

Linéarisation au Sens des Moindres Carrées d'un Système Non Linéaire Excité – Application à une Jonction Non Linéaire de Type Josephson

M.F. Bendahmane¹, T. Benouaz², N. Ghouali²
Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen
B.p 119, Tlemcen R.P. 13000, Algérie

Résumé— Le but de ce travail est d'appliquer une procédure de linéarisation optimale à un système physique non linéaire excité.

Nous présentons une étude d'un circuit électronique non linéaire excité et où la non linéarité provient de la présence d'une jonction de type Josephson.

Mots clés— Système non linéaire – E.D.O – Dérivée optimale – Excitation – Jonction Josephson.

I. INTRODUCTION

Une classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires est celle caractérisant le comportement des circuits électroniques. Parmi l'infinité de dépendances temporelles possibles, les circuits en régime libre et les circuits avec excitation sinusoïdale jouent un rôle important.

Les systèmes en régime libre servent surtout à modéliser le comportement des circuits en l'absence de signaux. C'est l'état d'équilibre du circuit avant qu'il ne soit excité par un signal de durée finie et le retour à l'état d'équilibre après l'injection de celui-ci. Les systèmes avec excitation sinusoïdale modélisent surtout des circuits de distribution d'énergie électrique et des circuits de transmission de signaux modulés. Une des caractéristiques les plus importantes du comportement d'un circuit est sa ou ses solutions de régime. La solution de régime est surtout dictée par le comportement asymptotique des sources qui dépendent du temps.

On s'intéresse, dans cette étude aux systèmes physiques modélisant des circuits électroniques avec excitation qui sont en général décrits par des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On applique la méthode de dérivation optimale introduite par Arino–Benouaz [12, 13, 16, 18, 15], et on fait une comparaison à partir de l'erreur quadratique entre le système non linéaire et l'application linéaire optimale obtenue [20].

II. PROBLEMATIQUE

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

ou

$x = (x_1, \dots, x_n)$ la fonction inconnue,

$u = (u_1, \dots, u_n)$ représente l'excitation qui peut être constante (continue), ou variable en fonction du temps (source sinusoïdale),

$f = (f_1, \dots, f_n)$ est une fonction définie dans un certain ouvert Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n .

En l'absence de toute excitation ($u(t) = 0$) le système est au point d'équilibre.

Nous avons les hypothèses suivantes :

H1) $F(0,0) = 0$.

H2) F est continue, Lipchitzienne, de constante de Lipchitz γ .

H3) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re } z < 0\}$ pour tous $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

Le problème que nous nous posons peut être traduit comme suit :

– Trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

¹ Laboratoire de Télécommunications

² Laboratoire d'Automatique

approchant l'équation non linéaire (1) aux mêmes conditions initiales et telle que la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t), u(t)) - Ax(t) - Bu(t)\|^2 dt \quad (3)$$

soit minimale. $F(x(t), u(t))$ étant comme au-dessus, et $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in M_n(\mathbb{R}^n)$ à déterminer.

Le problème ainsi posé est de type optimisation au sens des moindres carrés, le but étant de chercher à remplacer l'équation initiale non linéaire par une équation linéaire. Cela veut dire : chercher à faire une approximation de la solution du système (1) par celle de (2). La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ par rapport à A et B se fait par rapport à des solutions issues du point initial et tendent vers la solution de régime quand $t \rightarrow +\infty$.

III. FORMALISME

La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ est obtenue en calculant la différentielle par rapport à A et B . cette minimisation nous permet de calculer les matrices optimales \tilde{A} et \tilde{B} , telle que

$$\begin{cases} DG(A)\alpha = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t)), \alpha x(t) \rangle dt \\ DG(B)\beta = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t)), \beta u(t) \rangle dt \end{cases} \quad (4)$$

pour toutes matrices α et β , en particulier pour les matrices telle que

$$\begin{cases} \alpha_{l,m} = 1; \alpha_{ij} = 0 \\ \beta_{l,m} = 1; \beta_{ij} = 0 \end{cases} \text{ si } (i, j) \neq (l, m) \quad (5)$$

