



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Abou Bekr Belkaid ,Tlemcen

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire & Mathématiques Appliquées

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

**Mathématiques Appliquées à Quelques
modèles épidémiologiques**

présentée par **Soufiane Bentout**

Soutenue devant le jury composé de :

Abdellaoui Boumediène	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mokrane Abdelhafid	Professeur, ENS Kouba	Examineur
Adimy Mostafa	Directeur de recherche INRIA, Lyon	Examineur
Moussaoui Ali	Professeur, Université de Tlemcen	Examineur
Mahjoub Tewfik	MCA, Université de Tlemcen	Examineur
Touaoula Mohamed Tarik	Professeur, Université de Tlemcen	Directeur de thèse

Département de Mathématiques

Faculté des sciences

BP 119 Tlemcen

bentoutsofiane@gmail.com

abstract

The objective of this thesis is the modeling and studying mathematics in epidemiology, the basic reproduction number R_0 is derived, and related to it, the existence of an endemic equilibrium, the stability of the disease free and endemic equilibrium are studied. More precisely : If R_0 is less or equal than one, the disease free equilibrium is globally asymptotically stable.. Finally, for R_0 greater than one, the endemic equilibrium is globally asymptotically stable whenever the rate of disease transmission is proportional to the rate of disease recovery.

résumé

Les modèles mathématiques dans l'épidémiologie jouent un rôle très important pour éradiquer les maladies infectieuses. Dans cette thèse, on va donner quelques modèles en épidémiologie en particulier, le modèle SIR avec l'âge d'infection, le modèle SIR non linéaire et ainsi qu'une version non-linéaire du modèle SEIR. On remarque que tous ces modèles sont basés sur le taux de reproduction de base R_0 , ce taux va donner le comportement asymptotique des solutions associées. En effet, Si $R_0 \leq 1$, alors le point sans maladie (DFE) converge dans ce cas, et si $R_0 > 1$ la maladie persiste et les solutions convergent vers le point endémique.

Remerciements

Louange à Dieu qui m'a donné la force afin de parfaire ce travail et le mener à terme.

Je tiens également à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse le professeur "**Touaoula Tarik Mohamed**", il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ma thèse, qui m'a transmis la passion de la recherche mathématique et n'a eu de cesse de m'encourager, et de me soutenir, je souligne aussi que j'ai eu l'opportunité de travailler sous sa direction durant tout mon cursus universitaire licence, Master et finalement Doctorat vraiment j'étais très chanceux, pour cela je tiens à saluer son engagement total durant toute ma formation, je lui réitère mes remerciements pour ses conseils avisés et ses indications de tout temps fructueuses, sa capacité et son énorme maîtrise m'ont aidé à aborder les problèmes de cette thèse. Je remercie en lui le frère au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier le Professeur "**Abdellaoui Boumediène**", pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je prie le Professeur "**Mokrane Abdelhafid**", de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

J'adresse aussi au le Professeur "**Adimy Mostafa**", l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement, le Professeur "**Moussaoui Ali**", pour avoir accepté de participer au jury qui examinera cette thèse.

Je renouvelle mes remerciements à M. "**Mahjoub Tewfik**", pour son accord pour faire partie du jury.

Mes remerciements chaleureux à M. "**Miri Sofiane Elhadi**", qui m'a beaucoup aidé à la réalisation de cette thèse, je salut en lui sa gentillesse, son humilité et sa patience à prodiguer ces conseils pertinents.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail, dont la liste ne peut contenir cette page.

Table des matières

Introduction	9
1 Modélisation en épidémiologie	12
2 Stabilité globale d'un modèle SIR avec âge d'infection	19
2.1 Existence et unicité des solutions	21
2.2 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	24
2.3 Stabilité globale de l'équilibre endémique	27
2.4 Analyse numérique	41
3 Stabilité globale d'un modèle épidémique SIR avec fonction d'incidence non linéaire et âge d'infection	45
3.1 Existence et unicité des solutions	49
3.2 Attracteur global et compacité	54
3.3 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	61
3.4 Stabilité exponentielle de l'équilibre sans maladie	64
3.5 Stabilité globale de l'équilibre endémique	67
4 Modèle épidémiologique SEIR avec fonction incidence non-linéaire	79
4.1 Attracteur global compact	84
4.2 Stabilité globale de l'équilibre "sans maladie"	86
4.3 Existence de l'équilibre endémique et persistance uniforme	88
4.4 Stabilité globale et unicité de l'équilibre endémique	93
A Généralités sur les systèmes dynamiques	99
A.1 Notion de stabilité et point d'équilibre	108

A.2 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov	110
Bibliographie	112

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de plusieurs modèles mathématiques pour une population humaine atteinte d'une maladie infectieuse donnée. Les modèles de maladies infectieuses ont d'abord été utilisés pour comprendre la dynamique temporelle d'une épidémie, puis pour appliquer une stratégie thérapeutique ou de lutte contre les maladies infectieuses. Les modèles mathématiques sont de plus en plus fréquemment utilisés en médecine, et même en biologie dans des domaines d'application de plus en plus variés. Formalisant des phénomènes biologiques complexes, ils permettent d'évaluer des hypothèses en fournissant des éléments de compréhension ou de prédiction.

Un modèle mathématique représente par des équations une vision "simplifiée" de la réalité, en particulier la modélisation en épidémiologie est à la croisée des chemins de l'épidémiologie, la médecine, le biologie, et les mathématiques. La motivation principale, au départ fut d'étudier la contagion interhumaine, selon la pathologie étudiée et sa complexité on utilise un nombre plus au moins élevé de variables et d'équations. les maladies transmissibles, le paradigme central est celui de la contagion interhumaine.

De nos jours, on demande aux modèles d'être d'autant plus réalistes, ce qui les amènent à être de plus en plus complexes afin de répondre à des questions de plus en plus complexes, ceci est le résultat de la complexification des questions abordées, et à l'augmentation en nombre et en précision des données récoltés. Le but de cette thèse est de présenter de nouveaux modèles qui apportent une amélioration poussée dans un certain sens. Ces modèles déjà existants dans la littérature, afin d'obtenir des résultats qui rapprochent encore plus de la réalité.

L'épidémiologie théorique des maladies transmissibles est devenue une discipline à part entière, distincte de la démographie théorique et de l'écologie théorique, et un terrain fertile en applications et en problèmes pour les mathématiques.

On attribue les premiers résultats modernes en dynamique de population à Fibonacci (18^{ème} siècle) qui traite la croissance d'une population de lapins. Les premiers bribes de modélisation en épidémiologie sont quant à eux dus à Bernoulli ([3],[13]) 1766, mais les bases solides de l'épidémiologie mathématiques ont pour point de départ l'oeuvre de sir Ronald Ross, qui en 1911 dans ([50]) donna le premier modèle mathématique de la transmission de la maladie

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = mab_1 x_2(1 - x_1) - \gamma x_1, \\ \dot{x}_2 = b_2 a(1 - x_2) - \mu x_2 \end{cases}$$

x_1 représente la proportion des humaines infectieux et x_2 est celle des moustiques infectieux.

Il a aboutit au résultat surprenant et inattendu, il affirma qu'il n'était pas nécessaire d'exterminer tous les moustiques pour éradiquer l'épidémie; mais il suffisait d'eux réduire la quantité de moustiques infectieux en deçà d'un certain seuil critique. En s'inspirant des idées de Ross, W.O. Kermack et A.G. McKendrick ont étudié les maladies infectieuses tout en donnant un attention particulière à la dynamique de transmission, qui dépend de la fréquence et de l'intensité des interactions entre individus susceptibles et infectés, leur résultat fondateur ([35]) parut en 1927 continue à avoir un rôle primordial dans la théorie des maladies infectieuses. Voici le modèle :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

où

- S : population de susceptibles
- I : population des infectés
- R : population des guéris.

la population totale étant $N = S + I + R$.

C'est donc Kermack et Mckendrick qui ont donné toute son importance à la notion de seuil introduite ultérieurement par Ross.

Le but ultime de l'épidémiologie consiste à comprendre la dynamique d'une maladie infectieuse afin de poser les stratégies convenables permettant d'éradiquer ou, du moins réduire l'im-

pact de la pathologie sur la santé publique.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques modèles classiques les plus connus dans l'épidémiologie on citera le modèle SIR , SEIR, SIS . Dans le deuxième chapitre, nous présentons le modèle SIR linéaire avec l'âge d'infection a , nous utilisons le principe de la trajectoire totale pour prouver la stabilité globale de l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique avec la fonction de Lyapunov bien choisit pour le modèle SIR.

Dans le troisième chapitre, nous nous concentrons essentiellement sur le modèle SIR avec l'âge d'infection mais en rajoute la fonction d'incidence non linéaire , nous utilisons le même principe pour prouver que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

Dans le dernier, nous allons ajouter une nouvelle classe, celle "des individus exposés". Elles sont des densités infectées mais pas infectieuses. Nous avons étudié la stabilité globale d'équilibre sans maladie(DFE) et l'équilibre endémique par la méthode classique "Fonction de Lyapunov".

Chapitre 1

Modélisation en épidémiologie

L'épidémiologie moderne s'intéresse à des facteurs aussi nombreux que variés tels que le mode de transmission, la période infectieuse et de latence, c'est aussi l'étude de l'état de santé des populations, de leurs variations et de leurs causes. L'idée commune à presque tous les modèles épidémiologiques, consiste à partitionner la population en différents compartiments disjoints, où chaque compartiment regroupe une certaine classe de la population, susceptibles, infectés, ayant le même état vis-à-vis de la maladie. Le but essentiel de tous les modèles proposés, est de comprendre et par la suite contrôler dans la mesure du possible l'évolution de chaque maladie. Nous commençons par donner la définition du nombre de base R_0 , nombre qui, on le verra par la suite est essentiel pour assimiler l'évolution de toute maladie infectieuse.

Une maladie est dite endémique si elle persiste dans une population. Elle est dite épidémique si elle apparaît pendant une période relativement courte dans une population (moins d'une année par exemple). L'épidémiologie s'occupe aussi bien des facteurs comme les agents infectieux, le mode de transmission, la période de latence, la période infectieuse, la susceptibilité, la vaccination et la résistance que des facteurs sociaux, culturels, démographiques, économiques et géographiques.

Définition 1.0.1. *Le nombre de reproduction de base R_0 est un concept clé en épidémiologie et sans conteste une des idées importantes que les mathématiques ont apporté à la théorie des épidémies. Cette quantité, est le nombre moyen de cas secondaires, engendré par un individu infectieux typique durant sa période d'infectiosité, quand il est introduit dans une population constituée entièrement de susceptibles.*

En épidémiologie la première note qui anticipe la notion de R_0 est due à Theophil Lotz (1980) (Nishiura, Dietz, Eichner 2006). Il se trouve que R_0 est un seuil. A savoir que si $R_0 \leq 1$ alors le point sans maladie est globalement stable, sinon le point endémique est globalement stable. C'est Ross qui décrit le premier modèle différentiel et donne les conditions de seuil. Intuitivement, une maladie peut proliférer dans une population si en moyenne un individu infectieux en infecte plus qu'un. Ceci permet de définir le taux de reproduction de base R_0 comme étant le nombre moyen d'infections causées quand un individu infectieux typique est introduit dans une population complètement susceptible durant toute sa période d'infectiosité. Il est implicitement supposé que l'individu se mélange à la population hôte exactement de la même façon que la population se mélangerait. Pour une très large classe de modèles épidémiologiques, il est prouvé dans [12] que l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$ et instable si $R_0 > 1$. Lorsque l'équilibre sans maladie est instable, c'est-à-dire la maladie peut proliférer dans la population, plusieurs situations peuvent se présenter. La plus simple consiste en l'apparition d'un équilibre endémique globalement stable. Il est aussi possible que plusieurs équilibres endémiques, ou des oscillations périodiques, apparaissent. D'autres phénomènes beaucoup plus complexes peuvent se manifester.

1.0.1 Premier modèle mathématiques en épidémiologie : Daniel Bernoulli, [45]

L'intervention des modèles en l'épidémiologie a eu lieu le 30 avril 1760, dans un mémoire de l'Académie de Sciences de Paris . D. Bernoulli y présente un modèle et ses calculs concernant l'épidémie de variole, créant une ébauche à ce qu'on appelle de nos jours les "bio-mathématiques".

Les recherches de Bernoulli est fondée sur le principe de prouver si l'inoculation de la maladie est plus avantageuse que risquable pour la population cible de cette épidémie. La variole présente malheureusement un cauchemar qui menace la paix humaine puis-quelle pose un problème de la manière d'éradication volontaire par l'être humain.

D.Bernoulli proposé les estimations suivantes :

- un individu infecté pour la première fois par la variole a une probabilité p de mourir et une probabilité $1 - p$ de rester en vie, et cela, ne dépend pas de son âge.
- un individu a une probabilité q d'être infecté dans l'année, et cela indépendamment de

son âge (i.e. la probabilité qu'un individu soit infecté pendant le petit intervalle de temps da entre l'âge a et l'âge $a + da$ est $q.da$);

- lorsqu'un individu reste en vie après son infection par la variole, son organisme est capable de défendre et résister cette infection, donc il est immunisé pendant toute sa vie.

En considérant alors $m(a)$ la mortalité naturelle à l'âge a , alors la probabilité qu'un individu meurt dans un petit intervalle de temps da entre l'âge a et l'âge $a + da$ est $m(a)da$. En proposant un groupe de P_0 individus nés la même année, notons $S(a)$ le nombre d'individus qui sont viables à l'âge a et qui ne sont pas infectés (qui ont donc une probabilité d'être infectés), $R(a)$ le nombre d'individus qui sont aussi viables à l'âge a et immunisés. $N(a) = S(a) + R(a)$ le nombre total d'individus qui sont encore en vie à l'âge a . Soit le modèle suivant,

$$\begin{cases} \frac{dS}{da} = -qS(a) - m(a)S(a), \\ \frac{dR}{da} = q(1-p)S(a) - m(a)R(a), \end{cases}$$

avec $q(1-p)S(a)$ le nombre d'individus qui reste en vie et qui ont acquis le caractère d'être immunisés. Donc la population totale vérifiée l'équation suivant

$$\frac{dN}{da} = -pqS - m(a)N(a). \quad (1.1)$$

A l'aide des valeurs de $N(a)$ contenues dans le tableau de Halley ([19], [45]) et avec la formule (1.1), ça va nous donner la chance de calculer le nombre des individus $S(a)$ qui restent encore en vie à l'âge a sans avoir été infectés. On conclut alors facilement le nombre d'individus qui restent encore en vie à l'âge a qui sont infectés par la variole et qui ont survécu par l'équation suivante : $R(a) = P(a) - S(a)$. Enfin, déterminons pour chaque âge a le nombre des victimes de cette maladie fatal entre l'âge a et l'âge $a + 1$. Théoriquement, ça représente l'intégrale $pq \int_x^{x+1} S(t) dt$ par la formule du trapèze, nous avons $pq(S(a) + S(a + 1)) = 2$ est une bonne approximation. En général, déduisant que sur les 1300 nouveau-nés, 101 sont destinés à mourir de la variole.

D'après le modèle de Bernoulli on peut prouver que la fraction d'individus qui à l'âge a est encore susceptible d'attraper la variole est,

$$\frac{S(a)}{N(a)} = \frac{1}{(1-p)e^{qa} + p}.$$

Ensuite Bernoulli a pris en charge le cas où la variole serait inoculée de manière gentille non funeste à toute la population dès la naissance. Le foyer infectieux de la variole serait anéanti et la question qui se pose est de connaître quel serait le succès en espérance de vie.

1.0.2 Le modèle endémique SIS

Par les modèles de la maladie d'aspect infectieux, on présente le modèle SIS qui est le plus simple qui n'attribue pas à l'immunité. Ainsi les personnes cibles d'infection peuvent redevenir susceptibles après rétablissement. C'est un modèle endémique parce qu'il se peut que la maladie persiste.

Le modèle écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S + \alpha I, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (\mu + \alpha) I, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $N = S + I$ est la population totale. Les paramètres β , μ , et α sont respectivement le paramètre de transmission, le taux de natalité supposé égal au taux de mortalité et le taux de perte d'infectiosité, et supposé aussi que la population totale est constante c'est-à-dire il y a une équivalence entre les naissances et les décès. Nous définissons le taux de reproduction de base comme suit,

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha + \mu}.$$

En divisant les équations par N et posons $i(t) = I(t)/N$ et $s(t) = S(t)/N = 1 - i(t)$, nous obtenons

$$\frac{di}{dt} = \beta i(1-i) - (\alpha + \mu)i. \quad (1.3)$$

La solution générale de l'équation (1.3),

$$i(t) = \begin{cases} \frac{e^{(\mu+\alpha)(R_0-1)t}}{R_0(e^{(\mu+\alpha)(R_0-1)t} - 1)/(R_0 - 1) + 1/i_0} & \text{pour } R_0 \neq 1, \\ \frac{1}{\beta t + 1/i_0} & \text{pour } R_0 = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

D'après (1.4), nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.0.1. *La solution $i(t)$ de l'équation ((1.3)) converge vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ si $R_0 \leq 1$ et tend vers $1 - 1/R_0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ si $R_0 > 1$.*

0

Ce théorème explique que pour une maladie, quelle que soit initialement la fraction infectée positive, celle-ci approche une valeur constante endémique si le nombre de contacts est supérieur à 1. Sinon, la maladie tend à disparaître.

1.0.3 Modèle endémique SIR

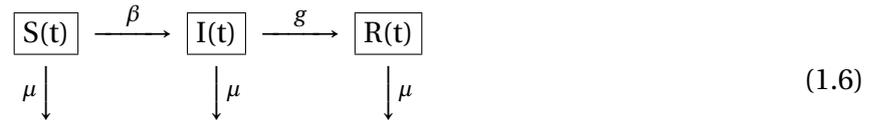
Jusqu'à maintenant la chose qui nous intéresse est une seule épidémie. Dans la définition d'une épidémie, l'intervalle du temps est généralement quelques semaines à quelques mois, pendant ce laps de temps les variations démographiques de la densité des susceptibles sont négligeables. C'est pour cela, la démographie de l'hôte n'est pas mentionnée dans le modèle précédent. Si maintenant, nous jetons un oeil sur ce qui intéresse les épidémies récurrentes à titre d'exemple on va prendre en charge tout ce qui est en relation avec la démographie de la population hôte. Tout d'abord, nous restons sur l'idée de considérer que la taille de la population hôte est constante, nous notons une compensation des mortalités par des naissances, impliquant une égalité entre les deux compensées par des naissances, nous supposons que le taux de natalité égale au taux de mortalité. Renferment qu'il existe une influence claire de la population totale sur l'infectiosité mais le vis versa n'est pas réalisé (comme la maladie rougeole).

Soit le modèle SIR endémique de base suivant,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (g + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = gI - \mu I - \mu R, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $N = S + I + R$ est la taille totale de la population. L'arrivée des nouveaux nés dans la classe des susceptibles au taux μN et les décès dans les classes aux taux μS , μI et μR définit la différence entre le modèle SIR endémique et SIR épidémique. Le taux de natalité est égal au taux de mortalité, ainsi

la taille N de la population est constante.



En obtenant à partir de la division les équations du système (1.5) par N et en posant $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ et $r = \frac{R}{N}$, le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \mu - \mu s - \beta si, \\ \frac{di}{dt} = \beta si - (g + \mu)i, \end{array} \right. \tag{1.7}$$

L'ensemble $M = \{(s, i) \mid s \geq 0; i \geq 0; s + i \leq 1\}$ est invariant, le taux de reproduction de base associé à est $R_0 = \frac{\beta}{g + \mu}$, en effet cette quantité est le produit du taux de contact par la période moyenne d'infection ajustée par les décès $\frac{1}{(g + \mu)}$.

Théorème 1.0.2. Soit $(s(t), i(t))$ la solution de (1.0.3) dans M . Si $R_0 \leq 1$ ou $s(0) = 0$, alors toute solution qui commence dans M converge vers l'équilibre sans maladie $(1; 0)$. Si $R_0 > 1$, alors toute solution avec $i(0) > 0$ converge vers l'équilibre endémique $(s^*, i^*) = (\frac{1}{R_0}, \frac{g(R_0 - 1)}{\beta})$.

1.0.4 Le modèle SEIR

Lorsque l'infection touche un individu susceptible, un intervalle du temps est indispensable avant que les signes et les symptômes s'installent et installant avec eux le terme contagion entre les individus susceptibles. Nous avons pris l'aide des individus ayant été infectés par le germe (pathogène) de la maladie mais qui sont des porteurs sains c'est à dire n'ayant pas le pouvoir de transmission. En définissant qu'il existe une période qui prend le nom de latence pendant le quelle le développants des pathogènes responsables de l'infection est quiescent ou potentiel. Durant ce laps du temps les infectés sont dis latents ou exposés c'est à dire les symptômes ne sont pas apparents, donc ne peuvent pas transmettre la maladie à d'autre individu c'est pourquoi nous ajoutons un nouveau classe d'individus exposés "E" dans lequel nous plaçons tous les individus qui ont probabilité éventuelle d'être infectés à un taux α . Le système d'équations différentielles est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI, \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - \alpha E, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

la population totale vérifiée l'équation suivant,

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$

Le taux de reproduction de base associé à (1.8),

$$R_0 = \frac{\beta N}{\mu}.$$

Si $R_0 < 1$ alors le point sans maladie (DFE) est globalement asymptotiquement stable, sinon, le point endémique est globalement stable. On peut également ajouter un tel compartiment d'individus exposés aux autres modèles pour obtenir des modèles SEIRS, SEIS et SEI.

Chapitre 2

Stabilité globale d'un modèle SIR avec âge d'infection

Nous présentons dans ce chapitre un modèle "SIR" structuré en âge d'infection, qui joue un rôle important dans la transmission des maladies infectieuses.

Soit le modèle SIR suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S(t) - S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -v_I(a) i(t, a), \\ \frac{dR}{dt} = \int_0^\infty (v_I(a) - v_s) i(t, a) da - v_s R(t), \\ i(t, 0) = S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ S(0) = S_0, i(0, \cdot) = i_0 \in L_0^1(0; +\infty). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

La population totale est divisée en trois compartiments : la densité des susceptibles S , la densité des infectés I , la densité des réfractaires R . L'âge d'infection $a \geq 0$ est le temps depuis que l'infection a commencé, et $i(t, a)$ est la densité des infectés à l'instant t et qui ont l'âge d'infection a .

Si on donne deux valeurs $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \infty$, alors le nombre des individus qui ont l'âge d'infection entre a_1 et a_2 :

$$\int_{a_1}^{a_2} i(t, a) da.$$

Dans le modèle (2.1), Λ est un paramètre qui représente une contribution positive qui entre dans $S(t)$, et μ le taux de mortalité. La fonction $\beta(a)$ peut être interprétée comme étant la probabilité d'être infectieux avec l'âge d'infection a , alors la quantité :

$$\int_0^{\infty} \beta(a) i(t, a) da,$$

représente le nombre d'individus contagieux. On a aussi $\nu_I(a)$ est le taux de quitter le compartiment des individus infectés et qui pourront devenir réfractaire. La probabilité d'être toujours infecté est donnée par

$$\nu(a) = e^{-\int_0^a \nu_I(\sigma) d\sigma}.$$

En intégrant par la méthode des caractéristiques le modèle (2.1), nous avons

$$i(t, a) = \begin{cases} S(t-a)J(t-a)\nu(a)e^{-\mu a}, & t > a \geq 0, \\ i_0(a-t)\frac{\nu(a)}{\nu(a-t)}e^{-\mu t}, & 0 \leq t < a. \end{cases} \quad (2.2)$$

On a besoin de la remarque suivante.

Remarque 2.0.1. *Supposons que la fonction $a \rightarrow \beta(a)$ soit bornée et uniformément continue de $[0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ et $\nu_I(a) \in L_+^\infty(0; \infty)$ est satisfaite*

$$\nu_I(a) \geq \mu \quad \text{pour tout } a \geq 0.$$

Pour le modèle (2.1), le nombre de reproduction basique R_0 ([1], [5], [57], [12]) est défini par

$$R_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^{\infty} \beta(a)\nu(a) da.$$

Le système comporte deux points d'équilibre. L'équilibre sans maladie (DFE)

$$(\bar{S}_F, 0), \quad \text{avec } \bar{S}_F = \frac{\Lambda}{\mu},$$

qui existe toujours. Si $R_0 > 1$ alors il existe un autre point d'équilibre endémique

$$(\bar{S}_E, \bar{i}_E(a)),$$

est défini par

$$\bar{S}_E = \frac{\bar{S}_F}{R_0},$$

et

$$\bar{i}_E(a) = \nu(a)\bar{i}_E(0),$$

avec

$$\bar{i}_E(0) = \Lambda - \nu_s \bar{S}_E.$$

Le système (2.1) a été étudié par P.Magal et al. ([40]). Plus précisément, dans [40] ils étudient la persistance uniforme du système et la stabilité globale de l'équilibre endémique. La principale question abordée dans leur travaux concerne la stabilité globale de l'équilibre endémique .

2.1 Existence et unicité des solutions

Dans cette section, on va montrer l'existence des solutions non négatives pour le système (2.1). Nous utilisons une version du théorème de Banach-Picard ([47]) dans un espace de Banach approprié.

