

# LINEARISATION APPROXIMATIVE PAR FEEDBACK POUR UN MODELE DE PENDULE INVERSE

M. Latfaoui , B. Cherki

Laboratoire d'Automatique de Tlemcen  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur - Université Abou Bekr Belkaïd  
BP230 - Tlemcen 13000,Algérie  
E-mail : {m\_latfaoui , cherki}@mail.univ-tlemcen.dz

## RESUME

L'application des algorithmes de linéarisation approximative par feedback constitue une alternative à la linéarisation exacte par feedback. Le jacobien étant insuffisant pour la commande du pendule inversé pour un angle initiale relativement élevée, nous avons appliqué l'algorithme de Hunt afin de remédier à cet inconvénient.

**Mots clés :** systèmes non linéaires, linéarisation exacte par feedback, crochet de Lie, linéarisation approximative.

## I- Introduction et notions de bases

La linéarisation exacte par *feedback* des systèmes non linéaires nécessite la vérification (au voisinage d'un point d'équilibre) des deux conditions telles que la condition de commandabilité et la condition d'involutivité. Ces deux conditions sont rarement vérifiées par les systèmes physiques. Pour pallier à cet inconvénient, différents auteurs se sont intéressés à linéariser approximativement par *feedback* les systèmes non-linéaires. Nous pouvons citer les travaux de Krener [1], Hunt *et al* [2], Banaszuk [3] et Wei Kang [4].

Dans cet article nous proposons d'étudier deux techniques de linéarisation approximative, à savoir le jacobien et l'algorithme de Hunt appliquées sur un modèle du pendule inversé qui représente un systèmes fortement non linéaire, en plus, il n'est pas linéarisable exactement par feedback, donc il représente un bon modèle sur lequel nous pouvons tester les méthodes approximatives.

Nous montrons que la linéarisation du pendule inversé par l'algorithme de Hunt donne de meilleurs résultats que ceux obtenus par le jacobien.

A l'aide de simulations sous MATLAB-Simulink, nous montrons que le pendule inversé peut être linéarisé approximativement. Une commande stabilisante calculée à partir de la linéarisation approximative est appliquée au modèle complet donne de très bons résultats.

### I.1 Définitions

Soient  $f$  et  $g$  des champs de vecteurs de  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le crochet de Lie résultant de  $f$  et  $g$  est un champ de vecteur donné par la relation :

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (1)$$

où :  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial x}$  sont les matrices Jacobiennes de dimension  $(n \times n)$  de  $f$  et  $g$  respectivement.

On définit les crochets de Lie itérés, par la relation suivante :

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g], k \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

$$\text{avec } ad_f^0 g(x) = g(x)$$

La dérivée de Lie d'une fonction  $\lambda(x)$  le long d'un champ de vecteur  $f$  de  $C^\infty$ , est donnée par l'expression suivante :

$$L_f h(x) = \langle dh, f \rangle$$

Une distribution  $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_r\}$  de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$  est dite involutive si et seulement si :  $\forall f_i, f_j \in \Delta, i \neq j : [f_i, f_j] \in \Delta \quad 1 \leq i, j \leq r$

Les systèmes dynamiques non linéaires étudiés dans cet article ont la forme suivante:

$$\dot{x} = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i \text{ et } y = h(x(t)) \quad (3)$$

où  $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$  et  $y \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$

### I.2 Degré relatif

Dans le cas des systèmes non linéaires mono variables, c'est à dire  $m=1$ , on dit qu'un système a un degré relatif  $r$  en  $x_0$ , s'il vérifie les deux conditions suivantes:

$$i) L_g L_f^k h(x) = 0 \text{ pour tous } x \text{ voisin de } x_0 \text{ et } k < r-1.$$

$$ii) L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0.$$

Donc le degré relatif d'une sortie est en fait l'ordre de dérivation minimale de la sortie nécessaire pour faire apparaître explicitement l'entrée.