Après calculs [16,18], et en posant

$$\begin{cases} \Gamma_A(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \\ \Gamma_B(u) = \int_0^{+\infty} [u(t)][u(t)]^T dt \\ \Phi_A(u, x) = \int_0^{+\infty} [u(t)][x(t)]^T dt \\ \Phi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} [x(t)][u(t)]^T dt \\ \Psi_A(x, u) = \int_0^{+\infty} [F(x(t), u(t))][x(t)]^T dt \\ \Psi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} [F(x(t), u(t))][u(t)]^T dt \end{cases} \quad (6)$$

on obtient

$$\begin{cases} A\Gamma_A(x) + B\Phi_A(u, x) = \Psi_A(x, u) \\ A\Phi_B(x, u) + B\Gamma_B(u) = \Psi_B(x, u) \end{cases} \quad (7)$$

Ce qui nous permet d'avoir les matrices A et B , tel que

$$\begin{cases} A = [\Psi_A(x, u) - (B)\Phi_A(u, x)][\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B = [\Psi_B(x, u) - (A)\Phi_B(x, u)][\Gamma_B(u)]^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

Les matrices A et B sont définies et uniques à condition que les fonctions $\Gamma_A(x)$ et $\Gamma_B(u)$ soient inversibles.

IV. PROCEDURE DE CALCUL

A. Schéma de la procédure de la dérivée optimale

Le schéma de la procédure de la dérivée optimale est donné dans le diagramme suivant

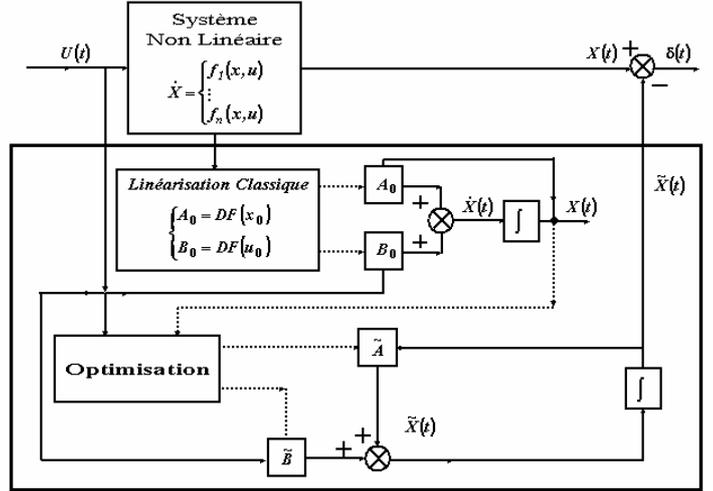


Figure.1. Schéma de la procédure de la dérivée optimale

B. Procédure de calcul.

On va utiliser le calcul précédant de manière itérative. On suppose que les matrices successives A_j et B_j sont de type stable, leur spectre est contenu dans $\{z : \text{Re}z < 0\}$. Les matrices initiales A_0 et B_0 sont respectivement les matrices Jacobienne de F en x_0 ou $DF(x)$ existe, et en u_0 ou $DF(u)$ existe. x_0 étant la condition initiale et u_0 représente l'excitation à l'instant $t = 0$.

Considérons le système (1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Première étape

$$\text{Calcul de } \begin{cases} A_0 = DF(x_0) \\ B_0 = DF(u_0) \end{cases}$$

Deuxième étape

Calcul de A_1 et B_1 à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_0 y(t) + B_0 v(t) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (9)$$

qui s'écrit sous la forme suivante

$$y(t) = e^{A_0 t} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_0} B_0 v(s) ds \quad (10)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t), v(t)) - Ay(t) - Bv(t)\|^2 dt. \quad (11)$$

A_1 et B_1 sont déterminées de manière unique par le système d'équations (8), où x est remplacé par y et $v(t)$ étant l'excitation à l'instant t .

On voit ainsi que mis à part les matrices initiales, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices Jacobienne de F en un point donné. Par la suite, il est nécessaire que les conditions du début de cette étude soient satisfaites à chaque pas. Si nous supposons que cela est vrai alors, la procédure marche comme suit

Troisième étape

Pour calculer A_j à partir de A_{j-1} et B_j à partir de B_{j-1} , on doit d'abord résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [A_{j-1}] y(t) + [B_{j-1}] v(t) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (12)$$

On notera y_j la solution de l'équation (12) qui s'écrit

$$y_j(t) = e^{A_{j-1}t} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_{j-1}} B_{j-1} v_j(s) ds \quad (13)$$

et v_j est l'excitation à l'instant t .

