

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Analyse Numérique des EDP

présentée par

BENZERDJEB SARRA

Soutenue le: 26- 11 - 2015

Influence de la pêche et des niveaux des eaux sur les écosystèmes: Analyse mathématique et numérique

Soutenue devant le jury composé de :

M ^{me} . D. HADJ-SLIMANE.	Professeur, Université de Tlemcen.	Présidente
M ^f . A. MEDEGHRI.	Professeur, Université de Mostaganem.	Examinateur
M ^f . M. BENCHOHRA.	Professeur, Université de Sidi Bel Abbas.	Examinateur
M ^f . A. MOUSSAOUI.	Professeur, Université de Tlemcen.	Examinateur
M ^f . T. MAHDJOUR.	Maître de Conférences, Université de Tlemcen.	Examinateur
M ^f . S.M. BOUGUIMA.	Professeur, Université de Tlemcen.	Directeur de thèse

Année Universitaire: 2014-2015

Département de Mathématiques.
Faculté des sciences.
Université de Tlemcen.
BP 119 Tlemcen.

saraben_652@yahoo.fr

*Si tu transformes tes erreurs en leçons,
et tes peurs en courage,
alors tout est réalisable.*

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

à mes chers parents ,
mes adorables soeurs, et frère;

à ceux et celles qui m'ont honorés
de leurs soutiens
durant ces années de travail;

Sarra

Remerciements

En toute gratitude, je remercie le Tout-Miséricordieux pour toute sa générosité ainsi que pour la volonté et la patience qu'il m'a offert. Grâce à Dieu, j'ai rencontré des personnes qui m'ont soutenus, m'ont aidés et qui ont illuminés mon chemin de la réussite.

Je témoigne mes sincères remerciements avec ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, monsieur *Sidi Mohammed Bouguima*, Professeur à l'Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen, pour toute sa confiance et ses conseils judicieux qui m'ont permis non seulement d'effectuer cette thèse, mais aussi de découvrir la recherche mathématique avec beaucoup de précision et de rigueur. Cette rigueur mathématique je vous la dois Monsieur. Merci aussi pour votre disponibilité et vos discussions fructueuses qui m'ont permis d'accomplir ce travail. Pour moi, c'est un honneur et une immense joie de pouvoir progresser sous votre direction.

J'adresse mes vifs remerciements au Professeur Mme *Djamila Hadj-slimane* de l'Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Merci aussi pour ses remarques constructives.

J'exprime mes reconnaissances également au professeur *Ali Moussaoui* de l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen pour ses remarques et ses conseils, ses encouragements et son grand soutien durant toute cette période. Merci aussi de prendre part au jury.

Je tiens à remercier Mr le professeur *Ahmed Medeghri* de l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem d'avoir accepté d'examiner ce travail, et de rédiger un rapport sur ma thèse.

Mes sincères remerciements vont aussi à Mr le professeur *Mouffak Benchohra* de l'Université Djillali Liabes-Sidi-Bel-Abbès d'avoir pris son temps pour lire et évaluer ce manuscrit.

Un très grand merci à Mr *Tewfik Mahdjoub* pour l'intérêt qu'il a porté sur mes travaux tout en acceptant de faire partie du jury.

J'adresse une mention spéciale à Mr *Aziz Alaoui* professeur à l'Université du Havre et directeur Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH) qui m'a permis d'effectuer mon stage dans son laboratoire. Merci aussi pour ses discussions et ses idées

enrichissantes.

Mes chaleureux remerciements vont à Melle *Meryem Hellal* pour l'appui qu'elle m'a apporté pour la réalisation de ce manuscrite, ainsi pour les séances de révisions et également pour les bons moments qu'on a passé ensemble. De tout mon cœur je te dis merci énormément Meryem.

Pour leurs encouragements, leurs aides je remercie vivement, mes deux collègues *Zoulikha Mahlia* et *Ahmed Attar*.

J'insiste à remercier pour sa compréhension et son soutien sur tous les plans, Mme Sihem Fekih et Melle Suhad Bihadli.

Une pensée de respect que j'adresse à Mr *Y. Khelifi*, pour son sérieux, sa rigueur et son sens de la vérité qui conduit à un bon jugement.

Du fond du coeur, je remercie ma famille qui ont conditionné un moment de leur vie afin que je réussisse cette thèse je pense en particulier à:

Mes parents, vos prières et bénédictions étaient pour moi une fortune, et elles le seront toujours. Qu'Allah vous procure la bonne santé et une très longue vie;

Mes deux adorables soeurs *Insaf* et *Hadjer*, vous m'avez soutenu énormément. Que Dieu vous bénisses;

Mon très cher frère *Mouaadh* à qui je témoigne emprunt d'estime et de reconnaissance pour sa patience et son aide sans faille. Merci et j'en suis très reconnaissante.

Enfin, je ne sais comment m'exprimer envers ceux qui m'ont beaucoup encouragés de très près, je pense à mes très chères Hayat, Hideyat, Amina et Amal ainsi qu'à Mme N. Bouayad et Mr S.Bouayad.

A toutes et à tous, je témoigne ma gratitude sur le soutien et la confiance dont ils m'ont honorés.

Influence de la pêche et des niveaux des eaux sur les écosystèmes

Analyse mathématique et numérique.

Résumé :

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'élaboration et à l'étude mathématique de certains modèles provenant de problèmes écologiques. Cette thèse est constituée de deux parties.

Dans la première partie, nous étudions le comportement asymptotique d'un système modélisant une population de poissons structurée en âge et dont la pêche est portée sur les adultes. Nous supposons qu'il existe à la fois une compétition entre les poissons adultes uniquement, et un terme de cannibalisme entre les adultes et les juvéniles, et à la fin, nous trouverons qu'ils n'ont aucun effet sur la coexistence de la population. Dans ce contexte, nous donnerons un profit qui maximise le revenu net de la pêche. Ceci sera établi grâce au principe du maximum de Pontryagin.

La deuxième partie est consacrée à l'effet des niveaux des eaux sur l'interaction proie-prédateur. Le but est de déterminer le niveau d'eau permettant la survie des deux populations. Pour cette raison, nous établirons des conditions assurant la coexistence des deux populations.

Afin d'illustrer l'étude théorique, une simulation numérique sera présentée dans les deux travaux.

Mots clés : Contrôle optimal, Principe de Pontryagin, modèle proie-prédateur, modèle structuré en stade, fonction de Beddington-DeAngelis, point d'équilibre, systèmes d'équations différentielles, stabilité.

Influence of fishing and water levels on ecosystems Mathematical and numerical analysis.

Abstract

In this thesis, we focus on the development and study of mathematical model from some environmental problems. This thesis consists in two parts.

In the first part, we study the asymptotic behavior of a system modeling an age structured population of fish and whose fishing is focused on adults. We assume, there is both a competition between adult fish, and a term of cannibalism between adults and juveniles. At the end, we will find that they have no effect on the coexistence of the population. In this context, we will give a profit maximizing net income from fishing. This will be established based on the Pontryagin maximum principle.

The second part is devoted to the impact of water levels on predator-prey interaction. The goal is to determine the water level for the survival of both populations. For this reason we will establish conditions ensuring the coexistence of two populations. To illustrate the theoretical study, we show the results obtained in both parts by numerical simulations.

Keywords: optimal control, Pontryagin principle, predator-prey, age structured model, Beddington - DeAngelis function, equilibrium, system of differential equations, stability.

تأثير الصيد و مستويات الماء على النظم الإيكولوجية تحليل رياضي وعـددى

الملخص

في هذه الأطروحة نركز على دراسة رياضية لنموذجين مستوحيين من المشاكل البيئية. في الجزء الأول، ندرس سلوك مقارب لنظام يحوي كائنات من الأسماك البالغة و الأخرى حديثة الولادة أين تتركز عملية الصيد على البالغين فقط. في هذا الإطار سنقدم ربح لتعظيم الدخل الصافي من الصيد وسيتم إنشاء هذا من خلال نظرية التحكم الأمثل التي عرضها المبدأ الأقصى ل بونترياغين.

يخصص الجزء الثاني لآثار مستويات المياه على تفاعل الكائنات المفترسة مع فرائسها. الهدف من ذلك هو تحديد مستوى المياه لضمان التعايش بين الكائنات. لتوضيح الدراسة النظرية، وستعرض المحاكاة العددية.

الكلمات المفتاحية: التحكم الأمثل ، مبدأ بونترياغين ، نموذج فريسة و مفترس ، نموذج حسب العمر ، بدينجتون دي انجيليس ، نقطة التوازن، معادلات تفاضلية، استقرار

Table des matières

0.1	Présentation	1
0.2	Plan de la thèse	3
1	Modèles classiques en halieutiques	5
1.1	Introduction	5
1.2	Modèles avec une seule population	7
1.2.1	Le Modèle de Malthus	7
1.2.2	Le modèle logistique	9
1.2.3	Le modèle de pêche	12
1.3	Modèles avec deux populations	14
1.3.1	Les modèles proie-prédateur	15
1.3.2	Modèle d'une population structurée en stade	22
2	Outils mathématiques fondamentaux	24
2.1	Introduction	24
2.2	Généralités sur les systèmes dynamiques	25
2.2.1	Notions sur la stabilité dans \mathbb{R}^2 :	29
2.3	Système à réaction-diffusion	32
2.4	Contrôle Optimal	33
3	Comportement asymptotique d'une population structurée en âge	36
3.1	Introduction	37
3.2	Présentation du modèle	38
3.3	Modèle avec diffusion	40
3.3.1	Existence de la solution globale:	40
3.3.2	Solution d'équilibre du système (3.1)	41
3.4	Comportement dynamique du système EDO	44

3.4.1	Dissipativité	45
3.4.2	Existence des points d'équilibre	46
3.4.3	Stabilité des points d'équilibre	47
3.5	Dynamique lente-rapide	54
3.6	Contrôle de la pêche	57
3.6.1	Pêche en libre accès	57
3.6.2	Stratégie optimale	62
3.7	Conclusion	65
4	Effet des niveaux des eaux sur l'évolution d'une population	67
4.1	Introduction	67
4.2	Modèle Mathématique	68
4.3	Analyse mathématique du système (4)	70
4.3.1	Étude des points d'équilibre	71
4.4	Étude du modèle réduit	77
4.4.1	Étude des points d'équilibre	78
4.4.2	Dynamique asymptotique:	81
4.5	Conclusion	85
	Perspectives	86

Liste des Figures

1.1	Dynamique d'une zone marine.	7
1.2	Modèle Maltusien: L'extinction $\beta = 0$	8
1.3	Modèle Maltusien: Stagnation	8
1.4	Courbe de la fonction logistique.	10
1.5	Modèle logistique-Variation de l'état initial	11
1.6	Schéma d'un stock de poissons exploité par la pêche.	13
1.7	Population exploitée avec effort constant.	14
1.8	Champs de vitesse pour le modèle de Lotka-Volterra.	18
1.9	Trajectoires du modèle de Lotka-Volterra.	19
1.10	Portrait de phase du modèle de Lotka-volterra.	20
1.11	Tracé des solutions avec et sans pêche du modèle de Lotka-Volterra.	21
2.1	Comportement asymptotique par le théorème de Poincaré-Bendixson	31
3.1	Coexistence des adultes et des juvéniles, cas: $E < \frac{\sigma b}{f}$	48
3.2	L'extinction de la population lorsque $E > \frac{\sigma b}{f}$	48
3.3	Trajectoire des solutions du système EDO	54
3.4	Contrôle de l'optimum bio-économique	62
4.1	Niveau d'eau est élevé , l'accéssibilité est faible	69
4.2	Le niveau d'eau est bas et l'accéssibilité r est forte	69
4.3	Extinction des prédateurs, cas $\tau_B < \frac{m_B}{\gamma_B}$	74
4.4	Courbe de l'équation des proies $G'=0$, pour $r < \gamma_G$	79
4.5	Courbe de l'équation des prédateurs pour $r > \gamma_G$	79
4.6	Isocline des prédateurs	80
4.7	L'extinction des prédateurs lorsque $r_1 < r < r_0$	84
4.8	La coexistence des brochets et des gardons lorsque $r > r_0$ et $h \leq \tau_B$	84

Abreviations

EDO : Equation différentielle ordinaire
EDP : Equation aux dérivées partielles.
PMP : Principe du maximum de Pontryagin.

Notations

\mathbb{R} :	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^n :	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.
\mathbb{R}^+ :	Ensemble des nombres réels positifs.
\in :	Appartient.
\subset :	Inclus.
$x' = \frac{dx}{dt}$:	La dérivée de la variable x par rapport au temps t .
Ω :	Ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .
$\partial\Omega$:	La frontière de Ω .
$ \Omega $	La mesure de Ω .
$\frac{dx}{d\nu}$:	ν La normale unitaire extérieure à Ω .
\det :	Le déterminant d'une matrice.
Tr :	La trace d'une matrice.
Δu :	Le laplacien de u .
∇f :	Gradient de la fonction f .
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω .
$C^1(I, \mathbb{R})$	espace des fonction continues, dérivable de I dans \mathbb{R}
\max :	Maximum.

Introduction générale

0.1 Présentation

La nature est riche de nombreux phénomènes importants basés sur les relations entre les êtres vivants et les variations de l'environnement biotiques lorsque les facteurs sont liés aux vivants: comme la prédation, la compétition..., et les variations abiotiques quand les facteurs ne dépendent pas des vivants comme la température, l'air, Un ensemble de ces populations qui habitent dans un même lieu et qui interagissent entre elles, définit *un écosystème*, certains écosystèmes comportent des espèces différentes. L'écologie est la science qui se préoccupe de découvrir et comprendre les lois qui gouvernent les écosystèmes. D'après Murray [44], comprendre le fonctionnement d'un écosystème est un enjeu majeur pour la gestion des ressources et de l'environnement. Cependant la diversité des interactions des individus entre eux et avec leurs milieux créent une très grande difficulté qui ne permet pas toujours d'atteindre ce but. Mais cette difficulté n'empêche pas de poser le plus souvent des questions sur les facteurs permettant de stabiliser l'écosystème, et notamment d'assurer la coexistence des populations, et parfois aussi, de contrôler ces variables.

Afin de bien comprendre le fonctionnement de ces écosystèmes, de répondre à ces questions et de prédire son évolution, on doit fréquemment avoir recours à la modélisation mathématique, c'est à dire traduire ces phénomènes réels (écologiques) par des expressions et des hypothèses sur la loi mathématique qui

régit le phénomène observé, ce qui fournit à la fin de cette démarche un système théorique appelé *modèle mathématique*. Ce dernier est basé au début sur les équations différentielles, qui expriment le lien entre la taille de la population représentée par une quantité inconnue, et sa dérivée en temps. Ce système d'équations sera étudié tout en faisant intervenir des outils mathématiques bien spécifiques. Ainsi sur ordinateur, et à partir d'une densité de population initiale, on peut simuler l'évolution de son effectif. Depuis fort longtemps les mathématiques sont appliquées à l'écologie, qui développent une discipline nommée *la dynamique des populations*. Cette dernière consiste à décrire et à déterminer la taille de la population et son comportement évolutif au cours du temps et également à éclaircir les interactions entre les espèces vivantes et leur milieu.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la dynamique des populations, en particulier aux écosystèmes marins. Leurs importances se situent dans les biens et les services qu'ils offrent à la société humaine, comme par exemple la nourriture, l'emploi, et le transport... . Dans ce contexte, les travaux de cette thèse consistent en l'élaboration et l'étude mathématique de deux écosystèmes de structures différentes.

Le premier est influencé par l'effet de la pêche qui est considéré comme une activité de cueillette et la mer comme une source de richesses, cet écosystème est construit d'une population de poissons structurée en deux stades. L'exploitation d'une population a des effets sur sa dynamique et sur sa structure dus aux prélèvements de la biomasse des poissons par la pêche, lorsqu'il n'y a pas une nouvelle production. Notamment les pressions de pêche, en présence de phénomènes perturbateur (naturels), agissent sur les écosystèmes.

Un autre aspect de cette exploitation est le côté économique de la pêche, elle doit fournir un rendement important aux investisseurs. Pour ces raisons, il faut qu'il y ait une politique de gestion de pêche, d'un côté, elle doit éviter l'épuisement des ressources marines, et de l'autre côté, permettre de tirer un maximum de bénéfices de la mer.

Le second écosystème représente deux populations soumises à l'effet de la prédation.

0.2 Plan de la thèse

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre des travaux d'écologie mathématiques, où il se restreint sur les ressources halieutiques. Il concerne éventuellement l'étude de la dynamique de problèmes de proie-prédateur, et de la pêche appliqué à une population structurée en deux stades. Notre manuscrit est constitué d'une introduction générale, de quatre chapitres et d'une conclusion.

Le premier chapitre de cette thèse, *Modèles classiques en halieutiques* présente les modèles halieutiques classiques qui décrivent la source, tout en donnant un historique dans lequel nous rappelons les hypothèses et les idées générales qui ont permis la formulation des premiers modèles en dynamique de population, commençant par ceux qui ont décrit l'évolution de la croissance d'une seule population tel que le modèle de Malthus et de Verhulst. Ensuite nous présentons le premier modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra.

Le deuxième chapitre porte sur *les outils mathématiques fondamentaux*. Il introduit des rappels sur quelques notions fondamentales des équations différentielles en donnant des définitions préliminaires et des théorèmes tel que l'existence et l'unicité de la solution pour un système d'EDO, la stabilité, le théorème de Bendixson ... etc. Il sera présenté un rappel sur le principe de Pontryagin qui nous sert à mieux résoudre le problème de contrôle optimal décrit dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un modèle qui comporte le couplage entre la diffusion et la structure par âge, la chose qui n'a pas été complètement étudiée dans les modèles de pêche, et en raison de la complexité qu'ils introduisent, quelques résultats sont obtenus pour ces modèles, voir par exemple les résultats obtenus par Fu et al [29] Lenhart et Montero[40]. Ces auteurs établissent l'existence d'un contrôle optimal et le caractérisent par un système d'équations aux dérivées partielles. Dans cette partie, nous allons présenter des conditions pour lesquelles la pêche apporte un bénéfice aux exploitants et assure en même temps la survie de la population mature et immature. Ceci est effectué grâce à l'utilisation de différents outils mathématiques comme le principe du maximum de Pontryagin. L'objectif est de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations dues à la pêche (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour

un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Le dernier chapitre repose sur l'étude de la dynamique des modèles de proie-prédateurs avec une réponse fonctionnelle de Beddington-DeAngelis. Tout d'abord, nous nous intéressons à l'étude des points critiques, avant de nous interroger sur la dynamique asymptotique et l'analyse qualitative de ces modèles. Cette étude permet de déterminer des conditions assurant la survie de la population.

Pour illustrer tous les résultats obtenus dans chaque chapitre, nous proposons des simulations numériques avec des valeurs attribuées aux paramètres biologiques environnementales.

Modèles classiques en halieutiques

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Modèles avec une seule population	7
1.2.1	Le Modèle de Malthus	7
1.2.2	Le modèle logistique	9
1.2.3	Le modèle de pêche	12
1.3	Modèles avec deux populations	14
1.3.1	Les modèles proie-prédateur	15
1.3.2	Modèle d'une population structurée en stade	22

1.1 Introduction

La modélisation mathématique a donné une prévision sur l'évolution de la population marine via des modèles qui expriment la croissance de celle ci en fonction du temps dans des conditions environnementales particulières. Ces modèles fondamentaux de la dynamique de populations sont classiques (dit aussi primaires). Le but était de décrire et de déterminer l'influence des

facteurs environnementaux sur les données des modèles classiques, ce qui donne une nouvelle structure à ces modèles sous le nom des modèles secondaires.

Nous rappelons dans ce premier chapitre les modèles primaires, allant du plus simple au plus compliqué. Dans ce milieu halieutique, il est reconnu qu'une population évolue par les naissances et les décès qui la font augmenter ou diminuer au cours du temps. Soit $N(t)$ la taille de cette population à l'instant t . Lorsque le temps est continu $t \in [0; +\infty[$, la croissance relative est mesurée sur un petit intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$. (au moins 0.01 unité). Alors la densité à l'instant $t + \Delta t$, est définie par

$$N(t + \Delta t) = N(t) + (\text{natalité} - \text{mortalité}) \Delta t.$$

Ce qui revient à écrire

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \text{natalité} - \text{mortalité}$$

Le terme de gauche est appelé taux de variation. Sa limite lorsque Δt tend vers 0 est bien la dérivée de N par rapport au temps t , notée par $\frac{dN}{dt}$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \text{natalité} - \text{mortalité}. \\ &= \text{croissance}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Il est noté que la croissance peut être linéaire ou non linéaire. Il se peut aussi, qu'il y ait en plus d'autres lois et d'autres processus qui agissent sur l'évolution comme par exemple l'émigration, l'immigration ou même encore l'exploitation (consommation par l'effet de la pêche), mais tous cela dépend de la population en question, de l'effet de l'environnement dans lequel elle croit et notamment de l'interaction avec d'autres individus.

Ceci conduit à décrire l'équation de l'effectif d'une population à un moment donné de sorte que

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) &= N(t) + (\text{natalité} - \text{mortalité} + \text{immigration} \\ &\quad - \text{émigration} - \text{exploitation}) \Delta t. \end{aligned}$$

Ici, nous nous intéressons aux principaux modèles primaires de croissance. Ces modèles et d'autres, ont été traités avec plus de détails dans de nombreux ouvrages, à titre d'exemple: [5], [7], [44] et [42].

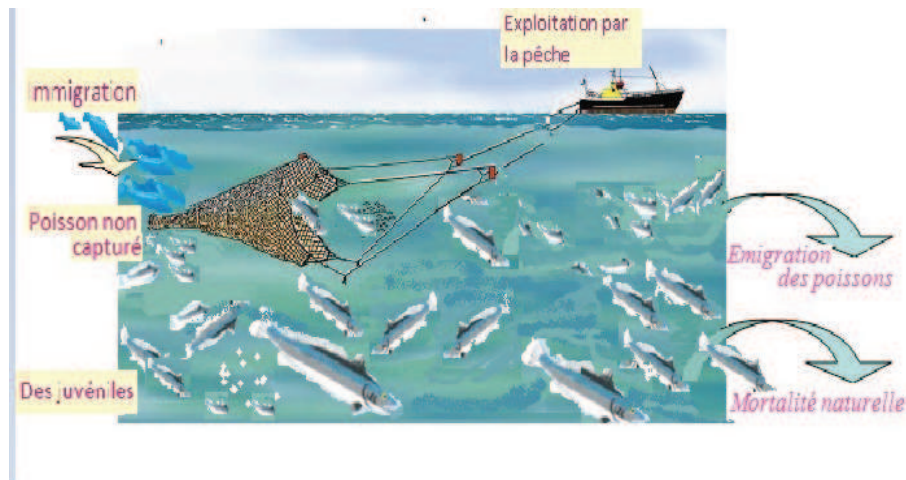


Figure 1.1: Dynamique d'une zone marine.

1.2 Modèles avec une seule population

En se basant sur ce qui a été décrit précédemment dans (1.1), la forme générique d'un modèle est

$$\frac{dN}{dt}(t) = f(N(t))$$

où la fonction f détermine la croissance (l'évolution) dans le temps d'une telle population qu'on observe de façon continue. En revanche, f est supposée dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1.2.1 Le Modèle de Malthus

En 1798, l'économiste britannique *Thomas Malthus* [42] a proposé le premier modèle décrivant l'évolution d'une population dans le temps. Il a supposé que dans une zone isolée une population à l'instant t possède une densité $N(t)$, elle croît avec un taux β constant, ce taux est la différence des taux de natalité et de mortalité. Son but était de déterminer l'accroissement naturelle de cette population lorsque la nourriture est illimitée. Dans ces conditions, Il a aboutit au modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt}(t) = \beta N(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

Avec:

- β est le taux de croissance.
- N_0 est l'effectif initial de la population au temps t_0 .

La solution de cette équation, relativement simple, sera de la forme

$$N(t) = C e^{\beta(t-t_0)}$$

Via cette solution, il remarqua alors qu'elle évolue géométriquement bien que les ressources vitales ont une croissance arithmétique. Cependant, suivant la variation de la valeur du taux de croissance β , ce modèle prévoit trois types de comportements. Ces résultats sont bien expliqués dans les trois figures suivantes

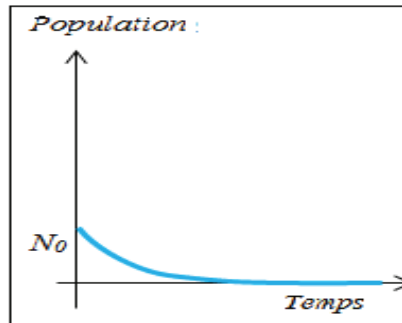


Figure 1.2: La population est en extinction, $\beta < 0$

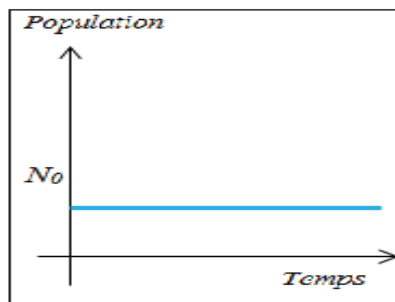
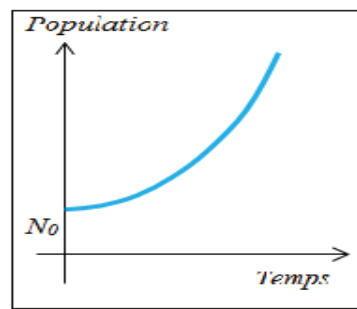


Figure 1.3: La population est en stagnation, $\beta = 0$.



Croissance exponentielle de la population quand $\beta > 0$.

L'hypothèse sur laquelle s'est basée Malthus dans son modèle proposé (rien ne limite la croissance) est toujours vraie sur un petit intervalle de temps, mais elle est irréaliste à long terme, car le milieu ne peut pas supporter un nombre d'individus supérieur à un certain seuil. C'est pour éviter et remédier à ce problème que Verhulst propose son modèle logistique:

1.2.2 Le modèle logistique

Ce modèle a été élaboré par le mathématicien belge *Pierre-François Verhulst* [59] en 1838, il a proposé un nouveau modèle où le taux de croissance de la population dépendait de la densité. Il prend en considération que l'environnement a une capacité de charge intrinsèque k , ce qui ralentit la croissance quand l'effectif s'approche de cette capacité. D'où l'idée de remplacer le taux constant β par un taux variable $b(1 - \frac{N(t)}{k})$ qui dépend de la taille de la population.

Il est évident que si la densité de la population est assez faible, alors le coefficient $1 - \frac{N}{k}$ reste proche de 1, par contre quand la densité N s'approche de sa capacité k , ce coefficient diminue jusqu'à tendre vers 0. Donc, plus l'abondance de cette population est grande (le coefficient $1 - \frac{N}{k}$ devient faible), plus la croissance se ralentit. Verhulst est enfin arrivé à définir l'équation logistique modélisant ce phénomène avec le système décrit par:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt}(t) = bN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

La courbe de la croissance logistique $N \mapsto bN(1 - \frac{N}{k})$ est donnée par la figure (1.4), c'est une parabole qui atteint son maximum pour la valeur $N = \frac{k}{2}$. Autrement dit, la population croît fortement quand sa taille est égale à la

moitié de sa capacité de charge. Cette population atteint son état d'équilibre pour deux valeurs: $N = 0$ et $N = k$.

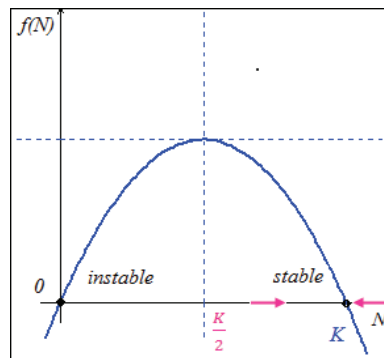


Figure 1.4: Graphe de la fonction logistique.

En outre, le tracé des solutions de (1.2) représenté par la figure (1.5) montre bien que

i) Si $N < k$, il y a une croissance et l'environnement peut accueillir de nouveaux individus.

ii) Lorsque $N > k$, l'environnement ne peut plus accueillir de nouveaux individus puisque la population décroît.

iii) Pour toute condition initiale N_0 , nous avons $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = k$.

La méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation (1.2) très facilement: En effet, elle peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)} dN(t) = \beta dt.$$

Et puisque,

$$\frac{1}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)} = \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{N}{k}},$$

alors l'équation devient

$$\left[\frac{1}{N(t)} + \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{N(t)}{k}} \right] dN(t) = \beta dt.$$

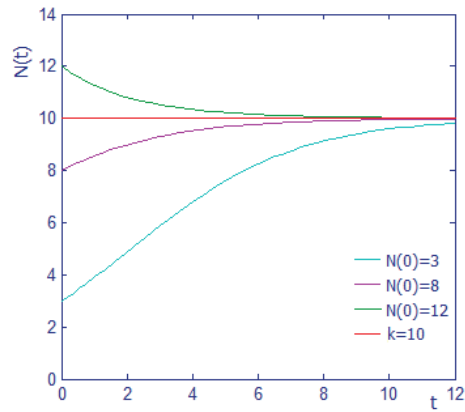


Figure 1.5: Représentation des solutions de l'équation logistique à partir de différentes valeurs attribuées à l'état initial de la population, et pour $k = 10$ et $b = 0,4$.

D'où, en intégrant

$$\ln N(t) - \ln \left(1 - \frac{N(t)}{k} \right) = \beta t + C \quad \text{avec } C = \ln \left(\frac{k \cdot N_0}{k - N_0} \right).$$

Soit encore:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{k}} = e^{\beta t + C}.$$

Après des simplifications, la solution de (1.2) est:

$$N(t) = \frac{k \cdot N_0}{N_0 + (k - N_0) e^{\beta t}}.$$

Remarque 1.2.1 *Le modèle logistique présente quelques limites:*

- 1) *Le taux de croissance n'est pas constant, et il peut varier avec le temps. Il est soumis à plusieurs facteurs exogènes (des facteurs liés à l'environnement, comme la pollution,).*
- 2) *La capacité du milieu est variable avec le temps et reflète en général la dégradation de l'habitat.*
- 3) *Plusieurs phénomènes de nature stochastiques peuvent agir sur l'évolution des espèces.*
- 4) *Tous les individus sont considérés de manière identique, la variation dans l'âge, le sexe, la position, ne sont pas pris en compte.*

5) *L'hypothèse que les ressources se renouvellent éternellement est irréaliste.*

Ce modèle est un modèle simple qui ne tient pas compte les interactions entre individus: compétition, prédation. Dans la suite, nous allons donc étudier le cas d'une interaction entre deux populations.

