

Modélisation De La Vibration Libre Des Assemblages De Panneaux Cylindriques

Chorfi S.M., Houmat A
 Département de Génie mécanique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur
 Université Abou-Bakr BELKAID - Tlemcen
 E-mail : Chorfi_sm@yahoo.fr

Resume- Le problème de la vibration des assemblages de panneaux cylindriques est traité dans le présent travail en utilisant la version *h-p* de la méthode des éléments finis. En se basant sur la théorie des coques épaisses un programme Fortran de la méthode, élaboré avec de nouvelles fonctions forme, permet d'étudier l'influence de plusieurs paramètres (caractéristiques physiques et géométriques, conditions aux limites).

I. INTRODUCTION

Les assemblages de panneaux cylindriques sont très utilisés dans la construction mécanique, navale, aérospatiale, et le génie civil.

Les caractéristiques vibratoires et l'influence de certains rapports géométriques de telles structures ont une grande importance dans le processus de conception.

Plusieurs études ont été faites dans le cas de panneaux cylindriques minces et épais, dont plusieurs théories et méthodes numériques et analytiques sont employées : *Petyt* [1], *Leissa* [2], *Peng-Cheng* et al. [3], *Bardell et Mead* [4], *Lam et Loy* [5] ont utilisé la théorie des coques minces, *Reddy et Liu* [6], *Carrera* [7] ont utilisé la FSDT, « First-order Shear Déformable Shell Theory », *Soldatos et Hadjigeorgiou* [8], *Mizusawa et Kato* [9] ont utilisé l'élasticité 3D.

La vibration libre des assemblages de panneaux cylindriques est traité dans le présent travail en utilisant la version *h-p* de la méthode des éléments finis.

II. FORMULATION

En utilisant l'analyse tensorielle une théorie à cinq coordonnées généralisées de *Reissner-Mindlin* est formulée afin d'établir les différentes relation déformations- déplacements, Contraintes-déformations d'un panneaux cylindrique (fig 1). Dans le système de coordonnées cylindriques θ^j , le déplacement d'un point du panneau cylindrique s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = \bar{v}(x, y, t) - z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = \bar{w}(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

Le remplacement du champ de déplacement (1) dans les composantes du tenseur de déformation donne les déformations approchées:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{R}{R+z} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\bar{w}}{R+z} \\ \gamma_{yx} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{R}{R+z} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = \theta_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \gamma_{zy} = \frac{R}{R+z} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \theta_x - \frac{\bar{v} - z\theta_x}{R+z} \end{cases} \quad (2)$$

Le système (2) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon = \Delta \delta \quad (3)$$

de même pour les Contraintes- déformations elle sont exprimées par la relation :

$$\sigma = C \varepsilon \quad (4)$$

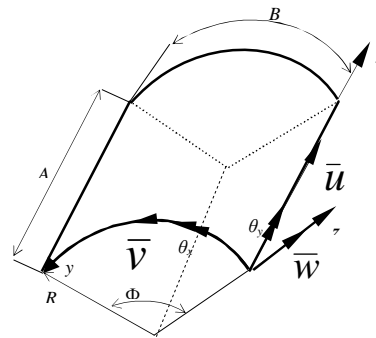


Fig1.Coordonnées généralisées

C est la matrice des constantes élastiques exprimée en fonction de E , ν et k dénotent respectivement le

module d'élasticité, le coefficient de Poisson et le facteur de correction de cisaillement transverse.

II.1 Fonction de Forme

Pour la modélisation cinématique du panneau cylindrique de nouvelles fonctions de forme seront exprimées en fonction des polynômes de *Legendre déplacés (shifted)*, Elles ont été développées par *Houmat* [10].

Contrairement aux polynômes de *Legendre* définis dans $[-1, 1]$, les polynômes de Legendre déplacés sont définis dans $[0, 1]$. Leur forme récurrente est la suivante :

$$\begin{cases} P_0^*(\xi)=1 \\ P_1^*(\xi)=\xi-1 \\ P_{i+1}^*(\xi)=\frac{1}{(i+1)}\left[(-2i-1+(4i+2)\xi)P_i^*(\xi)-iP_{i-1}^*(\xi)\right], i=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (5)$$

A partir des polynômes de Legendre déplacés et pour un problème C^0 continu les fonctions de forme déterminées d'un élément unidimensionnel sont :

- Fonctions de forme nodales ou externes :

$$\begin{cases} g_1(\xi)=1-\xi \\ g_2(\xi)=\xi \end{cases} \quad (6)$$

- Fonctions de forme internes :

$$g_{i+2}(\xi)=\int_0^\xi P_i^*(\alpha) d\alpha \quad \text{pour } i \geq 1 \quad (7)$$

Les fonctions de forme externes $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les fonctions de forme internes $g_{i+2}(\xi)$ permettent d'enrichir le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément.