## II. Linearisation Exacte Par Feedback

L'idée principale de la linéarisation exacte par feedback est de transformer les dynamiques d'un système non linéaire en dynamique linéaire à l'aide d'une commande par retour d'état et d'un changement

de coordonnées sur l'état de système, de sorte que les techniques de contrôle linéaires peuvent être appliquées.

### II.1 Linéarisation Exacte entrée sortie

Le problème de la linéarisation exacte entrée sortie est basé sur la recherche d'une transformation non linéaire qui transforme le modèle (1) en un modèle linéaire à l'aide d'une commande par retour état. La propriété de linéarité, dans ce cas, devrait être établie entre une nouvelle commande  $v$  et la sortie  $y$ .

Pour le cas des systèmes mono-variable, l'approche pour obtenir une relation linéaire entrée-sortie est de dériver successivement la sortie jusqu'à ce que l'entrée apparaisse, donc :

$$y = h(x) ;$$

$$\dot{y} = L_f h(x) ;$$

$$y^{(2)} = L_y^2 h(x) ;$$

.....

$y^{(n)} = v$ ; avec  $v = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x)u$ , dans le cas où le système a un degré relatif  $r=n$ .

Si on pose  $z=h(x)$  et  $\dot{z}_i=z_{i+1}$  pour  $i=1,\dots,m-1$ , alors nous avons la forme canonique de BRUNOVSKY suivante :  $\dot{z}=Az+bv$  où  $(A,b)$  est sous la forme canonique de commandabilité de BRUNOVSKY.

Alors, le problème de linéarisation exacte entrée sortie est résolu si et seulement si le système non linéaire (1) a un degré relatif  $r$  égal à  $n$  en  $x_0$ .

Si on définit les distributions :

$G_i = \text{Span}\{ad_f^k g_i : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}$  pour  $0 \leq i \leq n-1$ , alors les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système non linéaire soit linéarisable exactement par feedback sont données par le théorème suivant :

**Théorème :** étant donné le modèle non linéaire suivant

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u, \text{ où } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \text{ avec le rang de } g(x_0)=m.$$

Le problème de linéarisation par feedback possède une solution si est seulement si :

i/  $G_i$  a une dimension constante autour de  $x_0$  pour chaque  $0 \leq i \leq n-1$ .

ii/  $G_{n-1}$  a une dimension  $n$ .

iii/  $G_i$  est involutive pour tous  $0 \leq i \leq n-2$ .

### III Linéarisation Approximative par Feedback

Pour qu'un système physique soit linéarisable exactement par feedback, il doit vérifier les deux conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité et involutivité, ce qui n'est pas le cas pour la plupart des systèmes non linéaires.

Pour cette raison plusieurs auteurs se sont intéressés à la linéarisation approximative par feedback, en cherchant des algorithmes où des techniques

permettant de linéariser approximativement le système (3).

Dans cet article, nous avons étudié deux méthodes de linéarisations approximatives appliquées sur un modèle de pendule inversé:

- La linéarisation par le jacobien
- L'algorithme de Hunt,

### III.1 Linéarisation par le jacobien

La méthode de linéarisation formalise l'intuition qu'un système non linéaire se comporte de manière identique à son approximation linéaire autour d'un point d'équilibre. Elle constitue une justification de l'utilisation des techniques du contrôle linéaire.

Considérons un système forcé autonome tel que  $f$  est continuellement différentiable, alors le système dynamique peut s'écrire :

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=0} u + O(x,u), \text{ où } O(x,u) \text{ contient les termes d'ordre élevés.}$$

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} \text{ le jacobien de } f \text{ en } x=0 \text{ et } B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=0}.$$

Le système  $\dot{x} = Ax + Bu$  est appelé linéarisation (ou approximation linéaire) du système non linéaire d'origine au point d'équilibre 0.

En pratique on néglige le plus souvent les termes d'ordre élevés.

