République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques

Thème

Multiplicité des solutions pour des problèmes de Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev

Présentée par

Mme BENMANSOUR Safia

Devant le jury composé de :

Président :		
Mr BENALILI Mohamed	**Professeur**	**Univ. Tlemcen**
Directeur de thèse :		
Mr BOUCHEKIF Mohammed	**Professeur**	**Univ. Tlemcen**
Examinateurs :		
Mr MESSIRDI Bekai	**Professeur**	**Univ. Oran**
Mr SENOUSSAOUI Abderrahmane	**Professeur**	**Univ. Oran**
Mr ABDELLAOUI Boumedienne	**Professeur**	**Univ. Tlemcen**
Mme NASRI Yasmina	**M.C.A,**	**Univ. Tlemcen**

Année universitaire 2014-2015

Remerciements

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de système dynamique de la Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, de l'Université de Tlemcen sous l'égide du Professeur **M. Bouchekif** qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je remercie le Professeur **M. Benalili** d'avoir accepté de présider mon jury .

Mes remerciements vont aussi au Professeurs **B.Messirdi** , **B. Abdellaoui** , **A. Senoussaoui** et **Y. Nasri** pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse et de faire partie de mon jury.

Dédicaces

A mes très chers parents, mon mari et mes enfants pour leurs dévouements, leurs sacrifices et leurs encouragements.

A mes sœurs, mes frères, neveux et nièces.

A mes amis et collègues particulièrement Atika, Sofiane Ali et Esma.

Que ce travail soit un témoignage de ma profonde affection et gratitude à ceux que j'aime.

Table des Matières

Notations

Pour mener à bien la compréhension de ce qui va suivre, nous donnons une interprétation des notations et abréviations utilisées dans cette thèse.

- $\mathbb{R}^N$: Un espace Euclidien de dimension N.
- Si $x, y \in \mathbb{R}^N$ alors $x.y$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$, c-à-d:
  si $x = (x_1, ..., x_N)$ et $y = (y_1, ..., y_N)$ alors $x.y = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i.y_i$.
- Si $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$.
- $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.
- $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$.
- $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V (où V est un espace de Banach).
- $u_n \to u$ fortement dans V.
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
- $\partial\Omega$ le bord de Ω.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ est le gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
- Δu est le laplacien de la fonction u: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, c-à-d: $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$.
- $C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .

- $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est la complétion de $C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ par rapport à la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

- H^{-1} est le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.

- $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, est l'exposant critique de Sobolev.

- On note par B_a^r la boule dans Ω de centre a et de rayon r.

- $o_n(1)$ désigne toute quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

- S_p est la meilleure constante de Sobolev de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $4 \leq p \leq 6$.

- $||.||$ est la norme de $H_0^1(\Omega)$ induite par le produit scalaire $(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ et $||.|| = (.,.)^{1/2}$.

- $|.|_p := \left(\int_\Omega |.|^p dx\right)^{1/p}$ est la norme dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

- $\|.\|_-$ est la norme dans H^{-1}.

- On dénote l'espace $H_0^1(\Omega)$ par H et l'intégrale $\int_\Omega u dx$ par $\int u$.

- $O(\varepsilon^\alpha)$ et $o(\varepsilon^\alpha)$ impliquent que $|O(\varepsilon^\alpha)\varepsilon^{-\alpha}| \leq K$ pour une certaine constante $K > 0$ et $|o(\varepsilon^\alpha)\varepsilon^{-\alpha}| \to 0$ as $\epsilon \to 0$ respectivement.

- p.p est l'abrégé de presque partout.

- $u^{\pm} = \max(0, \pm u)$.

Introduction

L'objet de la présente thèse est l'étude de quelques problèmes elliptiques du type Kirchhoff de la forme suivante:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \lambda f(x)\,|u|^{q-2}\,u + g(x)\,|u|^{p-2}\,u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $M(t) = at+b$, a, b sont des constantes positives, $4 < p \leq 6$, $1 \leq q < 2$, λ est un paramètre réel positif, g une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et f satisfaisant certaines conditions.

La particularité de ce type de problème et de loin la plus importante, est qu'il soit non local. Ceci est fondé par la présence de l'opérateur $-M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u$, qui contenant une intégrale sur tout le domaine, implique que l'équation n'est pas une identité ponctuelle.

Force est de constater que ces problèmes contribuent au passage du monde académique vers celui de l'application. En effet, trés prisé pour ses motivations physiques, le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ n'est autre qu'une version stationnaire du modèle suivant qui régit le comportement d'un fil élastique dont les extrémités sont fixées et qui est soumis à des vibrations non linéaires:

$$\begin{cases} u_{tt} - (a\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + b)\,\triangle\,u = h(x,u) & \text{dans } \Omega \times (0,\ T), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\ T), \\ u(x,\ 0) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x), \end{cases}$$

où T est une constante positive, $u_{0,}\ u_1$ sont des fonctions données. Dans de tels problèmes,

u exprime le déplacement, $h(x, u)$ la force extrémale, b la tension initiale et a est relative aux propriétés intrinsèques du matériau du fil (tel que le module de Young). Pour plus de détails, nous suggérons aux lecteurs les travaux de [4], [5] ainsi que leurs références. Fondamentalement, il s'agit d'une généralisation à des dimensions supérieures du modèle initialement proposé en dimension une par Kirchhoff [18] en 1883:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\rho_0 + \rho_1 \int_0^L \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| dx) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où ρ_0 est la tension initiale, ρ_1 représente le module de Young du matériau du fil et L sa longueur. Ce dernier est connu pour être une extension de l'équation des ondes de D'Alembert. En effet, Kirchhoff y a pris en compte les changements qu'occasionnent les oscillations transversales sur la longueur du fil.

Forts de leurs implications dans d'autres disciplines, et vue l'étendue de leurs champs d'applications, les problèmes non locaux serviront pour modéliser plusieurs phénomènes physiques ils interviennent aussi dans des systèmes biologiques où u décrit un processus dépendant de sa moyenne comme la densité de la population.

De par cet impact significatif renforçant le domaine des applications, ce type de problème a perçu l'interêt des mathématiciens et beaucoup de travaux visant l'existence des solutions ont vu le jour. En particulier après le coup de grâce apporté par le fameux article de Lions [20] où ce dernier a adopté une approche reposant sur l'analyse fonctionnelle. Néanmoins, dans la plupart de ces articles, la méthode avantagée est purement topologique.

Ce n'est que ces dernières décennies que cette approche a été délaissée au profit des méthodes variationnelles lorsque Alves et ses collègues [2] ont obtenu pour une première fois des résultats d'existence via ces méthodes. Depuis, il y a eu un essor très fructueux qui a donné naissance à beaucoup de travaux fondant cet axe avantageux voir [5, 20, 21].

Cette thèse comprend cinq chapitres:

Le premier est préliminaire et contient des notions et outils de base dont on fera fréquemment usage par la suite.

Dans le second chapitre, on aborde le cas sous critique plus précisèment:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2dx+b)\Delta u=\lambda f(x)+|u|^{p-2}\,u & \text{dans } \Omega \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, $4<p<6$, a,b sont des constantes positives, λ un paramètre positif et f appartient à H^{-1}. On a montré l'existence d'un λ_* dont l'expression sera explicitée ultérieurement et tel que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet au moins deux solutions positives pour tout $\lambda\in(0,\lambda_*)$.

Il est essentiel de constater que le cas sous critique ci-traité nous permettra à priori de cerner les difficultés qui se présenteront à nous lors de l'étude du cas critique qui suivra immédiatement. En d'autres termes, grace à ce passage, on mettra aisément en évidence la compréhension des réserves impérativement imposées par la présence de l'exposant critique de Sobolev.

Le troisième chapitre est consacré au cas critique, en effet on y aborde le problème suivant:

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2dx+b)\Delta u=f(x)+|u|^{4}\,u & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, a,b des constantes positives et f appartient à H^{-1} assujettie à l'hypothèse suivante:

$$(\mathcal{H}) \qquad\qquad \left|\int fv\right|<K_a(v),\ \text{pour tout } v\in H \text{ tel que } |v|_6=1$$

où

$$K_a(v):=10^{-5/2}[12a^2||v||^8+80b||v||^2+4a||v||^4A_a(v)][3a||v||^4+A_a(v)]^{1/2}$$

avec $A_a(v):=||v||\,(9a^2||v||^6+20b)^{1/2}$.

Nos principaux résultats seront exprimés par les théorèmes suivants.

Théorème 0.1 *Supposons que* $f \neq 0$ *satisfait* $(\mathcal{H})$. *Alors le problème* $(\mathcal{P})$ *admet au moins une solution faible dans* $H_0^1(\Omega)$. *Elle est non négative si* f *est aussi non négative.*

Théorème 0.2 *Sous l'hypothèse du Théorème 1 pour* a *un nombre positif petit, le problème* $(\mathcal{P})$ *admet au moins deux solutions faibles dans* $H_0^1(\Omega)$. *Elles sont non négatives si* f *est aussi non négative.*

Il est important de signaler, dans ce contexte, que la contrainte due à la perte de compacité fait que le problème de multiplicité soit réputé difficile et pour palier cela il a fallu combiner astucieusement un bon niveau de la condition de Palais-Smale et mener à bien des estimations laborieuses sur la fonctionnelle d'énergie contribuant à récupérer la convergence forte dans la recherche de la deuxième solution d'où la pertinence de nos résultats.