Les champs des déplacements décrivant l'élément hiérarchique sont donnés par :

$$\begin{cases} \bar{u}(\xi, \eta, t) \\ \bar{v}(\xi, \eta, t) \\ \bar{w}(\xi, \eta, t) \\ \theta_x(\xi, \eta, t) \\ \theta_y(\xi, \eta, t) \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{(p+1)^2} X_i f_i \\ \sum_{i=1}^{(p+1)^2} Y_i f_i \\ \sum_{i=1}^{(p+1)^2} Z_i f_i \\ \sum_{i=1}^{(p+1)^2} (\theta_x)_i f_i \\ \sum_{i=1}^{(p+1)^2} (\theta_y)_i f_i \end{cases} \quad (8)$$

où p est le degré du polynôme d'interpolation.

Le système (8) peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\delta = N q \quad (9)$$

δ est le vecteur des coordonnées généralisées.

q est le vecteur des déplacements nodaux, de cotés et internes.

N est la matrice des fonctions de forme de dimension totale $(5 \times 5(p+1)^2)$.

II.2 Derivation Des Matrices De Masse Et De Rigidite

L'énergie de déformation du panneau cylindrique est donnée par :

$$Ed = \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad (10)$$

L'élément de volume dV est donné par la relation suivante :

$$dV = \frac{R+z}{R} dx dy dz \quad (11)$$

La substitution de (3), (9) et (4) dans l'équation (10) donne :

$$Ed = \frac{1}{2} q^T \left[\int_V (N^T \cdot \Delta^T \cdot C \cdot \Delta \cdot N) dV \right] q \quad (12)$$

Le terme entre deux barres représente la matrice de rigidité élémentaire K^e et en coordonnées adimensionnelles :

$$K^e = AB \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (N^T \cdot \Delta^T \cdot C \cdot \Delta \cdot N) \left(\frac{R+z}{R} \right) d\xi d\eta dz \quad (13)$$

L'expression de l'énergie cinétique associée au champ de déplacement est donné par :

$$Ec = \frac{1}{2} \rho \int_{xy} \left(H(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{H^3}{6R} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{H^3}{12} (\dot{\theta}_x^2 - \dot{\theta}_y^2) \right) dx dy \quad (14)$$

ρ est la masse volumique du matériau.

(14) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$Ec = \frac{1}{2} \rho \int_S \bar{\delta}^T \cdot T' \cdot \bar{\delta} \cdot dS \quad (15)$$

où dS est l'élément de surface :

$$dS = dx dy \quad (16)$$

T' est la matrice donnant les constantes d'intégration suivant l'épaisseur H , elle est donnée par :

$$T' = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \frac{H^3}{6R} & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & \frac{-H^3}{6R} \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H^3}{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\vec{\delta}$ est le vecteur des vitesses généralisées :

$$\vec{\delta} = \{\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_x\}^T \quad (18)$$

En remplaçant (9) dans (15) l'énergie cinétique sera :

$$Ec = \frac{1}{2} \vec{q}^T \left[\rho \int_s (N^T \cdot \Delta^T \cdot T' \cdot \Delta \cdot N) dS \right] \vec{q} \quad (19)$$

et la matrice masse élémentaire sera donc :

$$M^e = AB \rho \int_0^1 \int_0^1 (N^T \cdot \Delta^T \cdot T' \cdot \Delta \cdot N) d\xi d\eta \quad (20)$$

Les matrices élémentaires M^e , K^e de dimension $(5(p+1)^2 \times 5(p+1)^2)$ sont exprimés en fonction des intégrales $I_{ij}^{\alpha,\beta}$ et $J_{\alpha\beta}^{l,m,n}$ données par les relations :

$$I_{ij}^{\alpha,\beta} = \int_0^1 \int_0^1 f_i^\alpha(\xi, \eta) f_j^\beta(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (21)$$

$$J_{\alpha\beta}^{l,m,n} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{R}{R+z} \right)^l \cdot \left(\frac{1}{R+z} \right)^n \cdot z^m \cdot \left(\frac{R+z}{R} \right) dz \quad (22)$$

$\alpha, \beta \in \{0,1,2\}$ désignent l'ordre de dérivation de la fonction $f_i(\xi, \eta)$ par rapport à ξ et η

$l, n, m \in \{0,1,2\}$ dans $J_{\alpha\beta}^{l,m,n}$ sont des puissances.