1.2.3 Le modèle de pêche

L'exploitation des ressources marines dans le domaine de la dynamique des population a été traitée par l'étude d'un modèle mathématique exprimant l'évolution d'une population de poissons soumise à une activité de pêche. Les individus de poissons dans lesquels les prises sont prélevées par pêche définit ce qu'on appelle le stock, ou parfois les ressources halieutiques. Il prend en considération les individus adultes qui dépassent un certain âge dit âge de réforme. La pression que le secteur de la pêche exerce sur un stock de poisson a des séquelles sur lui même, ainsi que sur le plan économique: il peut créer une extinction de la population exploitée, pour cette raison il faut quantifier cette pression dans un stock précis et dans un laps de temps donné, ce qui définit l'effort de pêche. Une conséquence de cette exploitation par la pêche est la capture (i.e: le nombre de poissons pêchés pendant un intervalle de temps donnés). elle est souvent représentée par cette équation, appelée *l'équation aux captures y*

On reprend le modèle logistique décrit précédemment pour représenter un stock de poissons vierge. L'exploitation sur ce stock par pêche conduit à ajouter dans l'équation (1.2) un terme négatif exprimant l'effectif prélevé, précisément la quantité capturée par unité de temps par la pêche, ce qui exige un effort de pêche E fournit pendant cette unité de temps. Finalement, on obtient le modèle suivant:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = bN\left(1 - \frac{N}{k}\right) - EN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Rappelons que les constantes b , k et E sont positives, elles représentent respectivement pour cette population exploitée: le taux de natalité, la capacité de charge du stock et l'effort de pêche. l'équation (1.3) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{dN}{dt} = bN\left(1 - \frac{N}{k}\right) - EN.$$

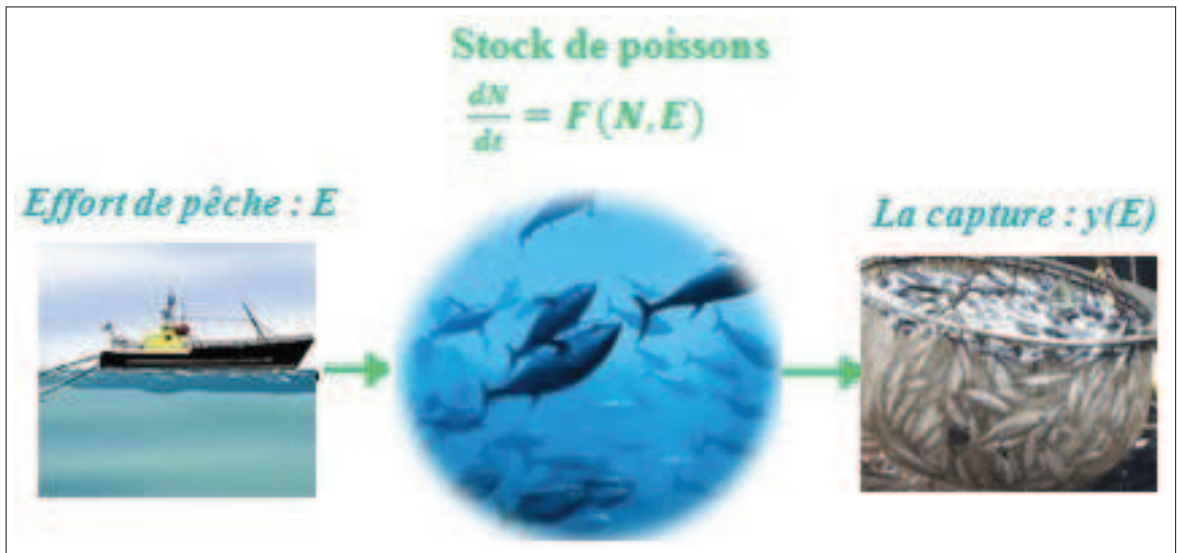


Figure 1.6: Schéma d'un stock de poissons exploité par effet de la pêche.

Remarque 1.2.2 Cette population atteint son état d'équilibre lorsque $N_0 = 0$, ou bien $N^* = k \left(1 - \frac{E}{b}\right)$. Donc, cette population s'éteint pour un effort de pêche E qui dépasse le taux de natalité b , (i.e : $E > b$). En outre,

- i) Si $E < b$, alors l'origine est instable et l'équilibre positif $N^* = k \left(1 - \frac{E}{b}\right)$ est stable.
- ii) Dans le cas contraire, lorsque $E > b$, le seul équilibre non négatif pour (1.3) est l'origine, qui devient stable pour ce cas.

Afin d'illustrer ces résultats, on donne des valeurs aux paramètres b et k , tout en faisant varier l'effort E . A l'exécution, la figure obtenue montre l'évolution de la population marine sans exploitation, ($E = 0$), L'évolution est stable et diminue par l'effet de la pêche pour $E = 1$ ($E < b$), et elle tend vers l'extinction pour $E = 3$ ($E > b$).

Maintenant, pour exprimer la production du stock, l'équation de la capture est de la forme

$$y(E) = EN. \quad (1.4)$$

La maximisation de l'équation aux captures à l'équilibre, permet de déterminer l'effort optimal de l'exploitation, celui ci est obtenu par la condition

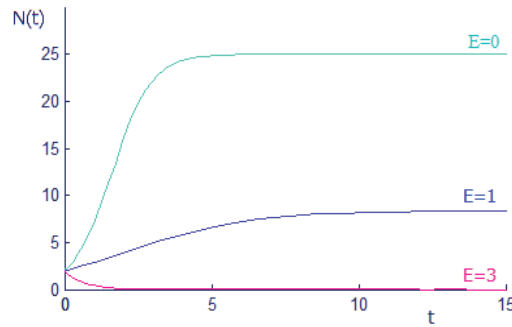


Figure 1.7: Population exploitée avec effort constant, pour $b = 1.5$, $k = 25$ et la condition initiale $N(0) = 3$.

d'optimalité, en effet, l'équation (1.4), à l'équilibre devient:

$$y(E) = EN^* = Ek \left(1 - \frac{E}{b}\right),$$

Sa dérivée s'annule pour:

$$E_{op} = \frac{b}{2}. \quad (1.5)$$

L'effort optimal (1.5), donne la valeur optimale de la capture:

$$y(E_{op}) = \frac{bk}{4}.$$

Ce modèle classique étudié est assez simple, dans le troisième chapitre nous présenterons un modèle de pêche plus complexe et soumis à d'autres contraintes.

Remarque 1.2.3 *Le système de pêche peut être assimilé à un système de proie - prédateur dont les proies sont représentées par le stock de poissons exploité et les pêcheurs (ou les navires de pêche) jouent le rôle des prédateurs. Ce genre de modèles sera traité dans la section suivante 1.3.1.*

1.3 Modèles avec deux populations

Dans le monde des vivants, les individus sont en interaction entre eux, ils ne sont pas isolés. Par conséquent, les variations des effectifs de l'un sont aussi influencés par ceux d'autres populations. Parmi ces interactions: la prédation,

qui est bénéfique pour l'une des deux espèces, également, la compétition qui agit négativement sur les deux. Ici, nous allons regarder la dynamique interne de l'évolution de la population et l'influence du milieu extérieur, contrairement aux modèles décrits précédemment, où on s'intéressait à une évolution globale de la population.

1.3.1 Les modèles proie-prédateur

La prédation est l'acte de nourriture (capture) d'un être vivant appelé le prédateur sur un autre vivant appelé la proie. Cette action est une interaction de deux espèces différentes, elle est souvent décrite dans la littérature de la dynamique de populations sous le nom proie-prédateur. On désigne par $N(t)$ et $P(t)$ respectivement les abondances des proies et des prédateurs à l'instant t . Dans les modèles proie-prédateur étudiés, la croissance d'une telle population dépend des naissances et de mortalités,

$$\frac{dN}{dt} = \text{natalité} - \text{mortalité}$$

On considère également le principe de la conservation de la masse qui dit que la croissance du prédateur est une fonction directe de ce qu'il a mangé (Linzburg 1998) [37].

Le premier modèle classique de prédation a été proposé par Lotka - Volterra (1926) lorsque il a étudié l'évolution des sardines et des requins dans la mer Adriatique[61].

Modèle de Lotka - Volterra

Ce modèle repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- Les proies N croient exponentiellement et seuls les prédateurs P s'opposent à leur croissance (nourriture illimitée pour les proies).
- A chaque rencontre entre une proie et un prédateur, le nombre de prédateurs tend à augmenter en revanche, le nombre de proies diminue. Donc l'existence des prédateurs dépend des proies, puisque elles sont la source de leurs nourritures.
- Le terme de rencontre des proies avec des prédateurs est modélisé par le produit $N(t) \cdot P(t)$, il est proportionnel à $N(t)$ et à $P(t)$.

Ceci conduit au modèle de Lotka-Volterra qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha_1 N - \beta_1 NP \\ \frac{dP}{dt} = -\alpha_2 P + \beta_2 NP \end{cases} = \begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha_1 - \beta_1 P) \\ \frac{dP}{dt} = P(-\alpha_2 + \beta_2 N) \end{cases} \quad (V1)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 sont des constantes positives:

- α_1 est le taux de croissance des proies.
- α_2 le taux de mortalité des prédateurs en l'absence des proies.
- β_1 le taux de mortalité des proies dû à la chasse des prédateurs (Le nombre de proies consommées par un prédateur et par unité de temps).
- β_2 les coefficients d'interaction entre les deux populations (le taux de conversion de la quantité de proies consommées en effectif de prédateurs).

L'analyse mathématique de ce système (voir [7], [44],[5]) permet d'avoir les résultats suivants:

- ✓ Le système (V1) admet deux points d'équilibres: l'origine (0, 0) et l'équilibre intérieur $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$.
- ✓✓ Le point (0, 0) est instable (car la linéarisation autour de ce point donne une matrice dont le déterminant est négatif, voir le théorème 2.2.3).
- ✓✓✓ La stabilité du point $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ peut être analysée par l'application du théorème de Lyapunov (2.2.4). En effet, soit V une fonction de Lyapunov, déterminée à partir d'une intégrale première que l'on définit par la fonction H suivante:

$$H(N, P) = -\alpha_2 \ln N - \alpha_1 \ln P + \beta_2 N + \beta_1 P. \quad (1.6)$$

et dont sa dérivée par rapport au temps est

$$\frac{dH}{dt}(N, P) = 0$$

C'est à dire

$$H(N, P) = k, \quad k \in \mathbb{R}, \text{ (constante)} \quad (1.7)$$

Donc la fonction de Lyapunov V est:

$$V(N, P) = H(N, P) - H\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \quad (1.8)$$

Du fait que

$$V\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = 0,$$

et

$$\frac{dV}{dt}(N, P) = \frac{dH}{dt}(N, P) \leq 0.$$

Ainsi que $V(N, P) \geq 0$. En effet, le développement de Taylor de l'intégrale première H au voisinage de l'équilibre $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ est donné par

$$\begin{aligned} H(N, P) &= H\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial N^2} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial P^2} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial N \partial P} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}, P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right). \end{aligned}$$

Puisque le terme $\frac{\partial^2 H}{\partial N \partial P} = 0$, alors

$$H(N, P) = H\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) + \frac{\beta_2^2}{2\alpha_2} \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1} \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2.$$

D'où

$$H(N, P) - H\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = \frac{\beta_2^2}{2\alpha_2} \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1} \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 \quad (1.9)$$

Autrement dit,

$$V(N, P) = \frac{\beta_2^2}{2\alpha_2} \left(N - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1} \left(P - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2$$

est une fonction positive, ce qui conduit à conclure que V est une fonction de Lyapunov (voir le théorème 2.2.4) qui assure la stabilité de l'équilibre $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$. En utilisant (1.6) et (1.8), un simple calcul permet d'avoir

$$V(N, P) = \alpha_2 \ln\left(\frac{N\beta_2}{\alpha_2}\right) + \alpha_1 \ln\left(\frac{P\beta_1}{\alpha_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} - N\right) + \beta_1 \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - P\right)$$

D'un autre côté, il a été démontré dans plusieurs ouvrages (à consulter [7]) que le modèle de Lotka-Volterra admet une solution périodique qui est stable autour de l'équilibre $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, Il suffit juste de déduire à partir de(1.7) et (1.9) que l'intégrale première $H(N, P)$ admet un minimum local en $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, et que les trajectoires sont les courbes d'équation $H(N, P) = k$, celles-ci sont fermées et concentriques autour de cet équilibre comme le montre le tracé de champ de vitesse dans la figure suivante

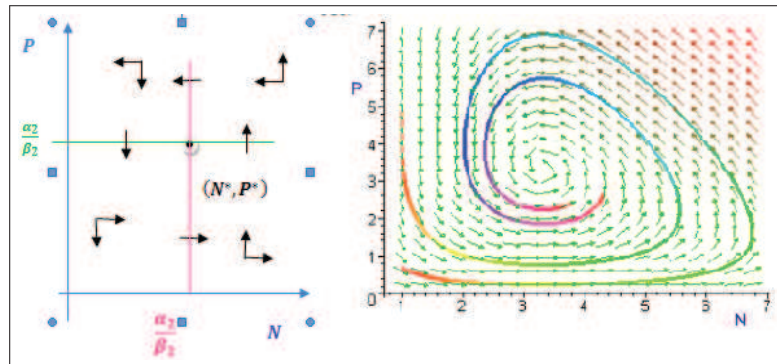


Figure 1.8: Champs de vitesse pour le modèle de Lotka-Volterra.

Cette étude met en évidence également, l'existence d'oscillations déphasées, voir la figure présentée en dessous.

Ces résultats obtenus montrent que:

- Les deux espèces coexistent.
- L'évolution de ces deux populations est périodique puisque au bout d'une certaine période, on se retrouve à l'état initial de la population comme le montre la figure 1.10

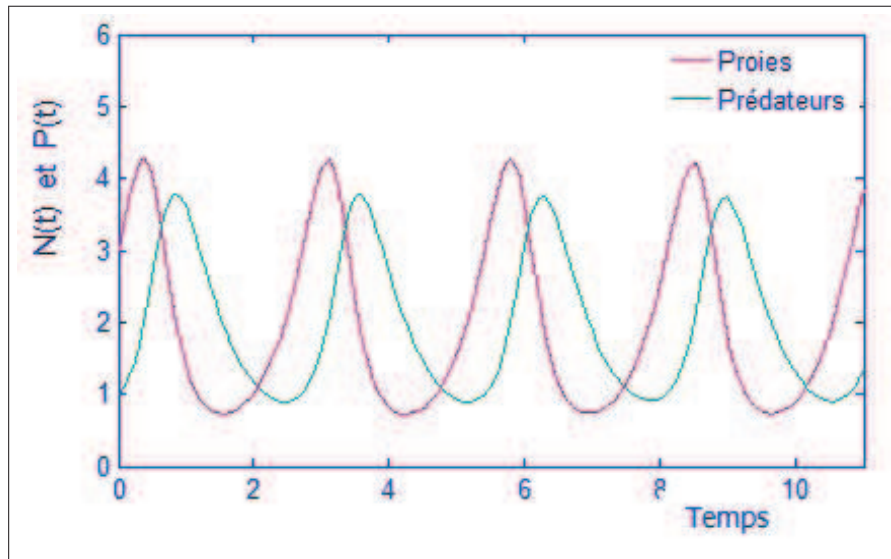


Figure 1.9: Trajectoires des solutions pour $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 1$ et pour une densité initiale $N_0 = 3$ et $P_0 = 1$.

Modèle de Lotka - Volterra avec effet de pêche(chasse)

Quand la pêche agit sur les proies et les prédateurs avec un taux h , le modèle de Lotka-Volterra prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha_1 - h - \beta_1 P) \\ \frac{dP}{dt} = P(-\alpha_2 - h + \beta_2 N) \end{cases} \quad (V2)$$

Ce système possède deux points d'équilibre:

- * En absence des proies et des prédateurs, le point trivial $(0, 0)$ est un équilibre asymptotiquement stable lorsque $\alpha_1 < h$.
- * Si $\alpha_1 > h$, les deux populations sont en coexistence, et atteignent leurs état d'équilibre au point $\left(\frac{\alpha_2 + h}{\beta_2}, \frac{\alpha_1 - h}{\beta_1}\right)$ qui est stable.

De même que dans le modèle (V1), il est facile de démontrer que l'équilibre non trivial de (V2) admet une solution périodique stable. il suffit juste de suivre les mêmes étapes que précédemment. Dans la figure (1.11), on trace les solutions dans l'espace des phases pour les deux modèles (V1) et (V2), ceci montre que la pêche favorise l'évolution des proies.

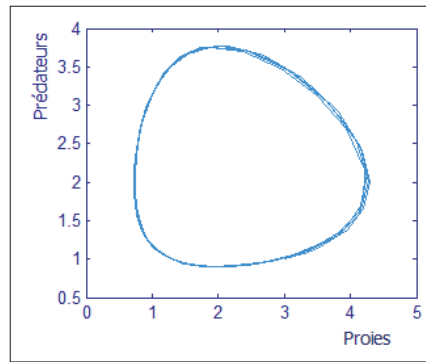


Figure 1.10: Portrait de phase pour une situation initiale correspondant à $N_0 = 3$ et $P_0 = 1$.

Modèle généralisé:

Le modèle de Lotka-Volterra a permis de développer d'autres modèles proie-prédateur de façon à s'approcher de plus en plus la réalité du vivant, en prenant en considération les conditions environnementales qui influencent la croissance, ainsi sur ce type d'interaction. Une formulation très générale d'un système proie-prédateur a été donnée dans [7]:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = F_1(N) - F_2(N, P) \cdot P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \tau \cdot F_2(N, P) \cdot P(t) - mP(t) \end{cases}$$

où $N(t)$ et $P(t)$ désignent les densités de proies et de prédateurs respectivement, à l'instant t .

- F_1 représente le taux de croissance de proies en l'absence de prédateur.
- F_2 décrit la relation entre le prédateur et ses proies, autrement dit, c'est le nombre de proies consommées par un prédateur et par unité de temps. Elle est appelée réponse fonctionnelle du prédateur.
- τ est une constante positive qui représente le taux de conversion de la proie en prédateur.
- m est le taux de mortalité du prédateur par unité de biomasse.

Remarque 1.3.1 *Dans le modèle de Lotka-Volterra, la croissance des proies suit une loi malthusienne, cette hypothèse n'est pas réaliste, pour cette raison,*

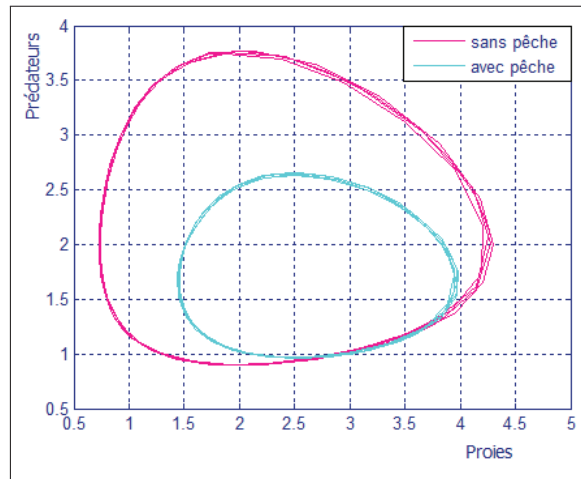


Figure 1.11: Tracé des solutions avec et sans pêche du modèle de Lotka-Volterra, pour une situation initiale $N = 3$ et $P = 1$. et $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 1$, et $h = 0.5$.

généralement, les modèles proies-prédateurs se basent sur une croissance logistique pour les proies (voir [44]). Donc F_1 est choisie comme une équation logistique.

La réponse fonctionnelle du prédateur:

En vue de rendre la représentation du comportement de l'individu par une fonction mathématique plus réaliste, la fonction réponse a été modifiée à maintes reprises par plusieurs chercheurs. A titre d'exemple, dans le cas d'un système proie-prédateur de type Lotka-Volterra $F_2(N) = \beta N$. En tenant compte de l'effet de saturation, la fonction réponse est modifiée sous la forme, dite de Holling

$$F_2(N) = \frac{\beta N}{1 + ahN}$$

Hassel et Varley [30] ont remarqué que la prédation diminue en présence d'autres prédateurs dans le milieu, en effet le prédateur peut prendre assez de temps à chercher une proie en évitant d'autres prédateurs. Les auteurs ont considéré

$$\beta = \alpha P^{-m}, m > 0.$$

Dans le cas particulier où $m = 1$, on retrouve le modèle de Arditi-Ginzburg, où

le modèle rationnelle-dépendent.

Hassel [30] a prouvé que la fonction réponse devait dépendre du prédateur, en revanche, Solomon [53] a démontré que la fonction réponse doit dépendre à la fois de la proie et du prédateur. Au fur et à mesure, cette fonction de réponse a été modifiée, et à travers chaque fonction, on a pu construire un nouveau modèle mathématique. A la fin, on est arrivé à classer ces modèles, en trois catégories suivant l'expression de la réponse fonctionnelle $F_2(N, P)$ (voir [44],[11]):

- Le modèle est densité- dépendant ou prédateur-dépendant lorsque la réponse fonctionnelle dépend à la fois de N et de P .
- Si la réponse fonctionnelle ne dépend que de la proie, c'est à dire $F_2(N, P) = F_2(N)$, alors il est appelé modèle proie-dépendant.
- Si $F_2(N, P) = F_2(P)$, il s'agit donc d'un modèle prédateur-dépendant.

Dans cette thèse nous considérons la fonction de réponse présentée par Beddington et DeAngelis [8], ils introduisent la prédateur-dépendance. Ce modèle se basant sur l'hypothèse que le prédateur dans son milieu doit non seulement chercher sa proie, mais aussi manipuler d'autres prédateurs et il doit également prendre son temps pour la consommer. Ces trois activités sont représentées par la fonction de réponse de Beddington -DeAngelis [8] décrite par:

$$F_2(N, P) = \frac{aN}{1 + ahN + \mu P},$$

où

- a est le taux d'attaque d'une proie.
- h est le temps de manipulation de la proie.
- μ est le produit du taux de rencontre avec un prédateur avec le taux de manipulation d'un autre prédateur.

1.3.2 Modèle d'une population structurée en stade

Ce modèle permet de décrire les interactions entre les êtres vivants d'une même espèce: On considère une population N , composée de deux classes d'âges: les adultes et les juvéniles, notées respectivement à l'instant t par $N_1(t)$ et $N_2(t)$.

Au temps t , des individus qui naissent avec un taux b , qui signifie aussi la production faite par les adultes. De plus, des individus qui passent d'une classe à l'autre, autrement dit, les juvéniles grandissent et ils deviennent des adultes avec un taux de transformation qui diminue l'effectif des juvéniles et augmente celui des adultes avec un taux σ . Il y aura des juvéniles qui sont morts. On note par f le taux qui englobe la mortalité des juvéniles, le passage du stade juvénile au stade adulte et d'autres paramètres. Ceci conduit au modèle suivant:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \sigma N_2(t) - bN_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} &= bN_1(t) - fN_2(t)\end{aligned}$$

Puisque les adultes et les juvéniles partagent le même milieu, donc il se peut qu'il y ait une compétition entre les individus adultes, ainsi qu'entre les deux classes. Nous pouvons également supposer que l'une des populations subit une action de pêche. Avec toutes ces hypothèses formulées et d'autres aussi, nous allons étudier ce modèle dans le troisième chapitre.

Outils mathématiques fondamentaux

Sommaire

2.1	Introduction	24
2.2	Généralités sur les systèmes dynamiques	25
2.2.1	Notions sur la stabilité dans \mathbb{R}^2 :	29
2.3	Système à réaction-diffusion	32
2.4	Contrôle Optimal	33

2.1 Introduction

La modélisation des systèmes biologiques en général, peut se faire à l'aide de systèmes d'équations différentielles, ou bien d'un système d'équations aux dérivés partielles. Pour cette raison, nous rappelons quelques préliminaires mathématiques qui seront nécessaires et très utiles par la suite. Dans le présent chapitre, nous donnons les principales définitions et nous citons quelques lemmes et théorèmes utilisés dans la suite du travail. (le lecteur trouvera des explications et des démonstrations à ces notions dans [4], [60] et [24]). Nous essayerons aussi de donner un résumé sur le principe du maximum de Pontryagin (voir [57]).

signalons que les notations utilisées n'ont aucun lien avec celles présentées dans les autres chapitres.

2.2 Généralités sur les systèmes dynamiques

En général, l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction est décrite par un modèle appelé: un système dynamique, celui ci est défini par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO). Supposons que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , et I est un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} .

Définition 2.2.1 (Equation différentielle) Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction.

On appelle *équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à f* l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (A1)$$

Où $f(t; x) = (f_1(t; x), \dots, f_n(t; x))$, et chaque fonction f_i est continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction f est appelée *champs de vecteur*, l'équation représente un système de n équations différentielles ordinaires. Dans la pratique, l'équation (A1) exprime la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps t , et x représente l'état du système étudié. Si la fonction f ne dépend pas explicitement de t , on parle d'équation différentielle autonome, dans le cas contraire on parle d'EDO non autonome.

Définition 2.2.2 (Solution locale) Une solution de l'EDO (A1), est la donnée d'un couple (I_0, φ) où I_0 est un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} contenu dans I et φ est une fonction de I_0 à valeurs dans \mathbb{R}^n dérivable sur I et vérifiant les conditions suivantes :

- i) $(t; \varphi(t)) \in I_0 \times \Omega$, pour tout $t \in I_0$,
- ii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, pour tout $t \in I_0$,

Définition 2.2.3 L'ensemble $\{(t, \varphi(t)), t \in I_0\}$ est alors appelé *trajectoire de la solution*. L'ensemble $\{\varphi(t), t \in I_0\}$ est alors appelé *orbite de la solution*. Le *portrait de phase* est l'ensemble de toutes les orbites de l'équation différentielle (A1) avec leur sens d'orientation.

Définition 2.2.4 (Ensemble positivement invariant) *Un ensemble $M \subset \Omega$ est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution du système différentiel associé au champ de vecteurs issue de M vérifie $x(t) \in M$, pour tout t pour lequel cette solution est définie.*

Si cette propriété est satisfaite uniquement pour $t \geq 0$, l'ensemble M est un ensemble invariant positif.

Définition 2.2.5 (Problème de Cauchy) *Etant donnée un point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution au problème formulé de la manière suivante:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{A2})$$

On note $I = [0, T[$.

Définition 2.2.6 (Locale lipschitzienité en un point) [4] *On dit que $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en x , si pour chaque point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage $J_0 \times \Omega_0 \subset I \times \Omega$ et une constante $L > 0$ tels que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in J_0 \times \Omega_0.$$

Théorème 2.2.1 *Si f est de classe C^1 sur $I \times \Omega$ alors f est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable x sur $I \times \Omega$.*

Proposition 2.2.1 *Considérons G et B deux fonctions positives définies sur \mathbb{R}^+ . Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction localement lipschitzienne, et γ une constante positive. Alors l'application*

$$h : (G, B) \longmapsto \min(f(G, B), \gamma).$$

est localement lipschitzienne.

Preuve: Puisque la fonction f est localement lipschitzienne. Donc, pour chaque $(G_0, B_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un voisinage de (G_0, B_0) , tel que $\forall (G, B) \in \mathbb{R}^2, \exists k > 0$ tel que

$$|f(G, B) - f(G_0, B_0)| \leq k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|,$$

c'est à dire

$$-k \|(G, B) - (G_0, B_0)\| \leq f(G, B) - f(G_0, B_0) \leq k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|.$$

D'où

$$f(G, B) \geq f(G_0, B_0) - k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|. \quad (2.1)$$

Et puisque

$$h(G_0, B_0) \leq f(G_0, B_0),$$

alors (2.1) donne

$$f(G, B) \geq h(G_0, B_0) - k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|.$$

Les majorations suivantes

$$h(G_0, B_0) - k \|(G, B) - (G_0, B_0)\| \leq h(G_0, B_0) \leq \gamma$$

impliquent

$$\min(f(G, B), \gamma) \geq h(G_0, B_0) - k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|.$$

Il en résulte que

$$h(G, B) \geq h(G_0, B_0) - k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|. \quad (2.2)$$

On obtient enfin

$$-(h(G, B) - h(G_0, B_0)) \leq k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|. \quad (2.3)$$

De manière similaire à l'inégalité donnée par (2.2), pour tout (G_0, B_0)

$$h(G_0, B_0) \geq h(G, B) - k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|.$$

D'où

$$h(G, B) - h(G_0, B_0) \leq k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|. \quad (2.4)$$

En combinant les inégalités en (2.3) et (2.4)

$$|h(G, B) - h(G_0, B_0)| \leq k \|(G, B) - (G_0, B_0)\|.$$

Il en découle que la fonction h est localement lipschitzienne. ■

Théorème 2.2.2 (Cauchy-Lipschitz, forme locale) [60]

Si la fonction $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne en x , alors il existe $a > 0$, tel que pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (A2) admet une unique solution dans $[t_0 - a; t_0 + a]$.

Remarque 2.2.1 Le théorème s'applique en particulier aux fonctions f de classe C^1 , qui sont localement lipschitziennes.

Définition 2.2.7 (Solution bornée) Une solution $\varphi(t, t_0, x_0)$ du système (A2) est dite bornée dans \mathbb{R}^n s'il existe une région compacte $A \subset \mathbb{R}^n$ et un temps fini T ($T = T(t_0, x_0)$) tels que, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

$$\varphi(t, t_0, x_0) \in A, \quad \text{pour tout } t \geq T$$

Nous aurons aussi besoin de l'inégalité introduite par Gronwall en 1918, elle sera très utile pour obtenir des majorations de solutions d'un système d'EDO.

Lemme 2.2.1 (Inégalité de Gronwall) Soit φ une fonction de classe $C^1(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , vérifie l'inégalité différentielle :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leq \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t), \quad t > 0$$

où α et β sont des fonctions continues de I dans \mathbb{R} , et $x(t_0) = x_0$ pour un $t_0 \in I$. Alors, on a l'inégalité

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0)e^{\left(\int_{t_0}^t \alpha(s)ds\right)} + \int_{t_0}^t e^{\left(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\right)}\beta(s)ds$$

Définition 2.2.8 (Solution périodique) On suppose ici que $I = \mathbb{R}$, et soit $(I_0; \varphi)$ une solution de (A1). Alors, on dit que $(I_0; \varphi)$ est une solution périodique si $I_0 = \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$ tel que $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2.9 (Système coopératif) Supposons que D est un convexe de \mathbb{R}^n . Le système définie par A3 est dit coopératif si

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad x \in D$$

2.2.1 Notions sur la stabilité dans \mathbb{R}^2 :

Les notions sur l'existence et de l'unicité des solutions sont des résultats locaux en temps et en espace. La notion de stabilité permet de savoir leur comportement lorsque le temps devient grand.