Le quatrième chapitre est dédié à l'extension de notre étude à l'espace entier $\mathbb{R}^3$, on y traite le problème:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -\left(a\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx+b\right)\Delta u=\lambda f(x)+|u|^4u & \text{dans } \mathbb{R}^3\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes positives, λ est un paramètre positive et f appartient à $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Là aussi on se heurte à la difficulté majeure qui réside dans la perte de compacité de l'injection de Sobolev $(H^1(\mathbb{R}^3),\ \|.\|) \hookrightarrow \left(L^q(\mathbb{R}^3),\ |.|_q\right)$ pour tout $q \in [2,\, 2_*(3)]$.

Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 0.3 *Soit* $a > 0$, $b > 0$ *et* $f \not\equiv 0$. *Alors, il existe* $\lambda_* > 0$ *tel que le problème* $(\mathcal{P}_\lambda)$ *admet au moins deux solutions non triviales pour tout* $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

A ce niveau, il convient aussi de signaler que l'absence de la compacité des injections y compris pour les situations sous critiques n'a pénalisé ni l'existence ni la multiplicité et qu'en plus on a eu l'avantage d'obtenir des résultats sans avoir à imposer la moindre restriction sur a.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème suivant:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \lambda f(x)\,|u|^{q-2}\,u + g(x)\,|u|^4\,u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $M(t) = at + b$, Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$ contenant 0 et de frontière régulière, $1 < q < 2$, a, b sont des constantes positives, λ un paramètre positif et f et g des fonctions continues non négatives dans $\overline{\Omega}$.

On étudie l'effet du graphe de la fonction g sur la mutiplicité des solutions. Plus précisèment en supposant que g possède k maximums sur Ω et moyennant des conditions appropriées on obtient l'existence d'un λ_* tel que le problème.$(\mathcal{P}_\lambda)$ admette une solution de moindre énergie et au moins k solutions positives pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

Liste des publications

[1] Nonhomogeneous elliptic Kirchhoff type problems involving critical Sobolev exponents, Electron. J. Diff. Equ., vol. 2015 (2015), No. 69, pp.1-11.

[2] Existence and multiplicity results for nonhomogeneous critical Kirchhoff problems in $\mathbb{R}^3$. Soumis pour publication.

[3] Multiple positive solutions for Kirchhoff problems involving critical Sobolev exponent and weight functions. En préparation.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre introductif a l'avantage de rappeler brièvement les définitions de base dont on fera usage fréquemment dans les parties suivantes. A savoir la notion des points critiques ainsi que la condition de Palais-Smale. On y trouvera aussi le principe variationnel d'Ekeland et le Lemme du Col (Mountain Pass Theorem). Le chapitre s'achève par des injections de Sobolev des espaces en question qu'on estime essentielles pour la suite de notre travail.

1.1 Point critique

Soit V un espace de Banach, $E \in C^1(V, \mathbb{R})$, $E'(u) : V \to V'$ (V' est le dual topologique de V), les dérivées sont au sens de Fréchet.

Définition 1.1 *On dit que $u \in V$ est un point critique de E si $E'(u) = 0$, sinon u est dit un point régulier.*
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de E s'il existe un point critique u de E tel que $E(u) = c$. Sinon, c est dite une valeur régulière.

La notion de point critique peut être interprétée comme minimum local d'une fonctionnelle, mais en général ceci ne se produit qu'en présence d'une certaine propriété de compacité, par exemple pour la fonction $E(u) = \exp(-u)$, la valeur $c = 0$ n'est jamais atteinte. Pour cela, on exige que E satisfasse une certaine condition de compacité.

Ainsi, pour prouver la convergence forte des suites minimisantes ou de façon générale des suites qui convergent vers un point présentant une candidature à devenir un point critique, on a souvent recours à la dite condition de Palais-Smale.

Définition 1.2 *On dit que $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ satisfait la condition de Palais-Smale de niveau c ($(P\text{-}S)_c$ en abrégé), si de toute suite $(u_n) \subset V$ vérifiant*

$$E(u_n) \to c, \quad \text{et} \quad E'(u_n) \to 0 \quad \text{dans} \quad V' \text{ quand } n \to \infty,$$

on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans V vers un point critique de E.
Si la condition de $(P\text{-}S)_c$ est vérifiée pour tout $c \in \mathbb{R}$, on dit alors que E vérifie la condition de $(P\text{-}S)$.

1.2 Principe variationnel d'Ekeland

Le théorème et le corollaire suivants montrent la possibilité de trouver des suites minimisantes sous certaines conditions sur la fonctionnelle.

Théorème 1.1 *[17] Soient (Γ, d) un espace métrique , et $E : \Gamma \to (-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle bornée inférieurement c'est à dire*

$$c = \inf_{\Gamma} E > -\infty;$$

et semi-continue inférieurement sur Γ. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$ tel que

$$c \leq E(\gamma_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$$

et

$$E(\gamma) - E(\gamma_\varepsilon) + \varepsilon d(\gamma, \gamma_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Corollaire 1.1 *Si Γ est un espace de Banach et $E \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ est bornée inférieurement, alors il existe une suite minimisante (u_n) de E dans Γ telle que*

$$E(u_n) \to \inf_{\Gamma} E, \quad E'(u_n) \to 0 \ \textit{dans}\ \Gamma' \ (\Gamma' \textit{ est le dual topologique de } \Gamma) \ \textit{ quand } \ n \to \infty.$$

1.3 Lemme du Col (Mountain Pass Theorem)

Le lemme suivant constitue un outil constructif et puissant pour montrer l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle:

Lemme 1.1 *[3] Soient V un espace de Banach et $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de $(P\text{-}S)$. On suppose que:*
(1) $E(0) = 0$;
(2) *il existe $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que si $\|u\|_V = \rho$ alors $E(u) \geq \alpha$;*
(3) *il existe $u_1 \in V$ tel que $\|u_1\|_V \geq \rho$ et $E(u_1) < \alpha$.*
Soit

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} E(u),$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],\ V)\ ;\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1\}.$$

Alors, il existe une suite (u_n) dans V telle que

$$E(u_n) \to c \ \textit{et}\ E'(u_n) \to 0 \ \textit{dans}\ V'.$$

1.4 Espaces de Sobolev

L'atout majeur de l'approche variationnelle est qu'elle fasse intervenir des espaces de Sobolev dont la propriété de réflexivité sera le maillon liant la solution faible à la solution classique. Pour cela, il est primordial d'en donner la définition et quelques propriétés.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.3 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) \ ; \ \exists v_1, v_2, v_3, ..., v_N \in L^p(\Omega) \ \textit{tels que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega v_i \phi, \ \phi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

avec $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Théorème 1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = |u|_p + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p$$

est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. Il est de plus séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.5 Quelques inégalités et injections de Sobolev utiles

Fortement sollicitées et surtout incontournables dans la Théorie des points critiques, ces injections avantageuses vont prendre part dans notre travail.

Théorème 1.3 *Soit Ω un domaine ouvert borné de classe C^1, on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{si } p < N \\ L^q(\Omega) & \forall q \in [1, \infty) \quad \text{si } p = N \\ C\left(\overline{\Omega}\right) & \text{si } p > N \end{cases},$$

avec injections continues.

De plus,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \forall q \in [1, p^*) \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{si } p < N \\ L^q(\Omega) & \forall q \in [1, \infty) \quad \text{si } p = N \\ C\left(\overline{\Omega}\right) & \text{si } p > N \end{cases},$$

avec injections compactes.

Lemme 1.2 *Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine ouvert borné et $1 \leq p \leq 2^*$. Alors, il existe une constante positive C telle que*

$$\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

L'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, est compacte si $p < 2^*$.

Où $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$ obtenu par la complétion de l'espace des fonctions C^∞ sur Ω à support compact.

Chapitre 2

Sur des problèmes elliptiques non homogènes du type Kirchhoff

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème suivant:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2dx + b)\Delta u = |u|^{p-2}\,u + \lambda f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, $4 < p < 6$, a, b sont des constantes positives, λ un paramètre positif et f appartient à H^{-1}.

Avant de donner notre résultat principal, mettons en place les choses suivantes.

Soient

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{ab(p-4)}}{2(p-1)\,\|f\|_{\_}}\left[\frac{2S_p^{p/2}\sqrt{3ab}}{(p-1)}\right]^{2/(p-2)}, \\ \lambda_2 &= \frac{b(p-2)}{2(p-1)\,\|f\|_{\_}}\left[\frac{bS_p^{p/2}}{(p-1)}\right]^{(p-1)} \end{aligned}$$

et $\lambda_* = \max(\lambda_1, \lambda_2)$.