Théorème 2.1.1. *Supposons que $(S_0, i_0) \in \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+)$, alors il existe une solution positive faible unique $(S, i) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+))$ du problème (2.1).*

Démonstration. Posons $E = C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^+))$ avec $T > 0$ à choisir par la suite. Soit E_+ l'ensemble de toutes les fonctions continues non négatives sur $[0, T]$, à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^+)$. La norme associée est défini comme

$$\|n\| = \sup_{t \in [0, T]} \|n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Nous considérons d'abord l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} A: C_+([0, T]) &\longrightarrow C_+([0, T]) \\ \int_0^\infty \beta(a)m(t, a)da &\longmapsto S, \end{aligned}$$

défini par

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - S(t) \int_0^\infty \beta(a)m(t, a)da, \\ S(0) = S_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

nous introduisons l'opérateur Γ comme suit

$$\begin{aligned} \Gamma: E_+ &\longrightarrow E_+ \\ m &\longmapsto i, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -v_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = A(\int_0^\infty \beta(a) m(t, a) da) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ i(0, a) = i_0(a), \end{cases} \quad (2.4)$$

d'après le théorème A.0.1 l'opérateur Γ est bien défini. Pour montrer l'existence et l'unicité des solutions, il suffit de prouver que Γ est une contraction.

Soit $i_1(t, a)$ et $i_2(t, a)$ des solutions associées respectivement à $m_1(t, a)$ et $m_2(t, a)$ alors $i(t, a) = i_1(t, a) - i_2(t, a)$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -v_I(a) i(t, a), \\ i(t, 0) = A(\int_0^\infty \beta(a) m_1(t, a) da) \int_0^\infty \beta(a) i_1(t, a) da - A(\int_0^\infty \beta(a) m_2(t, a) da) \int_0^\infty \beta(a) i_2(t, a) da. \end{cases}$$

Donc $|i(t, a)|$ satisfait,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} |i(t, a)| + \frac{\partial}{\partial a} |i(t, a)| = -v_I(a) |i(t, a)|, \\ |i(t, 0)| = |A(\int_0^\infty \beta(a) m_1(t, a) da) - A(\int_0^\infty \beta(a) m_2(t, a) da)| \int_0^\infty \beta(a) i_1(t, a) da \\ + A(\int_0^\infty \beta(a) m_2(t, a) da) \int_0^\infty \beta(a) i_2(t, a) da|. \end{cases} \quad (2.5)$$

Intégrons l'équation de (2.5) par rapport à l'âge d'infection "a",

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty |i(t, a)| da &= |i(t, 0)| - \int_0^\infty v_I(a) |i(t, a)| da \\ &\leq |A(\int_0^\infty \beta(a) m_1(t, a) da) - A(\int_0^\infty \beta(a) m_2(t, a) da)| \int_0^\infty \beta(a) i_1(t, a) da \\ &+ A(\int_0^\infty \beta(a) m_2(t, a) da) \int_0^\infty \beta(a) i_2(t, a) da|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

D'autre part, posons $A(\int_0^\infty \beta(a) m_i(t, a) da) = S_i$, $i = 1, 2$ avec $S(t) = S_1(t) - S_2(t)$ satisfait

$$S'(t) = -\mu S(t) - S(t) \int_0^\infty \beta(a) m_1(t, a) da - S_2(t) \int_0^\infty \beta(a) m(t, a) da,$$

donc

$$|S(t)'| \leq -\mu |S(t)| - |S(t)| \int_0^\infty \beta(a) m_1(t, a) da + |S_2(t)| \int_0^\infty \beta(a) |m(t, a)| da,$$

ainsi,

$$|S(t)'| \leq -\mu |S(t)| + \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\|_\infty \int_0^\infty |m(t, a)| da,$$

l'intégration des deux côtés de la dernière inégalité, nous donne

$$|S(t)| \leq \Lambda_1 T \|m\|_E, \quad (2.7)$$

avec $\Lambda_1 = \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\|_\infty$.

Par conséquent (2.6) devient,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty |i(t, a)| da, \leq |S(t)| \|\beta\|_\infty \int_0^\infty |i_1(t, a)| da + \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\|_\infty \int_0^\infty |i(t, a)| da.$$

D'après le théorème A.0.1 et 2.7 nous avons,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty |i(t, a)| da \leq \|\beta\|_\infty \Lambda_1 T \|m\|_E e^{\Lambda_0 t} \|i_{1,0}\|_1 + \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\|_\infty \int_0^\infty |i(t, a)| da,$$

avec $\Lambda_0 = \|(\Lambda - \nu_I)_+\|$. Par l'inégalité de Gronwall (voir annexe), nous obtenons

$$\int_0^\infty |i(t, a)| da \leq M_1 T e^{\Lambda T} (e^{M T} - 1) \|m\|_E,$$

avec $M_1 = \frac{\Lambda_1 \|i_{1,0}\|_1 \mu}{\lambda}$ et $M = \frac{\lambda \|\beta\|_\infty}{\mu}$.

Choisissons T assez petit de telle sorte que l'opérateur Γ devienne une contraction. Comme d'habitude, nous pouvons itérer l'opérateur sur $[T, 2T], [2T, 3T], \dots$ puisque la condition sur T ne dépend pas de l'itération. Par conséquent, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de solution du problème (2.1). ■

2.2 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Cette section est consacrée à prouver la stabilité globale de l'équilibre sans maladie "(DFE)" $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ quand $R_0 \leq 1$.

Tout d'abord, nous commençons par montrer la stabilité locale de l'équilibre sans maladie.

Proposition 2.2.1. *Supposons que $R_0 \leq 1$. Alors l'équilibre sans maladie E_0 est localement asymptotiquement stable.*

Démonstration. L'équation caractéristique du système (2.1) est de la forme suivante

$$(\lambda + \mu) \left(1 - \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda a} \beta_1(a) da\right) = 0,$$

avec

$$\beta_1(a) = \beta(a) e^{-\int_0^a v_I(s) ds}.$$

Ainsi, la racine de l'équation caractéristique $\lambda = -\mu$, les autres racines sont des solutions de

$$1 = \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda a} \beta_1(a) da. \quad (2.8)$$

D'après (2.8), il n'est pas difficile de montrer que, si $R_0 < 1$, l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable. En outre, si $R_0 = 1$, le complexe λ avec $Re(\lambda) > 0$ ne peut pas être la solution de (2.8). Nous supposons que $Re(\lambda) = 0$, en identifiant les parties réelles, nous obtenons

$$\frac{\Lambda}{\mu} \int_0^\infty \beta_1(a) (1 - \cos(Im(\lambda)a)) da = 0,$$

nous déduisons que $\cos(Im(\lambda)a) = 1, \forall a \in \mathbb{R}^+$, ce qui est une contradiction. ■

Théorème 2.2.1. *Supposons que $R_0 \leq 1$. Alors l'équilibre sans maladie(DFE) E_0 est globalement asymptotiquement stable pour le système (2.1).*

Démonstration. En observant que le problème suivant,

$$\begin{cases} \phi'(a) = v_I(a)\phi(a) - \frac{\Lambda}{\mu}\beta(a), & a > 0, \\ \phi(0) = R_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

admet une solution unique positive,

$$\phi(a) = \frac{\Lambda}{\mu} \int_a^\infty \beta(\sigma) e^{-\int_a^\sigma v_I(\xi) d\xi} d\sigma,$$

nous construisons une fonction de Lyapunov $L = L_1 + L_2$ avec $L_1 = S - \frac{\Lambda}{\mu} - \ln\left(\frac{S}{\frac{\Lambda}{\mu}}\right)$ et $L_2 = \int_0^\infty \phi(a) i(t, a) da$.

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= \left(1 - \frac{\Lambda}{S}\right) (\Lambda - \mu S(t) - S(t) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da), \\ & \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$= \mu \left(1 - \frac{\Lambda}{S(t)}\right) \left(\frac{\Lambda}{\mu} - S(t)\right) - (S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}) \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \phi(0) i(t, 0) + \int_0^\infty \phi'(a) i(t, a) da - \int_0^\infty v_I(a) \phi(a) da, \\ & \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$= \phi(0) i(t, 0) - \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da.$$

En additionnant (2.10) et (2.11), nous avons

$$\frac{dL}{dt} = \mu \left(1 - \frac{\Lambda}{S(t)}\right) \left(\frac{\Lambda}{\mu} - S(t)\right) - (1 - R_0) i(t, 0) \leq 0.$$

Notons que, pour $R_0 \leq 1$, $\frac{dL}{dt} = 0$ implique que $S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$, en utilisant l'équation de S dans le modèle (2.1), nous avons $i(t, 0) = 0$.

Par le théorème Lyapunov-LaSalle ([37], [38], voir annexe), nous concluons l'attractivité globale de l'équilibre sans maladie.

Nous définissons les estimations suivantes,

$$\bar{a} = \sup \{a \in \mathbb{R}^+, \beta(a) > 0\},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} e^{ra} da > 1, \tag{2.12}$$

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{\Lambda}{\mu} \int_a^\infty \beta(\sigma) e^{-r_0(\sigma-a)} d\sigma < \infty, \tag{2.13}$$

et

$$\limsup_{a \rightarrow \bar{a}} \frac{\beta(a)e^{-(\mu-r)a}}{\int_a^\infty \beta(\sigma)e^{-(\mu-r)\sigma} d\sigma} < \infty. \quad (2.14)$$

Nous donnons le résultat concernant la stabilité exponentielle de l'équilibre sans maladie,

Théorème 2.2.2. *Supposons que (2.12)-(2.14) sont vérifiées. Alors l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ est exponentiellement stable si $R_0 < 1$.*

Démonstration. Tout d'abord, à partir de (2.12), il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une constante $r_0 > 0$ telle que

$$\frac{\Lambda}{\mu} \int_0^\infty \beta(a)e^{-r_0 a} da = 1.$$

Nous considérons la fonction positive ψ défini par

$$\psi(a) = \frac{\Lambda}{\mu} \int_a^\infty \beta(\sigma)e^{-r_0(\sigma-a)} d\sigma,$$

d'après (2.13), nous avons que $\psi(a)$ est bornée. Notons que ψ est différentiable et vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} \psi'(a) = r_0\psi(a) - \frac{\Lambda}{\mu}\beta(a), & a > 0, \\ \psi(0) = 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Multiplions l'équation de i dans le problème (2.1) par ψ et intégrons de $(0, \infty)$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a)\psi(a) da = \int_0^\infty i(t, a)\psi'(a) da + i(t, 0)\psi(0) - \int_0^\infty \nu_I(a)\psi(a)i(t, a) da,$$

en utilisant la bornitude de S , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a)\psi(a) da &= (S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}) \int_0^\infty \beta(a)i(t, a) da + \int_0^\infty r_0\psi(a)i(t, a) da \\ &\leq -r_0 \int_0^\infty i(t, a)\psi(a) da, \end{aligned} \quad (2.16)$$

par le lemme de Gronwall, nous avons

$$\int_0^\infty i(t, a)\psi(a) da \leq \bar{A}e^{-r_0 t},$$

avec $\bar{A} = \int_0^\infty i_0(a)\psi(a) da$.

D'autre part, d'après (2.14), il existe une constante θ positive telle que $\beta(a) \leq \theta\psi(a)$ pour tout $a > 0$, donc

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}|' \leq -\mu|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| + \theta \frac{\Lambda}{\mu} e^{-(\underline{\mu}-r_0)t} \bar{\Lambda}.$$

De cela, nous déduisons, d'après intégration,

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| \leq (|S_0 - \frac{\Lambda}{\mu}| - \frac{\bar{\Lambda}}{\mu - (\underline{\mu} - r_0)})e^{-\mu t} + \frac{\bar{\Lambda}}{\mu - (\underline{\mu} - r_0)}e^{-(\underline{\mu}-r_0)t}, \text{ si } \mu \neq \underline{\mu} - r_0,$$

et

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| \leq |S_0 - \frac{\Lambda}{\mu}|e^{-\mu t} + \bar{\Lambda}te^{-\mu t}, \text{ si } \mu = \underline{\mu} - r_0.$$

■

2.3 Stabilité globale de l'équilibre endémique

Dans cette section, on va étudier la stabilité globale du point endémique, pour cela on a besoin de montrer la persistance uniforme des solutions.

Soit le modèle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \Lambda - S(t)J(t) - \mu S(t), \\ (\partial_t + \partial_a)i(t, a) = -(\mu + \gamma(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = S(t)J(t), \\ J(t) = \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Posons $\nu_I(a) = \mu + \gamma(a)$, avec les conditions initiales

$$S(0) = \tilde{S}, \quad i(0, a) = \tilde{i}(a),$$

nous définissons la probabilité d'être toujours infecté à l'âge a par $\Pi(a)$ avec

$$\gamma(a) = \frac{\Pi'(a)}{\Pi(a)},$$

et

$$\Pi(a) = e^{-\int_0^a \gamma(s) ds},$$

par son interprétation Π a les propriétés suivantes

$$\Pi(0) = 1 \quad \text{et } \Pi \quad \text{est décroissante.} \quad (2.18)$$

On peut réécrire le modèle (2.17),

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - SJ - \mu S, \quad S(0) = \tilde{S}, \\ J(t) &= \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ i(t, a) &= \begin{cases} S(t-a)J(t-a)\Pi(a)e^{-\mu a}, & t > a \geq 0, \\ \tilde{i}(a-t)e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}, & 0 \leq t < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Après (2.2), remarquons que

$$I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da = \int_0^t e^{-\mu a} \Pi(a) S(t-a) J(t-a) da + e^{-\mu a} \int_0^\infty \tilde{i}(a) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} da,$$

grâce à (2.18),

$$I(t) \leq \int_0^\infty i(t, a) da = \int_0^t e^{-\mu a} \Pi(a) S(t-a) J(t-a) da + e^{-\mu a} \int_0^\infty \tilde{i}(a) da := \tilde{I}(t).$$

Alors,

$$S' + \tilde{I}' = \Lambda - \mu(S + \tilde{I}), \quad S(0) + \tilde{I}(0) = \tilde{S} + \tilde{I},$$

après intégration on obtient,

$$S(t) + I(t) \leq S(t) + \tilde{I}(t) = (\tilde{S} + \tilde{I})e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

Comme S et I sont des fonctions positives, alors les deux sont bornées de plus $J(t) \leq \|\beta\|_\infty I(t)$ est aussi bornée.

Nous avons les estimations suivantes.

Théorème 2.3.1. *Les solutions du problème (2.19) sont bornées.*

$$S(t) + I(t) \leq \max \left\{ \tilde{S} + \|\tilde{i}\|, \frac{\Lambda}{\mu} \right\}, \quad J(t) \leq \max \left\{ \tilde{S} + \|\tilde{i}\|, \frac{\Lambda}{\mu} \right\},$$

pour tout $t \geq 0$, et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S(t) + I(t)) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) \leq \|\beta\|_{\infty} \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Théorème 2.3.2. *Les hôtes (les susceptibles) persistent uniformément*

$$S_{\infty} \geq \frac{\Lambda}{\mu + \|\beta\|_{\infty} \frac{\Lambda}{\mu}},$$

Démonstration. On définit

$$S_{\infty} = \liminf_{t \rightarrow \infty} S(t), \quad J^{\infty} = \limsup_{t \rightarrow \infty} J(t).$$

Nous utilisons le procédé de fluctuation ([52], voir annexe) pour (2.17) : il existe une suite (t_k) telle que $S(t_k) \rightarrow S_{\infty}$ et $S'(t_k) \rightarrow 0$. En utilisant la première équation de S dans le modèle (2.17), nous avons

$$0 \geq \Lambda - S_{\infty} J^{\infty} - \mu S_{\infty},$$

en déduisant,

$$S_{\infty} \geq \Lambda \frac{\mu}{\mu + J^{\infty}},$$

en utilisant l'estimation de J^{∞} dans le théorème 2.3.1, d'où le résultat. ■

2.3.1 Attracteur global et persistance uniforme

Dans le but de traiter la persistance globale, nous nous plaçons dans un cadre fonctionnel approprié, pour cela nous introduisons l'espace suivant,

$$X = \mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}_+),$$

et soit $X_+ = \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}_+)$.

Pour les solutions (S, J) de (2.17), nous définissons le semi-flot comme suit

$$\Phi(t, (\tilde{S}, \tilde{i})) = (S(t), i(t, \cdot)), \tag{2.20}$$

avec

$$i(t, a) = \begin{cases} S(t-a)J(t-a)\Pi(a)e^{-\mu a}, & t > a \geq 0, \\ \tilde{i}(a-t)e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}, & 0 \leq t < a. \end{cases} \quad (2.21)$$

et

$$J(t) = \int_0^\infty \beta(a)i(t, a) da, \quad (2.22)$$

Lemme 2.3.1 ([52]). Φ est un semi-flot continu dans X .

Théorème 2.3.3. Si $D = \int_0^\infty \Pi(a) da < \infty$, le semi-flot Φ a un attracteur compact des ensembles bornés dans X .

Démonstration. Pour montrer l'existence d'un attracteur global pour Φ , nous utilisons le théorème 2.33 dans ([52], voir annexe), nous vérifions que le semi-flot est un point de dissipatif, éventuellement borné, et asymptotiquement régulier.

Les deux premières propriétés sont vérifiées grâce au théorème 2.3.1 et la définition du semi-flot dans (2.20) et (2.21). Pour montrer la régularité asymptotique, nous appliquons le théorème 2.46 ([52], voir annexe).

Soit

$$\Theta(t, (\tilde{S}, \tilde{i})) = (0, \omega(t, \cdot)), \quad (2.23)$$

avec

$$\omega(t, a) = \begin{cases} S(t-a)J_2(t-a)e^{-\mu a}\Pi(a), & t > a \geq 0, \\ \tilde{i}(a-t)e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}, & 0 \leq t < a, \end{cases} \quad (2.24)$$

et

$$\Psi(t, (\tilde{S}, \tilde{i})) = (S(t), v(t, \cdot)), \quad (2.25)$$

avec

$$v(t, a) = \begin{cases} S(t-a)J_1(t-a)e^{-\mu a}\Pi(a), & t > a \geq 0, \\ 0, & 0 \leq t < a, \end{cases} \quad (2.26)$$

où $S(t)$ et $J(t)$ sont des solutions de (2.17) et

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int_0^t \beta(a)e^{-\mu a}\Pi(a) da, \\ J_2(t) &= e^{-\mu t} \int_0^\infty \tilde{i}(a)\beta(a+t) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} da. \end{aligned}$$

Soit C un sous-ensemble fermé borné de données initiales dans X .

$$c = \sup \{S_o + \|\tilde{i}\|\}, \quad \tilde{c} = \max \left\{ c, \frac{\Lambda}{\mu} \right\},$$

Puisque $\Pi(a)$ est une fonction décroissante, alors

$$J_2(t) \leq e^{-\mu t} \|\beta\|_{\infty} \|\tilde{i}\|_1.$$

Soit

$$\begin{aligned} \|\Theta(t, (\tilde{S}, \tilde{i}))\| &\leq e^{-\mu t} \|\tilde{i}\|_1 + \int_0^t S(t-a) J_2(t-a) e^{-\mu a} \Pi(a) da, \\ &\leq \tilde{c} \int_0^t J_2(s) e^{-\mu(t-s)} \Pi(t-s) ds, \\ &\leq e^{-\mu t} c(1 + \|\beta\|_{\infty} \tilde{c} D), \end{aligned}$$

alors $\Theta(t, (\tilde{S}, \tilde{i})) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ uniformément pour (\tilde{S}, \tilde{i}) dans C et $\text{diam } \Theta(t, C) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

A présent, on va montrer que $\Phi(C)$ a fermeture compacte, nous utilisons le critère de Fréchet-Kolmogorov ([52], voir annexe). Les conditions (i), (ii), (iv) sont aisément vérifiées, reste à montrer que (iii) l'est aussi; à savoir

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{t-h} |S(t-a-h) J_1(t-a-h) e^{-\mu(a+h)} \Pi(a+h) \\ &\quad - S(t-a) J_1(t-a) e^{-\mu a} \Pi(a)| da \\ &\quad + \int_{t-h}^t |S(t-a-h) J_1(t-a-h) e^{-\mu(a+h)} \Pi(a+h)| da, \\ &\rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

Par un calcul direct, nous avons

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \|\beta\| \tilde{c} \int_0^{t-h} |S(t-a-h) - S(t-a)| e^{-\mu a} da \\ &\quad + \tilde{c} \int_0^{t-h} |J_1(t-a-h) - J_1(t-a)| e^{-\mu a} da \\ &\quad + \|\beta\| \tilde{c}^2 \int_0^{t-h} (1 - e^{-\mu h}) e^{-\mu a} da \\ &\quad + \|\beta\| \tilde{c}^2 \int_0^{t-h} (\Pi(a) - \Pi(a+h)) e^{-\mu a} da \end{aligned} \tag{2.27}$$

Il est clair que les deux derniers termes convergent vers 0, quand $h \rightarrow 0$. Pour le premier terme de (2.27), par la première équation de (2.17),

$$|S'(t)| \leq \Lambda + SJ + \mu S \leq \Lambda + \tilde{c}(\mu + \|\beta\| \tilde{c}),$$

le théorème des accroissements finis implique que le premier terme de (2.27) converge vers 0 quand $h \rightarrow 0$, uniformément dans C .

Considérons le deuxième terme de (2.27), après un changement de variable

$$\tilde{c} \int_0^{t-h} |J_1(s+h) - J_1(s)| e^{-\mu s + h - t} da, \quad (2.28)$$

avec

$$J_1(s) = \int_0^s \tilde{\beta}(s-r) S(r) J(r) dr,$$

où $\tilde{\beta}(s) = \beta(s) \Pi(s) e^{-\mu s}$, $\tilde{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^+)$, alors

$$\begin{aligned} |J_1(s+h) - J_1(s)| &\leq h(\tilde{c} \|\beta\|)^2 + \int_0^s |(\tilde{\beta}(s+h-r) - \tilde{\beta}(s-r)) \tilde{c}^2 \|\beta\| dr \\ &\leq h(\tilde{c} \|\beta\|)^2 + \tilde{c}^2 \|\beta\| \int_0^\infty |(\tilde{\beta}(r+h) - \tilde{\beta}(r))| dr \end{aligned}$$

converge vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$. Par suite (2.28) converge aussi vers 0 quand $h \rightarrow 0$ uniformément dans C . ■

2.3.2 Trajectoires totales

Nous décrivons la trajectoire totale du système (2.1). Soit ϕ trajectoire totale avec $\phi(t) = (S(t), i(t, \cdot))$

où $\phi(t+r) = \Phi(t, \phi(r))$, $t \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$. Posons

$$S_r(t) = S(t+r), \quad J_r(t) = J(t+r), \quad i_r(t, a) = i(t+r, a),$$

avec

$$\begin{aligned} S_r' &= \Lambda - S_r J_r - \mu S_r, \quad S_r(0) = S(r), \\ J_r(t) &= \int_0^\infty \beta(a) i_r(t, a) da, \\ i_r(t, a) &= \begin{cases} S_r(t+r-a) J_r(t+r-a) \Pi(a) e^{-\mu a}, & t > a \geq 0, \\ \tilde{i}(r, a-t) e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}, & 0 \leq t < a, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

pour $s \geq r$, avec $t = s - r$,

$$\begin{aligned} S'(s) &= \Lambda - SJ - \mu S, \\ i(s, a) &= \begin{cases} S(s-a) J(s-a) \Pi(a) e^{-\mu a}, & s-r > a \geq 0, \\ \tilde{i}(r, a-(s-r)) e^{-\mu(s-r)} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-(s-r))}, & 0 \leq s-r < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} J(s) &= \int_0^\infty \beta(a) i(s, a) da, \\ &= \int_0^{s-r} \beta(a) S(s-a) J(s-a) \Pi(a) e^{-\mu a} da + \int_{s-r}^\infty \beta(a) \tilde{i}(r, a - (s-r)) e^{-\mu(s-r)} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a - (s-r))} da. \end{aligned}$$

Supposons que $r \rightarrow -\infty$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} S'(s) = \Lambda - SJ - \mu S, \\ J(s) = \int_0^\infty \beta(a) S(s-a) J(s-a) \Pi(a) e^{-\mu a} da, \\ i(s, a) = S(s-a) J(s-a) \Pi(a) e^{-\mu a}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Le lemme suivant fournit certaines estimations utiles de la trajectoire totale.