Soit le système décrit par l'équation différentielle (A1), il est non linéaire et autonome

$$x' = f(x(t)) \quad (\text{A3})$$

Afin d'assurer l'existence et l'unicité de solutions du problème de Cauchy-Lipschitz (A2), nous supposons par la suite que f est localement lipschitzienne.

Définition 2.2.10 (Point d'équilibre) *Un vecteur x^* est dit point critique ou point d'équilibre pour (A3) si $f(x^*) = 0$.*

Un point d'équilibre du système (A3) représente un régime (un état) stationnaire, la question qui se pose: Que va devenir le système si l'on s'écarte de l'équilibre? pourra t il atteindre un état stationnaire? Autrement dit, si on provoque une perturbation, est ce que la solution perturbée retournera vers l'équilibre (cas d'équilibre stable) ? ou bien pourra t elle s'éloigner de ce point? (cas d'un équilibre instable).

Dans cette thèse nous nous basons sur des systèmes de dimension deux pour présenter différents résultats de stabilité, (pour la dimension n voir [4, 3]).

Considérons maintenant le système non linéaire et autonome plan décrit par

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \\ x(0) = x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \end{cases} \quad (2.5)$$

Définition 2.2.11 (Stabilité) [24] *Un point d'équilibre x^* est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que*

$$\|x_0 - x^*\|_{\mathbb{R}^2} < \delta_\epsilon \Rightarrow \|x(t) - x^*\|_{\mathbb{R}^2} < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Définition 2.2.12 *Le point d'équilibre x^* est dit instable s'il n'est pas stable.*

Définition 2.2.13 *Un point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que*

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_\epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*.$$

Une démarche première à suivre pour déterminer si le point stationnaire x^* est stable ou non, est la linéarisation du système différentiel (non linéaire), elle est obtenue en utilisant le développement de Taylor du premier ordre des deux fonction f_1 et f_2 autour de l'équilibre $x^* = (x_1^*, x_2^*)$.

Définition 2.2.14 (Linéarisation) *Le linéarisé autour de l'équilibre (x_1^*, x_2^*) du système non linéaire (2.5) est défini par*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}}_{J(x_1^*, x_2^*)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Où $J(x_1^*, x_2^*)$ est appelée la matrice jacobienne calculée au point x^* , notée par J^* . On note par $\det(J^*)$ et $\text{Tr}(J^*)$ respectivement le déterminant et la trace de la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre x^* .

Remarque 2.2.2 *Un système dynamique peut avoir plusieurs points d'équilibre, donc on aura autant de systèmes linéarisés que de points stationnaires.*

Théorème 2.2.3 (Stabilité) [47] *On suppose pour le système donné par (2.5) que $\det(J^*) \neq 0$, et $\text{Tr}^2 - 4 \det(J^*) \geq 0$, on a les résultats suivants:*

- i) Si $\det(J^*) < 0$ alors le point d'équilibre x^* est un point-selle pour (2.5).*
- ii) Si $\det(J^*) > 0$ et $\text{Tr} < 0$, alors le point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable.*
- iii) Si $\det(J^*) > 0$ et $\text{Tr} \geq 0$, alors le point d'équilibre x^* est instable.*

Théorème 2.2.4 (Lyapunov) *Soit x^* un point d'équilibre associé à (2.5). Soit $\Omega_0 \subset \Omega$, un voisinage de x^* et $V : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant:*

- i) $V(x^*) = 0$.
- ii) Pour tout $x \in \Omega_0 - \{x^*\}$, $V(x) > 0$.
- iii) Pour tout $x \in \Omega_0$, $\frac{dV}{dx} < 0$.

Alors, x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Proposition 2.2.2 *Si x^* est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov et que $V(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini, toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* tendent vers x^* : on dit alors que le point x^* est globalement asymptotiquement stable.*

Théorème 2.2.5 (Poincaré-Bendixson) [24] *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact. Supposons que la solution $x(x_0, t)$ du système (2.5) reste dans K , pour tout $t \geq 0$, alors*

- i) ou bien $x(x_0, t)$ est une orbite périodique de (2.5).
- ii) ou bien $x(x_0, t)$ converge vers une solution périodique de (2.5).
- iii) ou bien $x(x_0, t)$ converge vers un point d'équilibre de (2.5).

La figure suivante explique les résultats du théorème de Poincaré-Bendixson.

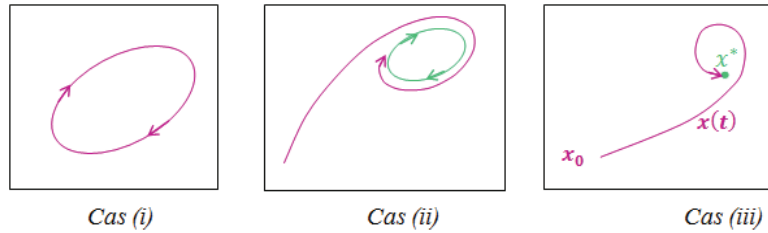


Figure 2.1: Comportement asymptotique pour une solution $x(\cdot)$ d'un système autonome dans le plan.

En pratique, le théorème suivant permet dans certains cas d'éliminer les deux premiers cas i) et ii) du théorème de Poincaré-Bendixson et de déduire la stabilité globale du point d'équilibre.

Théorème 2.2.6 (Critère de Bendixson) [60] *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine connexe. On suppose que (f_1, f_2) est continue différentiable dans D . Si la divergence $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ n'est pas identiquement nulle et de signe constant sur D alors l'équation (2.5) n'admet pas de solution périodique.*

2.3 Système à réaction-diffusion

Dans la dynamique de populations un système à réaction-diffusion est un modèle mathématique qui exprime l'évolution d'une ou plusieurs populations spatialement distribuées. La répartition spatiale de cette population est décrite par la diffusion.. Soit Ω . un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Les systèmes à réaction-diffusion prennent la forme générale suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) = d_i \Delta u_i(x, t) + F_i(x, u(x, t)), & t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial n}(x, t) + \alpha_i(x) u_i(x, t) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u_i(x, 0) = \Phi_i(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

Où $i = 1, \dots, n$, et $d_i > 0$ est une constante, ainsi $\alpha_i(x) \geq 0$.

Soit $\tilde{X} = \prod_{i=1}^n X_i$, avec $X_i = C(\bar{\Omega})$

Soit l'ensemble

$$X = \left\{ \Phi \in \tilde{X} : \Phi(x) \in \mathbb{R}_+^n, x \in \bar{\Omega} \right\}$$

Théorème 2.3.1 (Existence de la solution) ([51]) *Supposons que $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^n$ satisfait la condition*

$$F_i(x, u(x, t)) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } u_i = 0$$

Alors pour tout $\Phi \in X$, le système (2.6) admet une solution positive $u(t) \in X$.

Soient v_i^\pm une solution qui satisfait les inégalités différentielles suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i^+}{\partial t}(x, t) \geq d_i \Delta v_i^+(x, t) + F_i^+(x, v_i^+(x, t)), & t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial v_i^+}{\partial n}(x, t) + \alpha_i(x) v_i^+(x, t) \geq 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i^-}{\partial t}(x, t) \leq d_i \Delta v_i^-(x, t) + F_i^-(x, v_i^-(x, t)), & t > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial v_i^-}{\partial n}(x, t) + \alpha_i(x) v_i^-(x, t) \leq 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

Les fonctions v_i^- et v_i^+ sont appelées respectivement sur-solution et sous-solution. Le théorème suivant est un critère de comparaison fondamental

Théorème 2.3.2 (Critère de comparaison) ([51]) *supposons que v_i^- et v_i^+ vérifient respectivement (2.8) et (2.7) et que F_i^\pm sont coopératives. Supposons aussi que*

$$F_i^-(x, u) \leq F_i(x, u) \leq F_i^+(x, u) \quad (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^n$$

et $\Phi \in X$ vérifie

$$v_i^-(x, 0) \leq \Phi_i(x) \leq v_i^+(x, 0) \quad i=1, \dots, n$$

Alors le système admet une solution unique sur $[0, T_{\max})$ et

$$v_i^-(x, t) \leq u(x, t) \leq v_i^+(x, t)$$

2.4 Contrôle Optimal

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler. Eventuellement, après modélisation, on obtient souvent un système comportant plusieurs variables et un paramètre qui le contrôle. Si le système évolue dans le temps, les variables nommées variables d'états, seront notées par $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, et t désigne le temps défini dans un intervalle $[0, T]$. Ces n variables seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, elle sont sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), E(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où f est un vecteur de n composantes f_i , $i = 1, \dots, n$. Il se peut que f soit linéaire ou bien non linéaire.

Définition 2.4.1 (Le contrôle) *Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique E appelé le contrôle.*

Définition 2.4.2 *On appelle U_{ad} l'ensemble des valeurs admissibles pour le contrôle E , tel que $E(t) \in U_{ad}$.*

Remarque 2.4.1 *Ces contrôles sont à valeurs dans un ensemble $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ où m désigne le nombre de composantes du contrôle E . Comme nous le verrons dans le chapitre 3, cet ensemble, peut être un domaine fermé ou ouvert de \mathbb{R} .*

L'objectif du contrôle optimal sera de déterminer un contrôle E^* qui permet de manipuler le système (2.9) selon sa dynamique tout en maximisant la fonctionnelle de coût J définie par

$$J(t, E) = \int_0^T G(t, x(t), E(t)) dt$$

Avec $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 et T est la durée que prend le contrôle E pour agir sur le système allant de l'état initial $t_0 = 0$, jusqu'à l'état final $t = T$ (le temps peut être fixé ou non).

Autrement dit, le problème de contrôle optimal consiste à déterminer une solution ayant une qualité optimale. Mathématiquement, le problème se formule de la façon suivante :

$$\begin{cases} \max J(t, E) & \text{sur } U_{ad} \\ \text{sous les contraintes} & x'(t) = f(t, x(t), E(t)) \end{cases} \quad (2.10)$$

L'outil mathématique clé pour résoudre ce genre de problème est le principe du maximum de Pontryagin (PMP) qui a été formulé par le mathématicien Russe: Lev Semenovich Pontryagin en 1956:

Définition 2.4.3 (Hamiltonien) *Considérons le système (2.11)*

$$x'(t) = f(t, x(t), E(t)), \quad (2.11)$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 dans \mathbb{R}^n . Alors le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$H(x(t), \lambda(t), E(t)) = G(x(t), E(t)) + \lambda^T(t) \cdot f(x(t), E(t)).$$

Théorème 2.4.1 (Principe du Maximum de Pontryagin) ([57]) *Si $E^*(t)$ est un contrôle optimal pour le problème (2.10), et $x^*(t)$ sa réponse, alors il existe une fonction $\lambda^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelée vecteur adjoint tel que pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), \lambda^*(t), E^*(t)), \quad (2.12)$$

et

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), \lambda^*(t), E^*(t)) \quad (2.13)$$

Ainsi

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), E^*(t)) = \max_{E \in U_{ad}} H(x^*(t), \lambda^*(t), E(t)). \quad (2.14)$$

De plus, l'application $H : t \mapsto H(x^*(t), \lambda^*(t), E^*(t)) \quad t \in [0, T]$ est constante.

Remarque 2.4.2

- i) L'expression en (2.13) représente les équations adjointes, par contre (2.14) exprime la condition de maximisation.*
- ii) En l'absence de contraintes sur le contrôle la condition de maximisation (2.14) devient :*

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0$$

Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

Sommaire

3.1	Introduction	37
3.2	Présentation du modèle	38
3.3	Modèle avec diffusion	40
3.3.1	Existence de la solution globale:	40
3.3.2	Solution d'équilibre du système (3.1)	41
3.4	Comportement dynamique du système EDO	44
3.4.1	Dissipativité	45
3.4.2	Existence des points d'équilibre	46
3.4.3	Stabilité des points d'équilibre	47
3.5	Dynamique lente-rapide	54
3.6	Contrôle de la pêche	57
3.6.1	Pêche en libre accès	57
3.6.2	Stratégie optimale	62
3.7	Conclusion	65

Ce chapitre est le développement de l'article [15].

3.1 Introduction

Les modèles mathématiques décrivant l'effet de la récolte sont très complexes. Ils nécessitent une élaboration de la stratégie de récolte qui assure une exploitation durable de la ressource, compromis entre la maximisation des revenus de la pêche et la pérennité des stocks. Elle doit d'un côté éviter l'instabilité ou l'extinction de l'espèce, et de l'autre, permettre de tirer un maximum de bénéfices de la mer. Différents modèles dynamiques ont été analysés en tenant compte des facteurs économiques et écologiques, à titre d'exemple les travaux de Chaudhuri ([19]), Clarck ([21]), Denis ([27]), Jelijer ([34]), Kumar ([36]) et Murray ([44])

Dans ce contexte, ce chapitre donnera un aperçu de la complexité trouvée et de la diversité des techniques utilisées pour résoudre ce problème. Tout d'abord, la population étudiée est composée en deux classes d'âge: les adultes et les juvéniles. Il est supposé que seule la population des adultes est soumise à l'exploitation, celle ci peut être réalisée avec des mesures telles que l'augmentation de la taille des mailles du filet.

Nous considérons deux échelles de temps, une qui est rapide, elle est associée à un mouvement rapide de poissons dans Ω . L'autre qui est lente, correspond aux paramètres démographiques de la population des poissons.

Le modèle présenté ici est un modèle de réaction-diffusion, basé sur la classique relation stock-recrutement, (voir Beverton-Holt [12]) Il présente non seulement, la concurrence entre les immatures, étudié par Beverton [12], mais aussi le cannibalisme développé par Ricker [49].

Ce chapitre est structuré de trois sections. La première, consiste à faire l'approche de ce modèle (voir Sanchez [50]), qui permet de concentrer l'étude sur un système des équations différentielles ordinaires régissant la densité de la population totale, obtenue par intégration sur le domaine spatial et l'échelle de temps lent.

La seconde section de ce chapitre, est consacrée à l'étude de l'existence globale et le comportement asymptotique en temps des solutions, nous montrons que le cannibalisme et la concurrence n'ont aucun effet direct sur la survie de la population.

La dernière section, a pour but d'étudier un problème de récolte optimale, nous faisons appel au principe du maximum de Pontryagin, pour résoudre un

problème de contrôle optimal, et nous proposons une stratégie de récolte.

3.2 Présentation du modèle

Nous nous intéressons à étudier une population structurée en âge, qui occupe une région spatiale notée par Ω . Cette population est composée en deux classes: les adultes et les juvéniles. Supposons que les biomasses des adultes et des juvéniles respectivement sont $U(t, x)$ et $V(t, x)$, à l'instant t et à la position x . Il est considéré dans cette étude que toute la population est soumise à une dispersion aléatoire avec une constante de diffusion appelée $d_\Omega > 0$. Ainsi que cette zone est soumise à l'effet de la pêche agissant uniquement sur les adultes. Le modèle décrivant ce problème est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}U - d_\Omega \Delta U = \sigma^*(x)V - \alpha^*(x)U^2 - E^*(x)U & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t}V - d_\Omega \Delta V = b^*(x)U - f^*(x)V - d^*(x)UV & \text{dans } \Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans ce milieu, il est supposé qu'il n'y a pas de migration de l'espèce à travers la limite de leur habitat, ceci signifie que les adultes et les juvéniles sont bloqués à l'intérieur du domaine Ω et ne peuvent pas en sortir. Ce qui oblige l'implémentation des conditions de Neumann aux bords pour U et V , tel que

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T].$$

Avec des conditions initiales

$$U(0, x) = U_0, \quad V(0, x) = V_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

U_0 et V_0 sont des fonctions positives et continues. Ainsi, sur $\bar{\Omega}$, les fonctions $\sigma^*, \alpha^*, E^*, b^*, f^*$ et d^* sont positives et continues:

- σ^* est le taux de maturation de la population juvénile à la population adulte.
- b^* est le taux de natalité des juvéniles que produisent les adultes.
- α^* est le coefficient mesurant la compétition entre les adultes sur la nourriture et l'espace.
- E^* est l'effort de pêche.

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

- f^* mesure la mortalité des juvéniles (mortalité naturelle, la prédation par d'autres espèces, et la mortalité causée par l'activité de pêche).
- d^* est le taux de cannibalisme, il exprime les individus de poissons qui dévorent des membres de leurs propre espèce.

Supposons que d_Ω est une constante assez grande tel que $d_\Omega = \frac{1}{\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$, alors en intégrant (3.1) sur Ω , on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} U(t, x) dx = \int_{\Omega} \sigma^*(x) V(t, x) dx - \int_{\Omega} \alpha^*(x) U(t, x)^2 dx - \int_{\Omega} E^*(x) U(t, x) dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} V(t, x) dx = \int_{\Omega} b^*(x) U(t, x) dx - \int_{\Omega} f^*(x) V(t, x) dx - \int_{\Omega} d^*(x) V(t, x) U(t, x) dx \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Prenons comme nouvelle variable, la population totale des matures et immatures individus définie par:

$$u(t) = \int_{\Omega} U(t, x) dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_{\Omega} V(t, x) dx.$$

Alors, (3.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = \int_{\Omega} \sigma^*(x) V(t, x) dx - \int_{\Omega} \alpha^*(x) U(t, x)^2 dx - \int_{\Omega} E^*(x) U(t, x) dx \\ v'(t) = \int_{\Omega} b^*(x) U(t, x) dx - \int_{\Omega} f^*(x) V(t, x) dx - \int_{\Omega} d^*(x) V(t, x) U(t, x) dx \end{array} \right.$$

Par l'application du théorème 4 dans [50], on a les approximations suivantes:

$$U(t, x) \approx \frac{u(t)}{\text{vol}(\Omega)} \quad \text{et} \quad V(t, x) \approx \frac{v(t)}{\text{vol}(\Omega)}.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\int_{\Omega} \sigma^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, & b &= \frac{\int_{\Omega} b^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, \\ E &= \frac{\int_{\Omega} E^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, & f &= \frac{\int_{\Omega} f^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, \\ d &= \frac{\int_{\Omega} d^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)^2}.\end{aligned}$$

A la fin, il en résulte le système aux équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma v - \alpha u^2 - Eu \\ \frac{dv}{dt} = bu - fv - duv \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le théorème 4 de Sanchez [50], affirme que le système (3.3) est une bonne approximation du système de diffusion (3.1) dont la structure spatiale est prise en compte par les paramètres. La dynamique de (3.1) dépend donc de celle du système (3.3).

3.3 Modèle avec diffusion

L'existence locale et la positivité de la solution du système (3.1) sont la conséquence du théorème(2.3.1) (voir [51].)

3.3.1 Existence de la solution globale:

L'existence globale veut dire que la solution est définie pour tout $t \geq 0$. Elle est établie pour les solutions positives, dans la proposition qui suit:

Proposition 3.3.1 *Toutes les solutions $U(t, \cdot), V(t, \cdot)$ du système (3.1) sont définies sur $[0, +\infty)$.*

Preuve: Pour $T > 0$, Considérons le système coopératif

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} U^+ - d_{\Omega} \Delta U^+ = \sigma^* V^+ & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial}{\partial t} V^+ - d_{\Omega} \Delta V^+ = b^* U^+ & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ U^+(0, x) = \|U_0\|_{\infty}, V^+(0, x) = \|V_0\|_{\infty} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial U^+}{\partial n} = \frac{\partial V^+}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right.$$

Soit $U^+(t)$ et $V^+(t)$ la solution du système précédent qui dépendent de t . Alors (U^+, V^+) satisfait l'EDO

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt} U^+ = \sigma^* V^+ & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{d}{dt} V^+ = b^* U^+ & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0) = \|U_0\|_{\infty}, V^+(0) = \|V_0\|_{\infty} & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Par le principe de comparaison (voir le théorème (2.3.2), [51]), on a:

$$0 \leq U(t, x) \leq U^+(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq V(t, x) \leq V^+(t).$$

On en déduit que $(U(t, \cdot), V(t, \cdot))$ sont définies globalement sur \mathbb{R}^+ . ■

3.3.2 Solution d'équilibre du système (3.1)

A l'état d'équilibre $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$, considérons donc le système de diffusion:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d_{\Omega} \Delta U = \sigma^*(x)V - \alpha^*(x)U^2 - E^*(x)U & \text{dans } \Omega, \\ -d_{\Omega} \Delta V = b^*(x)U - f^*(x)V - d^*(x)UV & \text{dans } \Omega, \quad . \quad (3.4) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Les résultats obtenus dans Brown et Zhang [16] et Bouguima [14], montrent que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'au moins une solution positive pour (3.4) est que la solution triviale est instable. On propose le résultat suivant:

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge 42

Soit g une fonction continue sur $\bar{\Omega}$. Notons par

$$\underline{g} = \inf_{\bar{\Omega}} g \quad \text{et} \quad \bar{g} = \sup_{\bar{\Omega}} g.$$

Proposition 3.3.2 *Si $\underline{\sigma^* b^*} > \overline{E^* f^*}$, alors la solution triviale du système (3.1) est instable.*

Preuve: Définissons les opérateurs

$$L = \begin{pmatrix} -d_{\Omega}\Delta & 0 \\ 0 & -d_{\Omega}\Delta \end{pmatrix},$$

et

$$A(x) = \begin{pmatrix} -E^*(x) & \sigma^*(x) \\ b^*(x) & -f^*(x) \end{pmatrix}.$$

Alors l'opérateur $L - A$ a une valeur propre principale notée par $\lambda_1(L - A)$.

Pour montrer que $(0, 0)$ est instable, il suffit de prouver que $\lambda_1(L - A) < 0$.

Soit (U_p, V_p) la fonction propre principale associée à $\lambda_1(L - A)$, alors:

$$\begin{cases} -d_{\Omega}\Delta U_p - \sigma^*(x)V_p + E^*(x)U_p = \lambda_1(L - A)U_p & \text{dans } \Omega, \\ -d_{\Omega}\Delta V_p - b^*(x)U_p + f^*(x)V_p = \lambda_1(L - A)V_p & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial U_p}{\partial n} = \frac{\partial V_p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'intégration sur le domaine Ω , donne:

$$\int_{\Omega} -d_{\Omega}\Delta U_p dx = \int_{\Omega} -d_{\Omega}\Delta V_p dx = 0.$$

Ce qui implique:

$$\int_{\Omega} (\sigma^*(x)V_p - E^*(x)U_p) dx = - \int_{\Omega} \lambda_1(L - A)U_p dx,$$

et

$$\int_{\Omega} (b^*(x)U_p - f^*(x)V_p) dx = - \int_{\Omega} \lambda_1(L - A)V_p dx.$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

Puisque U_p et V_p sont des fonctions strictement positives, on déduit que

$$-\lambda_1(L - A) \int_{\Omega} U_p dx \geq \underline{\sigma}^* \int_{\Omega} V_p dx - \overline{E}^* \int_{\Omega} U_p dx,$$

et

$$-\lambda_1(L - A) \int_{\Omega} V_p dx \geq \underline{b}^* \int_{\Omega} U_p dx - \overline{f}^* \int_{\Omega} V_p dx.$$

Soit

$$\xi = \frac{\int_{\Omega} V_p dx}{\int_{\Omega} U_p dx} > 0.$$

On obtient:

$$-\lambda_1(L - A) \geq \underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*,$$

et donc:

$$-\lambda_1(L - A) \geq \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^*.$$

Étudions maintenant le problème suivant:

$$\inf_{\xi > 0} \max \left(\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*, \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* \right).$$

Considérons alors l'équation:

$$\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^* = \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^*.$$

Cette équation admet une racine positive ξ^* ,

$$\xi^* = \frac{(\overline{E}^* - \overline{f}^*) + \sqrt{(\overline{E}^* - \overline{f}^*)^2 + 4\underline{\sigma}^* \underline{b}^*}}{2\underline{\sigma}^*}.$$

Par conséquent,

$$\max_{\xi > 0} \left(\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*, \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* \right) = \begin{cases} \underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^* & \text{si } \xi \geq \xi^*, \\ \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* & \text{si } \xi \leq \xi^*. \end{cases}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \inf_{\xi > 0} \max \left(\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*, \frac{b^*}{\xi} - \overline{f}^* \right) &= \underline{\sigma}^* \xi^* - \overline{E}^* = \frac{b^*}{\xi^*} - \overline{f}^*, \\ &= \frac{4 (\underline{\sigma}^* b^* - \overline{E}^* \overline{f}^*)}{(\overline{E}^* + \overline{f}^*) + \sqrt{(\overline{E}^* - \overline{f}^*)^2 + 4 \underline{\sigma}^* b^*}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$-\lambda_1 (L - A) \geq \frac{4 (\underline{\sigma}^* b^* - \overline{E}^* \overline{f}^*)}{(\overline{E}^* + \overline{f}^*) + \sqrt{(\overline{E}^* - \overline{f}^*)^2 + 4 \underline{\sigma}^* b^*}}.$$

Si $\underline{\sigma}^* b^* - \overline{E}^* \overline{f}^* > 0$, alors

$$\lambda_1 (L - A) < 0.$$

Par suite, la solution triviale de (3.1) est instable. ■

3.4 Comportement dynamique du système EDO

Nous présentons ici, le comportement dynamique du système d'équations différentielles non linéaires décrit par le modèle (3.3). Nous allons donc, établir des conditions pour lesquelles les solutions sont bornées.

Pour commencer, rappelons le système (3.3)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma v - \alpha u^2 - Eu \\ \frac{dv}{dt} = bu - fv - duv \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Il se réécrit sous la forme matricielle suivante:

$$X'(t) = F(X(t)),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

F est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R}^2 ,

$$F(X) = \begin{pmatrix} F_1(u, v) \\ F_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma v - \alpha u^2 - Eu \\ bu - fv - duv \end{pmatrix}.$$

3.4.1 Dissipativité

Cette propriété fournit une base théorique afin d'étudier le comportement asymptotique des solutions de ce système. Notons par \mathbb{R}_+^{*2} le quadrant strictement positif tel que

$$\mathbb{R}_+^{*2} := \{(u, v) : u > 0, v > 0\}.$$

Il est clair que d'après le théorème de Cauchy (2.2.5), le système décrit par (3.3) admet une solution unique, en fait, comme la fonction F est de classe C^1 , donc elle est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}_+^2 , on en déduit l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle (3.3).

Dans la suite, le système (3.3) sera analysé avec des densités initiales et positives $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ pour $t \geq 0$.

Lemme 3.4.1 *Le quadrant \mathbb{R}_+^{*2} est positivement invariant pour le système (3.3).*

Preuve: A partir des équations du système (3.3), on remarque que sur la frontière $\partial\mathbb{R}_+^2$, les deux axes (ox) et (oy) sont invariants. De plus, l'existence et l'unicité de la solution pour des densités initiales: $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ affirme que $u(t) > 0$ et $v(t) > 0$, pour $t \geq 0$. ■

Dans le théorème suivant, on démontre que sous certaines conditions, les solutions du système (3.3) issues de \mathbb{R}_+^2 sont bornées pour t suffisamment grand.

Théorème 3.4.1 *: Soit l'ensemble K définie par*

$$K = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : u + v \leq \frac{b\sigma}{\alpha f} \right\}.$$

Alors, toute solution partant de \mathbb{R}_+^2 est bornée.

Preuve: Tout d'abord montrons que pour tout $t \geq 0$, $u + v \leq \frac{b\sigma}{\alpha f}$.

Soit la fonction w définie par

$$w(t) = \frac{u(t)}{\sigma} + \frac{v(t)}{f}.$$

Alors, par dérivation on obtient

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{\sigma}u^2(t) - \frac{E}{\sigma}u(t) + \frac{b}{f}u(t) - \frac{d}{f}u(t)v(t).$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

La majoration implique que

$$\frac{dw(t)}{dt} \leq \frac{b}{f}u(t) - \frac{\alpha}{\sigma}u^2(t).$$

Par l'application du principe de comparaison, on a:

$$w \leq z,$$

où z c'est la solution de l'équation logistique

$$z' = \frac{b}{f}z - \frac{\alpha}{\sigma}z^2.$$

Et donc, z s'écrit sous la forme suivante,

$$z(t) = \frac{b\sigma f}{c\sigma b^2 \exp(-\frac{b}{f}t) - f^2\alpha}$$

Par passage à la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup z(t) \leq \frac{b\sigma}{\alpha f}.$$

Ce qui implique

$$w(t) < \frac{b\sigma}{\alpha f}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ce résultat signifie bien que les solutions sont bornées, autrement dit, le système (3.3) est dissipatif. ■

3.4.2 Existence des points d'équilibre

La recherche des points d'équilibre du système (3.3) se traduit par la résolution du système suivant:

$$\begin{cases} u' = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{\alpha u^2 + Eu}{\sigma} \\ bu - fv - duv = 0 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Il revient donc à résoudre l'équation polynomiale de degré trois en u suivante:

$$-d\alpha u^3 - (dE + f\alpha)u^2 + (b\sigma - fE)u = 0.$$

Il est évident que le système (3.3) admet à la frontière du domaine, un seul

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

point d'équilibre trivial, noté par $P_0(0, 0)$. Celui-ci exprime qu'au bord de la zone étudiée, la densité des adultes et des juvéniles est nulle. A l'intérieur du domaine, nous avons une densité de u^* , qui est non- nulle et qui est solution de l'équation

$$-d\alpha u^{*2} - (dE + f\alpha)u^* + (b\sigma - fE) = 0. \quad (3.6)$$

Si la condition

$$E < \frac{\sigma b}{f}$$

est vérifiée, alors l'équation (3.6) admet une unique solution positive qui est

$$u^* = \frac{-\alpha f - dE + \sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma}}{2\alpha d}.$$

Nous résumons cette étude dans le théorème(3.4.2)

Théorème 3.4.2 :Si $E < \frac{\sigma b}{f}$ alors le système (3.3) admet un unique point d'équilibre positif $P^*(u^*, v^*)$ donné par

$$u^* = \frac{-\alpha f - dE + \sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma}}{2\alpha d}, \quad (3.7)$$

et

$$v^* = \frac{\alpha u^{*2} + Eu^*}{\sigma}. \quad (3.8)$$

Remarque 3.4.1 Du point de vue écologique, ces résultats signifient que les adultes et les juvéniles sont en coexistence pour une pêche bien maintenue, avec un effort de pêche E assez petit. Autrement dit, l'effort de pêche ne doit pas dépasser un certain seuil qui est $\frac{\sigma b}{f}$, comme le montre la figure (3.1). Dans la suite, il sera montré que ce point d'équilibre est globalement stable.