Nous sommes en mesure de donner notre résultat.

Théorème 2.1 *Pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$, le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet au moins deux solutions positives.*

On définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ par

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \frac{1}{p}|u|_p^p - \lambda \int fu^+, \text{ pour tout } u \in H$$

où $\widehat{M}(t)$ est la primitive de $M(t) = at + b$ ($\widehat{M}(0) = 0$). Il est claire que I_λ soit bien définie et de classe C^1 sur H et ses points critiques sont des solutions faibles du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$, ceci veut dire qu'un point $u \in H$ est dit solution faible de $(\mathcal{P}_\lambda)$ s'il satisfait $(a||u||^2 + b) \int \nabla u \nabla v - \int |u|^{p-2} uv - \lambda \int fv = 0$, pour tout $v \in H$.

Faisant intervenir l'inégalité de Sobolev, on aura:

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p - \lambda \int fu^+ \\
&\geq \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}S_p^{-p/2}\|u\|^p - \lambda \|f\|_{_}\|u\| \\
&\geq \left[\frac{a}{4}\|u\|^{4-p} - \frac{1}{p}S_p^{-p/2}\right]\|u\|^p + \left[\frac{b}{2}\|u\| - \lambda\|f\|_{_}\right]\|u\|
\end{aligned}$$

Constatons que pour $p > 4$, $\lim_{t \longrightarrow +\infty} I_\lambda(tu) = -\infty$, I_λ n'est donc pas bornée inférieurement sur H. Afin de contourner cela, on introduit la variété de Nehari définie par

$$\mathcal{N}_\lambda = \left\{u \in H \backslash \{0\} : \langle I'_\lambda(u),\ u\rangle = 0\right\}.$$

En fait, l'ensemble $\mathcal{N}_\lambda$ est lié au comportement de l'application $h_u(t) := I_\lambda(tu)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $u \in H\backslash\{0\}$. Ces applications sont communènement dites applications "fibering" et ce sont Drábek et Pohozaev qui en furent les instigateurs pour plus de détails nous prions le lecteur de consulter [9, 12, 14].

On a: $h_u''(t) = 3a||u||^4 + b||u||^2 - (p-1)t^{p-2}|u|_p^p$. Ceci nous incitera à décomposer $\mathcal{N}_\lambda$ en trois sous ensembles disjoints:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda^+ &: = \{u \in \mathcal{N}_\lambda \colon h_u''(1) > 0\}, \\ \mathcal{N}_\lambda^0 &: = \{u \in \mathcal{N}_\lambda \colon h_u''(1) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{N}_\lambda^- := \{u \in \mathcal{N}_\lambda \colon h_u''(1) < 0\},$$

qui correspondent aux minima locaux, points d'inflexion et maxima locaux de I_λ respectivement.

2.2 Résultats préliminaires

Commençons par donner le résultat suivant dont la preuve est similaire à celle donnée dans [11].

Lemme 2.1 *Supposons que u_0 soit un minimiseur local de I_λ dans $\mathcal{N}_\lambda$ et que $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$. Alors $I_\lambda'(u_0) = 0$ dans H^{-1}.*

Les lemmes suivants interviendront dans la démonstration de notre résultat principal.

Lemme 2.2 *Pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$ et pour chaque $u \in H \diagdown \{0\}$, il existe un unique $t^+ = t^+(u) \geq t_{\max}^u$ tel que $t^+ u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, et $I_\lambda(t^+ u) = \max\limits_{t \geq t_{\max}^u} I_\lambda(tu)$.*
De plus, si $\int fu^+ > 0$, il existe un unique $t^- = t^-(u) \leq t_{\max}^u$ tel que $t^- u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $I_\lambda(t^- u) = \min\limits_{0 \leq t \leq t_{\max}^u} I_\lambda(tu)$.

Preuve: Posons $h_u'(t) = H_u(t) - \lambda \int fu^+$ où $H_u(t) = a||u||^4 t^3 + b||u||^2 t - |u|_p^p t^{p-1}$. On a $H_u(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} H_u(t) = -\infty$, alors $H_u(t)$ atteint son maximum au point $t_{\max}^u$, elle est croissante sur $(0, t_{\max}^u)$ et décroissante sur $(t_{\max}^u, \infty)$. Et le résultat suivra immédiatement. ■

Lemme 2.3 *Pour tout* $0 < \lambda < \lambda_*$, *on a* $\mathcal{N}_\lambda^0 = \varnothing$.

Preuve: Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$ i.e

$$3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 = (p-1) |u|_p^p \tag{2.1}$$

et u vérifie

$$a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - |u|_p^p - \lambda \int f u^+ = 0.$$

De ceci et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3ab} \|u\|^3 &\leq \|u\|^4 + b \|u\|^2 \\ &\leq (p-1) S_p^{-p/2} \|u\|^p , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\sqrt{ab(p-4)(p-2)} \|u\|^3 &\leq a(p-4) \|u\|^4 + b(p-2) \|u\|^2 \\ &\leq \lambda(p-1) \|f\|_- \|u\| , \end{aligned}$$

il en résulte

$$\left(\frac{2S_p^{p/2}\sqrt{3ab}}{(p-1)} \right)^{1/(p-3)} \leq \|u\| \leq \left(\frac{\lambda(p-1) \|f\|_-}{2\sqrt{ab(p-4)(p-2)}} \right)^{1/2},$$

et

$$\left(\frac{bS_p^{p/2}}{(p-1)} \right)^{1/(p-2)} \leq \|u\| \leq \left(\frac{\lambda(p-1) \|f\|_-}{b(p-2)} \right).$$

ce qui contredit le fait que $0 < \lambda < \lambda_*$. ■

Lemme 2.4 *Pour tout* $0 < \lambda < \lambda_*$ *et pour chaque* $u \in \mathcal{N}_\lambda$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et une fonction* *différentiable* $t : B_0^{\varepsilon} \subset H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tels que* $t(0) = 1$, $t(v)(u - v) \in \mathcal{N}_\lambda$ *pour* $\|v\| < \epsilon$ *et*

$$\langle t'(0), v\rangle = \frac{2\left(2a\|u\|^2 + b\right)\int \nabla u \nabla v - pb\int |u|^{p-2} uv - \int fv}{3a||u||^4 + b||u||^2 - (p-1)|u|_p^p}.$$

Preuve: Définissons l'application $F : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$, par:

$$F(s, w) = as^3||u - w||^4 + bs||u - w||^2 - s^{(p-1)}|u - w|_p^p - \int f(u - w)^+.$$

Puisque $F(1, 0) = 0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial s}(1, 0) = 3a||u||^4 + b||u||^2 - (p - 1)|u|_p^p \neq 0,$$

en appliquant le théorème des fonctions implicites au point $(1, 0)$, on obtient le résultat de ce lemme. ■

Lemme 2.5 *La fonctionnelle* I_λ *est coercive et bornée inférieurement dans* $\mathcal{N}_\lambda$.

Preuve: On sait que pour $u \in \mathcal{N}_\lambda$, on a

$$a\|u\|^4 + b\|u\|^2 = |u|_p^p + \lambda \int fu^+.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p - \lambda \int fu^+ \\
&= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}(a\|u\|^4 + b\|u\|^2) - \lambda\frac{(p-1)}{p}\int fu^+ \\
&\geq \frac{1}{2p}\|u\|^2\left[\frac{a(p-4)}{2}\|u\|^2 + b(p-2)\right] - \lambda\frac{(p-1)}{p}\|f\|_{_}\|u\| \\
&\geq \frac{b(p-2)}{2p}\|u\|^2 - \lambda\frac{(p-1)}{p}\|f\|_{_}\|u\|
\end{aligned}$$

Par conséquent I_λ est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda$. ■

Lemme 2.6 *Pour tout* $0 < \lambda < \lambda_*$, *il existe deux suites minimisantes* $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ *et* $(v_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ *telles que*

i) $I_\lambda(u_n) < c_0 + \frac{1}{n}$ *et* $I_\lambda(w_1) \geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{n}\|w_1 - u_n\|$ *pour tout* $w_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$.

ii) $I_\lambda(v_n) < c_1 + \frac{1}{n}$ *et* $I_\lambda(w_2) \geq I_\lambda(v_n) - \frac{1}{n}\|w_2 - v_n\|$ *pour tout* $w_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

Preuve: Il est claire que I_λ est bornée dans $\mathcal{N}_\lambda$, alors en appliquant le principe variationnel d'Ekeland, on obtient des suites minimisantes $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ et $(v_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ qui vérifient (i) et (ii) respectivement. ■

Avant de passer à la démonstration de notre théorème, donnons à présent un résultat de compacité inhérent à la condition de Palais-Smale. A cet effet, rappelons que (u_n) est dite suite de Palais-Smale pour I_λ si

$I_\lambda(u_n)$ est bornée dans H et $I'_\lambda(u_n) \to 0$ dans H^-.