Lemme 2.3.2. *Pour tout $(\tilde{S}, \tilde{i}) \in A$,*

$$\tilde{S} + \int_0^\infty \tilde{i}(a) da \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \tilde{S} \geq \frac{\mu \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + \|\beta\| \frac{\Lambda}{\mu}}$$

$$\int_0^\infty \beta(a) \tilde{u}(a) da \leq \|\beta\| \frac{\Lambda}{\mu},$$

$$\tilde{u}(a) \leq \|\beta\| \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 \Pi(a) e^{-\mu a}, \quad a \geq 0.$$

Démonstration. Soit

$$I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da \leq \int_0^\infty S(t-a) J(t-a) e^{-\mu a} da =: \tilde{I}(t). \quad (2.32)$$

Après un changement de variable dans l'intégrale (2.32), nous avons

$$\tilde{I}(t) = \int_{-\infty}^t S(s) J(s) e^{-\mu(t-s)} ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme S et J sont continues, et \tilde{I} est différentiable,

$$\tilde{I}'(t) = S(t) J(t) - \mu \tilde{I}, \quad t \in \mathbb{R},$$

cela implique

$$S'(t) + \tilde{I}'(t) = \Lambda - \mu(S(t) + \tilde{I}(t)),$$

Pour $t > r$,

$$S(t) + \tilde{I}(t) = (S(r) + \tilde{I}(r))e^{-\mu(t-r)} + \int_r^t \Lambda e^{-\mu(t-s)} ds,$$

nous avons que S et \tilde{I} sont bornées, alors nous pouvons prendre $r \rightarrow -\infty$,

$$S(t) + \tilde{I}(t) = \frac{\Lambda}{\mu} = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Comme $I(t) \leq \tilde{I}(t)$, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t) + I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad J(t) \leq \|\beta\| \frac{\Lambda}{\mu}, \\ i(t, a) \leq \|\beta\| \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 e^{-\mu a} \Pi(a), \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}, \quad (2.33)$$

et aussi

$$S(t) \geq \int_r^t \Lambda e^{-\mu(t-s)} \exp\left(-\int_r^t J(\tau) d\tau\right) ds,$$

Alors, quand $r \rightarrow -\infty$,

$$S(t) \geq \frac{\mu \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + \|\beta\| \frac{\Lambda}{\mu}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

2.3.3 Persistance uniforme de la maladie

Nous définissons la fonction de la persistance comme suit,

$$\begin{aligned} \rho &: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \rho(\tilde{S}, \tilde{i}) &= \int_0^\infty \beta(a) \tilde{i}(a) da. \end{aligned}$$

Donc,

$$\rho(\Phi(t, x)) = \int_0^\infty \beta(a) \tilde{i}(t, a) da = J(t).$$

Nous intégrons l'équation de S dans (2.17),

$$S(t) = \tilde{S} e^{-\mu t} \exp\left(-\int_0^t J(s) ds\right) + \Lambda \int_0^t e^{-\mu(t-r)} \exp\left(-\int_r^t J(s) ds\right) dr. \quad (2.34)$$

En particulier, β est non nulle sur \mathbb{R}_+ et $\Lambda > 0$. Par (2.34), $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et

$$J(t) = \int_0^t \beta(a) S(t-a) J(t-a) e^{-\mu a} \Pi(a) da + \tilde{J}(t),$$

où

$$\tilde{J}(t) = e^{-\mu t} \int_0^\infty \tilde{i}(a) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} da.$$

Il n'y a pas de maladie si $\tilde{J}(t)$ est nulle pour tout $t \geq 0$ parce que $J(t)$ et $I(t)$ sont nulles pour tout $t \geq 0$ (par l'inégalité de Gronwall). Cela peut se produire même si $\tilde{i}(a)$ n'est pas nulle presque partout, par exemple s'il y a $b > 0$ tel que $\beta(a) = 0$ pour tout $a \leq b$ et $\tilde{i}(a) = 0$ pour tout $a \geq b$.

Afin d'éviter ce cas nous supposons que $\int_0^\infty \tilde{J}(t) dt > 0$. Nous changeons l'ordre d'intégration, on a

$$\int_0^\infty \tilde{i}(a) \Sigma(a) da > 0, \quad (2.35)$$

où

$$\Sigma(a) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \beta(a+t) \frac{\Pi(a+t)}{\Pi(a)} dt,$$

dans ce qui suit, nous utilisons l'invariance par translation de la solution : pour $r \geq 0$, nous définissons

$$J_r(t) = J(t+r), \quad \tilde{J}_r(t) = \tilde{J}(t+r), \quad S_r(t) = S(t+r), \quad t+r \geq 0,$$

alors

$$J_r(t) = \int_0^t \beta(a) e^{-\mu a} \Pi(a) S(t-a) J_r(t-a) da + \tilde{J}_r(t). \quad (2.36)$$

Lemme 2.3.3. Si (2.35) est vérifiée. Il existe un t_0 de telle sorte que $J(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$. Sinon, pour $\int_0^\infty \tilde{i}(a) \Sigma(a) da = 0$, alors $J(t) = 0$ pour tous $t \geq t_0$.

Théorème 2.3.4. Si $R_0 > 1$ et (2.35) est vérifiée, alors

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} J(t) \geq \mu(R_0 - 1).$$

Démonstration.

D'après le théorème 2.3.2, il existe $r > 0, \epsilon > 0$ tel que

$$S_r(t) \geq \frac{\mu \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + J^\infty + \epsilon}$$

Par (2.36) et comme $\tilde{J}_r(t) > 0$, alors

$$J_r(t) \leq \frac{\mu \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + J^\infty + \epsilon} \int_0^t \beta(a) e^{-\mu a} \Pi(a) J_r(t-a) da.$$

Nous appliquons la transformée de Laplace à cette équation qui convertit la convolution en un produit. Il est à noter que

$$\widehat{J}_r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} J_r(t) dt < \infty,$$

pour chaque $\lambda > 0$ car J_r est bornée, alors

$$\widehat{J}_r(\lambda) \geq \frac{\mu^{\frac{\Lambda}{\mu}}}{\mu + J^{\infty} + \epsilon} \widehat{J}_r(\lambda) \int_0^{\infty} \beta(a) e^{-\mu a} \beta(a) \Pi(a) da,$$

soit encore,

$$1 \geq \frac{\mu^{\frac{\Lambda}{\mu}}}{\mu + J^{\infty} + \epsilon} \int_0^{\infty} \beta(a) e^{-\mu a} \beta(a) \Pi(a) da.$$

Cette inégalité est vérifiée indépendamment du choix de ϵ et $\lambda > 0$, ce qui permet de passer à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$

$$1 \geq \frac{\mu}{\mu + J^{\infty}} R_0$$

ce qui donne l'estimation voulue. ■

Pour faire la transition de la persistance faible à la persistance forte, nous avons besoin de vérifier l'hypothèse **(H1)** dans le théorème 5.2 ([52], voir annexe). Le lemme suivant confirme l'hypothèse **(H1)** du théorème 5.2.

Lemme 2.3.4. *Si (2.35) est vérifiée alors J est positive partout sur \mathbb{R} .*

Démonstration. Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$J(t) = \int_0^{\infty} \beta(a) S(t-a) J(t-a) e^{-\mu a} \Pi(a) da,$$

par un changement de variables,

$$J(t) = \int_{-\infty}^t \beta(t-\sigma) S(\sigma) J(\sigma) e^{-\mu t - \sigma} \Pi(t-\sigma) d\sigma,$$

à partir de cette équation et l'hypothèse (2.35) on déduit que la fonction J n'est pas identiquement nulle. D'autre part, supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $J(t) = 0$ pour tout $t < r$:

$$J(t) \leq \|\beta\| \frac{\Lambda}{\mu} \int_r^t J(\sigma) d\sigma$$

L'inégalité de Gronwall conduit à $J(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, cela contredit clairement $J(t) \neq 0$ pour certains t . Donc il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ avec $J(t_n) > 0$. Soit $J_n(t) = J(t + t_n)$, d'après le théorème 2.3.2, avec $\delta = \inf_{\mathbb{R}} S > 0$,

$$J_n(t) \geq \int_0^t \delta J_n(t-a) \beta(a) e^{-\mu a} \Pi(a) da + \tilde{J}_n(t)$$

avec $\tilde{J}_n(0) = J_n(0) = J(t_n) > 0$ et \tilde{J}_n est continue en 0. Par le corollaire B.6. ([52], voir annexe), $J_n(t) > 0$ pour $t > b$ avec un $b \geq 0$ qui ne dépend pas de J . Autrement dit, $J(t) > 0$ pour tout $t > t_n + b$. Comme $t_n \rightarrow -\infty$, lorsque $n \rightarrow \infty$, $J(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

■

Théorème 2.3.5. Soit $R_0 > 1$ et $D = \int_0^\infty \Pi(a) da < \infty$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} J(t) \geq \epsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq \epsilon$$

pour toutes les solutions avec des données initiales satisfaisant à (2.35).

Démonstration. D'après le théorème 5.2 dans ([52], voir annexe), Φ est ρ -uniformément fortement persistant. Nous avons

$$I(t) \geq \int_0^t S(t-a) J(t-a) e^{-\mu a} \Pi(a) da \geq 0$$

nous appliquons le lemme de Fatou-Lebesgue ([52])

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq S_\infty J_\infty \int_0^\infty e^{-\mu a} \Pi(a) da$$

D'où le résultat.

2.3.4 Existence et stabilité globale de l'équilibre endémique

Dans cette section nous abordons principalement la question de la stabilité globale de l'équilibre endémique.

L'équilibre endémique est un point fixe pour le semi-flot Φ ,

$$\Phi(t, (S^*, i^*)) = (S^*, i^*) \quad \text{avec } i^* \neq 0,$$

après la définition de Φ ,

$$i^*(a) = \begin{cases} S^* J^* \Pi(a) e^{-\mu a}, & t > a \geq 0, \\ i^*(a-t) e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} & a > t \geq 0. \end{cases}$$

Il est clair que si i^* réalise le premier cas, alors le deuxième cas est aussi satisfait. En effet, par la définition de $i^*(a)$ et pour $t \leq a \leq 2t$, nous obtenons

$$i^*(a-t) = S^* J^* \Pi(a-t) e^{-\mu(a-t)},$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} i^*(a) &= i^*(a-t) e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}, \\ &= S^* J^* e^{-\mu(a-t)} \Pi(a-t) e^{-\mu t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}, \\ &= S^* J^* e^{-\mu a} \Pi(a), \end{aligned}$$

et donc le point endémique vérifie le système suivant,

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \mu S^* - S^* J^*, \\ J^* &= \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) da, \end{aligned}$$

par un calcul direct, nous avons

$$S^* = \frac{\Lambda}{R_0}.$$

Théorème 2.3.6. *Si $R_0 > 1$ alors il existe un point d'équilibre endémique unique tel que,*

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{R_0}, \quad J^* = \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) da = \mu(R_0 - 1), \\ i^*(a) &= S^* J^* \Pi(a) e^{-\mu a}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Théorème 2.3.7. *Supposons que $R_0 > 1$ et $D = \int_0^\infty \Pi(a) da < \infty$. Alors l'équilibre endémique attire toutes les solutions dont les données initiales satisfont (2.35) et elles sont localement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Nous utilisons la fonction non négative suivante, qui est bien connue pour les fonctions de Lyapunov dans les systèmes Volterra-Lotka [18],

$$g(y) = y - 1 - \ln(y),$$

Il est noter que $g : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et concave . De plus, g a un minimum en 1, avec $g(1) = 0$.

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow A_1$, $\phi(t) = (S(t), i(t, .))$ est la trajectoire totale dans A_1 . D'après les théorèmes 2.3.2 et 2.3.1 , $S(t)$, $J(t)$ sont bornées loin de 0. En outre, d'après le lemme 2.3.2, nous avons des bornes supérieures pour $S(t)$, $J(t)$. Ainsi il existe \bar{g} tel que $0 \leq g(y) < \bar{g}$ pour $y = \frac{S(t)}{S^*}$, et pour $y = \frac{i(t,0)}{i^*(0)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, $\frac{i(t,a)}{i^*(a)} = \frac{i(t-a,0)}{i^*(0)}$, nous obtenons $0 \leq g(y) < \bar{g}$ pour $y = \frac{i(t,a)}{i^*(a)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définissons,

$$T(t) = \frac{S(t)}{S^*}, \quad w(t, a) = \frac{i(t, a)}{i^*(a)}, \quad (2.38)$$

avec $T(0) = \tilde{T}$, $w(0, a) = \tilde{w}(a)$, , et

$$\begin{aligned} T' &= \frac{\Lambda}{S^*} - TJ - \mu T, \\ J(t) &= \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) w(t, a) da, \\ w(t, a) &= \frac{T(t-a)J(t-a)}{J^*}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante,

$$\begin{aligned} V(\phi(t)) &= V_s(\phi(t)) + V_i(\phi(t)), \quad \text{avec } V_s(\phi(t)) = g(T(t)) \\ V_i(\phi(t)) &= \int_0^\infty \gamma(a) g(w(t, a)) da, \end{aligned}$$

où $\gamma(a) = \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) da$, avec

$$\gamma(0) = J^*, \quad \gamma'(a) = -\beta(a) i^*(a). \quad (2.40)$$

Calculons la dérivée de V_s par rapport à t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_s &= \left(1 - \frac{1}{T(t)}\right) T'(t) \\ &= \left(1 - \frac{1}{T(t)}\right) \left(\frac{\Lambda}{S^*} - TJ - \mu T\right) \end{aligned}$$

Nous avons de l'équation $\frac{\Lambda}{S^*} = J^* + \mu$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_s &= \left(1 - \frac{1}{T(t)}\right)(J^* - TJ - \mu(T-1)), \\ &= \left(1 - \frac{1}{T(t)}\right)J^* + (1-T)J - \frac{\mu}{T}(T-1)^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

A ce stade nous avons du lemme suivant

Lemme 2.3.5. ([52]) *Supposons que $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et $\gamma, \gamma' \in L^1(\mathbb{R}_+)$, et aussi $V_i \circ \phi$ est continue, nous avons*

$$\frac{d}{dt} V_i = \gamma(0)g(w(t,0)) + \int_0^\infty \gamma'(a)g(w(t,a))da,$$

d'après le lemme 2.3.5, la dérivée de V_i ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_i &= \gamma(0)(w(t,0) - 1 - \ln(w(t,0))) + \int_0^\infty \gamma'(a)(w(t,a) - 1 - \ln(w(t,a)))da, \\ &= \gamma(0)\left(\frac{T(t)J(t)}{J^*} - 1 - \ln(w(t,0))\right) + \int_0^\infty \gamma'(a)(w(t,a) - 1 - \ln(w(t,a)))da, \end{aligned}$$

par (2.40), la formule $\frac{d}{dt} V_i$ devient alors

$$\frac{d}{dt} V_i = T(t)J(t) - J^* - J^* \ln(w(t,0)) - \int_0^\infty \beta(a)i^*(a)(w(t,a) - 1 - \ln(w(t,a)))da, \quad (2.42)$$

par (2.39) et (2.37), nous avons

$$\frac{d}{dt} V_i = T(t)J(t) - J(t) + \int_0^\infty \beta(a)i^*(a) \ln\left(\frac{w(t,a)}{w(t,0)}\right)da, \quad (2.43)$$

en combinant (2.41) et (2.43),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V + \mu(T-1)^2 &= \int_0^\infty \beta(a)i^*(a)\left(1 - \frac{1}{T} + \ln\left(\frac{w(t,a)}{w(t,0)}\right)\right)da, \\ &= \int_0^\infty \beta(a)i^*(a)\left(-g\left(\frac{1}{T}\right) + \ln\left(\frac{w(t,a)T(t)}{w(t,0)}\right)\right)da, \\ &= -\int_0^\infty \beta(a)i^*(a)\left(g\left(\frac{1}{T}\right) + g\left(\frac{w(t,a)T(t)}{w(t,0)}\right) - \frac{w(t,a)T(t)}{w(t,0)} + 1\right)da, \end{aligned}$$

d'après (2.39),

$$\int_0^\infty \beta(a)i^*(a)\left(\frac{w(t,a)T(t)}{w(t,0)} - 1\right)da = \frac{J(t)T(t)}{w(t,0)} - J^* = 0.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}V + \mu(T-1)^2 = -J^*(g(\frac{1}{T}) - \int_0^\infty \beta(a)i^*(a)g(\frac{w(t,a)T(t)}{w(t,0)})da) \leq 0,$$

supposons que $\frac{d}{dt}Vo\phi \equiv 0$. Alors $T(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par (2.39),

$$0 = \frac{\Lambda}{S^*} - J - \mu$$

donc $J = J^*$ et $w(t, a) = 1$ par (2.39), on déduit par (2.38),

$$\phi(t) \equiv (S^*, i^*(a)), \forall t \in \mathbb{R},$$

Par le théorème 2.53 ([52], voir annexe), l'attracteur global A_1 est le singleton dont le seul élément est l'équilibre endémique $(S^*, i^*(a))$. Notons que la preuve précédente ne prouve pas que l'équilibre endémique est localement stable. En effet, comme conséquence du théorème 5.7 dans([52], voir annexe), nous avons que l'équilibre endémique est localement stable.

2.4 Analyse numérique

Nous présentons deux exemples pour illustrer le modèle (2.1). Nous allons prendre le jour pour unité de temps et nous traçons les solutions du modèle (2.1) depuis zéro à 140 jours. De plus, nous supposons que $\mu = \mu_1(a) = 0.1$.

2.4.1 Exemple 1

Dans le premier exemple, nous simulons la population susceptible et la population infectée. Dans ce cas $R_0 \leq 1$ et les solutions convergent vers l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$. Nous supposons que la densité des susceptibles dans l'état initial est $S(0) = 2000$, et la distribution initiale des infectés est $i(0, a) = 1000$, et $\Lambda = 15000, \beta(a) = 0,00000001, \alpha(a) = 0.1$. Pour ces paramètres $R_0 < 1$, et l'épidémie disparaît après environ 20 jours.

2.4.2 Exemple 2

Dans le deuxième exemple, nous supposons que $R_0 > 1$, de sorte que les solutions convergent vers l'équilibre endémique. Les populations épidémiques présentent des oscillations, avec les po-

pulations infectées atteignant des valeurs très faibles, comme la population converge vers l'état d'équilibre. Nous supposons que la population susceptible initiale $S(0) = 133$, et la distribution initiale des infectés $i(0, a) = 50(a+2)e^{-0,4(a+2)}$ et $\Lambda = 350$. Nous utilisons la forme de la fonction de transmission $\beta(a)$ dans la première courbe de la figure 2

$$\beta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq a \leq 5.0, \\ 0,66667(\Lambda - 5.0)^2 e^{-0,6(\Lambda - 5.0)} & \text{si } a \geq 5.0 \end{cases}$$

Dans la deuxième courbe de la figure 3, nous reprenons les mêmes paramètres utilisés dans la première courbe de la figure, nous changeons la fonction de transmission $\beta(a)$ qui prend la forme suivante

$$\beta(a) = ae^{-a}.$$

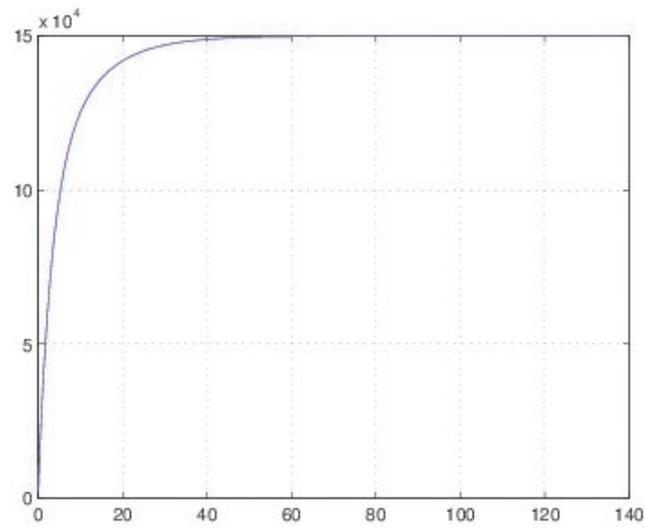


FIGURE 2.1 – La densité des susceptibles

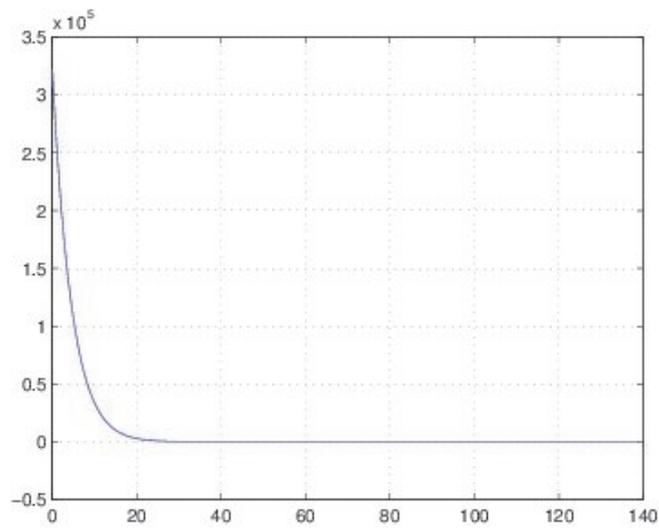


FIGURE 2.2 – La densité des infectés

FIGURE 2.3 – La densité des susceptibles converge vers $\frac{\Lambda}{\mu}$, et la densité des infectés converge vers zéro, pour $R_0 \leq 1$.

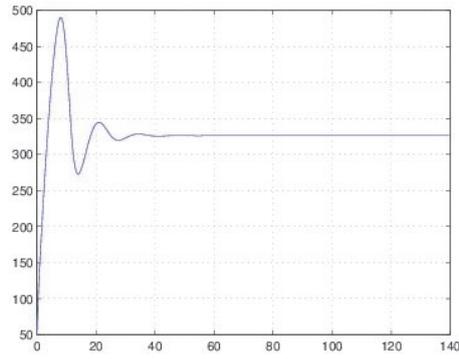


FIGURE 2.4 – La densité des susceptibles

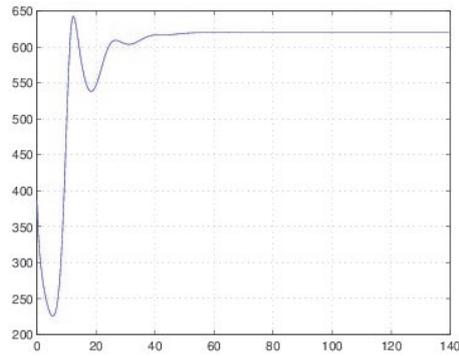


FIGURE 2.5 – La densité des infectés

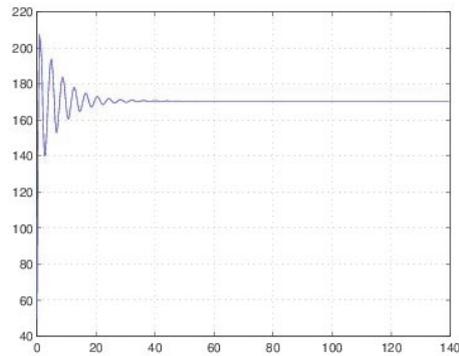


FIGURE 2.6 – La densité des susceptibles

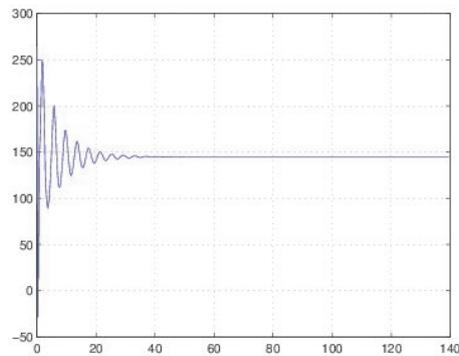


FIGURE 2.7 – La densité des infectés

FIGURE 2.8 – La densité des susceptibles converge vers S^* , et la densité des infectés converge vers $i^*(a)$, pour $R_0 > 1$.

Chapitre 3

Stabilité globale d'un modèle épidémique SIR avec fonction d'incidence non linéaire et âge d'infection

Ce chapitre est le développement de notre article ([54]).

Dans la modélisation mathématique très souvent une forme bilinéaire du taux d'incidence (les nouveaux cas infectés) est utilisée, telle que βSI ou $\beta \frac{SI}{N}$, où S représente les individus susceptibles et I les individus infectés (N est la taille totale de la population) ; cela se fait pour caractériser le fait que le nombre de contacts entre infectieux et susceptibles est proportionnel au produit des deux sous-populations.

De nombreux auteurs ont estimé que la fonctionnelle bilinéaire n'est pas réaliste, et ont suggéré que la transmission de l'infection devrait plutôt avoir une forme non linéaire, en particulier lorsque l'on considère le fait que la probabilité d'infection est influencée par la taille de la population susceptible et infectée. Grosso modo le nombre d'individus infectieux peut augmenter le risque d'infection et les personnes susceptibles seraient amener à éviter tout contact avec eux.

En 1973, Capasso et al [10] ont utilisé comme fonction d'incidence non linéaire de la forme $\beta \frac{S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}$, pour modéliser la propagation du choléra à Bari. Le cas d'une fonction d'incidence non linéaire sous sa forme la plus générale $f(S, I)$ a été introduit par Feng et Thieme [16], [17]. Korobeinikov et al [28] ont formulé une variété de modèles avec la fonction d'incidence de la forme $f(S(t))G(I(t))$ et Korobeinikov [29], [27] a obtenu des résultats plus généraux pour les modèles SIR et $SIRS$ avec la fonction d'incidence $f(S(t), I(t))$.

Huang et al. ([22]) ont analysé le système suivant,

$$\begin{cases} S'(t) = \mu - F(S(t))G(i(t-\tau)) - \mu S(t), \\ i'(t) = F(S(t))G(i(t-\tau)) - (\mu + \sigma)i(t), \\ r'(t) = \sigma i(t) - \mu r(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où l'incidence a pris la forme $F(S)G(I)$, sous l'hypothèse que F est non décroissante et G est concave et non décroissante. La stabilité globale des équilibres sans maladie (DFE) a également été établie en construisant des fonctions de Lyapunov appropriées. Dernièrement Huang et al ([23]) ont considéré comme taux d'incidence non linéaire la forme générale suivante $f(S(t), I(t-\tau))$.

Beretta et al ([2]) ont étudié un modèle SIR à retard, tout en considérant les maladies à transmission verticale. Par la suite, différents modèles épidémiologiques, ont été proposés et étudiés, [7], [22], [24], [42], [43], [44], [56].

Dans le contexte des modèles avec l'âge d'infection, Thieme et al ([60]) ont proposé et analysé un modèle avec l'âge d'infection a . Depuis, de nombreux chercheurs ont développé et étudié des modèles structurés en âge ([6], [7], [8], [11], [40], [59]).