La figure (3.2) montre bien que si l'effort E dépasse la valeur $\frac{\sigma b}{f}$, alors les populations des adultes et juvéniles vont s'éteindre.

3.4.3 Stabilité des points d'équilibre

La stabilité des équilibres P_0 et P_* est étudiée en considérant la linéarisation du système (3.3):

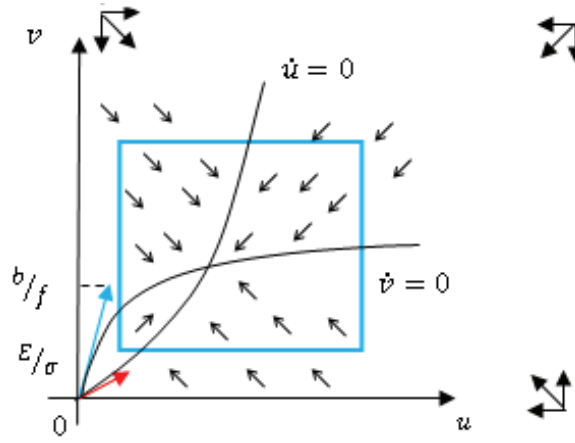


Figure 3.1: Coexistence des adultes et des juvéniles pour $E < \frac{\sigma b}{f}$

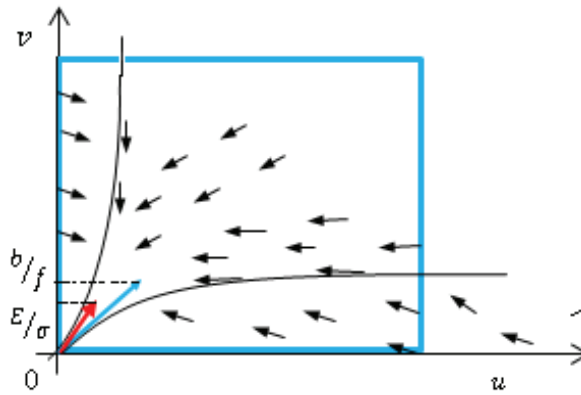


Figure 3.2: L'extinction de la population lorsque $E > \frac{\sigma b}{f}$.

Soit $J(u, v)$ la matrice jacobienne associée à (3.3) au point (u, v) :

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} -(2\alpha u + E) & \sigma \\ b - dv & -(f + du) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Notons par $Tr(J)$ et $\det(J)$ respectivement la trace et le déterminant associés à la matrice $J(u, v)$, on a:

$$Tr(J) = -(2\alpha u + E + f + du) \quad (3.10)$$

$$\det(J) = (2\alpha u + E)(f + du) - \sigma(b - dv) \quad (3.11)$$

Remarque 3.4.2 *Le signe de la trace $Tr(J)$ est négatif pour tout couple*

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

$(u, v) \in K$, par contre le signe du déterminant $\det(J)$ sera discuté dans les théorèmes suivants:

A la suite, les théorèmes (3.4.3) et (3.4.4) présenteront des conditions qui permettent à la population de survivre à l'état d'équilibre, ceci sera interprété par l'étude de la stabilité au points P_0 et P_* . On a le résultat suivant

Théorème 3.4.3

- i) Si $E > \frac{\sigma b}{f}$, alors l'origine P_0 est localement asymptotiquement stable.
- ii) Si $E < \frac{\sigma b}{f}$, alors l'origine P_0 est un point-selle .

Preuve: La matrice donnée par (3.9) au point $P_0(0, 0)$ est

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -E & \sigma \\ b & -f \end{pmatrix}.$$

En P_0 , les équations (3.10) et (3.11) deviennent

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J) &= -(E + f) \\ \det(J) &= Ef - \sigma b \end{aligned}$$

On a deux cas:

- i) Si $Ef - \sigma b > 0$, alors le $\det(J)$ est positif et la trace $\text{Tr}(J)$ est négative, cela veut dire que le point $P_0(0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.
- ii) Si $Ef - \sigma b < 0$, dans ce cas, puisque la trace et le déterminant de $J(0, 0)$ sont négatifs, on en déduit que $P_0(0, 0)$ est instable.

■

Remarque 3.4.3 Bien que la pêche est limitée uniquement pour les adultes, elle agit d'une façon indirecte sur la croissance des juvéniles. En effet, lorsque l'effort de pêche dépasse une valeur de seuil, les femelles matures qui sont capturées ne peuvent pas produire des œufs, par conséquent, les mineurs peuvent disparaître. Donc, il faut imposer la condition suivante

$$E < \frac{\sigma b}{f} \tag{3.12}$$

qui assure la coexistence des deux populations.

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

A travers le théorème qui suit, nous étudions le comportement des adultes et des juvéniles à l'état d'équilibre lorsque la condition (3.12) est vérifiée.

Théorème 3.4.4 *Si $E < \frac{\sigma b}{f}$, alors l'équilibre P^* est localement asymptotiquement stable.*

Preuve: Rappelons tout d'abord que l'état d'équilibre des adultes individus est atteint en

$$u^* = \frac{-\alpha f - dE + \sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma}}{2\alpha d}$$

c-à-d

$$u^* = \eta - \frac{E}{2\alpha} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma} - f\alpha}{2d\alpha} \quad (3.13)$$

De même pour les juvéniles, nous avons d'après (3.8) et (3.13)

$$v^* = \frac{(2\alpha\eta - E)(2\alpha\eta + E)}{4\alpha\sigma}$$

Observons que $\eta > 0$ et puisque $u^* > 0$, nous obtenons facilement :

$$\eta > \frac{E}{2\alpha}$$

Avec ces nouvelles notations, la jacobienne qui est calculée au point (u^*, v^*) devient

$$J(u^*, v^*) = \begin{bmatrix} -2\alpha\eta & \sigma \\ b - \frac{d}{4\alpha\sigma} (2\alpha\eta - E)(2\alpha\eta + E) & -\left(\frac{2\alpha f + 2\alpha d\eta - Ed}{2\alpha}\right) \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice, $\det(J)$ peut être considéré comme étant un polynôme du second degré en η , noté par

$$\begin{aligned} \det(J) &= 3d\alpha\eta^2 + (2f\alpha - dE)\eta - b\sigma - \frac{dE^2}{4\alpha}. \\ &= P(\eta). \end{aligned}$$

Dont le discriminant est

$$\Delta_1 = (2\alpha f - Ed)^2 + 3E^2d^2 + 12d\alpha\sigma b. \quad (3.14)$$

Puisque $\Delta_1 > 0$, le polynôme $P(\eta)$ admet deux racines réelles de signe opposé: $\eta_1 < 0$ et $\eta_2 > 0$ données par,

$$\eta_1 = -\frac{2\alpha f - Ed + \sqrt{\Delta_1}}{6\alpha d} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \frac{-(2\alpha f - Ed) + \sqrt{\Delta_1}}{6\alpha d}$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge 51

Sachant que si $0 < \eta < \eta_2$ alors $\det(J) < 0$, sinon $\eta > \eta_2$. Ceci implique que $\det(J) > 0$. Donc, afin de déterminer le signe exacte du déterminant $\det(J)$, nous devons calculer $\eta - \eta_2$. En effet,

D'après (3.13) et (3.14), le calcul de $\eta - \eta_2$ donne:

$$\begin{aligned}\eta - \eta_2 &= \frac{\sqrt{\Delta} - f\alpha}{2d\alpha} - \frac{-(2\alpha f - Ed) + \sqrt{\Delta_1}}{6\alpha d} \\ &= \frac{-(\alpha f + Ed) + 3\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta_1}}{6\alpha d}\end{aligned}$$

avec $\Delta = (\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma$.

Du fait que $u^* > 0$, nous obtenons l'inégalité suivante:

$$-(\alpha f + Ed) > -\sqrt{\Delta}.$$

Ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}\eta - \eta_2 &> \frac{2\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta_1}}{6\alpha d} \\ &> \frac{4((\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma) - ((2\alpha f - Ed)^2 + 3E^2d^2 + 12d\alpha\sigma b)}{6d\alpha(2\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_1})} \\ &> \frac{-Ed(4\alpha f - 3Ed) - 3E^2d^2 + 4d\alpha^2\sigma b}{6d\alpha(2\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_1})} \\ &> \frac{4d\alpha(Ef - 3Ed) - 3E^2d^2 + 4d\alpha\sigma b}{6d\alpha(2\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_1})} \\ &> \frac{4d\alpha(Ef - \sigma b)}{3(2\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_1})}.\end{aligned}$$

D'où

$$\eta - \eta_2 > 0.$$

Ce qui signifie que $\det(J) > 0$ et $Tr(J) < 0$ pour toute valeur de u , Par conséquent, le point d'équilibre $P_* = (u^*, v^*)$ est un équilibre asymptotiquement stable. ■

Ce résultat obtenu explique bien que les adultes et les juvéniles vivent en coexistences, mais ceci a été montré localement. Dans la suite, étudions la stabilité globale des points d'équilibres.

Théorème 3.4.5

- 1) *Le système donné par (3.3) n'admet aucune solution périodique.*
- 2) *Si $b\sigma < Ef$ alors la solution $(u(t), v(t))$ converge vers $(0, 0)$.*
- 3) *Si $b\sigma > Ef$ alors la solution $(u(t), v(t))$ converge vers le point d'équilibre (u^*, v^*) .*

Preuve: Soit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma v - \alpha u^2 - Eu = F_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = bu - fv - duv = F_2(u, v) \end{cases},$$

Calculons la divergence

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F_1, F_2) &= \frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ &= -(2\alpha u + e) - (f + du). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour tout $u \geq 0$ et $v \geq 0$, ainsi que tout les paramètres considérés sont strictement positifs, la $\operatorname{div}(F_1, F_2)$ donnée par (3.15) est strictement négative. Alors, par l'application du critère de Bendixson, on déduit qu'il n'existe aucune solution périodique à l'intérieur de K . Et puisque le système est dissipatif sur K , le théorème de Poincaré-Bendixson affirme que toutes les solutions $(u(t), v(t))$ de (3.3) convergent soit vers l'origine $(0, 0)$ si $E > \frac{b\sigma}{f}$, soit vers vers l'équilibre (u^*, v^*) si $E < \frac{b\sigma}{f}$. ■

Des théorèmes précédents (3.4.3), (3.4.4) et (3.4.5), on en déduit:

Corollaire

- i) Si $E > \frac{\sigma b}{f}$, alors l'origine $P_0(0, 0)$ est globalement stable.
- ii) If $E < \frac{\sigma b}{f}$, alors l'équilibre $P^*(u^*, v^*)$ est globalement stable.

Proposition 3.4.1 *Si $b\sigma = Ef$, alors le point trivial $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^2 .*

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

Preuve: Afin de montrer la stabilité globale de l'origine, considérons la fonction de Lyapunov définie par:

$$V(u, v) = \frac{u}{\sigma} + \frac{v}{f}.$$

En calculant la dérivée de la fonction $V(u, v)$, en un point de la trajectoire, on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{u'}{\sigma} + \frac{v'}{f} \\ &= \left(\frac{b}{f} - \frac{E}{\sigma} \right) u - \frac{d}{f} uv - \frac{\alpha}{\sigma} u^2 \\ &= -\frac{1}{f} duv - \frac{\alpha}{\sigma} u^2. \end{aligned}$$

Puisque

$$b\sigma = Ef.$$

Alors, pour tout $(u, v) \in \text{Int } \mathbb{R}_+^2$,

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

De plus

$$\lim_{u, v \rightarrow +\infty} V = +\infty.$$

Il en découle que le point d'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^2 . ■

Pour observer le comportement du système (3.3) dans le plan de phase, fixons les paramètres comme suit,

α	σ	f	d	b
1.04	3.9	0.5	0.2	2.3

avec la condition initiale $(u_0, v_0) = (6, 2)$, le système (3.3) devient

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 3.9v - 1.04u^2 - Eu \\ \frac{dv}{dt} = 2.3u - 0.5v - 0.2uv \end{cases}$$

Pour une valeur de E fixée et qui vérifie la condition d'existence

$E < \frac{\sigma b}{f} = 17.94$, nous avons tracé dans la figure (3.3), la solution du système (3.3) dans la figure. Le point d'intersection des deux courbes obtenues ($u' = 0$ et $v' = 0$) n'est que l'équilibre non nul $P^* = (4.8811, 7.6049)$.

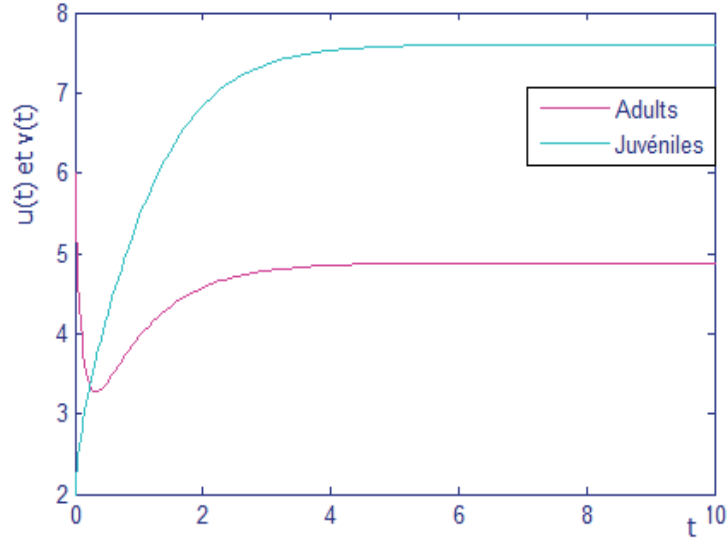


Figure 3.3: Trajectoire des solutions du système EDO (3.3), les matures et les immatures sont en coexistence.

3.5 Dynamique lente-rapide

Dans le cas planaire, lorsque la diffusion est ignorée, le comportement des trajectoires est simple. Dans cette section, nous allons explorer le comportement asymptotique dans le temps où la diffusion est rapide. On rappelle le système initial (3.1),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} - d_{\Omega} \Delta U = \sigma^*(x)V - \alpha^*(x)U^2 - E^*(x)U \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial V}{\partial t} - d_{\Omega} \Delta V = b^*(x)U - f^*(x)V - d^*(x)UV \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ U(0, x) = U_0, \quad V(0, x) = V_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Soit $\varepsilon > 0$, la constante de diffusion $d_{\Omega} = \frac{1}{\varepsilon}$ avec ε assez petit. On a obtenu les résultats suivants:

Proposition 3.5.1

- 1) Si $\sigma b > E f$ alors le système (3.1) possède un attracteur compact proche de P^* .

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge 55

- 2) Si $\sigma b < Ef$ alors le système (3.1) possède un attracteur compact proche P_0 .

Preuve: La démonstration de ce théorème est une conséquence des résultats obtenus, dans le travail de Sanchez (voir le théorème 4 dans [50]). ■

Passons maintenant au cas $\sigma b = Ef$. Pour commencer, nous allons obtenir quelques estimations pour le système (3.1). Supposons que tous les coefficients de (3.1) sont constants. Le prochain théorème établira la bornétude du système (3.1).

Proposition 3.5.2 Si $\sigma b = Ef$, les solutions continues du système (3.1), correspondent aux données initiales positives sont bornées sur t et sur $\varepsilon > 0$.

Preuve: Considérons le système coopératif

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} U^+ - d_{\Omega} \Delta U^+ = \sigma V^+ - E U^+ & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{\partial}{\partial t} V^+ - d_{\Omega} \Delta V^+ = b U^+ - f V^+ & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0, x) = \|U_0\|_{\infty}, V^+(0, x) = \|V_0\|_{\infty} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial U^+}{\partial n} = \frac{\partial V^+}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[. \end{array} \right. \quad (C1)$$

Soit $U^+(t)$ et $V^+(t)$ les solutions de (C1) qui dépendent uniquement de t alors (U^+, V^+) satisfait le système EDO linéaire .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dU^+}{dt} = \sigma V^+ - E U^+ & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{dV^+}{dt} = b U^+ - f V^+ & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0) = \|U_0\|_{\infty}, V^+(0) = \|V_0\|_{\infty} & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (C2)$$

Par l'application du principe de comparaison, (voir le théorème (2.3.2) voir Smith [51]), on a:

$$0 \leq U(t, x) \leq U^+(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq V(t, x) \leq V^+(t).$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

Le système (C2) se réécrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{dU^+}{dt} \\ \frac{dV^+}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & \sigma \\ b & -f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ V^+ \end{pmatrix},$$

dont la matrice

$$\begin{pmatrix} -E & \sigma \\ b & -f \end{pmatrix},$$

possède deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -(E + f) < 0$. Il en résulte que les solutions $U^+(t)$ et $V^+(t)$ sont uniformément bornées sur t . ■

Proposition 3.5.3 *Si $\sigma b = Ef$ alors les solutions continues de (3.1), correspondantes aux données initiales continues et positives tendent vers $(0, 0)$ quand ε tend vers 0^+ , pour tout t fixé et assez grand.*

Preuve: En appliquant le théorème 5 démontré dans [50], les solutions (U, V) du système (3.1) vérifient pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{Vol(\Omega)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + r_\varepsilon(x, t),$$

où (u, v) est la solution du système (3.3) correspondant à la donnée initiale

$$u(0) = u_0 = \int_{\Omega} U(0, x) dx \quad \text{et} \quad v(0) = v_0 = \int_{\Omega} V(0, x) dx,$$

et

$$|r_\varepsilon(x, t)| \leq a_1 \varepsilon e^{ta_2} + a_3 e^{a_4 \frac{-t}{\varepsilon}}.$$

uniformément sur Ω .

Les a_i sont considérés comme des constantes positives. Dans ce cas, puisque l'origine $(0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable pour le système (3.3), il résulte que pour t assez grand, la solution (u, v) est proche de $(0, 0)$. Donc, pour t assez grand et fixé, lorsque ε tend vers 0^+ , toutes les solutions (U, V) convergent vers l'origine $(0, 0)$. ■

3.6 Contrôle de la pêche

Cette section a pour but de formuler et d'étudier un problème de contrôle optimal. Il s'agit de déterminer les différents scénarios du contrôle de l'effort de la pêche puisqu'il y aura une influence sur l'évolution des adultes et notamment des juvéniles, évidemment, il y aura des conséquences sur le plan économique. Ce qui revient à déterminer une politique de gestion optimale qui se fait au moyen des techniques de la théorie du contrôle optimal. Nous supposons ici que le prix de vente est constant.

3.6.1 Pêche en libre accès

En pratique, une pêcherie à accès libre correspond à ce qu'on appelle l'équilibre bio-économique. Celui-ci est obtenu quand la population est à l'équilibre (i.e: quand $u'(t) = v'(t) = 0$) le revenu net de la pêche est nul. Si l'effort E est un optimum qui maximise le gain net des pêcheurs pour un stock équilibré, alors on l'appelle l'optimum bio-économique.

On définit $y(\cdot)$ comme étant la récolte de la pêche, elle est déterminée par deux quantités: la taille de la population des adultes $u(\cdot)$ et le taux d'effort $E(\cdot)$.

On suppose que:

$$Y(E) = Eu.$$

Et si on considère que p représente le prix constant par unité de biomasse, alors on obtient le revenu total:

$$TR = pY(E).$$

Or, le coût total de la pêche TC est une fonction proportionnelle à l'effort fourni E , tel que:

$$TC = c(u)E.$$

Le revenu net de cette exploitation est donné par:

$$ER = TR - TC = pEu - c(u)E.$$

L'effort bio-économique

L'effort bio-économique E_∞ est obtenu quand la population atteint son état d'équilibre et que

$$TR = TC$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

C'est à dire, lorsque

$$pEu^* - c(u^*)E = 0 \quad (3.16)$$

Si la ressource exploitée (la biomasse des adultes) diminue, alors l'effort de pêche croit. Par conséquent, le coût de la pêche est supposé décroissant avec le stock de sorte que

$$c(u) = \frac{c_0}{u}$$

avec c_0 , une constante positive, et pour simplifier les calculs, prenons $c_0 = 1$. Essayons maintenant de trouver la valeur de l'effort E_∞ , en effet, d'après le coût $c(u^*)$, l'équation (3.16) devient:

$$pu^* - \frac{1}{u^*} = 0.$$

Puisque $u^* \neq 0$, cette équation est équivalente à:

$$pu^{*2} - 1 = 0.$$

Ce qui implique:

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Remplaçons u^* par sa valeur, on obtient:

$$\frac{-\alpha f - dE + \sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma}}{2\alpha d} = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

D'où

$$\sqrt{p(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma p} = 2\alpha d + (\alpha f + dE) \sqrt{p}.$$

Elevons au carré les deux membres,

$$p(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma p = (2\alpha d + (\alpha f + dE) \sqrt{p})^2.$$

En simplifiant les calculs, on trouve

$$-pfE + bp\sigma = d\alpha + f\sqrt{p}\alpha + d\sqrt{p}E.$$

La solution de cette équation linéaire n'est que l'effort de pêche bio-économique E_∞ tel que

$$E = E_\infty = \frac{bp\sigma}{d\sqrt{p} + fp} - \frac{\alpha\sqrt{p}}{p}$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

De plus, $E_\infty > 0$, si

$$\frac{bp\sigma}{d\sqrt{p} + fp} - \frac{\alpha\sqrt{p}}{p} > 0 \quad (3.17)$$

c'est à dire

$$b\sigma p - f\alpha\sqrt{p} - d\alpha > 0.$$

En prenant en compte $p > 0$, donc la solution de la précédente inégalité n'est que la condition vérifiant (3.17) de façon à ce que

$$p > \left(\frac{\alpha f + \sqrt{\alpha^2 f^2 + 4\alpha f \sigma b}}{2\sigma b} \right)^2.$$

Remarque 3.6.1 Si $E > E_\infty$ alors le coût total de la pêche est plus grand que le revenu total, donc la surpêche génère une baisse des revenus pour les pêcheurs. si $E < E_\infty$, dans ce cas, le profit est positif. Ainsi, tant que la pêcherie est rentable, les pêcheurs augmentent leurs efforts.

L'optimum bio-économique:

L'objectif majeur des pêcheurs est de bien maximiser leur bénéfice net qui exprime la différence entre le coût et le revenu total de la pêche. Ce bénéfice net à l'état d'équilibre est défini par $\pi(E)$, tel que

$$\pi(E) = E (pu^* - c(u^*)). \quad (3.18)$$

Sous la condition $Ef < \sigma b$, la fonction $\pi(E)$ est continue, ainsi que $\pi(0) = 0$, alors supposons que

$$\pi'(0) > 0$$

En dérivant l'équation (3.18), on obtient:

$$\pi'(E) = (pu^* - c(u^*)) + E \frac{d}{dE} (pu^* - c(u^*)), \quad (3.19)$$

Et

$$\pi'(0) = pu^*(0) - c(u^*(0)).$$

D'où

$$pu^*(0) > \frac{1}{u^*(0)}.$$

Ce qui donne:

$$u^*(0) > \sqrt{\frac{1}{p}}.$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge60

Remarque 3.6.2 : *Biologiquement, cette dernière inégalité explique bien que le stock initial des adultes poissons devrait être assez grand pour permettre une bonne récolte.*

A ce niveau là, nous devrions déterminer l'effort de pêche optimal E_{op} , tel que $E_{op} \in I = \left[0, \frac{\sigma b}{f}\right]$. De plus, le profit $\pi(E)$ donné par (3.18) est une fonction continue sur l'intervalle I et que :

$$\lim_{E \rightarrow \frac{\sigma b}{f}} \pi(E) = -\infty$$

Donc, la fonction $\pi(E)$ atteint son maximum au point $E_{op} \in I$, lorsque la condition nécessaire d'optimalité (3.20) est vérifiée, on a:

$$\pi'(E) = 0 \iff pu^* - c(u^*) + E \frac{\partial u^*}{\partial E} \left(p - \frac{\partial c(u^*)}{\partial u^*} \right) = 0.$$

Si on remplace $c(u^*) = \frac{1}{u^*}$, et sa dérivée $\frac{\partial c(u^*)}{\partial u^*} = -\frac{1}{u^{*2}}$, on aura:

$$pu^* - \frac{1}{u^*} + E \frac{\partial u^*}{\partial E} \left(p + \frac{1}{u^{*2}} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Ainsi, en remplaçant u^* par la valeur (3.7) dans l'équation (3.19), alors (3.20) s'écrira comme une équation d'un polynôme d'ordre 4 de la façon suivante:

$$E^4 + a_1 E^3 + a_2 E^2 + a_3 E + a_4 = 0 \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{f(d - 2p\sigma b)}{pf^2 - d^2} \\ a_2 &= \frac{\alpha(1 - \alpha)}{p} + \frac{\sigma b(p\sigma b - d - 2d\alpha)}{pf^2 - d^2}. \\ a_3 &= \frac{\alpha d(1 - \alpha)}{p(pf^2 - d^2)} - \frac{\alpha f\sigma b}{pf^2 - d^2}. \\ a_4 &= -\frac{\alpha d\sigma b}{p(pf^2 - d^2)}. \end{aligned}$$

On remarque que si d est assez grand, alors les coefficients $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$ et $a_4 > 0$, c'est à dire que le nombre de changements de signes dans la suite des coefficients du polynôme précédent est 4. Par l'application du principe de Descartes (règle des signes, voir Murray [44], p 581), il y a

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

exactement 4 ou 2 racines positives pour l'équation (3.21). D'un autre coté, d'après le théorème principal de Stefanesson [54], toute racine positive E_{op} de (3.21) possède une borne supérieure tel que

$$E_{op} \leq \frac{2f(d - 2p\sigma b)}{d^2 - pf^2}$$

Il est clair que

$$\frac{2f(d - 2p\sigma b)}{d^2 - pf^2} \leq \frac{\sigma b}{f}.$$

Cette inégalité implique que:

$$p > \frac{2f^2d - \sigma bd^2}{3\sigma bf^2}.$$

Remarque 3.6.3 *Par conséquent, si d est assez grand, alors l'effort de pêche optimal E_{op} tend vers zéro, ce qui conduit à une dissipation du rendement économique.*

Dans le cas contraire, Si d est petit, ainsi que α est assez grand, alors le nombre de changements de signe dans la suite des coefficients du polynôme précédent est 1. De même le principe de Descartes affirme l'existence d'une seule racine positive pour (3.21).

Remarque 1 *Le résultat précédent de l'unicité est différent de celui qui est obtenu par Lenhart dans [40] où les auteurs mettent des conditions pour lesquelles l'unicité du contrôle optimal est établie sur des petits intervalles de temps.*

Nous pouvons valider ces résultats numériquement, à travers les valeurs attribuées aux paramètres du système et qui sont données dans le tableau suivant. Ainsi, nous fixons le prix et le coût comme suit

α	σ	f	d	b	p	c
1.04	3.9	0.5	0.2	2.3	1.5	1

Dans la figure ci dessous, le tracé de la courbe du polynôme donné par(3.21), montre l'existence de 3 racines et le contrôle optimal pour ce cas est $E^* = 6,121$.

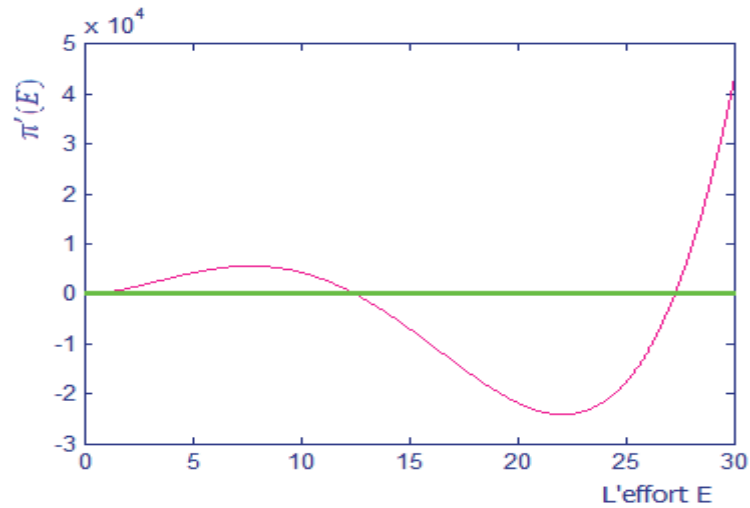


Figure 3.4: Les solutions de l'équation (3.21), caractérisent l'effort de l'optimum bio-économique.

3.6.2 Stratégie optimale

Dans cette partie, une stratégie optimale à la pêche est effectuée uniquement sur les adultes. On suppose que le taux d'actualisation est δ et que le coût de la récolte est une constante c , qui est le coût de la pêche par une unité d'effort E et soit p le prix par unité de biomasse des matures. Donc, le problème de pêche associé au système (3.3), s'écrit de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_E J(E) = \sup_E \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \pi(E) dt \\ \dot{u} = \sigma v - \alpha u^2 - Eu \\ \dot{v} = bu - fv - duv \end{array} \right. , \quad (3.22)$$

Avec

$$\pi(E) = E (pu - c).$$

En réalité, l'effort de pêche possède une valeur supérieure et qui ne pourra jamais la dépasser, notée par E_{\max} . De ce fait, le contrôle E doit vérifier la condition.

$$0 \leq E \leq E_{\max}. \quad (3.23)$$

Ainsi, pour qu'il n'y ait pas d'extinction de la population, il faut que

$$E \leq \frac{\sigma b}{f}. \quad (3.24)$$

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

En utilisant le PMP, le Hamiltonien de notre problème de contrôle optimal est donné par :

$$H = e^{-\delta t} E (pu - c) + \lambda_1 (\sigma v - \alpha u^2 - Eu) + \lambda_2 (bu - fv - duv). \quad (3.25)$$

où $\lambda_1(\cdot)$, $\lambda_2(\cdot)$ sont les variables adjointes, elles sont solutions du système adjoint:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial u} = -Epe^{-\delta t} + \lambda_1 (2\alpha u + E) - \lambda_2 (b - dv) \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\sigma\lambda_1 + \lambda_2 (f + du). \end{cases} \quad (3.26)$$

Eventuellement, le principe du maximum de pontryagin fournit une condition nécessaire d'optimalité de E .

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0 \implies \lambda_1 = \frac{e^{-\delta t} (pu - c)}{u}. \quad (3.27)$$

Soit $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 e^{-\delta t}$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2 e^{-\delta t}$, alors les équations (3.26) et (3.27), deviennent :

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{pu - c}{u} = p - \frac{c}{u}, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\lambda}_1 = -Ep + \bar{\lambda}_1 (2\alpha u + E + \delta) - \bar{\lambda}_2 (b - dv), \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\lambda}_2 = -\sigma\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 (f + du + \delta). \quad (3.30)$$

A tout instant, E doit maximiser le Hamiltonien. La linéarisation du Hamiltonien par rapport à E , conduit à un contrôle optimal, il est soit extremal soit singulier.