Lemme 2.7 *Toute suite de Palais-Smale de* I_λ *bornée dans* H *possède une sous suite fortement convergente.*

Preuve: Soit (u_n) une suite de Palais-Smale de I_λ bornée dans H, alors quitte à en extraire une sous suite qu'on notera encore (u_n), il existe $u_0 \in H$ tel que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H,$$

$$u_n \to u_0 \text{ fortement dans } L^s(\Omega) \text{ pour tout } 4 < s < 6,$$

$$u_n \longrightarrow u \text{ p.p sur } \Omega,$$

ce qui implique que

$$\int (\lambda f + |u_n|^{p-2} u_n)(u_n - u_0) \to 0$$

et puisque

$$I'_\lambda(u_n)(u_n - u_0) \to 0$$

on conclut alors que

$$(a\left\|u_n\right\|^4+b\left\|u_n\right\|^2)\int \nabla u_n\nabla(u_n-u_0)\to 0$$

d'où $u_n\to u_0$ fortement dans H. $\blacksquare$

2.3 Preuve du Théorème 2.1

Définissons $c_\lambda^+=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} I_\lambda(u)$ et $c_\lambda^-=\inf\limits_{v\in\mathcal{N}_\lambda^-} I_\lambda(v)$. On a les résultats suivants:

Proposition 2.1 *Pour tout $0<\lambda<\lambda_*$, on a:*

i) $c_\lambda^+<0$,

ii) $c_\lambda^->c_\lambda^+>0$.

En particulier $c_\lambda^+=\inf\limits_{v\in\mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(v)$.

Preuve: i) Soit $u\in\mathcal{N}_\lambda^+$. On a

$$\begin{aligned}\lambda(p-1)\int fu^+ &> a(p-4)\left\|u\right\|^4+b(p-2)\left\|u\right\|^2\\ &\geq b(p-2)\left\|u\right\|^2.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}I_\lambda(u) &= \frac{a}{4}\left\|u\right\|^4+\frac{b}{2}\left\|u\right\|^2-\frac{1}{p}|u|_p^p-\lambda\int fu^+\\ &= \frac{a}{4}\left\|u\right\|^4+\frac{b}{2}\left\|u\right\|^2-\frac{1}{p}(a\left\|u\right\|^4+b\left\|u\right\|^2)-\lambda\frac{(p-1)}{p}\int fu^+\\ &\leq \frac{b(p-2)}{2p}\left\|u\right\|^2-\lambda\frac{(p-1)}{p}\int fu^+\\ &\leq -\frac{b(p-2)}{2p}\left\|u\right\|^2<0\end{aligned}$$

on déduit que $c_\lambda^+ < 0$. ii) Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. La preuve de ce point s'établira en deux parties Partie 1: pour $\lambda_* = \lambda_2$. On a

$$\begin{aligned} b\|u\|^2 &\leq 3a\|u\|^4 + b\|u\|^2 \\ &< (p-1)S_p^{-p/2}\|u\|^p, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|u\| > \left(\frac{bS_p^{p/2}}{(p-1)}\right)^{1/(p-2)}, \text{ pour tout } u \in \mathcal{N}_\lambda^-.$$

Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{\|u\|^2}{2p}\left[\frac{a(p-4)}{2}\|u\|^2 + b(p-2)\right] - \lambda\frac{(p-1)}{p}\|f\|_- \|u\| \\ &\geq \|u\|\left[\frac{b(p-2)}{2p}\|u\| - \lambda\frac{(p-1)}{p}\|f\|_-\right] \\ &> \left(\frac{bS_p^{p/2}}{(p-1)}\right)^{1/(p-2)}\left[\frac{b(p-2)}{2p}\left(\frac{bS_p^{p/2}}{(p-1)}\right)^{1/(p-2)} - \lambda\frac{(p-1)}{p}\|f\|_-\right]. \end{aligned}$$

Le résultat devient évident dès que $\lambda < \lambda_*$. Partie 2: $\lambda_* = \lambda_1$. On a:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3ab}\|u\|^3 &\leq 3a\|u\|^4 + b\|u\|^2 \\ &< (p-1)S_p^{-p/2}\|u\|^p, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|u\| > \left(\frac{2\sqrt{3ab}S_p^{p/2}}{(p-1)}\right)^{1/(p-3)}, \text{ pour tout } u \in \mathcal{N}_\lambda^-.$$

En adoptant le même argument que celui utilisé dans la partie1, on obtient le résultat voulu. ■

A partir du Lemme 2.5 on a l'existence des deux suites minimisantes $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ et $(v_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ qui d'après le Lemme 2.6 convergent fortement vers u_1 et u_2 respectivement donc $u_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $u_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$ avec $I_\lambda(u_1) = c_\lambda^+$ et $I_\lambda(u_2) = c_\lambda^-$. Du fait que $I_\lambda(|u|) = I_\lambda(u)$ pour tout $u \in H$ et de la proposition précédente ainsi que du Lemme 2.1, on obtient deux solutions positives du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ qui sont distinctes car $\mathcal{N}_\lambda^+$ et $\mathcal{N}_\lambda^-$ sont disjoints.

Chapitre 3

Sur des problèmes elliptiques non homogènes du type Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence et la multiplicité des solutions pour le problème:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b)\Delta u = |u|^4 u + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, a, b des constantes positives et f appartient à H^{-1} satisfaisant de bonnes conditions.

A l'origine, l'équation de Kirchhoff en dimension-une fut introduite en 1883 par Kirchhoff lui même [18]. Il y a pris en considération les changements produits par les vibrations transversales sur la longueur du fil.

Le problème $(\mathcal{P})$ est dit non local à cause de la présence de l'intégrale sur tout le domaine Ω, ce qui implique que l'équation dans $(\mathcal{P})$ n'est plus une identité ponctuelle.

$(\mathcal{P})$ est lié à la version stationnaire analogue de l'équation de Kirchhoff:

$$\begin{cases} u_{tt} - (a\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + b) \bigtriangleup u = h(x,u) & \text{dans } \Omega \times (0,\ T), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\ T), \\ u(x,\ 0) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x), & \end{cases}$$

où T est une constante positive , u_0 et u_1 sont des fonctions données. Cette dernière est une généralisation de l'équation des ondes classique de D'Alembert des vibrations des fils élastiques. Dans de tels problèmes, u dénote le déplacement, $h(x,\ u)$ est la force extrémale, b est la tension initiale et a est liée aux propriétés intrinsèques du fil (comme le module de Young). Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à l'article de D'Ancona et Shibata [4] ainsi que ses références.

Les problèmes non locaux ne concernent pas uniquement les domaines mathématiques et physiques, ils émergent aussi dans d'autres diverses disciplines. Ils apparaissent dans des systèmes biologique où u décrit un processus dépendant de sa moyenne comme la densité de la population . Leur étude théorique a focalisé l'attention des mathématiciens pendant longtemps ce qui a donné naissance à une panoplie de travaux. Nous en citons particulièrement le fameux article de Lions [20]. Cependant dans la majorité de ces articles, l'approche utilsée repose essentiellement sur les méthodes topologiques.

Durant ces deux dernières décennies, plusieurs auteurs ont considéré le problème stationnaire elliptique suivant:

$$(\mathcal{P}_S) \begin{cases} -(a\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b)\Delta u = h(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$et $h(x,u)$ est une fonction continue, voir par exemple [2]. Alves et ses collègues furent les premiers à avoir obtenu des résultats d'existence via des méthodes variationelles. Après ceci, plusieurs travaux ont été réalisés dans cette optique. Citons à titre d'exemple [7] où $h(x,u)$ est assymptotiquement linéaire à l'infini.

Le problème $(\mathcal{P}_S)$ a aussi été intensivement étudié dans l'espace entier quand le potentiel possède une croissance sous critique ou critique, pour plus de détails voir [22].

Dans le cas d'un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$, Tarantello [26] a montré sous une bonne condition sur f, l'existence d'au moins deux solutions au problème $(\mathcal{P}_S)$ pour $a = 0$, $b = 1$ et $h(x, u) = |u|^{4/(N-2)}u + f$.

La question légitime et intéressante qui se pose alors est: peut- on obtenir les mêmes résultats que ceux dans [26] pour $a > 0$?

Notre réponse est affirmative mais pour $N = 3$ (nous éluciderons ultérieurement cette restriction sur la dimension). A notre connaissance, ce type de problèmes n'a jamais été considéré auparavant.

Dans ce qui suit, fixons $b > 0$ et considérons a comme un paramètre positif .

Afin d'établir nos principaux résultats, nous avons besoin de l'hypothèse suivante:

$$(\mathcal{H}) \qquad \left| \int fv \right| < K_a(v), \text{ pour tout } v \in H \text{ tel que } |v|_6 = 1$$

où

$$K_a(v) := 10^{-5/2}[12a^2||v||^8 + 80b||v||^2 + 4a||v||^4 A_a(v)][3a||v||^4 + A_a(v)]^{1/2}$$

avec $A_a(v) := ||v|| \left(9a^2||v||^6 + 20b\right)^{1/2}$.

Nos principaux résultats seront illustrés par les théorèmes suivants.