### III.2 Algorithme de Hunt, cas des systèmes SISO

Si le système (3) a un degré relatif égal à  $n$  dans le cas où la sortie est définie, ou s'il vérifie les conditions nécessaires de commandabilité et d'involutivité, alors ce système peut être transformé en un système linéaire écrit sous la forme canonique de commandabilité suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v, \text{ ou}$$

$$\dot{z} = Az + bv$$

Dans le cas contraire, où  $r < n$ , le système peut être transformé approximativement en un système linéaire donné par l'équation suivante :

$$\dot{z} = Az + Bv + O(x,u)^\rho \quad (4)$$

où la partie linéaire est toujours écrite sous la forme canonique de commandabilité. Le système (4) est appelé le système linéaire d'ordre  $\rho-1$  d'après KRENER [1].

L'expression suivante peut être démontrée facilement

$$\left\langle dL_f^i z, g \right\rangle = O(x)^\rho, i = 0, \dots, n-2 \quad (5)$$

$$L_f^{i-1} z_1 = z_i, 1, \dots, n-1$$

$$v = L_f^{n-1} z_1 + L_g L_f^{n-2} z_1 u \quad (6)$$

Le but de cet algorithme est de déterminer la variable principale  $z_1$ , une fois cette variable est déterminée, le reste des variables est déterminé par la dérivation successive de  $z_1$  et la nouvelle commande est toujours donnée par la relation (6).

Pour déterminer la variable principale  $z_1$ , nous avons appliqué un algorithme très simple à implémenter développé par HUNT et TURI donné comme suit :

Dans la première étape on écrit la variable principale sous la forme d'un polynôme homogène de degré 1, on suppose alors que le système  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  est

$$\text{linéarisable au premier ordre, donc } z_1 = \sum_{p=1}^n c_p x_p$$

Les constantes  $c_p, p=1, \dots, n$ , sont déterminées à partir de l'équation

$$\langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x)^\rho, i = 0, \dots, n-2 \quad (7)$$

avec  $\rho=1$

En remplaçant  $z_1$  par son expression, le système (7) devient

$$\langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x), i = 0, \dots, n-2$$

L'étape suivante consiste à linéariser le système non linéaire initial à l'ordre 2, dans ce cas, la variable principale est décrite sous la forme suivante :

$$z_1 = \sum_{p=1}^n c_p x_p + \sum_{p,q=1}^n c_{pq} x_p x_q \quad (8)$$

Les constantes  $c_p, p=1, \dots, n$  sont déterminées dans l'étape précédente, et les autres constantes  $c_{pq}$  sont choisies de telle manière que le système d'équations  $\langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x)^\rho, i = 0, \dots, n-2$  soit vérifié en remplaçant  $z_1$  par son expression (8) avec  $\rho=2$  c.à.d

$$\langle dL_f^i z_1, g \rangle = O(x)^2, i = 0, \dots, n-2$$

En répétant la même procédure jusqu'à l'étape  $\rho$  dans cette étape,  $z_1$  est décrit par :

$$z_1 = \sum_{p=1}^n c_p x_p + \sum_{p,q=1}^n c_{pq} x_p x_q + \dots + \sum_{|l|=1}^n c_{l_1 \dots l_n} x_{l_1} \dots x_{l_n}$$

Où  $l=(l_1, \dots, l_n)$  désigne le multi-indices d'ordre

$$|l| = \sum_{i=1}^n l_i \text{ et } x_l = x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_n}$$

Une fois la variable principale  $z_1$  est déterminée alors nous avons un système linéaire décrit sous la forme canonique de commandabilité.

Dans ce que suit nous allons avoir l'application de ces deux méthodes sur un modèle de pendule inversé, et nous comparons les résultats obtenus.

#### IV. Application sur un modèle de pendule inversé

Le pendule inversé est un problème classique de

régulation d'un système instable en boucle ouverte, de plus, c'est un exemple abondamment utilisé pour illustrer et tester des lois de commande et d'observation basées sur différentes techniques. Son expérience consiste en un chariot mobile sur lequel est attaché, à travers une charnière l'extrémité d'une tige formant ainsi le pendule.

