par lemmes 2.3-2.5 sont une sous et sur-solution ordonnées.

Démonstration.

Considérons d'abord le cas où $f = (f_1, f_2)$ est une fonction quasi-monotone croissante. Alors par (2.18) et (2.20), nous avons pour $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k)} &= -c_1 \bar{u}_1^{(k)} + F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\ &= [c_1(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - \\ &\quad f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})] + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\ &\geq f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k)} &= -c_2 \bar{u}_2^{(k)} + F_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\ &= [c_2(\bar{u}_2^{(k-1)} - \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) - \\ &\quad f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})] + f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\ &\geq f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \end{aligned}$$

$$\bar{u}_1^{(k)}(x, t) = g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T$$

$$\bar{u}_2^{(k)}(x, t) = g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T$$

ce qui montre que $(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$ est une sur-solution du notre problème. La preuve de la sous-solution est similaire.

pour le cas quasi monotone décroissante. De même, d'après (2.18) et (2.22), nous avons pour $k = 1, 2, \dots$ Nous commençons par $(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_1^{(k)})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k)} &= -c_1 \bar{u}_1^{(k)} + F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) \\ &= [c_1(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - \\ &\quad f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})] + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \\ &\geq f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \underline{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2^{(k)} &= -c_2 \underline{u}_2^{(k)} + F_2 \left(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)} \right) \\
 &= \left[c_2 (\underline{u}_2^{(k-1)} - \underline{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k)}) - \right. \\
 &\quad \left. f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \right] + f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \\
 &\leq f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \\
 \bar{u}_1^{(k)}(x, t) &= g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\
 \underline{u}_2^{(k)}(x, t) &= g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T
 \end{aligned}$$

Et après pour $(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_1^{(k)})$, on aura

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \underline{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1^{(k)} &= -c_1 \underline{u}_1^{(k)} + F_1 \left(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)} \right) \\
 &= \left[c_1 (\underline{u}_1^{(k-1)} - \underline{u}_1^{(k)}) + f_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) + f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - \right. \\
 &\quad \left. f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \right] + f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\
 &\leq f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k)} &= -c_2 \bar{u}_2^{(k)} + F_2 \left(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)} \right) \\
 &= \left[c_2 (\bar{u}_2^{(k-1)} - \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) - \right. \\
 &\quad \left. f_2(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \right] + f_2(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\
 &\geq f_2(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \\
 \underline{u}_1^{(k)}(x, t) &= g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\
 \bar{u}_2^{(k)}(x, t) &= g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$ et $(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$ sont des sous et sur-solutions du notre problème pour chaque itération k .

Et enfin pour le dernier cas c'est le cas où $f = (f_1, f_2)$ est une fonction quasi-monotone mixte. Alors par (2.18) et (2.23), nous avons pour $k = 1, 2, \dots$ tout d'abord, nous commençons par $(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k)} &= -c_1 \bar{u}_1^{(k)} + F_1 \left(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)} \right) \\
 &= \left[c_1 (\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - \right. \\
 &\quad \left. f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \right] + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \\
 &\geq f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k)} &= -c_2 \bar{u}_2^{(k)} + F_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\
&= \left[c_2(\bar{u}_2^{(k-1)} - \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) + f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k)}) - \right. \\
&\quad \left. f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \right] + f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\
&\geq f_2(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \\
\bar{u}_1^{(k)}(x, t) &= g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\
\bar{u}_2^{(k)}(x, t) &= g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T
\end{aligned}$$

Et après pour $(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1^{(k)} &= -c_1 \underline{u}_1^{(k)} + F_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\
&= \left[c_1(\underline{u}_1^{(k-1)} - \underline{u}_1^{(k)}) + f_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) + f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) - \right. \\
&\quad \left. f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \right] + f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \\
&\leq f_1(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2^{(k)} &= -c_2 \underline{u}_2^{(k)} + F_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) \\
&= \left[c_2(\underline{u}_2^{(k-1)} - \underline{u}_2^{(k)}) + f_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) - f_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k)}) + f_2(\underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k)}) - \right. \\
&\quad \left. f_2(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \right] + f_2(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \\
&\leq f_2(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}), \quad (x, t) \in Q_T \\
\underline{u}_1^{(k)}(x, t) &= g_1(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T \\
\underline{u}_2^{(k)}(x, t) &= g_2(x, t), \quad (x, t) \in \partial_p Q_T
\end{aligned}$$

Et de même il résulte que $(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$ et $(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$ sont des sous et sur-solutions de notre problème pour chaque itération k . \square

2.2.4 Résultats d'existence

Les lemmes 2.3 à 2.5 impliquent que, pour chacun des trois types des fonctions quasi-monotones, la suite correspondante obtenue à partir de (2.20), (2.22) et (2.21) converge de façon monotone. La même chose est vraie pour la suite donnée par (2.23). Définir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_i^{(k)}(x, t) = \bar{u}_i(x, t) \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}_i^{(k)}(x, t) = \underline{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

En suivant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 2.4, nous allons montrer que sous les conditions (2.18), (2.19)

$$\bar{u}_i(x, t) = u(x, t) = \underline{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2.$$

Et $u = (u_1, u_2)$ est l'unique solution de problème (2.13), pour chacun des trois types de fonctions de réaction quasi-monotones.

Nous allons montrer maintenant l'unicité de la solution de problème (2.13) pour le cas quasi-monotone croissante :

Théorème 2.7.

Soient $(\underline{u}_1, \underline{u}_2), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ est une sous-solution et une sur-solution ordonnées du problème (2.13), et soit (f_1, f_2) quasi-monotone croissante dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$ et vérifiant les conditions (2.18) et (2.19). Alors le problème (2.13) a une solution unique $u = (u_1, u_2)$ dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$.

De plus, les suites $\{(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, et $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, obtenues à partir de (2.20) avec

$$(\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2) \quad \text{et} \quad (\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2),$$

convergent de façon monotone vers (u_1, u_2) et vérifient la relation

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \leq (\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) \leq (u_1, u_2) \leq (\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) \leq (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \quad \text{dans } \bar{Q}_T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Démonstration.

On pose $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ être soit $\{\bar{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ou $\{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Par le lemme 2.3 cette suite converge de façon monotone dans une certaine limite (u_1, u_2)

quand $k \rightarrow \infty$, la propriété de continuité et de monotonie de F_i implique que $F_i(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ converge de façon monotone vers $F_i(u_1, u_2)$, pour $i = 1, 2$. De la régularité des solutions d'équations de la chaleur,

$$u_i^{(1)} \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), \quad u_i^{(k)} \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), \quad k = 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2.$$

$$\|u_i^{(k)}\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq C \left(\|g\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} + \|u_1^{(k-1)}\|_{C^0(Q_T)} + \|u_2^{(k-1)}\|_{C^0(Q_T)} \right), \quad k = 2, 3, \dots,$$

Où $i = 1, 2$, $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de α, Ω, T , et f_i mais indépendante de k . De la propriété de monotonie 2.21, $\{u_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ est uniformément bornée dans $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$. Donc, $u_i \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$, $i = 1, 2$ est une solution du problème (2.13). Et (2.26) résulte de la propriété de monotonie (2.21).

Maintenant, nous montrons que

$$\underline{u}_i(x, t) = \overline{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T}, \quad i = 1, 2. \quad (2.27)$$

Soit $w_i(x, t) = \underline{u}_i(x, t) - \overline{u}_i(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$, $i = 1, 2$.

Puis, à partir de la propriété de monotonie 2.21, on a

$$w_i(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q_T}, \quad i = 1, 2. \quad (2.28)$$

Par (2.13) et la condition (2.19), $w_i \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, $i = 1, 2$. satisfait

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial t} - \Delta w_i &= f_i(\underline{u}_1, \underline{u}_2) - f_i(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \\ &\geq \bar{c}_i((\overline{u}_1 - \underline{u}_1) + (\overline{u}_2 - \underline{u}_2)) = -\bar{c}_i(w_1 + w_2), \quad (x, t) \in Q_T, \\ w_i(x, t) &= g_i(x, t) - g_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T. \end{aligned}$$

Donc $w_1 + w_2$ vérifie la relation

$$\frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial t} - \Delta(w_1 + w_2) \geq -(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)(w_1 + w_2), \quad (x, t) \in Q_T$$

$$(w_1 + w_2)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial_p Q_T.$$

Le principe du maximum garantit que $(w_1 + w_2)(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$

Ceci et (2.28) conduisent à (2.27).

De (2.27), pour montrer l'unicité de la solution du problème (2.13) dans $\left[\underline{u}, \tilde{u} \right]$, il suffit de vérifier que toute solution $u^* \in \left[\underline{u}, \tilde{u} \right]$ satisfait la relation

$$\underline{u}(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \overline{u}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

Cela peut être prouvé par le même argument que dans la démonstration du théorème 2.4-ii). \square

Maintenant nous allons discuter sur le cas quasi-monotone décroissante .

Théorème 2.8.

Soient $(\underline{u}_1, \underline{u}_2), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ est une sous-solution et une sur-solution ordonnées du problème (2.13), et soit (f_1, f_2) quasi-monotone décroissante dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$ et vérifiant les conditions (2.18) et (2.19). Alors le problème (2.13) a une solution unique $u = (u_1, u_2)$ dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$.

De plus, les suites $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^\infty$, et $\{(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^\infty$, obtenues à partir de (2.22) avec

$$(\bar{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\tilde{u}_1, \underline{u}_2) \text{ et } (\underline{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \tilde{u}_2),$$

convergent de façon monotone vers (u_1, u_2) et vérifient la relation (2.26).

Démonstration.

On pose $\{u^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ être soit $\{\bar{u}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ ou $\{\underline{u}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$. D'après le lemme 2.4 cette suite converge de façon monotone vers une certaine limite (u_1, u_2)

quand $k \rightarrow \infty$, la propriété de continuité et de monotonie de F_i implique que $F_i(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ converge de façon monotone vers $F_i(u_1, u_2)$, pour $i = 1, 2$. De la régularité des solutions d'équations de la chaleur,

$$u_i^{(1)} \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), u_i^{(k)} \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), k = 2, 3, \dots, i = 1, 2.$$

De plus, il résulte de l'estimation de Schauder

$$\|u_i^{(k)}\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq C \left(\|g\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} + \|u_1^{(k-1)}\|_{C^0(Q_T)} + \|u_2^{(k-1)}\|_{C^0(Q_T)} \right), k = 2, 3, \dots,$$

Où $i = 1, 2$, $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de α, Ω, T , et f_i mais indépendante de k . De la propriété de monotonie (2.21), $\{u_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ est uniformément bornée dans $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$. Donc, $u_i \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $i = 1, 2$ est une solution du problème (2.13). Et (2.26) résulte de la propriété de monotonie

2.21 .

Maintenant, nous montrons que

$$\underline{u}_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2. \quad (2.29)$$

Soit $w_i(x, t) = \underline{u}_i(x, t) - \bar{u}_i(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $i = 1, 2$.

