Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option: PROBABILITES - STATISTIQUES

Présenté par

KARAOUZENE Naïla

Thème

Équations Différentielles Stochastiques

soutenue le 12/11/2015

devant le jury composé de :

Mr. T. Mourid	Président
Mme. W. Benyelles	Examinateur
Mr. M. Bouguima	Examinateur
Mme. M. Dali Youcef	Rapporteur

Remerciements

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à ***ALLAH*** Tout Puissant, de m'avoir donné la force, le moral et la santé de bien terminer ce modeste travail.

La première personne que je tiens à remercier est mon tuteur de mémoire Madame M.DALI YOUCEF, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier les professeurs, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. Je tiens à remercier spécialement Mr. T.MOURID de bien vouloir présider le jury, je tiens aussi à remercier Mme W.BENYELLES et Mr M.Bouguima qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes proches et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très varies. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. L'objectif de ce travail est d'introduire **L′intgrale d′ Ito** qui permet d'aborder les équations différentielle stochastique.

Le premier chapitre sera consacré aux rappels de base concernant les processus stochastiques. On donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales qui seront utiles pour cela. Après avoir présenter quelques résultats importants relatifs à l'intégrale stochastique, on verra comment il peut être mise en œuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques.

Dans le deuxième chapitre, on présentera les équations différentielles stochastiques. On commence par en donner une motivations en tant que généralisation des équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude présentée par un bruit aléatoire. On citera ensuite le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS. On traitera par la suite le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On étudiera ensuite les propriétés de la solution d'une EDS. On introduit les solutions d'EDS appelées diffusion ainsi que des outils importants pour leur étude. Ensuite on définira c'est quoi une solution faible d'une EDS. On terminera ce chapitre par une section qui étudiera les connexions entre les EDS et les EDP.

Dans le dernier chapitre on traitera le modèle de Hull-white/Vasicek qui sera un exemple illustratif, on va tracer quelques trajectoires pour ce processus. Enfin, moyennant le langage de programmation R.

Notations

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.

- L'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est l'espace de variables aléatoires définies sur Ω et X telles que $E|X|^p < \infty$. Cet espace est muni de la norme $||X||_p = (E|X|^p)^{1/p}$.

- " $\perp$ " : indépendance. $X \perp Y$, X et Y sont des variables indépendantes.
  $\mathcal{G} \perp \mathcal{H}$,$\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des tribus indépendantes.

- Une subdivision Δ de l'intervalle $[0, T]$ $(T < \infty)$ est une suite finie $\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ avec $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. On note
$$|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}).$$

- Ensembles des dyadiques de $[0, 1]$:$\mathcal{D} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n$,$\mathcal{D}_n = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, ..., 2^n\}$. $\mathcal{D}_n$ est une suite croissante qui tend vers $\mathcal{D}$ qui est un ensemble de rationnels dans l'intervalle $[0, 1]$.

- Fonction indicatrice : $\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{A}$, 0 sinon.

- $s \vee t = max(s, t)$, $s \wedge t = min(s, t)$.

- Convention : $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

- Soit x,y $\in \mathbb{R}^n$, x^{tr} désigne le vecteur transposé de x, et $< x, y >= x^{tr}y$ le produit scalaire.

Chapitre 1

Rappels et compléments de probabilités

Dans ce premier chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastiques et nous commençons par les définir.

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Définition

Un processus stochastique à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$ est une famille $X = \{X_t\}_{t\in\tau}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Remarque L'indice t désignera le temps τ sera donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$. On se placera dans le cadre des processus à temps continu, i.e. $\tau = \mathbb{R}$ ou éventuellement, $\tau = [0, T]$ ($T < \infty$, dans quelques cas on se placera dans le cas discret, i.e $\tau = \{1, 2, ..., n\}$ $(n < \infty)$. Donc sauf mention contraire, $\tau = \mathbb{R}_+$.

1.1.2 Définition

La famille des lois marginales d'un processus X est définie par
$\mu^X = \{\mu^X_{t_1,...,t_n}; (t_1, ..., t_n) \in [\mathbb{R}_+]^n\}$ avec

$$\mu^X_{t_1,...t_n}(A_1, ..., A_n = P(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n),\ (A_1, ..., A_n) \in \mathcal{B}^{nd}.$$

$\mu^X_{t_1,...,t_n}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{nd}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd}))$.

1.1.3 Définition

Un processus X est dit continu si

$$P(\mathbb{R}_+ \ni t \to X_t \quad est \quad continu) = 1.$$

1.1.4 Définition

Soient X et Y deux processus définis sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
X et Y sont dits indistinguables si

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$$

Y est une modification de X si et seulement si :

$$P(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \geq 0$$

1.1.5 Exemple

Considérons $\tau = \Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, λ la mesure de Lebesgue. Nous définissons

$$\begin{aligned} &X_t = t, \qquad \forall (t, \omega) \in \tau \times \Omega \\ &Y_t = t, \quad si \quad \omega \neq t \quad et \quad Y_t = 0 \quad sinon, \quad \forall (t, \omega) \in \tau \times \Omega \end{aligned}$$

Alors X et Y sont une modification l'un de l'autre, pourtant toutes les trajectoires de X sont continues et toutes celles de Y sont discontinues (sauf pour $\omega = 0$). Ces processus ne sont donc pas indistinguables.

Dans le paragraphe qui suit nous présentons un type de processus très courant à savoir les processus de Wiener.

1.2 Mouvement brownien

Fixons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un mouvement brownien, également appelé processus de Wiener, est un processus W qui présente les trois propriétés suivantes :

-**indépendance des accroissements.** Pour tout $n \geq 2$ et tout $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aléatoires $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}$ sont indépendantes. ou de manière équivalente : pour tout $t > s \geq 0$, la variable $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u; u \leq s)$.
-**Stationnarité.** Pour tout $\delta > 0$, la loi de la variable $W_{t+\delta} - W_t$ ne dépend pas de t.
-**Continuité.** Le processus W est continu.

De plus, nous supposons que $W_0 = 0$. Ce qui n'est pas restrictif puisque $\tilde{W} = W_t - W_0$ vérifie également les trois propriétés précédentes.

Ainsi nous définissons un mouvement brownien de dimension d.

1.2.1 Définition

Soit C une matrice de dimension d, auto-adjointe et semi-définie positive ($\forall x \in \mathbb{R}^d; \quad xCx^{tr} \geq 0$). On appelle mouvement brownien de dimension d et de matrice de covariance C, un processus qui vérifie :

(i) $W_0 = 0$,

(ii) W est continu,

(iii) W est à accroissements indépendants,

(iv) pour tout $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s \sim N(0, (t-s)C)$.

Lorsque $C = \mathcal{I}$, W est dit mouvement brownien standard.

1.2.2 Proposition

Un processus W est un mouvement brownien de matrice de covariance C si et seulement si

(i) $W_0 = 0$,

(ii) W est continu,

(iii) W est gaussien,

(iv) pour tout t,s > 0, $E(W_t) = 0$ et $E(W_t W_s^{tr}) = (t \wedge s)C$.

Dans le paragraphe qui suit, nous introduisons la notion de filtrations utile pour la définition des processus de Markov et des martingales.

1.3 Filtrations

Nous considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nous supposerons que toute sous tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ contient tous les P-négligeables de $\mathcal{F}$.

1.3.1 Définition

Une filtration est une famille croissante $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$. Le quadruplé $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}, P)$ ou $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ est une filtration est appelé espace de probabilité filtré.
Étant donné un processus X défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la filtration naturelle noté
$\{\mathcal{F}_t^X; t \geq 0\}$, est définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$.

1.3.2 Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré. Un processus X, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est dit $\mathcal{F}_t$ adapté si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

1.3.3 Définition

On appelle $\mathcal{F}_t$-P mouvement brownien de matrice de covariance C, un processus W $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie :

(i) $W_0 = 0$,

(ii) pour tout $0 \leq s < t$, $(W_t - W_s)$ est un vecteur aléatoire gaussien N(0,(t-s)C) indépendant de $\mathcal{F}_s$,

(iii) W est continu.

Un mouvement brownien W défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un $\mathcal{F}_t^W$ mouvement brownien.

1.4 Processus de Markov

Dans ce paragraphe, nous parlons du processus de Markov qui est un processus stochastique possédant la propriété de Markov. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information concernant le passé.

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.4.1 Définition

Un processus X est appelé processus de Markov si

$$P(X_t \in A \backslash \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)) = P(X_t \in A \backslash X_s), \quad \forall \quad 0 \leq s < t, \quad \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Étant donné un processus de Markov X, on lui associe sa loi initiale $\mu = \mathcal{L}(X_0)$ et sa probabilité de transition définie par :

$$p(s, x; t, A) = P(X_t \in A \backslash X_s = x)$$

pour tout $0 \leq s \leq t$, x $\in \mathbb{R}^d$, A $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.4.2 Proposition (preuve cf. Cours calcul stochastique)

Soit $p(s, x; t, A)$ la probabilité de transition d'un processus de Markov X. Cette probabilité de transition a les propriétés suivantes :

- à s,t,A fixés, l'application $x \mapsto p(s,x;t,A)$ est mesurable,
- à s,t,A fixés, l'application $x \mapsto p(s,x;t,A)$ définit une mesure sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$,
- $p(t,x;t,A) = \mathbb{I}_A(x)$,
- $p(t,x;t,A)$ est solution de l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$p(s,x;t,A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s,x;u,dy)p(u,y;t,A), \quad \forall \quad 0 \leq s < u < t.$$

1.4.3 Lemme

Soit X un processus de Markov de probabilité de transition $p(s,x;t,A)$. Pour toute fonction f : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée et tout s<t :

$$E(f(X_t)\backslash\mathcal{F}_s^X) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s,X_s;t,dx)f(x)$$

d'o*ù* $E(f(X_t)\backslash\mathcal{F}_s^X) = E(f(X_t)\backslash X_s)$.

1.5 Martingales à temps continu

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un ensemble d'indices $\tau \subset \mathbb{R}_+$ quelconque et une filtration $\{\mathcal{F}_t\,;\, \mathrm{t} \in \tau\}$ (i.e. une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ indexée par τ). Souvent $\tau = \{1, ..., n\}$, $\tau = \mathbb{N}$ (temps discret), $\tau = [0,T]$ o*ù* $\tau = \mathbb{R}_+$ (temps continu).

1.5.1 Définition

Un processus $X = \{X_t\,;\ \mathrm{t} \in \tau\ \}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale (resp.sous-martingale, sur-martingale) si

- $E|X_t| < \infty$, $\forall$ t $\in \tau$,

- X est $\mathcal{F}_t$-adapté,

- $\forall$ s,t $\in \tau$, $0 \leq s \leq t : E(X_t \backslash \mathcal{F}_s) = X_s$ p.s. (resp. $\geq X_s, \leq X_s$).

Si X est une martingale (resp.sous-martingale, sur-martingale), alors l'application $\tau \ni t \rightarrow E(X_t)$ est constante (resp. croissante, décroissante).

1.5.2 Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, W_t)$ un mouvement brownien standard, les processus suivants sont des $\mathcal{F}_t$ - martingales

- W_t,

- $W_t W_t^{tr} - tI$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$),

- $M_t^{\alpha} = \exp(\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$.

Nous annonçons un théorème dus à Lévy utile pour le deuxième chapitre

1.5.3 Théorème(Caractérisation de Lévy)

Soit X un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $X_0 = 0$ p.s. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) X est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard.
(ii) X est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue et $\{X_t X_t^{tr} - tI; t \geq 0\}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
(iii) X est une martingale continue et pour tout u $\in \mathcal{R}^d$,

$$\{\exp(iuX_t - \tfrac{1}{2}|u|^2 t); 0 \leq t \leq T\}$$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale (à valeurs complexes, $i^2 = -1$).

Dans le paragraphe qui suit, nous regroupons quelques définitions et propriétés des intégrales stochastiques ainsi que quelques principes du calcul stochastique.

1.6 Intégrale stochastique

On considère un mouvement brownien standard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$.