Néanmoins, en modélisant la transmission d'une maladie infectieuse, il est important de considérer l'âge d'infection et l'incidence non linéaire pour de meilleurs résultats.

Dans cette section, nous proposons une classe générale de modèle SIR avec l'âge d'infection suivant,

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - i(t, 0), \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -(\mu + \gamma(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = f(S(t), J(t)), \\ J(t) = \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \\ R'(t) = \int_0^\infty \gamma(a) i(t, a) da - \mu R(t), \\ i(0, a) = i_0(a). \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec $\beta \in C_{BU}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, où $C_{BU}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ est l'ensemble des fonctions bornées et uniformément continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , $i_0 \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $\gamma \in L_+^\infty(\mathbb{R}^+)$. Les paramètres Λ et μ sont positifs.

Dans le modèle (3.2), la population est décomposée en trois classes : la première classe représente des individus susceptibles (S), la deuxième classe des personnes infectées I et la dernière classe

des individus retirés (R). L'âge de l'infection $a \geq 0$, est le temps écoulé depuis que l'infection a commencé, et $i(t, a)$ est la densité des infectés par rapport à l'âge de l'infection. La fonction $\beta(a)$ peut être interprétée comme étant la probabilité d'être infectieux (capable de transmettre la maladie). Dans le modèle (3.2) le paramètre Λ est le flux entrant dans la classe des susceptibles S , et μ est le taux de mortalité des individus susceptibles. Enfin $\mu_1(a)$ est le taux de sortie des personnes infectées avec un âge de l'infection a .

Posons,

$$N = S + I + R,$$

avec $I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da$. On déduit que N satisfait l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t),$$

et par la suite $N(t)$ converge vers $\frac{\Lambda}{\mu}$ quand $t \rightarrow \infty$.

La densité des retirés vérifie l'équation suivante

$$R(t) = N(t) - S(t) - I(t),$$

par conséquent, cette classe est omise.

Tous les modèles mentionnés plus haut, peuvent être considérés comme cas particulier de notre système (3.2). Si l'on suppose par exemple que $\mu + \gamma(a) = \mu_1$ avec μ_1 est une constante positive et $f(S(t), J(t)) = F(S(t))G(J(t))$ et

$$\beta(a) = 1_{(\tau, \infty)}(a),$$

pour certains $\tau \geq 0$. Puis en mettant $I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da$, alors on dérive le système d'équations différentielles à retard suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - F(S(t))G(e^{-\mu_1 \tau} I(t - \tau)), \\ I'(t) = F(S(t))G(e^{-\mu_1 \tau} I(t - \tau)) - \mu_1 I(t). \end{cases}$$

Soit la fonction $D(a) := e^{-\int_0^a (\mu + \gamma(\sigma)) d\sigma}$ avec $D \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Nous avons les hypothèses suivantes sur la fonction f : Si $J \geq 0$, $f(S, \cdot)$ est strictement croissante

pour $S > 0$, $f(., J)$ est strictement croissante pour $J > 0$. En outre $f(0, J) = f(S, 0) = 0$ pour tout $S, J \geq 0$.

La fonction $\frac{\partial f}{\partial J}(S, 0)$ est continue positive pour tout $S \in K$.

La fonction f est supposée continue et localement lipschitzienne par rapport à S et à J avec la constante lipschitzienne $L > 0$, c'est-à-dire pour tout $C > 0$ il existe un $L > 0$ tel que

$$|f(S_2, J_2) - f(S_1, J_1)| \leq L(|S_2 - S_1| + |J_2 - J_1|), \quad (3.3)$$

quand $0 \leq S_2, S_1, J_2, J_1 \leq C$.

Pour le modèle (3.2), R_0 le nombre des individus infectés secondaires produits par un seul individu infecté durant la période d'infectiosité est définie par ([12])

$$R_0 = \bar{D} \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right), \quad (3.4)$$

avec

$$\bar{D} = \int_0^\infty \beta(a) D(a) da, \quad \text{et } D(a) = e^{-\int_0^a (\mu + \gamma(\sigma)) d\sigma}. \quad (3.5)$$

Le système (3.2) a toujours un équilibre sans maladie $E_0(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ et peut également admettre un équilibre endémique unique $E^*(S^*, i^*(a))$ quand $R_0 > 1$ où $(S^*, i^*(a))$ satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = \mu S^* + i^*(0), \quad t \geq 0, \\ i^*(0) = f(S^*, J^*), \\ i^*(a) = i^*(0) D(a), \quad \forall a > 0 \\ J^* = i^*(0) \bar{D}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

3.1 Existence et unicité des solutions

Dans cette section, nous montrons qu'il existe une solution unique pour le système (3.2). Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -(\mu + \gamma(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = f(R(t), \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da), \\ i(0, \cdot) = i_0(\cdot) \in L^1_+(\mathbb{R}^+), \end{cases} \quad (3.7)$$

avec R une fonction continue bornée donnée.

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Supposons que (3.3) est satisfaite. Alors pour tout $T > 0$, il existe une solution faible unique $i \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^+))$ du problème (3.7). En outre $i(t, a) \geq 0$ dès que $i_0(a) \geq 0$.*

Théorème 3.1.1. *Supposons $(S_0, i_0) \in \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+)$. Il existe une solution positive faible unique $(S, i) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+))$ du problème (3.2).*

Démonstration. Tout d'abord, nous définissons $\bar{M} := \tilde{M}(1 + \|\beta\|_\infty)$ avec $\tilde{M} := \max\{S_0 + \|i_0\|_1, \frac{\Lambda}{\mu}\}$. Nous posons $\tilde{f}(S, J) = f(h(S), h(J))$ et $h(S) = \min\{S^+, \bar{M}\}$, où $S^+ = \max\{S, 0\}$ est la partie positive de S . Il est à noter que la fonction \tilde{f} est continue et globalement Lipschitzienne.

Pour démontrer l'existence des solutions positives de (3.2), nous utilisons le théorème du point fixe de Banach-Picard ([47], voir annexe) dans un espace de Banach approprié. Nous posons $E = C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^+))$ avec $T > 0$ à choisir par la suite. Soit E_+ l'ensemble des fonctions continues non négatives sur $[0, T]$, à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^+)$. La norme associée est définie comme suit

$$\|n\| = \sup_{t \in [0, T]} \|n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Plus précisément soit $m \in E_+$, nous définissons les deux opérateurs suivants

$$B : E_+ \rightarrow C([0, T]),$$

est définie par $B(m(t, \cdot)) = S(t)$, avec S est la solution du problème suivant,

$$S'(t) = \Lambda - \mu S - \tilde{f}(S(t), \int_0^\infty \beta(a)m(t, a)da), \quad (3.8)$$

et

$$\Gamma : E_+ \rightarrow E_+$$

$$m(t, a) \mapsto i(t, a),$$

avec i est défini comme étant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -(\mu + \gamma(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = \tilde{f}(B(m(t, \cdot)), \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da), \\ i(0, a) = i_0(a), \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Selon le lemme 3.1.1, l'opérateur Γ est bien défini. Pour prouver l'existence et l'unicité des solutions du problème (3.2) avec la fonction modifiée \tilde{f} , il suffit de montrer que Γ est une contraction. Soit $i_1(t, a)$ et $i_2(t, a)$ sont deux solutions (3.9) associées respectivement à $m_1(t, a)$ et $m_2(t, a)$, nous avons mis $J_n(t) = \int_0^\infty \beta(a)i_n(t, a)da$ avec $n = 1, 2$, donc $i(t, a) = i_1(t, a) - i_2(t, a)$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -(\mu + \gamma(a))i(t, a), \\ i(t, 0) = \tilde{f}(B(m_1(t, \cdot)), J_1(t)) - \tilde{f}(B(m_2(t, \cdot)), J_2(t)), \\ i(0, a) = 0. \end{array} \right.$$

et donc $|i(t, a)|$ (au sens distribution) satisfait,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} |i(t, a)| + \frac{\partial}{\partial a} |i(t, a)| = -(\mu + \gamma(a))|i(t, a)|, \\ |i(t, 0)| = |\tilde{f}(B(m_1(t, \cdot)), J_1(t)) - \tilde{f}(B(m_2(t, \cdot)), J_2(t))|, \\ |i(0, a)| \equiv 0. \end{array} \right.$$

En raison de (3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} |i(t, 0)| &\leq L|B(m_1(t, \cdot)) - B(m_2(t, \cdot))| \\ &+ L\left| \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da \right|, \end{aligned}$$

ainsi

$$|i(t, 0)| \leq L(|S_1(t) - S_2(t)| + \int_0^\infty \beta(a)|i(t, a)|da), \quad (3.10)$$

avec $S_1(t) = B(m_1(t, \cdot))$, et $S_2(t) = B(m_2(t, \cdot))$. D'autre part, notons que $S(t) = S_1(t) - S_2(t)$ satisfait

$$\begin{cases} S'(t) = -\mu S(t) - \tilde{f}(S_1(t), \int_0^\infty \beta(a)m_1(t, a)da) + \tilde{f}(S_2(t), \int_0^\infty \beta(a)m_2(t, a)da), \\ S(0) = 0. \end{cases}$$

Donc $|S(t)|$ satisfait,

$$\begin{aligned} |S(t)'| &\leq -\mu|S(t)| - |\tilde{f}(S_1(t), \int_0^\infty \beta(a)m_1(t, a)da) - \tilde{f}(S_2(t), \int_0^\infty \beta(a)m_1(t, a)da)| \\ &\quad + |\tilde{f}(S_2(t), \int_0^\infty \beta(a)m_1(t, a)da) - \tilde{f}(S_2(t), \int_0^\infty \beta(a)m_2(t, a)da)|, \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois (3.3), nous avons

$$\begin{aligned} |S(t)'| &\leq -\mu|S(t)| + L|S(t)| + L \int_0^\infty \beta(a)|m(t, a)|da, \\ &\leq L|S(t)| + L\|\beta\|_\infty\|m\|_E, \end{aligned}$$

par un calcul direct, nous obtenons

$$|S(t)| \leq (e^{LT} - 1)\|\beta\|_\infty\|m\|_E. \quad (3.11)$$

En intégrant par rapport à l'âge d'infection a , la deuxième équation de (3.2), devient alors

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty |i(t, a)|da \leq |i(t, 0)|,$$

selon (3.10), nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty |i(t, a)|da \leq L(|S(t)| + \|\beta\|_\infty \int_0^\infty |i(t, a)|da),$$

d'après (3.11) et le lemme de Gronwall,

$$\|i\|_E \leq (e^{LT} - 1)(e^{L\|\beta\|_\infty T} - 1)\|m\|_E.$$

Choisissons T de telle sorte que

$$(e^{LT} - 1)(e^{L\|\beta\|_\infty T} - 1) < 1,$$

nous obtenons que l'opérateur Γ est une contraction dans l'espace de Banach E_+ .

Nous définissons $M(t) = S(t) + I(t)$, avec $I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da$ et (S, i) sont des solutions du problème (3.2) avec la fonction modifiée \tilde{f} . Nous intégrons par rapport à l'âge l'équation associée à i dans (3.2), et en additionnant les équations différentielles, nous obtenons

$$M'(t) \leq \Lambda - \mu M(t).$$

Par un calcul direct, nous trouvons

$$M(t) \leq \tilde{M} := \max\{M(0), \frac{\Lambda}{\mu}\},$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Enfin,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) \leq \|\beta(a)\|_\infty \frac{\Lambda}{\mu},$$

et

$$S(t) + J(t) \leq \bar{M} := \tilde{M}(1 + \|\beta\|_\infty),$$

Par conséquent (S, i) est l'unique solution du problème (3.2). En outre, par le fait que la donnée initiale S_0 est non-négative, alors l'opérateur B est trivialement non-négatif, donc selon le lemme 3.1.1 la solution de (3.2) est non-négative à condition que la donnée initiale i_0 est non-négative.

Posons $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty$ et $\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) = J^\infty$. En utilisant la méthode de fluctuation ([52], voir annexe), il existe une suite (t_k) telle que $S'(t_k) \rightarrow 0$ et $\lim_{t_k \rightarrow \infty} S(t_k) = S_\infty$, alors

$$0 \geq \Lambda - \mu S_\infty - f(S_\infty, J^\infty),$$

par (3.3), nous obtenons

$$0 \geq \Lambda - \mu S_\infty - L S_\infty,$$

donc,

$$S_\infty \geq \frac{\Lambda}{\mu + L}.$$

■

Par la méthode des caractéristiques, la solution (S, i) du problème (3.2) peut être réécrite comme suit

$$i(t, a) = \begin{cases} f(S(t-a), J(t-a))e^{-\mu a}F(a), & t > a \geq 0, \\ i_0(a-t)e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, & a > t \geq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

avec

$$F(a) := e^{-\int_0^a \gamma(\sigma) d\sigma}.$$

Par un calcul simple, nous avons

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ J(t) = \int_0^t \beta(a) f(S(t-a), J(t-a)) F(a) e^{-\mu a} da + J_2(t), \end{cases} \quad (3.13)$$

avec

$$J_2(t) = e^{-\mu t} \int_0^\infty \beta(a+t) i_0(a) \frac{F(a+t)}{F(a)} da.$$

Posons $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty$ et $\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) = J^\infty$, alors nous avons les estimations suivantes.

Lemme 3.1.2. *La solution (S, J) de problème (3.13) satisfait*

$$J^\infty \leq \|\beta\|_\infty \frac{\Lambda}{\mu}, \text{ et } \Gamma \leq S_\infty \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

$$\text{Avec } \Gamma := \frac{\Lambda}{\mu + L}$$

Démonstration. En utilisant la méthode de fluctuation ([52], [57], voir annexe), il existe une suite (t_k) telle que $S'(t_k) \rightarrow 0$ et $\lim_{t_k \rightarrow \infty} S(t_k) = S_\infty$, ainsi

$$0 \geq \Lambda - \mu S_\infty - f(S_\infty, J^\infty),$$

comme conséquence de (3.3), nous obtenons

$$0 \geq \Lambda - \mu S_\infty - L S_\infty,$$

et alors,

$$S_\infty \geq \frac{\Lambda}{\mu + L}.$$

D'autre part, $J(t) \leq \|\beta\|_\infty \int_0^\infty i(t, a) da \leq \|\beta\|_\infty \frac{\Lambda}{\mu}$. Le lemme est prouvé. ■

3.2 Attracteur global et compacité

Dans cette section nous prouvons l'existence d'un attracteur global compact pour des solutions du système (3.2), il n'est pas difficile de montrer l'existence d'un semi flot continu

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot))) = (S(t), i(t, \cdot)), \quad (3.14)$$

avec (S, i) sont des solutions du problème (3.13).

Posons $X = \mathbb{R}^+ \times L^1(\mathbb{R}^+)$ et soit $X_+ = \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+)$, nous allons montrer l'existence d'un attracteur compact des ensembles bornés de X .

Théorème 3.2.1. *Le semi-flot Φ a un attracteur compact \mathbf{A} des ensembles bornés de X .*

Démonstration. D'après le lemme 3.1.2, le semi-flot Φ est un point dissipatif et éventuellement borné. Nous utilisons le théorème 2.33 ([52], voir annexe) pour prouver le théorème précédent.

Nous avons seulement besoin de montrer que Φ est asymptotiquement régulier.

Pour cela, nous appliquons le théorème 2.46. ([52], voir annexe). Nous définissons

$$\Theta_1(t, (S_0, i_0(\cdot))) = (0, w(t, \cdot)),$$

par

$$w(t, a) = \begin{cases} f(S(t-a), J_2(t-a))e^{-\mu a}F(a), & t > a, \\ i_0(a-t)e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, & a > t, \end{cases} \quad (3.15)$$

$\Theta_2(t, (S_0, i_0(a))) = (S(t), v(t, \cdot))$ avec

$$v(t, a) = \begin{cases} (f(S(t-a), J(t-a)) - f(S(t-a), J_2(t-a)))e^{-\mu a}F(a), & t > a, \\ 0, & a > t, \end{cases} \quad (3.16)$$

où

$$J_2(t) = e^{-\mu t} \int_0^\infty \beta(a+t) i_0(a) \frac{F(a+t)}{F(a)} da. \quad (3.17)$$

D'après (3.12) nous avons

$$\Phi(t, (S_0, i_0(a))) = \Theta_1(t, (S_0, i_0(a))) + \Theta_2(t, (S_0, i_0(a))).$$

Soit C un ensemble fermé borné de données initiales dans X et soit

$$M_1 = \sup \{S_0 + \|i_0\|_1, (S_0, i_0) \in C\}, \text{ et} \quad (3.18)$$

$$\tilde{M} := \max \{M_1, \frac{\Delta}{\mu}\}.$$

D'après (3.3) et le fait que $f(S, 0) = 0$ nous obtenons

$$f(S(t-a), J_2(t-a)) \leq LJ_2(t-a),$$

comme F est décroissante, nous avons $\frac{F(a+t)}{F(a)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0, a \geq 0$, en remplaçant dans (3.17) nous obtenons

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq e^{-\mu t} \|\beta\|_\infty \|i_0\|_1, \\ &\leq \tilde{M} e^{-\mu t} \|\beta\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.19)$$

D'autre part, d'après (3.15),

$$\begin{aligned} \|\Theta_1(t, (S_0, i_0))\|_1 &= \|w(t)\|_1, \\ &= \int_0^t f(S(t-a), J_2(t-a)) e^{-\mu a} F(a) da + e^{-\mu t} \int_t^\infty i_0(a-t) \frac{F(a)}{F(a-t)} da, \end{aligned}$$

en utilisant (3.3) et $f(S, 0) = 0$,

$$\|\Theta_1(t, (S_0, i_0))\|_1 \leq L \int_0^t J_2(t-a) e^{-\mu a} F(a) da + e^{-\mu t} \int_t^\infty i_0(a-t) \frac{F(a)}{F(a-t)} da,$$

puisque F est une fonction décroissante,

$$\|\Theta_1(t, (S_0, i_0))\|_1 \leq L \int_0^t J_2(t-a) e^{-\mu a} F(a) da + e^{-\mu t} \int_t^\infty i_0(a-t) da,$$

par un changement de variable,

$$\|\Theta_1(t, (S_0, i_0))\|_1 \leq L e^{-\mu t} \int_0^t J_2(s) e^{\mu s} F(t-s) ds + e^{-\mu t} \|i_0\|_1.$$

D'après (3.18) et (3.19) nous trouvons

$$\|\Theta_1(t, (S_0, i_0))\|_1 \leq e^{-\mu t} \tilde{M} (1 + L \|\beta(a)\|_\infty) \int_0^\infty F(a) da,$$

donc

$$\Theta_1(t, (S_0, i_0)) \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty, \text{ uniformément pour } (S_0, i_0(\cdot)) \in C,$$

et donc $\text{diam } \Theta_1(t, C) \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow \infty$. Notre prochain objectif est de prouver que $\Theta_2(t, C)$ est à fermeture compacte. Pour prouver cette propriété, nous avons besoin de vérifier toutes les conditions de théorème de Fréchet-Kolmogorov ([52], [15], voir annexe), les affirmations (i), (ii) et (iv) sont facilement vérifiées, il reste à prouver (iii), à savoir,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t-h} |(f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - f(S(t-a-h), J_2(t-a-h))) e^{-\mu(a+h)} F(a+h) \\ & - (f(S(t-a), J(t-a)) - f(S(t-a), J_2(t-a))) e^{-\mu a} F(a)| da \quad (3.20) \\ & + \int_{t-h}^t |f(S(t-a), J(t-a)) - f(S(t-a), J_2(t-a))| e^{-\mu a} F(a) da, \end{aligned}$$

tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ uniformément pour les données initiales de C . Il n'est pas difficile d'observer que

$$\int_{t-h}^t |f(S(t-a), J(t-a)) - f(S(t-a), J_2(t-a))| e^{-\mu a} F(a) da,$$

tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ uniformément pour les données initiales de C . Nous avons défini

$$\begin{aligned} K & := \int_0^{t-h} |(f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - f(S(t-a-h), J_2(t-a-h))) e^{-\mu(a+h)} F(a+h) \\ & - (f(S(t-a), J(t-a)) - f(S(t-a), J_2(t-a))) e^{-\mu a} F(a)| da, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} K &\leq \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J(t-a-h))e^{-\mu(a+h)}F(a+h)da - f(S(t-a), J(t-a))e^{-\mu a}F(a)|da \\ &+ \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J_2(t-a-h))e^{-\mu(a+h)}F(a+h)da - f(S(t-a), J_2(t-a))e^{-\mu a}F(a)|da, \\ &\leq K_1 + K_2, \end{aligned}$$

avec

$$K_1 := \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J(t-a-h))e^{-\mu(a+h)}F(a+h)da - f(S(t-a), J(t-a))e^{-\mu a}F(a)|da,$$

et

$$K_2 := \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J_2(t-a-h))e^{-\mu(a+h)}F(a+h)da - f(S(t-a), J_2(t-a))e^{-\mu a}F(a)|da.$$

nous nous concentrons sur K_1 ,

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J(t-a-h)) - f(S(t-a), J(t-a))e^{-\mu a}F(a)|da \\ &+ \int_0^{t-h} |f(S(t-a-h), J(t-a-h))e^{-\mu(a+h)}F(a+h)da - e^{-\mu a}F(a)|da. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (3.3) et le théorème 3.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} K_1 &\leq L\{\int_0^{t-h} |S(t-a-h) - S(t-a)|e^{-\mu a}F(a)da + \int_0^{t-h} |J(t-a-h) - J(t-a)|e^{-\mu a}F(a)da\} \\ &+ f(\tilde{M}, \|\beta(a)\|_\infty \tilde{M})\{\int_0^{t-h} |e^{-\mu(a+h)} - e^{-\mu a}|F(a)da + \int_0^{t-h} e^{-\mu(a+h)}|F(a+h) - F(a)|da\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

On peut facilement prouver que le troisième et le quatrième termes de (3.21) convergent vers 0 quand h tend vers 0, uniformément pour toutes les données initiales dans C . Par (3.13), nous avons l'estimation suivante

$$|S'| \leq \Lambda + \mu S + f(S, J) \leq \Lambda + \mu \tilde{M} + f(\tilde{M}, \|\beta\|_\infty \tilde{M}).$$

Par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires implique que le premier terme de (3.21)

converge vers 0 quand $h \rightarrow 0$, uniformément pour des valeurs initiales dans C . Par un changement de variable, le deuxième terme de (3.21) devient

$$K_3 := L \int_0^{t-h} |J(s+h) - J(s)| e^{-\mu(t-s-h)} F(t-s-h) ds.$$

notons que,

$$|J(s+h) - J(s)| \leq |J_1(s+h) - J_1(s)| + |J_2(s+h) - J_2(s)|,$$

alors

$$K_3 \leq \int_0^{t-h} |J_1(s+h) - J_1(s)| e^{-\mu(t-s-h)} F(t-s-h) ds + \int_0^{t-h} |J_2(s+h) - J_2(s)| e^{-\mu(t-s-h)} F(t-s-h) ds.$$

Nous remarquons que la fonction J_1 devient après un changement de variable,

$$J_1(t) = \int_0^t \tilde{\beta}(t-r) f(S(r), J(r)) dr, \quad (3.22)$$

avec $\tilde{\beta}(t) := \beta(t)F(t)e^{-\mu t}$, où $\tilde{\beta} \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Par un calcul simple, nous obtenons

$$|J_1(s+h) - J_1(s)| \leq \|\beta\|_\infty f(\tilde{M}, \|\beta\|_\infty \tilde{M}) h + f(\tilde{M}, \|\beta\|_\infty \tilde{M}) \int_0^s |\tilde{\beta}(s+h-r) - \tilde{\beta}(s-r)| dr.$$

Cela converge vers 0 quand $h \rightarrow 0$ pour tout $s \geq 0$ et pour les données initiales dans C . D'après la définition de J_2 dans (3.17) et un changement de variable,

$$\begin{aligned} |J_2(s+h) - J_2(s)| &\leq e^{-\mu h} \int_0^\infty |\beta(a+s+h) - \beta(a+s)| \frac{F(a+s+h)}{F(a)} i_0(a) da \\ &+ \|\beta\|_\infty \int_0^\infty \left| \frac{F(a+s+h)}{F(a)} - \frac{F(a+s)}{F(a)} \right| i_0(a) da. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\beta(a)$ est bornée et uniformément continue nous pouvons prouver que ces dernières intégrales vont à 0 quand h tend vers 0, de manière uniforme pour tout $s \geq 0$ et pour toutes les données initiales en C . Comme $J_2(t) \leq J(t)$ pour tout $t \geq 0$, nous pouvons prouver que K_2 converge vers 0 uniformément pour toutes les données initiales en C , en utilisant le même argument que ci-dessus. Cela prouve le théorème. ■

3.2.1 Trajectoires totales

Dans cette section, nous décrivons les trajectoires totales de notre système, qui sont des solutions de (3.2) définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ces solutions jouent un rôle important pour prouver la stabilité globales des équilibres. Nous considérons $\bar{\phi}$ la trajectoire totale de Φ , $\bar{\phi}(t) = (S(t), i(t, \cdot))$. Donc $\bar{\phi}(r+t) = \Phi(t, \bar{\phi}(r))$, $t \geq 0, r \in \mathbb{R}$. Nous définissons $S_r(t) = S(t+r)$, $J_r(t) = J(t+r)$, $I_r(t)(t, a) = i(t+r, a)$. Ensuite $(S_r(t), i_r(t, \cdot)) = \Phi(t, (S(r), i(r, \cdot)))$. D'après (3.14),

$$S'_r = \Lambda - \mu S_r - f(S_r, J_r), \quad S_r(0) = S(r),$$

$$i_r(t, a) = \begin{cases} e^{-\mu a} F(a) f(S_r(t-a), J_r(t-a)), & t > a, \\ i(r, a-t) e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, & t < a, \end{cases}$$

et

$$J_r(t) = \int_0^\infty \beta(a) i_r(t, a) da$$

pour $t \geq 0$,

$$S'(t+r) = \Lambda - \mu S(t+r) - f(S(t+r), J(t+r)),$$

$$i(t+r, a) = \begin{cases} e^{-\mu a} F(a) f(S(t+r-a), J(t+r-a)), & t > a, \\ i(r, a-t) e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, & t < a, \end{cases}$$

$$J(t+r) = \int_0^\infty \beta(a) i(t+r, a) da.$$

Pour $s \geq r$, avec $t = s - r$,

$$S'(s) = \Lambda - \mu S(s) - f(S(s), J(s)),$$

$$i(s, a) = \begin{cases} e^{-\mu a} F(a) f(S(s-a), J(s-a)), & s-r > a, \\ i(r, a-(s-r)) e^{-\mu(s-r)} \frac{F(a)}{F(a-(s-r))}, & s-r < a, \end{cases}$$

$$J(s) = \int_0^\infty \beta(a) i(s, a) da$$

$$= \int_0^{s-r} \beta(a) e^{-\mu a} F(a) f(S(s-a), J(s-a)) da$$

$$+ \int_{s-r}^\infty \beta(a) i(r, a-(s-r)) e^{-\mu(s-r)} \frac{F(a)}{F(a-(s-r))} da.$$

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Si $r \rightarrow -\infty$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} S'(s) = \Lambda - \mu S(s) - f(S(s), J(s)), \\ J(s) = \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) f(S(s-a), J(s-a)) da, \\ i(s, a) = e^{-\mu a} F(a) f(S(s-a), J(s-a)), \quad a \geq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Le lemme suivant fournit certaines estimations de la trajectoires totales qui s'avéreront utiles pour la suite.