Puis, à partir de la propriété de monotonie (2.21), on a

$$w_i(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, 2. \quad (2.30)$$

Par (2.22) et les conditions (2.19) et (2.18), $w_i \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $i = 1, 2$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \Delta w_1 &= f_1(\underline{u}_1, \bar{u}_2) - f_1(\bar{u}_1, \underline{u}_2) \\ &\geq -\bar{c}_1 w_1 - \bar{c}_1 w_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \Delta w_2 &= f_2(\bar{u}_1, \underline{u}_2) - f_2(\underline{u}_1, \bar{u}_2) \\ &\geq -\bar{c}_2 w_1 - \bar{c}_2 w_2 \end{aligned}$$

D'où pour $w = w_1 + w_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ on aura

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \geq -(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)w_1 - (\bar{c}_1 + \bar{c}_2)w_2 = -(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)w, & (x, t) \in Q_T \\ w \geq 0, & (x, t) \in \partial Q_T \end{cases}$$

Le principe du maximum garantit que $(w_1 + w_2)(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

Ceci et (2.30) conduisent à (2.29) .

De (2.29), pour montrer l'unicité de la solution du problème (2.13) dans $\left[\underline{u}, \bar{u} \right]$, il suffit de vérifier que toute solution $u^* \in \left[\underline{u}, \bar{u} \right]$ satisfait la relation

$$\underline{u}(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Cela peut être prouvé par le même argument que dans la démonstration du théorème 2.4-ii). \square

Le théorème suivant représente le dernier cas c'est à dire le cas où la fonction $f = (f_1, f_2)$ est une fonction quasi-monotone mixte, et pour la démonstration de ce théorème, il est conseillé de voir [10].

Théorème 2.9.

Soient $(\underline{u}_1, \underline{u}_2), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ est une sous-solution et une sur-solution ordonnées du problème (2.13), et soit (f_1, f_2) quasi-monotone mixte dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$ et vérifier les conditions (2.18) et (2.19). Alors le problème (2.13) a une solution unique $u = (u_1, u_2)$ dans $[\underline{u}, \tilde{u}]$.

De plus, les suites $\{(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, et $\{(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$, obtenues à partir de (2.23) avec

$$(\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2) \text{ et } (\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2),$$

convergent de façon monotone vers (u_1, u_2) et vérifient la relation (2.26).

Chapitre 3

Applications

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un système de deux équations aux dérivées partielles décrivant deux espèces de population en interaction. Chaque espèce ayant une diffusion à partir de l'emplacement de plus de concentration vers de plus faible concentration, et ils interagissent les uns avec les autres dans un modèle proie-prédateur, compétition ou relation de coopération. Nous insistons sur la situation dans laquelle l'espèce doit avoir une concentration nulle sur le bord de l'environnement. Ceux-ci sont connus comme les équations de réaction-diffusion avec condition de Dirichlet homogène. Nous considérons la possibilité d'équilibre de coexistence positive pour le cas de proie-prédateur dans la sous-section 3.3.1, espèces en compétition dans la sous-section 3.3.2, et espèces en coopération dans la sous-section 3.3.3. Ils sont alors des systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\sigma_1 \Delta u = u(a_1 + h_1(u, v)) = f_1(u, v), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta v = v(a_2 + h_2(u, v)) = f_2(u, v), & \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Dans ce chapitre, nous supposons toujours que Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^N , $N \geq 2$.

Les constantes a_1, a_2 sont respectivement les taux de croissance des espèces dont la concentration de population à la position x sont indiquées par $u = u(x)$ et $v = v(x)$. Les paramètres σ_1 et σ_2 sont des constantes dites coefficient de diffusion positifs. Les fonctions de réaction $f_1(u, v), f_2(u, v)$ correspondent aux interactions entre les populations et dépendent des effectifs des deux populations.

Dans ce chapitre les fonctions h_1 et h_2 sont exprimées par les expressions $h_1(u, v) = -bu + k_1(v), h_2(u, v) = -gv + k_2(u)$. Les signes des fonctions $k_1(v)$ et $k_2(u)$ rendent compte de ce caractère favorable ou non à la croissance. Plusieurs cas sont possibles :

1. $(+, -)$ ou $(-, +)$: une population a un effet positif sur la croissance de l'autre mais on a l'effet inverse dans l'autre sens. Il s'agit par exemple des relations proie-prédateur ou encore hôte-parasite.
2. $(-, -)$: chaque population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre. C'est le cas de la compétition interspécifique.
3. $(+, +)$: chaque population favorise la croissance de l'autre population. C'est le cas du mutualisme ou encore de la symbiose.

Nous allons étudier ces paramètres afin que les états de coexistence soient possibles. Nous allons utiliser la méthode de monotonie étudiée au chapitre précédent. Nous considérons le système parabolique associé au système (3.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \sigma_1 \Delta u = u(a_1 + h_1(u, v)), \\ v_t - \sigma_2 \Delta v = v(a_2 + h_2(u, v)), \\ u(x, 0) = g_1(x), \\ v(x, 0) = g_2(x), \\ u = v = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x, t) \in Q = \Omega \times (0, \infty) \\ x \in \Omega \\ x \in \Omega \\ x \in \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array} \quad (3.2)$$

Nous commençons par l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de problème (3.2).

3.2 Existence et unicité de problème parabolique

Nous considérons les expressions des fonctions h_1 et h_2 comme

$$h_1(u, v) = -bu + \alpha v \text{ et } h_2(u, v) = -gv + \beta u$$

et $a_1 = a$ et $a_2 = e$, alors (3.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \sigma_1 \Delta u = u(a - bu + \alpha v) = f_1(u, v), & (x, t) \in Q \\ v_t - \sigma_2 \Delta v = v(e - gv + \beta u) = f_2(u, v), & \\ \\ u(x, 0) = g_1(x), & x \in \Omega \\ v(x, 0) = g_2(x), & x \in \Omega \\ u = v = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Où a, b, e, g, σ_1 et σ_2 sont des constantes strictement positives.

Et nous identifions ces paramètres :

1. a, e : représentent les taux de croissance des espèces dont la concentration de population à la position x et à l'instant t sont indiquées par $u = u(x, t)$ et $v = v(x, t)$.
2. σ_i : pour $i = 1, 2$ sont des constantes dites coefficient de diffusion positifs.
3. Pour b, g : sont des constantes représentent l'interaction entre deux individus de même espèce. Il est clair ici que la croissance des deux espèces est une croissance logistique avec des capacités limites $K_1 = \frac{a}{b}$, $K_2 = \frac{e}{g}$ de u et v respectivement
4. Et si :
 - (a) *cas 01* : $\alpha = -c, \beta = d$, on obtient un modèle proie-prédateur, d'où c rend compte de l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques, et $d = \delta c$ telle que δ est appelé couramment le rendement de conversion

de la biomasse proie en biomasse prédateur.

- (b) *cas 02* : $\alpha = -c, \beta = -d$, d'où on a un modèle de compétition, donc c et d caractérisent la force de compétition exercée par une population sur l'autre
- (c) *cas 03* : $\alpha = c, \beta = d$, dans ce cas on a un modèle de coopération (par exemple le modèle de mutualisme), et de même c et d caractérisent l'effet positif de chaque espèce sur l'autre

Où c et d sont des constantes strictement positives.

Nous utilisons la méthode de monotonie pour montrer l'existence et l'unicité de la solution dans les trois cas précédents, tout d'abord il faut voir les signes de $\frac{\partial f_1}{\partial v}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial u}$, où $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ dans les trois cas possibles.

- *cas 01* : $\alpha = -c, \beta = d$,
 $\frac{\partial f_1}{\partial v} = -cu \leq 0, \forall u \geq 0$ et $\frac{\partial f_2}{\partial u} = dv \geq 0, \forall v \geq 0$, d'où f_1 est quasi-monotone décroissante par rapport à v et f_2 est quasi-monotone croissante par rapport à u , donc nous sommes dans le cas quasi-monotone mixte.
- *cas 02* : $\alpha = -c, \beta = -d$,
 $\frac{\partial f_1}{\partial v} = -cu \leq 0, \forall u \geq 0$ et $\frac{\partial f_2}{\partial u} = -dv \leq 0, \forall v \geq 0$, d'où f_1 est quasi-monotone décroissante par rapport à v et f_2 est aussi quasi-monotone décroissante par rapport à u , donc nous sommes dans le cas quasi-monotone décroissant.
- *cas 03* : $\alpha = c, \beta = d$,
 $\frac{\partial f_1}{\partial v} = cu \geq 0, \forall u \geq 0$ et $\frac{\partial f_2}{\partial u} = dv \geq 0, \forall v \geq 0$, d'où f_1 est quasi-monotone croissante par rapport à v et de même f_2 est quasi-monotone croissante par rapport à u , donc nous sommes dans le cas quasi-monotone croissant.

Et après on cherche les sous et les sur-solutions du problème (3.3) dans les trois cas possibles.

Pour la sous-solution on pose $\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}\right) = (0, 0)$ pour les trois cas et suivant des conditions sur f_1 et f_2 pour chaque cas, d'autre part pour la sur-solution on cherche une sur-solution sous forme des constantes *i.e.*

$$\left(\tilde{u}, \tilde{v}\right) = (\rho_1, \rho_2), \text{ telle que } \rho_i > 0, i = 1, 2.$$

1. Pour le premier cas : (*i.e.* $F = (f_1, f_2)$ est quasi-monotone mixte), et par l'utilisation de (2.17)

$(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\rho_1, \rho_2)$ sont une sous-solution et une sur-solution du problème (3.3) (respectivement), ssi

$$\rho_1 \geq \frac{a}{b}, \rho_2 \geq \frac{1}{g} \left(e + d \frac{a}{b} \right), \text{ et } 0 \leq g_i(x) \leq \rho_i, \quad i = 1, 2, x \in \Omega$$

On peut choisir par exemple $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\frac{a}{b}, \frac{1}{g} \left(e + d \frac{a}{b} \right) \right)$, alors on applique le théorème 2.9 pour $\sigma_1 = \sigma_2$, donc le problème (3.3) admet une solution unique dans

$$\left[(\underline{u}, \underline{v}), (\tilde{u}, \tilde{v}) \right].$$

2. La même démarche peut être appliquée pour le deuxième cas *i.e.* $F = (f_1, f_2)$ est quasi-monotone décroissante, nous utilisons (2.16)

$(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\rho_1, \rho_2)$ sont une sous-solution et une sur-solution du problème (3.3) (respectivement), ssi

$$f_1(0, \rho_2) \geq 0, f_2(\rho_1, 0) \geq 0 \text{ et } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, x \in \Omega, \text{ ceci est bien vérifié car } f_1(0, \rho_2) = f_2(\rho_1, 0) = 0. \text{ et } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, x \in \Omega.$$

D'autre part il suffit que

$$f_1(\rho_1, 0), f_2(0, \rho_2) \leq 0, \text{ et } g_i(x) \leq \rho_i, \quad i = 1, 2, x \in \Omega,$$

Ceci implique qu'il faut choisir $\rho_1 \geq \frac{a}{b}$ et $\rho_2 \geq \frac{e}{g}$.

Alors sous ces conditions et par l'application de théorème 2.8 pour

$\sigma_1 = \sigma_2$ le problème (3.3) admet une solution unique dans $\left[(\underline{u}, \underline{v}), (\tilde{u}, \tilde{v}) \right]$.

3. Finalement pour le dernier cas ($F = (f_1, f_2)$ est quasi-monotone croissante).

Alors d'après (2.15) $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$ est une sous-solution du problème (3.3) ssi

$$f_i(0, 0) \geq 0, \quad g_i(x) \geq 0,$$

et ceci est bien clair.