La condition de maximisation (3.28), donne le contrôle extrémal suivant:

$$\begin{cases} E = 0, & \text{si } \bar{\lambda}_1 > p - \frac{c}{u} \\ E = E_{\max}, & \text{si } \bar{\lambda}_1 < p - \frac{c}{u}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Remarque 3.6.4 $\bar{\lambda}_1 e^{-\delta t}$ est appelé le prix virtuel, par contre $p - \frac{c}{u}$ est le revenu économique net par unité de récolte. En se basant sur les équations décrites en (3.31) nous pouvons dire que si le prix virtuel est élevé ($\bar{\lambda}_1 > p - \frac{c}{u}$), alors il n'y a pas de poissons.

Maintenant, on s'intéresse au cas où $\bar{\lambda}_1 = p - \frac{c}{u}$, alors le Hamiltonian H devient indépendant de la variable du contrôle E , donc la condition de

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge 64

maximisation (3.28) ne fournit aucune information sur E , nous devons donc résoudre le système d'équations différentielles du premier ordre.

Pour commencer, En dérivant (3.28) par rapport au temps, et en remplaçant $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_1'$ et u' par leurs valeurs dans (3.28), (3.29), et (3.22) respectivement on a l'équation:

$$\frac{c}{u^2} (\sigma v - \alpha u^2 - Eu) = \left(\frac{pu - c}{u} \right) (2\alpha u + E + \delta) - \bar{\lambda}_2 (b - dv) - Ep \quad (3.32)$$

Ce qui implique:

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{u(pu - c)(\alpha u + \delta) + \alpha pu^3 - c\sigma v}{u^2(b - dv)}. \quad (3.33)$$

Il est évident que l'état d'équilibre facilite la manipulation beaucoup plus que le cas général, pour cette raison on considère le cas où la population est en coexistence. C'est-à-dire, quand $u' = v' = 0$. Par conséquent $\bar{\lambda}_2' = 0$. De plus, en utilisant (3.28) et (3.33), l'équation donnée par (3.30) devient

$$-\frac{\sigma(pu^* - c)}{u^*} + \left(\frac{u^*(pu^* - c)(\alpha u^* + \delta) + \alpha pu^{*3} - c\sigma v^*}{u^{*2}(b - dv^*)} \right) (f + du^* + \delta) = 0 \quad (3.34)$$

Prenons en compte que

$$v^* = \frac{1}{\sigma} (\alpha u^{*2} + Eu^*)$$

Le calcul de (3.34) donne

$$E^* = h(u^*)$$

Où

$$h(u^*) = (pu^* - c) \frac{(f + du^* + \delta)(2\alpha u^* + \delta) + (\alpha du^{*2} - \sigma b)}{c(f + du^* + \delta) - du^*(pu^* - c)}$$

Remarque 3.6.5 Ce résultat explique que l'effort de pêche dépend du stock des adultes. Autrement dit, le changement direct dans l'effort de pêche est dû à la variation du stock des adultes. De plus, E^* doit vérifier (3.24), la condition qui assure la coexistence de la population.

Puisque $\bar{\lambda}_2' = 0$, alors d'après (3.30)

$$-\sigma \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 (f + du^* + \delta) = 0$$

D'où.

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\bar{\lambda}_2 (f + du^* + \delta)}{\sigma} = \frac{(f + du^* + \delta) [u^*(pu^* - c)(\alpha u^* + \delta) + \alpha pu^{*3} - c\sigma v^*]}{\sigma u^{*2}(b - dv^*)}.$$

Par la condition de maximisation du Hamiltonian (3.30), il découle que

$$p - \frac{c}{u^*} = \frac{(f + du^* + \delta) [u^*(pu^* - c)(\alpha u^* + \delta) + \alpha pu^{*3} - c\sigma v^*]}{\sigma u^{*2}(b - dv^*)}$$

Ce qui implique:

$$pu - c = \frac{cE(f + du + \delta)}{(f + du + \delta)(2\alpha u + \delta) - \sigma(b - dv)}$$

Alors

$$\pi(E) = E(pu - c).$$

qui est une fonction décroissante par rapport à δ et le revenu économique $\pi(E)$ tend vers zéro lorsque $\delta \rightarrow +\infty$.

3.7 Conclusion

Dans cette étude, nous avons analysé la dynamique du modèle de pêche avec une population composée des adultes et des juvénile. Il a été supposé que la pêche est portée sur les adultes et le fait qu'il existe d'une part une compétition entre les adultes et d'autre part un effet de cannibalisme sur les juvéniles. Jerry et Raissi [48] ont étudié un modèle de pêche similaire sans compétition intra spécifique entre les espèces et le cannibalisme.

Il a été prouvé que l'équilibre intérieur existe sous certaines conditions et il est globalement asymptotiquement stable. Même lorsque l'effort de pêche est limité à la population adulte, les mineurs et les adultes peuvent disparaître parce que l'écosystème est souvent modifiée par les activités humaines, la stratégie de récolte se traduit par la maximisation du profit et ne conduit pas à l'extinction. L'équation de la récolte optimale obtenue montre l'effet du cannibalisme sur le revenu économique. L'idée de notre approche est la suivante. On considère deux échelles de temps (voir Sanchez et al.[50]), une rapide pour la diffusion de poissons et une autre lente pour la croissance des poissons et de la mortalité pour réduire notre modèle à un système d'EDO. Les contributions majeures de ce travail sont les suivantes:

- La persistance de l'espèce dépend de deux facteurs: le premier est biologique et concerne la possibilité qu'une espèce se reproduit, cela est fonction du taux de natalité, la mortalité naturelle de la population jeune

3. Comportement asymptotique d'une population structurée en âge

et du taux de maturité. Par exemple, si le taux de croissance ne suffit plus pour remplacer les individus perdus par la pêche, ce qui produit l'effondrement des stocks. La seconde est liée à l'exploitation et aux mécanismes qui réduisent l'effort de pêche. Ce dernier peut être réduit en limitant le temps de la pêche, la réduction de la capacité qu'un navire peut transporter, ou la fermeture des régions où le taux de natalité est élevé.

- Le cannibalisme et la concurrence n'ont aucun effet direct sur la survie de la population.
- En utilisant un résultat récent de Stefansson (2008), nous montrons que dans des conditions appropriées, il y aura une dissipation du rendement économique dans une pêcherie à accès libre.
- Dans le cas du bénéfice total net actualisé, l'effort de pêche est donné en fonction du stock des matures. Ce résultat est difficile à obtenir sans la méthode de système rapide-lent, voir par exemple Fu et al [29], Lenhart et Montero [40].

Effet des niveaux des eaux sur l'évolution d'une population

Sommaire

4.1	Introduction	67
4.2	Modèle Mathématique	68
4.3	Analyse mathématique du système (4)	70
4.3.1	Etude des points d'équilibre	71
4.4	Etude du modèle réduit	77
4.4.1	Étude des points d'équilibre	78
4.4.2	Dynamique asymptotique:	81
4.5	Conclusion	85

Ce chapitre est le développement de l'article [\[10\]](#).

4.1 Introduction

Les écosystèmes aquatiques sont souvent modifiés par les activités humaines. Pendant les saisons une forte demande d'électricité des variations significatives du niveau d'eau d'un lac artificiel peuvent avoir des impacts sur la persistance de certaines espèces. Donc, la gestion du lac est d'une importance écologique considérable. Le programme de gestion de l'eau devrait être établi dans une

telle manière qu'il protège le système proie-prédateur.

Dans le lac Parloup, une rivière située à 30 km au sud-est de Rodez en France, il y a une chaîne constituée de brochets et phytoplanctons ainsi que de certaines espèces intermédiaires qui font partie du régime alimentaire des brochets et des gardons à une certaine période. La gestion de ce lac est d'une importance écologique considérable. Des variations significatives du niveau de l'eau du lac peuvent avoir un fort impact sur la persistance de certaines espèces. Récemment, un modèle mathématique a été présenté à une compréhension des interactions trophiques entre proies et prédateurs, voir [20]

Dans l'article de Chiboub (voir [20]), les auteurs ont ignoré le temps de traitement de proie, qui est le temps que prend un prédateur pour manipuler une proie. Dans ce chapitre, nous étudions un modèle mathématique qui décrit l'interaction entre le gardon et le brochet en utilisant une réponse fonctionnelle plus générale. Il est plus réaliste que le modèle étudié dans [20], en incluant l'interférence avec d'autres prédateurs et le temps des rencontres avec proie. Nous allons nous concentrer sur l'étude des états stables du modèle et de leur stabilité.

Le présent chapitre est organisé comme suit: La prochaine section traite de la formulation du modèle, puis nous donnons des résultats mathématiques, la section 4 est consacrée à l'étude de l'existence des équilibres et de leur stabilité avec des simulations numériques intéressantes qui complètent nos résultats analytiques. Nous finalisons ce chapitre par une conclusion.

4.2 Modèle Mathématique

Dans cette étude, les deux populations en questions sont les brochets et les gardons, dont l'interaction est la prédation: le brochet se nourrit de gardons. Les proies et les prédateurs de ce lac sont notés respectivement à l'instant t , par $G(t)$ et $B(t)$. La croissance des proies suit la loi logistique.

Quand le prédateur attaque les proies, il a accès à une quantité de nourriture qui dépend du niveau d'eau. En effet, si le niveau de l'eau est trop bas (voir figure (4.2)), les prédateurs sont en contact avec les proies, ce qui facilite la prédation, or dans le cas contraire, le contact des prédateurs avec les proies est

trop faible lorsque le niveau d'eau est très élevé (voir figure (4.1)). Alors, le prédateur va mettre du temps pour trouver sa proie, autrement dit, plus le niveau d'eau diminue, la proie est beaucoup plus accessible au prédateur. Notons par r le taux d'accessibilité pour les proies.

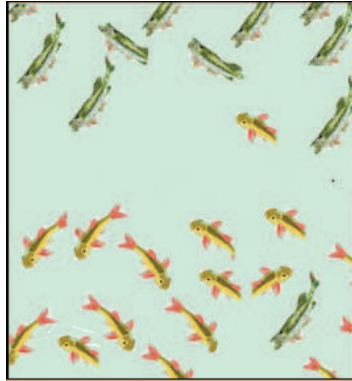


Figure 4.1: Le niveau d'eau est élevé, l'accessibilité est faible r est petit.



Figure 4.2: Le niveau d'eau est bas, l'accessibilité est forte, r est grand,

Une valeur minimale, r_1 pour ce taux est atteinte au printemps et elle atteint son maximum r_2 pendant l'automne, à consulter [20]. Un tel prédateur a besoin d'une quantité de nourriture γ_B .

Dans ce lac, interagissent plusieurs facteurs qui peuvent éventuellement faciliter la nourriture du brochet, ou bien rendent la prédation difficile, ce qui diminue la quantité de sa nourriture. Le prédateur va attaquer la proie suivant r , le taux d'accessibilité permis dans le lac suivant la saison, puisque ce dernier n'est pas stable durant toute l'année.

Pour trouver une seule proie le prédateur a besoin d'un temps pour manipuler d'autre prédateurs ainsi que du temps pour chercher, tuer et manger la proie, puis après passer à une autre s'il en a besoin. Donc, ce type de prédation fait appel à la fonction de Beddington décrite dans le premier chapitre. De ce fait, le prédateur à accès uniquement à la quantité de proies:

$$\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}$$

Où

h désigne le temps que prend le brochet pour manipuler sa proie.

r est la valeur maximale que le taux de réduction par individus de la proie peut atteindre.

D mesure les autres causes de mortalité en dehors du métabolisme et de la prédation. Il mesure la protection dont la proie bénéficie grâce à l'environnement.

Par conséquent, le prédateur se nourrit sur la quantité:

$$\min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right)$$

Alors, le système étudié dans ce chapitre est donné sous forme générale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dG}{dt} = - \min \left(\frac{rG(t)}{B(t)+hG(t)+D}, \gamma_B \right) B(t) + \gamma_G G(t) - m_G G(t)^2 \\ \frac{dB}{dt} = \tau_B \min \left(\frac{rG(t)}{B(t)+hG(t)+D}, \gamma_B \right) B(t) - m_B B(t) \\ G(0) = G_0 \quad B(0) = B_0 \end{array} \right. \quad (4)$$

4.3 Analyse mathématique du système (4)

Dans cette section, nous étudions l'existence des solutions et des points d'équilibre.

Théorème 4.3.1 *Pour chaque condition initiale $(G_0; B_0)$, le système (4) admet une unique solution positive sur l'intervalle $[0, t_0]$.*

Preuve: Les deux applications:

$$(G, B) \mapsto \gamma_G G(t) - m_G G(t)^2$$

et

$$(G, B) \mapsto -m_B B(t)$$

sont de classe C^1 , donc elles sont localement lipschitziennes.

De plus, d'après la proposition 2.2.1, l'application

$$(G, B) \mapsto \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right),$$

est aussi lipschitzienne. Alors, le second membre du système (4) présente une fonction lipschitzienne puisque il est la somme de deux fonctions lipschitziennes. Par l'application du théorème de Cauchy Lipschitz 2.2.2, nous déduisons que pour toute condition initiale (G_0, B_0) tel que $G_0 > 0$ et $B_0 > 0$, le système (4) admet une unique solution qui est positive. ■

Dans ce qui suit, nous allons établir les conditions pour lesquelles la solution est bornée et que les populations dans ce lac sont en coexistence.

4.3.1 Etude des points d'équilibre

La recherche des points d'équilibre du système (4) se traduit par la résolution du système suivant

$$\begin{cases} G'(t) = 0 \\ B'(t) = 0 \end{cases}$$

Equivalent à

$$- \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) B(t) + \gamma_G G(t) - m_G G(t)^2 = 0 \quad (4.1)$$

$$\tau_B \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) B(t) - m_B B(t) = 0 \quad (4.2)$$

Cas où $\gamma_B \tau_B < m_B$:

D'après (4.2), nous avons l'une des deux équations décrites en dessus est vérifiée

$$\min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) = \frac{m_B}{\tau_B}$$

$$B(t) = 0.$$

Puisque

$$\min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) \leq \gamma_B,$$

Alors

$$\gamma_B \geq \frac{m_B}{\tau_B} \quad \text{Contradiction.}$$

Ce qui affirme l'absence des prédateurs $B = 0$, lorsque $\gamma_B \tau_B < m_B$

L'équation $\dot{G} = 0$ donnée par (4.1) implique que

$$G = 0, \quad \text{et} \quad G = \frac{\gamma_G}{m_G}$$

Dans ce cas, le système (4) admet deux points d'équilibre sont: $P_0(0, 0)$ et $P_1\left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0\right)$.

Par la suite, pour démontrer que sous certaines conditions, les solutions du système (4) issues \mathbb{R}_+^2 sont bornées pour t suffisamment grand, nous ferons appel au lemme classique du principe de comparaison.

Théorème 4.3.2 *Si $\gamma_B \tau_B < m_B$, alors le système (4) admet une solution bornée. De plus,*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0$$

Preuve: D'après (4), nous avons l'inégalité suivante

$$\frac{dB}{dt} = \left(\tau_B \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) - m_B \right) B(t)$$

$$\leq (\gamma_B \tau_B - m_B) B(t)$$

En appliquant le principe de comparaison la solution vérifie

$$B(t) \leq B_0 e^{(\gamma_B \tau_B - m_B)t}.$$

Si $\gamma_B \tau_B < m_B$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup B(t) = 0. \quad (4.3)$$

Une majoration de la première équation (4) donne

$$\frac{dG}{dt} \leq (\gamma_G - m_G G) G(t).$$

De manière similaire, l'usage du principe de comparaison entraîne que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup G(t) \leq \frac{\gamma_G}{m_G}. \quad (4.4)$$

Par (4.3) et (4.4), nous déduisons que pour $\gamma_B \tau_B < m_B$, toutes les solutions de (4) sont bornées. ■

Remarque 4.3.1 *Ce résultat signifie que si la croissance maximale $\gamma_B \tau_B - m_B$ est négative, le modèle produit une extinction des prédateurs indépendamment du niveau d'eau dans le lac.*

Dans ce cas, nous n'avons pas la possibilité de calculer la différentielle, donc nous ne pouvons pas déterminer la matrice jacobienne associée à ce système; pour cette raison, nous examinerons la répulsion d'un équilibre afin d'étudier sa stabilité.

Proposition 4.3.1 *Il existe un ensemble pour lequel l'origine $P_0(0, 0)$ est répulsif.*

Preuve: Soit η une constante positive fixée. Considérons le domaine P_η , définit par

$$P_\eta = \{(G, B) : 0 \leq G \leq \eta, 0 \leq B \leq \eta\}$$

La première équation en (4) peut être minorée comme suit:

$$\frac{dG}{dt} \geq -\frac{rBG}{D + hG + B} + \gamma_G G - m_G G^2.$$

Il est clair que:

$$\frac{rB}{D + hG + B} \leq \frac{rB}{D}.$$

Pour tout couple $(G, B) \in P_\eta$ et

$$\frac{dG}{dt} \geq \left(-\frac{r\eta}{D} + \gamma_G - m_G \eta \right) G.$$

Choisissons

$$\gamma_G \geq 2\eta \left(\frac{r}{D} + m_G \right).$$

Par conséquent

$$\frac{dG}{dt} \geq \eta \left(\frac{r}{D} + m_G \right) G.$$

Si une solution appartient à P_η , alors il existe un moment $t_n > t_0$ pour lequel la solution sera en dehors de P_η , pour $t \geq t_n$. ■

Pour illustrer ces résultats, choisissons les paramètres comme suit

m_B	m_G	τ_B	γ_B	γ_G	h	D
0.01	0.01	0.5	$\frac{1}{2}$	0.3	0.5	5

et prenons une condition initiale $(G_0, B_0) = (3, 1)$, la figure obtenue a montré que l'extinction des prédateurs est indépendante du taux d'accessibilité r .

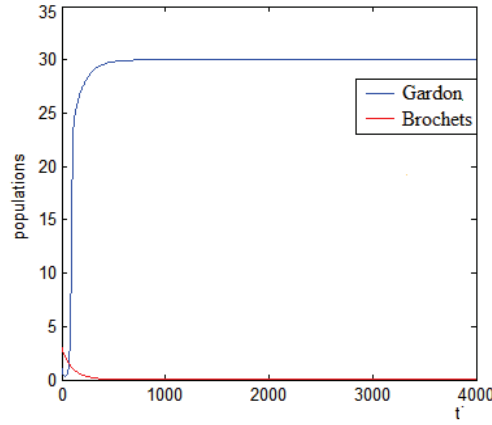


Figure 4.3: Extinction des prédateurs et existence des proies pour $\tau_B < \frac{m_B}{\gamma_B}$.

Cas: $\gamma_B \tau_B \geq m_B$

Maintenant, considérons la fonction ψ qui est de la forme

$$\begin{aligned} \psi(t) &= rG(t) - \gamma_B (B(t) + hG(t) + D) \\ &= (r - \gamma_B h) G(t) - \gamma_B (B(t) + D) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Deux cas ont un effet sur la stabilité du niveau d'eau:

a) **1er Cas:** $r - \gamma_B h \leq 0$

Il est évident, pour tout $t \geq 0$,

$$\psi(t) < 0$$

Ce qui implique

$$\min \left(\frac{rB}{D + hG + B}, \gamma_B \right) = \frac{rB}{D + hG + B}$$

Par conséquent, le système (4) devient le modèle proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de Beddington-DeAngelis:

$$\begin{cases} \dot{G} = -r \frac{GB}{B+hG+D} + \gamma_G G - m_G G^2 \\ \dot{B} = \tau_B r \frac{GB}{B+hG+D} - m_B B \end{cases} \quad (4.6)$$

Remarque 4.3.2 *Le modèle donné par (4.6) a été étudié par [17],[32] et,[33] où l'existence et la stabilité locale et globale du cycle limite est démontrée.*

Puisque le but de ce chapitre est de déterminer le niveau d'eau permettant la survie des deux populations, procédons d'une manière différente de ce qu'il a été fait.

b) **2ème cas:** $r - \gamma_B h > 0$.

Dans ce cas, il est intéressant d'établir une condition qui permet de réduire le système (4) au modèle décrit par (4.6). En fait, soient $G_0 > 0$ et $B_0 > 0$ respectivement les densités initiales des proies et des prédateurs à l'instant t_0 . Supposons que

$$(H_1) \quad r < \frac{4Dm_B m_G \gamma_B}{(m_B + \gamma_G)^2} + h\gamma_B$$

Proposition 4.3.2 *Supposons que*

$$rG_0 < B (B_0 + hG_0 + D)$$

et que l'hypothèse (H_1) est vérifiée. Alors pour tout $t \geq 0$

$$rG(t) < B (B(t) + hG(t) + D)$$

Preuve: Supposons d'après (4.5) qu'à l'instant $\psi(0) < 0$, et montrons par absurde que

$$\forall t > 0, \quad \psi(t) < 0$$

Cependant, supposons qu'il existe t_0 dans $[0, T]$, tel que

$$\psi(t_0) = 0$$

et

$$\frac{d\psi}{dt}(t_0) \geq 0$$

La dérivée de ψ par rapport à t calculée au point t_0 est:

$$\frac{d\psi}{dt}(t_0) = (r - \gamma_B h) G'(t_0) - \gamma_B B'(t_0)$$

En remplaçant les valeurs de $\frac{dG}{dt}$ et $\frac{dB}{dt}$ données par (4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt}(t_0) = & - (r - \gamma_B h + \gamma_B \tau_B) \frac{r \cdot G(t_0) B(t_0)}{B(t_0) + hG(t_0) + D} \\ & + (r - \gamma_B h) [\gamma_G G(t_0) - m_G G^2(t_0)] + m_B \gamma_B B(t_0) \end{aligned}$$

De la condition $\psi(t_0) = 0$, on a:

$$\gamma_B (D + B(t_0)) = (r - \gamma_B h) G(t_0)$$

Il en résulte que:

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq \gamma_G (r - \gamma_B h) G(t_0) - m_G (r - \gamma_B h) G^2(t_0) + m_B \gamma_B B(t_0),$$

et

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq \gamma_G (r - \gamma_B h) G(t_0) - m_G (r - \gamma_B h) G^2(t_0) + m_B ((r - \gamma_B h) G(t_0) - \gamma_B m_B D).$$

Le fait que:

$$\begin{aligned} m_G (r - \gamma_B h) \left(G^2 - \frac{m_B + \gamma_G}{2m_G} G \right) = & -m_G (r - \gamma_B h) \left(G - \frac{m_B + \gamma_G}{2m_G} \right)^2 \\ & - (r - \gamma_B h) \left(\frac{m_B + \gamma_G}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

L'hypothèse (H_1) implique

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq 0,$$

Ce qui est une contradiction. D'où

$$u(t) < 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

■

L'objectif de la section suivante est d'analyser le modèle réduit de façon à établir des conditions supplémentaires pour lesquelles le modèle réduit admet des points d'équilibre stable.

4.4 Etude du modèle réduit

Dans cette partie, commençons d'abord par rappeler les hypothèses qui permettent de réduire le modèle classique au modèle de Beddington. Soit

$$\begin{aligned} (H_1) \quad & r < r_0 := \frac{4Dm_Bm_G\gamma_B}{(m_B + \gamma_G)^2} + h\gamma_B \\ (H_2) \quad & \gamma_B\tau_B \geq m_B \end{aligned}$$

Et le modèle en question est

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{G} = -r \frac{GB}{B+hG+D} + \gamma_G G - m_G G^2 \\ \dot{B} = \tau_B r \frac{GB}{B+hG+D} - m_B B \\ G_0 > 0 \text{ et } B_0 > 0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Proposition 4.4.1 *Supposons que les hypothèses (H₁) et (H₂) sont vérifiées, alors toutes les solutions de (4.6) sont bornées.*

Preuve: Soit (G, B) une solution du système (4.6) avec les conditions initiales $G_0 > 0$ et $B_0 > 0$

Définissons la fonction $w(t)$:

$$w(t) = \tau_B G(t) + B(t).$$

Alors sa dérivée par rapport au temps est:

$$\frac{dw}{dt} = \tau_B \gamma_G G - \tau_B m_G G^2 - m_B B.$$

Pour chaque constante $\eta > 0$, on a:

$$\frac{dw}{dt} + \eta w = \tau_B \gamma_G G - \tau_B m_G G^2 + \eta \tau_B G - (m_B - \eta) B.$$

Un simple calcul donne:

$$\frac{dw}{dt} + \eta w = -\tau_B m_G \left(G - \frac{\gamma_G + \eta}{2m_G} \right)^2 + \frac{\tau_B}{4m_G} (\gamma_G + \eta)^2 - (m_B - \eta) B.$$

si $0 < \eta < m_B$, alors il existe une constante $M = \frac{\tau_B}{4m_G} (\gamma_G + \eta)^2$ tel que

$$\frac{dw}{dt} + \eta w \leq M.$$

Par l'application du lemme de Gronwall (2.2.1), on a

$$w(t) < \frac{M}{\eta} (1 - e^{-\eta t}) + w(0) e^{-\eta t}.$$

et par passage à la limite, on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} w(t) \leq \frac{M}{\eta}.$$

Donc, toutes les solutions sont bornées sur \mathbb{R}_+^2 . ■

4.4.1 Étude des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont solutions des équations $G' = B' = 0$ tel que

$$\left(-r \frac{B}{B + hG + D} + \gamma_G - m_G G \right) G = 0 \tag{4.7}$$

$$\left(\tau_B r \frac{G}{B + hG + D} - m_B \right) B = 0 \tag{4.8}$$

A travers l'équation des proies (4.7), nous obtenons la fonction

$$B(G) = \frac{(D + hG)(m_G G - \gamma_G)}{\gamma_G - r - m_G G}.$$

L'allure de la courbe de B dépend du signe de $\gamma_G - r$, et on a les deux figures suivantes

De même, l'équation de prédateurs $B' = 0$ permet d'avoir la fonction

$$B = \frac{(\tau_B r - m_B h) G - m_B D}{m_B}.$$

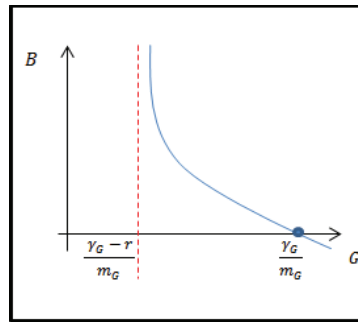


Figure 4.4: La courbe de $G' = 0$, pour $r < \gamma_G$.

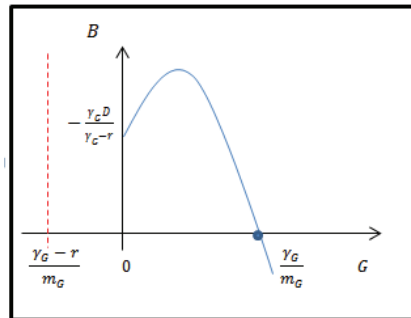


Figure 4.5: La courbe de $B' = 0$, pour $r > \gamma_G$.

Pour $B = 0$,

$$G = \frac{m_B D}{\tau_B r - m_B h}.$$

Supposons que

$$\tau_B r - m_B h > 0.$$

La courbe correspondante à cette équation est:

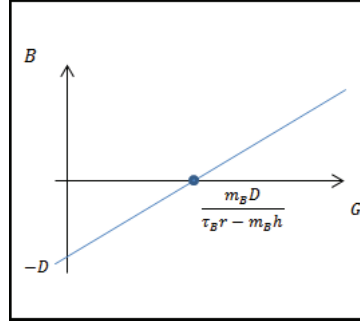


Figure 4.6: Isocline des prédateurs

Pour que l'équilibre non nul existe et soit positif, prenons l'intersection des deux courbes obtenues, elle est réalisée sous la condition:

$$\frac{m_B D}{\tau_B r - m_B h} < \frac{\gamma_G}{m_G}.$$

D'où

$$r > r_1 \tag{4.9}$$

Avec

$$r_1 := \frac{m_B}{\gamma_G \tau_B} (m_G D + h \gamma_G).$$

Quand $r > r_1$, les deux populations coexistent, mais quelles seront leurs valeurs? Afin de répondre à cette question, nous résolvons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{rB}{B+hG+D} = \gamma_G - m_G G \\ \frac{\tau_B r G}{B+hG+D} = m_B \end{cases}. \tag{4.10}$$

Ce dernier admet une unique solution positive notée par (G^*, B^*) tel que

$$G^* = \frac{\tau_B (\gamma_G - r) + m_B h + \sqrt{\Delta}}{2m_G \tau_B}, \tag{4.11}$$

$$B^* = \frac{\tau_B h}{m_B} (\gamma_G - m_G G^*),$$

avec

$$\Delta = (\tau_B (\gamma_G - r) + m_B h)^2 + 4Dm_B m_G \tau_B.$$

Remarques 1

i) De la première équation (4.10), on déduit que

$$G^* < \frac{\gamma_G}{m_G}. \quad (4.12)$$

ii) Le quadrant positif \mathbb{R}_+^2 est divisé en deux parties

$$D_1 = \{(G, B) : (r - \gamma_B h)G - \gamma_B (B + D) < 0\},$$

et

$$D_2 = \{(G, B) : (r - \gamma_B h)G - \gamma_B (B + D) \geq 0\}.$$

iii) Il est clair que (4.6) admet trois points d'équilibres $P_0(0, 0)$, $P_1\left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0\right)$ et $P_*(G^*, B^*)$ qui appartient à D_1 .

4.4.2 Dynamique asymptotique:

La stabilité de ces équilibres peut être étudiée en linéarisant le système(4.6).