Lemme 3.2.1. *Pour tout $(S_0, i_0) \in \mathbf{A}$, nous avons*

$$S_0 + \int_0^\infty i_0(a) da \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \text{et } S_0 \geq \frac{\Lambda}{\mu + L}, \quad \text{ou } L \text{ est la constante de Lipschitz,}$$

$$\int_0^\infty \beta(a) i_0(a) da \leq \|\beta\|_\infty \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \text{et}$$

$$i_0(a) \leq f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \|\beta\|_\infty \frac{\Lambda}{\mu}\right) e^{-\mu a} F(a), \quad a \geq 0.$$

Démonstration. Nous avons $F(a) \leq 1$ pour tout $a \geq 0$, alors

$$I(t) = \int_0^\infty i(t, a) da \leq \int_0^\infty e^{-\mu a} f(S(s-a), J(s-a)) da =: \tilde{I}(t).$$

D'après un changement de variable, la fonction $\tilde{I}(t)$ devient

$$\tilde{I}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} f(S(s), J(s)) ds,$$

et satisfait les équations suivantes

$$\tilde{I}'(t) = f(S(t), J(t)) - \mu \tilde{I}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Par l'équation de S dans (3.23), nous obtenons

$$S'(t) + \tilde{I}'(t) = \Lambda - \mu(S(t) + \tilde{I}(t)).$$

Pour tout $t > r$, et après un calcul direct,

$$S(t) + \tilde{I}(t) = (S(r) + \tilde{I}(r)) e^{-\mu(t-r)} + \Lambda \int_r^t e^{-\mu(t-s)} ds.$$

Lorsque $r \rightarrow -\infty$,

$$S(t) + \tilde{I}(t) = \frac{\Lambda}{\mu}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

où $I \leq \tilde{I}$, par conséquent

$$S(t) + I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \quad \text{et} \quad J(t) \leq \|\beta\|_{\infty} \frac{\Lambda}{\mu},$$

et

$$i(t, a) \leq f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \|\beta\|_{\infty} \frac{\Lambda}{\mu}\right) e^{-\mu a} F(a), \quad a \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous utilisons l'équation de S dans (3.23). Par le fait que J est bornée et avec (3.3), nous avons,

$$\begin{aligned} S'(t) &\geq \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), \|\beta\|_{\infty} \frac{\Lambda}{\mu}), \\ &\geq \Lambda - \mu S(t) - LS(t). \end{aligned}$$

Enfin, par un calcul simple, nous obtenons

$$S(t) \geq \frac{\Lambda}{\mu + L} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

■

3.3 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Cette section est consacrée à prouver la stabilité globale de l'équilibre sans maladie (DFE) $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$. Nous supposons que la fonction $f(S, J)$ est concave par rapport à J .

Nous observons que le système (3.2) a toujours un équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$.

Rappelons que $F(a) = e^{-\int_0^a \gamma(s) ds}$

Théorème 3.3.1. *Soit $F \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $R_0 \leq 1$. l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Nous définissons la fonction ϕ comme suit

$$\phi(a) = \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \int_a^{\infty} \beta(\sigma) e^{-\mu\sigma} e^{-\int_a^{\sigma} \gamma(\xi) d\xi} d\sigma.$$

qui est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \phi'(a) = (\mu + \gamma(a))\phi(a) - \beta(a) \frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0), & a > 0 \\ \phi(0) = R_0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour $(S_0, i_0) \in \mathbf{A}$, nous construisons une fonction de Lyapunov $V(S_0, i_0) = V_1(S_0, i_0) + V_2(S_0, i_0)$ avec

$$V_1(S_0, i_0) = S_0 - \int_{\frac{\Lambda}{\mu}}^{S_0} \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(\eta, J)} d\eta - \frac{\Lambda}{\mu},$$

et

$$V_2(S_0, i_0) = \int_0^\infty \phi(a) i_0(a) da.$$

Soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}$ une Φ -trajectoire totale, $\chi(t) = (S(t), i(t, \cdot))$, $S(0) = S_0$ et $i(0, a) = i_0(a)$, avec $(S(t), i(t, a))$ sont des solutions du problème (3.23).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(\chi(t)) &= (1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}) (\Lambda - \mu S(t) - f(S(t), J(t))) \\ &= \mu (1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}) (\frac{\Lambda}{\mu} - S(t)) - f(S(t), J(t)) (1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}). \end{aligned}$$

Nous avons,

$$V_2(\chi(t)) = \int_0^\infty \phi(a) i(t, a) da,$$

de l'expression de i dans (3.23), nous avons

$$V_2(\chi(t)) = \int_0^\infty \phi_1(a) \xi(t-a) da,$$

avec

$$\xi(t) = f(S(t), J(t)), \text{ et } \phi_1(a) = \phi(a) e^{-\mu a} F(a). \quad (3.26)$$

En suivant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 9.18 dans ([52]) nous pouvons montrer que V_2 est absolument continue et que

$$\frac{d}{dt} V_2(\chi(t)) = \phi_1(0) \xi(t) + \int_0^\infty \phi_1'(a) \xi(t-a) da.$$

D'après (3.26) nous avons

$$\frac{d}{dt}V_2(\chi(t)) = \phi(0)f(S(t), J(t)) + \int_0^\infty (\phi'(a) - \mu\phi(a) - \gamma(a)\phi(a))e^{-\mu a}F(a)f(S(t-a), J(t-a))da,$$

à partir de (3.23) et (3.25) nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(\chi(t)) &= \phi(0)f(S(t), J(t)) + \int_0^\infty \phi'(a)i(t, a)da - \int_0^\infty (\mu + \gamma(a))i(t, a)\phi(a)da, \\ &= R_0f(S(t), J(t)) - \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da. \end{aligned}$$

En additionnant $\frac{dV_1}{dt}$ et $\frac{dV_2}{dt}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\chi(t)) &= \mu(1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)})(\frac{\Lambda}{\mu} - S(t)) - (1 - R_0)f(S(t), J(t)) \\ &\quad + f(S(t), J(t)) \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)} - \frac{\partial f(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)}{\partial J}J(t). \end{aligned}$$

Nous observons que les deux premiers termes de cette équation ci-dessus sont négatifs. Nous affirmons que, le troisième terme est également négatif. En effet, la concavité du f par rapport à J assure que

$$f(S, J) \leq J \frac{\partial f}{\partial J}(S, 0).$$

où

$$\begin{aligned} f(S, J) \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S, J)} - J \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) &= f(S, J) \frac{\frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)}{\frac{\partial f}{\partial J}(S, 0)} - J \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right), \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)}{\frac{\partial f}{\partial J}(S, 0)} (f(S, J) - J \frac{\partial f}{\partial J}(S, 0)) \leq 0. \end{aligned}$$

Notons que, $\frac{d}{dt}V(\chi(t)) = 0$ implique que $S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$. Nous substituons ceci dans l'équation de S , nous obtenons $J(t) = 0$ et donc $i(t, \cdot) = 0$. Ainsi le plus grand ensemble invariant avec la propriété que $\frac{d}{dt}V(\chi(t)) = 0$ est $\left\{\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right\}$ (principe d'invariance de LaSalle). Par le fait que \mathbf{A} est compact, $\omega(S_0, i_0)$ et $\alpha(S_0, i_0)$ sont non-vides, compacts, invariants et attirent $\chi(t)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, respecti-

vement. Comme $V(\chi(t))$ est une fonction décroissante de t , V est constante dans les ensembles $\omega(S_0, i_0)$ et $\alpha(S_0, i_0)$, et donc $\omega(x) = \alpha(x) = \{(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)\}$. Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \chi(t) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ et

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} V(\chi(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\chi(t)) = V\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right).$$

Comme $\alpha(x) = \{(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)\}$, alors $V(\chi(t)) \leq V(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et comme V atteint sa valeur minimale en $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$, nous concluons que $\chi(t) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier $(S_0, i_0(\cdot)) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$. Par conséquent, l'attracteur \mathbf{A} , est le singleton formé par l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$. D'après le théorème 2.39 ([52], voir annexe), l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable. ■

3.4 Stabilité exponentielle de l'équilibre sans maladie

Avant de démontrer la stabilité exponentielle de l'équilibre sans maladie, nous introduisons ce qui suit :

$$\bar{a} = \sup \{a \in \mathbb{R}^+, \beta(a) > 0\},$$

et supposons que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) e^{ra} da > 1, \quad (3.27)$$

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{(\mu-r)a}}{F(a)} \int_a^\infty \beta(\sigma) e^{-(\mu-r)\sigma} F(\sigma) d\sigma < \infty, \quad (3.28)$$

et

$$\limsup_{a \rightarrow \bar{a}} \frac{\beta(a) e^{-(\mu-r)a} F(a)}{\int_a^\infty \beta(\sigma) e^{-(\mu-r)\sigma} F(\sigma) d\sigma} < \infty, \quad (3.29)$$

pour tout $r > 0$.

Théorème 3.4.1. *Supposons que (3.27)-(3.29) sont vérifiées, alors l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ est exponentiellement stable lorsque $R_0 < 1$.*

Démonstration.

Comme $R_0 < 1$ et (3.27) est satisfaite, il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une constante $r_0 > 0$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \int_0^{\infty} \beta(a) e^{-\mu a} F(a) e^{r_0 a} da = 1.$$

Nous considérons la fonction positive ψ définie par

$$\psi(a) = \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \int_a^{\infty} \beta(\sigma) e^{-(\mu-r_0)(\sigma-a)} \frac{F(\sigma)}{F(a)} d\sigma.$$

Nous montrons d'abord que ψ est bornée. En Effet,

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \frac{e^{(\mu-r_0)a}}{F(a)} \int_a^{\infty} \beta(\sigma) e^{-(\mu-r_0)\sigma} F(\sigma) d\sigma, \\ &\leq \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \frac{e^{(\mu-r_0)a}}{F(a)} \int_a^{\infty} \beta(\sigma) e^{-(\mu-r_0)\sigma} F(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

de ce qui précède et de (3.28), la bornitude de ψ est atteinte. En outre, par le fait que ψ est dérivable et elle résout le problème suivant

$$\begin{cases} \psi'(a) = -\beta(a) \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) - (r_0 - \mu - \gamma(a))\psi(a), & a \geq 0, \\ \psi(0) = 1, \end{cases} \quad (3.30)$$

multiplions l'équation de i dans le problème (3.2) par ψ et intégrons, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} i(t, a) \psi(a) da = - \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) + (\mu + \gamma(a)) i(t, a) \right\} \psi(a) da,$$

par l'intégration par partie, nous trouvons

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} i(t, a) \psi(a) da \leq i(t, 0) \psi(0) + \int_0^{\infty} \{ \psi'(a) - (\mu + \gamma(a)) \psi(a) \} i(t, a) da,$$

d'après (3.30), nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} i(t, a) \psi(a) da \leq f(S(t), J(t)) - J(t) \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) - r_0 \int_0^{\infty} i(t, a) \psi(a) da.$$

Puisque la fonction f est croissante par rapport à S , et $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} i(t, a) \psi(a) da \leq f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, J(t)\right) - J(t) \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) - r_0 \int_0^{\infty} i(t, a) \psi(a) da.$$

La concavité de $f(S, J)$ par rapport à J conduit à,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty i(t, a) \psi(a) da \leq -r_0 \int_0^\infty i(t, a) \psi(a) da,$$

donc,

$$\int_0^\infty i(t, a) \psi(a) da \leq e^{-r_0 t} \int_0^\infty i_0(a) \psi(a) da.$$

D'autre part, d'après (3.29), observons qu'il existe une constante positive θ telle que $\beta(a) \leq \theta \psi(a)$, ainsi,

$$J(t) \leq \theta \bar{A} e^{-r_0 t}, \quad (3.31)$$

avec $\bar{A} = \int_0^\infty i_0(a) \psi(a) da$.

Par ailleurs, en utilisant (3.12) et la bornitude de $S(t)$ dans le théorème 3.1.1 nous obtenons,

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_0^\infty i(t, a) da, \\ I(t) &= \int_0^t e^{-\mu a} F(a) f(S(t-a), J(t-a)) da + e^{-\mu t} \int_0^\infty i_0(a) \frac{F(a+t)}{F(a)} da, \\ &\leq \int_0^t e^{-\mu a} F(a) f(\tilde{M}, J(t-a)) da + e^{-\mu t} \int_0^\infty i_0(a) \frac{F(a+t)}{F(a)} da, \end{aligned}$$

D'après (3.3) et le fait que $f(\tilde{M}, 0) = 0$, nous avons

$$I(t) \leq L \int_0^t e^{-\mu a} F(a) J(t-a) da + e^{-\mu t} \int_0^\infty i_0(a) \frac{F(a+t)}{F(a)} da,$$

par (3.31) et le fait que F est une fonction décroissante,

$$\begin{aligned} I(t) &\leq L \bar{A} \theta \int_0^t F(a) e^{-\mu a} e^{-r_0(t-a)} da + e^{-\mu t} \int_0^\infty i_0(a) da, \\ &\leq L \bar{A} \theta e^{-r_0 t} \int_0^t F(a) e^{-(\mu-r_0)a} da + e^{-\mu t} \|i_0\|_1. \end{aligned}$$

Comme $F(a) \leq 1$ pour tout $a \geq 0$, alors par un calcul simple, nous obtenons

$$I(t) \leq \frac{L\bar{A}\theta}{r_0 - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-r_0 t}) + e^{-\mu t} \|i_0\|_1, \text{ si } \mu \neq r_0,$$

et

$$I(t) \leq (L\bar{A}\theta \int_0^\infty F(a) da + \|i_0\|_1) e^{-\mu t}, \text{ si } \mu = r_0,$$

à partir de S et l'équation (3.2), en utilisant (3.3) et (3.31), nous avons

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}|' \leq -\mu |S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| + L\theta \bar{A} e^{-r_0 t},$$

nous intégrons cette inéquation différentielle, pour obtenir

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| \leq e^{-\mu t} + \frac{L\theta \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu - r_0} (e^{-r_0 t} - e^{-\mu t}), \text{ si } \mu \neq r_0,$$

et

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| \leq |S_0 - \frac{\Lambda}{\mu}| e^{-\mu t} + L\theta \frac{\Lambda}{\mu} t e^{-\mu t}, \text{ si } \mu = r_0.$$

ce qui achève la démonstration. ■

3.5 Stabilité globale de l'équilibre endémique

Dans cette section, nous assurons d'abord l'existence de l'équilibre endémique et nous établissons la persistance forte de la solution du problème (3.2), puis nous étudierons enfin la stabilité globale d'un point endémique.

3.5.1 Existence de l'équilibre endémique

Lemme 3.5.1. *Soit $\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S, J)} > 1$ pour $S \in [0, \frac{\Lambda}{\mu})$. Alors, si $R_0 > 1$, le système a au moins un état d'équilibre positif.*

Démonstration. Un équilibre endémique est un point fixe pour le semi-flot Φ ,

$$\Phi(t, (S^*, i^*)) = (S^*, i^*), \text{ avec } i^* \neq 0, \forall t \geq 0.$$

D'après (3.12) et (3.14) nous avons,

$$i^*(a) = \begin{cases} f(S^*, J^*)e^{-\mu a}F(a), & t > a \geq 0, \\ i^*(a-t)e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, & a > t \geq 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Lambda - \mu S^* - f(S^*, J^*) = 0, \\ J^* = \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) da. \end{cases} \quad (3.32)$$

D'après la définition de $i^*(a)$, et pour $t \leq a \leq 2t$, nous avons

$$\begin{aligned} i^*(a) &= i^*(a-t)e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, \\ &= f(S^*, J^*)e^{-\mu(a-t)}F(a-t)e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, \\ &= f(S^*, J^*)e^{-\mu a}F(a), \end{aligned}$$

ainsi, et par récurrence, on a :

$$i^*(a) = f(S^*, J^*)e^{-\mu a}F(a) \quad \forall t \geq 0, \forall a \geq 0. \quad (3.33)$$

En combinant les équations de (3.32) et (3.33), nous obtenons

$$\begin{cases} \Lambda = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ \bar{D}f(S^*, J^*) = J^*, \end{cases} \quad (3.34)$$

avec

$$\bar{D} := \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da. \quad (3.35)$$

Ces égalités définissent une ligne droite q_1 d'une pente négative et une courbe q_2 respectivement sur le plan SJ .

L'équation $\bar{D}f(S, J) - J = 0$ définit également une fonction $S = h(J)$ (Par le théorème des fonction implicites (A.0.6)), la fonction $h(J)$ est continue pour tout $J > 0$, car la dérivée $\frac{\partial f(S, J)}{\partial S}$ est strictement positive .

Si $S_* = h(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, alors il existe au moins un point d'intersection entre la ligne q_1 et la courbe q_2 .

La fonction $f(S, J)$ croît de façon monotone par rapport à ses deux variables et $S_* = h(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ si

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S, J)} = \lim_{J \rightarrow 0^+} \bar{D} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{J} = \bar{D} \frac{\partial f(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)}{\partial J} = R_0 > 1.$$

■

3.5.2 Persistance uniforme

Nous cherchons à démontrer la persistance uniforme des solutions, pour cela nous appliquons le théorème 5.2 ([52], [20], [41], [58], voir annexe).

Nous faisons d'abord les hypothèses suivantes sur l'incidence f .

Nous supposons qu'il existe un point endémique vérifiant (3.6) tel que, pour tout $S > 0$,

$$\begin{cases} \frac{x}{J^*} < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < 1 \text{ pour } x < J^*, \\ 1 < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < \frac{x}{J^*} \text{ pour } x > J^*. \end{cases} \quad (3.36)$$

Il existe ϵ et η tels que pour tout $S \in [\frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon, \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon]$ nous avons

$$\frac{f(S, J_1)}{J_1} \geq \frac{f(S, J_2)}{J_2}, \quad (3.37)$$

pour tout $0 < J_1 \leq J_2 \leq \eta$.

Enfin, nous supposons que

$$\int_0^\infty i_0(a) \Pi(a) da > 0, \quad (3.38)$$

avec

$$\Pi(a) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \beta(a+t) e^{-\int_a^{a+t} \gamma(\sigma) d\sigma} dt.$$

Remarque 3.5.1. Si $\int_0^\infty i_0(a) \Pi(a) da = 0$, alors par la formulation de Volterra de la solution, (3.13)-(3.22)-(3.17) et l'inégalité de Gronwall, nous pouvons montrer que $J(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Nous définissons la fonction de persistance $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ comme suit

$$\rho(S_0, i_0) = \int_0^\infty \beta(a) i_0(a) da.$$

alors

$$\rho(\Phi(t, x)) = \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da := J(t).$$

Le lemme suivant vérifie l'hypothèse (H1) dans le théorème 5.2. ([52], voir annexe).

Lemme 3.5.2. *Sous l'hypothèse (3.36), (3.38), la fonction J est positive dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$J(t) = \int_0^\infty \beta(a) f(S(t-a), J(t-a)) e^{-\mu a} F(a) da,$$

par un changement de variable,

$$J(t) = \int_{-\infty}^t \beta(t-\sigma) f(S(\sigma), J(\sigma)) e^{-\mu(t-\sigma)} F(t-\sigma) d\sigma,$$

à partir de cette équation et l'hypothèse (3.38) on déduit que la fonction J n'est pas identiquement nulle. D'autre part, supposons qu'il existe $r \leq 0$ tel que $J(t) = 0$ pour tout $t \leq r$. Partant de $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ et en utilisant la monotonie de f par rapport à S nous avons,

$$J(t) \leq \|\beta\|_\infty \int_r^t f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, J(s)\right) ds,$$

par (3.3) et $f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) = 0$,

$$J(t) \leq L \|\beta\|_\infty \int_r^t J(s) ds, \quad t \geq r.$$

L'inégalité de Gronwall conduit à $J(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela contredit clairement le fait que $J(t) \neq 0$ pour certains t . Donc, il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ avec $J(t_n) > 0$. Notons $J_n(t) := J(t + t_n)$, et $S_n(t) := S(t + t_n)$ par (3.23), (3.24) et la monotonie de f par rapport à S , avec $\delta = \inf_{\mathbb{R}} S(t) > 0$,

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \int_{-\infty}^t \beta(t-\sigma) f(S_n(\sigma), J_n(\sigma)) e^{-\mu(t-\sigma)} F(t-\sigma) d\sigma, \\ &\geq \int_{-\infty}^t \beta(t-\sigma) f(\delta, J_n(\sigma)) e^{-\mu(t-\sigma)} F(t-\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

avec, $J_n(0) := J(t_n) > 0$. Nous supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $J_n(r) = 0$ et $J_n(t) > 0$ pour tout $t \in [0, r)$. Alors,

$$0 = J_n(r) \geq \int_{-\infty}^r \beta(r - \sigma) f(\delta, J_n(\sigma)) e^{-\mu(r-\sigma)} F(r - \sigma) d\sigma,$$

donc $J_n(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in (0, r)$, cela est une contradiction. $J_n(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et comme $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, $J(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela achève la démonstration. ■

Nous sommes prêts à prouver la persistance uniforme de la maladie.

Théorème 3.5.1. Soit $F(a) = e^{-\int_0^\infty \gamma(a) da}$ où $F \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et supposons que (3.36), (3.37), (3.38) sont vérifiées. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} J(t) > \epsilon,$$

pour toutes les solutions non négatives de (3.2) si $R_0 > 1$.