Théorème 3.1 *Supposons que $f \neq 0$ satisfait $(\mathcal{H})$. Alors le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution faible dans H. Elle est non négative si f est aussi non négative.*

Théorème 3.2 *Sous l'hypothèse du Théorème 3.1 pour a un nombre positif petit, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins deux solutions faibles dans H. Elles sont non négatives si f est aussi non négative.*

Remarque 3.1 *En dimensions 1 et 2, notre problème devient sous critique, ainsi l'argument standard de compacité est applicable pour obtenir l'existence des solutions, ceci reste vrai même pour $f \equiv 0$.*

Pour des dimensions supérieures à trois, le problème considéré a tendance à devenir "super critique" à cause de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ qui n' est plus compacte et par conséquent, on ne s'attend à aucun résultat d'existence via des méthodes variationnelles. Ceci vient donner un sens à la restriction que nous imposons sur la dimension à savoir $N = 3$ concernant les résultats de ce travail.
Le résultat du Théorème 3.1 reste valide lorsque l'inégalité dans l'hypothèse $(\mathcal{H})$ n'est pas prise au sens stricte plus explicitement quand:

$$\left|\int fv\right| \leq K_a(v), \text{ pour tout } v \in H \text{ tel que } |v|_6 = 1.$$

Remarque 3.2 *Ce travail est organisé comme suit: en Section 2 nous donnons la définition de la condition de Palais-Smale ainsi que quelques résultats préliminaires utiles, la Section 3 est consacrée aux preuves des Théorèmes 3.1 et 3.2.*

3.2 Quelques résultats préliminaires

On définit la fonctionnelle d'énergie correspondant au problème $(\mathcal{P})$ par:

$$I_a(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \frac{1}{6}|u|_6^6 - \int fu, \text{ pour tout } u \in H$$

où $\widehat{M}(t)$ est la primitive de $M(t) = at + b$ ($\widehat{M}(0) = 0$). Il est claire que I_a soit bien définie, de classe C^1 sur H et ses points critiques sont des solutions faibles du problème $(\mathcal{P})$ i.e. ils satisfont:

$$\left(a||u||^2 + b\right)\int \nabla u \nabla v - \int |u|^4 uv - \int fv = 0, \text{ pour tout } v \in H.$$

La fonctionnelle I_a n'est pas bornée inférieurement sur H mais peut le devenir sur un sous ensemble de H. A cet effet, nous introduisons ce qu'on appelle la variété de Nehari définie par:

$$\mathcal{N} = \{u \in H \backslash \{0\} : \langle I_a'(u),\ u\rangle = 0\}.$$

Soit $h_u(t) = I_a(tu)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $u \in H\backslash\{0\}$. Ces application sont connues sous le nom de "fibering maps" et furent introduites en premier lieu par Drábek et Pohozaev [16]. La variété $\mathcal{N}$ est étroitement liée au comportement de $h_u(t)$, pour plus de détails consulter par exemple [14].

Il est naturel de partager $\mathcal{N}$ en trois sous ensembles à savoir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &: = \{u \in \mathcal{N}\colon h_u''(1) > 0\}, \\ \mathcal{N}^0 &: = \{u \in \mathcal{N}\colon h_u''(1) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{N}^- := \{u \in \mathcal{N} :\ h_u''(1) < 0\},$$

où $h_u''(t) = -5|u|_6^6 t^4 + 3a||u||^4 t^2 + b||u||^2$. Ces sous ensembles correspondent aux minima locaux, points d'inflexion et maxima locaux de I_a respectivement.

Définition 3.1 *Une suite (u_n) est dite suite de Palais-Smale de niveau c ((P-S)$_c$ en abrégé) pour I dans H si*

$$I(u_n) = c + o_n(1) \ \ et\ I'(u_n) = o_n(1) \ \ dans\ H^{-1}.$$

On dit que I vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite (P-S)$_c$ de I possède une sous suite convergente dans H.

Posons $H_u(t) = h_u'(t) + \int fu = -|u|_6^6 t^5 + a||u||^4 t^3 + b||u||^2 t$.

La fonction $H_u(t)$ atteint son maximum $\widetilde{K}_a(u)$ au point $t_{a,\max}^u$ où

$$\widetilde{K}_a(u) := 10^{-5/2}|u|_6^{-9}[12a^2||u||^8 + 80b|u|_6^6||u||^2 + 4a||u||^4\widetilde{A}_a(u)][3a||u||^4 + \widetilde{A}_a(u)]^{1/2}$$

et

$$t^u_{a,\max} = 10^{-1/2}|u|_6^{-3}\left(3a||u||^4 + \widetilde{A}_a(u)\right)^{1/4}$$

avec $\widetilde{A}_a(u) := ||u||\,(9a^2||u||^6 + 20b|u|_6^6)^{1/2}$.

Soit, pour $a \geq 0$,

$$\widetilde{\mu}_{a,f} := \inf_{v\in H\setminus\{0\}}\left\{\widetilde{K_a}(v) - \left|\int fv\right|\right\} \text{ et } \mu_{a,f} := \inf_{|v|_6=1}\left\{K_a(v) - \int fv\right\}.$$

Remarque 3.3 *i) Si $\widetilde{\mu}_{a,f} > 0$ alors $\mu_{a,f} > 0$.*

ii) On a pour $a > 0$, $\widetilde{\mu}_{a,f} \geq \widetilde{\mu}_{0,f}$. Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$ avec $a = 0$, Tarantello a prouvé que $\mu_{0,f} > 0$. On en déduit que $\widetilde{\mu}_{a,f} > 0$.

Les lemmes suivants vont jouer un role crucial dans la suite de ce travail.

Lemme 1 *Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H})$ vérifiée. Alors, pour tout $u \in H\diagdown\{0\}$, il existe trois uniques valeurs $t_1^+ = t_1^+(u)$, $t^- = t^-(u) \neq 0$ et $t_2^+ = t_2^+(u)$ telles que:*

i) $t_1^+ < -t^u_{a,\max}$, $t_1^+u \in \mathcal{N}^-$, et $I_a(t_1^+u) = \max\limits_{t\leq -t^u_{a,\max}} I_a(tu)$,

ii) $-t^u_{a,\max} < t^- < t^u_{a,\max}$, $t^-u \in \mathcal{N}^+$ et $I_a(t^-u) = \min\limits_{|t|\leq t^u_{a,\max}} I_a(tu)$,

iii) $t_2^+ > t^u_{a,\max}, t_2^+u \in \mathcal{N}^-$ et $I_a(t_2^+u) = \max\limits_{t\geq t^u_{a,\max}} I_a(tu)$.

Preuve: Un calcul simple montre que $H_u(t)$ est concave pour $t > 0$ et atteint son maximum $\widetilde{K}_a(u)$ en $t^u_{a,\max}$. Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$ et comme $H_u(t)$ est impaire, on obtient les résultats desirés . ■

On a pour tout $t \geq 0$

$$\Psi(tu) = t\Psi(u), \text{ où } \Psi(u) = \widetilde{K_a}(u) - \left|\int fu\right|,$$

et pour $\gamma > 0$ donné, on déduit que

$$\inf_{|u|_6\geq\gamma}\Psi(u) \geq \gamma\widetilde{\mu}_{a,f}. \tag{3.1}$$

En particulier si f satisfait $(\mathcal{H})$ cet infimum est borné loin de zero.

Lemme 3.1 *Si f satisfait $(\mathcal{H})$, alors $\mathcal{N}^0 = \varnothing$.*

Preuve: Raisonnant par contradiction, on suppose qu'il existe $u \in \mathcal{N}^0$ i.e

$$3a \|u\|^4 + b\|u\|^2 = 5|u|_6^6 \tag{3.2}$$

on obtient alors:

$$\widetilde{A}_a(u) = 3a\|u\|^4 + 2b\|u\|^2\,, \text{ et } \left(t_{a,\max}^u\right)^2 = 1$$

par conséquent

$$\Psi(u) = \widetilde{\widetilde{K}}_a(u) - \left|\int fu\right| \leq \widetilde{\widetilde{K}}_a(u) - \int fu = H_u(1) - \int fu = h'_u(1) = 0 \tag{3.3}$$

La condition (3.2) implique que

$$|u|_6 \geq \left(\frac{b}{5}S\right)^{1/4} := \gamma.$$

De (3.1) et (3.3), on obtient

$$0 < \gamma\widetilde{\mu}_{a,f} \leq \Psi(u) = 0,$$

ce qui aboutit à une contradiction. ■

Lemme 3.2 *Supposons que $f \neq 0$ satisfait $(\mathcal{H})$, alors pour tout $u \in \mathcal{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $t : B_0^\varepsilon \subset H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tels que $t(0) = 1$, $t(v)(u-v) \in \mathcal{N}$ pour $\|v\| < \epsilon$ et*

$$\langle t'(0), v\rangle = \frac{2\left(2a\|u\|^2 + b\right)\int \nabla u \nabla v - 6b\int |u|^4 uv - \int fv}{3a||u||^4 + b||u||^2 - 5|u|_6^6}. \tag{3.4}$$

Preuve: Définissons l'application $F : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$, par

$$F(s,w) = as^3||u-w||^4 + bs||u-w||^2 - s^5|u-w|_6^6 - \int f(u-w).$$

Puisque $F(1,0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial s}(1,0)=3a||u||^4+b||u||^2-5|u|_6^6\neq 0$, en appliquant le théorème des fonctions implicites au point $(1,0)$, on obtient le résultat voulu. ■

Définissons

$$c_0=\inf_{v\in\mathcal{N}^+} I_a(v) \text{ et } c_1=\inf_{v\in\mathcal{N}^-} I_a(v). \tag{3.5}$$

De plus si u_0 est un minimum local de I_a, on a alors $3a\|u_0\|^4+b\|u_0\|^2-5|u_0|_6^6\geq 0$ et puisque $\mathcal{N}^0=\varnothing$, on déduit que $u_0\in\mathcal{N}^+$. Par conséquent $c_0=\inf_{u\in\mathcal{N}} I_a(u)$.