1.6.1 Définition

Un processus $\varphi_t(\omega)$ défini sur $[0,T]\times\Omega$ (resp. $\mathbb{R}_+\times\Omega$) est dit progressivement mesurable si, pour tout t $\in$ [0,T] (resp. t $\in \mathbb{R}_+$), l'application

$$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \to \varphi_s(\omega) \in \mathbb{R}$$

est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t - mesurable$

1.6.2 Définition

.

(i) M^2_{loc}(0,T) est l'espace des processus progressivement mesurables φ tels que

$$\int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty \quad p.s.$$

(ii) $M^2(0,T)$ est l'espace des classes (touts les processus d'une même classe sont indistinguables) de processus progressivement mesurables φ tels que

$$E\int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty$$

(iii) $\mathcal{E}$ est l'espace des processus en escalier, i.e. des processus φ de la forme

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\omega) \mathbb{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t)$$

avec $n \in \mathbb{N}, 0 < t_0 < t_1 < ... < t_n$ et $\alpha_k \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_k}, P), 0 \leq k \leq n$.
Nous définissons également les espaces

$$M^2 = \bigcap_{T>0} M^2(0,T), \quad M^2_{loc} = \bigcap_{T>0} M^2_{loc}(0,T).$$

et de la même manière, nous définissions $M^2(\mathbb{R}_+)$ (resp. $M^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$) en remplaçant [0,T] par $\mathbb{R}_+$.

1.6.3 Définition

Soit $\varphi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t)$ un processus en escalier, l'intégrale stochastique de φ est définie par

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}), \quad t \geq 0$$

. On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} I :& \mathcal{E} \to L^2(\Omega, \mathcal{C}([0,T])) \\ & \varphi \to I(\varphi) \end{aligned}$$

défini par :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

$\mathcal{E}$ est dense dans $M^2(0,T)$, on peut alors prolonger I de manière unique en une application linéaire continue I définie sur $M^2(0,T)$ à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathcal{C}([0,T]))$. Cette application sera également notée

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dW_s$$

.

1.6.4 Proposition (preuve cf. Cours calcul stochastique)

Soit $\varphi \in M^2$, alors $I(\varphi)$ est une martingale continue qui vérifie, pour tout $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} &E[I_t(\varphi)] = 0, \\ &E[I_t(\varphi)^2] = E \int_0^t \varphi_s^2 ds. \end{aligned}$$

(cette égalité permet le passage de l'espérance d'une intégrale stochastique à l'espérance d'une intégrale classique)

Plus généralement, pour tout $t \geq s \geq 0$

$$E[(I_t(\varphi) - I_s(\varphi))^2 \setminus \mathcal{F}_s] = E[\int_0^t \varphi_s^2 ds \setminus \mathcal{F}_s]$$

et donc, par linéarité de $\varphi \to I_t(\varphi)$, pour tout φ,$\psi \in M^2$ et tout $t \geq s \geq 0$

$$E[(I_t(\varphi) - I_s(\varphi))(I_t(\psi) - I_s(\psi)) \setminus \mathcal{F}_s] = E[\int_s^t \varphi_s \psi_s ds \setminus \mathcal{F}_s]$$

1.6.5 Définition (martingale locale)

Soit X un processus $\mathcal{F}_t$-adapté continu. Supposons qu'il existe une suite non décroissante τ_n de temps d'arrêt. Si

$$X^n = \{X_{t\wedge\tau_n}; t \geq 0\}$$

est une martingale, pour tout n, et si $P(\lim_n \tau_n = \infty) = 1$ alors X est appelé martingale locale continue.

1.6.6 Proposition

- Toute martingale continue est une martingale locale.
- Toute martingale locale positive est une sur martingale.
- Une martingale locale bornée est une martingale.

1.6.7 Théorème (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy)

Soit W un mouvement brownien réel standard. Pour tout $p > 0$, il existe $C_p > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in M^2_{loc}$

$$\frac{1}{C_p}E[(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_t^2 dt)^{p/2}] \leq E[sup_{t\geq 0} \mid I_t(\varphi) \mid^p] \leq C_p E[(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_t^2 dt)^{p/2}]. \tag{1.1}$$

1.6.8 Définition

On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t g_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.2}$$

où X_0 est un vecteur aléatoire de dimension d et $\mathcal{F}_0 - mesurable$, $f \in L^1_{\mathcal{F}_t}(0, T, \mathbb{R}^d)$, $g \in [M^2_{loc}(0, T)]^{d \times n}$. X est un processus continu et $\mathcal{F}_t$-adapté. L'équation (1.2) peut également s'écrire sous forme différentielle

$$dX_t = f_t dt + g_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

Notation $L^1_{\mathcal{F}_t}(0, T, \mathbb{R}^d)$ est l'espace des processus φ mesurables et $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et tels que $\int_0^T \mid \varphi_t \mid dt < \infty$ p.s.

1.6.9 Théorème (Formule d'Itô scalaire)

Soit X un processus d'Itô de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$ et $\phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ et tout $0 \leq t \leq T$, nous avons presque surement

$$\begin{aligned}\phi(t, X_t) = \phi(0, X_0) + \int_0^t \phi'_s(s, X_s) ds + \int_0^t \phi'_x(s, X_s) f_s ds \int_0^t \phi'_x(s, X_s) \sigma_s dW_s \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \phi''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds. \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $\phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues
$\phi : (t, x) \to \phi(t, x) \in \mathbb{R}$, dont les dérivées d'ordre 1 en t et les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (t,x).

Il en découle une version vectorielle de la formule d'Itô que nous introduisons dans le théorème suivant

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$ un mouvement standard de dimension n.

1.6.10 Théorème (Formule d'Itô vectorielle)

Soit X_0 un vecteur aléatoire de dimension d et $\mathcal{F}_0 - mesurable$, $f \in L^1_{\mathcal{F}_t}(0, T, \mathbb{R}^d)$, $\sigma \in [M^2_{loc}(0,T)]^{d\times n}]$. Posons

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \tag{1.4}$$

X est un processus continu et $\mathcal{F}_t$-adapté.

Pour toute fonction $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ et tout $0 \leq t \leq T$, nous avons

$$\phi(t, X_t) = \phi(0, X_0) + \int_0^t \phi'_s(s, X_s) ds + \int_0^t \phi'_x(s, X_s) f_s ds + \int_0^t \phi'_x(s, X_s)\sigma_s dW_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t trace[\phi''_{xx}(s, X_s)\sigma_s \sigma_s^{tr}] ds \tag{1.5}$$

Le théorème de Girsanov qui suit est fondamentale dans la théorie du calcul stochastique

1.6.11 Théorème (Girsanov)

Soit φ un processus de $[M^2_{loc}]$. Posons

$$Z_t = \exp(\int_0^t < \varphi, dW_s > -\frac{1}{2}\int_0^t \mid \varphi \mid^2 ds), \quad t \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Supposons que $EZ_t = 1$ pour tout $t \geqslant 0$. Alors il existe une probabilité $\bar{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\tfrac{d\bar{P}}{dP} \mid_{\mathcal{F}_t} = Z_t, \quad t \geqslant 0$$

et le processus $\bar{W}$ défini par

$$\bar{W}_t = W_t - \int_0^t \varphi_s ds, \quad t \geqslant 0$$

est une $\mathcal{F} - \bar{P}$-mouvement brownien.

où $<\ ,\ >$ est le produit scalaire classique de $\mathbb{R}^n$ et $\mid . \mid$ la norme qui lui est associée

Une condition suffisante pour que $EZ_t = 1$ est donnée dans la proposition suivante

1.6.12 Proposition (Critère de Novikov)

Soit $\varphi \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$, si

$$E\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \mid \varphi_s \mid^2 dt) < \infty \tag{1.7}$$

alors $EZ_T = 1$.

Preuve On note $Z_t = Z_t(\varphi)$ et, pour tout $a > 0$,

$$\tau_a = inf\{t \leq T; \int_0^t < \varphi_s, dW_s > -\frac{1}{2}\int_0^t \mid \varphi_s \mid^2 ds = -a\} \wedge T.$$

Soit $\lambda \leq 0$, on montre

$$EZ_{\tau_a}(\lambda\varphi) = 1. \tag{1.8}$$

On a $EZ_{\tau_a}(\lambda\varphi) = 1 + \lambda\int_0^{\tau_a} Z_s(\lambda\varphi)\varphi_s dW_s$, il suffit donc de montrer que

$$E\int_0^{\tau_a} Z_s^2(\lambda\varphi)\varphi_s^2 ds < \infty. \tag{1.9}$$

Par hypothèse

$$E\int_0^{\tau_a}\varphi_s^2 ds \leq 2E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\tau_a}\varphi_s^2 ds\right) \leq 2E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\varphi_s^2 ds\right) < \infty. \tag{1.10}$$

Par ailleurs, pour $\lambda \leq 0$ et $0 \leq s \leq \tau_a$,

$$\begin{aligned}
Z_s(\lambda\varphi) &= \exp\left(\lambda\int_0^s \varphi_u dW_u - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^s \varphi_u^2 du\right)\\
&= \exp\left(\lambda\left[\int_0^s \varphi_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^s \varphi_u^2 du\right]\right)\exp\left(\left[\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^s \varphi_u^2 du\right]\right)\\
&\leq \exp\left(\lambda\left[\int_0^s \varphi_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^s \varphi_u^2 du\right]\right) \leq \exp(\mid\lambda\mid a).
\end{aligned}$$

Donc, pour $0 \leq s \leq \tau_a$, $Z_s(\lambda\varphi) \leq \exp(\mid\lambda\mid a)$ et (1.9) se déduit de (1.10).

Il faut montrer (1.8) pour $\lambda \leq 1$. On définit $\rho_{\tau_a}(\lambda\varphi) = e^{\lambda a}Z_{\tau_a}(\lambda\varphi)$. Si $\lambda \leq 0$, d'après (1.8)

$$E\rho_{\tau_a}(\lambda\varphi) = e^{\lambda a} \tag{1.11}$$

Posons

$$A = \int_0^{\tau_a}\varphi_s^2 ds, \qquad B = \int_0^{\tau_a}\varphi_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_a}\varphi_s^2 ds + a \geq 0.$$

On définit la fonction $u(z) = \rho_{\tau_a}(\lambda\varphi)$ avec $\lambda = 1 - \sqrt{1-z}$ (si $0 \leq z \leq 1$ alors $0 \leq \lambda \leq 1$). On a

$$u(z) = \exp(\frac{z}{2}A + (1-\sqrt{1-z})B.$$

Pour $z < 1$, p.s la fonction $u(z)$ peut s'écrire

$$u(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} p_k$$

avec $p_k \geq 0$ p.s.

Si $z \leq 1$, $Eu(z) \leq \exp(a(1 - \sqrt{1-z}))$ et donc, pour tout $0 \leq z_0 < 1$, $Eu(z_0) < \infty$. On en déduit que pour tout $\mid z \mid \leq z_0$,

$$E \sum_{k \leq 0} \frac{\mid z \mid^k}{k!} p_k \leq E \sum_{k \leq 0} \frac{z_0^k}{k!} p_k = Eu(z_0) < \infty,$$

et par le théorème de Fubini, pour tout $\mid z \mid < 1$,

$$Eu(z) = E \sum_{k \geq} \frac{z^k}{k!} p_k = \sum_{k \geq} \frac{z^k}{k!} Ep_k. \tag{1.12}$$

Avec $z < 1$, $\exp(a(1 - \sqrt{1-z})) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} c_k$ *où* $c_k \geq 0$. On en déduit, avec (1.11) et (1.12), pour $-1 < z \leq 0$, que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} Ep_k = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} c_k$$

et donc $Ep_k = c_k$ et ainsi, pour $0 < z \leq 1$,

$$Eu(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} c_k \exp(a(1 - \sqrt{1-z})).$$

Ce qui montre l'équation (1.11) pour tout $z < 1$. Comme A et B sont non négatifs p.s, on a

$$\rho_{\tau_a}(\lambda\varphi) = \exp(\lambda B + (\lambda - \frac{\lambda^2}{2})A) \uparrow \rho_{\tau_a}(\varphi) \quad \textit{quand} \quad \lambda \uparrow 1.$$

Par convergence monotone et (1.11),

$$E\varphi_{\tau_a}(\varphi) = \lim_{\lambda \uparrow 1} E\varphi_{\tau_a}(\varphi\lambda) = \lim_{\lambda \uparrow 1} \exp(\lambda a) = e^a$$

et par conséquent $EZ_{\tau_a}(\varphi) = 1$.