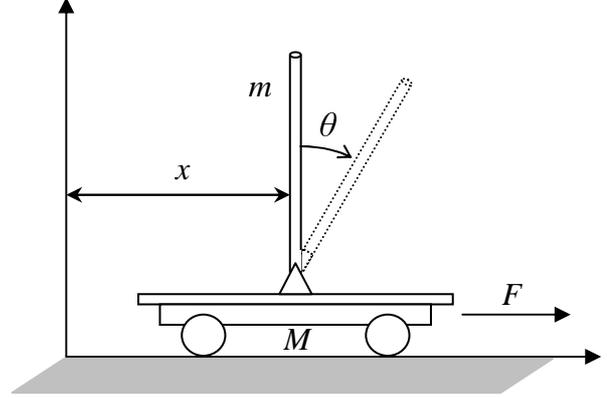


Figure 1 : Pendule inversé

Le modèle dynamique de l'ensemble chariot-pendule est décrit par les équations suivantes.

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\Delta} [m^2 l^2 g \cos x_2 \sin x_2 - F v_1 m l \cos x_2 x_4$$

$$- F s_1 m l \cos x_2 \text{sign}(x_4) - (I + m l^2) m l \sin x_2 x_4^2$$

$$+ (I + m l^2) F v_2 x_3 + (I + m l^2) F s_2 \text{sign}(x_3)$$

$$+ (I + m l^2) \frac{K_1 K_2}{R_a r^2} x_3 - (I + m l^2) \frac{K_1}{R_a r} e]$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{\Delta} [(M + m) m g l \sin x_2 - (M + m) F v_1$$

$$x_4 - (M + m) F s_1 \text{sign}(x_4) - m^2 l^2 g \cos x_2 \sin x_2 x_4^2$$

$$+ m l \cos x_2 F v_2 x_3 + m l \cos x_2 F s_2 \text{sign}(x_3)$$

$$+ m l \cos x_2 \frac{K_1 K_2}{R_a r^2} x_3 - m l \cos x_2 \frac{K_1}{R_a r} e]$$

$$\Delta = M m l^2 + I (M + m) + m^2 l^2 \sin^2 x_2$$

où le vecteur d'état est donné par :  $X = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$ .

$M$  : la masse du chariot.

$m$  : la masse du pendule.

$l$  : la distance entre le centre de rotation et le centre de gravité de la tige.

$h$ : la hauteur de l'axe de rotation par rapport au sol, de valeur constante.  
 $r$ : le rayon de la roue du véhicule.  
 $\theta$ : la dérivation du pendule par rapport à la verticale.

Puisque le modèle dynamique du pendule inversé ne vérifie pas la condition d'involutivité, alors, nous allons essayer de trouver un modèle linéaire approché du pendule inversé, en appliquant les deux approches étudiées précédemment.

#### IV.1 Linéarisation du pendule inversé par le jacobien

Dans cette partie nous cherchons le modèle linéaire approché autour du point d'équilibre en négligeant les effets non linéaires, pour cela nous supposons

$$\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \\ \dot{\theta} \approx 0 \end{cases} \quad (9)$$

Autour du point d'équilibre, de même, nous négligeons l'inertie, les effets des frottements visqueux et les effets des frottements secs dans le modèle car ces derniers ne sont pas dérivables. Le système linéaire approché obtenu est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{mg}{M} x_2 - \frac{K_1 K_2}{M R_a r^2} x_3 + \frac{K_1}{M R_a r} e \\ \dot{x}_4 &= -\frac{(M+m)}{M l} g x_2 + \frac{K_1 K_2}{M l R_a r^2} x_3 - \frac{K_1}{M l R_a r} e \end{aligned}$$

En appliquant au pendule inversé une loi de commande stabilisante par placement de pôles de type  $u = -Kx$  telle que le spectre de  $(A - BK)$  égale le spectre désiré  $\Lambda$ . Pour illustrer l'influence de la position des pôles, nous choisissons deux spectres pour la commande par placement de pôles, par exemple

$$\sigma_1 = [-5, -6, -7, -8]; \sigma_2 = [-7, -8, -10, -11];$$

Nous remarquons que pour le premier spectre  $\sigma_1$  proche de la région de stabilité, nous pouvons commander le pendule inversé jusqu'à un angle initial  $\theta_0 = 17.85^\circ$ , même en tenant compte des frottements secs nous pouvons commander jusqu'à  $\theta_0 = 17.73^\circ$ , cela est dû en grande partie au choix judicieux du spectre  $\sigma_1$ , même si l'ajout de ces frottements entraîne des oscillations autour du point d'équilibre.