De même $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\rho_1, \rho_2)$ telle que $\rho_i > 0, \quad i = 1, 2$ est une sur-solution du

problème (3.3) ssi

$$f_i(\rho_1, \rho_2) \leq 0 \text{ et } g_i(x) \leq \rho_i, i = 1, 2$$

on a

$$\begin{cases} f_1(\rho_1, \rho_2) \leq 0 \\ f_2(\rho_1, \rho_2) \leq 0 \end{cases}$$

Ceci implique

$$\begin{cases} \rho_1(a - b\rho_1 + c\rho_2) \leq 0 \\ \rho_2(e - g\rho_2 + d\rho_1) \leq 0 \end{cases}$$

Pour $\rho_i > 0, i = 1, 2$, alors on a

$$\begin{cases} a - b\rho_1 + c\rho_2 \leq 0 \\ e - g\rho_2 + d\rho_1 \leq 0 \end{cases}$$

Il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} a - b\rho_1 + c\rho_2 = 0 \\ e + d\rho_1 - g\rho_2 = 0 \end{cases}$$

Ceci donne $\rho_1 = \frac{1}{b}(a + c\rho_2)$ et $\rho_2 = \frac{be+ad}{gb-cd}$, existent ssi $gb - cd \neq 0$.

Et $\rho_1 = \frac{1}{b} \left(a + c \frac{be+ad}{gb-cd} \right)$

Alors pour $(\rho_1, \rho_2) \leq \left(\frac{1}{b} \left(a + c \frac{be+ad}{gb-cd} \right), \frac{be+ad}{gb-cd} \right)$ les inégalités précédentes sont bien vérifiées, on prend par exemple $(\rho_1, \rho_2) = \left(\frac{a}{b}, \frac{e}{g} \right)$

D'où $\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right) = (0, 0)$, $\left(\tilde{u}, \tilde{v} \right) = \left(\frac{a}{b}, \frac{e}{g} \right)$, pour $gb > cd$ et $g_i(x) \leq \rho_i, i = 1, 2$ sont une sous et une sur-solution du problème (3.3) (respectivement). On applique le théorème 2.7 pour $\sigma_1 = \sigma_2$, et par conséquence le problème a une solution unique dans $\left[\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right), \left(\tilde{u}, \tilde{v} \right) \right]$.

Maintenant nous cherchons à montrer la positivité de la solution stationnaire du problème (3.3) (c'est une solution du problème elliptique associé au problème (3.3) pour chaque cas parmi les trois cas précédents).

3.3 Existence d'une solution de coexistence

On sait qu'une solution stationnaire du problème (3.3) est une solution du problème elliptique (3.1).

On discute suivant les trois cas possible pour les deux fonctions f_1 et f_2 .

Remarque 3.1.

Soit λ_1 la valeur propre principale associée à la fonction propre $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ telle que le couple (λ_1, w) vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda_1 w, & x \in \Omega \\ w = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

Et $w > 0$ dans Ω .

3.3.1 La positivité de la solution de coexistence pour le cas proie-prédateur

Dans ce cas la fonction $F = (f_1, f_2)$ est une fonction quasi-monotone mixte, et on a le problème elliptique associé au problème (3.3)

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta u = u(a - bu - cv) = f_1(u, v), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta v = v(e - gv + du) = f_2(u, v), & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

Le théorème suivant concernant la coexistence des deux espaces (proie-prédateur) peut être facilement déduite par la méthode des sous-et sur-solutions pour un système des équations elliptiques.

Théorème 3.1. Sous les hypothèses :

$$\begin{cases} a > \sigma_1 \lambda_1, e > \sigma_2 \lambda_1 \\ cd < gb \\ a > \frac{\sigma_1 gb}{gb - cd} \left(\lambda_1 + \frac{ce}{g\sigma_1} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

le problème (3.5) a une solution (u, v) avec chaque composante strictement positive dans Ω .

Et λ_1 est la valeur propre définie dans (3.4).

Démonstration. 1. Tout d'abord on cherche une sur-solution du problème (3.5) sous forme des constantes, on pose $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\gamma_1, \gamma_2) > (0, 0)$, donc d'après (2.17) on a

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta \tilde{u} \geq f_1(\tilde{u}, \tilde{v}), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta \tilde{v} \geq f_2(\tilde{u}, \tilde{v}), & x \in \Omega \\ \tilde{u}, \tilde{v} \geq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{u}, \tilde{v}) &\leq 0, \\ f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) &\leq 0. \end{aligned}$$

C-à-d

$$\begin{aligned} \tilde{u} \left(a - b\tilde{u} - c\tilde{v} \right) &\leq 0, \\ \tilde{v} \left(e - g\tilde{v} + d\tilde{u} \right) &\leq 0. \end{aligned}$$

Puisque $(\tilde{u}, \tilde{v}) > (0, 0)$, alors

$$\begin{aligned} a - b\tilde{u} - c\tilde{v} &\leq 0, \\ e - g\tilde{v} + d\tilde{u} &\leq 0, \end{aligned}$$

On remarque que $\tilde{u} = \frac{a}{b} > 0$ vérifie l'inégalité pour $\tilde{v} \geq 0$, alors la deuxième donne $\tilde{v} \geq \frac{1}{g} \left(e + f \frac{a}{b} \right)$

On peut prendre $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\frac{a}{b}, \frac{1}{g} \left(e + f \frac{a}{b} \right) \right)$

2. Maintenant on cherche une sous-solution du problème sous la forme

$$\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right) = (\delta_1 w, \delta_2 w), \quad \delta_i > 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

On sait d'après (2.17) que $\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right)$ vérifie

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta \underset{\sim}{u} \leq f_1 \left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta \underset{\sim}{v} \leq f_2 \left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right), & x \in \Omega \\ \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \leq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

D'où

$$-\sigma_1 \Delta \underset{\sim}{u} = \sigma_1 \delta_1 (-\Delta w) \leq \delta_1 w \left(a - b\delta_1 w - \frac{c}{g} \left(e + \frac{a}{b} d \right) \right)$$

D'après (3.4) on aura $\lambda_1 \sigma_1 \leq a - b\delta_1 w - \frac{c}{g} \left(e + \frac{a}{b} d \right)$

Pour $\delta_1 \ll 1, \lambda_1 \sigma_1 \leq a - \frac{c}{g} \left(e + \frac{a}{b} d \right)$

D'où il faut

$$a > \lambda_1 \sigma_1 + \frac{c}{g} \left(e + \frac{a}{b} d \right)$$

Et $a > a \left(1 - \frac{cd}{gb} \right) > \lambda_1 \sigma_1 + \frac{ec}{g} > \lambda_1 \sigma_1$

pour $gb > cd \dots$ (c1) et $a > \sigma_1 \lambda_1 \dots$ (c2), il faut que $a > \frac{\sigma_1 gb}{gb - cd} \left(\lambda_1 + \frac{ec}{\sigma_1 g} \right) \dots$ (c3)

pour $\underset{\sim}{v}$ on a

$$-\sigma_2 \Delta \underset{\sim}{v} \leq f_2 \left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right)$$

Par la même démarche on trouve

$$\lambda_1 \sigma_2 \leq e - g\delta_2 w + d\delta_1 w$$

pour $\delta_i \ll 1, i = 1, 2$ il faut que $\lambda_1 \sigma_2 < e, \dots$ (c4), donc sous les hypothèses (c1), (c2), (c3) et (c4) et pour $\delta_i \ll 1, i = 1, 2$ $\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right) = (\delta_1 w, \delta_2 w) > (0, 0)$ est une sous-solution du problème (3.5).

Et on ajoute cette condition $(\gamma_1, \gamma_2) \geq (\delta_1, \delta_2) \|w\|_\infty$ pour assurer l'ordre de sous et sur-solution, alors on applique le théorème 2.9 pour $\sigma_1 = \sigma_2$ (pour assurer l'unicité de la solution), et par conséquent le problème (3.5) admet une solution unique strictement positive dans $\left[\left(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \right), \left(\tilde{u}, \tilde{v} \right) \right]$.

□

3.3.2 La positivité de la solution de coexistence pour le cas compétition

Dans ce cas la fonction $F = (f_1, f_2)$ est une fonction quasi-monotone décroissante, et on a le problème elliptique associé au problème (3.3)

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta u = u(a - bu - cv) = f_1(u, v), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta v = v(e - gv - du) = f_2(u, v), & \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

Par la méthode des sous-et sur-solutions pour un système des équations elliptiques on peut déduire la coexistence des deux espaces en compétition.

Théorème 3.2. On suppose qu'il existe k_1 et k_2 deux constantes strictement positives, sachant que

$$\begin{cases} k_1 > \frac{a}{b}, \\ e > \sigma_2 \lambda_1 + dk_1, \\ k_2 > \frac{e}{g}, \\ a > \sigma_1 \lambda_1 + ck_2, \end{cases} \quad (3.8)$$

sont vérifiées, alors le problème (3.7) a une solution strictement positive dans Ω .

Démonstration. 1. D'abord on cherche $(\tilde{u}, \underline{v})$, d'après (2.16) $(\tilde{u}, \underline{v})$ vérifie

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta \tilde{u} \geq f_1(\tilde{u}, \underline{v}), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta \underline{v} \leq f_2(\tilde{u}, \underline{v}), & \\ \tilde{u} \geq 0, & x \in \partial\Omega \\ \underline{v} \leq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

telles que on cherche \tilde{u} sous forme constante *i.e.* $\tilde{u} = k_1 > 0$, et $\underline{v} = r_2 w$ telle que w définie par (3.4).

Donc $f_1(k_1, r_2 w) \leq 0$ ceci implique $k_1(a - bk_1 - cr_2 w) \leq 0$

Pour $k_1 > 0$, alors $a - bk_1 - cr_2w \leq 0$, pour $r_2 \ll 1$ il faut choisir

$$k_1 > \frac{a}{b} \dots (c_1)$$

$$\text{Et } -\sigma_2 \Delta \underline{v} \leq f_2(\underline{u}, \underline{v})$$

$$\text{Ceci est équivalent à } \sigma_2 r_2 (-\Delta w) \leq r_2 w (e - gr_2 w - dk_1)$$

$$\text{Donc, pour } r_2 \ll 1, \sigma_2 \lambda_1 < e - dk_1$$

$$\text{Alors il faut prendre } \sigma_2 \lambda_1 + dk_1 < e \dots (c_2)$$

2. En suite on cherche $(\underline{u}, \underline{v})$, d'après (2.16) $(\underline{u}, \underline{v})$ vérifie

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta \underline{u} \leq f_1(\underline{u}, \underline{v}), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta \underline{v} \geq f_2(\underline{u}, \underline{v}), & x \in \Omega \\ \underline{u} \leq 0, & x \in \partial\Omega \\ \underline{v} \geq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

telles que $\underline{u} = r_1 w, r_1 > 0$ et $\underline{v} = k_2 = cst > 0$

D'où

$$-\sigma_1 \Delta \underline{u} \leq f_1(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} (a - b\underline{u} - c\underline{v})$$

$$-\sigma_1 \Delta (r_1 w) \leq r_1 w (a - br_1 w - ck_2)$$

$$\text{D'où } \lambda_1 \sigma_1 \leq a - br_1 w - ck_2$$

$$\text{Pour } r_1 \ll 1, \text{ on a } \lambda_1 \sigma_1 < a - ck_2$$

Donc

$$a > \lambda_1 \sigma_1 + ck_2 \dots (c_3)$$

$$\text{Et } 0 = -\sigma_2 \Delta \underline{v} \geq f_2(\underline{u}, \underline{v}) = k_2 (e - r_1 w - gk_2)$$

$$\text{Puisque } k_2 > 0, \text{ alors } e - r_1 w - gk_2 \leq 0$$

$$\text{pour } r_1 \ll 1, \text{ on a } k_2 > \frac{e}{g}, \dots (c_4).$$

Donc suivant les conditions $(c_1), (c_2), (c_3)$ et (c_4) : $(r_1 w, k_1)$ et $(r_2 w, k_2)$ sont des sous et sur-solutions du problème (3.7).