En conclusion

$$\begin{aligned} 1 = EZ_{\tau_a}(\varphi) &= E(Z_{\tau_a}(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a < T\}}) + E(Z_{\tau_a}(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a = T\}}) \\ &= E(Z_{\tau_a}(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a < T\}}) + E(Z_{\tau_a}(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a = T\}}) \end{aligned}$$

donc

$$EZ_T(\varphi) = 1 - E(Z_{\tau_a}(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a<T\}}) + E(Z_T(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a<T\}})$$

mais $\mathbb{I}_{\{\tau_a<T\}} \to 0$ p.s et $E(Z_T(\varphi)) < 1$ donc

$$E(Z_T(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a<T\}}) \to 0.$$

De plus, sur l'ensemble $\{\tau_a < T\}$

$$Z_{\tau_a}(\varphi) = \exp(-a + \left(\frac{1}{2}\int_0^{\tau_a} \varphi_s^2 ds\right) \leq \left(\frac{1}{2}\int_0^{T} \varphi_s^2 ds\right)$$

on en déduit

$$E(Z_{\tau_a}(\varphi)\mathbb{I}_{\{\tau_a<T\}}) \leq e^{-a} E \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{T} \varphi_s^2 ds\right) \to 0.$$

Chapitre 2

Équation différentielle stochastique

2.1 Introduction

Les équations différentielles gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des "différentielles stochastiques", ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).
Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

où l'inconnue est une fonction x(t) qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée x' et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) (seule la dérivée 1 ère est impliquée)avec $f(t, x) = f + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x. Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit

$$dx_t = f(t, x_t)dt. \tag{2.2}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x_t)_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroit, à la date t, selon le taux $f(t, x_t)$. Par exemple, avec $f(t, x_t) = f(t)x_t$, l'équation $dx_t = f(t)x_t dt$ modélise le cours d'un actif financier x_t soumis au taux d'intérêt variable $f(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $f(t)$. Il est bien connu que la solution est

$$x_t = x_0 \exp(\int_0^t f(s)ds)$$

. Les EDS sont des généralisations des équations (2.1) *où* la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par un terme aléatoire. On peut considérer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement brownien W et une intensité de bruit $\sigma(x, t)$:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2.3}$$

Remarque En fait, l'écriture (2.3) est symbolique car "dW_t" n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (2.3)sous la forme intégrale.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{2.4}$$

Nous énonçons le théorème fondamentale d'existence et d'unicité de la solutions d'une EDS

2.2 Existence et unicité

2.2.1 Hypothèses

On se donne

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$ un mouvement brownien standard à valeur dans $\mathbb{R}^n$,

(ii) ξ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de carré intégrable et $\mathcal{F}_0 - mesurable$ (et donc indépendant du mouvement brownien W) ;

(iii) deux application

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \ni (t,x) \longmapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \ni (t,x) \longmapsto \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^{d\times n}.$$

Notons $\mid f \mid = (\sum_{i=1}^d f_i^2)^{1/2}$,$\mid \sigma \mid = (trace(\sigma\sigma^{tr}))^{1/2}$. Nous supposons qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\mid f(t,0) \mid + \mid \sigma(t,0) \mid \leq K, \tag{2.5}$$
$$\mid f(t,x) - f(t,y) \mid + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid \leq K \mid x - y \mid . \tag{2.6}$$

Les hypothèses (2.5) et (2.6) impliquent que f et σ sont à croissance au plus linéaire :

$$\mid f(t,x) \mid + \mid \sigma(t,x) \mid \leq K(1 + \mid x \mid). \tag{2.7}$$

Considérons l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$X_t = \xi + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \geq 0. \tag{2.8}$$

Dans (2.8), le coefficient de "ds", i.e. $f(s, X_s)$, s'appelle le coefficient de dérive, celui de "dW_s", i.e. $\sigma(s, X_s)$, s'appelle le coefficient de diffusion.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, nous désignons par $X^{s,x} = \{X_t^{s,x}; t \geq 0\}$ le processus solution de l'équation

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^{t\vee s} f(r, X_r^{s,x})dr + \int_s^{t\vee s} \sigma(r, X_r^{s,x})dW_r, \quad t \geq 0. \tag{2.9}$$

Notons $X^x = X^{0,x}$. Étant donnée une variable aléatoire ξ $\mathcal{F}_0 - mesurable$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, nous désignons par $X^{s,\xi}$, le processus : $X_t^{s,\xi}(\omega), \omega \in \Omega$

2.2.2 Théorème

Sous les hypothèses 2.2.1, il existe une solution unique $X \in [M^2]^d$ à l'EDS (2.8).

preuve Nous définissons une application $\phi : [M^2]^d \longmapsto [M^2]^d$ par

$$\phi(U)_t = \xi + \int_0^t f(s, U_s)ds + \int_0^t \sigma(s, U_s)dW_s, \quad t \geq 0,$$

avec $U \in [M^2]^d$. D'après les hypothèses 2.2.1, nous avons $\phi(U) \in [M^2]^d$. Ainsi, une solution de (2.8) est un point fixe de l'application ϕ. Nous allons déduire l'existence et l'unicité d'un point unique du fait que, pour tout $T > 0$, ϕ est une contractante stricte de $[M^2]^d$ muni de la norme

$$\| U \| = (E \int_0^T e^{-\beta t} \mid U_t \mid^2 dt)^{1/2}$$

pour β suffisamment grand.

Soit $U, U' \in [M^2]^d$. Pour soulager l'écriture, posons $\bar{U} = U - U'$,
$\bar{f}_t = f(t, U_t) - f(t, U_t'), \bar{\sigma}_t = \sigma(t, U_t) - \sigma(t, U_t'), \bar{\phi}_t = \phi(U)_t - \phi(U')_t$.
Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
Appliquons la formule d'Itô à la fonction $\Gamma(t, x) = e^{-\beta t} \mid x \mid^2$

Nous avons

$$\Gamma_t'(t, x) = -\beta e^{-\beta t} \mid x \mid^2$$

$$\Gamma_x'(t, x) = 2e^{-\beta t} \mid x \mid$$

$$\Gamma_{x^2}''(t, x) = 2e^{-\beta t}$$

en revenant à la fonction $\Gamma(t,\bar{\phi})$ et par application de la formule d'Itô il en découle

$$\Gamma(T,\bar{\phi}_T)=\Gamma'(0,\bar{\phi}_0)+\int_0^T\Gamma'_t(t,\bar{\phi}_t)dt+\int_0^T\Gamma'_x(t,\bar{\phi}_t)\bar{f}_tdt+\int_0^T\Gamma'_x(t,\bar{\phi}_t)\bar{\sigma}_tdW_t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T trace\left[\Gamma''_{xx}(t,\bar{\phi}_t)\bar{\sigma}_t\bar{\sigma}_t^{tr}\right]dt$$

et donc

$$e^{-\beta T}\mid\bar{\phi}_T\mid^2=-\beta\int_0^T e^{-\beta t}\mid\bar{\phi}_t\mid^2dt+2\int_0^T e^{-\beta t}\langle\bar{\phi}_t,\bar{f}_tdt\rangle+2\int_0^T e^{-\beta t}\langle\bar{\phi}_t,\bar{\sigma}_tdW_t\rangle$$
$$+\int_0^T e^{-\beta t}trace(\bar{\sigma}_t\bar{\sigma}_t^{tr})dt.$$

Comme $U,U'\in[M^2]^d$, nous pouvons prendre l'espérance dans cette dernière équation, nous obtenons :

$$E(e^{-\beta T}\mid\bar{\phi}_T\mid^2)=-\beta E\int_0^T e^{-\beta t}\mid\bar{\phi}_t\mid^2dt+2E\int_0^T e^{-\beta t}\langle\bar{\phi}_t,\bar{f}_tdt\rangle+2E\int_0^T e^{-\beta t}\langle\bar{\phi}_t,\bar{\sigma}_tdW_t\rangle$$
$$+E\int_0^T e^{-\beta t}trace(\bar{\sigma}_t\bar{\sigma}_t^{tr})dt.$$

Nous avons supposer $U\in[M^2]^d$, d'après l'hypothèse (2.6)

$$\mid\bar{\sigma}\mid\leq K\mid\bar{U}\mid$$

comme $U,U'\in[M^2]^d$, il en est de même pour $\bar{\sigma}$, d'autre part $\phi_t\in[M^2]^d$ alors $\bar{\phi}_t\in[M^2]^d$ et $e^{-\beta t}$ est une fonction déterministe alors

$$h_t=e^{-\beta t}<\bar{\phi}_t,\bar{\sigma}_t>\quad\in[M^2]^d$$

et d'après 1.6.4, il s'en suit que le terme

$$E\int_0^T e^{-\beta t}<\bar{\phi}_t,\bar{\sigma}_tdW_t>=0$$

En minorant par 0 le terme $E(e^{-\beta T}\mid\bar{\phi}_T\mid^2)$, nous aurons :

$$\beta\parallel\bar{\phi}\parallel^2\leq 2E\int_0^T e^{-\beta t}\langle\bar{\phi}_t,\bar{f}_tdt\rangle+E\int_0^T e^{-\beta t}trace(\bar{\sigma}_t\bar{\sigma}_t^{tr})dt$$

En utilisant le fait que $2\langle x,y\rangle\leq\mid x\mid^2+\mid y\mid^2$, nous aurons :

$$\beta\parallel\bar{\phi}\parallel^2\leq E\int_0^T e^{-\beta t}\mid\bar{\phi}_t\mid^2dt+E\int_0^T e^{-\beta t}\mid\bar{f}_t\mid^2dt+E\int_0^T e^{-\beta t}\mid\bar{\sigma}_t\mid^2dt$$

Utilisant maintenant la condition de Lipschitz (2.6)

$$\beta \parallel \bar{\phi} \parallel^2 \leq E \int_0^T e^{-\beta t} \mid \bar{\phi}_t \mid^2 dt + 2K^2 E \int_0^T e^{-\beta t} \mid \bar{U}_t \mid^2 dt \qquad = \parallel \bar{\phi} \parallel^2 + 2K^2 \parallel \bar{U} \parallel^2$$

Avec $\beta = 1 + 4K^2$, nous obtenons : $\parallel \phi(U) - \phi(U') \parallel^2 = \frac{1}{2} \parallel U - U' \parallel^2$

Alors il existe un point fixe unique pour $\bar{\phi}$. Soit U^* ce point, tels que $\phi(U^*) = U^*$, ce qui prouve le théorème.

Dans cette section, nous traitons l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck qui est la diffusion solution de l'équation différentielle stochastique (2.10) suivante

2.3 Exemple (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck)

Considérons le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'EDS linéaire à coefficient constants :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t, \quad X_0 = \xi, \tag{2.10}$$

où α et β sont des constantes strictement positives, W est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0 - mesurable.$

Supposons que $\alpha > 0$.

Nous allons montrer les points suivants :

(i) La solution de (2.10) est donné par

$$X_t = e^{-y\alpha}\xi + \int_0^t e^{-(t-s)\alpha} \beta dW_s, \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

(ii) Si ξ est une variable gaussienne, alors X est un processus gaussien dont l'espérance et la fonction de covariance sont données par

$$\mu(t) = E(X_t) = e^{-t\alpha} E(\xi),$$
$$R(t+\delta, t) = Cov(X_{t+\delta}, X_t) = e^{-(t+\delta)\alpha} Var(\xi) e^{-t\alpha} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha} \beta^2 e^{-(t-u)\alpha} du$$

pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$.