Les intégrales $I_{ij}^{\alpha,\beta}$ et $J_{\alpha\beta}^{l,m,n}$ sont calculées symboliquement et stockées dans des fichiers afin d'être utilisés par le programme. L'assemblage des matrices élémentaires de masses et de rigidités aux matrices globales GK et GM se fait dans en appliquant les conditions aux limites tout en respectant la connectivité des éléments p .

La substitution des matrices globales GK et GM dans l'équation de Lagrange donne l'équation du mouvement libre.

$$(K^g - \omega^2 M^g) q^g = 0 \quad (23)$$

la résolution de (23) donne les fréquences et les modes propres correspondant.

III. RESULTATS

Le problèmes de vibration libre de panneaux cylindriques sera traitée, pour cela une étape de validation du programme est indispensable. Au même temps une étude de convergence est menée.

III.1 Validation Et Convergence

Pour la validation du programme, plusieurs exemples ont été traités, dont un est choisit pour montrer l'exactitude et la convergence de la méthode *h-p*. l'exemple choisit est celui d'un panneau cylindrique simplement appuyer sur ces quatre bords.

Le paramètre de fréquence utilisé dans cette étape de validation et dans tout se qui suit est :

$$\Omega = \omega H \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (24)$$

Les résultats trouvés et ceux donnés par la référence [9] et [12] sont très proches et parfois identiques. D'autres valeurs trouvées n'ont pas été données par les deux méthodes, par exemple le 4^{ème} mode pour l'élasticité 3D, et le 5^{ème} mode pour la FSDT.

Tableau 1. Comparaison des paramètres de fréquences d'un panneau cylindrique simplement appuyé

(H/R=0.1, A/R=1.0, $\Phi=45^\circ$, $k=\pi^2/12$ et $\nu=0.3$)

N ^{bre} de modes	Elasticité 3D [9]	FSDT [12]	h-p
1	0.0788	0.0787	0.0788
2	0.1651	0.1649	0.1647
3	0.1958	0.1946	0.1947
4	-	0.1947	0.1950
5	0.24815	-	0.2482
6	0.2674	0.2656	0.2657
7	0.2823	0.2813	0.2806

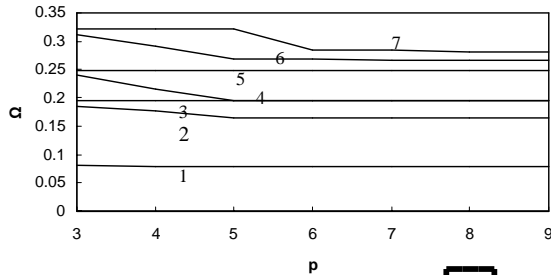


Fig 2. Maillage d'un élément

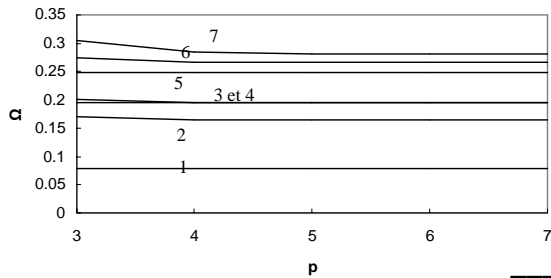


Fig 3. Maillage de quatre éléments

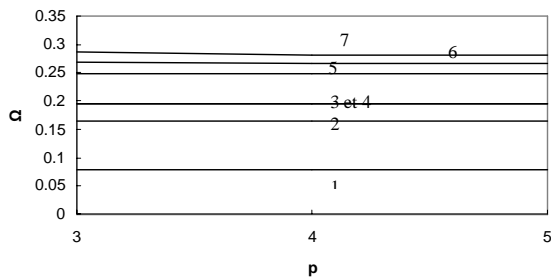


Fig 4. Maillage de neuf éléments



Les figures (2-4) représentent la convergence des paramètres de fréquences des sept premiers modes.

D'après ces graphes, une convergence monotone a lieu qui s'accroît en raffinant le maillage ou en augmentant le degré p du polynôme d'interpolation. Les courbes pour le maillage de quatre éléments et de neuf éléments sont presque des droites. Même pour un seul élément et pour un degré p inférieur, la solution des sept premiers modes est obtenue. Ceci confirme l'exactitude et la convergence exponentielle de la méthode [11].

III.2 Panneau Cylindrique De Forme L

Considérons un panneau cylindrique de forme L simplement appuyé de rayon R et d'épaisseur H , (fig 5). Les dimensions A , B , C , D , E et F sont reliées par les relations $C = E = A/2$ et $D = F = B/2$.