Lemme 3.3 *La fonctionnelle I_a est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}$.*

Preuve: Pour $u\in\mathcal{N}$, on a $a\|u\|^4+b\|u\|^2=|u|_6^6+\int fu$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
I_a(u) &= \frac{a}{12}\|u\|^4+\frac{b}{3}\|u\|^2-\frac{5}{6}\int fu\\
&\geq \frac{b}{3}\|u\|^2-\frac{5}{6}\|f\|_-\|u\|,\\
&\geq \frac{-25}{48b}\|f\|_-^2.
\end{aligned}$$

Alors I_a est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}$ ■

En particulier, on a $c_0\geq\frac{-25}{48b}\|f\|_-^2$. Pour prouver que $c_0<0$, on a besoin d'une borne supérieure pour c_0. Pour cela, considérons $v\in H$ la solution unique de l'équation $-\Delta u=f$. Alors, pour $f\not\equiv 0$ on a $\int fv=\|v\|^2=\|f\|_-^2$.

Soit $t_0=t^-(v)$, $v\in H\backslash\{0\}$ défini comme dans le Lemme 3.1. Alors, $t_0v\in\mathcal{N}^+$ et par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
I_a(t_0v) &= -\frac{3a}{4}t_0^4\|v\|^4-\frac{b}{2}t_0^2\|v\|^2+\frac{5}{6}t_0^6|v|_6^6\\
&\leq -\frac{a}{4}t_0^4\|v\|^4-\frac{b}{3}t_0^2\|v\|^2<0,
\end{aligned}$$

donc $c_0<0$.

Lemme 2 *Soit f vérifiant $(\mathcal{H})$, alors il existe des suites minimisantes $(u_n)\subset\mathcal{N}^+$ et $(v_n)\subset\mathcal{N}^-$ telles que* *i)* $I_a(u_n) < c_0 + \frac{1}{n}$ *et* $I_a(w) \geq I_a(u_n) - \frac{1}{n}\|w - u_n\|$ *pour tout* $w \in \mathcal{N}^+$.

ii) $I_a(v_n) < c_1 + \frac{1}{n}$ *et* $I_a(w) \geq I_a(v_n) - \frac{1}{n}\|w - v_n\|$ *pour tout* $w \in \mathcal{N}^-$.

Preuve: Il est facile de montrer que I_a est bornée dans $\mathcal{N}$, en appliquant le principe variationnel d'Ekeland aux problèmes de minimisation (3.5), on obtient des suites minimisantes $(u_n) \subset \mathcal{N}^+$ et $(v_n) \subset \mathcal{N}^-$ satisfaisant (i) et (ii) respectivement. ■

Soit $(u_n) \subset \mathcal{N}^+$ la suite minimisante obtenue dans le lemme précédent. Pour n suffisamment grand, on a

$$I_a(u_n) = \frac{a}{12}\|u_n\|^4 + \frac{b}{3}\|u_n\|^2 - \frac{5}{6}\int f u_n < c_0 + \frac{1}{n} \leq -\frac{b}{3}t_0^2 \|f\|_-^2 ,$$

ce qui implique que

$$\int f u_n \geq \frac{2}{5} b t_0^2 \|f\|_-^2 > 0, \tag{3.6}$$

il en résulte

$$\frac{2}{5} b t_0^2 \|f\|_- \leq \|u_n\| \leq \frac{5}{2b}\|f\|_- . \tag{3.7}$$

On en déduit que (u_n) est bornée dans H.

Lemme 3.4 *Soit f verifiant $(\mathcal{H})$, alors $\|I_a'(u_n)\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Preuve: Supposons que $\|I_a'(u_n)\| > 0$ pour n grand, en appliquant le Lemme 3 avec $u = u_n$ et $w = \delta \frac{I_a'(u_n)}{\|I_a'(u_n)\|}$, $\delta > 0$ petit, on trouve $t_n(\delta) := t\left[\delta \frac{I_a'(u_n)}{\|I_a'(u_n)\|}\right]$, tel que

$$w_\delta = t_n(\delta)\left[u_n - \delta \frac{I_a'(u_n)}{\|I_a'(u_n)\|}\right] \in \mathcal{N}.$$

Du principe variationel d'Ekeland, on a $\frac{1}{n}\|w_\delta - u_n\| \geq I_a(u_n) - I_a(w_\delta) = (1 - t_n(\delta))\langle I_a(w_\delta),\ u_n\rangle + \delta t_n(\delta)\left\langle I_a'(w_\delta), \frac{I_a'(u_n)}{\|I_a'(u_n)\|}\right\rangle + o_n(\delta)$. En divisant par δ et passant à la limite quand δ tend vers zero, on obtient

$$\frac{1}{n}(1+|t_n'(0)|\,\|u_n\|) \geq -t_n'(0)\,\langle I_a'(u_n),\ u_n\rangle + \|I_a'\,(u_n)\| = \|I_a'\,(u_n)\|\,,$$

où $t_n'(0) = \left\langle t'(0), \frac{I_a'(u_n)}{\|I_a'(u_n)\|} \right\rangle$. Il résulte de (2.7) que

$$\|I_a'\,(u_n)\| \leq \frac{C}{n}\,(1+|t_n'(0)|)\,.$$

On affirme que $|t_n'(0)|$ est uniformèment borné par rapport à n : en effet, puisque (u_n) est une suite bornée, de (2.4) et l'estimation (2.7), on a

$$|t_n'(0)| \leq \frac{C}{\left|3a\,\|u_n\|^4 + b\,\|u_n\|^2 - 5\,|u_n|_6^6\right|}.$$

On doit donc prouver que $\left|3a\,\|u_n\|^4 + b\,\|u_n\|^2 - 5\,|u_n|_6^6\right|$ est borné loin de zero. Raisonnant par contradiction, supposons que pour une sous suite notée encore (u_n), on ait

$$3a\,\|u_n\|^4 + b\,\|u_n\|^2 - 5\,|u_n|_6^6 = o_n(1). \tag{3.8}$$

De (2.7) et (2.8), on déduit

$$|u_n|_6 \geq \gamma,\ \text{pour une bonne constante } \gamma$$

De surcroit de (2.8) et du fait que $u_n \in \mathcal{N}$ on a

$$\int f u_n = -2a\,\|u_n\|^4 + 4\,|u_n|_6^6 + o_n(1),$$

qui combinée avec la définition de $\widetilde{\mu}_{a,f}$ implique que

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma\widetilde{\mu}_{a,f} \leq \gamma(\widetilde{K_a}(u_n) - \int fu_n) + o_n(1) \\ &= \gamma h'_{u_n}(1) + o_n(1) \\ &= o_n(1). \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $\|I'_a(u_n)\|$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. ■

3.3 Preuves des Théorèmes 3.1 et 3.2

3.3.1 Existence d'un minimiseur local dans $\mathcal{N}^+$

Dans cette sous section, on prouve que I_a atteint un minimum local dans $\mathcal{N}^+$ en faisant usage du principe variationnel d'Ekeland. Puisque (u_n) est bornée dans H, passant à une sous suite si nécessaire, on a: $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans H, alors $\langle I'_a(u_0), w\rangle = 0$, pour tout $w \in H$. Donc u_0 est une solution faible de $(\mathcal{P})$.