(iii) Si $E(\xi) = 0$ et $Var(\xi) = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ alors le processus X est centré (i.e. $\mu(t) = 0$) et de covariance stationnaire, cela se traduit par le fait que $R(t+\delta, t)$ ne dépend plus de que de δ :

$$R(t+\delta, t) = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha}, \quad \forall t \geq 0, \quad \delta \geq 0.$$

(iv) Si ξ est une variable gaussienne, alors quand $t \longmapsto \infty$, l'espérance et la fonction de covariance du processus $\{X_{t+\delta}; \delta \geq 0\}$ tendent vers celles du cas stationnaire :

$$E(X_{t+\delta}, t) \to 0, \quad Cov(X_{t+\delta}, X_t) \to \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha}.$$

(i) Si X est solution de (2.10) alors nous avons

$$X_t = \xi + \alpha \int_0^t X_s ds + \int_0^t \beta dW_s$$

En posant

$$Y_t = X_t e^{\alpha t}$$

et en appliquant la formule d'Itô à la fonction $h(t,x) = e^{t\alpha}x$, nous avons

$$dY_t = \alpha e^{t\alpha} X_t dt + e^{t\alpha}(-\alpha X_t)dt + \beta e^{t\alpha} dW_t$$

donc

$$dY_t = \beta e^{t\alpha} dW_t$$

sous forme intégrale

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \beta e^{s\alpha} dW_s$$

en remplaçant Y_t par $X_t e^{\alpha t}$ on obtient

$$X_t e^{\alpha t} = X_0 e^{0*\alpha} + \int_0^t \beta e^{s\alpha} dW_s$$

on en déduit la solution pour $t \geq 0$

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha} dW_s$$

(ii) si ξ est gaussienne et W est un mouvement brownien alors $\int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha} dW_s$ est gaussienne, de plus ξ ne dépend pas de W donc X est un processus gaussien car la somme de deux gaussiennes. De plus nous avons

$$E(X_t) = e^{-t\alpha} E(\xi)$$

et

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+\delta}, X_t) &= E(X_t X_{t+\delta}) - E(X_t)E(X_{t+\delta}) \\ &= E\left(\int_0^{t+\delta} \beta e^{-(t+\delta-u)\alpha} dW_u \int_0^t \beta e^{-(t-u)\alpha} dW_u\right) + e^{-(t+\delta+t)\alpha} Var(\xi) \\ &= e^{-(t+\delta)\alpha} Var(\xi) e^{-t\alpha} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha} \beta^2 e^{-(t-u)\alpha} du \end{aligned}$$

(iii) Si $E(\xi) = 0$ et $Var(\xi) = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ alors X est centré et

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+\delta}, X_t) &= e^{-(t+\delta)\alpha} \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-t\alpha} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha} \beta^2 e^{-(t-u)\alpha} du \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-(t+\delta-t)\alpha} \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha} \end{aligned}$$

(iv) Si ξ est une gaussienne, nous avons

$$E(X_{t+\delta}) = e^{-(t+\delta)\alpha} \to 0 \quad quand \quad t \to \infty$$

et

$$R(t+\delta, t) \to \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha} \quad quand \quad t \to \infty$$

2.4 Propriétés de la solution d'une EDS

Une équation différentielle stochastique possède de nombreuses bonnes propriétés, En effet

2.4.1 Proposition

Soit f^n et σ^n deux suites de coefficient qui vérifient les Hypothèses 2.2.1 uniformément en n (i.e. avec une constante K ne dépendant pas de n). Supposons de plus que

$$f^n \to f(t,x),\ \sigma^n \to \sigma(t,x), \quad \text{quand} \quad n \to \infty, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d.$$

Alors

$$X_t^n \to X_t, \quad \text{quand} \quad n \to \infty \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

où X^n $[resp. X]$ désigne le processus solution de l'EDS (2.8) avec coefficient f^n et σ^n $[resp. f et \sigma]$.

Preuve

$$X_t - X_t^n = \int_0^t \left[f(s, X_s^n) - f^n(s, X_s) \right] ds + \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) - \sigma^n(s, X_s^n) \right] dW_s$$

En rajoutant et en retranchant les deux termes $\int_0^t f^n(s, X_s) ds$ et $\int_0^t \sigma^n(s, X_s) ds$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_t - X_t^n = & \int_0^t \left[f(s, X_s) - f^n(s, X_s) \right] ds + \int_0^t \left[f^n(s, X_s) - f^n(s, X_s^n) \right] ds \\ & + \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) - \sigma^n(s, X_s) \right] dW_s + \int_0^t \left[\sigma^n(s, X_s) - \sigma^n(s, X_s^n) \right] dW_s \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$, nous aurons :

$$| X_t - X_t^n |^2 \leq 4 \mid \int_0^t [f(s,X_s) - f^n(s,X_s)]\, ds \mid^2 + 4 \mid \int_0^t [f^n(s,X_s) - f^n(s,X_s^n)]\, ds \mid^2$$
$$+ 4 \mid \int_0^t [\sigma(s,X_s) - \sigma^n(s,X_s)]\, dW_s \mid^2 + 4 \mid \int_0^t [\sigma^n(s,X_s) - \sigma^n(s,X_s^n)]\, dW_s \mid^2$$

En passant à l'espérance et en utilisant la propriété de l'intégrale stochastique ainsi que l'inégalité de Hölder nous obtenons,

$$E\left(| X_t - X_t^n |^2\right) \leq 4\rho_n(t) + 4tE\int_0^t | f^n(s,X_s) - f^n(s,X_s^n) |^2\, ds$$
$$+ 4E\int_0^t | \sigma^n(s,X_s) - \sigma^n(s,X_s^n) |^2\, ds$$

Maintenant en utilisant la condition de Lipschitz (2.6) nous aurons :

$$E\left(| X_t - X_t^n |^2\right) \leq 4\rho_n(t) + 4(1+t)K^2 \int_0^t E(| X_s - X_s^n |^2) ds$$

où

$$\rho_n(t) = tE\int_0^t | f(s,X_s) - f^n(s,X_s) |^2\, ds + E\int_0^t | \sigma(s,X_s) - \sigma^n(s,X_s) |^2\, ds.$$

$\rho_n(t)$ est une fonction croissante de t, donc

$$E\left(| X_t - X_t^n |^2\right) \leq 4\rho_n(t) + 4(1+t)K^2 \int_0^s E(| X_u - X_u^n |^2) du, \quad 0 \leq s \leq t.$$

En appliquant le Lemme de Gronwall nous aurons :

$$E\left(| X_t - X_t^n |^2\right) \leq 4\rho_n(t) \exp(4(1+t)K^2 t),\ t \geq 0.$$

Pour conclure, il suffit de démontrer que $\rho_n(t) \to 0$. $\varsigma_s^n = \sigma(s,X_s) - \sigma^n(s,X_s) \to 0$ p.s. (par hypothèse) et d'après (2.7) $| \varsigma_s^n |^2 \leq Cte(1 + | \xi |^2)$ qui est
$dP \times ds$-intégrable. Avec le même raisonnement pour $f(s,X_s) - f^n(s,X_s)$, nous montrons que $\rho_n(t) \to 0$ (par convergence dominée).
Donc :

$$E\left(| X_t - X_t^n |^2\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

d'où

$$X_t^n \to X_t \text{ dans } \quad L^2(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

2.4.2 Proposition

Soit $p \geq 2$ tel que $E \mid \xi \mid^p < \infty$, il existe alors une constante C_p telle que pour tout $t \geq 0$

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq t} \mid X_s \mid^p\right) \leq C_p\left(1 + E \mid \xi \mid^p\right)(1+t^p)\exp\left(C_p(t^{p/2}+t^p)\right). \tag{2.12}$$

Preuve C_p désignera une constante qui ne dépend que de p mais qui varie au cours de la démonstration. Notons $Y_t = \sup_{0\leq s\leq t} \mid X_s \mid^p$,

$$\mid X_s \mid^p = \left|\xi + \int_0^s f(u,X_u)du + \int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^p$$

l'inégalité $(a+b+c)^p \leq 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p)$ fournit l'estimation pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}|X_s|^p &\leq 3^{p-1}|\xi|^p + 3^{p-1}\left|\int_0^s f(u,X_u)du\right|^p + 3^{p-1}\left|\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^p \\ &\leq C_p\left(|\xi|^p + \left|\int_0^s f(u,X_u)du\right|^p + \left|\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^p\right)\end{aligned}$$

d'oừ

$$Y_t \leq C_p\left(|\xi|^p + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s f(u,X_u)du\right|^p + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^p\right).$$

En utilisant l'inégalité d'Hölder nous avons

$$Y_t \leq C_p\left(|\xi|^p + t^{p-1}\int_0^t |f(s,X_s)|^p\,ds + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right|^p\right)$$

et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy conduit à

$$Y_t \leq C_p\left(|\xi|^p + t^{p-1}\int_0^t |f(s,X_s)|^p\,ds + \left(\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2\,ds\right)^{p/2}\right)$$

Passons maintenant à l'espérance et utilisons encore une fois l'inégalité d'Hölder nous avons

$$EY_t \leq C_pE\left(|\xi|^p + t^{p-1}\int_0^t |f(s,X_s)|^p\,ds + t^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^p\,ds\right) \tag{2.13}$$

De plus, comme f et σ sont à croissance linéaire, nous avons

$$EY_t \leq C_pE\left(|\xi|^p + t^p + t^{p-1}\int_0^t |X_s|^p\,ds + t^{p/2} + t^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t |\sigma(s,X_s)|^p\,ds\right)$$

et

$$EY_t \leq C_p\left(E|\xi|^p + t^{p/2} + t^p\right) + C_p(t^{\frac{p}{2}-1} + t^{p-1})\int_0^t EY_s ds$$

Par application du lemme de Gronwall, nous avons

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq t} \mid X_s \mid^p\right) \leq C_p\left(1 + E \mid \xi \mid^p\right)(1+t^p)\exp\left(C_p(t^{p/2}+t^p)\right).$$

2.4.3 Proposition

Pour tout T>0 et $p \geq 2$, il existe une constante C(p,T) telle que

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{s,x}-X_t^{s',x'}\right|^p\right)\leq C(p,T)(1+|x|^p+|x'|^p)(|s-s'|^{p/2}+|x-x'|^p)$$

pour tout $s,s' \in [0,T] et \quad x,x' \in \mathbb{R}^d$.

Notons, $X^{s,x}$ (respectivement $X^{s',x'}$) le processus solution de l'EDS o$\grave{u}$ $0 \leq s \leq T$ (respectivement $0 \leq s' \leq T$) est l'instant initiale et x (respectivement x') est la condition initiale.

Preuve Supposons $s' \leq s$ et désignons $X^{s,x}$ $[resp.X^{s',x'}]$ par X [resp. X'], X-X' par $\bar{X}$, x-x' par $\bar{x}$. On considère trois cas :

∘ Si $t \leq s'$,
alors

$$\left|\bar{X}_t\right|^p=\left|x+\int_s^s f(r,X_r)dr+\int_s^s \sigma(r,X'_r)dW_r-x'+\int_{s'}^{s'} f(r,X'_r)dr-\int_s^{s'}\sigma(r,X'_r)dW_r\right|^p$$

d'o$\grave{u}$

$$\left|\bar{X}_t\right|^p=|\bar{x}_t|^p$$

donc :

$$E\sup_{0\leq t\leq s'}\left|\bar{X}\right|^p=|\bar{x}_t|^p\,. \tag{2.14}$$

∘ Si $s' \leq t \leq s$, alors :

$$\left|\bar{X}_t\right|^p=\left|\bar{x}-\int_{s'}^t f(r,X'_r)dr-\int_{s'}^t \sigma(r,X'_r)dW_r\right|^p$$

de la même façon que pour (2.13), nous obtenons

$$E\left(\sup_{s'\leq t\leq s}\left|\bar{X}_t\right|^p\right)\leq C_pE\left(|\bar{x}_t|^p+|s-s'|^{p-1}\int_{s'}^s\left(1+\left|\bar{X}'_r\right|^p\right)dr+|s-s'|^{\frac{p}{2}-1}\int_{s'}^s\left(1+\left|\bar{X}'_r\right|^p\right)dr\right)$$

et d'après la proposition précédente, $E\left(|X'_r|^p\right)\leq C(p,T)\left(1+|x'|^p\right)$, donc

$$E\sup_{s'\leq t\leq s}\left|\bar{X}_t\right|^p\leq C(p,T)(1+|x'|^p)(|s-s'|^{p/2}+|\bar{x}|^p). \tag{2.15}$$

∘ Si t>s, alors :

$$\begin{aligned}\left|\bar{X}_t\right|^p&=\left|\bar{x}+\int_s^t\left[f(r,X_r)-f(r,X'_r)\right]dr+\int_s^t\left[\sigma(r,X_r)-\sigma(r,X'_r)\right]dW_r\right|^p\\&\leq C_p\left(\left|\bar{X}_s\right|^p+\left|\int_s^t\left[f(r,X_r)-f(r,X'_r)\right]dr\right|^p+\left|\int_s^t\left[\sigma(r,X_r)-\sigma(r,X'_r)\right]dW_r\right|^p\right).\end{aligned}$$

et d'après (2.13)

$$E\sup_{s\le t\le T}\left|\bar{X}_t\right|^p \le C_pE(\left|\bar{X}_s\right|^p + t^{p-1}\int_0^T |f(s,X_s)-f(s,X'_s)|^p\,ds$$
$$+\,t^{\frac{p}{2}-1}\int_0^T |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s)|^p\,ds).$$

Et par l'hypothèse (2.6) nous avons :

$$E\sup_{s\le t\le T}\left|\bar{X}_t\right|^p \le C_pE\left(\left|\bar{X}_s\right|^p + K^pt^{p-1}\int_s^T \left|\bar{X}_r\right|^p dr + K^pt^{\frac{p}{2}-1}\int_s^T \left|\bar{X}_r\right|^p dr\right)$$

Et par suite :

$$E\sup_{s\le t\le T} \le C(p,T)E\left(\left|\bar{X}_s\right|^p\right). \tag{2.16}$$

La proposition se déduit en combinant (2.14),(2.15)et(2.16).