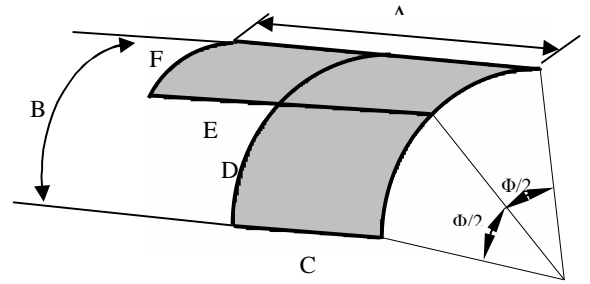


Fig 5. Panneau cylindrique de forme L

Un maillage de 3 éléments est utilisé avec un degré $p = 11$ pour analyser l'influence des rapports H/R et C/R , de l'angle de courbure Φ , du coefficient de Poisson ν et du facteur de correction du cisaillement transverse k .

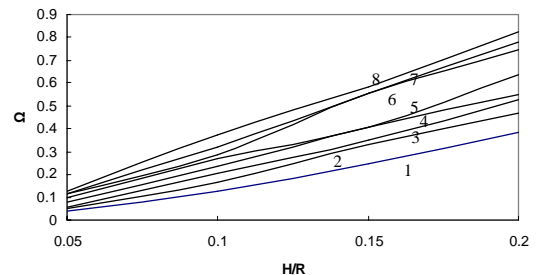


Fig. 6 Influence du rapport H/R sur les paramètres de fréquence des huit premiers modes ($C/R=0.5$, $\Phi=60^\circ$, $k = \pi^2/12$ et $\nu=0.3$)

Le graphe montre une croissance des paramètres de fréquences en fonction du rapport H/R .

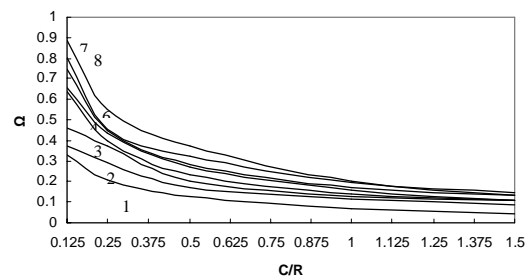


Fig. 7 Influence du rapport C/R sur les paramètres de fréquences des huit premiers modes ($H/R=0.1$, $\Phi=60^\circ$, $k = \pi^2/12$ et $\nu=0.3$)

Le graphe sur la figure 7 montre une décroissance des paramètres de fréquences en fonction du rapport C/R . Cette décroissance se mène à une zone de rapprochement des fréquences des modes supérieurs à 1. Au cours de la décroissance l'écartement entre la première et la deuxième fréquence reste pratiquement constant.

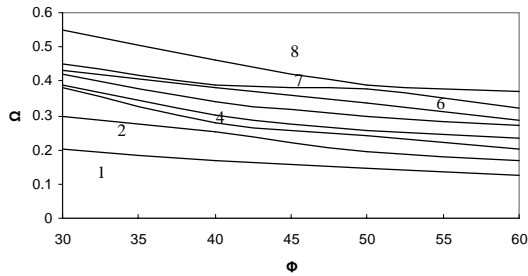


Fig 8. Influence de l'angle de courbure Φ sur les paramètres de fréquences des huit premiers modes ($H/R=0.1, C/R=0.5, k = \pi^2 / 12$ et $\nu=0.3$)

L'augmentation de la largeur du panneau, caractérisée par l'angle de courbure Φ , diminue les fréquences propres et donc la rigidité du panneau.

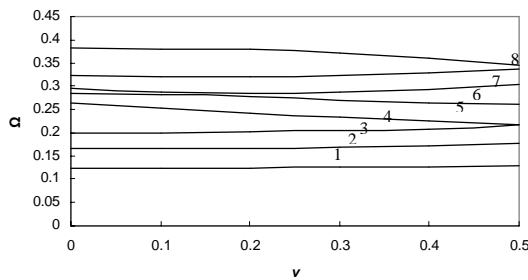


Fig 9. Influence du coefficient de Poisson ν sur les paramètres de fréquences des huit premiers modes ($H/R=0.1, C/R=0.5, \Phi=60^\circ$, et $k = \pi^2 / 12$)

Le graphe indique une faible variation des paramètres de fréquences des huit premiers modes. La 8^{ème} fréquence ne présente une décroissance à faible pente qu'à partir d'une valeur de $\nu = 0.2$.