Démonstration. Nous utilisons le théorème 5.2 ([52], voir annexe), supposons par contradiction qu'il existe ϵ arbitrairement petit tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) < \epsilon.$$

En utilisant la première équation du problème (3.2), nous avons

$$\begin{aligned} S'(t) &\geq \Lambda - \mu S(t) - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, J\right), \\ &\geq \Lambda - \mu S(t) - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right), \end{aligned}$$

par un calcul direct, nous obtenons

$$S(t) \geq \left(S_0 - \frac{\Lambda - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right)}{\mu}\right) e^{-\mu t} + \frac{\Lambda - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right)}{\mu},$$

nous avons

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon),$$

avec $\psi(\epsilon) = \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon)}{\mu}$. D'autre part, nous avons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

supposons qu'il existe $T > 0$ tel que,

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| < \psi(\epsilon), \quad \forall t \geq T.$$

Nous introduisons le problème auxiliaire suivante

$$\begin{cases} \tilde{i}_t(t, a) + \tilde{i}_a(t, a) = -(\mu + \gamma(a))\tilde{i}(t, a), \\ \tilde{i}(t, 0) = f(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \tilde{J}(t)), \\ \tilde{J}(t) = \int_0^\infty \beta(a)\tilde{i}(t, a) da, \\ \tilde{i}(0, a) = i_0(a). \end{cases} \quad (3.39)$$

Par la monotonie de la fonction f par rapport à S et J , nous déduisons que (pour t grand et à l'aide d'un principe de comparaison)

$$\tilde{i}(t, \cdot) \leq i(t, \cdot), \quad (3.40)$$

et ainsi

$$\tilde{J}(t) \leq J(t) < \epsilon.$$

Puisque $R_0 > 1$, choisissons ϵ petit tel qu'il existe $\lambda_\epsilon > 0$ avec

$$\frac{f(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon)}{\epsilon} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) e^{-\lambda_\epsilon a} da = 1.$$

D'un autre côté, nous définissons le problème suivant

$$\begin{cases} \phi'(a) = (\mu + \gamma(a) + \lambda_\epsilon)\phi(a) - \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon)}{\epsilon} \beta(a), \quad a \geq 0, \\ \phi(0) = 1. \end{cases}$$

qui a pour unique solution

$$\phi(a) = \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon)}{\epsilon} \int_a^\infty \beta(\sigma) e^{-\int_a^\sigma (\mu + \gamma(\xi) + \lambda_\epsilon) d\xi} d\sigma.$$

Nous analysons la dérivée suivante,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \phi(a) \tilde{i}(t, a) da &= - \int_0^\infty \phi(a) (\tilde{i}_a(t, a) + (\mu + \gamma(a)) \tilde{i}(t, a)) da, \\ &= \phi(0) \tilde{i}(t, 0) + \int_0^\infty \phi'(a) \tilde{i}(t, a) da - \int_0^\infty (\mu + \gamma(a)) \phi(a) \tilde{i}(t, a) da, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \phi(a) \tilde{i}(t, a) da = f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \tilde{J}(t)\right) - \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} \tilde{J}(t) + \lambda_\epsilon \int_0^\infty \phi(a) \tilde{i}(t, a) da. \quad (3.41)$$

En vue de (3.37) et $\tilde{J}(t) < \epsilon$ pour t grand, nous avons,

$$f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \tilde{J}(t)\right) \geq \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} \tilde{J}(t).$$

De ce qui précède et de (3.41) nous pouvons conclure que,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \phi(a) \tilde{i}(t, a) da \geq \lambda_\epsilon \int_0^\infty \phi(a) \tilde{i}(t, a) da,$$

donc,

$$\int_0^\infty \phi(a) \tilde{i}(t, a) da \geq e^{\lambda_\epsilon t} \int_0^\infty \phi(a) i_0(a) da,$$

d'après (3.40) et la bornitude de la fonction ϕ , nous obtenons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty i(t, a) da = \infty,$$

Ce qui est en contradiction avec la bornitude de $I(t)$. ■

Soit X_0 l'ensemble défini par

$$X_0 = \{(S_0, i_0(\cdot)) \in X_+; \int_0^\infty i_0(a) \Pi(a) da = 0\},$$

avec Π est définie dans (3.38). Par le théorème 5.7([52], voir annexe), nous avons le résultat suivant

Théorème 3.5.2. *Il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 qui attire toutes les solutions avec les conditions initiales appartenant à $X_+ \setminus X_0$, de plus \mathbf{A}_1 est ρ -uniformément positif, c'est-à-dire, il existe un $\delta > 0$*

tel que,

$$\int_0^{\infty} \beta(a) i_0(a) da \geq \delta \text{ pour tout } (S_0, i_0) \in \mathbf{A}_1. \quad (3.42)$$

3.5.3 Stabilité globale et unicité du point d'équilibre endémique

Dans cette section, nous établissons la stabilité globale de l'équilibre endémique (S^*, i^*) du système (3.23). Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous avons besoin de l'estimation suivante, qui garantit que toutes les solutions de (3.23) avec les conditions initiales satisfaisant (3.38), sont bornées loin de 0.

Proposition 3.5.1. *Il existe $\bar{\delta} > 0$ tel que, pour tout $(S_0, i_0) \in \mathbf{A}_1$,*

$$i_0(a) \geq \bar{\delta} F(a) e^{-\mu a}, \quad a \geq 0.$$

Démonstration. Comme \mathbf{A}_1 est invariant, alors il existe une trajectoire totale $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$, $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot))$ avec $S(0) = S_0$ et $i(0, a) = i_0(a)$. Par (3.42),

$$J(t) = \int_0^{\infty} \beta(a) i(t, a) da \geq \delta,$$

et

$$i(t, a) = f(S(t-a), J(t-a)) F(a) e^{-\mu a}.$$

Selon le lemme 3.2.1,

$$i(t, a) \geq \bar{\delta} F(a) e^{-\mu a}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0,$$

avec $\bar{\delta} := f\left(\frac{\Lambda}{\mu + L}, \delta\right)$. ■

Corollaire 3.5.1. *Les estimations suivantes sont vérifiées*

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \geq \frac{\bar{\delta}}{f(S^*, J^*)},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{i(t, a)}{i^*(a)} dm(a) \geq \frac{\bar{\delta}}{f(S^*, J^*)}, \text{ avec } dm(a) = \frac{\beta(a) e^{-\mu a} F(a)}{\bar{D}} da,$$

et

$$f(S(t), J(t)) \geq f\left(\frac{\Lambda}{\mu + L}, \delta\right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et \bar{D} est défini dans (3.35).

Théorème 3.5.3. *Sous les hypothèses du théorème 3.5.2, le problème (3.23) a un équilibre endémique positif unique (S^*, i^*) qui est globalement asymptotiquement stable dans $X_+ \setminus X_0$.*

Démonstration.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ une Φ -trajectoire totale, $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot))$, $S(0) = S_0$ et $i(0, a) = i_0(a)$, avec $(S(t), i(t, a))$ est la solution du problème (3.23). Nous définissons $H(y) = y - \ln(y) - 1$, et

$$\phi(a) = f(S^*, J^*) \int_a^\infty dm(\sigma), \text{ avec } dm(\sigma) = \frac{\beta(\sigma) e^{-\mu\sigma} F(\sigma)}{\bar{D}} d\sigma. \quad (3.43)$$

Notons que $\int_0^\infty dm(\sigma) = 1$, (\bar{D} est défini dans (3.35)). Pour $(S_0, i_0) \in A_1$, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante $V(S_0, i_0) = V_1(S_0, i_0) + V_2(S_0, i_0)$ avec

$$V_1(S_0, i_0) = S_0 - \int_{S^*}^{S_0} \frac{f(S^*, J^*)}{f(\eta, J^*)} d\eta,$$

et

$$V_2(S_0, i_0) = \int_0^\infty \phi(a) H\left(\frac{i_0(a)}{i^*(a)}\right) da.$$

Tout d'abord, d'après l'équation de S dans (3.23),

$$\frac{d}{dt} V_1(\Psi(t)) = \mu \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (S^* - S(t)) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) f(S^*, J^*) - \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) f(S(t), J(t)). \quad (3.44)$$

Nous définissons $V_2(\Psi(t))$ comme suit,

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty \phi(a) H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) da,$$

à partir de l'expression de i et i^* dans (3.23), (3.33) respectivement, nous avons

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty \phi(a) \xi(t-a) da,$$

avec

$$\xi(t) = H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right).$$

Par le lemme 2.3.5, nous avons que V_2 est absolument continue et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(\Psi(t)) &= \phi(0)\xi(t) + \int_0^\infty \phi'(a)\xi(t-a)da, \\ &= \phi(0)H\left(\frac{f(S(t),J(t))}{f(S^*,J^*)}\right) + \int_0^\infty \phi'(a)H\left(\frac{f(S(t-a),J(t-a))}{f(S^*,J^*)}\right)da. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En utilisant la définition de H ,

$$\begin{aligned} H\left(\frac{f(S(t),J(t))}{f(S^*,J^*)}\right) &= -\frac{f(S(t),J(t))}{f(S^*,J^*)} + \frac{f(S(t),J(t))}{f(S^*,J^*)} - 1, \\ &= -\frac{f(S(t),J(t))}{f(S(t),J^*)} - \frac{f(S(t),J^*)}{f(S^*,J^*)} + \frac{f(S(t),J(t))}{f(S^*,J^*)} - 1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En combinant (3.43), (3.44), (3.45) et (3.46) nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\Psi(t)) &= \mu\left(1 - \frac{f(S^*,J^*)}{f(S(t),J^*)}\right)(S^* - S(t)) + f(S^*,J^*)\left(h\left(\frac{f(S(t),J^*)}{f(S^*,J^*)}\right) - \frac{f(S^*,J^*)}{f(S(t),J^*)} + 1\right) \\ &+ f(S^*,J^*)\left\{H\left(\frac{f(S(t),J(t))}{f(S(t),J^*)}\right) - \int_0^\infty H\left(\frac{f(S(t-a),J(t-a))}{f(S^*,J^*)}\right)dm(a)\right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Puisque la fonction f est croissante par rapport à S , le premier terme est négatif. La fonction

$$1 - \frac{1}{x} - \ln(x)$$

est toujours négative pour tout $x > 0$, alors le deuxième terme est aussi négatif. Le troisième terme de (3.47) est négatif. En effet, nous avons

$$X = H\left(\frac{f(S(t),J(t))}{f(S(t),J^*)}\right) - \int_0^\infty H\left(\frac{f(S(t-a),J(t-a))}{f(S^*,J^*)}\right)dm(a).$$

Puis, en utilisant le fait que H est convexe, et par l'inégalité de Jensen ([34], [57], voir annexe) nous obtenons

$$X \leq H\left(\frac{f(S(t),J(t))}{f(S(t),J^*)}\right) - H\left(\int_0^\infty \frac{f(S(t-a),J(t-a))}{f(S^*,J^*)}dm(a)\right).$$

Par l'expression de $dm(a)$ et $J(t)$ dans (3.23), nous obtenons

$$X \leq H\left(\frac{f(S(t),J(t))}{f(S(t),J^*)}\right) - H\left(\frac{J(t)}{\bar{D}f(S^*,J^*)}\right), \quad (3.48)$$

à partir de cela et de (3.34), nous obtenons

$$X \leq H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right).$$

pour les t où $Y := \frac{J(t)}{J^*} < 1$; puis, selon l'hypothèse (3.36), nous avons

$$\frac{J(t)}{J^*} < \frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} < 1.$$

Par conséquent, à partir de $H(1) = 0$ et H décroissante en $(0, 1)$, il découle que

$$H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) > H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right),$$

et donc $X < 0$.

Pour les autres valeurs de t , où $Y > 1$, de nouveau de (3.36), nous avons

$$\frac{J(t)}{J^*} > \frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} > 1,$$

et ainsi, (H est croissante sur $(1, \infty)$)

$$H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) > H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right).$$

Par conséquent, le troisième terme est négatif et alors $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Notons que $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ implique que $S(t) = S^*$. Soit M Le plus grand ensemble invariant avec la propriété $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ de $X_+ \setminus X_0$.

Nous avons

$$H\left(\frac{f(S^*, J(t))}{f(S^*, J^*)}\right) = \int_0^\infty H\left(\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}\right) dm(a). \quad (3.49)$$

En utilisant l'équation de S dans (3.23) nous obtenons

$$\Lambda - \mu S^* = f(S^*, J(t)),$$

à partir de ceci, et de la première équation de (3.34) nous avons

$$f(S^*, J(t)) = f(S^*, J^*),$$

substituons ce résultat dans (3.49), afin d'obtenir

$$\int_0^\infty H\left(\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}\right) dm(a) = 0,$$

par (3.23) et (3.33) nous concluons que $i(t, a) = i^*(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En suivant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 3.3.1 nous concluons la stabilité globale de l'équilibre endémique. L'unicité est une conséquence directe du fait que $\frac{d}{dt} V(\psi(t)) = 0$ implique seulement le point $S = S^*$. ■

Chapitre 4

Modèle épidémiologique SEIR avec fonction incidence non-linéaire

Le résultat principal de ce chapitre est une généralisation des résultats obtenus dans [55].

Ce chapitre présente un modèle SEIR non linéaire avec l'âge d'infection, nous avons introduit une nouvelle classe individus celle "des exposés". Celle-ci représente la densité des infectés non infectieux. En effet, il existe une période dite période de latence pendant laquelle le développement des organismes responsables de la maladie est purement interne.

Rost et al. [51] et McCluskey [42], proposent le modèle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \Lambda - \beta S(t) \int_0^\infty k(a) i(t, a) da - dS(t) \\ E'(t) = \beta S(t) \int_0^\infty k(a) i(t, a) da - (\mu + d)E(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -(d + \delta + r) i(t, a), \\ R'(t) = rI(t) - dR(t). \end{array} \right.$$

avec les conditions aux bords

$$i(t, 0) = \mu E(t).$$

Les auteurs dans [51] ont analysé ce modèle. Ils ont prouvé la stabilité globale de l'équilibre sans maladie (DFE), et la stabilité globale de l'équilibre endémique.

Dans notre système, nous reprenons les mêmes densités (S, I, E, R) mais avec une fonction d'incidence non linéaire, nous montrons que la stabilité globale de l'équilibre endémique en uti-

lisant le principe des trajectoires totales avec une fonction Lyapunov bien choisie.

Soit le modèle SEIR structuré en âge avec une fonction incidence non linéaire générale,

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \quad t \geq 0, \\ E'(t) = f(S(t), J(t)) - (\mu + \alpha)E(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} i(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} i(t, a) = -(\mu + \gamma(a))i(t, a), \\ R'(t) = \int_0^\infty \gamma(a) i(t, a) da - \mu R(t), \\ J(t) = \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Les conditions aux bords et initiales sont

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t, 0) = \alpha E(t), \quad t > 0, \\ S(0) = S_0 \geq 0, \\ i(0, \cdot) = i_0(\cdot), \end{array} \right.$$

La maladie divise la population (N) en quatre parties la densité des susceptibles(S), la densité des infectés(I), la densité des exposés (E) et la dernière densité des réfractaires(R), avec

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t). \quad (4.2)$$

La population totale satisfait,

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t).$$

Il est évident que $N(t)$ converge vers $\frac{\Lambda}{\mu}$, quand $t \rightarrow \infty$. Nous désignons

$$F(a) = e^{-\int_0^a \gamma(\sigma) d\sigma}. \quad (4.3)$$

Nous avons les estimations suivantes sur la fonction f : Si $J \geq 0$, $f(S, \cdot)$ est non décroissante pour $S > 0$, $f(\cdot, J)$ est non décroissante pour $J > 0$. En outre $f(0, J) = f(S, 0) = 0$ pour tout $S, J \geq 0$.

La fonction $\frac{\partial f}{\partial J}(S, 0)$ est continue positive pour tout $S \in K$ où K est un ensemble compact.

La fonction f est supposée continue et localement lipschitzienne par rapport à S et à J avec la constante lipschitzienne $L > 0$, c'est-à-dire pour tout $C > 0$ il existe un $L > 0$ tel que

$$|f(S_2, J_2) - f(S_1, J_1)| \leq L(|S_2 - S_1| + |J_2 - J_1|), \quad (4.4)$$

quand $0 \leq S_2, S_1, J_2, J_1 \leq C$.

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$i(t, a) = \begin{cases} \alpha E(t-a)e^{-\mu a} F(a), & t > a \geq 0, \\ i_0(a-t)e^{-\mu t} \frac{F(a)}{F(a-t)}, & a > t \geq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

On peut réécrire le modèle (4.1) comme suit,

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ E'(t) = f(S(t), J(t)) - (\mu + \alpha)E(t), \\ J(t) = \alpha \int_0^\infty \beta(a)e^{-\mu a} F(a)E(t-a)da, \end{cases} \quad (4.6)$$

avec les conditions initiales,

$$\begin{cases} S(0) = S_0, \\ E(t) = \phi(t), \text{ pour } t \leq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous désignons par

$$C_\Delta := \{\phi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \phi(s)e^{\Delta s} \text{ est bornée et uniformément continue dans } (-\infty, 0]\},$$

avec $0 < \Delta < \mu + \inf(\gamma)$.

Soit C_Δ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\phi\| = \sup_{s \leq 0} |\phi(s)e^{\Delta s}|.$$

Nous définissons,

$$\begin{aligned} E_t: C_\Delta &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \theta &\mapsto E_t(\theta) = E(t + \theta), \end{aligned}$$

où $\theta \leq 0$.

Nous nous intéressons aux solutions non négatives, nous posons Y l'ensemble des fonctions non-négatives en C_Δ ,

$$Y := \{\phi \in C_\Delta : \phi(\theta) \geq 0 \text{ pour } \theta \leq 0\}.$$

Nous supposons que $(S_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times Y$, alors d'après ([19]) nous avons l'existence et l'unicité des solutions positives et continues aux problèmes (4.6)-(4.7) dans $\mathbb{R}^+ \times Y$.

Proposition 4.0.1. *Il existe une constante $M > 0$ telle pour toute solution de (4.1)-(4.7), il existe un $T > 0$ tel que,*

$$S(t) \leq M, E(t) \leq M, \|E_t\| \leq M, \text{ et } J(t) \leq M \text{ pour tout } t \geq T. \quad (4.8)$$

De plus,

$$\lambda \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} S(t), \quad (4.9)$$

avec $\lambda := \frac{\Lambda}{\mu + L}$.

Démonstration.

Tout d'abord, par un calcul direct, nous obtenons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

après (4.2) nous avons,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S(t) + E(t)) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Par conséquent, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$,

$$S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \text{ et } E(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

et

$$\begin{aligned} \|E_t\| &= \sup_{\theta \leq 0} E_t(\theta) = \sup_{u \leq t} E(u) e^{\Delta u} e^{-\Delta t} \\ &\leq \max\{e^{-\Delta t} \|\phi\|, K e^{\Delta T} e^{-\Delta t}, \frac{\Lambda}{\mu}\}, \end{aligned}$$

où $K = \sup_{0 \leq u \leq T} E(u)$, et par suite

$$\begin{aligned} J(t) &\leq \alpha \int_0^\infty \beta(a) e^{\Delta a} e^{-\mu a} e^{-\Delta a} E_t(-a) da, \\ &\leq \frac{\alpha \|\beta\|}{\mu + \inf(\gamma) - \Delta} \|E_t\|. \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons choisir une constante M très grande telle que (4.8) soit satisfait. Par rapport à l'estimation (4.9), nous posons $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty$ et $\limsup_{t \rightarrow \infty} J(t) = J^\infty$, en utilisant la méthode de fluctuation ([52]), ([57], voir annexe), il existe une suite (t_k) de telle sorte que $S'(t_k) \rightarrow 0$ et $\lim_{t_k \rightarrow \infty} S(t_k) = S_\infty$, ainsi

$$0 \geq \Lambda - \mu S_\infty - f(S_\infty, J^\infty),$$

grâce à (4.4), nous obtenons

$$0 \geq \Lambda - \mu S_\infty - L S_\infty,$$

alors,

$$S_\infty \geq \frac{\Lambda}{\mu + L}.$$

■

Pour le modèle (4.1), le taux de reproduction de base R_0 ([12]) est défini par

$$R_0 = \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right) \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} e^{-\int_0^a \gamma(\sigma) d\sigma} da. \quad (4.10)$$

Le modèle (4.6) a deux points d'équilibre, le point "sans maladie" qui existe toujours et le point "endémique" qui existe si et seulement si $R_0 > 1$.

4.1 Attracteur global compact

Cette section est consacrée à prouver l'existence d'un attracteur global compact pour les solutions de (4.1), nous choisissons l'espace $X = \mathbb{R}^+ \times Y$.

Il n'est pas difficile de montrer l'existence d'un semi-flot continu

$$\Phi(t, (S_0, \phi)) = (S(t), E_t(.)), \quad (4.11)$$

avec (S, E_t) sont des solutions du problème (4.6)-(4.7).

Théorème 4.1.1. *Le semi-flot Φ a un attracteur compact \mathbf{A} des ensembles bornés dans X .*

Démonstration. D'après la Proposition 4.0.1, le semi-flot Φ est un point de dissipatif. Nous cherchons à montrer que Φ est éventuellement borné et la régularité asymptotique de Φ pour appliquer le théorème 2.33([52], voir annexe). Ces deux propriétés sont vérifiées en utilisant les mêmes idées que dans la preuve du théorème 6.1([51]). ■

Le reste de cette section est consacrée à décrire certaines estimations pour les trajectoires totales bornées de notre système, qui sont des solutions de (4.1) - (4.7) définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ces solutions jouent un rôle important pour prouver la stabilité globale des équilibres.

4.1.1 Trajectoires totales

Nous considérons ϕ une Φ -trajectoire totale, $\phi(t) = (S(t), E_t(.))$, où $\phi(t+r) = \Phi(t, \phi(r))$, $t \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$. Alors, par un calcul direct, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ E'(t) = f(S(t), J(t)) - (\mu + \alpha)E(t), \\ J(t) = \alpha \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) E(t-a) da. \end{cases} \quad (4.12)$$

Le lemme suivant fournit certaines estimations utiles sur des trajectoires totales.

Lemme 4.1.1. *Pour tout $(S_0, \phi) \in \mathbf{A}$, nous avons*

$$S(t) + E(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \text{et } S(t) \geq \frac{\Lambda}{\mu + L}, \quad L \text{ est la constante de Lipschitz,}$$

$$\text{et } J(t) \leq \frac{\alpha \Lambda}{\mu} \|\beta\|,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Tout d'abord, en additionnant la première et la deuxième équation du système (4.12), nous trouvons

$$S'(t) + E'(t) \leq \Lambda - \mu(S(t) + E(t)), \quad (4.13)$$

en intégrant (4.13) pour $t \geq r$,

$$(S(t) + E(t))e^{\mu t} \leq (S(r) + E(r))e^{\mu r} + \frac{\Lambda}{\mu}(e^{\mu t} - e^{\mu r}),$$

quand $r \rightarrow -\infty$ nous avons

$$S(t) + E(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et aussi

$$J(t) = \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) \alpha E(t-a) da \leq \frac{\alpha \Lambda}{\mu^2} \|\beta\|.$$

D'après la première équation du système (4.12), et en appliquant la bornitude de J et (4.4), nous avons

$$\begin{aligned} S'(t) &\geq \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), \frac{\alpha A}{\mu^2} \|\beta\|), \\ &\geq \Lambda - \mu S(t) - LS(t). \end{aligned}$$

Il en découle alors que

$$S(t) \geq \frac{\Lambda}{\mu + L} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

■

4.2 Stabilité globale de l'équilibre "sans maladie"

Cette section est consacrée à prouver la stabilité globale de l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$.

Tout au long de cette section, nous supposons que la fonction $f(S, J)$ est concave par rapport à J .

Nous remarquons que le système (4.1) admet toujours un point d'équilibre sans maladie (DFE) $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$.

Théorème 4.2.1. *Si $R_0 \leq 1$. Alors l'équilibre sans maladie $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Nous définissons la fonction

$$\psi(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0) \int_a^\infty \beta(\sigma) e^{-\mu\sigma} F(\sigma) d\sigma.$$

Pour $(S_0, \phi) \in \mathbf{A}$, nous construisons la fonction de Lyapunov associée au modèle (4.12) $V(S_0, \phi) = V_1(S_0, \phi) + V_2(S_0, \phi) + \phi(0)$ avec

$$V_1(S_0, \phi) = S_0 - \int_{\frac{\Lambda}{\mu}}^{S_0} \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(\eta, J)} d\eta - \frac{\Lambda}{\mu},$$

et

$$V_2(S_0, \phi) = \int_0^\infty \psi(a) \phi(-a) da,$$

Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}$ Φ -trajectoire totale, $\Psi(t) = (S(t), E_t)$, $S(0) = S_0$ et $E_0 = \phi$, avec $(S(t), E_t)$ sont des solutions du problème (4.12).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(\Psi(t)) &= (1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}) (\Lambda - \mu S(t) - f(S(t), J(t))) \\ &= \mu (1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}) (\frac{\Lambda}{\mu} - S(t)) - f(S(t), J(t)) (1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V_2(\Psi(t)) &= \int_0^\infty \psi(a) \frac{d}{dt} E(t-a) da, \\
 &= - \int_0^\infty \psi(a) \frac{d}{da} E(t-a) da, \\
 &= \psi(0)E(t) + \int_0^\infty \psi'(a)E(t-a) da \\
 &= R_0(\mu + \alpha)E(t) - \alpha \frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0) \int_0^\infty \beta(a)e^{-\mu a} F(a)E(t-a) da.
 \end{aligned}$$

En ajoutant V_1' , V_2' , et $E'(t)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(\Psi(t)) &= \mu(1 - \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)}) (\frac{\Lambda}{\mu} - S(t)) - (1 - R_0)(\mu + \alpha)E(t) \\
 &+ f(S(t), J(t)) \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)} - \frac{\partial f(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)}{\partial J} J(t).
 \end{aligned}$$

Observons que les deux premiers termes de cette équation ci-dessus sont négatifs. Nous affirmons que, le troisième terme est également négatif. En effet, la concavité de f par rapport à J assure que

$$f(S, J) \leq J \frac{\partial f}{\partial J}(S, 0).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 f(S(t), J(t)) \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S(t), J)} - J(t) \frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0) &= f(S(t), J(t)) \frac{\frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)}{\frac{\partial f}{\partial J}(S(t), 0)} - J(t) \frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0), \\
 &= \frac{\frac{\partial f}{\partial J}(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)}{\frac{\partial f}{\partial J}(S(t), 0)} (f(S(t), J(t)) - J(t) \frac{\partial f}{\partial J}(S(t), 0)) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Notons que , $\frac{d}{dt} V(\Psi(t)) = 0$ implique que $S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$. Nous substituons ceci dans l'équation de S , nous obtenons $J(t) = 0$. En utilisant (4.12) nous obtenons facilement $E(t) = 0$. Ainsi le plus grand ensemble invariant avec la propriété $\frac{d}{dt} V(\Psi(t)) = 0$ est $\{\frac{\Lambda}{\mu}, 0\}$ (le principe de LaSalle). Par le Théorème 2.53 ([52], voir annexe), nous obtenons que l'attracteur \mathbf{A} est le singleton qui contient seulement l'équilibre sans maladie. Pour la stabilité locale du point sans maladie directement par le théorème 2.33 ([52], voir annexe).

4.3 Existence de l'équilibre endémique et persistance uniforme

Tout d'abord, nous assurons l'existence de l'équilibre positif et puis nous établissons que la persistance uniforme des solutions du problème (4.12).