Il en découle le corollaire suivant

2.4.4 Corollaire

Soit X resp X' la solution de l'EDS (2.8) avec condition initiale ξ resp ξ'. Pour tout T>0 et $p\ge 2$, tels que $E(|\ \xi\ |^p)+E(|\ \xi'\ |^p)<\infty$, alors il existe une constante C(p,T) telle que

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-X'_t|^p\right)\le C(p,T)E\left(|\xi-\xi'|^p\right)$$

Commentaire : pour l'EDS (2.8) l'instant initial reste 0 et la condition initiale est la variable aléatoire ξ (respectivement ξ'), il s'en suit que dans le résultat de la proposition le terme $s-s'$ n'a plus lieu d'être et le terme $E\mid\xi-\xi'\mid^p$ correspond à $E\mid x-x'\mid^p$ et le terme $E(|\ \xi\ |^p)+E(|\ \xi'\ |^p)<\infty$ correspond à $|\ x\ |^p+|\ x'\ |^p$.

Dans le paragraphe qui suit, nous nous intéressons au cas *où* les coefficients f et σ dépendent de l'état à l'instant t mais pas du temps lui même. Nous montrons que la solution d'une telle équation possède, en outre, les propriétés de Markov

2.5 Processus de diffusion

Le processus X solution de l'EDS (2.8) est un processus de Markov. Les processus de Markov de ce type sont appelés processus de diffusion.

2.5.1 Définition

On appelle générateur infinitésimal du processus de diffusion X solution de l'EDS (2.8), l'opérateur aux dérivées partielles du second ordre défini par

$$\mathcal{L}_t\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1\leq i,j\leq d} f_i(t,x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, x\in\mathbb{R}^d, \tag{2.17}$$

où $a = \sigma\sigma^{tr}$.

Remarque Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ apparait de manière naturelle dans la formule d'Itô. En effet, avec les notations du théorème 1.6.8 pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ et tout $0 \leq t \leq T$, on a

$$d\phi(X_t) = \mathcal{L}_t\phi(X_t)dt + \phi'(X_t)\sigma_t dW_t.$$

2.5.2 Lemme

Soit $s \geq 0$. Pour tout vecteur aléatoire ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F} - mesurable$, le processus X^ξ (processus solution de l'EDS avec condition initiale ξ) est solution de l'équation

$$X_t^{s,\xi} = \xi + \int_s^t f(u, X_u^\xi)du + \int_s^t \sigma(u, X_u^\xi)dW_u, \quad t\geq s. \tag{2.18}$$

Preuve Nous supposons $s = 0$, Considérons donc X^ξ est une solution de (2.18). Soit ξ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_0 - mesurable$.

Supposons d'abord que ξ est une variable étagée, i.e. il existe n, $x_i \in \mathbb{R}^d$ et $A_i \in \mathcal{F}_0$(i=1,...,n) tels que

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{A_i}$$

pour toute fonction h : $h(\xi) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\mathbb{I}_{A_i}$. Nous avons donc

$$X_t^{\xi} = \sum_{i=1}^{n} X_t^{x_i}\mathbb{I}_{A_i}.$$

Par définition de X^{x_i}, nous avons

$$X_t^{x_i} = x_i + \int_0^t f(u, X_u^{x_i})du + \int_0^t \sigma(u, X_u^{x_i})dW_u, \quad t \geq 0, i = 1, ..., n.$$

En multipliant cette égalité par $\mathbb{I}_{A_i}$ et compte tenu du fait que A_i est $\mathcal{F}_0 - mesurable$ (ce qui permet d'intervertir la multiplication par $\mathbb{I}_{A_i}$ et l'intégrale stochastique), nous obtenons (2.18) après sommation sur i.

Si ξ est de carré intégrable, il existe une suite $\{\xi^n\}$ de variables étagées $\mathcal{F}_0 - mesurables$ qui converge vers ξ dans $L^2(\Omega)$.
Soit Y (resp. Y^n) la solution de l'EDS (2.8) avec condition initiale ξ (resp.ξ^n).
D'après le cas précédent, $Y^n = X^{\xi^n}$.
De plus $Y_t^n \rightarrow Y_t$ en moyenne quadratique (par application de corollaire 2.4.4 l'orsque p=2)
Enfin, $\xi^n \rightarrow \xi$ en moyenne quadratique, nous pouvons donc en extraire une sous-suite (également notée ξ^n) qui converge p.s.
Par continuité de l'application $x \longmapsto X_t^x$, nous pouvons conclure

$$X_t^{\xi^n} \longrightarrow X_t^{\xi}$$

p.s. Récapitulons :

$$Y_t^n = X_t^{\xi^n} \longrightarrow X_t^{\xi} \quad et, \quad Y_t^n \longrightarrow Y_t \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

On en déduit que, $X_t^{\xi} = Y_t$ p.s ($t \geq 0$)

I.e. ces deux processus sont une modification l'un de l'autre, comme ils sont également continus, ils sont indistinguables.

Remarque Soit ξ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_0 - mesurable$ et X le processus solution de $X_t = \xi + \int_0^t f(u, X_u) + \int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u$,$t \geq 0$, alors X_t est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_0 - mesurable$. Nous avons donc trivialement $X_t = X_t^{s,X_s}$, $t \geq s$.

2.5.3 Théorème

Sous les hypothèses 2.2.1, la solution de l'EDS (3.4) est un processus de Markov.

Preuve Soit $0 \leq s \leq t$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, d'après la remarque 2.5.4

$$X_t = X_t^{s,X_s}$$

d'où,

$$X_t \mathbb{I}_A = X_t^{s,X_s} \mathbb{I}_A$$

Donc,

$$E(X_t \mathbb{I}_A) = E(X_t^{s,X_s} \mathbb{I}_A)$$

D'une part $\varphi = \mathbb{I}_A$ est une application borélienne et bornée, d'autre part $\left\{X_t^{s,x}; x \in \mathbb{R}^d\right\}$ est une fonction aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de $\mathcal{F}_s$. En appliquant le Lemme B cité en Annexe, nous obtenons

$$E(\mathbb{I}_A(X_t^{s,X_s}) \setminus \mathcal{F}_s) = E(\mathbb{I}_A(X_t^{s,X_s}) \setminus X_s)$$

Donc

$$P(X_t \in A \setminus \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A \setminus X_s)$$

On en conclut que la solution de (2.8) X_t est un processus de Markov.

Remarque Au processus de Markov X on associe sa loi initiale, i.e. sa loi de $X_0 = \xi$, et sa probabilité de transition

$$p(s, x; t, A) = P(X_t \in A \setminus X_s = x), \quad t \geq s \geq \ 0, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

À t,s,x fixés, l'application $A \longmapsto p(s, x; t, A)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui coïncide avec la loi de $X_t^{s,x}$. Ainsi,la probabilité de transition ne dépend que des coefficient de dérive et de diffusion.

2.6 Cas homogène

Considérons un processus X solution de l'EDS dite homogène en temps

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = \xi$$

sous les hypothèses 2.2.1.

2.6.1 Proposition

Les processus $\{X_{t+s}^{s,x}; t \geq 0\}$ et $\left\{X_{t+s}^{0,x}; t \geq 0\right\}$ ont même loi, i.e. le processus X est homogène en temps

Preuve

$$X_{t+s}^{s,x} = x + \int_s^{s+t} f(X_u^{s,x})du + \int_s^{s+t} \sigma(X_u^{s,x})dW_u$$

En effectuant un changement de variables (u=s+v) nous trouvons :

$$X_{t+s}^{s,x} = x + \int_0^{t} f(X_{s+v}^{s,x})dv + \int_0^{t} \sigma(X_{s+v}^{s,x})dW_{s+v}$$

Posons $\tilde{W} = W_{s+v} - W_s$ $(v \geq 0)$ nous avons,

$$X_{t+s}^{s,x} = x + \int_0^{t} f(X_{s+v}^{s,x})dv + \int_0^{t} \sigma(X_{s+v}^{s,x})d\tilde{W}_v$$

$\tilde{W}_v$ est un mouvement brownien par ailleurs,

$$X_{t+s}^{0,x} = x + \int_0^{t} f(X_v^{0,x})dv + \int_0^{t} \sigma(X_v^{0,x})dW_v$$

Comme W et $\tilde{W}$ ont la même loi, on en déduit que $\{X_{t+s}^{s,x}; t \geq 0\}$ et $\left\{X_{t+s}^{0,x}; t \geq 0\right\}$ ont même loi.

2.6.2 Proposition

Soit $t \geq 0$ et $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne, posons

$$\left[P_t\varphi\right](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)p_t(x,dy) = E[\varphi(X_t^x)], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{2.19}$$

L'opérateur $P_t : \varphi \longmapsto P_t\varphi$ est un opérateur linéaire continu. La famille $\{P_t; t \geq 0\}$ vérifie une propriété de semi-groupe, i.e :

$$P_s \circ P_t = P_t \circ P_s = P_{s+t}, \quad s,t \geq 0, \quad P_0 = I.$$

Preuve

$$\begin{aligned} E[\varphi(X_{t+s}^{t,y}] &= E[\varphi(X_s^y)] \\ &= [P_s\varphi](y) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} [P_{s+t}\varphi](x) &= E[\varphi(X_{t+s}^x] \\ &= E[\varphi(X_{t+s}^{t,X_t^x}] \\ &= E[(P_s\varphi)(X_t^x)] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}[P_{s+t}\varphi](x) &= [P_t(P_s\varphi)](x) \\ &= [P_t \circ P_s](\varphi)(x).\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et nulles à l'infini. $\mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions deux fois continument différentiables définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et à support compact K.

2.6.3 Théorème

On suppose que les fonctions f et σ sont lipschitziennes et bornées. Les opérateurs $\{P_t; t \geq 0\}$ forment un semi-groupe fortement continus d'opérateurs markoviens sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.
De plus,pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$,le processus $M^{\varphi}(x)$

$$M_t^{\varphi}(x) = \varphi(X_t^x) - \varphi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(X_s^x)ds, \quad t \geq 0, \tag{2.20}$$

Est une $\mathcal{F}_t - martingale$ et

$$[P_t\varphi](x) = \varphi(x) + \int_0^t [P_s(\mathcal{L}\varphi)](x)ds, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.21}$$

o*ù* $\mathcal{L}$ désigne le générateur infinitésimal de la diffusion X.

L'opérateur P_t est dit markovien si $P_t 1 = 1$ et si $f \geq 0$ implique $P_t\varphi \geq 0$.