De plus on ajoute la condition $(k_1, k_2) > (r_1, r_2) \|w\|_\infty$ pour assurer l'ordre des sous et sur-solutions. On applique le théorème 2.8 pour $\sigma_1 = \sigma_2$ (pour assurer l'unicité de la solution), et par conséquence le problème (3.7)

admet une solution unique strictement positive dans $\left[\left(\underline{u}, \underline{v} \right), \left(\tilde{u}, \tilde{v} \right) \right]$. \square

3.3.3 La positivité de la solution de coexistence pour le cas coopératif

Maintenant nous avons la fonction $F = (f_1, f_2)$ est une fonction quasi-monotone croissante, et on a le problème elliptique associé au problème (3.3)

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta u = u(a - bu + cv) = f_1(u, v), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta v = v(e - gv + du) = f_2(u, v), & \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

La méthode des sous-et sur-solutions nous permet de conclure la coexistence des deux espèces en coopération pour un système d'équations elliptiques.

Théorème 3.3. On suppose que

$$\begin{cases} a > \sigma_1 \lambda_1, e > \sigma_2 \lambda_1, \\ et, \\ cd < bg. \end{cases} \quad (3.10)$$

Alors le problème (3.9) a une solution strictement positive dans Ω .

Démonstration. 1. On cherche tout d'abord une sous-solution du problème

(3.9) sous la forme $\left(\underline{u}, \underline{v} \right) = (\mu_1 w, \mu_2 w)$, $\mu_i > 0$ pour $i = 1, 2$.

On sait d'après (2.15) que $\left(\underline{u}, \underline{v} \right)$ vérifie

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta \underline{u} \leq f_1 \left(\underline{u}, \underline{v} \right), & x \in \Omega \\ -\sigma_2 \Delta \underline{v} \leq f_2 \left(\underline{u}, \underline{v} \right), & \\ \underline{u}, \underline{v} \leq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ceci implique

$$\begin{cases} \sigma_1 \mu_1 \lambda_1 w \leq \mu_1 w (a - b \mu_1 w + c \mu_2 w), \\ \sigma_2 \mu_2 \lambda_1 w \leq \mu_2 w (e - g \mu_2 w + d \mu_1 w), \end{cases}$$

C-à-d

$$\begin{cases} \sigma_1 \lambda_1 \leq a - b \mu_1 w + c \mu_2 w, \\ \sigma_2 \lambda_1 \leq e - g \mu_2 w + d \mu_1 w, \end{cases}$$

Alors pour $\mu_i \ll 1$, pour $i = 1, 2$, il faut que $\sigma_1 \lambda_1 < a \dots (c_1)$
et $\sigma_2 \lambda_1 < e \dots (c_2)$.

2. Maintenant on cherche une sur-solution du problème (3.9) sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$, alors d'après (2.15) (\tilde{u}, \tilde{v}) vérifie

$$\begin{cases} 0 = -\sigma_1 \Delta \tilde{u} \geq f_1(\tilde{u}, \tilde{v}), & x \in \Omega \\ 0 = -\sigma_2 \Delta \tilde{v} \geq f_2(\tilde{u}, \tilde{v}), & x \in \Omega \\ \tilde{u}, \tilde{v} \geq 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Donc il faut résoudre le système des deux inéquations suivantes

$$\begin{cases} f_1(\theta_1, \theta_2) \leq 0, \\ f_2(\theta_1, \theta_2) \leq 0, \end{cases}$$

Et d'après la preuve dans le cas parabolique (3), il suffit de prendre $(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \left(\frac{1}{b} \left(a + c \frac{be+ad}{gb-cd}\right), \frac{be+ad}{gb-cd}\right)$ ceci est possible ssi $cd < gb \dots (c_3)$. Alors sous les conditions (c_1) , (c_2) et (c_3) $(\mu_1 w, \mu_2 w)$ et (θ_1, θ_2) sont des sous et sur-solutions du problème (3.9).

Et pour assurer que les sous et sur-solutions sont ordonnées on ajoute la condition $(\theta_1, \theta_2) > (\mu_1, \mu_2) \|w\|_\infty$.

On applique le théorème 2.7 pour $\sigma_1 = \sigma_2$ (pour assurer l'unicité de la solution), et par conséquent le problème (3.9) admet une solution unique strictement positive dans $\left[\left(\underline{u}, \underline{v}\right), \left(\tilde{u}, \tilde{v}\right)\right]$.

□

3.4 Le comportement asymptotique

Nous allons ensuite discuter sur un résultat de stabilité pour le cas des espèces en compétition et nous considérons le système (3.2) avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{pour } x \in \Omega. \quad (3.11)$$

Nous supposons que les fonctions h_i ont des dérivées partielles qui possèdent la propriété de continuité höldérienne dans des ensembles compacts, $i = 1, 2$; a_1, a_2, σ_1 et σ_2 sont des constantes strictement positives.

$$(3.12)$$

De plus

$$\begin{cases} h_i(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \\ \frac{\partial h_i}{\partial u}, \frac{\partial h_i}{\partial v} < 0, \quad i = 1, 2, \text{ pour } (u, v) > (0, 0). \end{cases} \quad (3.13)$$

Sous des conditions appropriées, nous allons prouver la stabilité locale des états stationnaires par la méthode de monotonie pour le problème parabolique correspondant .

Théorème 3.4. Stabilité asymptotique

On considère le problème (3.2), (3.11), sous les hypothèse (3.12), (3.13) et

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad a_i > \sigma_i \lambda_1, \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

Supposons que $(u, v) = (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$ est une solution stationnaire de (3.2) avec chaque $\bar{u}_i \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\bar{u}_i > 0$ dans Ω , $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \nu} < 0$ dans $\partial\Omega$, pour $i = 1, 2$

et ,

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\bar{u}_i(x) \frac{\partial h_j}{\partial u_i}(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))}{\bar{u}_j(x) \frac{\partial h_j}{\partial u_j}(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))} \right| < \inf_{x \in \Omega} \left| \frac{\bar{u}_i(x) \frac{\partial h_i}{\partial u_i}(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))}{\bar{u}_j(x) \frac{\partial h_i}{\partial u_j}(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))} \right| < \infty \quad (3.15)$$

Pour chaque $1 \leq i, j \leq 2$, $i \neq j$ alors $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)$ est asymptotiquement stable Ici asymptotiquement stable signifie que si $(u, v) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ est une solution du (3.2), (3.11) avec $u_i \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T])$, $T > 0$, $i = 1, 2$ alors $u_i(x, t) \rightarrow \bar{u}_i(x)$ uniformément quand $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, dans $\bar{\Omega}$, à condition que $(u_1(x, 0), u_2(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x))$ et ses premières dérivées partielles sont assez proches de celle de $\bar{u}_i(x)$ respectivement pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $i = 1, 2$.

Démonstration. 1. Pour notre modèle de compétition *i.e* on considère le problème (3.3), (3.11) pour $\alpha = -c, \beta = -d$

L'hypothèse (3.15) dans ce cas implique qu'il existe des constantes ρ_1, ρ_2 assez proches de 1, avec $\rho_1 < 1 < \rho_2$ sachant que pour tout $x \in \Omega$,

$$0 < \frac{\bar{u}_i(x) \max_{\rho_1 \leq s, \tau \leq \rho_2} \left| \frac{\partial h_j}{\partial u_i}(s\bar{u}_1(x), \tau\bar{u}_2(x)) \right|}{\bar{u}_j(x) \min_{\rho_1 \leq s \leq 1} \left| \frac{\partial h_j}{\partial u_j}(s\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) \right|} < \inf_{x \in \Omega} \frac{\bar{u}_i(x)}{\bar{u}_j(x)} \left\{ \frac{\min_{\rho_1 \leq s, \tau \leq \rho_2} \left| \frac{\partial h_i}{\partial u_i}(s\bar{u}_1(x), \tau\bar{u}_2(x)) \right|}{\max_{\rho_1 \leq s \leq 1} \left| \frac{\partial h_i}{\partial u_j}(s\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) \right|} \right\} - \epsilon_1 < \infty \quad (3.16)$$

C-à-d

pour $i = 1, j = 2$

$$0 < \frac{\bar{u}_1(x) d}{\bar{u}_2(x) g} < \inf_{x \in \Omega} \frac{\bar{u}_1(x) b}{\bar{u}_2(x) c} - \epsilon_1 < \infty$$

pour $i = 2, j = 1$

$$0 < \frac{\bar{u}_2(x) c}{\bar{u}_1(x) b} < \inf_{x \in \Omega} \frac{\bar{u}_2(x) g}{\bar{u}_1(x) d} - \epsilon_1 < \infty$$

où ϵ_1 est un nombre assez petit.

On pose

$$G(x) = \frac{\bar{u}_2(x) g}{\bar{u}_1(x) d}, \forall x \in \Omega,$$

tell que

pour $1 < \alpha < \rho_2$ et $(1 - \rho_1) > (\alpha - 1) \inf_{x \in \Omega} G(x)$

Nous allons construire des sous et sur-solutions v_i, w_i appropriées.

Définir

$$w_2(x, t) = p(x, t)\bar{u}_2(x) = \left(1 + (\alpha - 1 - \epsilon_4\bar{u}_2(x))e^{-mt}\right)\bar{u}_2(x),$$

Où ϵ_4 et m sont des constantes positives avec $\epsilon_4 \max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{u}_2(x) < \alpha - 1$.