Soit J la matrice jacobienne associée à (4.6) qui prend la forme

$$J(G, B) = \begin{bmatrix} F'(G) - \frac{F(G)}{G} \left(1 - \frac{hm_B}{\tau_B r}\right) & \frac{m_B}{\tau_B r} \left(\frac{F(G)}{G} - r\right) \\ \frac{F(G)}{rG} (\tau_B r - m_B h) & -\frac{m_B F(G)}{rG} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

avec

$$F(G) = \gamma_G G \left(1 - \frac{m_G}{\gamma_G} G\right).$$

Le résultat suivant exprime l'effet de l'accessibilité sur la cotence des prédateurs

Proposition 4.4.2 *Supposons que $\gamma_B \tau_B \geq m_B$ et (H_1) sont satisfaites, alors*

i) *L'origine $P_0(0, 0)$ est un point- selle.*

ii) *L' équilibre $P_1\left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0\right)$ est stable si et seulement si $r \leq r_1$.*

Remarque 4.4.1 *En présence de l'hypothèse (H_1) , nous avons $r < r_0$ ce qui veut dire que l'accessibilité est faible, alors dans ce cas le niveau d'eau est élevé et l'oriine est un point-selle, c'est à dire que les proies et les prédateurs ne peuvent pas coexister.*

Proposition 4.4.3 *Si $\gamma_B \tau_B \geq m_B$ et $h \leq \tau_B$ et sous les hypothèses (H_1) et (H_2) alors l'équilibre non nul $P_*(G^*, B^*)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve: La matrice jacobienne qui correspond à (4.13) à l'état d'équilibre P_* est donné par

$$J(G^*, B^*) = \begin{bmatrix} -m_G + \frac{hm_B}{\tau_{Br}} (\gamma_G - m_G G^*) & \frac{m_B}{\tau_{Br}} (\gamma_G - m_G G^* - r) \\ \frac{\tau_{Br} - m_B h}{r} (\gamma_G - m_G G^*) & -\frac{m_B}{r} (\gamma_G - m_G G^*) \end{bmatrix},$$

dont la trace et le déterminant sont respectivement donnés par

$$Det(J) = \frac{m_B}{\tau_{Br}} (\gamma_G - m_G G^*) (2m_G \tau_B G^* - \tau_B \gamma_G + \tau_{Br} - hm_B), \quad (4.14)$$

et

$$Tr(J) = -m_G G^* + \frac{m_B}{\tau_{Br}} (\gamma_G - m_G G^*) (h - \tau_B). \quad (4.15)$$

La stabilité d'un équilibre donné est assurée lorsque:

$$Tr(J) < 0,$$

et

$$Det(J) > 0.$$

Puisque la condition (4.12) est vérifiée, alors nous déduisons facilement que

$$Tr(J) < 0$$

si

$$h < \tau_B.$$

D'un autre coté, d'après (4.11), le déterminant (4.14) s'écrit:

$$Det(J) = \frac{m_B}{\tau_{Br}} (\gamma_G - m_G G^*) \sqrt{\Delta}.$$

Encore une fois, de la condition (4.12), nous obtenons:

$$Det(J) > 0.$$

Finalement, le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable et nous déduisons la stabilité globale en appliquant le théorème (2.1) dans [31]. ■

Remarque 4.4.2 *A travers ce résultat, nous pouvons dire que si le temps que prend le brochet pour manipuler les gardons sera réduit sous certaines conditions sur le niveau d'eau de sorte que l'accessibilité soit comprise entre deux moyennes r_1 et r_0 , alors, le gardon et le brochet seront en coexistence pendant toute l'année.*

L'aspect numérique montre bien ces résultats décrits dans les deux propositions ci dessus: utilisons les mêmes valeurs précédente

m_B	m_G	τ_B	γ_B	γ_G	h	D
0.01	0.01	0.5	$\frac{1}{2}$	0.3	0.5	5

Via ces valeurs, nous obtenons $r_0 = 1.5624$, $r_1 = 3.12 \times 10^{-4}$. Prenons $r = 0.0006$ tel que $r_1 < r < r_0$, nous obtenons la figure suivante:

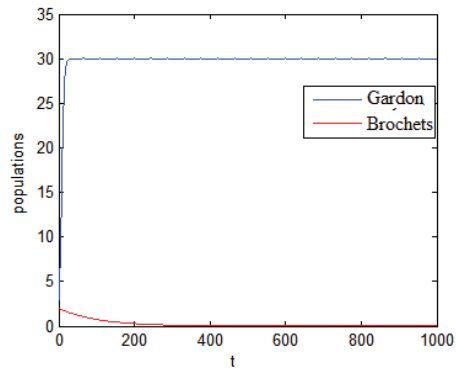


Figure 4.7: L'extinction des prédateurs lorsque $r_1 < r < r_0$

Pour $r = 0.2$, la coexistence des gardons et des brochets est présentée dans cette figure

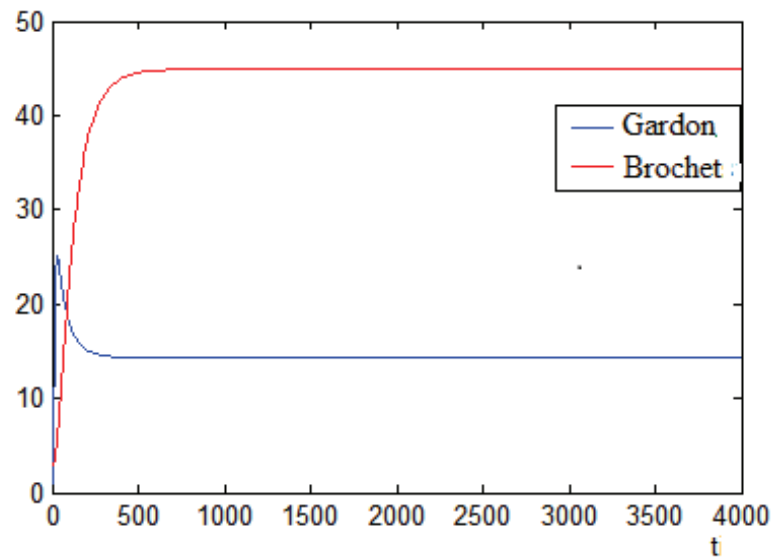


Figure 4.8: La coexistence des brochets et des gardons lorsque $r > r_0$ et $h \leq \tau_B$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé un système proie-prédateur avec une variation saisonnière du niveau de l'eau. L'étude démontre que la dynamique du système dépend fortement de la fluctuation du niveau d'eau. Un modèle mathématique général est effectué pour représenter la dynamique proie-prédateurs lorsque la variation saisonnière du niveau de l'eau se produit. Il a été observé à partir de la stabilité de P_1 que la diminution du paramètre d'accessibilité r peut diminuer la disponibilité des proies et qu'une extinction du prédateur est possible. Il est prouvé que lorsque la croissance maximale nette du prédateur est négative, alors le prédateur va à l'extinction indépendamment du niveau de l'eau.

Le modèle ne produit pas l'extinction mutuelle, les deux espèces ne peuvent pas s'éteindre simultanément. En présence de prédateurs et dans des conditions appropriées, les deux espèces peuvent être maintenues à un équilibre approprié. Il a été observé que lorsque le niveau d'eau est élevé, qui est $r \leq r_1$ il y a deux équilibres et des prédateurs qui vont à l'extinction. Lorsque le niveau d'eau diminue, qui est $r > r_1$, il y a trois solutions d'équilibre et l'équilibre intérieur est globalement stable. Ce résultat suggère que pour éviter l'abaissement du niveau d'eau on peut augmenter les chances de survie.

Perspectives

Cette thèse est consacrée à l'étude de deux modèles de l'écologie mathématique et plus particulièrement la dynamique des populations. Le premier est un modèle adulte-juvénile avec une pêche maintenue uniquement sur les adultes et le second modèle concerne un système proie-prédateur avec une réponse fonctionnelle de Beddington-DeAngelis.

Dans le premier modèle, nous avons démontré que la coexistence des adultes et des juvéniles en présence de l'effet de pêche dépend de la valeur de l'effort fourni pour capturer les adultes et ceci a un effet sur la reproduction des mineurs et par suite sur la croissance de cette population. D'ailleurs, le cannibalisme et la compétition n'ont aucun effet direct sur la survie de la population.

Une autre recherche peut intégrer ces aspects dans le modèle. Il arrive que les pêcheurs n'excluent pas la pêche des juvéniles et il est intéressant de considérer l'exploitation en tenant compte du stade juvénile. D'autre part, le prix de vente est supposé constant, il serait intéressant d'envisager un prix variable de poissons pour des questions connexes avec d'autres méthodologies en utilisant le modèle EOQ (voir [25]).

Bibliographie

- [1] <http://www.parismatch.com/Actu/Environnement/Les-mensonges-sur-le-thon-rouge-148919>.
- [2] <http://www.suds-en-ligne.ird.fr/ecosys/pop/25255.html>.
- [3] <http://wwz.ifremer.fr/peche/Le-monde-de-la-peche/La-peche/comment/Les-navires/Chalutier>.
- [4] H. AMANN, *Ordinary differential equations - An introduction to nonlinear analysis*, Walter de Gruyter, Berlin. New York, (1990).
- [5] E. S. ALLMAN et J. A. ROHDES, *Mathematical models in biology - An introduction*, Cambridge University Press, (2004) .3-40.
- [6] L.G ANDERSON et J.C. SCIJO, *Bioeconomics of fisheries Management*, John Wiley & Sons,(2010) .
- [7] A. AUGER, *Modélisation mathématique en écologie*. Dunod. Paris,(2010) ,pp 98 – 132.
- [8] J. BEDDINGTON, *Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency*, Journal of Animal Ecology, 331,(1975).
- [9] A. O. BELYAKOV et V. M. VELIOV, *Constant versus periodic fishing:age structured optimal control approach*, Math. Model. Nat.Phenom .9, (2014), 20 – 37.

- [10] S. BENZERDJEB et S.M. BOUGUIMA, *Influence of water level in a prey-predator interaction*, Nonlinear Studies / MESA, Vol 22, No 2, (2015), 281 – 291.
- [11] A. A. BERRYMAN et P. PKINDELMANN, *Population Systems - A General Introduction*, Springer, (2008).
- [12] R. J. H. BEVERTON et S.J. Holt, *Recruitment and Egg-production. In: On the Dynamics of Exploited Fish Population*, Chapman & Hall, London, Vol.6, (1993), 44 – 67.
- [13] G. BIRKHOFF et G.C. ROTA, *Ordinary differential equations*. Ginn Boston, (1982).
- [14] S.M. BOUGUIMA, S. FEKIH et W. HENNAOUI, *Spatial structure in a juvenile-adult model*, Nonlinear Anal.Real .World.Appl, (2007), 1184 – 1201.
- [15] S.M. BOUGUIMA et S. BENZERDJEB, *An age-structured fishery model: Dynamics and optimal management with perfect elastic demand*, Applied Mathematical Modelling, Online 6 June (2015).
- [16] K.J. BROWN et Y. ZHANG, *On a system of reaction-diffusion equations describing a population with two-age groups*, J.Math.Anal.Appl., 282(2), (2003), 444 – 452.
- [17] R. S. CANTRELLI et C. COSNER, *On the dynamics of predator-prey models with the Beddington-DeAngelis functional response*, J. Math. Anal. Appl., 257, (2001), 206 – 222.
- [18] K. CHAKRABORY, S. JANA et T.K. Kar, *Global dynamics and bifurcation in a stage-structured prey-predator fishery model with harvesting*, Appl.Math.Comput, 218, (2012), 9271 – 9290.
- [19] K.S. CHAUDHRI, *A bioeconomic model of harvesting, a multispecies fishery*, Ecol.Model. 32, (1986), 267 – 279.
- [20] N.CHIBOUB FELLAH, S.M. BOUGUIMA, et A. MOUSSAOUI, *The effect of water level in a prey-predator interaction*, A nonlinear analysis Study, Chaos, Solitons & Fractals, 45, (2012), 205 – 215.

- [21] C.W. CLARK, *Mathematical models in the economics of renewable resources*, SIAM Rev.21,(1979) , 81 – 99.
- [22] C.W. CLARK, *Mathematical bioeconomics:The optimal management of renewable Resource*, Wiley, New York, (1990) , 10 – 69.
- [23] J.M. CONARD, *Bioeconomic models of the fishery In: Bromley (Ed). Handbook of Environmental Economics*. Blackwells, Oxford & Cambridge, (1995), 405 – 432.
- [24] H. DANG-VU et C. DELCARTE, *Bifurcations et chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Eds Ellipses, Universités -Mécanique, (2000).
- [25] S.K. DE et S.S. SANA, *An alternative fuzzy EOQ model with backlogging for selling price and promotional effort sensitive demand*, Int.J.Appl.Comput.Math.(to appear), (2014) .
- [26] D. DEANGELIS, R. GOLDSTEIN et R. O'NEIL, *A model for trophic interaction*, Ecology 881, (1975) .
- [27] L. DENIS, *Notions de contrôle optimal appliquées à la gestion d'une ressource renouvelable*, Collège militaire royal de Saint-Jean, Bulletin AMQ, Vol. XLVIII, No 4, décembre (2008) .
- [28] M. EL HAJJI, *Modélisation et analyse mathématiques pour les écosystèmes microbiens-Approche par les systèmes dynamiques*.Thèse Doctorat Université de Montpellier II-France, 2 Décembre (2010).
- [29] J. FU, X. WU et H. ZHU, *Optimal harvesting control for age-dependent competing population with diffusion*, Bound.Value Probl, 147,(2014), 1 – 11.
- [30] M. P. HASSEL et G.C. VARLEY, *New inductive population model for insect parasites and its bearing on biological control*.Nature, 223, (1967), 1133 – 1137.
- [31] T. W. HWANG, *Global analysis of the predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response*, J. Math. Anal. Appl., 281, (2003), 395 – 401.

- [32] T. W. HWANG, *Uniqueness of limit cycles of the predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response*, J.Math .Anal .Appl, 290, (2004), 113 – 122.
- [33] T. W. HWANG, *Uniqueness of limit cycles for Gause-Type Predator-Prey Systems*, J. Math. Anal. Appl, 238, (1999) , 179 – 195.
- [34] H. JELIJER, C.J.M. JEROEN, et B. VANDEN, *Harvesting and conservation in a predator–prey system*, J.Econom.Dynam.Control, 29, (2004), 1097 – 1120.
- [35] C. JOST et R. ARDITI, *Identifying predator-prey processes from time series*, Theoretical Population Biology 57(4), (2000) , 325.
- [36] T. K. KAR et C.S. KUMAR, *Bioeconomic modelling: An application to the North-East- Atlantic Cod Fishery*, Journal of Mathematics research., vol 1, No.2, (2009) , 164 – 178.
- [37] W. KHELLAF, *Systèmes dynamiques et modèles d'évaluations des actifs naturels et environnementaux*, Thèse Doctorat Université de Constantine 1, Mai (2013).
- [38] Y. KUANG, *Rich dynamics of Gause-type ration dependent predator-prey system*, The fields Institute Communications, 21, (1999) , 325.
- [39] D. KNOWLER, E. B. BARBIER et I. STRAND, *An open access-model of fisheries and nutrient enrichment in the Black sea*, Marine Resource Economics, 16(3), (2001) , 195 – 217.
- [40] S. LENHART et J.A. MONTERO, *Optimal control of harvesting in a parabolic system modeling two subpopulations*, Math.Methods Appl.Sci,11,(2001), 1129 – 1141.
- [41] Y. LV, R. YUAN et Y. PEI, *A prey-predator model with harvesting for fishery resource with reserve area*, Appl.Math.Modell, 37, (2013), 3048 – 3062.
- [42] T. R. MALTHUS, *Essai sur le principe de population*, volume 2(5e) Edition de Jean-Paul Maréchal. Paris, Garnier-Flammarion, Traduit de l'anglais par P. et G.Prévost en 1823 sur l'édition de 1817, edition, (1992) .

- [43] D. MOULAY, *Modélisation et analyse mathématique de systèmes dynamiques en épidémiologie. Application au cas du Chikungunya*, Thèse Doctorat Université du Havre-France, 26 septembre (2011).
- [44] J. D. MURRAY, *Mathematical biology*, Springer, 2nd Edition Berlin, (1993).
- [45] C. NATHALIE, *Dynamique d'un modèle neuronal, Synchronisation et complexité*, Thèse Doctorat Université du Havre-France, 02 décembre(2009).
- [46] E. DE OLIVEIR, *Analyse de l'activité d'une pêcherie à échelle spatio-temporelle ne: Des captures répétitives aux puissances de pêche locales*, Thèse Doctorat l'Ecole des Mines de Paris, juin (2003).
- [47] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, Springer 3rd Edition Verlag, New York.(2001) .
- [48] M. JERRY et N. RAISSI, *Optimal strategy for structured model of fishing problem*, *C.R.Biologies.* 328, (2005), 351 – 356.
- [49] W.E. RICKER, *Stock and recruitment*, *J.Fish.Res.Board.Canada.*11, (1954), 559 – 623.
- [50] E. SANCHEZ, P. AUGER et J. C. POGGIALE, *Two -time scales in spatially structured models of population dynamics: Asemigroup approach*, *J. Math.Anal.and Appl.*,375, (2011), 149 – 165.
- [51] H. L. SMITH, *Monotone dynamical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, *Mathematical Surveys and Monographs*, AMS, Vol.41, Providence, (1995).
- [52] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, NewYork, (1994).
- [53] M. E. SOLOMON, *The natural control of Animal populations*. *Journal of Animal Ecology* 18, (1949) , 1 – 35.
- [54] D. STEFANSSON, *Computation of dominant reals roots of polynomilas*, *Prog.and Compt.Software*, 34,(2008), 69 – 74.

- [55] O. TAHVONEN, *Age structured optimization models in fisheries bioeconomics: A survey optimal control of age-structured population in Economy, Demography, and the Environment*, In: Boucekine, R, Hritonenko, N& Y.Yartensko (Eds). Environmental Economics, Routledge, Taylor and Francis, UK, (2011) , 140 – 173.
- [56] O. TAHVONEN, J. KUMPULER, et A. PEKKARINEN, *Optimal harvesting of an age-structured, two sex herbivore-plant systems*, Ecol.Model., 272,(2014), 348 – 361.
- [57] E. TRELAT, *Contrôle optimal: Théorie et applications*, Ed Vuibert(2002) .
- [58] S. TOUZEAU, *Modèle de contrôle en gestion des pêches*, Thèse Doctorat Université de Nice - Sophia Antipolis, (1997) .
- [59] P.F. VERHULST, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Correspondance Mathématique et Physique, 10, (1838), 113 – 121.
- [60] F.VERHULST, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New-York, (1990).
- [61] V. VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, (1931).
- [62] H. WU et F. CHEN, *Harvesting of a single-species system incorporating stage structure and toxicity*, Discrete. Dyn.Nat.Soc,(2009), 1 – 16.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude mathématique de deux modèles provenant de problèmes écologiques. Dans la première partie, nous étudions, le comportement asymptotique d'un système modélisant une population de poissons structurée en stades et dont la pêche est portée sur les adultes. Nous donnerons un profit qui maximise le revenu net de la pêche en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.

La deuxième partie est consacrée à l'effet des niveaux des eaux sur l'interaction proie-prédateur. Le but est de déterminer le niveau d'eau permettant la survie des deux populations. Afin d'illustrer l'étude théorique, une simulation numérique sera présentée.

Mots clés : Contrôle optimal, Principe de Pontryagin, modèle proie-prédateur, modèle structuré en stade, Beddington—DeAngeli, point d'équilibre, EDO, stabilité

Abstract

In this thesis, we focus on the mathematical study of two models from environmental problems. In the first part, we study the asymptotic behavior of a system modeling a structured age population and whose fishing is focused on adults. We will give a profit maximizing net income from fishing using the maximum principle of Pontryagin.

The second part is devoted to the impact of water levels on predator-prey interaction. The goal is to determine the water level for the survival of both populations. To illustrate the theoretical study, numerical simulation will be presented.

Keywords: optimal control, Pontryagin principle, prey-predator model, an age structured model, Beddington-DeAngelis, equilibrium, EDO, stability.

المخلص

في هذه الأطروحة نركز على دراسة رياضية لنموذجين مستوحين من المشاكل البيئية. في الجزء الأول، ندرس سلوك مقارب لنظام يحوي كائنات من الأسماك البالغة و الأخرى حديثة الولادة أين تتركز عملية الصيد على البالغين فقط. في هذا الإطار سنقدم ربح لتعظيم الدخل الصافي من الصيد وسيتم إنشاء هذا من خلال نظرية التحكم الأمثل التي عرضها المبدأ الأقصى ل بونطرياغين.

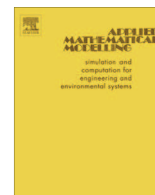
يخصص الجزء الثاني لآثار مستويات المياه على تفاعل الكائنات المفترسة مع فرائسها. الهدف من ذلك هو تحديد مستوى المياه لضمان التعايش بين الكائنات. لتوضيح الدراسة النظرية، وستعرض المحاكاة العددية.

الكلمات المفتاحية : التحكم الأمثل ، مبدأ بونطرياغين ، نموذج فريسة و مفترس ، نموذج حسب العمر ، بدينجتون دي انجيليس ، نقطة التوازن، معادلات تفاضلية، استقرار.



Contents lists available at ScienceDirect

Applied Mathematical Modelling

journal homepage: www.elsevier.com/locate/apm

An age-structured fishery model: Dynamics and optimal management with perfect elastic demand

S.M. Bouguima*, S. Benzerdjeb

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tlemcen, B.P. 119, Tlemcen 13000, Algeria

ARTICLE INFO

Article history:

Received 7 August 2013

Received in revised form 17 January 2015

Accepted 17 April 2015

Available online xxxx

Keywords:

Adult-juvenile model

Optimal control

Periodic solutions

Fishing effort

ABSTRACT

We consider a juvenile adult model with spatial structure and selective harvesting of the adult population. The dynamic behavior of the model system is investigated. The results indicate that competition between adults and cannibalism of juveniles do not effect population survival. Bioeconomic equilibrium and optimal harvesting are discussed. Some numerical simulations are given to illustrate the theoretical results.

© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Mathematical models describing the effect of harvesting are complex. There is a need to know the harvesting strategies that result in maximum sustainable yields and that do not lead to instabilities or extinction of the species. Various dynamic models have been analyzed through consideration of economic and ecological factors; see, for instance, [1–7]. In this paper, we analyze a fishing model. To reduce complexity, some assumptions are made. Firstly, it is assumed that only a mature population is susceptible to exploitation. This can be achieved with measures such as increasing the mesh size of the net. Secondly, we assume two timescales, a fast one associated with a quick movement of fish in spatial region Ω , and a slow one which corresponds to the demographic parameters of the fish population. The model is a reaction–diffusion version of models based on the classical stock–recruitment relation; see, for instance, the Beverton–Holt model for competition between juveniles [8], and the Ricker model with cannibalism [9]. We show that cannibalism and competition do not have a direct effect on population survival. We will study the global existence and asymptotic behavior in time of solutions. The model is partially cooperative. We handle this difficulty using the theory of fast–slow systems recently investigated by Sanchez et al. [10]. This approach allows one to focus on ordinary differential equations governing the total population density, obtained by integration over the spatial domain and with a slow timescale. We illustrate the results by giving an application to an optimal harvesting problem. Optimal control of bioeconomic systems without age dependence has been widely investigated, and we refer the reader to [2,11] for a good overview. Incorporating age-structure in modeling is more realistic, and we refer the reader to [12–18]. [19] discussed a problem with age dependence and selective harvesting. To the best of our knowledge, the coupling between diffusion and age dependence has not been completely investigated in fishing models, and because of the complexity they introduce, few results are obtained for these models; see, for instance, the results obtained by Fu et al. [20] and Lenhart and Montero [14], where the authors establish the existence of optimal control and characterize it by a system of partial differential equations. This paper is organized as follows. Section 2 is devoted to the

* Corresponding author.

E-mail address: bouguima@yahoo.fr (S.M. Bouguima).

formulation of the model. In Section 3, global existence and positiveness of solutions of system (1) are established. In Section 4, we focus on system (2), and derive conditions for population survival. Then in Section 5, we establish asymptotic behavior for system (1). In Section 6, we discuss optimal harvesting. Some simulations are given in Section 7 to illustrate the results. In Section 8, we discuss the achievements of this paper with some open problems.

2. Description of the model

We consider a time-continuous age-structured model of a harvested marine population living in a spatial region Ω that is bounded and regular in R^n , $n \geq 2$. The population is composed of two classes, adult and juveniles. Let $u(t, x)$ and $v(t, x)$ be the biomass of adults and juveniles, respectively, that at time t are occupying position x . We assume that the whole population is subject to a random dispersal with diffusion constant $d_\Omega > 0$. An application of the balance law gives the following system:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} U - d_\Omega \Delta U = \sigma^*(x)V - \alpha^*(x)U^2 - E^*(x)U & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial V}{\partial t} V - d_\Omega \Delta V = b^*(x)U - f^*(x)V - d^*(x)UV & \text{in } \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (1)$$

The system is completed by the Neumann boundary condition

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0, T],$$

where n is an outward-pointing normal to $\partial\Omega$, and the initial conditions are

$$U(0, x) = U_0, V(0, x) = V_0 \text{ in } \Omega.$$

The homogeneous Neumann boundary condition means that there is no migration of the species across the boundary of their habitat. The prescribed initial functions U_0 and V_0 are continuous and nonnegative. The functions σ^* , α^* , E^* , b^* , f^* , and d^* are positive continuous functions on $\bar{\Omega}$. The rate of maturation of the young population into the adult population is given by σ^* . The birth rate by which the young population is produced by the adult population is the function b^* . The coefficient α^* measures competition between adults for food and space. The function E^* can be interpreted as harvesting a portion of the adult population. The function f^* measures all causes of death of the young population, including natural death, predation by other species, and death caused by fishing activity. We assume that the adults prey on juveniles and the rate of cannibalism is d^* .

If $d_\Omega = \frac{1}{\varepsilon}$ with $\varepsilon > 0$ small enough, then by integrating (1) over Ω , we obtain

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_\Omega U(t, x) dx = \int_\Omega \sigma^*(x)V(t, x) dx - \int_\Omega \alpha^*(x)U(t, x)^2 dx - \int_\Omega E^*(x)U(t, x) dx, \\ \frac{d}{dt} \int_\Omega V(t, x) dx = \int_\Omega b^*(x)U(t, x) dx - \int_\Omega f^*(x)V(t, x) dx - \int_\Omega d^*(x)V(t, x)U(t, x) dx. \end{cases}$$

Taking as new variables the total populations of adults and juveniles,

$$u(t) = \int_\Omega U(t, x) dx, \quad v(t) = \int_\Omega V(t, x) dx,$$

we obtain

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_\Omega \sigma^*(x)V(t, x) dx - \int_\Omega \alpha^*(x)U(t, x)^2 dx - \int_\Omega E^*(x)U(t, x) dx, \\ v'(t) &= \int_\Omega b^*(x)U(t, x) dx - \int_\Omega f^*(x)V(t, x) dx - \int_\Omega d^*(x)V(t, x)U(t, x) dx. \end{aligned}$$

The expression on the right hand side is given in terms of the variables U and V . We make the approximation (see [10])

$$U(t, x) \approx \frac{u(t)}{\text{vol}(\Omega)}, \quad V(t, x) \approx \frac{v(t)}{\text{vol}(\Omega)};$$

therefore,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma v - \alpha u^2 - Eu, \\ \frac{dv}{dt} = bu - f v - dv, \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \end{cases} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\int_\Omega \sigma^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, & b &= \frac{\int_\Omega b^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, \\ E &= \frac{\int_\Omega E^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, & f &= \frac{\int_\Omega f^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)}, \\ d &= \frac{\int_\Omega d^*(x) dx}{\text{vol}(\Omega)^2}. \end{aligned}$$

By Theorem 4 in [10], system (2) is a good approximation of system (1). The spatial structure has been taken into account in the parameters. The dynamics of system (1) depends on the dynamics of the aggregated system (2).

3. Existence of solutions of system (1)

All solutions of (1) starting with nonnegative functions $U_0, V_0 \geq 0$ are global in time and nonnegative for any $t \geq 0$. Indeed, the local existence and the positiveness are a consequence of Theorem 3.1 in [21]. Global existence (i.e., the solutions are defined on the whole $t \geq 0$) is established for positive solutions.

Proposition 1. *The solutions $U(t, \cdot), V(t, \cdot)$ are defined on $[0, +\infty)$.*

Proof. For $T > 0$, consider the cooperative system

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U^+ - d_{\Omega} \Delta U^+ = \sigma V^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{\partial}{\partial t} V^+ - d_{\Omega} \Delta V^+ = b U^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0, x) = \|U_0\|_{\infty}, V^+(0, x) = \|V_0\|_{\infty} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U^+}{\partial n} = \frac{\partial V^+}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \quad \partial\Omega \times [0, +\infty[. \end{cases}$$

Let $U^+(t)$ and $V^+(t)$ be a solution of the previous system that depends only on t . Then (U^+, V^+) satisfy the linear ordinary differential equation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U^+ = \sigma V^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{d}{dt} V^+ = b U^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0) = \|U_0\|_{\infty}, V^+(0) = \|V_0\|_{\infty} & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

From the comparison principle, see Theorem 3.4 in [21], we have

$$0 \leq U(t, x) \leq U^+(t) \text{ and } 0 \leq V(t, x) \leq V^+(t).$$

We conclude that $(U(t, \cdot), V(t, \cdot))$ are defined globally. \square

3.1. Steady+state solutions for system (1)

Consider the system

$$\begin{cases} -d_{\Omega} \Delta U = \sigma^*(x)V - \alpha^*(x)U^2 - E^*(x)U & \text{in } \Omega, \\ -d_{\Omega} \Delta V = b^*(x)U - f^*(x)V - d^*(x)UV & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{S}$$

Arguments similar to those in [22,23] show that a necessary and sufficient condition for the existence of at least one positive solution to (S) is that the trivial solution must be unstable.

For g a continuous function on $\bar{\Omega}$, we denote $\underline{g} = \inf_{\bar{\Omega}} g$ and $\bar{g} = \sup_{\bar{\Omega}} g$.