De (2.6), on déduit que $\int fu_0 > 0$, alors $u_0 \in H\backslash\{0\}$ et en particulier $u_0 \in \mathcal{N}$. Par conséquent,

$$c_0 \leq I_a(u_0) = \frac{a}{12}\|u_0\|^4 + \frac{b}{3}\|u_0\|^2 - \frac{5}{6}\int fu_0 \leq \varliminf_{n\to\infty} I_a(u_n) = c_0,$$

d'où $c_0 = I_a(u_0)$. Il s'en suit que (u_n) converge fortement vers u_0 dans H et nécessairement $u_0 \in \mathcal{N}^+$. Pour conclure que u_0 est un minimum local de I_a, rappelons que pour chaque $u \in H$, on a

$$I_a(su) \geq I_a\left(t^- u\right) \text{ pour tout } 0 < s < t^u_{a,\max},$$

en particulier pour $u = u_0 \in \mathcal{N}^+$, on a $t^- = 1 < t^{u_0}_{a,\max}$. Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit de telle sorte qu'on ait $1 < t^{u_0-w}_{a,\max}$ et $t(w)$ satisfaisant $t(w)(u_0 - w) \in \mathcal{N}$ pour tout

$\|w\| < \varepsilon$. Puisque $t(w) \to 1$ quand $\|w\| \to 0$, on peut toujours supposer que

$$t(w) < t_{a,\max}^{u_0 - w} \text{ pour tout } w \text{ tel que } \|w\| < \varepsilon,$$

donc $t(w)\,(u_0 - w) \in \mathcal{N}^+$ et pour $0 < s < t_{a,\max}^{u_0-w}$, on a

$$I_a\,(s\,(u_0 - w)) \geq I_a\,(t(w)\,(u_0 - w)) \geq I_a\,(u_0)\,,$$

prenant $s = 1$, on conclut que $I_a\,(u_0 - w) \geq I_a\,(u_0)$, pour tout $w \in H$ tel que $\|w\| < \varepsilon$.

Pour se convaincre que $u_0 \geq 0$ quand $f \geq 0$, il suffit de prendre $t_0 = t^-(|u_0|)$ tel que $t_0\,|u_0| \in \mathcal{N}^+$. Ce qui implique que nécessairement

$$I_a(t_0\,|u_0|) \leq I_a(|u_0|) \leq I_a(u_0).$$

Par conséquent, on peut toujours prendre $u_0 \geq 0$.

3.3.2 Existence d'un minimiseur local dans $\mathcal{N}^-$

Cette sous section est consacrée à l'existence d'une seconde solution u_1 dans $\mathcal{N}^-$ telle que $c_1 = I_a\,(u_1)$ via le Lemme du Col. On détermine en premier lieu le bon niveau de la condition de Palais-Smale.

La meilleure constante de Sobolev S_6 est atteinte dans $\mathbb{R}^3$ par

$$U_{\varepsilon,x_0}(x) = \varepsilon^{1/2}\left(\varepsilon^2 + |x - x_0|^2\right)^{-1/2},$$

où $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$.

On a le résultat suivant qui est très important dans ce travail.

Lemme 3.5 *Soit f vérifiant $(\mathcal{H})$, alors I_a satisfait la condition de (P-S)$_c$ pour*

$$c < c^* = \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{a^3}{24}S_6^6 + \frac{b}{6}S_6E_1 + \frac{a^2}{24}S_6^4E_1 + c_0,$$

où $E_1 = (a^2 S_6^4 + 4bS_6)^{1/2}$.

Preuve: Soit (u_n) une suite de (P-S)$_c$ avec $c < c^*$ alors (u_n) est bornée dans H. Elle possède donc une sous suite encore notée (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans H, $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $1 \leq s < 6$ et $u_n \longrightarrow u$ p.p dans Ω. Soit $w_n = u_n - u$. Une simple application du Lemme de Brezis-Lieb [9], nous permet d'écrire:

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u\|^2 + o_n(1), \ \ \|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + 2\|w_n\|^2 \|u\|^2 + \|u\|^4 + o_n(1),$$

$$|u_n|_6^6 = |w_n|_6^6 + |u|_6^6 + o_n(1).$$

Puisque $I_a(u_n) = c + o_n(1)$, on a

$$\frac{a}{4}\|w_n\|^4 + \frac{b}{2}\|w_n\|^2 + \frac{a}{2}\|w_n\|^2\|u\|^2 - \frac{1}{6}|w_n|_6^6 = I_a(u_n) - I_a(u) = c - I_a(u) + o_n(1).$$

Le fait que $I_a'(u_n) = o_n(1)$ et $\langle I_a'(u), u\rangle = 0$, nous donne

$$a\|w_n\|^4 + b\|w_n\|^2 + 2a\|w_n\|^2\|u\|^2 - |w_n|_6^6 = o_n(1).$$

Supposons à présent que $\|w_n\| \to l$ avec $l > 0$, il s'en suit que

$$|w_n|_6^6 = al^4 + bl^2 + 2al^2\|u\|^2.$$

Par ailleurs, la définition de S_6 nous mène à

$$\|w_n\|^2 \geq S_6 |w_n|_6^2, \text{ pour tout } n.$$

Vu que $n \to +\infty$, on déduit que

$$l^2 \geq \frac{a}{2}S_6^3 + \frac{1}{2}S_6\left(a^2 S_6^4 + 4S_6(b + 2a\|u\|^2)\right)^{1/2}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
c &= \frac{a}{12}l^4 + \frac{b}{3}l^2 + \frac{a}{6}l^2 \|u\|^2 + I_a(u) \\
&\geq \frac{a}{12}l^4 + \frac{b}{3}l^2 + c_0 \\
&\geq \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{a^3}{24}S_6^6 + \frac{b}{6}S_6 E_1 + \frac{a^2}{24}S_6^4 E_1 + c_0 = c^*
\end{aligned}$$

ce qui donne lieu à une contradiction. Par conséquent, $l = 0$, d'où $u_n \longrightarrow u$ fortement dans H. ■

A présent, nous allons donner quelques estimations des fonctions extrémales utiles à l'avancement de notre raisonnement. Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi(x) = 1$ pour $x \in B_{x_0}^r$, $\phi(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_{x_0}^{2r}$, $0 \leq \phi \leq 1$ et $|\nabla \phi| \leq C$.

Posons $u_{\varepsilon,x_0} = \phi U_{\varepsilon,x_0}$.

Les estimations suivantes sont données dans [10], quand ε tend vers 0 :

$$|u_{\varepsilon,x_0}|_6^6 = A + O\left(\varepsilon^3\right), \text{ et } \|u_{\varepsilon,x_0}\|^2 = B + O\left(\varepsilon\right),$$

où

$$A = \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |x - x_0|^2\right)^{-6}, \text{ et } B = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U_{1,x_0}(x)|^2,$$

on a aussi à partir de [26]: $\int u_{\varepsilon,x_0}^5 u_0 = O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right)$.

Dans la recherche de notre seconde solution, il est impératif de montrer que $c_1 < c^*$. A cet effet, soit $\Omega' \subset \Omega$ un ensemble de mesure positive tel que $u_0 > 0$ dans Ω' (si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer u_0 par $-u_0$ et f par $-f$ respectivement), où u_0 est donnée dans la Proposition 3.1.

Lemme 3.6 *Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est vérifiée, il existe alors a_0 et ε_0 suffisamment petits tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $0 < a < a_0$, on ait $I_a(u_0 + tu_{\varepsilon,x_0}) < c^*$ pour tout $t > 0$.*

Preuve: Des estimations précédentes et de l'inégalité de Holder, on obtient:

$$\begin{aligned}
I_a\left(u_0+tu_{\varepsilon,x_0}\right) &= I_a\left(u_0\right)+\frac{a}{4}t^4\left\|u_{\varepsilon,x_0}\right\|^4+\frac{b}{2}t^2\left\|u_{\varepsilon,x_0}\right\|^2-\frac{1}{6}t^6\left|u_{\varepsilon,x_0}\right|_6^6-\frac{t^5}{6}\int u_\varepsilon^5 u_0+ \\
& at^2\left[\left(\int \nabla u_0\nabla u_\varepsilon\right)^2+\left\|u_\varepsilon\right\|^2(\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2+t\int \nabla u_0\nabla u_\varepsilon)\right]+o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \\
&\leq I_a\left(u_0\right)+\frac{a}{4}t^4B^2+\frac{b}{2}t^2B-\frac{1}{6}t^6A-\frac{t^5}{6}O\left(\varepsilon^{1/2}\right)+ \\
& +at^2\left[\frac{3}{2}\left\|u_0\right\|^2B+tB^{3/2}\left\|u_0\right\|\right]+o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \\
&= c_0+Q_{\varepsilon}\left(t\right)+R(t),
\end{aligned}$$

où

$$Q_{\varepsilon}\left(t\right)=-\frac{1}{6}At^6+\frac{a}{4}B^2t^4+\frac{b}{2}Bt^2-\frac{t^5}{6}O\left(\varepsilon^{1/2}\right)+o\left(\varepsilon^{1/2}\right),$$

et

$$R(t)=a\left[\frac{3}{2}t^2\left\|u_0\right\|^2B+t^3B^{3/2}\left\|u_0\right\|\right].$$

Sachant que $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}Q_{\varepsilon}\left(t\right)=-\infty$, et $Q_{\varepsilon}\left(t\right)>0$ pour t au voisinage de 0, alors le $supQ_{\varepsilon}\left(t\right)$ est atteint pour $t=T_\varepsilon>0$ et T_ε verifie:

$$-AT_{\varepsilon}^5+aB^2T_{\varepsilon}^3+bBT_\varepsilon=O\left(\varepsilon^{1/2}\right).$$