D'autre part, on définit

$$v_1(x, t) = q(x, t)\bar{u}_1(x) = \left(1 - (1 - \beta(x))e^{-mt}\right)\bar{u}_1(x)$$

Où $\beta(x) = 1 - (\alpha - 1) \inf_{x \in \Omega} G(x) + \epsilon_2(\alpha - 1) + \epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1(x)$, ϵ_2 et ϵ_3 sont des constantes assez petites vérifiant :

$$\epsilon_2 + \epsilon_3 \max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{u}_1(x) < \epsilon_1 < \inf_{x \in \Omega} G(x).$$

On remarque que $\rho_1 < \beta(x) < 1$ car nous avons choisi

$$(1 - \rho_1) > (\alpha - 1) \inf_{x \in \Omega} G(x), \text{ et } \epsilon_2 + \epsilon_3 \max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{u}_1(x) < \inf_{x \in \Omega} G(x).$$

Nous avons

$$\sigma_2 \Delta w_2 + w_2 [e + h_2(v_1, w_2)] - \frac{\partial w_2}{\partial t} = \sigma_2 (\Delta p \bar{u}_2 + p \Delta \bar{u}_2 + 2 \nabla p \nabla \bar{u}_2) + w_2 [e + h_2(v_1, w_2)] + m e^{-mt} (\alpha - 1 - \epsilon_4 \bar{u}_2) \bar{u}_2$$

$$\text{On a } \sigma_2 \Delta \bar{u}_2 p = -p \bar{u}_2 [e + h_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)] = -w_2 [e + h_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)]$$

D'où

$$\sigma_2 \Delta w_2 + w_2 [e + h_2(v_1, w_2)] - \frac{\partial w_2}{\partial t} = w_2 [h_2(v_1, w_2) - h_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)] + e^{-mt} \Lambda_{m, \epsilon_4}$$

$$\begin{aligned} &= p \bar{u}_2 [g(\bar{u}_2 - w_2) + d(\bar{u}_1 - v_1)] + e^{-mt} \Lambda_{m, \epsilon_4} \\ &= p \bar{u}_2 [g \bar{u}_2 (\epsilon_4 \bar{u}_2 + 1 - \alpha) e^{-mt} + d \bar{u}_1 e^{-mt} (1 - \beta(x))] + e^{-mt} \Lambda_{m, \epsilon_4} \\ &= p \bar{u}_2 e^{-mt} \left[-g \bar{u}_2 (\alpha - 1 - \epsilon_4 \bar{u}_2) + d \bar{u}_1 (\alpha - 1) \left(\inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_2 - \epsilon_3 \bar{u}_1 \right) \right] + e^{-mt} \Lambda_{m, \epsilon_4} \\ &= p \bar{u}_2 e^{-mt} \left[-g \bar{u}_2 (\alpha - 1 - \epsilon_4 \bar{u}_2) + d \bar{u}_1 (1 - \hat{\beta} - (\alpha - 1) \epsilon_3 \bar{u}_1) \right] + e^{-mt} \Lambda_{m, \epsilon_4} \end{aligned}$$

$$\text{Où } \Lambda_{m, \epsilon_4} = m(\alpha - 1 - \epsilon_4 \bar{u}_2) \bar{u}_2 - \bar{u}_2 \sigma_2 \epsilon_4 \Delta \bar{u}_2 - 2 \sigma_2 \epsilon_4 \sum_{i=1}^n (\bar{u}_2 x_i)^2,$$

$$\text{et } \hat{\beta} = 1 - (\alpha - 1) \inf_{x \in \Omega} G(x) + \epsilon_2 (\alpha - 1).$$

(3.17)

Et on a

$$\begin{aligned} & |p\bar{u}_2 [-g(-\epsilon_4\bar{u}_2^2 e^{-mt}) - d\epsilon_3(\alpha-1)\bar{u}_1^2 e^{-mt}] + e^{-mt} [m(\alpha-1-\epsilon_4\bar{u}_2)\bar{u}_2 - \bar{u}_2\sigma_2\epsilon_4\Delta\bar{u}_2]| \\ & \leq e^{-mt}\epsilon_4\bar{u}_2 |\delta [g\bar{u}_2^2 - d(\alpha-1)\bar{u}_1^2] + \alpha-1-\epsilon_4\bar{u}_2 + \bar{u}_2(e-g\bar{u}_2-d\bar{u}_1)| \\ & \leq e^{-mt}\epsilon_4\bar{u}_2 K_1, \text{ tell que } K_1 > 0. \end{aligned}$$

Avec $\epsilon_3 = \epsilon_4 = m$, $|p(x, t)| \leq \delta$, où $\delta > 1$. Dans un voisinage U de $\partial\Omega$ dans Ω nous avons :

$$-2\sigma_2\epsilon_4 \sum_{i=1}^n (\bar{u}_{2x_i})^2 e^{-mt} + \epsilon_4\bar{u}_2 e^{-mt} K_1 < 0,$$

Car $\bar{u}_2(x) = 0$, pour $x \in \partial\Omega$, $\forall t \geq 0$.

On a

$$\begin{aligned} -g(\alpha-1)\bar{u}_2 + d(1-\hat{\beta})\bar{u}_1 &= -g(\alpha-1)\bar{u}_2 + d\bar{u}_1 \left((\alpha-1) \inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_2(\alpha-1) \right) \\ &\leq -g(\alpha-1)\bar{u}_2 + d\bar{u}_1 ((\alpha-1)G(x) - \epsilon_2(\alpha-1)) \end{aligned}$$

Par définition de $G(x)$, on a $G(x) = \frac{\bar{u}_2(x)g}{\bar{u}_1(x)d}$, d'où

$$\begin{aligned} -g(\alpha-1)\bar{u}_2 + d(1-\hat{\beta})\bar{u}_1 &\leq -g(\alpha-1)\bar{u}_2 + g(\alpha-1)\bar{u}_2 - \epsilon_2(\alpha-1)d\bar{u}_1 \\ &= -\epsilon_2(\alpha-1)d\bar{u}_1 < 0, \forall (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \end{aligned}$$

Par conséquence, nous avons $\sigma_2\Delta w_2 + w_2 [e + h_2(v_1, w_2)] - \frac{\partial w_2}{\partial t} < 0$

i.e

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \sigma_2\Delta w_2 \geq w_2 [e + h_2(v_1, w_2)], \forall (x, t) \in U \times [0, \infty).$$

Pour $x \in \Omega \setminus U$, deux termes dans (3.17) vérifient

$$p(x, t)\bar{u}_2 [-g\bar{u}_2(\alpha-1) + d\bar{u}_1(1-\hat{\beta})\bar{u}_1] e^{-mt} \leq p(x, t)\bar{u}_2 e^{-mt} [-\epsilon_2(\alpha-1)d\bar{u}_1]$$

On a $p(x, t) = 1 + (\alpha-1-\epsilon_4\bar{u}_2(x))e^{-mt} > 1$, car $\epsilon_4 \max_{x \in \Omega} \bar{u}_2(x) < \alpha-1$,

alors $-p(x, t) < -1$, donc on aura

$$p(x, t)\bar{u}_2 [-g\bar{u}_2(\alpha-1) + d\bar{u}_1(1-\hat{\beta})\bar{u}_1] e^{-mt} \leq -\epsilon_2(\alpha-1)e^{-mt}\eta = -\epsilon_2 e^{-mt} K_2,$$

telle que $0 < \eta \leq d\bar{u}_1\bar{u}_2$ et $K_2 = (\alpha-1)\eta$.

Pour le reste des termes dans (3.17), on a

$$\begin{aligned}
& |p(x, t)\bar{u}_2 e^{-mt} [g\epsilon_4 \bar{u}_2^2 - d\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2] + e^{-mt}\Lambda_{m, \epsilon_4}| \\
& \leq e^{-mt} |p(x, t)\bar{u}_2 [g\epsilon_4 \bar{u}_2^2 - d\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2] + m(\alpha - 1 - \epsilon_4 \bar{u}_2)\bar{u}_2| \\
& \leq e^{-mt} |-p(x, t)\bar{u}_2 d\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2 + m(\alpha - 1)\bar{u}_2| \\
& \leq m e^{-mt}(\alpha - 1)\bar{u}_2 \leq m e^{-mt}(\alpha - 1)\|\bar{u}_2\| \\
& \leq \frac{\epsilon_2}{2} e^{-mt} K_2, \text{ pour } m \leq \frac{\epsilon_2 \eta}{2\|\bar{u}_2\|}, \epsilon_3 \ll 1.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sigma_2 \Delta w_2 + w_2 [e + h_2(v_1, w_2)] - \frac{\partial w_2}{\partial t} &= p\bar{u}_2 [g(\bar{u}_2 - w_2) + d(\bar{u}_1 - v_1)] + e^{-mt}\Lambda_{m, \epsilon_4} \\
&= p\bar{u}_2 [g\bar{u}_2(\epsilon_4 \bar{u}_2 + 1 - \alpha)e^{-mt} + d\bar{u}_1 e^{-mt}(1 - \beta(x))] + e^{-mt}\Lambda_{m, \epsilon_4} \\
&< -\epsilon_2 e^{-mt} K_2 + \frac{\epsilon_2}{2} e^{-mt} K_2 = -\frac{\epsilon_2}{2} e^{-mt} K_2 < 0.
\end{aligned}$$

Pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$, alors $w_2(x, t)$ est une sur-solution .

Pour v_1 , nous avons

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \Delta v_1 + v_1 [a + h_1(v_1, w_2)] - \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \sigma_1 [q\Delta \bar{u}_1 + \bar{u}_1 e^{-mt} \Delta \beta + 2\nabla \bar{u}_1 \nabla q] + \\
& q\bar{u}_1 [a + h_1(v_1, w_2)] - m\bar{u}_1(1 - \beta)e^{-mt}
\end{aligned}$$

Et puisque $\sigma_1 \Delta \bar{u}_1 q = -q\bar{u}_1 (a_1 + h_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2))$

Alors

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \Delta v_1 + v_1 [a + h_1(v_1, w_2)] - \frac{\partial v_1}{\partial t} &= q\bar{u}_1 [h_1(v_1, w_2) - h_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)] + \\
& e^{-mt} \left[-m(1 - \beta)\bar{u}_1 + \bar{u}_1 \sigma_1 \epsilon_3 (\alpha - 1) \Delta \bar{u}_1 + 2\sigma_1 \epsilon_3 (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\bar{u}_{1x_i})^2 \right] \\
&= q\bar{u}_1 [-(bv_1 + cw_2) + (b\bar{u}_1 + c\bar{u}_2)] + e^{-mt} \Pi_{m, \epsilon_3} \\
&= q\bar{u}_1 [b\bar{u}_1(1 - q) + c\bar{u}_2(1 - p)] + e^{-mt} \Pi_{m, \epsilon_3} \\
&= q\bar{u}_1 [-c\bar{u}_2(\alpha - 1 - \epsilon_4 \bar{u}_2)e^{-mt} + b\bar{u}_1 e^{-mt}(1 - \hat{\beta} - \epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1)] + e^{-mt} \Pi_{m, \epsilon_3}
\end{aligned}$$

Où $\Pi_{m, \epsilon_3} = -m(1 - \beta)\bar{u}_1 + \bar{u}_1 \sigma_1 \epsilon_3 (\alpha - 1) \Delta \bar{u}_1 + 2\sigma_1 \epsilon_3 (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\bar{u}_{1x_i})^2$.

(3.19)

D'où par le choix $\epsilon_4 = m = \epsilon_3$, on a

$$\begin{aligned} & \left| q\bar{u}_1 \left[c\epsilon_4\bar{u}_2^2 e^{-mt} - b\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2 e^{-mt} \right] + e^{-mt} \left[-m(1 - \beta)\bar{u}_1 + \bar{u}_1\sigma_1\epsilon_3(\alpha - 1)\Delta\bar{u}_1 \right] \right| \\ & \leq \bar{u}_1 e^{-mt} \epsilon_4 \left| q \left[c\bar{u}_2^2 - b\bar{u}_1^2(\alpha - 1) \right] - 1 + \beta(x) \right| \\ & \leq \bar{u}_1 e^{-mt} \epsilon_4 \left[\left| c\bar{u}_2^2 - b\bar{u}_1^2(\alpha - 1) \right| + 1 - \beta(x) \right] \\ & \leq \bar{u}_1 e^{-mt} \epsilon_4 K_3, \end{aligned}$$

pour $\epsilon_3 \ll 1$, telle que $K_3 > 0$ et pour tout $x \in \Omega$.

Pour \tilde{U} un voisinage de $\partial\Omega$ dans Ω on a

$$2\sigma_1\epsilon_3(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\bar{u}_{1x_i})^2 - \bar{u}_1 e^{-mt} \epsilon_4 K_3 > 0, \forall t \geq 0.$$

Car $\bar{u}_1(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$.