Proposition 2. *If $\underline{\sigma^*} \underline{b^*} > \bar{E^*} \bar{f^*}$, then the trivial solution of system (1) is unstable.*

Proof. Let

$$L = \begin{pmatrix} -d_{\Omega} \Delta & 0 \\ 0 & -d_{\Omega} \Delta \end{pmatrix} \text{ and } A(x) = \begin{pmatrix} -E^*(x) & \sigma^*(x) \\ b^*(x) & -f^*(x) \end{pmatrix}.$$

Then the operator $L - A$ has a principal eigenvalue denoted by $\lambda_1(L - A)$. To show that $(0, 0)$ is unstable, it suffices to prove that $\lambda_1(L - A) < 0$. Let (U_p, V_p) be the principal eigenfunction associated with $\lambda_1(L - A)$. Hence,

$$\begin{cases} -d_{\Omega} \Delta U_p - \sigma^*(x)V_p + E^*(x)U_p = \lambda_1(L - A)U_p & \text{in } \Omega, \\ -d_{\Omega} \Delta V_p - b^*(x)U_p + f^*(x)V_p = \lambda_1(L - A)V_p & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U_p}{\partial n} = \frac{\partial V_p}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Integrating over Ω , we obtain

$$\int_{\Omega} -d_{\Omega} \Delta U_p dx = \int_{\Omega} -d_{\Omega} \Delta V_p dx = 0.$$

This implies that

$$\int_{\Omega} (\sigma^*(x)V_p - E^*(x)U_p) dx = - \int_{\Omega} \lambda_1(L-A)U_p dx$$

and

$$\int_{\Omega} (b^*(x)U_p - f^*(x)V_p) dx = - \int_{\Omega} \lambda_1(L-A)V_p dx.$$

Since U_p and V_p are strictly positive, we conclude that

$$-\lambda_1(L-A) \int_{\Omega} U_p dx \geq \underline{\sigma}^* \int_{\Omega} V_p dx - \overline{E}^* \int_{\Omega} U_p dx$$

and

$$-\lambda_1(L-A) \int_{\Omega} V_p dx \geq \underline{b}^* \int_{\Omega} U_p dx - \overline{f}^* \int_{\Omega} V_p dx.$$

Let

$$\xi = \frac{\int_{\Omega} V_p dx}{\int_{\Omega} U_p dx} > 0.$$

We have

$$-\lambda_1(L-A) \geq \underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*$$

and

$$-\lambda_1(L-A) \geq \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^*.$$

We will study

$$\inf_{\xi > 0} \max \left(\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*, \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* \right).$$

Consider the equation

$$\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^* = \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^*.$$

A positive root of this equation is

$$\xi^* = \frac{(\overline{E}^* - \overline{f}^*) + \sqrt{(\overline{E}^* - \overline{f}^*)^2 + 4\underline{\sigma}^* \underline{b}^*}}{2\underline{\sigma}^*}.$$

Consequently,

$$\max_{\xi > 0} \left(\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*, \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* \right) = \begin{cases} \underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^* & \text{if } \xi \leq \xi^*, \\ \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* & \text{if } \xi \geq \xi^*. \end{cases}$$

Hence,

$$\inf_{\xi > 0} \max \left(\underline{\sigma}^* \xi - \overline{E}^*, \frac{\underline{b}^*}{\xi} - \overline{f}^* \right) = \underline{\sigma}^* \xi^* - \overline{E}^* = \frac{\underline{b}^*}{\xi^*} - \overline{f}^* = \frac{4(\underline{\sigma}^* \underline{b}^* - \overline{E}^* \overline{f}^*)}{(\overline{E}^* + \overline{f}^*) + \sqrt{(\overline{E}^* - \overline{f}^*)^2 + 4\underline{\sigma}^* \underline{b}^*}}.$$

It follows that

$$-\lambda_1(L-A) \geq \frac{4(\underline{\sigma}^* \underline{b}^* - \overline{E}^* \overline{f}^*)}{(\overline{E}^* + \overline{f}^*) + \sqrt{(\overline{E}^* - \overline{f}^*)^2 + 4\underline{\sigma}^* \underline{b}^*}}. \quad \square$$

Remark 3. See Remark 5 for an ecological interpretation of the condition given in the previous proposition.

4. Equilibrium and dissipativeness of system (2)

System (2) has to be analyzed with the initial conditions

$$u(0) > 0, \quad v(0) > 0.$$

We observe that the right-hand side of (2) is a smooth function of the variables (u, v) ; hence, the local existence and uniqueness properties are obtained for the corresponding Cauchy problem. The state space of (2) remains in the positive octant:

$$\mathbb{R}_+^2 := \{(u, v) : u > 0, v > 0\}.$$

Indeed, set \mathbb{R}_+^2 is positively invariant since the vector field of (2) is inward on the boundary $\partial\mathbb{R}_+^2$. Now, we shall prove the dissipativeness of system (2).

Theorem 4. All solutions of system (2) that start in \mathbb{R}_+^2 are in the compact

$$K = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : u + v \leq \frac{b\sigma}{\alpha f} \right\}.$$

Proof. We define the function $w(t) = \frac{u(t)}{\sigma} + \frac{v(t)}{f}$. Therefore,

$$\frac{dw}{dt} \leq \frac{b}{f}u - \frac{\alpha}{\sigma}u^2.$$

From the standard comparison principle, we get

$$w \leq z,$$

where z is the solution of the logistic equation

$$z' = \frac{b}{f}z - \frac{\alpha}{\sigma}z^2.$$

Hence,

$$w \leq z \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} z(t) \leq \frac{b\sigma}{\alpha f}.$$

So, we obtain the dissipativeness properties of system (2). \square

Now, we investigate non-negative equilibria for system (2). The following proposition, gives the existence of equilibria .

Proposition 5. System (2) have two equilibria:

- (i) The trivial equilibrium point $P_0(0, 0)$.
- (ii) The coexistence equilibrium $P_*(u^*, v^*)$ exists if and only if $E < \frac{\sigma b}{f}$. Under this condition, u^* and v^* are given by

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{-\alpha f - dE + \sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma}}{2\alpha d}, \\ v^* &= \frac{\left(\sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma} - \alpha f\right)^2 - d^2 E^2}{4\alpha d^2 \sigma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Proof. A direct way of finding equilibria is to consider the intersection of the nulclines. We should solve following algebraic equations:

$$\sigma v - \alpha u^2 - Eu = 0, \quad (4)$$

$$bu - fv - duv = 0. \quad (5)$$

The shape of the curves suggests that there is only the trivial point and an interior equilibrium provided that

$$E < \frac{\sigma b}{f}. \quad (6)$$

This equilibrium corresponds to the values

$$u^* = \frac{-\alpha f - dE + \sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma}}{2\alpha d},$$

$$v^* = \frac{\left(\sqrt{(\alpha f - Ed)^2 + 4\alpha db\sigma} - \alpha f\right)^2 - d^2 E^2}{4\alpha d^2 \sigma}.$$

Figs. 1 and 2 show the shape of the nuclines □

Remark 6. Ecologically, condition (6) means that for small fishing effort, the fish population can be sustained at an appropriate equilibrium level.

Remark 7. Since $d^*(x) \geq 0$ and is not identical to zero, then $\int_{\Omega} d^*(x) dx > 0$. This implies that $d > 0$. We argue similarly for other coefficients, except for E^* . In fact, E^* can be identically zero in the case of no harvesting.

4.1. Dynamic behavior

We can study the local stability of an equilibrium by analyzing the Jacobian matrix of the system

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} -(2\alpha u + E) & \sigma \\ b - dv & -(f + du) \end{bmatrix}.$$

The stability of the trivial equilibrium $P_0(0, 0)$ characterizes the ability of the species to survive.

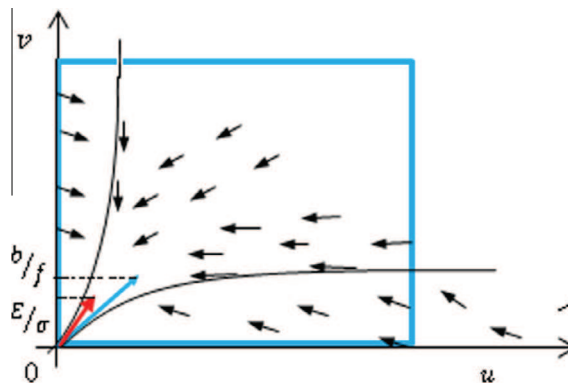


Fig. 1. Existence of the trivial equilibrium if $E > \frac{ab}{f}$.

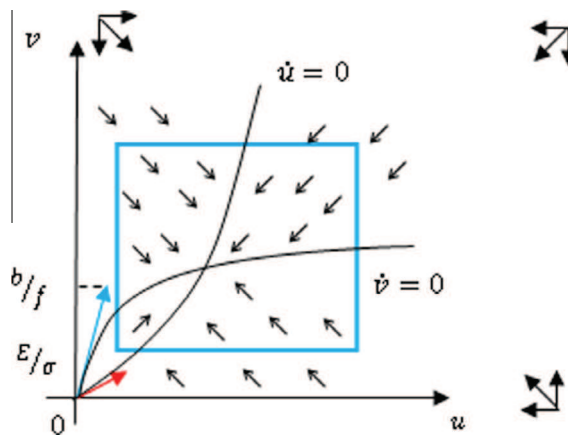


Fig. 2. The isoclines show that if $E < \frac{ab}{f}$, then there exists a unique equilibrium point P^* which must be globally stable. The arrows denote the direction of the trajectory; indeed, any trajectory enters from the exterior to the interior.

Theorem 8.

- (i) If $E > \frac{\sigma b}{f}$, then the origin P_0 is a stable node.
- (ii) If $E < \frac{\sigma b}{f}$, then the origin P_0 is a saddle point.

Proof. The Jacobian matrix calculated at the origin P_0 is

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -E & \sigma \\ b & -f \end{bmatrix}.$$

It is clear that the trace satisfies

$$\text{Tr } J = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$$

and the determinant

$$\det J = \lambda_1 \lambda_2 = Ef - \sigma b.$$

Since a necessary and sufficient condition for local stability in two dimensions is

$$\text{Tr } J < 0 \text{ and } \det J > 0.$$

Assertions (i) and (ii) are immediate. \square

Remark 9. Although fishing is restricted to adults, juveniles may disappear when fishing effort exceeds a threshold. Indeed, mature females cannot produce eggs when they are captured.

Theorem 10. If $E < \frac{\sigma b}{f}$ is verified, then the equilibrium P^* given by (3) is locally stable.

Proof. Observe that

$$u^* = \eta - \frac{E}{2\alpha} \text{ and } v^* = \frac{(2\alpha\eta - E)(2\alpha\eta + E)}{4\alpha\sigma}, \tag{7}$$

with

$$\eta = \frac{\sqrt{\Delta} - f\alpha}{2d\alpha} > 0. \tag{8}$$

Since $u^* > 0$, then necessarily

$$\eta > \frac{E}{2\alpha}.$$

The Jacobian matrix calculated at the point (u^*, v^*) is

$$J(u^*, v^*) = \begin{bmatrix} -2\alpha\eta & \sigma \\ b - \frac{d}{4\alpha\sigma}(2\alpha\eta - E)(2\alpha\eta + E) & -\left(\frac{2\alpha f + 2\alpha d\eta - Ed}{2\alpha}\right) \end{bmatrix}.$$

It is clear that

$$\text{Tr } J = -\left(2\alpha\eta + \frac{2\alpha f + 2\alpha d\eta - Ed}{2\alpha}\right) < 0$$

and

$$\det J = (2\alpha f + 2\alpha d\eta - Ed) + \frac{d}{4\alpha}(2\alpha\eta - E)(2\alpha\eta + E) - \sigma b. \tag{9}$$

A simple analysis implies that $\det J > 0$. Indeed, we shall consider this determinant as a second-degree polynomial in η , denoted by

$$P(\eta) = 3\alpha d\eta^2 + \eta(2\alpha f - Ed) - \frac{E^2 d}{4\alpha} - \sigma b.$$

The polynomial $P(\eta)$ has two roots of different signs, $\eta_1 = -\frac{2\alpha f - Ed + \sqrt{\delta}}{6\alpha d} < 0$ and $\eta_2 = \frac{-(2\alpha f - Ed) + \sqrt{\delta}}{6\alpha d} > 0$, where $\delta = (2\alpha f - Ed)^2 + 3E^2 d^2 + 12d\alpha\sigma b$. Since $u^* > 0$, we have

$$-\alpha f - Ed > -\sigma \sqrt{\left(\frac{\alpha f - Ed}{\sigma}\right)^2 + 4\frac{\alpha db}{\sigma}}$$

and

$$\eta - \eta_2 > \frac{2\sigma \sqrt{\left(\frac{\alpha f - Ed}{\sigma}\right)^2 + 4\frac{\alpha db}{\sigma}} - \sqrt{\delta}}{6d\alpha} = \frac{2(\sigma b - fE)}{3\left(2\sigma \sqrt{\left(\frac{\alpha f - Ed}{\sigma}\right)^2 + 4\frac{\alpha db}{\sigma}} + \sqrt{\delta}\right)} > 0. \quad (10)$$

We deduce that $\det J > 0$. Therefore, $P_* = (u^*, v^*)$ is a locally stable positive equilibrium. \square

In the next theorem, we shall show that system (2) has no positive periodic solutions. Our method involves application of the Bendixson criterion [24]; see Theorem 4.1 in [25]. The dissipativity of the system and the Poincaré–Bendixson theorem [24] imply that the positive solution of system (2) tends either to the origin or to (u^*, v^*) .

Theorem 11. *System (2) admits no periodic solution. In addition, if $b\sigma < Ef$, then $(u(t), v(t))$ tends to $(0, 0)$. If $b\sigma > Ef$, then $(u(t), v(t))$ tends to (u^*, v^*) .*

Proof. Let

$$\frac{du}{dt} = \sigma v - \alpha u^2 - Eu = F(u, v)$$

and

$$\frac{dv}{dt} = bu - fv - duv = G(u, v).$$

Then

$$\operatorname{div}(F, G) = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} = -(2\alpha u + e) - (f + du). \quad (11)$$

For all $u \geq 0$ and $v \geq 0$, since all other parameters are strictly positive, the sign of $\operatorname{div}(F, G)$ in (11) is strictly negative. Therefore, if we apply the Bendixson criterion [24], there are no limit cycles within the interior of the positive octant in the state space (u, v) . From the Dulac principle and the dissipativity of the system, it follows that $(u(t), v(t))$ tends either to $(0, 0)$ or to (u^*, v^*) . \square

Remark 12. When the fecundity b and the maturity rate σ are low, or mortality f is high, there will not be enough juveniles that will support the population over a long time and the population will become extinction.

Corollary 13.

- (i) If $E > \frac{b\sigma}{f}$, then the origin P_0 is globally asymptotically stable.
- (ii) If $E < \frac{b\sigma}{f}$, then the equilibrium P^* is globally asymptotically stable.

Proof. It is a direct consequence of Theorems 8, 10 and 11. \square

It is mathematically interesting to see what happens if $b\sigma = Ef$, since in this case the equilibrium is not hyperbolic and the method of linearization is not conclusive.

Proposition 14. *If $b\sigma = Ef$, then $(0, 0)$ is globally asymptotically stable in \mathbb{R}_+^2 .*

Proof. We construct the following Lyapunov function:

$$V = \frac{u}{\sigma} + \frac{v}{f}.$$

Calculating the derivative of V for solutions of (2), we obtain

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{b}{f} - \frac{E}{\sigma}\right)u - \frac{1}{f}duv - \frac{\alpha}{\sigma}u^2 = -\frac{1}{f}duv - \frac{\alpha}{\sigma}u^2 < 0$$

in $\text{Int } \mathbb{R}_+^2$. In addition, $\lim_{u, v \rightarrow +\infty} V = +\infty$. This implies that $(0, 0)$ is globally asymptotically stable in \mathbb{R}_+^2 . \square

5. Fast–slow dynamics

In the planar case, the long-time behavior of trajectories is simple when diffusion is disregarded. In this section, we will explore the asymptotic behavior in time when the diffusion is supposed to be fast. Let $\varepsilon > 0$ be small enough.

Proposition 15.

- (a) If $\sigma b > Ef$, then system (1) has a compact attractor close to P^* .
- (b) If $\sigma b < Ef$, then system (1) has a compact attractor close to P_0 .

Proof. The proof is a consequence of Theorem 4 in [10]. \square

The case of $\sigma b = Ef$ is more complicated. Firstly, we will obtain some a priori estimates for system (1). For simplicity, we assume all the coefficients of (1) are constant. The following theorem establishes the uniform boundedness of system (1).

Proposition 16. If $\sigma b = Ef$, then the continuous solutions of (1), corresponding to nonnegative continuous initial data, are uniformly bounded on t and on $\varepsilon > 0$.

Proof. Consider the cooperative system

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U^+ - d_\Omega \Delta U^+ = \sigma V^+ - EU^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{\partial}{\partial t} V^+ - d_\Omega \Delta V^+ = bU^+ - fV^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0, x) = \|U_0\|_\infty, V^+(0, x) = \|V_0\|_\infty & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U^+}{\partial n} = \frac{\partial V^+}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad \text{(C1)}$$

Let $U^+(t)$ and $V^+(t)$ be a solution of (C1) that depends only on t . Then (U^+, V^+) satisfies the linear ordinary differential equation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U^+ = \sigma V^+ - EU^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \frac{d}{dt} V^+ = bU^+ - fV^+ & \text{in } \Omega \times [0, +\infty[, \\ U^+(0) = \|U_0\|_\infty, V^+(0) = \|V_0\|_\infty & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad \text{(C2)}$$

From the comparison principle, see Theorem 3.4 in [21], we have

$$0 \leq U(t, x) \leq U^+(t) \text{ and } 0 \leq V(t, x) \leq V^+(t).$$

The matrix

$$\begin{pmatrix} -E & \sigma \\ b & -f \end{pmatrix}$$

has two eigenvalues, $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 < 0$. It follows that the solutions $U^+(t)$ and $V^+(t)$ are uniformly bounded on t . \square

Proposition 17. If $\sigma b = Ef$, then the continuous solutions of (1), corresponding to nonnegative continuous initial data, tend to $(0, 0)$ when ε goes to 0^+ and t is large enough and fixed.

Proof. From Theorem 5 in [10], the solutions (U, V) of system (1) verifies for $x \in \Omega$ and $t > 0$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + r_\varepsilon(x, t),$$

where (u, v) is a solution of system (2) corresponding to the initial data

$$u(0) = u_0 = \int_\Omega U(0, x) dx, \quad v(0) = v_0 = \int_\Omega V(0, x) dx$$

and

$$|r_\varepsilon(x, t)| \leq a_1 \varepsilon e^{t a_2} + a_3 e^{a_4 t}$$

uniformly on Ω . Here a_i are positive constants. Since in this case $(0, 0)$ is globally asymptotically stable for system (2), it follows that (u, v) is close to $(0, 0)$ for t large enough. Hence (U, V) tends to $(0, 0)$ when ε goes to 0^+ and t is fixed and large enough. \square

6. Bioeconomic harvesting

We suppose that the selling price is constant. This corresponds to the case when the yield faces a perfectly elastic demand. For instance, the price is determined by the international market; see, for instance, [26].

6.1. Open access fishery

The optimization problem is to determine the optimal fishing effort to provide a maximum rent. We assume a constant price p per unit of harvest biomass. The sustainable yield is

$$Y(E) = Eu^*,$$

where u^* is the adult equilibrium of system (2). The catch of the resource multiplied by the price gives the total revenue:

$$TR = pY(E).$$

The cost function is

$$TC = c(u^*)E.$$

The sustainable economic rent provided by the fishing effort E is given by

$$ER = TR - TC = pEu^* - c(u^*)E.$$

So, we have the bioeconomic effort E_∞ when

$$TR = TC.$$

If

$$E > E_\infty,$$

then the total cost of fishing is greater than the total revenue. Hence overfishing generates a fall in income for fishermen. If

$$E < E_\infty,$$

the profit is positive.

The economic objective is to maximize the profit, which is the difference between the income and the cost:

$$\pi(E) = E(pu^* - c(u^*)). \quad (12)$$

We know that when the fishable resource decreases in size, the effort is more expensive. Hence, c is assumed to decrease with stock size. We can choose a function cost such that $c(u) = \frac{c_0}{u}$, with c_0 a positive constant. Without loss of generality, we take $c_0 = 1$. In this case, a simple calculation gives the bioeconomic effort:

$$E_\infty = \frac{\sigma b \sqrt{p}}{f \sqrt{p} + d} - \frac{\alpha \sqrt{p}}{p}$$

and $E_\infty > 0$ if

$$p > \left(\frac{\alpha f + \sqrt{\alpha^2 f^2 + 4\alpha f \sigma b}}{2\sigma b} \right)^2.$$

Under the condition $\sigma b > Ef$, the function $\pi(E)$ is continuous, and $\pi(0) = 0$. We assume that $\pi'(0) > 0$. Hence, we obtain

$$\pi'(E) = (pu^* - c(u^*)) + E \frac{d}{dE} (pu^* - c(u^*))$$

and

$$\pi'(0) = pu^*(0) - c(u^*(0)) > 0.$$

This implies that

$$u^*(0) > \sqrt[2]{\frac{1}{p}}.$$

Remark 18. The stock of mature fish should be large enough to allow harvesting.

Now, our purpose is to obtain the best control of fishing effort E^* , so it is necessary to have the following condition:

$$\frac{\partial \pi}{\partial E} = 0 \iff pu^* - c(u^*) + E \frac{\partial u^*}{\partial E} \left(p - \frac{\partial c(u^*)}{\partial u^*} \right) = 0. \tag{13}$$

The function $\pi(E)$ is continuous on the $I = \left[0, \frac{\sigma b}{f}\right]$ interval, and $\lim_{E \rightarrow \frac{\sigma b}{f}} \pi(E) = -\infty$. This implies that the maximum of $\pi(E)$ is

achieved at a point $E_{opt} \in I$.

Substituting $c(u^*)$ and its derivative $\frac{\partial c}{\partial u}(u^*)$ into (13), we get the optimal harvesting equation:

$$E^4 + \frac{f(d - 2p\sigma b)}{pf^2 - d^2} E^3 + \left[\frac{\alpha(1 - \alpha)}{p} + \frac{\sigma b(p\sigma b - d - 2d\alpha)}{pf^2 - d^2} \right] E^2 + \left(\frac{\alpha d(1 - \alpha)}{p(pf^2 - d^2)} - \frac{\alpha f \sigma b}{pf^2 - d^2} \right) E - \frac{\alpha d \sigma b}{p(pf^2 - d^2)} = 0. \tag{14}$$

It is easy to calculate the algebraic solution E_{op} , and it depends on biological, environmental, and economic parameters.

If d is large enough, then there are four sign changes in the sequence of coefficients in the previous polynomial. From the Descartes principle (see, e.g., [6, p. 704]), there are exactly either four or two positive roots of (14). On the other hand, from the main theorem in [27] (see the Appendix A), any positive root E_{op} of (14) has an upper bound given by

$$E_{op} \leq \frac{2f(d - 2p\sigma b)}{d^2 - pf^2}.$$

It is clear that

$$\frac{2f(d - 2p\sigma b)}{d^2 - pf^2} \leq \frac{\sigma b}{f}.$$

Remark 19. If d is large enough, then the optimal fishing E_{op} goes to zero, and this leads to a dissipation of economic rent.

If d is small and α is large enough, then there is one sign change in the sequence of coefficients in the previous polynomial, and from the Descartes principle, there is exactly one positive root of (14).

Remark 20. The previous uniqueness result is different from that obtained in [14], where, under conditions on the smallness of the time interval, uniqueness of optimal control is established.

6.2. Optimal harvesting policy

Assume here is a constant discount rate δ . For simplicity, we suppose that the harvesting cost is constant. Let c be the constant fishing cost per unit effort, and let p be the constant price per unit biomass of the mature population. The net revenue of harvesting at any time is given by

$$\pi(E) = E(pu - c).$$

To maximize the rent for the future, we consider the following optimization problem

$$\sup_E J(E) = \sup_E \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \pi(E) dt,$$

subjected to the state equation. We apply Pontryagin's maximum principle.

The pseudo-Hamiltonian is

$$H = e^{-\delta t} E(pu - c) + \lambda_1(\sigma v - \alpha u^2 - Eu) + \lambda_2(bu - fv - duv), \tag{15}$$

where $\lambda_1(t)$ and $\lambda_2(t)$ are the adjoint variables, and E is the control variable satisfying the constraints $0 \leq E \leq E_{\max}$. Here E_{\max} is the feasible upper limit of the fishing effort.

Since the pseudo-Hamiltonian H is linear in the control variable E with coefficient $(e^{-\delta t}(pu - c) - \lambda_1 u)$, the optimal control will be a combination of extreme controls and the singular control.

The necessary condition for the maximization of H is

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{e^{-\delta t}(pu - c)}{u}. \quad (16)$$

According to Pontryagin's maximum principle, the adjoint equations are

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial u} = -Epe^{-\delta t} + \lambda_1(2\alpha u + E) - \lambda_2(b - dv), \quad (17)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\sigma\lambda_1 + \lambda_2(f + du). \quad (18)$$

Let $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 e^{-\delta t}$ and $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2 e^{-\delta t}$. Then, (16)–(18) become

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{pu - c}{u} = p - \frac{c}{u}, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\lambda}_1 = -Ep + \bar{\lambda}_1(2\alpha u + E + \delta) - \bar{\lambda}_2(b - dv), \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\lambda}_2 = -\sigma\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2(f + du + \delta). \quad (21)$$

The optimal control E that maximizes H must satisfy the following conditions:

$$E = 0, \quad \text{when } \bar{\lambda}_1 > p - \frac{c}{u},$$

$$E = E_{\max}, \quad \text{when } \bar{\lambda}_1 < p - \frac{c}{u}.$$

Remark 21. The quantity $\bar{\lambda}_1 e^{-\delta t}$ is called the shadow price, and $p - \frac{c}{u}$ is the net economic revenue on a unit harvest. One must fish as much as possible when the shadow price is low enough, $\bar{\lambda}_1 e^{-\delta t} < p - \frac{c}{u}$ and not fish when the shadow price is high, $\bar{\lambda}_1 e^{-\delta t} > p - \frac{c}{u}$.

When $\bar{\lambda}_1$ equals the net economic revenue on a unit harvest $p - \frac{c}{u}$, then the pseudo-Hamiltonian H becomes independent of the control variable E , and the maximum condition does not provide any information about E in this case.

Using (19), the derivative of (19), and (20), we get

$$\frac{cu'}{u^2} = \left(\frac{pu - c}{u}\right)(2\alpha u + E + \delta) - \bar{\lambda}_2(b - dv) - Ep. \quad (22)$$

Substituting $u' = \sigma v - \alpha u^2 - Eu$ into (22), we obtain

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{u(pu - c)(\alpha u + \delta) + \alpha pu^3 - c\sigma v}{u^2(b - dv)}. \quad (23)$$

We restrict ourselves to optimization at equilibrium, which is much easier to handle than the general case. At the positive equilibrium, we have $u' = v' = 0$, and consequently $\bar{\lambda}_2' = 0$. In this case, a simple calculation gives the harvest rate as

$$E^* = h(u) = (pu - c) \frac{(f + du + \delta)(2\alpha u + \delta) + (\alpha du^2 - \sigma b)}{c(f + du + \delta) - du(pu - c)}.$$

It reflects the direct change in fishing effort due to a change in adult stock. E^* must satisfy $E^* < \frac{ab}{f}$. E^* is not feasible for every value of u Since $\frac{d}{dt}\bar{\lambda}_2 = 0$, then

$$-\sigma\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2(f + du + \delta) = 0$$

and

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\bar{\lambda}_2(f + du + \delta)}{\sigma} = \frac{(f + du + \delta)[u(pu - c)(\alpha u + \delta) + \alpha pu^3 - c\sigma v]}{\sigma u^2(b - dv)}$$

and the necessary condition for maximization of the pseudo-Hamiltonian becomes

$$p - \frac{c}{u} = \frac{(f + du + \delta)u(pu - c)(\alpha u + \delta) + \alpha pu^3 - c\sigma v}{\sigma u^2(b - dv)}.$$

This implies that

$$pu - c = \frac{\alpha pu^3 - c\sigma v}{\sigma u^2(b - dv) - (f + du + \delta)u(\alpha u + \delta)}.$$

Hence

$$\pi(E) = E(pu - c)$$

is a decreasing function with respect to δ , and the economic rent $\pi(E)$ tends to zero when δ goes to $+\infty$.

Remark 22. When the time preference of the present generation is high, the net benefit is lower.

7. Numerical simulations

In this section, we give some numerical examples. Because of a lack of real-world data, we have used hypothetical data to illustrate the analytical results. We assume that $\sigma = 3.9$, $\alpha = 1.04$, $b = 2.3$, $f = 0.5$, and $d = 0.2$.

Example 23. In this case, we choose the value of $E = 1$ which verifies $E < \frac{\sigma b}{f} = 17.94$. Considering system (2) with initial condition (6, 2), we have the following:

Fig. 3 represents the growth of the mature and immature populations with time. The intersection of both curves gives the nonnegative equilibrium (u^*, v^*) , which is $u^* = 0.2112$ and $v^* = 0.0660$.

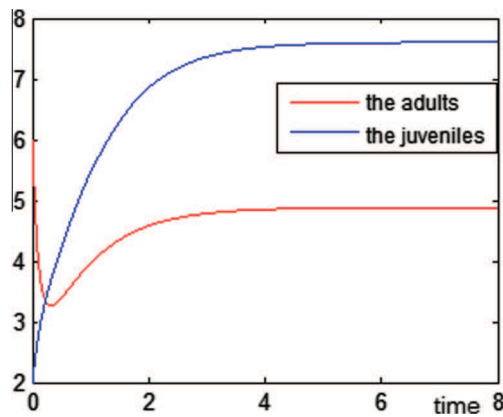


Fig. 3. Solution curves of mature and immature population.

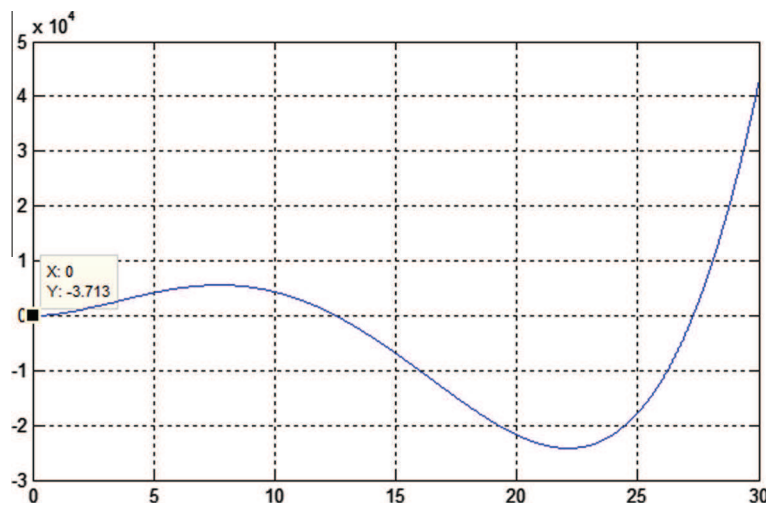


Fig. 4. Roots of (14).

Example 24. Let $p = 1.5$ be the selling price. Using the data from the previous example, we find the control value, which is represented by the intersection of the curve with the x -axis.

Fig. 4 shows the existence of three real roots of (14), which are represented by the intersection of the curve with the x -axis ($y = 0$). Here $E^* = 6, 121$.