Preuve

point 1 : Si $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ alors $P_t\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. L'application $(t,x) \longmapsto \varphi(X_t^x)$ étant p.s continue bornée, la continuité de l'application $x \longmapsto P_t\varphi(x) = E[\varphi(X_t^x)]$ est une conséquence du théorème de convergence dominée. Il faut maintenant vérifier que $P_t\varphi$ converge vers 0 à l'infini.
Soit $r > 0$,

$$\begin{aligned}
|P_t\varphi(x)| &= |E[\varphi(X_t^x)]| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) P_t(x,dy) \right| \\
&= \left| \int_{y,|x-y|\leq r} \varphi(y) P_t(x,dy) + \int_{y,|x-y|\geq r} \varphi(y) P_t(x,dy) \right| \\
&\leq \sup_{y,|x-y|\leq r} |\varphi(y)| \int_{y,|x-y|\leq r} P_t(x,dy) + \parallel \varphi \parallel_\infty \int_{y,|x-y|\geq r} P_t(x,dy)
\end{aligned}$$

En utilisant ceci :

$$\int_{y,|x-y|\leq r} P_t(x,dy) \leq \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x,dy) = 1$$

nous aurons :

$$|P_t\varphi(x)| \leq \sup_{y,|x-y|\leq r} |\varphi(y)| \int P_t(x,dy) + \parallel \varphi \parallel_\infty P(|X_t^x - x| > r).$$

Par ailleurs, l'inégalité de Markov conduit à

$$\begin{aligned}
P(|X_t^x - x| > r) &\leq \frac{1}{r^2} E(|X_t^x - x|^2) \\
&= \frac{1}{r^2} E \left| \int_0^t f(X_s^x) ds + \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s \right|^2
\end{aligned}$$

En utilisant $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ nous aurons,

$$P(|X_t^x - x| > r) \leq \frac{2}{r^2} \left[E\left(\left| \int_0^t f(X_s^x) ds \right|^2 \right) + E\left(\left| \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s \right|^2 \right) \right]$$

En utilisant Hölder et la propriété de l'intégrale stochastique nous obtenons,

$$P(|X_t^x - x| > r) \leq \frac{2}{r^2} E\left[t \int_0^t |f(X_s^x)|^2 ds + \int_0^t |\sigma(X_s^x)|^2 ds \right].$$

comme f et σ sont bornées alors

$$\begin{aligned}
P(|X_t^x - x| > r) &\leq \frac{2}{r^2} \left(tK^2 \int_0^t ds + K^2 \int_0^t ds \right) \\
&= \frac{2K^2}{r^2} t(1+t)
\end{aligned}$$

et $|\varphi(y)| \longrightarrow 0$ quand $|y| \longrightarrow \infty$. Donc

$$\lim_{|x|\to\infty} |P_t\varphi(x)| \leq \| \varphi \|_\infty \frac{2K^2}{r^2} t(1+t).$$

En faisant tendre $r \to +\infty$ nous montrons que $[P_t\varphi](x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

Point 2 : Caractère continu du semi-groupe. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, il faut montrer que

$$\| P_t\varphi - P_s\varphi \|_\infty \to 0 \qquad \textit{quand} \qquad |t-s| \to 0$$

En se ramenant à s=0, il suffit de montrer que

$$\| P_t\varphi - \varphi \|_\infty \to 0 \qquad \textit{quand} \qquad t \to 0 \tag{2.22}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |P_t\varphi(x) - \varphi(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) P_t(x,dy) - \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x,dy) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(y) - \varphi(x)) P_t(x,dy) \right| \\
&\leq \sup_{\{(x,y);|x|\leq r,|y|\leq r\}} |\varphi(x) - \varphi(y)| + 2 \| \varphi \|_\infty P(|X_t^x - x| > r) \\
&\leq \sup_{\{(x,y);|x|\leq r,|y|\leq r\}} |\varphi(x) - \varphi(y)| + 2 \| \varphi \|_\infty \frac{t(1+t)}{r^2}
\end{aligned}$$

ainsi

$$\limsup_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |P_t\varphi(x) - \varphi(x)| \leq \sup_{\{(x,y);|x|\leq r,|y|\leq r\}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $r \to \infty$ car $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est nulle à l'infini. Ce qui démontre (2.22).

point 3 : Preuve de (2.20)et (2.21). Soit $\varphi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$, avec la formule d'Itô :

$$\varphi(X_t^x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{L}\varphi(X_s^x)ds + \int_0^t \varphi'(X_s)\sigma(X_s^x)dW_s$$

Donc

$$M_t^\varphi(x) = \int_0^t \varphi'_x(X_s^x)\sigma(X_s^x)dW_s$$

qui est une martingale adaptée à $\mathcal{F}_t$
En prenant l'espérance dans (2.20)

$$E[\varphi(X_t^x)] = \varphi(x) + E\int_0^t \mathcal{L}\varphi(X_t^x)ds + E\int_0^t \varphi'_x(X_s^x)\sigma(X_s^x)dW_s$$

Vu que M_t^φ est $\mathcal{F}_t$ martingale donc,

$$EM_t^\varphi = E(M_0^\varphi) = 0$$

Et en appliquant le théorème de Fubini nous obtenons (2.21)

2.6.4 Corollaire

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t}$$

pour la topologie de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Il faut montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t} - \mathcal{L}\varphi = 0$$

En effet, d'après (2.21)

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t}(x) - \mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{t}\int_0^t (P_s[\mathcal{L}\varphi] - \mathcal{L}\varphi)(x)ds$$

Puisque presque surement, les trajectoires de la diffusion sont continues donc,

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t}$$

Remarque On définit le domaine du générateur $\mathcal{L}$ par

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d); \frac{P_t\varphi - \varphi}{t} \quad a \quad une \quad limite \quad quand \quad t \to 0 \right\}$$

(Limite pour la topologie de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$). $\mathcal{L}$ est un opérateur non borné de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ de domaine $D(\mathcal{L})$ dense (puisque, d'après le corollaire 2.6.4, il contient $\mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$). $\mathcal{L}$ est appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t; t \geq 0\}$.

2.7 Solution faible d'EDS

Nous pouvons affaiblir les hypothèses d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS introduite précédemment (notamment les conditions de Lipschitz) et donc introduire une nouvelle notion de solution dite faible, en opposition aux solutions fortes. Ceci a des implications importantes aussi bien pour la théorie que pour les applications.

2.7.1 Définition

La solution faible de l'équation (2.24) est un triplet :
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, un espace de probabilité filtré
- W, un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien (standard)
- X, un processus $\mathcal{F}_t$-adapté

les processus X et W sont définis sur le même espace donné et vérifient

$$P\left(\int_0^t \left[|f(s,X_s)|^2 + |\sigma(s,X_s)|^2\right] ds\right) = 1, \quad t \geq 0, \tag{2.23}$$

et

$$dX_t = f(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \quad X_0 = \xi. \tag{2.24}$$

2.7.2 Définition (Unicité en loi)

L'EDS (2.24) admet une solution faible unique en loi si, étant données deux solution faibles

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W, X) \qquad et \qquad (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P}, \tilde{W}, \tilde{X})$$

avec conditions initiales de même loi, alors les processus X et $\tilde{X}$ ont même loi.

Dans ce cadre, il existe également un autre concept d'unicité :
L'EDS (2.24) admet une solution faible unique au sens trajectoriel, étant données deux solution faibles

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W, X) \qquad et \qquad (\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P, W, \tilde{X})$$

(donc seuls les processus et les filtrations sont différentes W est un mouvement brownien pour les deux filtrations) avec même condition initiale, alors les processus X et $\tilde{X}$ sont indistinguables.

2.7.3 Exemple

Soit $sign(x) = \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} - \mathbb{I}_{\{x<0\}}$ nous considérons l'EDS réelle :

$$dX_t = sign(X_t)dW_t, \quad X_0 = 0, \tag{2.25}$$

Nous remarquons d'abord que, si X_t est solution de (2.25), X_t est un mouvement brownien puisque X est une martingale issue de 0, d'après la caractérisation de Lévy et il y a unicité en loi.

Soit ξ_t un mouvement brownien réel issu de 0, posons :

$$\beta_t = \int_0^t sign(\xi_s)d\xi_s$$

de la même manière, on voit que β est un mouvement brownien, nous en déduisons

$$\begin{aligned}\beta_t &= \int_0^t sign(\xi_s)d\beta_s = \int_0^t sign(\xi_s)sign(\xi_s)d\xi_s \\ &= \int_0^t d\xi_s = \xi_t\end{aligned}$$

ξ est une solution de (2.25), en prenant β comme mouvement brownien. Il y a existence faible mais puisque :

$$E(\int_0^t \mathbb{I}_{\{\xi_s=0\}}d\beta_s)^2 = E(\int_0^t \mathbb{I}_{\{\xi_s=0\}}ds) = \int_0^t P(\xi_s = 0)ds = 0$$

comme

$$sign(-\xi_s) = \mathbb{I}_{\{-\xi_s \geq 0\}} - \mathbb{I}_{\{-\xi_s<0\}} = \mathbb{I}_{\{-\xi_s>0\}} - \mathbb{I}_{\{-\xi_s \leq 0\}} = \mathbb{I}_{\{\xi_s<0\}} - \mathbb{I}_{\{-\xi_s \geq 0\}} = -sign(\xi_s).$$

Nous avons p.s

$$-\xi_t = -\int_0^t sign(\xi_s)d\beta_s = \int_0^t -sign(\xi_s)\mathbb{I}_{\{\xi_s \neq 0\}}d\beta_s = \int_0^t sign(-\xi_s)d\beta_s$$

il s'en suit que $-\xi$ est également solution de (2.25) avec le mouvement brownien β, et donc il n'y a pas unicité trajectorielle.

La transformation de Girsanov est un outil fondamental pour démontrer l'existence et l'unicité de solution faible d'EDS. C'est l'objectif des propositions qui suivent

2.7.4 Proposition (Existence)

Considérons l'EDS suivante

$$dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t, \qquad X_0 \tag{2.26}$$

o$\grave{u}$ f est borélienne et vérifie

$$\exists \quad K < \infty \quad / \quad | f(t,x) | \leq K(1+ | x |), \quad t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.27}$$

Alors pour toute mesure de probabilité μ définie sur $\mathbb{R}^d$, (2.26) admet une solution faible de loi initial $\mathcal{L}(X_0) = \mu$.

Preuve Considérons l'espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X le processus canonique (annexe D), $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle associée et P_x la loi du mouvement brownien issu de x.

Par la caractérisation de Lévy, nous savons que

$$Z_t = exp(\int_0^t \langle f(s, X_s), dX_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t | X_s |^2 ds)$$

est une $\mathcal{F}_t - P_x$ martingale $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

Le théorème de Girsanov entraine que sous Q_x définie par :

$$\left. \frac{dQ_x}{dP_x} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \quad t \geq 0$$

Le processus :

$$W_t = X_t - x - \int_0^t f(s, X_s) ds$$

est un $\mathcal{F}_t - Q_x$ mouvement brownien avec $Q(W_0 = 0) = 1$ D'où

$$X_t = W_t + x + \int_0^t f(s, X_s) ds \quad t \geq 0.$$

qui est précisément l'équation (2.26). Nous avons donc construit une probabilité Q_x sous cette dernière telle que X est une solution faible de (2.26) avec loi initiale μ.

2.7.5 Proposition(Unicité)

Considérons $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}_t^i, P^i), W^i, X^i \quad (i = 1, 2)$ deux solutions faibles de (2.26) avec même loi initiale. Si pour tout $T > 0$

$$P(\int_0^T | f(t, X_t^i) |^2 dt < \infty) = 1 \quad i = 1, 2 \tag{2.28}$$

Alors (X^1, B^1) (X^2, B^2) admettent la même loi de probabilité.

Preuve Nous nous fixons $T > 0$ pour tout k on définit le temps d'arrêt

$$\tau_k^i = inf\{t \geq 0, \int_0^t \mid f(s, X_s) \mid^2 ds = k\} \wedge T$$

$\tau_k^i \nearrow T$ P^i-p.s quand $k \longrightarrow \infty$.

Posons :

$$\xi_t(X^i) = exp(-\int_0^t \langle f(s, X_s^i), dX_s^i \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \mid f(s, X_s^i) \mid^2 ds)$$

où $\langle , \rangle$ est le produit de $\mathbb{R}^d$
à l'aide du critère de Norikov (1.7) nous avons :

$$E(\frac{1}{2} \int_0^T \mid f(s, X_s) \mid^2 ds) < \infty$$

ce qui montre que $\{\xi_{t \wedge \tau_k^i}(X^i); t \geq 0\}$ est une martingale sous P^i et $E(\xi_t) = 1$.
Nous pouvons donc définir une loi $Q_{T,k}^i$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

$$X_{t \wedge \tau_k^i}^i = X_0^i + \int_0^{t \wedge \tau_k^i} f(s, X_s^i) ds + W_{t \wedge \tau_k^i}^i$$

est un $Q_{T,k}^i$ mouvement brownien.