De plus on a

$$-c(\alpha - 1)\bar{u}_2 + b(1 - \hat{\beta})\bar{u}_1 = -c(\alpha - 1)\bar{u}_2 + b\bar{u}_1 \left[(\alpha - 1) \inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_2(\alpha - 1) \right]$$

Et d'après (3.16) on a

$$c\bar{u}_2 < b\bar{u}_1 \left(\inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_1 \right)$$

Donc

$$-c(\alpha - 1)\bar{u}_2 + b(1 - \hat{\beta})\bar{u}_1 \geq -(\alpha - 1)b\bar{u}_1 \inf_{x \in \Omega} G(x) + \epsilon_1\bar{u}_1 b(\alpha - 1)$$

$$+ b\bar{u}_1(\alpha - 1) \left[\inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_2 \right]$$

$$= (\epsilon_1 - \epsilon_2)\bar{u}_1 b(\alpha - 1) > 0, \forall x \in \Omega, t \geq 0,$$

(3.20)

Par conséquence, nous avons : $\sigma_1\Delta v_1 + v_1[a + h_1(v_1, w_2)] - \frac{\partial v_1}{\partial t} > 0$

i.e

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \sigma_1\Delta v_1 < v_1[a + h_1(v_1, w_2)], \forall (x, t) \in \tilde{U} \times [0, \infty)$$

Pour $x \in \Omega \setminus \tilde{U}$, d'après (3.20)

$$\begin{aligned}
q(x, t)\bar{u}_1 e^{-mt} & \left[-c\bar{u}_2(\alpha - 1) + (1 - \hat{\beta})b\bar{u}_1 \right] \\
& \geq q(x, t)\bar{u}_1 e^{-mt}(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\alpha - 1)b\bar{u}_1 \\
& \geq \theta(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\alpha - 1)e^{-mt} = (\epsilon_1 - \epsilon_2)e^{-mt}K_4,
\end{aligned}$$

telle que $0 < \theta \leq bq(x, t)\bar{u}_1^2$, $K_4 = (\alpha - 1)\theta > 0$.

Pour les autres termes dans (3.19), nous avons pour $\epsilon_3 \ll 1$

$$\begin{aligned}
& \left| q\bar{u}_1 e^{-mt} \left[c\epsilon_4\bar{u}_2^2 - b\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2 \right] + e^{-mt}\bar{u}_1(\alpha - 1) \left[m \left(\epsilon_2 + \epsilon_3\bar{u}_1 - \inf_{x \in \Omega} G(x) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sigma_1\epsilon_3\Delta\bar{u}_1 + 2\sigma_1\epsilon_3 \sum_{i=1}^n (\bar{u}_1)_{x_i}^2 \right] \right| \\
& \leq \bar{u}_1 e^{-mt} \left| q(x, t) \left[\epsilon_4\bar{u}_1 b \left(\inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_1 \right) - b\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2 \right] + m(\alpha - 1)(\epsilon_2 + \epsilon_3\bar{u}_1 - \epsilon_1) \right|
\end{aligned}$$

Car on sait que $\inf_{x \in \Omega} G(x) > \epsilon_1$, ceci implique que $-\inf_{x \in \Omega} G(x) < -\epsilon_1$

Pour $\epsilon_3, \epsilon_4 \ll 1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_1 e^{-mt} \left| q(x, t) \left[\epsilon_4\bar{u}_1 b \left(\inf_{x \in \Omega} G(x) - \epsilon_1 \right) - b\epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1^2 \right] + m(\alpha - 1)(\epsilon_2 + \epsilon_3\bar{u}_1 - \epsilon_1) \right| \\
& \leq \bar{u}_1 e^{-mt} m(\alpha - 1) |\epsilon_2 - \epsilon_1| \leq \|\bar{u}_1\| e^{-mt} m(\alpha - 1)(\epsilon_1 - \epsilon_2) \\
& \leq \frac{1}{2}\theta(\epsilon_1 - \epsilon_2)e^{-mt}(\alpha - 1) = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)e^{-mt}K_4,
\end{aligned}$$

i.e il faut choisir $m \leq \frac{\theta}{2\|\bar{u}_1\|}$, et d'après (3.18) il faut choisir m de telle sorte que

$$m \leq \min \left\{ \frac{\theta}{2\|\bar{u}_1\|}, \frac{\epsilon_2\eta}{2\|\bar{u}_2\|} \right\}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \sigma_1\Delta v_1 + v_1 [a + h_1(v_1, w_2)] - \frac{\partial v_1}{\partial t} \\
& \geq q(x, t)\bar{u}_1 \left[-c\bar{u}_2(\alpha - 1 - \epsilon_4\bar{u}_2) e^{-mt} + b\bar{u}_1 e^{-mt} (1 - \hat{\beta} - \epsilon_3(\alpha - 1)\bar{u}_1) \right] + e^{-mt}\Pi_{m, \epsilon_3} \\
& \geq (\epsilon_1 - \epsilon_2)e^{-mt}K_4 - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)e^{-mt}K_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)e^{-mt}K_4 > 0,
\end{aligned}$$

Pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$, Alors

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \sigma_1 \Delta v_1 < v_1 [a_1 + h_1(v_1, w_2)], \text{ pour tout } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty).$$

Et v_1 est une sous-solution.

2. Pour le cas général c'est à dire : nous considérons le problème (3.2), (3.11), sous les hypothèses (3.12), (3.13) et

$$a_i > \sigma_i \lambda_1, \quad i = 1, 2 \quad (3.21)$$

l'idée de la preuve

- (a) On considère l'hypothèse (3.16).
 (b) Nous définissons la fonction G par

$$G(x) = \frac{\bar{u}_2(x) \min_{\rho_1 \leq s, \tau \leq \rho_2} \left| \frac{\partial h_2}{\partial u_2}(s\bar{u}_1(x), \tau\bar{u}_2(x)) \right|}{\bar{u}_1(x) \max_{\rho_1 \leq s \leq 1} \left| \frac{\partial h_2}{\partial u_1}(s\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)) \right|}, \text{ pour } x \in \Omega.$$

- (c) Nous construisons des sous et sur-solutions v_i, w_i appropriées avec les mêmes hypothèses sur v_1 et w_2 , et nous allons montrer que v_1 et w_2 sont des sous et sur-solution respectivement .

Pour plus de détails voir [3].

Etant donné que toutes les premières dérivées partielles de h_1 et h_2 ont le même signe, on peut intervertir le rôle des \bar{u}_1, h_1 avec \bar{u}_2, h_2 , respectivement, et construire des sous et sur-solutions v_2, w_1 exactement de la même manière que précédemment. Ici v_2, w_1 sont de la forme $v_2(x, t) = \tilde{q}(x, t)\bar{u}_2(x), w_1 = \tilde{p}(x, t)\bar{u}_1(x)$ avec $\tilde{q}(x, t), \tilde{p}(x, t)$ analogue à $q(x, t), p(x, t)$ respectivement ($\tilde{q}(x, t) \rightarrow 1^-, \tilde{p}(x, t) \rightarrow 1^+$, quand $t \rightarrow \infty, \forall x \in \bar{\Omega}$).

Finalement nous avons $v_i(x, t) \rightarrow \bar{u}_i(x)$ par le bas et $w_i(x, t) \rightarrow \bar{u}_i(x)$ en haut, quand $t \rightarrow \infty$ de manière uniforme pour $x \in \bar{\Omega}, i = 1, 2$. Lorsque les conditions initiales $u_i(x, 0)$ et leurs dérivées partielles sont

proches de celle de $\bar{u}_i(x)$ dans le sens décrit dans le théorème, nous avons
 $v_i(x, 0) \leq u_i(x, 0) \leq w_i(x, 0)$

Alors on obtient

$$v_i(x, t) \leq u_i(x, t) \leq w_i(x, t), \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty),$$

Donc $u_i(x, t) \rightarrow \bar{u}_i(x)$, quand $t \rightarrow \infty$ et uniformément pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $i = 1, 2$, ceci implique que $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$ est une solution stationnaire asymptotiquement stable.

□

Remarque 3.2. La même démarche peut être appliquée pour les deux autres types de l'interaction entre deux espèces (proie-prédateur et le coopération .) (voir [3])

3.5 Simulations numériques

Cette partie est consacrée à la réalisation d'une simulation numérique des solutions du système parabolique (3.3) en dimension 1 , donc nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \sigma_1 u_{xx} = u(a - bu + \alpha v) = f_1(u, v), \\ v_t - \sigma_2 v_{xx} = v(e - gv + \beta u) = f_2(u, v), \\ \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \\ u = v = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x, t) \in Q_T = (0, \pi) \times (0, T) \\ \\ x \in (0, \pi) \\ x \in (0, \pi) \\ (x, t) \in \{0, \pi\} \times (0, T) \end{array} \quad (3.22)$$

Telle que T est une constante strictement positive.

Il existe une fonction spéciale dans le Matlab appelée **pdepe function** (Partial differential equation of type Parabolic equation c-à-d équation différentielles partielles de type parabolique) qui permet d'évaluer numériquement les solutions des équations différentielles partielles et de construire leur graphes. Le package **pdepe** est composé d'un fichier *pdex.m* ce fichier est disponible à l'url suivante : <http://www.mathworks.com/help/matlab> ou <http://blanchard.ep.wisc.edu>. On revoie le lecteur pour plus de détails sur l'utilisation du package **pdepe** à (voir [8]).

Et nous allons tracer les graphes pour chaque valeurs de α et β c'est à dire pour les trois modèles précédents :

3.5.1 Modèle proie-prédateur

Comme nous avons vu précédemment pour cette sous-section $\alpha = -c, \beta = d$, et on prend le système (3.22) avec $u_0(x) = x, v_0(x) = \pi - x$, pour $x \in (0, \pi)$, et on discute suivant les valeurs de $\sigma_i, i = 1, 2$:

1. $a > \sigma_1 \lambda_1, e > \sigma_2 \lambda_1$,

c-à-d nous choisissons $\sigma_i < 1, i = 1, 2$, parce que $\lambda_1 > a$.

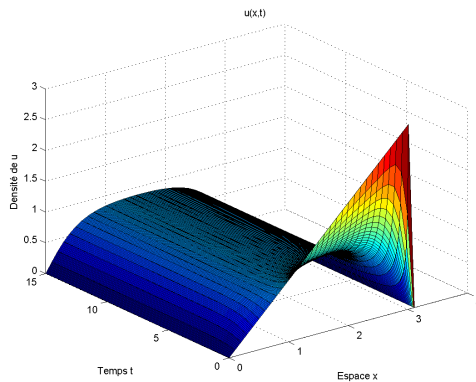


figure (a)

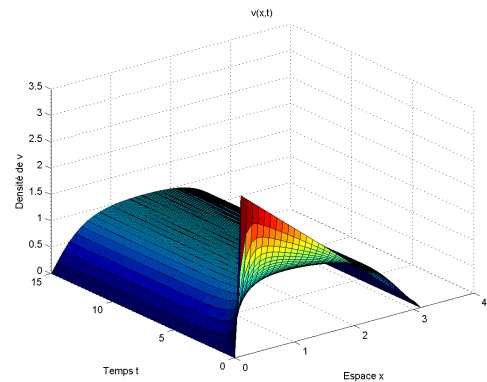


figure (b)

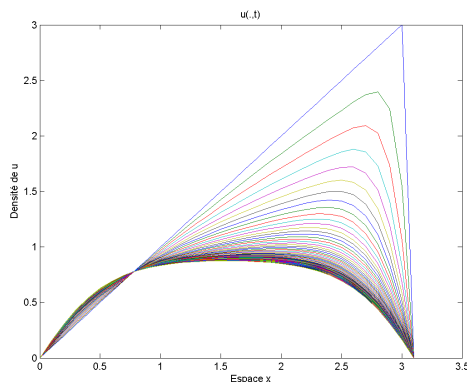


figure (c)

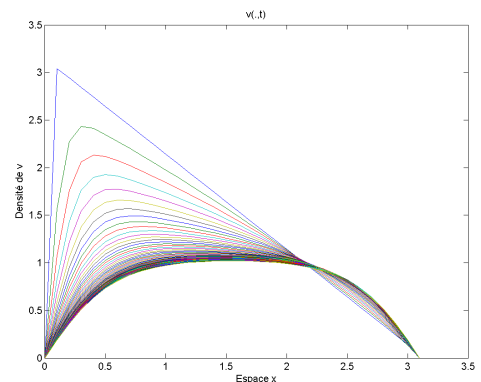


figure (d)

FIGURE 3.1 – Coexistence des proies et des prédateurs de densités $u(x, t), v(x, t)$ (respectivement) en dim2, dim3 pour : $a = 1, b = 1, c = 0.1, d = 0.05, e = 1, g = 1, \sigma_1 = 0.1$ et $\sigma_2 = 0.1$.