Lemme 4.3.1. Soit $\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S, J)} > 1$ pour $S \in [0, \frac{\Lambda}{\mu})$. Donc, si $R_0 > 1$, le système (4.6) admet au moins un point d'équilibre endémique positif.

Démonstration. Un équilibre endémique est un point fixe du semi-flot Φ ,

$$\Phi(t, (S^*, E^*)) = (S^*, E^*), \text{ avec } E^* \neq 0, \forall t \geq 0.$$

avec S^*, E^* satisfont

$$\begin{cases} \Lambda - \mu S^* - f(S^*, J^*) = 0, \\ (\mu + \alpha)E^* = f(S^*, J^*), \\ J^* = \alpha E^* \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da. \end{cases} \quad (4.15)$$

En combinant les équations de (4.15), nous obtenons ,

$$\begin{cases} \Lambda = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ \bar{D} f(S^*, J^*) = J^*, \end{cases}$$

avec

$$\bar{D} := \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da. \quad (4.16)$$

Ces égalités définissent une ligne droite q_1 d'une pente négative et une courbe q_2 respectivement sur le plan SJ .

L'équation

$$\bar{D} f(S, J) - J = 0$$

définit également une fonction $S = h(J)$ (Par le théorème des fonction implicites (A.0.6)), la fonction $h(J)$ est continue pour tout $J > 0$, car la dérivée $\frac{\partial f(S, J)}{\partial S}$ est strictement positive .

Si $S_* = h(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, alors il existe au moins un point d'intersection entre la ligne q_1 et la courbe q_2

La fonction $f(S, J)$ croît de façon monotone par rapport à ses deux variables et $S_* = h(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ si

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{f(S, J)} = \lim_{J \rightarrow 0^+} \bar{D} \frac{f(\frac{\Lambda}{\mu}, J)}{J} = \bar{D} \frac{\partial f(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)}{\partial J} = R_0 > 1.$$

■

D'après la preuve d'existence de l'équilibre endémique, notre prochaine but est de prouver la persistance uniforme des solutions, il suffit d'utiliser le Théorème 5.2([52]).

A cet effet, nous commençons par émettre les hypothèses suivantes sur l'incidence f .

Nous supposons qu'il existe un équilibre positif (S^*, J^*) vérifiant (4.15) tel que pour tout $S > 0$,

$$\begin{cases} \frac{x}{J^*} < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < 1 \text{ pour } x < J^*, \\ 1 < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < \frac{x}{J^*} \text{ pour } x > J^*. \end{cases} \quad (4.17)$$

Il existe ϵ , tel que pour tout $S \in [S^o - \epsilon, S^o + \epsilon]$ nous avons

$$\frac{f(S, J_1)}{J_1} \geq \frac{f(S, J_2)}{J_2}, \quad (4.18)$$

pour tout $0 < J_1 \leq J_2$.

Finalement, nous supposons qu'il existe $a \leq 0$ tel que

$$\phi(a) > 0, \quad (4.19)$$

Remarque 4.3.1. Si la fonction f est différentiable et concave par rapport à J alors (4.17) et (4.18) sont clairement vérifiées.

Nous définissons la fonction de la persistance $\rho : \mathbb{R}^+ \times Y_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\rho(S_0, \phi) = E(0),$$

donc,

$$\rho(\Phi(t, x)) = E(t).$$

Le lemme suivant confirme l'hypothèse (H1) dans le théorème 5.2 ([52], voir annexe).

Lemme 4.3.2. Selon l'hypothèse (4.19), la fonction ρ est positive pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Tout d'abord, nous supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $E(t) = 0$ pour tout $t \leq r$.

Pour $t > r$ et après un changement de variable nous obtenons

$$\begin{aligned} (E(t)e^{(\mu+\alpha)t})' &= e^{(\mu+\alpha)t} f(S(t), \alpha) \int_{-\infty}^t \beta(t-\sigma) e^{-\mu(t-\sigma)} F(t-\sigma) E(\sigma) d\sigma, \\ &= e^{(\mu+\alpha)t} f(S(t), \alpha) \int_r^t \beta(t-\sigma) e^{-\mu(t-\sigma)} F(t-\sigma) E(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.4) et le lemme (4.1.1) nous avons,

$$(E(t)e^{(\mu+\alpha)t})' \leq L\alpha \frac{\Lambda}{\mu} e^{(\mu+\alpha)t} \int_r^t \beta(t-\sigma) e^{-\mu(t-\sigma)} F(t-\sigma) E(\sigma) d\sigma,$$

par le théorème de Fubini, nous trouvons

$$\begin{aligned} E(t)e^{(\mu+\alpha)t} &\leq L\alpha \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\| \int_r^t e^{(\mu+\alpha)\theta} \int_r^\theta e^{-\mu(t-\sigma)} E(\sigma) d\sigma d\theta \\ &\leq L\alpha \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\| \int_r^t e^{\mu\sigma} E(\sigma) \int_r^\theta e^{\alpha\theta} d\theta d\sigma, \end{aligned}$$

alors, par un calcul direct, nous obtenons

$$E(t) \leq L \frac{\Lambda}{\mu} \|\beta\| \int_r^t E(\sigma) d\sigma$$

Nous utilisons le lemme de Gronwall et l'hypothèse $E(r) = 0$, nous concluons que $E(t) = 0$ pour tout $t > r$; cela est une contradiction avec (4.19). Supposons qu'il existe une suite t_n telle que $t_n \rightarrow \infty$ et $E(t_n) > 0$. Nous posons $E_n(t) = E(t + t_n)$ et $S_n(t) = S(t + t_n)$. Alors, nous pouvons aisément montrer que

$$E_n(t)e^{(\mu+\alpha)t} \geq E_n(0) + \int_0^t e^{(\mu+\alpha)\theta} f\left(\frac{\Lambda}{\mu+L}, \int_{-\infty}^\theta \beta(\theta-\sigma) e^{-\mu(\theta-\sigma)} E_n(\sigma) d\sigma\right) d\theta,$$

comme $E_n(0) = E(t_n) > 0$ alors $E_n(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. Enfin, $t_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ alors

$$E(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

Appliquons le théorème 5.2. dans ([52], voir annexe) pour prouver que Φ est ρ - uniformément fortement persistant.

Théorème 4.3.1. *Nous supposons que (4.17), (4.18), (4.19) sont vérifiées. Donc il existe η tel que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} E(t) > \eta,$$

pour toutes les solutions non-négatives du système (4.6) à condition que $R_0 > 1$.

Démonstration. Nous supposons par l'absurde que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0,$$

et par suite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \alpha \beta(a) e^{-\mu a} F(a) E(t-a) da = 0.$$

Par la première équation de S dans (4.6) et pour t très grand nous obtenons

$$\begin{aligned} S'(t) &\geq \Lambda - \mu S(t) - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, J\right), \\ &\geq \Lambda - \mu S(t) - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right), \end{aligned}$$

par un calcul simple , nous avons

$$S(t) \geq \left(S_0 - \frac{\Lambda - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right)}{\mu}\right) e^{-\mu t} + \frac{\Lambda - f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right)}{\mu},$$

et alors

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon),$$

avec $\psi(\epsilon) = \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu}, \epsilon\right)}{\mu}$.

Nous avons aussi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

par conséquent, nous pouvons supposer que

$$|S(t) - \frac{\Lambda}{\mu}| < \psi(\epsilon), \quad t \geq T.$$

Pour $R_0 > 1$, alors pour ϵ très petit et t^* très grand nous avons

$$\frac{f(S^0 - \psi(\epsilon), \epsilon)}{(\mu + \alpha)\epsilon} \int_0^{t^*} \alpha \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da > 1.$$

Nous utilisons l'équation de $E(t)$,

$$\begin{aligned} E'(t) &= f(S(t), J(t)) - (\mu + \alpha)E(t), \\ &\geq f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), J(t)\right) - (\mu + \alpha)E(t), \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (4.18) et le fait que $J(t) < \epsilon$ pour t grand, nous avons

$$f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), J(t)\right) \geq \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} J(t),$$

donc

$$\begin{aligned} E'(t) &\geq \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} J(t) - (\mu + \alpha)E(t), \\ &\geq \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} \int_0^{t^*} \alpha \beta(a) e^{-\mu a} F(a) E(t-a) da - (\mu + \alpha)E(t). \end{aligned}$$

Si $E(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, alors $n(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, avec $n(t)$ la solution de

$$n'(t) = \frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} \int_0^{t^*} \alpha \beta(a) e^{-\mu a} F(a) n(t-a) da - (\mu + \alpha)n(t),$$

avec la condition initiale $n_0 = E_0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires pour les intégrales

nous avons pour tout t , l'existence de ξ_t tel que

$$\frac{f\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon\right)}{\epsilon} \int_0^{t^*} \alpha \beta(a) e^{-\mu a} F(a) n(t-a) da = n(\xi) \int_0^{t^*} \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da,$$

et $t - t^* \leq \xi \leq t$. Posons

$$w(t) = n(t) + (\mu + \alpha) \int_{\xi}^t n(\sigma) d\sigma,$$

nous calculons la dérivée de w par rapport à t , nous obtenons

$$\frac{d}{dt} w(t) = \left(\frac{f(\frac{\Lambda}{\mu} - \psi(\epsilon), \epsilon)}{\epsilon} - \alpha \int_0^{t^*} \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da \right) n(\xi) \geq 0.$$

Par conséquent, $w(t)$ tend vers l'infini ou approche d'une limite positive quand $t \rightarrow \infty$. D'autre part, par la définition de w , $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = 0$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, ce qui est une contradiction. ■

Soit X_0 le sous-ensemble de X définie par

$$X_0 = \{(S_0, \phi) \in X; \phi(a) = 0, \text{ pour tout } a \leq 0\},$$

D'après Théorème 5.7([52], voir annexe) nous avons le théorème suivant

Théorème 4.3.2. *Il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 qui attire toutes les solutions avec la condition initiale dans $X \setminus X_0$. De plus \mathbf{A}_1 est ρ -uniformément positif, i.e., il existe $\delta > 0$ tel que,*

$$E(t) \geq \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall (S_0, \phi) \in \mathbf{A}_1. \quad (4.20)$$

4.4 Stabilité globale et unicité de l'équilibre endémique

Dans cette section, nous discutons de la stabilité globale de l'équilibre endémique E^* du système (4.12).

Tout d'abord, nous avons besoin de l'estimation suivante qui garantit que toutes les solutions du problème (4.12) avec les conditions initiales satisfaisant (4.19), sont bornées loin de 0.

Corollaire 4.4.1. *Il existe $\bar{\delta} > 0$ tel que, pour tout $(S_0, \phi) \in \mathbf{A}_1$,*

$$J(t) := \alpha \int_0^{\infty} \beta(a) e^{-\mu a} F(a) E(t-a) da \geq \bar{\delta},$$

et

$$f(S(t), J(t)) \geq f\left(\frac{\Lambda}{\mu + L}, \bar{\delta}\right), \quad (4.21)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\bar{\delta} := \delta \alpha \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da$.

Démonstration.

Comme \mathbf{A}_1 est invariant, il existe une trajectoire totale $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$, $\Psi(t) = (S(t), E_t)$ avec $S(0) = S_0$ et $E_0(a) = \phi(a)$ pour $a \leq 0$. Par (4.20), pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons,

$$J(t) := \alpha \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) E(t-a) da \geq \delta \alpha \int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} F(a) da,$$

D'après le lemme 4.1.1, nous obtenons facilement (4.21). ■

Théorème 4.4.1. *Sous les hypothèses du théorème 4.3.2, l'équilibre endémique (S^*, E^*) est unique et globalement asymptotiquement stable dans \mathbf{A}_1 .*

Démonstration.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ une Φ -trajectoire totale $\Psi(t) = (S(t), E_t(\cdot))$, $S(0) = S_0$ et $E_0(\cdot) = \phi$, avec $(S(t), E_t(\cdot))$ est solution du problème (4.12). Nous définissons $g(x) = x - \ln(x) - 1$, et

$$\psi(a) = f(S^*, J^*) \int_a^\infty dm(\sigma), \text{ avec } dm(\sigma) = \frac{\beta(\sigma) e^{-\mu \sigma} F(\sigma)}{\bar{D}} d\sigma. \tag{4.22}$$

avec $\bar{D} := \int_0^\infty \beta(\sigma) e^{-\mu \sigma} F(\sigma) d\sigma$.

Notons que $\int_0^\infty dm(\sigma) = 1$.

Pour $(S_0, \phi) \in A_1$, Considérons la fonction de Lyapunov suivante $V(S_0, \phi) = V_1(S_0, \phi) + V_2(S_0, \phi) + E^* V_3(S_0, \phi)$ avec

$$V_1(S_0, \phi) = S_0 - \int_{S^*}^{S_0} \frac{f(S^*, J^*)}{f(\eta, J^*)} d\eta - S^*,$$

et

$$V_2(S_0, \phi) = \int_0^\infty \psi(a) g\left(\frac{\phi(-a)}{E^*}\right) da.$$

$$V_3(S_0, \phi) = g\left(\frac{\phi(0)}{E^*}\right),$$

nous calculons la dérivée de V_1 par rapport à t

$$\frac{d}{dt} V_1(\Psi(t)) = \mu \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (S^* - S(t)) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) f(S^*, J^*) - \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) f(S(t), J(t)). \tag{4.23}$$

Puis la dérivée de V_2 , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_2(\Psi(t)) &= g\left(\frac{E(t)}{E^*}\right)\psi(0) + \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right)\psi'(a) da, \\ &= f(S^*, J^*)g\left(\frac{E(t)}{E^*}\right) + \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right)\psi'(a) da, \end{aligned} \quad (4.24)$$

Enfin, la dérivée de V_3 ,

$$E^* V_3'(t) = \left(1 - \frac{E^*}{E(t)}\right)(f(S(t), J(t)) - (\mu + \alpha)E(t)), \quad (4.25)$$

en additionnant V_1' , V_2' et $E^* V_3'$ nous obtenons

$$\begin{aligned} V'(\Psi(t)) &= \mu\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right)(S^* - S(t)) + f(S^*, J^*)\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) \\ &\quad - f(S(t), J(t))\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) \\ &\quad + f(S^*, J^*)\left(\frac{E(t)}{E^*} - \ln \frac{E(t)}{E^*} - 1\right) + \left(1 - \frac{E^*}{E(t)}\right)f(S(t), J(t)) \\ &\quad - (\mu + \alpha)E(t)\left(1 - \frac{E^*}{E(t)}\right) + \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right)\psi'(a) da. \end{aligned} \quad (4.26)$$

D'après $(\mu + \alpha)E^* = f(S^*, J^*)$, alors l'équation (4.26) devient

$$\begin{aligned} V'(\Psi(t)) &= \mu\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right)(S^* - S(t)) + f(S(t), J(t))\frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} + \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right)\psi'(a) da \\ &\quad + f(S^*, J^*)\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) - f(S^*, J^*)\ln \frac{E(t)}{E^*} - \frac{E^*}{E(t)}f(S(t), J(t)). \end{aligned}$$

En ajoutant et en soustrayant le terme

$$f(S^*, J^*)\left(\ln \frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} + 1\right),$$

et en utilisant la définition de la fonction g nous obtenons

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &= \mu \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (S^* - S(t)) + \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right) \psi'(a) da + f(S^*, J^*) g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(\ln \frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} - \ln \frac{E(t)}{E^*} - \frac{E^* f(S(t), J(t))}{E(t) f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} + 2 \right),
 \end{aligned}$$

à partir de cela et du fait que

$$\ln \frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} = \ln \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} + \ln \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)},$$

nous avons,

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &= \mu \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (S^* - S(t)) + \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right) \psi'(a) da + f(S^*, J^*) g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(\ln \frac{E^* f(S(t), J(t))}{E(t) f(S^*, J^*)} - \frac{E^* f(S(t), J(t))}{E(t) f(S^*, J^*)} + \ln \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} + 2 \right),
 \end{aligned}$$

par conséquent, en raison de la définition de ψ ,

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &= \mu \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (S^* - S(t)) + f(S^*, J^*) \left(g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right) dm(a) da \right) \\
 &- f(S^*, J^*) \left\{ g\left(\frac{E^* f(S(t), J(t))}{E(t) f(S^*, J^*)}\right) + g\left(\frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Comme la fonction f est non-décroissante par rapport à S , le premier terme est négatif. Nous posons

$$X = g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - \int_0^\infty g\left(\frac{E(t-a)}{E^*}\right) dm(a),$$

par la convexité de g , et par l'inégalité de Jensen ([34], [57], voir annexe) nous obtenons

$$X \leq g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - g\left(\int_0^\infty \frac{E(t-a)}{E^*} dm(a)\right),$$

d'après la définition de $dm(a)$ et J ,

$$X \leq g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - g\left(\frac{J(t)}{J^*}\right).$$

Nous considérons le temps t où $Z := \frac{J(t)}{J^*} < 1$;

par l'hypothèse (4.17) nous obtenons

$$\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} \geq \frac{J(t)}{J^*}.$$

Ainsi, à partir de $g(1) = 0$, g est décroissante sur $(0, 1)$, et f est non-décroissante par rapport à J nous obtenons,

$$g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) \leq g\left(\frac{J(t)}{J^*}\right),$$

* et donc $X \leq 0$.

Pour les autres valeurs de t , i.e. $Z > 1$, à nouveau à partir de (4.17), nous avons

$$\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)} \leq \frac{J(t)}{J^*}.$$

et ainsi (g est croissante dans $(1, \infty)$)

$$g\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) \leq g\left(\frac{J(t)}{J^*}\right).$$

Par conséquent, nous obtenons que $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Notons que $\frac{d}{dt} V(\Psi(t)) = 0$ implique que $S(t) = S^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$g\left(\frac{f(S(t), J(t))E^*}{f(S(t), J^*)E(t)}\right) = 0.$$

donc

$$f(S^*, J(t))E^* = f(S^*, J^*)E(t). \quad (4.27)$$

En utilisant l'équation de S dans (4.12) nous obtenons

$$\Lambda - \mu S^* = f(S^*, J(t)), \quad (4.28)$$

d'après (4.28) et (4.15) nous avons

$$f(S^*, J(t)) = f(S^*, J^*),$$

alors $J(t) = J^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En substituant ce résultat dans (4.27), nous trouvons

$$E(t) = E^*, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le théorème 2.53([52], voir annexe), nous concluons que $\mathbf{A}_1 = \{E^*\}$, il est à noter que le théorème précédent n'utilise pas que l'équilibre endémique est localement stable, en effet, par le théorème 5.7([52], voir annexe), nous obtenons la stabilité locale de l'équilibre endémique. L'unicité est une conséquence directe du fait que $\frac{d}{dt}V(\psi(t)) = 0$ implique seulement le point $S = S^*$. ■

Annexe A

Généralités sur les systèmes dynamiques

La modélisation épidémiologique conduit à l'analyse des systèmes dynamiques. Ces systèmes pouvant être différentiels, discrets ou à dérivées partielles. Les systèmes différentiels étudiés dans cette thèse sont non linéaires. Nous allons présenter la plupart des résultats qui ont été utilisés dans ce travail. Ces résultats sont classiques, ainsi les notions de système dynamique, de stabilité des solutions d'un système dynamique.

Définition A.0.1 (Flot). *Le flot, coulée ou encore courant est un concept utilisé en géométrie différentielle. Il est associé à la notion de champ de vecteurs, c'est-à-dire à une application f , qui, à un point x d'un ouvert Ω d'un espace de Banach E , associe un vecteur de E . Un tel champ définit une équation différentielle du type $\Phi'(t) = f(\Phi(t))$. Si la fonction f est localement lipschitzienne, pour chaque point x de U , il existe un intervalle réel maximal et une fonction α_x , définie sur l'intervalle maximal, la solution avec la condition dite de Cauchy $\alpha_x(0) = x$. Vue comme une fonction de deux variables, t et x , l'application α est appelée le flot du champ f de vecteurs.*

Définition A.0.2. *Un flot sur \mathbb{R}^n est une application continue*

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x) \rightarrow \Phi(t, x),$$

vérifiant :

1. $\Phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$,
2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$, pour $t, s \in \mathbb{R}$.

Définition A.0.3 (Semi-flot associé à EDO). *On appelle le semi-flot de l'équation différentielle $x'(t) =$*

$f(x(t))$ à un instant t , l'application $(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n : \Phi(t, (t_0, x_0))$, avec $\Phi_t(x_0)$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi_t(x_0) = f(\Phi_t(x_0)), \\ \Phi_{t_0}(x_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition A.0.4 (Ensemble limite). Soit x un point dont la courbe intégrale maximale est définie sur \mathbb{R} . L'ensemble ω -limite de x , noté $\omega(x)$ est l'intersection des adhérences des sections finissantes de l'image de la courbe intégrale maximale vérifiant la condition de Cauchy $\Phi(0, x) = x$.

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(s, x) \mid s \geq t}.$$

Cet ensemble est encore invariant par le flot, il correspond à la zone limite parcourue par la trajectoire si t devient très grand.

La même définition s'applique dans le cas où t devient très petit, on parle d'ensemble α -limite.

$$\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\Phi(s, x) \mid s \geq t}.$$

Définition A.0.5 (Fonction contractante). f est dite contractante (ou une contraction) s'il existe une constante k telle que,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|, \quad k \in (0, 1).$$

Définition A.0.6 (Théorème de point fixe). Toute application contractante d'un espace de Banach dans lui-même admet un unique point fixe.

Définition A.0.7 (Bassin d'attraction d'un point d'équilibre). Soit x^* est un point d'équilibre du système $x'(t) = f(x(t))$.

— On appelle **bassin d'attraction** d'un point x^* l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t, x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

— On appelle **bassin de répulsion** d'un point x^* , l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que pour

tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t, x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

Soit X espace de phases associé à $\Phi(t, x)$ tel que $\Phi(t, x) : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$,

- Définition A.0.8 (Trajectoire, orbite).** — La fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ est appelée une trajectoire totale (de Φ), si $\phi(t+r) = \Phi(t, \phi(r))$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $r \in \mathbb{R}$.
- L'orbite associée à une trajectoire totale est définie par : $\{\Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$.
- L'orbite d'un point x de K est dite périodique si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe $T \in \mathbb{R}^+$ tel que $\Phi(t+T, x) = \Phi(t, x)$ pour tout $t \geq 0$. On dit alors que T est la période de l'orbite périodique considérée.
- Si Φ est induite par la solution de $x'(t) = f(x)$, la trajectoire totale est la solution x sur \mathbb{R} avec $x(t_0) = x_0$.

Définition A.0.9 (Ensemble absorbant). Supposons que le système $x'(t) = f(x(t))$ admet des solutions de classe C^1 et que K est un ouvert de \mathbb{R} . Un sous ensemble D de K est dit absorbant si tout sous ensemble borné D_1 de K satisfait $\Phi(t, D_1) \subset D$ pour tout temps t suffisamment grand. De même, D est dit absorbant lorsque pour toute condition initiale x_0 , il existe $T \geq 0$ tel que $\Phi_t(x_0) \in D$ pour tout $t > T$.

Définition A.0.10 (Ensemble invariant). Un sous ensemble D de K est dit positivement (respectivement négativement) invariant à l'équation $x'(t) = f(x(t))$ si $\Phi(t, D) \subset D$ pour tout $t > 0$ (respectivement $t < 0$). D est un ensemble invariant si seulement si $\Phi(x, D) = D$ pour tout t .

Définition A.0.11 (Point fixe). Un point x^* est appelé un point fixe du semi-flot Φ , si $\Phi_t(x^*) = x^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Définition A.0.12 (Attracteur compact). Soit (X, d) un espace métrique et $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ le semi-flot associé au système $x'(t) = f(x(t))$. K est appelé un attracteur de M , si K est invariant et attire M . K est appelée un attracteur compact de M si K en plus est compact.

Définition A.0.13 (compacité). Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ une application, $M \subset X$. L'application Φ est appelée asymptotiquement compacte sur M , si pour tout les suites (t_i) dans \mathbb{R}^+ , $(t_i) \rightarrow \infty$ quand $i \rightarrow \infty$, et (x_i) dans M , $(\Phi(t_i, x_i))$ admet une sous suite convergente.

Définition A.0.14 (Dissipatif, asymptotiquement régulier, éventuellement borné). Soit $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu.

- Φ est appelé un point **dissipatif** s'il existe un sous ensemble B de X qui attire tout les points dans X .
- Φ est appelé **asymptotiquement régulier** si Φ est asymptotiquement compact sur chaque ensemble positivement invariant borné fermé.
- Φ est appelé **éventuellement borné** sur un ensemble $M \subset X$ si $\Phi(J_r \times M)$, $J_r = J \cap [r, \infty)$, est borné pour $r \in J_r$.

A.0.1 Théorème d'existence de solution faible

Soit le modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x, S(t))n(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \geq 0, \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t))n(t, x) dx, \\ n(0, \cdot) = n_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Nous définissons la solution faible (au sens de distribution) comme suit :

Définition A.0.15. Une fonction $n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ satisfait l'équation de renouvellement (A.1) au sens faible si $\int_0^\infty B(x, S(t)) |n(t, x)| dx \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ et pour toutes fonctions test $\psi \in C^1_c([0, T] \times [0, \infty))$ sachant que $\psi(T, x) \equiv 0$, on a :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^\infty n(t, x) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x) - d(x, S(t))\psi(t, x) \right\} dx dt \\ & = \int_0^\infty n_0(x)\psi(0, x) dx + \int_0^T \psi(t, 0) \int_0^\infty B(x, S(t))n(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Théorème A.0.1. Soit $M > 0$ tel que $B(\cdot, \cdot), d(\cdot, \cdot) < M$, $S(t) \geq 0$, $n_0 \in L^\infty(0, \infty) \cap L^1(0, \infty)$. Alors il existe une solution unique et faible $n \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^+))$ du problème (A.1), et en plus $n(t, x) \geq 0$ quand $n_0 \geq 0$, et

$$\int_0^\infty |n(t, x)| \leq e^{\|(B-d)_+\|_\infty t} \int_0^\infty |n_0(x)| dx.$$

Démonstration.