$Q_{T,k}^i$ est la restriction d'une mesure de probabilité Q_T^i à l'ensemble des processus continus, constants après l'instant τ_k^i et arrêtés en T pour tout k.

Enfin, pour tout n, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < T$ et tout borélien Γ de $\mathbb{R}^{2d(n+1)}$

$$\begin{aligned}
&P^1[X_{t0}^1, W_{t0}^1, ..., X_{tn}^1, W_{tn}^1 \in \Gamma, \tau_k^1 = T] \\
&= \int_{\Omega^1} \frac{1}{\xi_{T \wedge \tau_k}(X^1)} \mathbb{I}_{\{(X_{t0}^1, W_{t0}^1, ..., X_{tn}^1, W_{tn}^1) \in \Gamma, \tau_k^1 = T\}} dQ_{T,k}^1 \\
&= \int_{\Omega^2} \frac{1}{\xi_{T \wedge \tau_k}(X^2)} \mathbb{I}_{\{(X_{t0}^2, W_{t0}^2, ..., X_{tn}^2, W_{tn}^2) \in \Gamma, \tau_k^2 = T\}} dQ_{T,k}^2 \\
&= P^2[X_{t0}^2, W_{t0}^2, ..., X_{tn}^2, W_{tn}^2 \in \Gamma, \tau_k^2 = T].
\end{aligned}$$

La 2^{me} ligne vient de l'observation précédente et du fait que sous $Q_{T,k}$, X^{i,τ_k^i} est un mouvement brownien.

Pour conclure, il suffit de faire tendre k vers ∞.

2.8 EDS et EDP

Nous supposons l'existence de solutions pour certaines équations aux dérivées partielles et nous montrons comment ces solutions peuvent se représenter à l'aide de processus de diffusion.

Soit $P_{t,x}$ la loi sur l'espace canonique sous laquelle

$$dX_s = f(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \leq s \leq \infty, \tag{2.29}$$

o$\grave{u}$ W est un mouvement brownien. Notons $E_{t,x}$ l'espérance associée à $P_{t,x}$. Notons aussi $P_x = P_{0,x}$ et $E_x = E_{0,x}$.

2.8.1 Hypothèses

- Les coefficients f et σ sont continus et à croissance au plus linéaire.

- Pour tout $(t, x) \in [0, \infty[\times\mathbb{R}^d$, l'équation (2.29) admet une solution faible, unique en loi.

Nous nous fixons $T > 0$, $L > 0$, $\lambda \geq 1$ et considérons des fonctions continues $\alpha : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $\beta : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$,$\gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto [0, \infty[$ telles que

$$\begin{cases} |\alpha(x)| \leq L(1 + |x|^{2\lambda}), \\ \alpha(x) \geq 0, \end{cases} \tag{2.30}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et

$$\begin{cases} |\beta(t, x)| \leq L(1 + |x|^{2\lambda}), \\ \beta(t, x) \geq 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

pour tout $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Nous définissons le générateur infinitésimal (2.17) associé à la diffusion (2.29)

$$\mathcal{L}_t\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq d} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{1\leq i,j\leq d} f_i(t, x) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $a = \sigma\sigma^{tr}$.

2.8.2 Théorème

Sous les hypothèses 2.8.1, supposons que $v : \mathbb{R}^d\times[0, T] \mapsto \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^{1,2}([0, T[\times\mathbb{R}^d)$ et vérifie le problème de Cauchy suivant

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma v = \mathcal{L}_t v + \beta sur[0, T[\times\mathbb{R}^d, \quad v(T, x) = \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{2.32}$$

et il est à croissance polynomiale

$$\max_{0\leq t\leq T} v(t, x) \leq M(1 + |x|^{2\mu}), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{2.33}$$

pour des constantes $M > 0$ et $\mu \geq 1$ données. Alors v admet la représentation suivante

$$v(t, x) = E_{t,x} \left[\alpha(X_T)e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)du} + \int_t^T \beta(s, X_s)e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)du} ds\right] \tag{2.34}$$

sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, en particulier une telle solution est unique.

Preuve En appliquant la formule d'Itô au processus $v(s, X_s)e^{-\int_t^s \gamma(u,X_u)du}$ $s \in [t, T]$ et en Introduisant le temps d'arrêt

$$\tau_n = inf\{s \geq t, |X_s| \geq n\}$$

nous obtenons,

$$\begin{aligned} v(t,x) = v(T \wedge \tau_n, X_{T\wedge\tau_n})e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du} - \int_t^{T\wedge\tau_n} \frac{\partial v}{\partial s}(s, X_s)e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du} \\ - \int_t^{T\wedge\tau_n} \mathcal{L}_s v e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du} ds - \int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(s, X_s)v(s, X_s)e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du} ds. \end{aligned}$$

Nous utilisons l'EDP (2.32) donc

$$v(t,x) = \int_t^{T\wedge\tau_n} \beta(s, X_s)e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du} ds + v(T \wedge \tau_n, X_{T\wedge\tau_n})e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du}$$

En passant à l'espérance

$$\begin{aligned} v(t,x) = E_{t,x}\left[\int_t^{T\wedge\tau_n} \beta(s, X_s)e^{-\int_t^{T\wedge\tau_n} \gamma(u,X_u)du} ds\right] \\ + E_{t,x}\left[v(\tau_n, X_{\tau_n})e^{-\int_t^{\tau_n} \gamma(u,X_u)du}\mathbb{I}_{\{\tau_n \leq T\}}\right] \\ + E_{t,x}\left[\alpha(X_T)e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)du}\mathbb{I}_{\{\tau_n \geq T\}}\right]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

L'estimation suivante Est valide pour tout $m \geq 1$

$$E_{t,x} \max_{t \leq r \leq s} \mid X_t \mid^{2m} \leq C(1 + |x|^{2m}) \exp(C(s + t)). \tag{2.36}$$

Par convergence dominée et à l'aide de (2.36) et (2.29), le premier terme du membre de droite converge, quand $n \to \infty$ vers

$$E_{t,x}\left[\int_t^T \beta(s, X_s)e^{\int_t^s \gamma(u,X_u)du} ds\right]$$

Dans le 2 ème terme de (2.35), nous avons en valeur absolue la majoration

$$E_{t,x}(\mid v(\tau_n, X_{\tau_n}) \mid \mathbb{I}_{\tau_n \leq T}) \leq M(1 + n^{2\mu})P(\tau_n \leq T) \tag{2.37}$$

puis d'après (2.36) et l'inégalité de Chebychev

$$\begin{aligned} P_{t,x}(\tau_n \leq T) &\leq P_{t,x}(max_{0\leq r\leq 1}|x_r| \geq n) \\ &\leq n^{-2m}E_{t,x}(\max_{0\leq r\leq 1}|x_r|) \\ &\leq Cn^{-2m}(1 + |x|)\exp(CT) \end{aligned}$$

En choisissant $m > \mu$, le membre de droite de (2.37) converge vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$.
Enfin, le dernier terme de (2.35), converge par convergence dominée vers

$$E_{t,x}\left[\alpha(X_T)e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)du}\right].$$

Ce qui conclut le théorème.

2.8.3 Proposition

Une condition suffisante pour l'existence d'une solution v du problème de Cauchy (2.32) satisfaisant aux conditions de croissance polynomiale (2.33)

- Ellipticité uniforme : Il existe une constante $\delta > 0$ telle que

  $$< y, a(t,x)y >\geq \delta \mid y \mid^2$$

  pour tout x, $y \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$;

- Bornitude : Les fonctions $a(t,x)$,$f(t,x)$,$\gamma(t,x)$ sont bornées sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$;

- Continuité hölderienne : Les fonctions $a(t,x)$,$f(t,x)$,$\gamma(t,x)$,$\beta(t,x)$ sont uniformément hölderienne sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$;

- Croissance polynomiale : Les fonctions $\alpha(x)$et $\beta(t,x)$ vérifient (2.30) et (2.31) respectivement.

Admettons le résultat suivant :

2.8.4 Proposition

Supposons les coefficients bornés, i.e.

$$\mid f_i(t,x) \mid + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2(t,x) \leq K, i = 1, ...d, x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq t \leq T. \tag{2.38}$$

Alors la conditions de croissance polynomiale (2.33) dans le Théorème 2.8.2 peut être remplacée par

$$\max_{0\leq t\leq T} \mid v(t,x) \mid\leq K e^{\mu|x|^2}, x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.39}$$

pour un certain $K > 0$ et $0 < \mu < 1/18\rho T d$.

Chapitre 3

Exemple et simulation

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques est très important, car la résolution analytique n'est pas toujours facile. Cela rend difficile l'étude de l'évolution dynamique d'un phénomène, ou par exemple l'analyse statistique de la variable aléatoire : instant de premier passage (IPP) correspondant à la solution de l'équation, qui sera illustré dans ce chapitre. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des EDS.

Nous utilisons dans le paragraphe qui suit le Logiciel **R** avec le package **Sim**.**DiffProc** avec un sous programme personnel. Nous utilisons également le package **Sim**.**DiffProcGui** établi par Guidoum pour avoir d'autre aspects de la simulation.

3.1 Exemple d'application

3.1.1 Le modèle de Hull-White,Vasicek

Considérons le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de

$$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x \tag{3.1}$$

où r,θ,σ sont des constantes, W est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien.
En posant

$$Z_t = X_t - \theta$$

par La formule d'Itô nous avons

$$\begin{aligned} dZ_t &= dX_t \\ &= r(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t \\ &= -rZ_t dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Le processus Z est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck la solution sous forme intégrale est donnée par

$$Z_t = Z_0 e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW_s.$$

En remplaçant Z_t par $X_t - \theta$, nous obtenons

$$X_t - \theta = (X_0 - \theta)e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

Donc,

$$X_t = X_0 \exp(-rt) + \theta(1 - \exp(-rt)) + \sigma \exp(-rt) \int_0^t \exp(rt) dW_s$$

3.1.2 Simulation numérique des trajectoires

Nous simulons d'abord quelques trajectoires à l'aide du package **Sim.DiffProcGui**

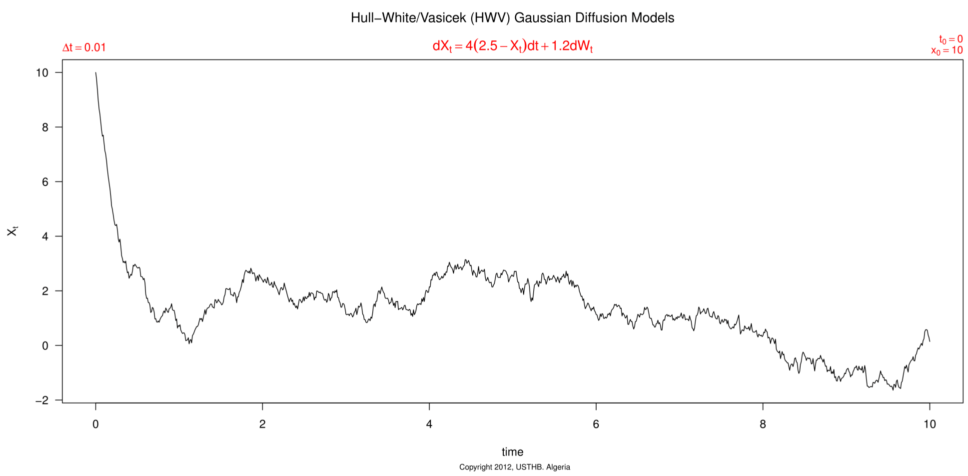

FIGURE 3.1 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2, 5$, r=4, $\sigma = 1, 2$.