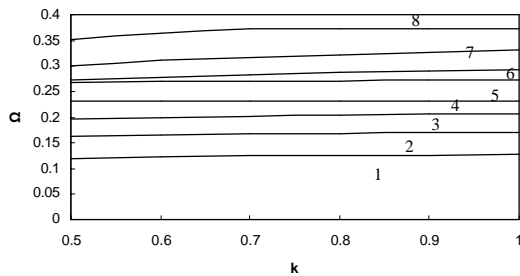


Fig 10. Influence du facteur de correction du cisaillement transverse k sur les paramètres de fréquences des huit premiers modes ($H/R=0.1, C/R=0.5, \Phi=60^\circ$ et $\nu=0.3$)

La variation des fréquences des huit premiers modes pour ($0.5 \leq k \leq 1$) est croissante, monotone à faible pente.

III.3 Conditions Aux Limites

Trois différentes conditions aux limites appliquées aux bords du panneau sont considérées : libre, encasté, et simplement appuyé, notées dans le tableau suivant par L, E, et S, respectivement.

Tableau 2. Les paramètres de fréquences des quatre premiers modes d'un panneau cylindrique de forme l avec différentes conditions aux limites ($H/R=0.1, C/R=0.5, \Phi=60^\circ, \nu=0.3$ et $k = \pi^2 / 12$)

condition	N ^{bre} de modes				
	NDL	1	2	3	4
L	2040	0.0411	0.0457	0.0731	0.0845
S	1764	0.1252	0.1686	0.2044	0.2324
E	1600	0.2040	0.2509	0.2816	0.3524

Le nombre de degré de liberté (NDL), dans le cas du panneau libre est plus grand que celui des deux autres conditions. Cela indique que le coût de calcul ne dépend pas seulement de p et h , mais aussi des conditions aux limites appliquées. Concernant l'effet des conditions aux limites, les résultats montrent que les fréquences dans le cas de la condition libre sont faibles devant celles du panneau simplement appuyé et beaucoup plus faible que celles du panneau encasté. Il est à noter que dans le cas d'un panneau libre il y a une apparition de six modes rigides correspondant à six fréquences nulles. Cela est dû au mouvement du corps rigide qui correspond à trois translations u, v et w , et trois rotations autour des axes x, y et z .

IV. CONCLUSION

La version h-p de la méthode des éléments finis est formulée en utilisant la théorie de *Reissner Mindlin* pour modéliser la vibration libre des assemblages de panneaux cylindriques. Après une étape de validation et une étude de convergence, et grâce à la robustesse de la méthode, l'exemple d'un panneau forme L avec différentes conditions aux limites à été traité.

REFERENCE

- [1] Petyt M. (1971). Vibration of curved panels. *J. Sound & Vibr.* 15, 381-395
- [2] Leissa A. W. (1973). The vibration of shells. *NASA Rep. SO-288. NASA*. Washington. DC.
- [3] Peng-Cheng S. et Jian-Guo W. (1987). Vibration analyses of flat shells by using B-spline functions. *Comput. Structures* 25, 1-10.
- [4] Bardell N. S. et Mead D. (1989). Free vibration of orthogonally stiffened cylindrical shells. *J. Sound & Vibr.* 134, 55-72
- [5] Lam K. Y. et Loy C. T. (1993). Vibration characteristics of thin cylindrical panels. *Applied Acoustics*. 42, 347- 359
- [6] Reddy J. N. et Liu C. F. (1985). A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int. J. Engng Sci.* 25, 319-330.

- [7] Carrera E. (1991). The effects of shear deformation and curvature on buckling and vibrations of cross-ply laminated composite shells. *J. Sound & Vibr.*150, 405-433.
- [8] Soldatos K. P. et Hadjigeorgiou V. P. (1990). Three-dimensional solution of free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels. *J. Sound & Vibr.*137, 369-384.
- [9] Mizusawa T. et Kato T. (1996). Application of the spline prism method to analyse vibration of thick circular cylindrical panels. *Solids & struct.* 33, 967-976.
- [10] Houmat A. Free vibration analysis of membranes using the $h-p$ version of the finite element method. Accepté pour publication dans *Journal of sound and vibration*.2004
- [11] Babuska I. et Suri M (1990). The p -and $h-p$ versions of the finite element method, An overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 80 5-26
- [12] Mizusawa T. et Tito H. (1994). Application of spline strip method to analyse vibration cross-ply laminated cylindrical panels. *Proc.Symp. Comput.Meth. Struct. Engng. Related Fields.* 18, 337-342