Tout d'abord, nous choisissons la solution dans l'espace :

$$E = C([0, T], L^1(\mathbb{R}^+)) \quad \forall T > 0,$$

avec la norme associée à E est

$$\|u\|_E = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}, \quad \forall u \in E,$$

nous définissons l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} \Gamma: E_+ &\longrightarrow E_+ \\ m &\longmapsto n, \end{aligned}$$

avec n est la solution du problème (A.1).

Nous montrons que l'opérateur est contractant.

Soit n_1 et n_2 des solutions associées respectivement à m_1 et m_2 , posons $n = n_1 - n_2$ et $m = m_1 - m_2$.

Nous obtenons le système suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} n(t, x) + d(x, S(t))n(t, x) = 0, \\ n(t, 0) = \int_0^\infty B(x, S(t))m(t, x)dx, \\ n(0, x) = 0. \end{cases}$$

Donc $|n(t, x)|$ satisfait,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} |n(t, x)| + \frac{\partial}{\partial x} |n(t, x)| + d(x, S(t))|n(t, x)| = 0, \quad (1) \\ |n(t, 0)| = \left| \int_0^\infty B(x, S(t))m(t, x)dx \right|, \\ n(0, x) = 0. \end{cases}$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à x alors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty |n(t, x)| dx &= - \int_0^\infty d(x, S(t))n(t, x)dx + |n(t, 0)|, \\ &\leq |n(t, 0)|. \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière inégalité par rapport à t ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |n(t, x)| dx &\leq \int_0^t |n(s, 0)| ds, \\ &\leq \int_0^t |B(x, S(s))m(s, x)dx| ds, \\ &\leq MT \|m\|_E. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir T petit, de telle sorte que $MT < 1$ et par suite l'opérateur Γ est contractant.

Le théorème du Banach assure l'existence d'un point fixe unique sur $[0, T]$, nous appliquons la

même procédure entre les intervalles $[kT, (k+1)T]$ puisque la condition sur T ne dépend pas de l'itération, nous avons une solution globale n positive pour chaque m positive .

En intégrant l'équation (1) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty |n(t, x)| dx - |n(t, 0)| &= - \int_0^\infty d(x, S(t)) |n(t, x)| dx, \\ &\leq |n(t, 0)| - \int_0^\infty d(x, S(t)) |n(t, x)| dx, \\ &\leq \int_0^\infty B(x, S(t)) |n(t, x)| dx - \int_0^\infty d(x, S(t)) |n(t, x)| dx, \\ &\leq \int_0^\infty [B(x, S(t)) - d(x, S(t))] |n(t, x)| dx, \\ &\leq \Lambda \int_0^\infty |n(t, x)| dx, \end{aligned}$$

avec $\Lambda = \|(B - d)_+\|$.

Par le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$\int_0^\infty |n(t, x)| \leq e^{\Lambda t} \int_0^\infty |n_0(x)| dx.$$

■

A.0.2 La notion de persistance

Soit X un ensemble non vide et $\rho : X \rightarrow R^+$ et soit J un ensemble de temps.

Définition A.0.16 (la persistance faible). *Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ - faiblement persistant , si*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition A.0.17 (la persistance forte). *Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement persistant, si*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition A.0.18 (ρ -uniformément faiblement persistant). *Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -uniformément faiblement persistant, s'il existe ϵ tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition A.0.19 (ρ -uniformément fortement persistante). *Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé*

ρ -fortement uniformément persistant, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition A.0.20. *Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -fortement dissipatif, s'il existe $c > 0$ tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > c \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition A.0.21 (ρ -faiblement dissipatif). *Le semi-flot $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est appelé ρ -faiblement dissipatif, s'il existe $c > 0$ tel que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > c \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

A.0.3 Théorèmes les plus utilisés dans cette thèse

Théorème A.0.2 (Inégalité de Jensen). *Soient $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables, avec Ω est ouvert de \mathbb{R}^n .*

Nous supposons :

$g \geq 0$ p.p. sur Ω , $\int_{\Omega} g(x) dx = 1$, $f g$ et $H(f)g \in L^1(\Omega)$, nous avons

$$H\left(\int_{\Omega} f(x)g(x) dx\right) \leq \int_{\Omega} H(f(x))g(x) dx.$$

Théorème A.0.3 (Inégalité de Gronwall). *Soit f, g, k sont des fonctions continues à valeurs positives tels que :*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\sigma)f(\sigma) d\sigma, \quad \forall t \in [a, b],$$

alors

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t g(\sigma)k(\sigma) \exp\left(\int_s^t k(\tau) d\tau\right) d\sigma, \quad \forall t \in [a, b].$$

Théorème A.0.4 (Méthode de fluctuation, [52]). *Soit $f : [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée et différentielle. Alors il existe des suites $(t_k), (s_k)$ telles que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(s_k) \rightarrow f_{\infty}, & f'(s_k) \rightarrow 0 \\ f(t_k) \rightarrow f^{\infty}, & f'(t_k) \rightarrow 0 \end{array} \right\} k \rightarrow \infty$$

Théorème A.0.5 (Corollaire B.6, [52]). Soient w, g des fonctions non-négatives et localement intégrables

$$w(t) \geq \int_0^t k(\sigma) w(t - \sigma) d\sigma + g(t).$$

Supposons que k est une fonction strictement positive, alors il existe une constante $b > 0$ qui ne dépend que k , telle que $w(t) > 0$ pour tout $t > b$ avec $\int_0^{t-b} g(s) ds$.

En particulier, si g est continue à 0 et $g(0) > 0$, alors $w(t) > 0$ pour tout $t > b$.

Théorème A.0.6 (Théorème des fonctions implicites "version local"). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k ($k \geq 1$), soit $(x^*, y^*) \in U$ tel que $f(x^*, y^*) = c$ si $D_y f(x^*, y^*)$ est inversible, alors il existe un ouvert V de U et une fonction $\psi : V \rightarrow V$ unique de classe C^k , telle que $f(x, \psi(x)) = c \forall x \in V$.

Théorème A.0.7 (théorème 2.33, [52]). les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un attracteur compact des ensembles bornés .
2. Φ est un point dissipatif, asymptotiquement régulier, et éventuellement borné sur chaque ensemble borné dans X .

Théorème A.0.8 (Théorème 2.39 [52]). Soit Φ un semi-flot continu, et A est un sous ensemble compact positivement invariant de X qui attire tous les sous ensembles compacts de voisinage de lui-même (i.e. un attracteur local des ensembles compacts). Alors A est stable.

Théorème A.0.9 (Théorème 2.46 [52]). Soit X un sous ensemble fermé de l'espace de Banach E , J un ensemble de temps et $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu. Alors Φ est asymptotiquement régulier s'il y a des applications $\Psi, \Theta : J \times X \rightarrow X$ telles que

$$\Phi(t, x) = \Theta(t, x) + \Psi(t, x),$$

et les affirmations suivantes sont vérifiées pour n'importe quel ensemble C borné fermé :

1. $\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam } \Theta_t(C) = 0$,
2. il y a quelque r_C tel que $\Psi(C)$ a fermeture compacte pour tout $t \in J$, $t \geq r_C$.

le résultat suivant prend le rôle du théorème de Lasalle.

Théorème A.0.10 (Théorème 2.53 [52]). Soit $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu, A un ensemble invariant et compact dans X , et soit $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue. Supposons que ; pour toute trajectoire totale $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que $V(\phi(t))' \leq 0$ ou $V(\phi(t))'_+ \leq 0$ sur \mathbb{R} . En outre, supposons que $\tilde{A} \subset A$, V est constante sur \tilde{A} et que $\phi(\mathbb{R}) \subset \tilde{A}$ pour n'importe quelle Φ -trajectoire totale avec $V(\phi(t))' \equiv 0$.

Alors $A = \tilde{A}$.

Théorème A.0.11 (Théorèmes 5.1 ;5.2 [52]). Soit X un espace métrique. Supposons que $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu, $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et non nulle.

Nous supposons

(H0) Φ a un attracteur compact A des ensembles bornés.

(H1) il n'y a pas de trajectoire totale $\phi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour $r, t \in J$.

Nous posons,

$$X_0 = \{x \in X; \forall x t \in J : \rho(\Phi(t, x)) = 0\},$$

1. Si $X_0 = \emptyset$, alors $\rho(x) > 0$ pour tout $x \in A$ et il existe $\eta > 0$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) \geq \eta$ pour tout $x \in X$.
2. Si $X_0 \neq \emptyset$, et $\rho \circ \phi$ est continue et Φ est ρ -uniformément faiblement persistant, alors Φ est ρ -uniformément fortement persistant.

Théorème A.0.12 (Théorème 5.7 [52]). Supposons que $X_0 \neq \emptyset$, $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ est ρ -uniformément fortement persistant, $\rho(\Phi)$ est continue, et

(H1) il n'y a pas de trajectoire totale $\phi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour quelque $r, t \in J$.

Alors l'attracteur A est l'union disjointe

$$A = A_0 \cup C \cup A_1$$

de trois ensembles A_0 , C et A_1 . A_0 et A_1 sont des ensembles compacts et nous avons les affirmations suivantes.

- a. $A_0 = A \cap X_0$ est l'attracteur compact de sous ensembles de X_0 , c'est-à-dire, tout sous ensemble compact K de X_0 a un voisinage dans X_0 qui est attiré par A_0 .

b. A_1 est ρ -uniformément positif et A_1 est l'attracteur compact de voisinage des ensembles compacts dans $X \setminus X_0$ et Φ est ρ -uniformément positif. En particulier, A_1 est stable.

c. Si $x \in X \setminus A_1$ et ϕ est une trajectoire totale, alors $\phi(t) \rightarrow A_0$ pour $t \rightarrow -\infty$.

Si $x \in X \setminus A_0$ et ϕ est une trajectoire totale, alors $\phi(t) \rightarrow A_1$ pour $t \rightarrow +\infty$.

En particulier, l'ensemble C contient ces points $x \in A$ tel qu'il existe une trajectoire totale $\phi(t)$ avec $\phi(-t) \rightarrow A_0$ et $\phi(t) \rightarrow A_1$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Théorème A.0.13 (Le critère de Fréchet-Kolmogorov [52]). Soit K est un sous ensemble de $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$. Alors K a fermeture compacte si seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

i) $\sup_{t \in K} \int_0^\infty |f(a)|^p da < \infty$,

ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^\infty |f(a)|^p \rightarrow 0$ uniformément dans $f \in K$,

iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty |f(a+h) - f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément dans $f \in K$,

iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h |f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément dans $f \in K$.

A.1 Notion de stabilité et point d'équilibre

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{A.2}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Soit x^* un point d'équilibre de l'équation (A.2).

Définition A.1.1 (Stabilité d'un point d'équilibre). Soit $x^* \geq 0$ un point d'équilibre du système (A.2). On dit que x^* est un point d'équilibre stable pour (A.2). ou que le système (A.2) est stable en x_0 si pour tout ϵ positif, il existe un nombre réel positif δ tel que pour tout $x \in X$ avec $\|x(0) - x^*\| < \delta$, la solution $\Phi(t, x_0) = x(t)$

Si de plus il existe δ_0 tel que $0 < \delta_0 \leq \delta$ et

$$\|x(0) - x^*\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x = x^*,$$

x^* est dit asymptotiquement stable.

Le système est dit instable en x^* s'il n'est pas stable en x^* .

Définition A.1.2 (Point d'équilibre attractif). — Le point d'équilibre x^* est dit attractif (on dira aussi que le système (A.2) est attractif en x^*) s'il existe un voisinage D de x^* tel que pour toute condition initiale x commençant dans D , la solution correspondante $\Phi_t(x)$ du système (A.2) est définie pour tout $t \geq 0$ et tend vers x^* lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x^*$$

pour toute condition initiale $x \in D$;

— le point x^* est dit globalement attractif si $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x^*$ pour toute condition initiale $x \in X$.

Définition A.1.3. ([14]) L'équilibre x^* de (A.2) est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et globale attractive .

Définition A.1.4 (équilibre globalement asymptotiquement stable). Soit x^* un point d'équilibre du système (A.2). Ce système est dit globalement asymptotiquement stable en x^* dans X s'il est à la fois stable, attractif et son bassin d'attraction est X tout entier.

Cas d'un système linéaire

Considérons le système linéaire

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{A.3}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (avec $s = 1, \dots, n$) les valeurs propres de la matrice A et x^* le point d'équilibre du système linéaire (A.3).

Théorème A.1.1. ([9])

- (i) Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement positives alors l'équilibre x^* est stable.
- (ii) Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives alors l'équilibre x^* est instable.

Considérons le système (A.2), on note par $J_f(x^*) := \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$, la matrice jacobienne de f évaluée au point x^* .

Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \tag{A.4}$$

où $A = J_f(x^*)$ s'appelle le linéarisé ou l'approximation linéaire du système non linéaire (A.2) en x^* .

L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre x^* de (A.2). Plus précisément on a.

Théorème A.1.2. ([9])

1. Si $x = 0$ est stable (c'est à dire si toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative) pour (A.4) alors x^* l'est pour (A.2).
2. Si $x = 0$ est instable (c'est à dire qu'il existe au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive) pour (A.4) alors x^* est instable pour (A.2).
3. Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^* pour (A.2).

A.2 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov

Définition A.2.1. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ,

1. V est dite définie positive si :
 - (i) $V(0) = 0$, et
 - (ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.
2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.
3. V est dite semi-définie positive si :
 - (i) $V(0) = 0$, et
 - (ii) $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$.
4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

Théorème A.2.1 (Stabilité au sens de Lyapunov). Soit $x(t)$ solution de $\dot{x} = f(x)$

et soit V une fonction de classe C^1 définie positive sur Ω un voisinage de $x^* = 0$ (sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine)

- (i) Si $\frac{dV}{dt}$ est semi-définie négative alors x^* est stable.

(ii) Si $\frac{dV}{dt}$ est définie négative alors x^* est asymptotiquement stable.

Dans le cas (i) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (ii) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov stricte.

Théorème A.2.2 (Théorème d'invariance de LaSalle, [49]). Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n , supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (A.2) en x^* . Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (A.2) en x^* telle que :

— $\dot{V} \leq 0$ sur Ω .

— Soit $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ et L est le plus grand ensemble invariant par Φ et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans E tend vers l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini. Ce théorème est un outils très important pour l'analyse des systèmes ; à la différence de Lyapunov, il n'exige ni de la fonction V d'être définie positive, ni de sa dérivée \dot{V} d'être négative. Cependant, il fournit seulement des informations sur l'attractivité du système considéré au point d'équilibre x^* . Par exemple, il ne peut être utilisé pour prouver que les solutions tendent vers un point d'équilibre que lorsque l'ensemble L est réduit à ce point d'équilibre. Il n'indique pas si ce point d'équilibre est stable ou pas. Lorsqu'on veut établir la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre x^* de Ω , on utilise le corollaire suivant qui est une conséquence du principe d'invariance de LaSalle.

Corollaire A.2.1 (Lasalle, [37]). Supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe tel que $x^* \in \Omega$.

Soit V une fonction définie positive et de classe C^1 telle que $\dot{V} \leq 0$ sur U . Soit $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$; supposons que L le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E est réduit au point x^* . Alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (A.2).

Si ces conditions sont satisfaites pour $U = \Omega$ si de plus V est propre sur Ω , c'est à dire si $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$, alors toutes les trajectoires sont bornées pour tout $t \geq 0$. x^* est un point d'équilibre globalement stable pour le système (A.2).

Corollaire A.2.2. Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point x^* , alors x^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (A.2) défini sur Ω .

Bibliographie

- [1] R.M. Anderson, W.May , Infectious Diseases of Humans : Dynamics and control Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.
- [2] E.Beretta, Y.Takeuchi : Global stability of a SIR epidemic model with time delays. J. Math. Biol, 33, 1995, 250-260.
- [3] D. Bernoulli, Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causee par la petite vérole, Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sci., Paris, 1 (1766).
- [4] D. Bichara, étude de modèles épidémiologiques :Stabilité, observation et estimation de paramètres, Thèse de doctorat 2013.
- [5] F.Brauer, C. Castillo-Chavez, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer, New York, 2000.
- [6] F.Brauer, P.Van den Driessche, et J.Wu , : Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Math., Vol 1945, Springer, Berlin , 2008.
- [7] F.Brauer , Z.Shuai , P.Van den Driessche : Dynamics of an age of infection cholera model. Math Bioscience and Engineering, V 10, N 5 and 6, 2013 pp 1335-1349.
- [8] F.Brauer, C.Castillo-Chavez, : Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer, New York, 2000.
- [9] T.A.Burton, Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations, Academic Press, inc, 1985
- [10] V.Capasso ,G. Sergio : A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model. Math. Biosci, 42, 1978, 43-61.

- [11] C.Castillo-Chavez , H.W.Hethcote , V.Andreasen , , S.A. Levin, and W.M.Liu : Epidemiological models with age structure, proportionate mixing and cross-immunity, : *J.Math.Biol.*27 (1989) pp 240-260.
- [12] O. Diekmann , J.A.P.Heesterbeek : *Mathematical epidemiology of infectious diseases : Model building, analysis and interpretation*, : Wiley, Chichester, UK, 2000.
- [13] K.Dietz , J.Heesterbeek, Daniel Bernoulli epidemiological model revisited, *Math. Biosci.*, 180 (2002), pp. 1,21.
- [14] J.A.Dieudonné, *Eléments d'analyse. Tome I. Fondements de l'analyse moderne. 3ème édition.* Paris Gauthier-Villars 1979.
- [15] N.Dunford, J.T.Schwartz : *Linear operators : Interscience Publishers, New York* 1971.
- [16] Z.Feng, H.R.Thieme : Endemic Models With Arbitrarily Distributed Periods of Infection I : Fundamental Properties of The Model. *SIAM J.APPL.MATH.* VOL.61, No.3, 2000, pp.803-833.
- [17] Z.Feng, H.R.Thieme : Endemic Models With Arbitrarily Distributed Periods of Infection II : Fast disease dynamics and permanent recovery. *SIAM J.APPL.MATH.* VOL.61, No.3, 2000, pp.983-1012.
- [18] B.S.Goh, Global stability in many species systems , *Amer . Nat.* 111 (1977), 135-142.
- [19] J. Hale, SM. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, *Applied Mathematical Sciences* 99, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [20] J.Hale , P.Waltman : Persistence in infinite dimensional systems. *SIAM J. Math. Anal.* 20, 1989, 388-395.
- [21] J.K.Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems* , American Mathematical Society , 1988.
- [22] G.Huang, Y.Takeuchi , W.Ma , D.Wei : Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate. *Bull Math Biol*, 72, 2010, 1192-1207.
- [23] G.Huang , Y.Takeuchi : Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence. *J. Math. Biol*, 63, 2011, 125-139.
- [24] G.Huang , E.Beretta , Y.Takeuchi : Global stability for epidemic model with constant latency and infectious periods. *Math. Biosciences Eng.* 9, No 2, 2012, 297-312.

-
- [25] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age-structured Population Dynamics* Giardini editori e stampatori, Pisa, 1995.
- [26] H. Inaba, Threshold and stability results for an age-structured epidemic model *J. Math. Biol.* 28 (1990) 411-434.
- [27] A.Korobeinikov : A. Global Properties of Infectious Disease Models with Nonlinear Incidence. *Bull Math Biol*, 69, 2007, 1871-1886.
- [28] A.Korobeinikov , P.K.Maini : Nonlinear incidence and stability of infectious disease models. *Math Med Biol*, 22, 2005, 113-128.
- [29] A.Korobeinikov : Lyapunov functions and global stability for SIR and SIRS epidemiological models with non-linear transmission. *Bull Math Biol*, 68, 2006, 615-626.
- [30] A.Korobeinikov , G.C.Wake , Lyapunov functions and global stability for SIR,SIRS, and SIS epidemiological models, *Appl.Math.Lett.*15(2002)955-960.
- [31] Y.Kuang ,*Delay Defferential Equation With Application in population Dynamics*, Academic Press ,NewYork ,1993,pp.67-70.
- [32] M. Y. Li, J. S. Muldowney, Global stability for the SEIR model in epidemiology, *Math. Biosci.*, 125(2) 155-164, 1995.
- [33] M.Y. Li, J. S. Muldowney, and P. van den Driessche, Global stability of SEIRS models in epidemiology. *Canad. Appl. Math. Quart.*, 7(4) :409-425, 1999.
- [34] E.H.Lieb, M.Loss, :*Analysis : Graduate Studies in Mathematics*, V. 14, 2001.
- [35] W.O.Kermack , A.G.McKendrick , A contribution to the mathematical theory of epidemics Part II *Proc. R. Soc. Lond. (A)* 138 (1932) 55-83.
- [36] Y.Kuang, *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics in Science and Engeneering*, Academic press, New York, 1993.
- [37] J.P.LaSalle, *The stability of dynamical systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976.
- [38] J.P.LaSalle, *The stability of dynamical systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix : Limiting equations and stability of nonauto-

- nomous ordinary differential equations by Z. Artstein, Regional Conference Series in Applied Mathematics.
- [39] W.Ma, M.Song, Y.Takeuchi, : Global stability of an SIR epidemic model with time delay. Appl. Math. Lett. 17, 2004, 1141-1145.
- [40] P.Magal, C.C.McCluskey, G.F.Webb : Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model. Applicable Anal, 89, No 7, 2010, 1109-1140.
- [41] P.Magal, X.Q.Zhao : Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems. SIAM J. Math. Anal., 37 (2005), 251-275.
- [42] C.C.McCluskey, Complete global stability for a SIR epidemic model with delay-distributed or discrete. Nonlinear Anal, 11,2010,55-59.
- [43] C.C.McCluskey, Global stability for an SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay. Math. Biosci. Eng. 6, 2009,603-610.
- [44] C.C.McCluskey, Global stability for an SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence. Math. Biosci. Eng. 7, 2010 837-850.
- [45] D.Moulay, Modélisation et analyse mathématique de systèmes dynamiques en épidémiologie. Application au cas du Chikungunya.Thèse de doctorat 2011.
- [46] A.Otto, étude quelques modèles épidémiologiques par les méthodes du calcul formel. Thèse de doctorat 2009.
- [47] B.Perthame, Transport Equations in Biology. Birkhauser, Berlin, 2007.
- [48] B.Perthame, S.K.Tumuluri, Nonlinear Renewal Equations. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology 2008, pp 1-32.
- [49] H. Reinhard, équation différentielles Fondement et applications,1982, BORDAS.
- [50] R. Ross, The prevention of malaria, John Murray, 1911.
- [51] G. Rost, J. Wu, SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay, Math. Biosci. Eng. 5, november 2, 2008, 389-402.
- [52] H.L.Smith, H.R.Thieme, Dynamical Systems and Population Persistence. Graduate Studies in Mathematics V. 118, AMS, 2011.

- [53] H.L.Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2011.
- [54] Soufiane B., T.M. Touaoula , *Global analysis of infection model with non linear incidence rates* , *Journal of mathematical analysis and applications(JMAA)*, Volume 434, Issue 2. 2016, pages 1211-1239.
- [55] Soufiane B., T.M. Touaoula, *Global analysis of an infection model age SEI model with a class of nonlinear incidence rates (papier soumis)*.
- [56] Y.Takeuchi, W.Ma, E.Beretta, *Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times*. *Nonlinear Anal.* 42, 2000, 931-947.
- [57] H.R.Thieme, *Mathematics in Population Biology*. Princeton University Press, Princeton 2003.
- [58] H.R.Thieme, *Uniform persistence and permanence for nonautonomous semiflows in population biology*. *Math. Biosci.* 166, 2000, 173-201.
- [59] H.R.Thieme, *Global stability of the endemic equilibrium in infinite dimension. Lyapunov functions and positive operators*. *J. Differential Equations.* 250, 2011, 3772, 3801.
- [60] H.R.Thieme, , C.Castillo Chavez, : *How may infection age dependent infectivity affect the dynamics of HIV;AIDS*. *SIAM. J. Appl. Math.* 53 1993, pp 1447,1479.
- [61] H.R.Thieme , C.Castillo Chavez, : *On the role of variable infectivity in the dynamics of the human immunodeficiency virus epidemic*, in *Mathematical and Statistical Approaches to AIDS Epidemiology*, C. Castillo-Chavez, ed., *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 83, Springer,Verlag, Berlin, New York, 1989, 157,176.
- [62] G.F. Webb, *Theory of nonlinear age-dependent population dynamics, Monographs and Textbook in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 89, New-York Basel : Marcel Dekker Inc., 294p, 1985.
- [63] R. Xu, Z. Ma, *Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay*, *Nonlinear Anal.* 10, 2011, 3175-3189.
- [64] J. Y. Yang, X. Z. Li, M. Martcheva, *Global stability of a DS-DI epidemic model with age of infection*, *J. Math. Anal. Appl.*, 385, 2012, 655-671.

- [65] Z. Zhao, L. Chen, X. Song, *Impulsive vaccination of SEIR epidemic model with time delay and nonlinear incidence rate*, Math. Comput. Simul. 79, 500-510.