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t), v_j(t)) - A y_j(t) - B v_j(t)\|^2 dt \quad (14)$$

conduit à

$$\begin{cases} [A_j] = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), v_j(t))] [y_j(t)]^T dt - [\Gamma(y_j)]^{-1} \right. \\ \left. (B_j)(\phi(v_j, y_j)) \right] \\ [B_j] = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), v_j(t))] [v_j(t)]^T dt - [\Gamma(v_j)]^{-1} \right. \\ \left. (A_j)(\phi(y_j, v_j)) \right] \end{cases} \quad (15)$$

Si les suites (A_j, B_j) convergent, alors (\tilde{A}, \tilde{B}) représentent la dérivation optimale de $F(x(t), u(t))$ au point (x_0, u) .

V. APPLICATION

On présente dans cette section une application relative à la procédure de la dérivée optimale d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec excitation.

Celle-ci va nous permettre d'illustrer par des courbes et de comparer par un calcul d'erreur quadratique, les résultats obtenus.

On considère, pour cette application, le cas d'un système physique modélisant un circuit électronique simple. Soit le circuit suivant

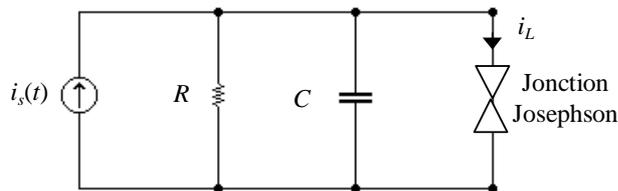


Figure.2. Circuit électronique avec une jonction non linéaire

C'est un circuit présentant deux variables d'état (la chute de tension v_C aux bornes de la capacité et le flux ϕ_L) et dont le caractère non linéaire provient de la présence d'une jonction dite de Josephson qui est en fait équivalente à une inductance non linéaire. Le courant qui passe à travers cette jonction s'écrit

$$i = I_0 \sin(K\phi) \quad (16)$$

ou ϕ représente le flux, $k=4\pi e/h$ est la constante de Josephson, e est la charge de l'électron et h la constante de Plank.

Les lois de Kirchhoff relatives aux nœuds et aux mailles du circuit nous donnent les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \left[-Rv_C - \underbrace{I_0 \sin(K\phi_L)}_{i_L} + i_s(t) \right] \\ \frac{d\phi_L}{dt} = v_C \end{cases} \quad (17)$$

On considère que la capacité C est chargée initialement par une tension v_{C_0} , et donc les conditions initiales de ce système non linéaire sont

$$(v_{C_0}, \phi_{L_0}) = (10, 0) \quad (18)$$

Les paramètres choisis dans le circuit sont

$$\begin{aligned} C &= 1F & R &= 0.25\Omega \\ I_0 &= 1 & K &= 1 \\ i_s(t) &= \cos(100\pi t) A \end{aligned} \quad (19)$$

On pose

$$x = v_C \text{ et } y = \phi_L \quad (20)$$

alors le système (17) s'écrit, en tenant compte des valeurs des composants du circuit, sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.25x - \sin(y) + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (10, 0) \quad (21)$$

et ou $u(t)$ représente l'excitation :

$$u(t) = \frac{1}{C} i_s(t) H(t) = [\cos(100\pi t)] H(t) \quad (22)$$

$H(t)$ étant la fonction Heaviside.