Les figures (a),(c) dans Figure (3.1) montrent la convergence de $u(x, t)$ en dimension 2 et en dimension 3 (pour le mieux de comprendre, ici j'ai tracé $u(., t)$ en fonction de x pour chaque valeur de paramètre t).

De même les figures (b),(d) dans Figure (3.1) montrent la convergence de

$v(x, t)$ en dimension 2 et en dimension 3.

Nous remarquons ici que les deux populations proies-prédateurs coexistent avec des densités $\bar{u}(x)$ et $\bar{v}(x)$ quand t est assez grand.

Telles que $\bar{u}(x)$ et $\bar{v}(x)$ sont les solutions stationnaires du système (3.22) ayant la forme d'un parabole voir figure(c),figure(d) : Figure (3.1).

2. pour $a < \sigma_1 \lambda_1, e < \sigma_2 \lambda_1$.

Pour ce cas il faut juste choisir $\sigma_1 > a, \sigma_2 > e$ car $\lambda_1 > a$.

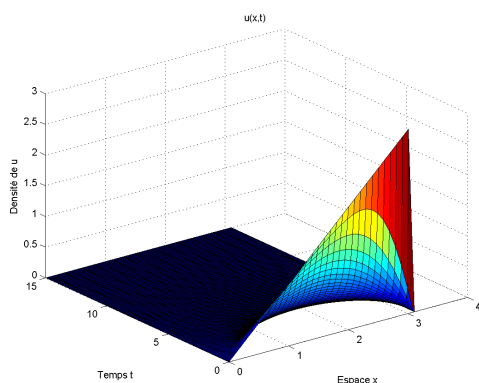


figure (a)

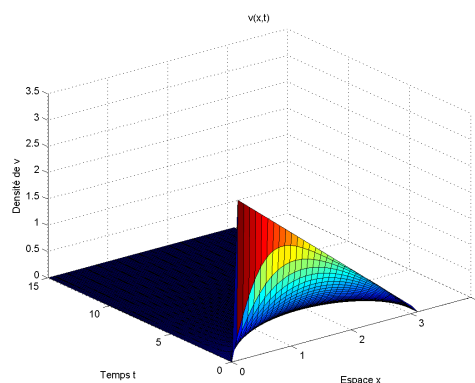


figure (b)

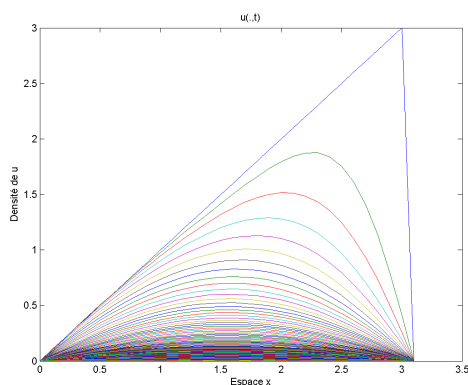


figure (c)

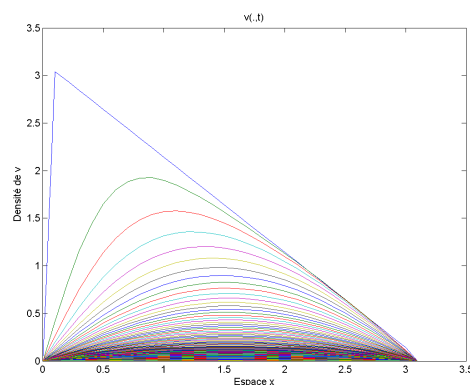


figure (d)

FIGURE 3.2 – Exclusion des proies et des prédateurs de densités u, v (respectivement) : pour $a = 1, b = 1, c = 0.1, d = 0.05, e = 1, g = 1, \sigma_1 = 1.3$ et $\sigma_2 = 1.3$.

Nous voyons bien ici, quand t est assez grand $u(x, t)$ tend vers 0 dans les figures : (a),(c) dans Figure (3.2), la même chose pour $v(x, t)$ dans les figures : (b),(d) dans Figure (3.2).

Ceci implique que les deux espèces proies-prédateurs vont vers l'extinction

à long terme.

3.5.2 Modèle de compétition

Pour cette sous-section on a $\alpha = -c, \beta = -d$. On considère (3.22) avec $u_0(x) = v_0(x) = x$, pour $x \in (0, \pi)$, donc on obtient pour :

1. $a > \sigma_1 \lambda_1, e > \sigma_2 \lambda_1$,
c-à-d nous choisissons $\sigma_i < 1, i = 1, 2$.

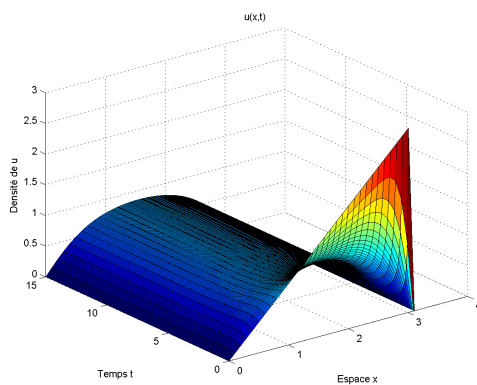


figure (a)

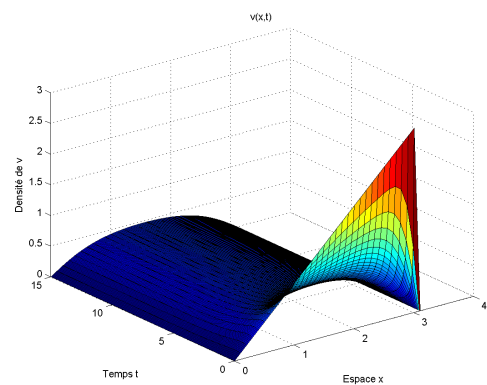


figure (b)

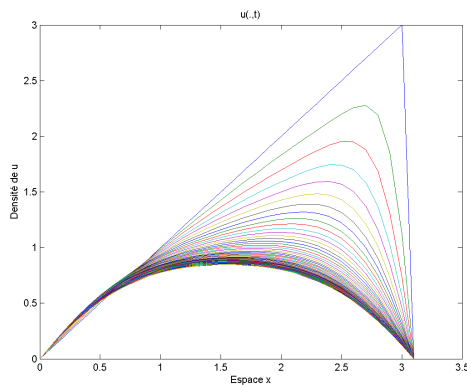


figure (c)

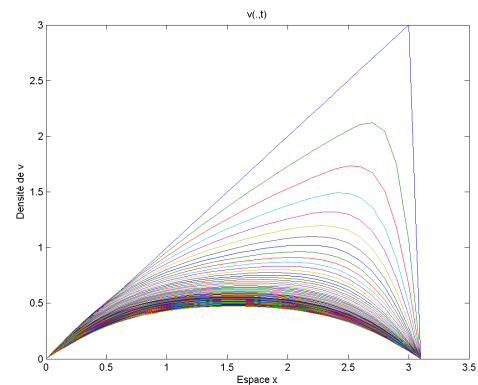


figure (d)

FIGURE 3.3 – Coexistence des compétiteurs $u(x, t), v(x, t)$ en dim2, dim3 pour : $a = 1, b = 1, c = 0.1, d = 0.5, e = 1, g = 1, \sigma_1 = 0.2$ et $\sigma_2 = 0.2$.

Les figures (a),(c) dans Figure (3.3) montrent la convergence de $u(x, t)$ en dimension 2 et en dimension 3 .

De même les figures (b),(d) dans Figure (3.3) montrent la convergence de $v(x, t)$ en dimension 2 et en dimension 3.

Nous remarquons ici que la compétition est faible dans le sens où les deux paramètres de compétition sont plus petits que l'unité $c < 1, d < 1$, et les deux populations coexistent avec des densités $\bar{u}(x)$ et $\bar{v}(x)$ quand t est assez grand.

Telles que $\bar{u}(x)$ et $\bar{v}(x)$ sont les solutions stationnaires du système (3.22) ayant la forme d'un parabole voir figure(c),figure(d) : Figure (3.3).

2. pour $a < \sigma_1 \lambda_1, e < \sigma_2 \lambda_1$.

Pour ce cas il faut juste choisir $\sigma_1 > a, \sigma_2 > e$.

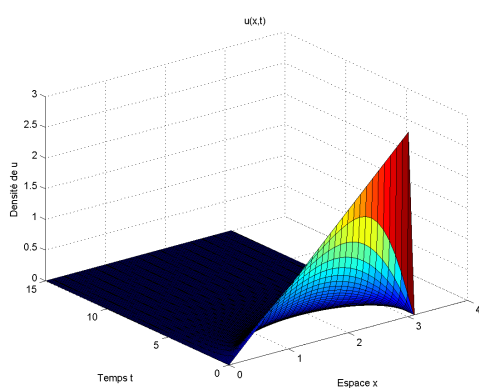


figure (a)

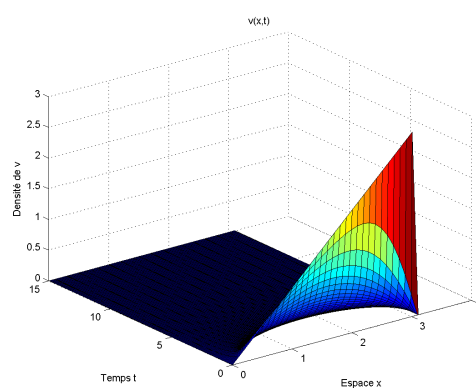


figure (b)

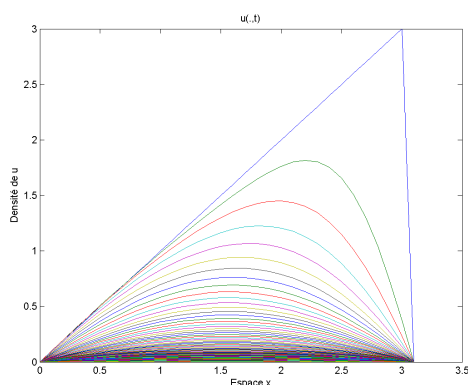


figure (c)

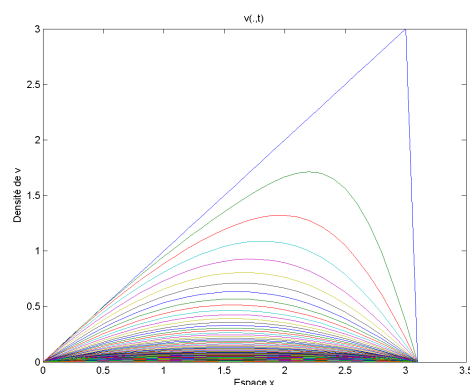


figure (d)

FIGURE 3.4 – Exclusion des compétiteurs u, v : pour $a = 1, b = 1, c = 0.1, d = 0.5, e = 1, g = 1, \sigma_1 = 1.5$ et $\sigma_2 = 1.5$

Il est clair ici, quand t est assez grand $u(x, t)$ tend vers 0 dans les figures : (a),(c) dans Figure (3.4), de même pour $v(x, t)$ dans les figures : (b),(d) dans Figure (3.4).