8. Conclusion

A bioeconomic model attempting to relate the reproduction of a renewable resource to its exploitation has been presented. We have analyzed the dynamics of a fishery model with an age-structured population. The existence of competition between adults and cannibalism of juveniles have been assumed. The exploitation of the fish population is assumed for the adult population which has a commercial value. Jerry and Raissi [12] studied a similar fishing model without intraspecific competition between species and cannibalism.

Firstly, with use of stability theory of ordinary differential equations, it has been proved that the interior equilibrium exists under certain conditions, and it is globally asymptotically stable. Even when the fishing effort is restricted to the adult population, both adults and juveniles can become extinct, because the ecosystem is often altered by human activities. We analyzed the harvesting strategy that results in maximizing the profit and does not lead to extinction. We obtained the optimal harvesting equation and deduced the effect of cannibalism on economic rent. Our approach consists of the following idea. We take advantage of the existence of two timescales (see [10]), a fast one for fish diffusion and a slow one for fish growth and death to reduce our model to an ordinary differential equation system. The major contributions of this paper are as follows:

- The persistence of the species depends on two factors. The first is biological and concerns the ability for a species to reproduce: this is a function of the birth rate, natural death of the young population, and the rate of maturity. For instance, if the growth rate is no longer sufficient to replace losses, the stock collapses. The second is linked to the exploitation and mechanisms that reduce the fishing effort. The latter can be reduced by limiting the time for fishing, reducing the capacity that a vessel can carry, or closing areas where the birth rate is high.
- Cannibalism and competition do not have a direct effect on population survival.
- Using a result obtained by Stefansson [27], we showed that under suitable conditions there will be a dissipation of economic rent in an open access fishery.
- In the case of total discounted net benefit, the fishing effort is given as a function of the mature stock. This result is difficult to obtain without the use of a fast–slow system; see, for instance, [20,14].

There are still many interesting and challenging mathematical questions that need to be studied for system (1). For example, the model does not consider seasonal or stochastic variation, or reserve area (see, e.g., [28]). Further research may incorporate these aspects in the model. Fishers might not exclude the fishing of juveniles, and it would be interesting to consider exploitation taking into account the juvenile stage. The selling price is assumed to be constant, and it would be interesting to consider a variable price of fish. For related questions with other methods using the economic order quantity model, see [29].

Acknowledgment

The authors are grateful to the reviewers for their critical evaluations and suggestions.

Appendix A

Let us recall the following result on upper bounds of positive roots of a polynomial given in [27]:

Theorem 25. Let

$$p(x) = x^d - b_1x^{d-m_1} - \dots - b_kx^{d-m_k} + \sum_{j=m_1, \dots, m_k} a_jx^{d-j},$$

where b_1, \dots, b_k are strictly positive and $a_j \geq 0$ for all $j \in \{m_1, \dots, m_k\}$. The number

$$B_1(p) = \max \left\{ (kb_1)^{\frac{1}{m_1}}, \dots, (kb_k)^{\frac{1}{m_k}} \right\}$$

is an upper bound for the positive roots of p .

References

- [1] K.S. Chaudhuri, A bioeconomic model of harvesting, a multispecies fishery, *Ecol. Model.* 32 (1986) (1986) 267–279.
- [2] C.W. Clark, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resource*, Wiley, New York, 1990 (pp. 10–69).

- [3] L. Denis, Notions de controle optimal appliquées à la gestion d'une ressource renouvelable, Collège militaire royal de Saint-Jean, Bulletin AMQ, vol. XLVIII, no. 4, December 2008.
- [4] H. Jelijer, C.J.M. Jeroen, B. Vanden, Harvesting and conservation in a predator-prey system, *J. Econom. Dynam. Control* 29 (2004) 1097–1120.
- [5] T.K. Kar, C.S. Kumar, Bioeconomic modelling: an application to the North-East-Atlantic cod fishery, *J. Math. Res.* 1 (2) (2009) 164–178.
- [6] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, second ed., Springer, Berlin, 1993.
- [7] C.W. Clark, *Mathematical models in the economics of renewable resources*, *SIAM Rev.* 21 (1979) 81–99.
- [8] R.J.H. Beverton, S.J. Holt, Recruitment and egg-production, *On the Dynamics of Exploited Fish Population*, vol. 6, Chapman & Hall, London, 1993, pp. 44–67.
- [9] W.E. Ricker, Stock and recruitment, *J. Fish. Res. Board. Canada* 11 (1954) 559–623.
- [10] E. Sanchez, P. Auger, J.C. Poggiale, Two-time scales in spatially structured models of population dynamics: a semigroup approach, *J. Math. Anal. Appl.* 375 (2011) 149–165.
- [11] J.M. Conrad, Bioeconomic models of the fishery, in: Bromley (Ed.), *Handbook of Environmental Economics*, Blackwells, Oxford & Cambridge, 1995, pp. 405–432.
- [12] M. Jerry, N. Raissi, Optimal strategy for structured model of fishing problem, *C.R. Biol.* 328 (2005) 351–356.
- [13] H. Wu, F. Chen, Harvesting of a single-species system incorporating stage structure and toxicity, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* (2009) 1–16.
- [14] S. Lenhart, J.A. Montero, Optimal control of harvesting in a parabolic system modeling two subpopulations, *Math. Methods Appl. Sci.* 11 (2001) 1129–1141.
- [15] O. Tahvonen, Age structured optimization models in fisheries bioeconomics: a survey 'optimal control of age-structured population in economy, demography, and the environment', in: R. Boucekkine, N. Hritonenko, Y. Yartensko (Eds.), *Environmental Economics*, Routledge, Taylor and Francis, UK, 2011, pp. 140–173.
- [16] O. Tahvonen, J. Kumpuler, A.J. Pekkarinen, Optimal harvesting of an age-structured, two sex herbivore-plant systems, *Ecol. Model.* 272 (2014) 348–361.
- [17] J. Wang, K.E. Wang, Optimal harvesting policy for single population with stage structure, *Comput. Math. Appl.* 48 (2004) 943–950.
- [18] K. Chakraborty, S. Jana, T.K. Kar, Global dynamics and bifurcation in a stage-structured prey-predator fishery model with harvesting, *Appl. Math. Comput.* 218 (2012) 9271–9290.
- [19] A.O. Belyakov, V.M. Veliov, Constant versus periodic fishing: age structured optimal control approach, *Math. Model. Nat. Phenom.* 9 (2014) 20–37.
- [20] J. Fu, X. Wu, H. Zhu, Optimal harvesting control for age-dependent competing population with diffusion, *Bound. Value Probl.* 147 (2014) 1–11.
- [21] H.L. Smith, *Monotone Dynamical Systems: An introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 41, AMS, Providence, 1995.
- [22] K.J. Brown, Y. Zhang, On a system of reaction-diffusion equations describing a population with two-age groups, *J. Math. Anal. Appl.* 282 (2) (2003) 444–452.
- [23] S.M. Bouguima, S. Fekih, W. Hennaoui, Spatial structure in a juvenile-adult model, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* (2007) 1184–1201.
- [24] H. Amann, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [25] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 1996.
- [26] D. Knowler, E.B. Barbier, I. Strand, An open access-model of fisheries and nutrient enrichment in the Black sea, *Marine Resour. Econ.* 16 (3) (2001) 195–217.
- [27] D. Stefansson, Computation of dominant real roots of polynomials, *Prog. Comput. Softw.* 34 (2008) 69–74.
- [28] Y. Lv, R. Yuan, Y. Pei, A prey-predator model with harvesting for fishery resource with reserve area, *Appl. Math. Modell.* 37 (2013) 3048–3062.
- [29] S.K. De, S.S. Sana, An alternative fuzzy EOQ model with backlogging for selling price and promotional effort sensitive demand, *Int. J. Appl. Comput. Math.* 1 (1) (2014) 69–86.

Influence of water level in a prey-predator interaction

Sarra Benzerdjeb¹, Sidi Mohammed Bouguima^{1*}

¹ Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
University of Tlemcen, B.P.119, Tlemcen 13000, Algeria.

* *Corresponding Author.* E-mail address: bouguima@yahoo.fr

Abstract. In this paper, we propose a prey-predator system subject to fluctuating water level in a lake. This investigation is important to understand the behavior and dependence of species on a seasonal variation of water level. In this study, conditions have been derived for coexistence of predator and prey population, and extinction of predators. Results are obtained by analyzing stability of equilibrium of the model. Main results have been illustrated using numerical simulations.

1 Introduction

Aquatic ecosystem are often altered by human activities. During seasons of high electricity demand, significant variations of water level of artificial lake can have a strong impact on the persistence of some species. Hence the management of the lake is of considerable ecological importance and water management program should be established in a such a way that it does not alter the ration of prey-predator system. In Parloup lake, a river located at 30 km in the southeast of Rodez, there is a chain especially made up of pike and phytoplankton as well as some intermediate species that are part of the nutrition diet of pike and roach at a certain period. It is among the largest artificial lake in south of France. Water level is a major feature in ecology and fish population dynamics. Its impact is crucial in seasonal variation of environment. Fluctuation of water level can increase the extinction of the species. The aim of this paper is to study this risk. Our model is inspired by recent mathematical models [5]. We will show that water level greatly affect the dynamics of prey-predator interactions.

2 Modelling approach

Mathematical modelling of prey-predator interactions in ecology is an essential subject. A crucial element in these models is the trophic function of the prey-predator interactions. We start with a dependent prey-predator system which is studied by many authors (see for instance [7],[8] and the references therein).

²⁰¹⁰ **Mathematics Subject Classification:** Primary:92D25, 70K20, 34D23.

Keywords: predator-prey model, Beddington-DeAngelis functional response, stability.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{ax+by} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{emxy}{ax+by} - dy \end{cases}$$

where $x(t)$ and $y(t)$ are the densities of prey-predator respectively at time t . There has been interest in ratio-dependent prey-predator system since it incorporates mutual interferences by predators, but it has been criticised by many authors because of its singular behavior for low densities. Another model was introduced by DeAngelis and Beddington see ([6]) and ([2]).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{ax+by+c} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{emxy}{ax+by+c} - dy \end{cases} \quad (2.1)$$

where r, k, m, a, b, c, e , are positive constants, that stand for prey intrinsic growth rate, carrying capacity of environment, consumption rate, prey saturation, predator interference, another saturation constant, conversion rate and predator death rate. The beddington-DeAngelis has some qualitative feature from the previous model since it avoids the singular behavior at low density. During the last decades, the study has focused on model (2.1) which does not consider the effect of water level in the prey-predator interactions. More interesting and realistic models of population dynamics should consider variation of the environment. In this paper, the function response in the prey-predator system takes into account the seasonal variation of the water level.

The current article is organized as follows: Section 2 deals with the model formulation. Section 3 deals with the mathematical analysis, this section discusses the existence of equilibriums and their stability. In section 4, some interesting numerical simulations that complement our analytical findings. We give a brief section on conclusions. The paper ends with some details given in appendix.

3 Prey-Predator Model

In the studied lake, the roach (Brochet in French) is the most important predator. The pike (Gardon in French) is the prey. Let $G(t)$ and $B(t)$ be respectively the biomass of the prey and predator at time t .

When a predator attacks a prey, it has access to a certain quantity of food depending on the water level. When water level is low, the predator is more in contact with the prey. Let r be the accessibility parameter for the prey. The minimum value r_1 is reached in spring and the maximum value r_2 is attained during the autumn, see [5]. Denote respectively by γ_G and γ_B the maximum consumption rate of resource by prey and predator. The predator needs a quantity

$$\gamma_B B(t)$$

for his food, but he has access to a quantity

$$\frac{rG(t)B(t)}{B(t) + hG(t) + D}$$

Here D measures the other causes of mortality outside the metabolism and predation. It gives the extent to which environment provides protection to the prey. It is assumed that predators spent some time h on encounters with prey. The above functional response is of Beddington-DeAngelis kind, where the term $B(t)$ gives the interference with other predators. Consequently, the quantity of food received by the predator is

$$\min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) B(t)$$

Let τ_B the conversion rate of the prey in biomass.

Let m_G, m_B be respectively the consumption rate of biomass by metabolism of prey and predator. The model is

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = - \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) B(t) + \gamma_G G(t) - m_G G(t)^2 \\ \frac{dB}{dt} = \tau_B \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) B(t) - m_B B(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

4 Mathematical analysis

In this section , we investigate the existence of the equilibrium solutions for the considered system and study their nature. We distinguish two cases

Case : $\gamma_B \tau_B < m_B$.

In this case, we will show that the system(1.1) has always two equilibrium points given by $P_0(0, 0)$ the trivial equilibrium and and $P_1 \left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0 \right)$ the axial equilibrium. In fact, from the isocline equation $\dot{B} = 0$, we have

$$\left(\tau_B \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) - m_B \right) B(t) = 0$$

If

$$\tau_B \min \left(\frac{rG(t)}{B(t) + hG(t) + D}, \gamma_B \right) - m_B = 0$$

Then

$$\gamma_B \geq \frac{m_B}{\tau_B}$$

and we obtain a contradiction. Hence

$$B = 0$$

The isocline equation $\dot{G} = 0$ gives that

$$G = 0, \quad \text{and} \quad G = \frac{\gamma_G}{m_G}$$

Theorem 4.1. If $\gamma_B \tau_B < m_B$, the system (1.1) has a bounded solution. Furthermore $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup B(t) = 0$.

Proof. From(1.1) we have

$$\frac{dB}{dt} \leq (\gamma_B \tau_B - m_B) B(t)$$

This implies that

$$B(t) \leq B_0 e^{(\gamma_B \tau_B - m_B)t}$$

If $\gamma_B \tau_B < m_B$ then

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup B(t) = 0$$

Similarly, we have

$$\frac{dG}{dt} \leq (\gamma_G - m_G G) G(t)$$

and comparison principle implies that

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} G(t) \leq \frac{\gamma_G}{m_G}$$

We conclude that if $\gamma_B \tau_B < m_B$, all the solutions of (1.1) are bounded.

Remark 4.1. The last results explains that when the net maximum growth $\gamma_B \tau_B - m_B$ is negative, then the predator goes to extinction, independently of water level.

Local stability of an equilibrium can be studied by analysing the jacobian of the system. Since we cannot differentiate directly the system (1.1), we will examine the repulsiveness of an equilibrium.

Proposition 4.1. There exists a paving of repulsiveness around $P_0(0, 0)$.

Proof. Let be $\eta > 0$ a fixed constant, and consider

$$P_\eta = \{(G, B) : 0 \leq G \leq \eta, 0 \leq B \leq \eta\}$$

Then

$$\frac{dG}{dt} \geq -\frac{rBG}{D+hG+B} + \gamma_G G - m_G G^2$$

Since

$$\frac{rB}{D+hG+B} \leq \frac{rB}{D}$$

Then, for $(G, B) \in P_\eta$, we get

$$\frac{dG}{dt} \geq \left(-\frac{r\eta}{D} + \gamma_G - m_G \eta\right) G$$

Choosing $\gamma_G \geq 2\eta \left(\frac{r}{D} + m_G\right)$, we obtain that

$$\frac{dG}{dt} \geq \eta \left(\frac{r}{D} + m_G\right) G$$

If a solution is in P_η at some instant, then there exists $t_n > t_0$ for which the solution will be outside P_η , for $t \geq t_n$.

Case : $\gamma_B \tau_B \geq m_B$.

Now, consider the function

$$u(t) = rG(t) - \gamma_B (B(t) + hG(t) + D) \tag{4.1}$$

Two cases must distinguished when considering the effect of water level on stability.

a) case : $r - \gamma_B h \leq 0$.

It is clear that when $r - \gamma_B h \leq 0$ then $u(t) \leq 0$ for all $t \geq 0$. Hence the system becomes the classical prey-predator model with Beddington–DeAngelis response

$$\begin{cases} \dot{G} = -r \frac{GB}{B+hG+D} + \gamma_G G - m_G G^2 \\ \dot{B} = \tau_B r \frac{GB}{B+hG+D} - m_B B \end{cases} \tag{1.2}$$

Remark 4.2. The model given by (1.2) was studied in [4], and [11] where the local stability and existence of limit cycle are obtained. The global stability and uniqueness of a limit cycle were investigated in [10], [9], and [11]. As we need to know the effect of the water level on the dynamics of the system, we proceed differently from [4], [9] and [11], working directly without rescaling the model.

b) case : $r - \gamma_B h > 0$.

Let B_0, G_0 be respectively the initial density of the predator and prey with $B_0 > 0$ and $G_0 > 0$. We suppose that

$$(H_1) \quad r < r_0 := \frac{4Dm_B m_G \gamma_B}{(m_B + \gamma_G)^2} + h\gamma_B$$

Proposition 4.2. Assume that $rG_0 < \gamma_B(B_0 + hG_0 + D)$. Under the hypothesis (H_1) , for all $t \geq 0$ $rG(t) < \gamma_B(B(t) + hG(t) + D)$.

Proof. By assumption, $u(0) < 0$. It is claimed that $u(t) < 0$ for all t . If this were not the case, there exists $t_0 > 0$ such that:

$$u(t_0) = 0 \tag{4.2}$$

and

$$\frac{du}{dt}(t_0) \geq 0$$

Clearly

$$\frac{du}{dt}(t_0) = (r - \gamma_B h) G'(t_0) - \gamma_B B'(t_0) \tag{4.3}$$

Substituting the value of $\frac{dG}{dt}$ and $\frac{dB}{dt}$ from (1.1) into (4.3), we get

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t_0) = & -(r - \gamma_B h + \gamma_B \tau_B) \frac{rG(t_0)B(t_0)}{B(t_0) + hG(t_0) + D} \\ & + (r - \gamma_B h) (\gamma_G G(t_0) - m_G G^2(t_0)) + m_B \gamma_B B(t_0) \end{aligned}$$

Obviously, we have from (4.2)

$$\gamma_B (D + B(t_0)) = (r - \gamma_B h) G(t_0)$$

Then it follows that

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq \gamma_G (r - \gamma_B h) G(t_0) - m_G (r - \gamma_B h) G^2(t_0) + m_B \gamma_B B(t_0)$$

and

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq \gamma_G (r - \gamma_B h) G(t_0) - m_G (r - \gamma_B h) G^2(t_0) + m_B ((r - \gamma_B h) G(t_0) - \gamma_B m_B D)$$

Since

$$m_G (r - \gamma_B h) \left(G^2 - \frac{m_B + \gamma_G}{2m_G} G \right) = -m_G (r - \gamma_B h) \left(G - \frac{m_B + \gamma_G}{2m_G} \right)^2 - (r - \gamma_B h) \left(\frac{m_B + \gamma_G}{2} \right)^2$$

Then

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq -m_G(r - \gamma_B h) \left(G - \frac{m_B + \gamma_G}{2m_G} \right)^2 - \frac{(r - \gamma_B h)(m_B + \gamma_G)^2}{4m_G} - m\gamma_B D$$

Hypothesis (H_1) implies that

$$\frac{du}{dt}(t_0) \leq 0,$$

This gives a contradiction. Consequently we have.

$$u(t) < 0 \text{ for all } t \geq 0$$

A positive equilibrium exists under the condition (see Appendix)

$$(H_2) \quad r > \frac{m_B}{\gamma_G \tau_B} (m_G D + h\gamma_G) = r_1$$

and is given by

$$\begin{aligned} G^* &= \frac{\tau_B(\gamma_G - r) + m_B h + \sqrt{\Delta}}{2m_G \tau_B} \\ B^* &= \frac{\tau_B h}{m_B} (\gamma_G - m_G G^*) \end{aligned} \tag{4.4}$$

where

$$\Delta = (\tau_B(\gamma_G - r) + m_B h)^2 + 4Dm_B m_G \tau_B$$

It follows that

$$G^* < \frac{\gamma_G}{m_G} \tag{4.5}$$

Taking proposition 6 into account, the positive quadrant \mathbb{R}_+^2 is splitted in two parts :

$$D_1 = \{(G, B) : (r - \gamma_B h)G - \gamma_B (B + D) < 0\}$$

and

$$D_2 = \{(G, B) : (r - \gamma_B h)G - \gamma_B (B + D) \geq 0\}$$

It is clear that the three equilibrium $P_0(0, 0)$, $P_1\left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0\right)$ and $P_*(G^*, B^*)$ belong to D_1 .

4.1 Stability analysis

Now we study the nature of these equilibriums points. The jacobian matrix associated to (1.2) is given by

$$J(G^*, B^*) = \begin{bmatrix} F'(G) - \frac{F(G)}{G} \left(1 - \frac{hm_B}{\tau_B r} \right) & \frac{m_B}{\tau_B r} \left(\frac{F(G)}{G} - r \right) \\ \frac{F(G)}{rG} (\tau_B r - m_B h) & -\frac{m_B F(G)}{rG} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

with

$$F(G) = \gamma_G G \left(1 - \frac{m_G}{\gamma_G} G \right)$$

Proposition 4.3. Suppose the conditions $\gamma_B \tau_B \geq m_B$ and (H_1) are satisfied, then

- i) The trivial equilibrium $P_0(0,0)$ is a saddle point.
- ii) If $r \leq r_1$, the boundary equilibrium $P_1\left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0\right)$ is stable and the system does not admit an interior equilibrium point.

The proof is trivial and we omit it.

Proposition 4.4. Assume that $\gamma_B\tau_B \geq m_B$ and $h \leq \tau_B$. If hypothesis (H_1) and (H_2) hold.

Then the coexistence equilibrium $P_*(G^*, B^*)$ is globally asymptotically stable and the boundary equilibrium $P_1\left(\frac{\gamma_G}{m_G}, 0\right)$ is a saddle point.

Proof. The Jacobian matrix of (4.6) evaluated at the equilibrium P^* , is given by

$$J(G^*, B^*) = \begin{bmatrix} -m_G + \frac{hm_B}{\tau_B r} (\gamma_G - m_G G^*) & \frac{m_B}{\tau_B r} (\gamma_G - m_G G^* - r) \\ \frac{\tau_B r - m_B h}{r} (\gamma_G - m_G G^*) & -\frac{m_B}{r} (\gamma_G - m_G G^*) \end{bmatrix}$$

Let $Det(J)$ and $Tr(J)$ be respectively the determinant and the trace associated to $J(G^*, B^*)$, then

$$Det(J) = \frac{m_B}{\tau_B r} (\gamma_G - m_G G^*) (2m_G \tau_B G^* - \tau_B \gamma_G + \tau_B r - hm_B) \tag{4.7}$$

$$Tr(J) = -m_G G^* + \frac{m_B}{\tau_B r} (\gamma_G - m_G G^*) (h - \tau_B) \tag{4.8}$$

Since

$$G^* < \frac{\gamma_G}{m_G}$$

and

$$h \leq \tau_B$$

then the trace is negative

Substituting (4.4) into(4.7) we obtain

$$Det(J) = \frac{m_B}{\tau_B r} (\gamma_G - m_G G^*) \sqrt{\Delta}$$

By (4.5) the determinant is positive. Hence the equilibrium is locally asymptotically stable.

Using the theorem 2.1 in [10], it follows that the equilibrium is globally asymptotically stable.

Remark 4.3. Reducing handling time h under suitable conditions on water levels contributes to stability of the positive equilibrium.

5 Simulation

The main purpose of this section is to illustrate the analytical results.

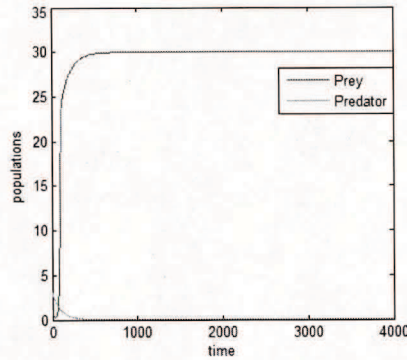


Figure 01: Extinction of the predator when $\tau_B < \frac{m_B}{\gamma_B}$

Figure 1 is drawn for the following choice of parameters:

$$m_B = 0.01, \quad m_G = 0.01, \quad \gamma_G = 0.3, \quad \gamma_B = 3, \quad h = 0.5, \quad \text{and} \quad D = 5$$

with an initial condition $(G_0, B_0) = (3, 1)$. This figure is in full agreement with theorem 3.

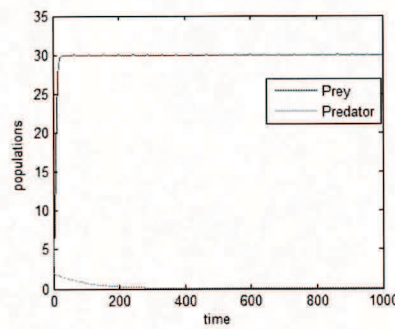


Figure 02: The figure shows stability of the boundary equilibrium P_1 .

Figure 02 is drawn for the following choice of parameters:

$$m_B = 0.01, \quad m_G = 0.01, \quad \gamma_G = 0.3, \quad \gamma_B = 3, \quad h = 0.5, \quad \text{and} \quad D = 5$$

and

$$\tau_B = 0.8, \quad r = 0.0006, \quad r_0 = 1.5624, \quad r_1 = 3.12 \times 10^{-4}$$

This figure is in full agreement with proposition 9.

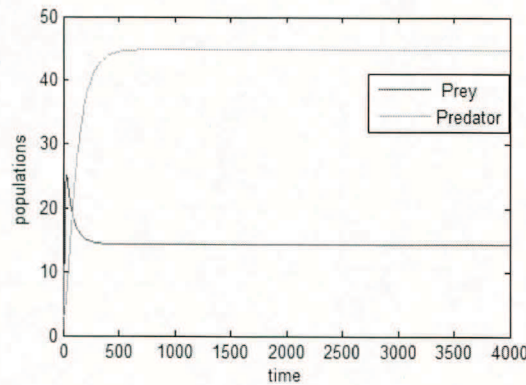


Figure 03: The figure demonstrates the stability of the system (1.1) around the equilibrium P^* (14.25, 44.88).

Figure 03 is drawn for the following choice of parameters:

$$m_B = 0.01, \quad m_G = 0.01, \quad \gamma_G = 0.3, \quad \gamma_B = 3, \quad h = 0.5, \quad \text{and} \quad D = 5$$

and

$$r = 0.2, \quad \tau_B = 0.8, \quad r_3 = 0.3112$$

This figure is in full agreement with proposition 10.

6 Conclusion

Several models have been analyzed this last decades to provide informations on trophic interactions. The aim of this paper is to ask whether the water level in a lake can affect the dynamics of a prey-predator interaction. Our study demonstrates that the dynamics of the system depends heavily on the fluctuation of the water level. In section 2, a general mathematical model is performed to represent the prey-predator dynamics when seasonal variation of water level occurs. It is proved that when the net maximum growth of the predator is negative then the predator goes to extinction independently of water level. It has been observed that when water level is low, that is $r \leq r_1$ there are two equilibrium solutions and predators goes to extinction. When water level is high, that is $r_1 < r$, there are three equilibrium solutions and the interior equilibrium is globally stable. As a result of decreasing water levels, extinction of predators take place. This result suggests that avoiding lowering water level too much can increase the chance of survival.

7 Appendix

- Prey isocline:

The isocline $G' = 0$, implies

$$B(G) = \frac{(D + hG)(m_G G - \gamma_G)}{\gamma_G - r - m_G G}$$

The study of a function B shows that the shape of the curve depends on the sign of $\gamma_G - r$

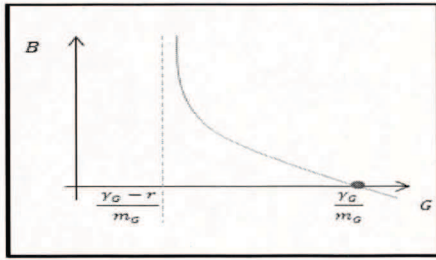


Figure 1.1: Case when , $\gamma_G - r > 0$

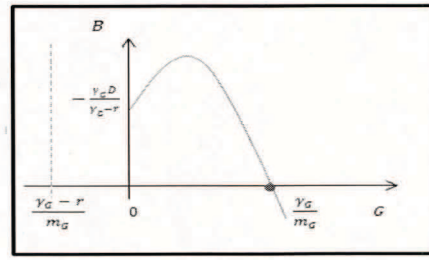


Figure 1.2: Case when , $\gamma_G - r \leq 0$

• **Predator isocline:**

For $B' = 0$, we obtain

$$B = \frac{(\tau_{Br} - m_B h) G - m_B D}{m_B}$$

For $B = 0$, we have

$$G = \frac{m_B D}{\tau_{Br} - m_B h}$$

We assume that

$$\tau_{Br} - m_B h > 0$$

Then, we obtain the following curve

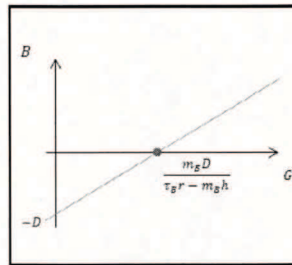


Figure 1.3: Predator isocline .

To ensure the existence of a positive equilibrium, we must have

$$\frac{m_B D}{\tau_{Br} - m_B h} < \frac{\gamma_G}{m_G}$$

References

[1] P .Auger, Modélisation Mathématique en Ecologie. Dunod.Paris, 2010.
 [2] J.Beddington, Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency, the journal of animal ecology, (1975)331.
 [3] G. Birkhoff and G.C. Rota, Ordinary Differential Equations.Ginn.Boston, 1982.

- [4] R. S. Cantrell and C. Cosner, On the dynamics of predator-prey models with the Beddington-DeAngelis functional response, *J. Math. Anal. Appl.*, 257 (2001), 206 – 222.
- [5] N.Chiboub Fellah S.M.Bouguima, A. Moussaoui, The effect of water level in a prey-predator interaction :A nonlinear analysis Study, *Chaos, Solitons & Fractals* ., 45 (2012), 205 – 215 .
- [6] D.deAngelis, R.Goldstein, and R.O'Neil, A model for trophic interaction, *Ecology* (1975)881
- [7] C.Jost and R.Arditi, Identifying predator-prey processes from time series, *Theoretical Population Biology* 57(4)(2000)325.
- [8] Y.Kuang, Rich dynamics of Gause-type ration dependent predator-prey system, *The fields Institute Communications*, 21(1999)325.
- [9] T.-W. Hwang. Uniqueness of limit cycles for Gause-Type Predator-Prey Systems, *J. Math. Anal. Appl* ., 238 (1999) , 179 – 195.
- [10] T-W Hwang. Global analysis of the predator–prey system with Beddington–DeAngelis functional response, *J. Math. Anal. Appl.*, 281(2003), 395 – 401.
- [11] T.-W. Hwang. Uniqueness of limit cycles of the predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response, *J.Math .Anal .Appl* ., 290(2004.), 113 – 122.

Copyright of Nonlinear Studies is the property of Nonlinear Studies and its content may not be copied or emailed to multiple sites or posted to a listserv without the copyright holder's express written permission. However, users may print, download, or email articles for individual use.