L'excitation $u(t)$ est représentée dans la figure (3)

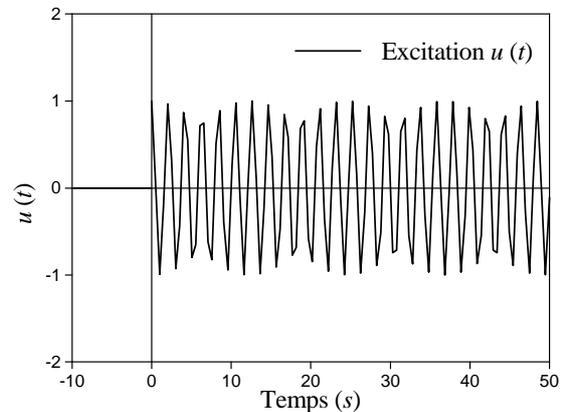


Figure.3. Evolution de l'excitation $u(t)$ au cours du temps

En appliquant la procédure développée auparavant , et après 6 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$), le système linéaire optimal s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26157 & -0.51985 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (23)$$

Les figures (4) et (5) représentent les composantes respectives ($x(t), y(t)$) de la solution des systèmes (21) et (23) en fonction du temps. La figure (6) représente le plan de phase ($x(t), y(t)$).

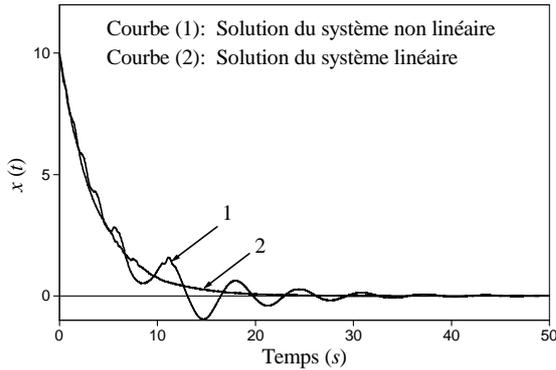


Figure.4. Variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (10, 0)$

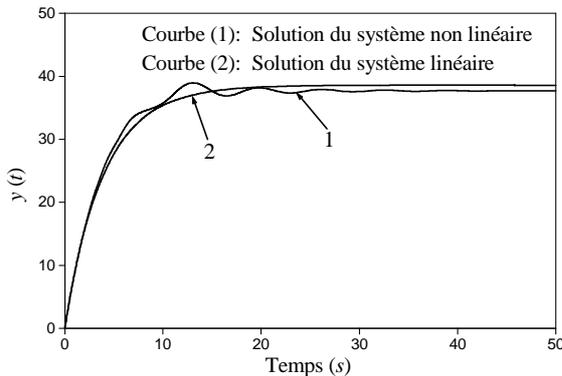


Figure.5. Variation de la solution $y(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (10, 0)$

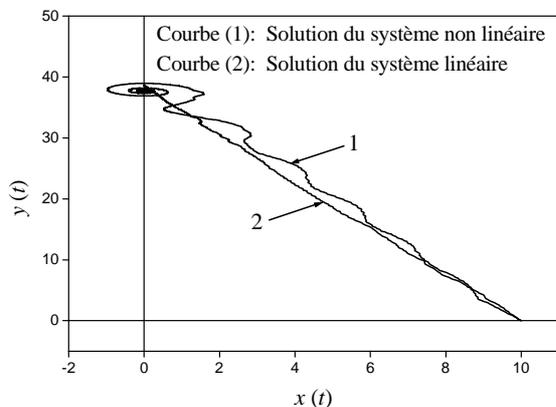


Figure.6. Plan de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (10, 0)$

COMPARAISON

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats obtenus à partir d'un calcul d'erreur quadratique. Le calcul de l'erreur quadratique se fait en utilisant la relation suivante

$$Er = \sum_{n=1}^n \|x(t) - \tilde{y}(t)\|^2 \quad (24)$$

$x(t)$ représente la solution du système non linéaire, $\tilde{y}(t)$ représente la solution du système obtenue à partir de la dérivée optimale.

La figure (7) représente l'erreur quadratique en fonction du temps.