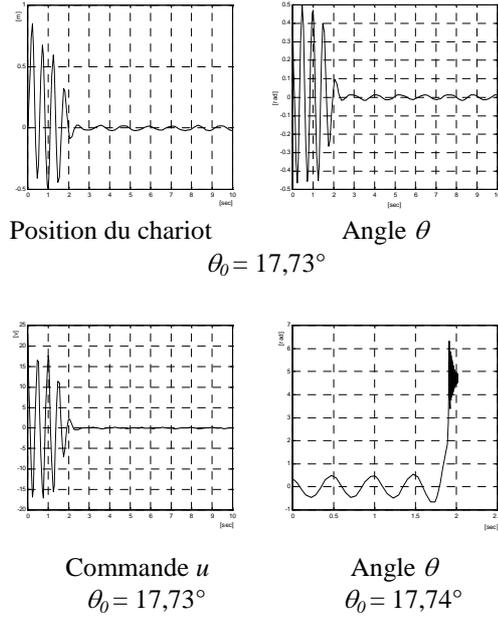


Figure 2 : Les différents résultats pour le premier spectre  $\sigma_1$

Le deuxième spectre  $\sigma_2$  par contre correspondant à des gains plus élevés que dans le premier cas, ne permet pas de commander le pendule inversé par le jacobien pour un angle initial supérieur à  $4.39^\circ$ .

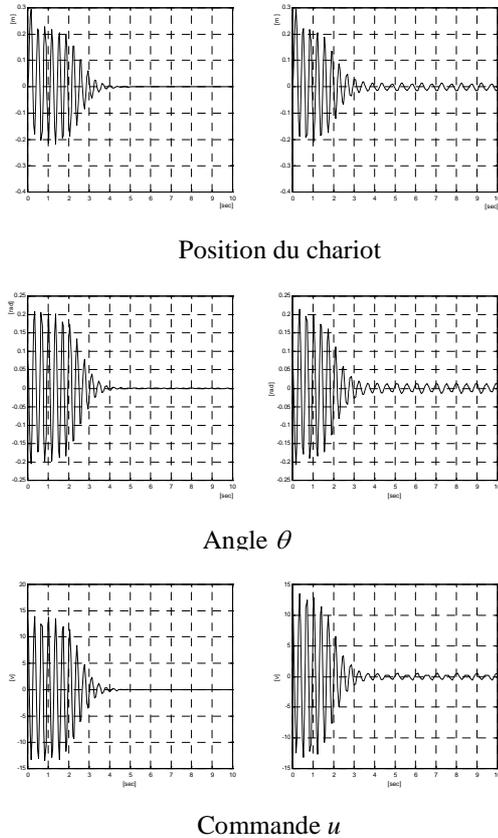


Figure 3 : Les différents résultats pour le deuxième spectre  $\sigma_2$

## IV.2 Linéarisation par l'algorithme de Hunt :

La deuxième technique appliquée est la linéarisation du pendule inversé par l'algorithme de HUNT. L'une des difficultés de cet algorithme est la détermination de l'ordre d'involutivité de l'ensemble  $\{g, (adf, g), (ad^2 f, g)\}$  à cause de la complexité du modèle dynamique du pendule inversé.

A cet effet, nous essayons d'appliquer cet algorithme en fixant dès le début l'ordre de linéarisation  $\rho$ , par exemple nous fixons  $\rho=1$  car ne savons pas quel ordre le système est linéarisable.