Ceci implique que les deux espèces ne peuvent pas vivre ensemble si leurs diffusion sont grands quand t tend vers l'infini.

3.5.3 Modèle de coopération (mutualisme)

Donc, pour ce dernier cas $\alpha = c, \beta = d$ et nous considérons à nouveau le système (3.22) avec $u_0(x) = v_0(x) = \pi - x$, pour $x \in (0, \pi)$, donc on obtient pour

1. $a > \sigma_1 \lambda_1, e > \sigma_2 \lambda_1$,
c-à-d nous choisissons $\sigma_i < 1, i = 1, 2$.

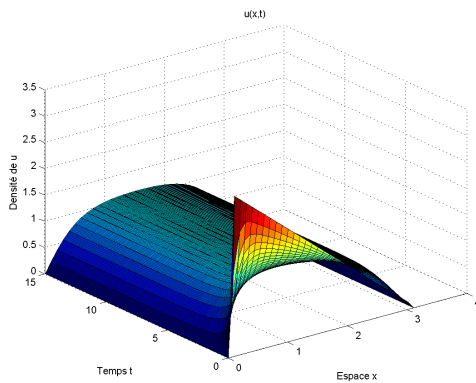


figure (a)

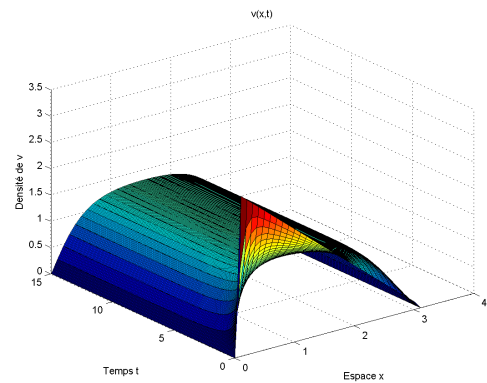


figure (b)

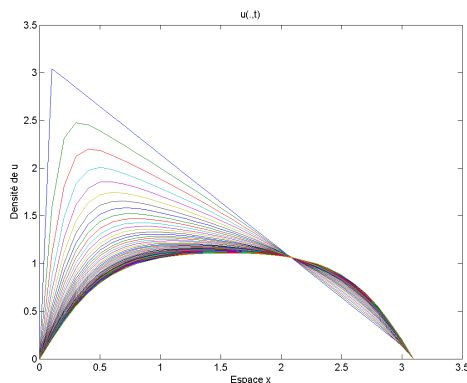


figure (c)

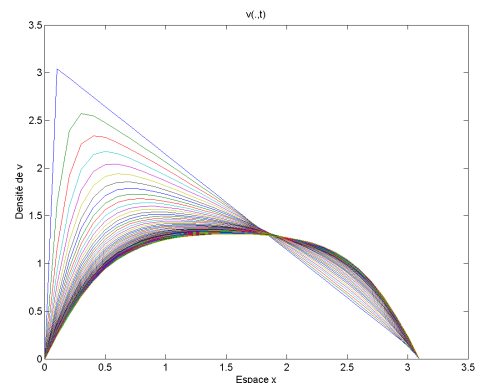


figure (d)

FIGURE 3.5 – Les deux populations de densités $u(x, t), v(x, t)$ coexistent pour : $a = 1, b = 1, c = 0.1, d = 0.3, e = 1, g = 1, \sigma_1 = 0.1$ et $\sigma_2 = 0.1$.

Les figures (a),(c) dans Figure (3.5) montrent la convergence de $u(x, t)$ en dimension 2 et en dimension 3.

De même les figures (b),(d) dans Figure (3.5) montrent la convergence de

$v(x, t)$ en dimension 2 et en dimension 3.

Nous remarquons ici que le mutualisme est faible dans le sens où les deux paramètres de mutualisme sont plus petits que l'unité $c < 1, d < 1$, et les deux populations coexistent avec des densités $\bar{u}(x)$ et $\bar{v}(x)$ à long terme. Telles que $\bar{u}(x)$ et $\bar{v}(x)$ sont les solutions stationnaires du système (3.22) ayant la forme d'un parabole voir figure(c),figure(d) : Figure (3.5).

2. pour $a < \sigma_1 \lambda_1, e < \sigma_2 \lambda_1$.

Pour ce cas il faut juste choisir $\sigma_1 > a, \sigma_2 > e$.

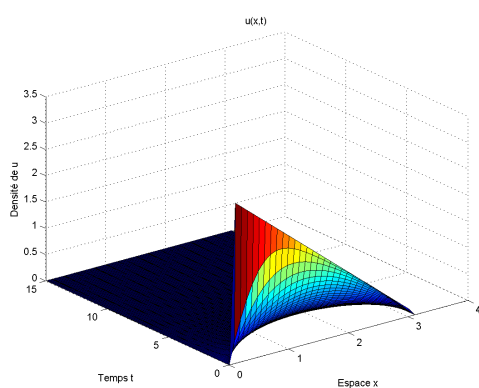


figure (a)

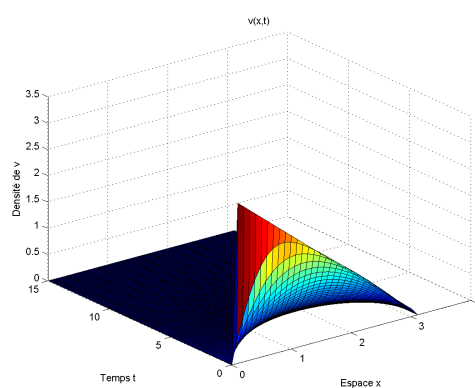


figure (b)

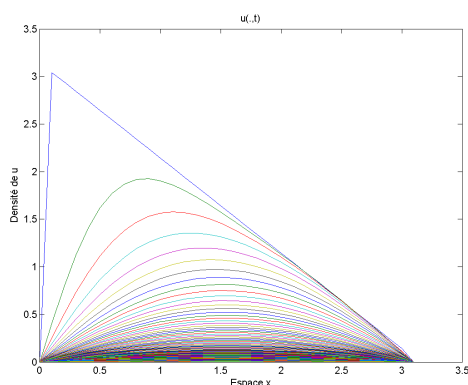


figure (c)

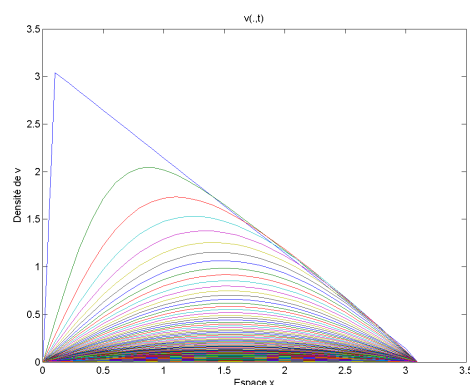


figure (d)

FIGURE 3.6 – Exclusion des deux populations de densités u, v : pour $a = 1, b = 1, c = 0.1, d = 0.5, e = 1, g = 1, \sigma_1 = 1.4$ et $\sigma_2 = 1.4$

Nous voyons bien ici, quand t est assez grand $u(x, t)$ tend vers 0 dans les figures : (a),(c) dans Figure (3.6), de même pour $v(x, t)$ dans les figures : (b),(d) dans Figure (3.6).

Ceci implique que les deux espèces ne peuvent pas vivre ensemble si leurs diffusion sont grands quand t tend vers l'infini.

3.6 Conclusion

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de monotonie, pour montrer :

- L'existence et l'unicité de la solution du problème parabolique.
- L'existence et l'unicité de la solution du problème elliptique associé.
- La convergence de la solution du problème parabolique vers la solution stationnaire (la solution du problème elliptique associé).

Dans un intervalle bien choisi (ici nous avons choisi l'intervalle dont les bornes sont une sous et une sur-solution du problème parabolique, pour assurer l'unicité des solutions). Et nous avons indiqué trois cas pour la propriété quasi-monotone (ceci dépend de l'expression de la fonction de l'interaction), et suivant chaque propriété nous avons traité un modèle biologique :

1. Pour le cas quasi-monotone croissante : nous avons étudié le modèle proie-prédateur.
2. Maintenant pour le cas quasi-monotone décroissante : nous avons étudié le modèle de compétition.
3. finalement pour le cas quasi-monotone mixte : nous avons étudié le modèle de coopération (par exemple le mutualisme).

Bibliographie

- [1] Robert.A.Adams, *Sobolev Spaces* , Academic Press 1975.
- [2] Pierre Auger, Christophe Lett, Jean-Christophe Poggiale *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés* , Dunod, 2010.
- [3] Anthony W.Leung, *Nonlinear Systems of Partial Differential Equations* , World Scientific, 2009 .
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis* , Springer, 2011.
- [5] E.DiBenedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlag, 1993.
- [6] Evans, Lawrence Craig, *Measure theory and fine properties of functions. CRC press* , 2015.
- [7] Gilles Lacombe, Pascal Massat, *Analyse fonctionnelle* , Dunod, 1999.
- [8] P.Howard, *Partial Differential Equations in MATLAB 7.0* , Spring 2005.
- [9] Radulescu, Vicentiu D. *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations : Monotonicity, Analytic, and Variational Methods* , Hindawi Publishing Corporation, 2008.
- [10] Zhuoqun Wu, Jingxue Yin and Chunpeng Wang *Elliptic and Parabolic Equations*, World Scientific, 2006.

Résumé:

Dans ce mémoire on s'intéresse aux problèmes elliptiques et paraboliques non-linéaires qui modélisent trois phénomènes biologiques: relation proie-prédateur, compétition et coopération. L'objectif étant d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité et de comportement asymptotique des solutions par l'utilisation de la méthode de sous et sur-solutions.

Mots Clés:

Problèmes elliptiques et paraboliques non-linéaires, sous solution, sur solution, quasi-monotone, solution stationnaire.

Abstract:

In this work, we are interested to nonlinear elliptic and parabolic problems that model three biological models: prey -predator relationship, competition and cooperation. The objective is to obtain results of existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions by using the method of of upper-lower solutions.

Keywords:

Nonlinear elliptic and parabolic problems, lower solution, upper solution, quasimonotone, stationary solution.

الملخص :

في هذه المذكرة نتطرق لدراسة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الغير خطية و التي تتضمن ثلاث نماذج بيولوجية : علاقة فريسة و مفترس، المنافسة والتعاون. الهدف هو الحصول على نتائج وجود، تفرد الحلول و على السلوكيات المقاربة لها، باستعمال طريقة الحلول العلوية و السفلية .

الكلمات المفتاحية

بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الغير خطية، الحل السفلي، الحل العلوي، رتيبة تقريبا، حل ثابت.