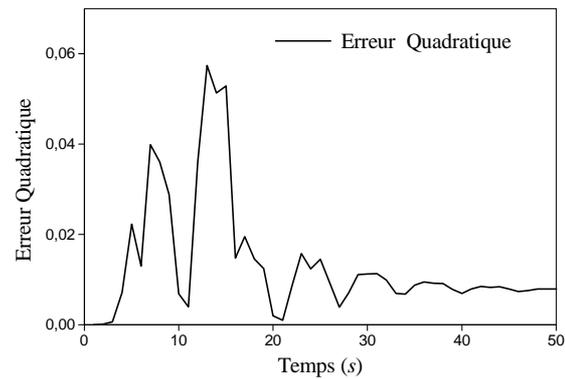


Figure.7. Erreur quadratique en fonction du temps du système non linéaire (21) par rapport au système linéaire optimal (23)

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. Elle permet d'amener le système après excitation, de sa position d'équilibre vers son point de fonctionnement (ou solution de régime). Ceci est attesté par l'étude de l'erreur quadratique qui atteint son maximum au temps $t = 13$ s, 5.73% et reste donc petite.

Cette erreur devient trop petite quand $t \geq 30$ s c'est à dire quand les solutions atteignent le point de fonctionnement du circuit électronique.

A ce niveau la solution du système non linéaire est presque confondue avec celle du système linéaire optimal.

VI. CONCLUSION

L'exemple exposé montre que l'approximation obtenue par dérivation optimale donne des résultats satisfaisants par rapport aux résultats exacts tout en respectant la dynamique du problème initial.

Nous remarquons bien que les solutions obtenues convergent toutes vers la solution de régime quand $t \rightarrow +\infty$.

REFERENCES

- [1] A. Fossard, *Commande des Systèmes Multidimensionnels*, Dunod, 1972.
- [2] B. Vujanovic, B. Baclic, *Application of Gauss Principle of Least Constraint to the Non-Linear Heat Transfer Problem*, Int. Heat. Mass Transfer, Vol.13, pp.721-730. Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [3] A. Jordan, M. Benmouna, A. Bensenane, A. Borucki, *Optimal Linearization Method Applied to the Resolution of State Equation*, RAIRO-APII, 21, pp.175-185, 1987.
- [4] A. Jordan, M. Benmouna, A. Bensenane, A. Borucki, *Optimal Linearization of Non-Linear State Equation*, RAIRO-APII, 21, pp.263-271, 1987.
- [5] J. P. Demailly, *Analyse Numérique et Equations Différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1991.
- [6] H. Reinhart, *Equations Différentielles, Fondements et Applications*, Gauthier-Villars, 1982.
- [7] M. Siboni, J. Cl. Mardon, *Approximations et Equations Différentielles. Analyse Numérique II*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, 1988.
- [8] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, 1955.
- [9] W. Ralston, *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, pp.110-120, 1960.
- [10] L.O. Chua, Ch.A. Desoer, E.S. Kuh, *Linear and Non-linear Circuits*, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [10] M. Hasler, J. Neirync, *Circuits Non Linéaires*, Presses Polytechniques Romandes, 1985.
- [12] T. Benouaz, O. Arino, *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire*, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204, 1994.
- [13] T. Benouaz, O. Arino, *Relation Entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique*, Publications de l'U.A, CNRS 1204, N°95/10, 1995.
- [14] T. Benouaz, *Optimal Derivative of a Non-Linear Ordinary Differential Equation*, Equadiff 99, International Conference on Differential equations, Berlin (Germany) 1-7 August, Vol.2, pp.1404-1407, World scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2000.
- [15] T. Benouaz, O. Arino, *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, Computers Math. Applic., Vol.36, N°1, pp.21-32, 1998.
- [16] T. Benouaz, O. Arino, *Determination of the Stability of a Non-linear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure*, Appl. Math. and Comp sci., N°1, Vol.5, pp.33-48, 1995.
- [17] T. Benouaz, *Lyaponov Function Generated by Least Square Approximation*, Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique, Tlemcen (Algeria) 3-5 December, Vol.1 pp.73-75, 1996.
- [18] T. Benouaz, O. Arino, *Least Square Approximation of a Non-Linear Ordinary Differential Equation*, Computers Math. Applic., Vol.31, N°8, pp.69-84, 1996.
- [19] M.F. Bendahmane, *Contribution à l'Etude des Systèmes Non Linéaires avec Excitation*, Thèse de Magister, Tlemcen (Algeria), 2000.
- [20] T. Benouaz, M.F. Bendahmane, *Least Square Approximation of a Non-Linear O.D.E. with Excitation*, to appear in Computers Math. Applic., 2002.