Après tout calcul fait, la variable principale est donnée par l'expression suivante

$$Z_1 = x_1 + 1.0412342856x_2 + 0.01061841544x_3 + 0.01104451335x_4$$

le reste des variables est déterminé par les dérivées successives de  $z_1$  c'est à dire

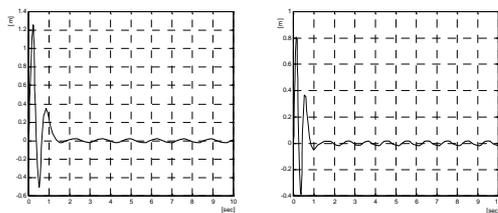
$$\begin{cases} z_2 = L_f z_1 \\ z_3 = L_f^2 z_1 \\ z_4 = L_f^3 z_1 \end{cases}$$

et la nouvelle commande est donnée par

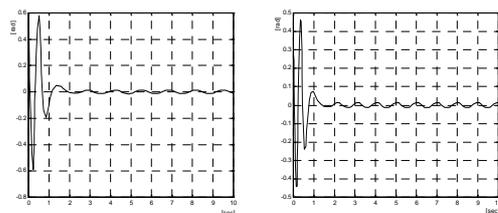
$$v = L_f z_4 + u L_g z_4.$$

Une fois le système linéaire déterminé, nous appliquons au modèle une loi de commande stabilisante par placement de pôles (les spectres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  précédemment utilisés) et nous essayons de comparer les résultats obtenus dans ce cas avec ceux de la linéarisation par le jacobien.

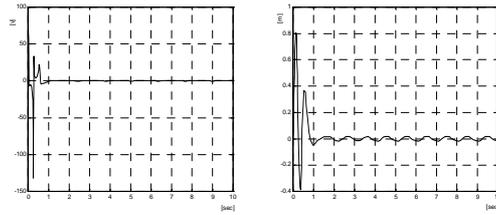
L'avantage majeure de l'algorithme de Hunt réside dans le fait qu'il permet de stabiliser le pendule inversé à partir d'un angle initial pouvant atteindre  $26.4^\circ$  même si cela se fait au prix d'une commande très importante.



Position du chariot



Angle  $\theta$



Commande  $u$

Figure 3 : Les résultats de l'algorithme de Hunt pour  $\sigma_2$

L'autre avantage de la commande issu de l'algorithme de Hunt apparaît lors de l'utilisation du second spectre  $\sigma_2$  (correspondant à des gains plus grands) dans l'élaboration de la commande, en effet, l'angle initial reste suffisamment grand  $17^\circ$  (contre  $\theta_0=4.39^\circ$  pour la commande par le jacobien) et les oscillations demeurent faibles lors de l'introduction des frottements secs, lorsque nous les comparons à celles de la commande par le jacobien. L'inconvénient certain de la commande de Hunt est sa difficulté d'implémentation due à la complexité algorithmique nécessitant un temps de calcul bien plus important que pour un retour d'état classique tel que la commande par jacobien.

## V. CONCLUSION

Dans cet article, nous nous sommes intéressés sur la linéarisation du pendule inversé par le jacobien et l'algorithme de Hunt. Il est évident que la linéarisation par le jacobien permet de stabiliser le pendule inversé pour un angle initial considérable pour un petit spectre. Cependant, pour différents spectres et pour un angle initial relativement élevé, l'application du jacobien donne des résultats insuffisants.

En revanche, l'algorithme de Hunt nous permet la stabilisation du pendule inversé par une commande de placement de pôles, pour les différents spectres. Les résultats obtenus par cet algorithme se révèlent très satisfaisants et encourageants.

## REFERENCES

- [1] A.J.Krener "Approximate linearization by state feedback and coordinate change". *Syst. Contr. Letters*, Vol. 5, pp.181-185, 1984.
- [2] L.R.Hunt and J.Turi "A new algorithm for constructing Approximate Transformations for nonlinear systems". *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol 38, No.10, pp.1553-1556, 1993.
- [3] A. Banaszuk and J.Hauser "Least squares Approximate Feedback linearization: A Variational Approach". *Proc 32<sup>nd</sup> IEEE CDC*, San antonio, Texas, pp. 2760-2765,1993
- [4] W. Kang "Approximate linearisation of nonlinear control systems", *Syst. Contr. Letters*, No 23, pp. 1587-1599, 1994.