Effectuons un changement de paramètres, par exemple, on prend σ plus petite que 1, pour voir l'effet du coefficient de diffusion sur la perturbation de la trajectoire :

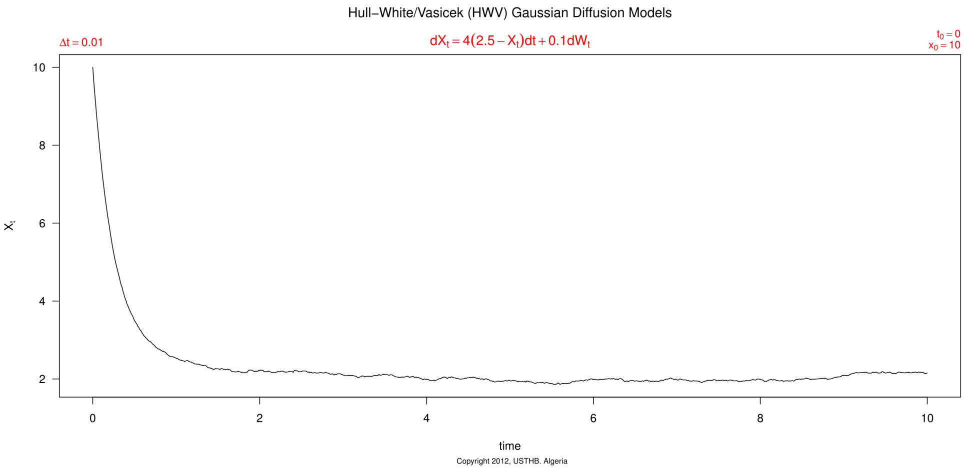

FIGURE 3.2 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2,5$, r=4, $\sigma = 0,1$

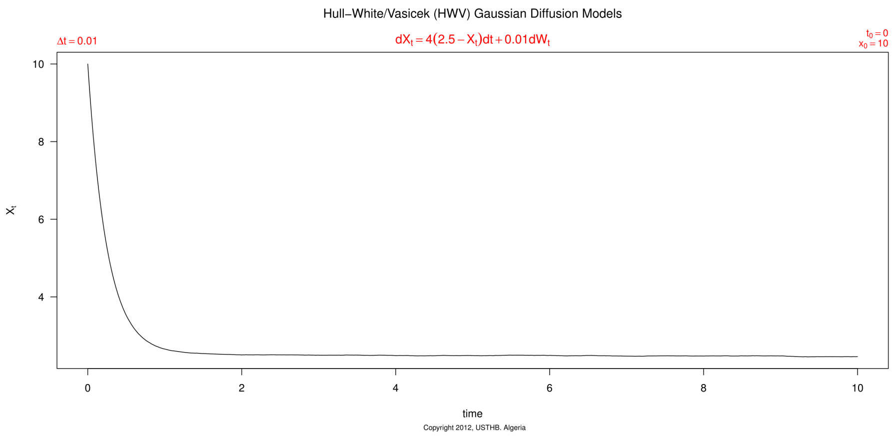

FIGURE 3.3 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2,5$, r=4, $\sigma = 0,01$.

Nous remarquons que les trajectoires [3.2], [3.3] sont plus lisses que la trajectoire [3.1] lorsque σ est plus petite que 1

Nous pouvons aussi utiliser une autre méthode de simulation. La fonction "snssde" permet de simuler numériquement la solution approchée des EDS.

R> help("snssde")
R> example("snssde")
R> snssde(N, M, T = 1, t0, x0, Dt, drift, diffusion)

Détails :

N :	La taille du processus .
M :	Le nombre de trajectoires à simuler.
T :	L'instant final.
t0 :	L'instant initial.
x0 :	La valeur initiale.
Dt :	La discrétisation ou le pas (par défaut $T = t0 + Dt * N$)
Driff :	Coefficient de dérive.
Diffusion :	Coefficient de diffusion.

Utilisons cette méthode pour le modèle de HWV :

R> f<-expression(4*(2.5-x))
R> g<-expression(1.2)
R> res<-snnssde1d(driff=f,diffusion=g,M=1,x0=10,t0=0,T=10,N=1000,Dt=0.01)
R> plot(res,main="Le modèle de Hull-white/Vasicek",xlab="temps",ylab="Xt", sub="Xt=4(2.5-Xt)+1.2dWt")

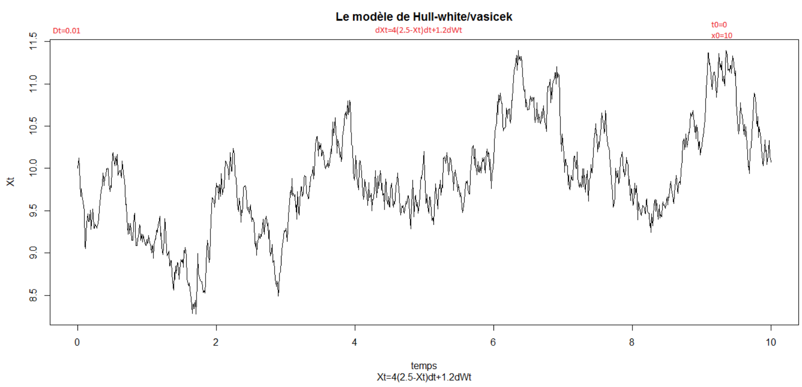

Figure 3.4 – Le modèle de HWV avec $\theta = 2,5$, r=4, $\sigma = 1,2$

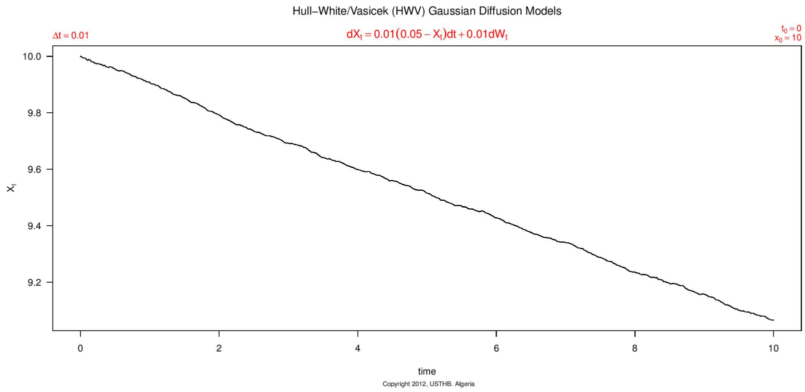

FIGURE 3.5 – Le modèle de HWV avec $\theta = 0.05$, r=0.01, $\sigma = 0.01$

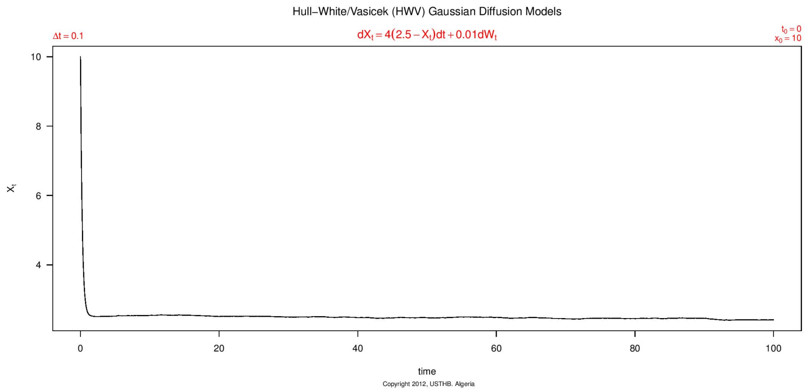

FIGURE 3.6 – Le modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, r=4, $\sigma = 0.01$.

Interprétation : Pour un ω fixé de manière aléatoire la simulation nous permet de mettre en évidence l'idée que la trajectoire de $X_t(\omega)$ est de plus en plus lisse "presque dérivable" quand σ est proche de 0 (réduction de la perturbation), de plus si on prend σ nul l'équation différentielle stochastique devient une équation différentielle ordinaire dont la trajectoire de sa solution est complètement lisse "dérivable".

Conclusion

Dans ce travail, Nous avons défini la notion de solution d'une équation différentielle stochastique ainsi que ses propriétés. Nous avons démontré le théorème d'existence et d'unicité. Dans l'étude des diffusions nous avons vu que la propriété de Markov affirme que l'état X_t en un temps donné t détermine univoquement le comportement à tous les temps futurs. Ceci permet de démontrer la propriété de semi groupe, cette dernière peut être caractérisées par son générateur, qui s'avère être un opérateur différentiel du second ordre dans le cas des diffusions. Il en résulte un ensemble de liens importants entre les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles.

Nous avons traité le modèle de HWV, et les package Sim.DiffProc et Sim.DiffProcGui du logiciel R, ce qui nous a permis, moyennant une petite programmation de tracer quelques trajectoires de ce processus et d'en tirer quelques conclusions quant au rôle de la perturbation.

Annexe

A. Lemme de Gronwall

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$ tels que

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp(bt), \quad t \geq 0$$

B. Lemme

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,$\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, $\{Z_x ; x \in \mathbb{R}^k\}$ une fonction aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de la tribu $\mathcal{G}$ et ξ un vecteur aléatoire $\mathcal{G} - mesurable$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Alors,pour toute application $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée

$$E(\varphi(Z_x) \setminus \mathcal{G}) = E(\varphi(Z_x) \setminus \xi). \tag{3.3}$$

C. Temps d'arrêt

Une variable aléatoire τ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \qquad \forall\ t \geq 0.$$

D. Processus canonique

Soit X un processus à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. $\mu_n = \mathcal{L}(X_0, ..., X_n)$ c'est une probabilité sur $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{\otimes}(n+1))$, on note $\pi_{n+1,n}$ la projection canonique de x^{n+1} donc

$$\pi_{n+1}(\mu_n) = \mu_{n-1}$$

$(\mu_n)_{n\geq 0}$ s'appelle les répartitions finies (les lois de dimension finies) du processus X.

Réciproquement, on se donne μ_n sur $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{\otimes}(n+1))$ vérifiant

$$\mu_{n-1}(A_0 \times A_1 \times ... \times A_{n-1}) = \mu_n(A_0 \times A_1 \times ... \times A_{n-1} \times E) \tag{3.4}$$

avec $A_k \in \mathcal{E}$.
On introduit l'espace canonique

$$\Omega = E^N, \quad \omega = (\omega_n)_{n\geq 0}, \quad X_n(\omega) = \omega_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n), \quad \mathcal{F} = \sigma(X_k, k \geq 0) \tag{3.5}$$

Soit $A \in \mathcal{F}_n$, alors $A = B \times E \times E... \times E \times ...$ avec $B \subset\in \mathcal{E}^{\otimes} n+1$, on définit alors une probabilité P_n sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$, en posant

$$P_n(A) = \mu_n(E)$$

on définit

$$P(A) = P_n(A), \quad si \quad A \in \mathcal{F}_n.$$

En suite il est question de prolonger P en une probabilité sur $\sigma(\cup_n, \mathcal{F}_n)$. L'existence de ce prolongement à été montrer par Kolmogorov et on a

Théorème

Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une famille de probabilité sur $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{\otimes(n+1)})$ vérifiant (3.4). Il existe une unique probabilité sur l'espace canonique $(\Omega, \mathcal{F})$ défini par (3.5) telle que $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n\geq 0}, P)$ soit un processus de lois de dimensions finies $(\mu_n)_{n\geq 0}$, c'est ce processus qu'on appelle processus canonique.

Bibliographie

[1] Bass, R.F. *Diffusion and Elliptic Operators. Probability and its Application*Editors :J.Gani,C.C.Heyde,T.G.Kurtz 1997.

[2] Breton, J.C. *Calcul stochastique.* M2 Mathématique. Université de Rennes 1. Septembre-Décembre 2014.

[3] Campillo, F. *Processus de diffusion.* DEA de Mathématiques Appliquées. Université de Provence ,1996

[4] Guidoun, A.*Conception d'un Pro Logiciel Interactif sous R pour la Simulation de Processus de Diffusion.* https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00735806. Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister. Sep 2012.

[5] Hadjou Belaid, A. *Estimation Paramétrique dans une Petite Diffusion* Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master. 2015.

[6] Jean, M. Simon, B.T. *Élément de calcul stochastique.* Cours. IRBID. Septembre 2005.

[7] Oksendal, B.,*Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications* Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg New York 1997.

[8] Priouret, P. *Introduction aux processus de diffusion.* Mathématiques et Applications. Université Pierre et Marie Curie. 2004/2005.

[9] REVUZ, D., YOR, M., *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 2000h : 60050.