De même, on a $Q_{0}\left(t\right)$ atteint son maximum en T_0 dont l'expression est

$$T_0^2=\frac{aB^2+\left(a^2B^4+4bAB\right)^{1/2}}{2A}.$$

Il est évident que T_ε tende vers T_0 quad ε tend vers 0. Ecrivons $T_\varepsilon=T_0(1\pm\delta_{\varepsilon})$, alors δ_{ε}tend vers 0 quand ε tend vers 0 De plus $I_a\left(u_0+tu_\varepsilon\right)\rightarrow-\infty$ lorsque t tend vers ∞, il existe $T_\varepsilon < T_1$ tel que

$$I_a(u_0 + tu_{\varepsilon,x_0}) \leq c^* + Q_\varepsilon(T_\varepsilon) + \sup_{t<T_1} R(t).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
Q_\varepsilon(T_\varepsilon) &= -\frac{1}{6}AT_\varepsilon^6 + \frac{a}{4}B^2T_\varepsilon^4 + \frac{b}{2}BT_\varepsilon^2 - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \\
&= -\frac{1}{6}AT_0^6 + \frac{a}{4}B^2T_0^4 + \frac{b}{2}BT_0^2 \pm aT_0^4B^2\delta_\varepsilon \pm bT_0^2B\delta_\varepsilon \mp T_0^6A\delta_\varepsilon - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \\
&= -\frac{1}{6}AT_0^6 + \frac{a}{4}B^2T_0^4 + \frac{b}{2}BT_0^2 - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de T_0 dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
Q_\varepsilon(T_\varepsilon) &= \frac{abB^3}{4A} + \frac{b(a^2B^6 + 4bB^3A)^{1/2}}{6A} + \frac{a^3B^6}{24A^2} + \frac{a^2(a^2B^{12} + 4bB^9A)^{1/2}}{24A^2} - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \\
&= \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{a^3}{24}S_6^6 + (\frac{b}{6}S_6 + \frac{a^2}{24}S_6^4)(a^2S_6^4 + 4bS_6)^{1/2} - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) \\
&\leq c^* - c_0 - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
I_a(u_0 + tu_{\varepsilon,x_0}) &\leq c^* - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) + \sup_{t<T_1} R(t) \\
&\leq c^* - O\left(\varepsilon^{1/2}\right) + o\left(\varepsilon^{1/2}\right) + aK,
\end{aligned}$$

où

$$K = \frac{3}{2}T_1^2 \|u_0\|^2 B + T_1^3 B^{3/2} \|u_0\|.$$

Par conséquent, il existe a_0 et ε_0 suffisamment petit tel que

$$I_a(u_0 + tu_{\varepsilon,x_0}) < c^*, \text{ pour tout } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ et } 0 < a < a_0.$$

■

Le Lemme 3.1 nous assure l'existence d'un unique $t^+(u) > 0$ tel que $t^+(u)\, u \in \mathcal{N}^-$ et $I_a(t^+u) \geq I_a(tu)$, pour tout $|t| \geq t^u_{a,\max}$ et chaque $u \in H$ tel que $\|u\| = 1$.

La propriété extrémale de $t^+(u)$ ainsi que son unicité nous assure que c'est bien une fonction continue en u.

Posons

$$V_1 = \{0\} \cup \left\{ u \in H \ / \ \|u\| < t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\} \text{ et } V_2 = \left\{ u \in H \ / \ \|u\| > t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\}.$$

Comme il est mentionné dans [26], on remarque que sous la condition $(\mathcal{H})$, on a $H \backslash \mathcal{N}^- = V_1 \cup V_2$ et $\mathcal{N}^+ \subset V_1$, $u_0 \in V_1$ et $u_0 + t_0 u_\varepsilon \in V_2$ pour un $t_0 > 0$, prudemment choisi.

Soit $\Gamma = \{h : [0,1] \to H \text{ continues}, \ h(0) = u_0, \ h(1) = u_0 + t_0 u_\varepsilon\}$.

Il est évident que $h : [0,1] \to H$ donnée par $h(t) = u_0 + t t_0 u_\varepsilon$ appartienne à Γ. On en conclut que:

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_a(h(t)) < c^*.$$

Comme le rang de chaque $h \in \Gamma$ intersecte $\mathcal{N}^-$, on a $c \geq c_1$.

En appliquant, une fois de plus, le principe variationnel d'Ekeland, on obtient une suite minimisante $(u_n) \subset \mathcal{N}^-$ telle que

$$I_a(u_n) \to c_1 \text{ et } \|I_a'(u_n)\| \to 0.$$

On en déduit aussi que $c_1 < c^*$.

Par conséquent, on obtient une sous suite (u_{n_k}) de (u_n) et $u_1 \in H$ tels que

$$u_{n_k} \to u_1 \text{ fortement dans } H.$$

Ceci implique que u_1 est un point critique de I_a, $u_1 \in \mathcal{N}^-$ et $I_a(u_1) = c_1$.

Finallement pour $f \geq 0$, soit $t^+ = t^+(|u_1|) > 0$ satisfaisant $t^+ |u_1| \in \mathcal{N}^-$. Du Lemme 3.1 on a $I_a(u_1) = \max_{t \geq t_{a,\max}} I_a(tu_1) \geq I_a(t^+u_1) \geq I_a(t^+ |u_1|)$. On conclut que $u_1 \geq 0$.

Chapitre 4

Existence et multiplicité des solutions pour un problème critique non homogène du type Kirchhoff dans $\mathbb{R}^3$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on établit l'existence et la multiplicité des solutions pour le problème du type Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev, suivant:

$$(\mathcal{P}_\lambda) \begin{cases} -\left(a\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + b\right) \Delta u = |u|^4 u + \lambda f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes positives, λ est un paramètre positive et f appartient à $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$, ($H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ étant le dual de $H^1(\mathbb{R}^3)$).

Ces dernières années, l'étude des problèmes de Kirchhoff moyennant des méthodes variationelles est devenue fortement répandue dans les travaux concernant cet axe de recherche. Quelques résultats intéressants dans des domaines bornés ont fait l'objet de plusieurs articles notamment [[2], [13], [8], [12], [23], [24]]. Néanmoins, ces problèmes deviennent beaucoup plus compliqués dans $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$. Ces complications sont dues en fait, à la perte de compacité de l'injection de Sobolev $\left(H^1(\mathbb{R}^N),\ \|.\|\right) \hookrightarrow \left(L^q\left(\mathbb{R}^N\right),\ \|.\|_q\right)$ pour tout $q \in [2,\ 2_*]$, où $\|.\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla .|^2 dx\right)^{1/2}$ est la norme standard dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, $\|.\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |.|^q dx\right)^{1/q}$ est la norme dans $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$. Cependant, rares sont les travaux ayant considéré le problème suivant:

$$(\mathcal{P}_{a,V,h}) \left\{ -\left(a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + b\right) \Delta u + V(x)\, u = h(x,u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \right.$$

où $N \geq 3$, $a > 0$, b est une constante positive, $V \in C\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ et $h \in C\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\ \mathbb{R}\right)$ étant à croissance sous critique et satisfaisant des conditions suffisantes pour s'assurer que toute suite de Palais Smale ou de Cerami est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Plusieurs auteurs ont aussi imposé certaines conditions sur la fonction poids $V(x)$ pour contourner la perte de compacité de l'injection de Sobolev citée plus haut. A cet effet, Wu dans [27] a eu recours à l'hypothèse suivante:

$$(*) \ \ \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \geq c > 0 \text{ et pour tout } d > 0;\ mes\left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq d\right\} < \infty,$$

il a montré l'existence des solutions non triviales pour $(\mathcal{P}_{a,V,h})$. Par ailleurs, Chena et Li voir [15] ont étudié $(\mathcal{P}_{a,V,h})$ où $h(x,u) = k(x,u) + f(x)$, k satisfait la condition du type Ambrosetti–Rabinowitz, $f \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ et V vérifie l'hypothèse $(*)$. Ils ont montré l'existence de multiples solutions en utilisant le principe variationnel d'Ekeland [17] ainsi que le Lemme du Col [3]. Récemment, Li et al. [21] ont aussi étudié $(\mathcal{P}_{a,0,h})$ et ont montré l'existence d'une cetaine valeur positive a_0 telle que ce problème possède une solution positive pour $a \in (0, a_0)$.

Notre objectif est d'étendre les résultats de [15] au cas critique. Puisque dans tous les cas de figure l'injection $(H^1(\mathbb{R}^3),\ \|.\|) \hookrightarrow (L^6\left(\mathbb{R}^3\right),\ |.|_6)$ n'est jamais compacte même sous l'hypothèse $(*)$, on se passe de la présence du terme $V(x)$. Ainsi on supposera dans ce travail, que $V \equiv 0$ et on montrera l'existence et la multiplicité des solutions pour toute constante positive a.

Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 4.1 *Soit $a > 0$, $b > 0$ et $f \not\equiv 0$. Alors, il existe $\lambda_* > 0$ tel que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet au moins deux solutions non triviales pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$.*

Ce travail est organisé comme suit: En Section 2, on donne quelques résultats techniques utiles à l'approche variationnelle pour la démonstration de notre résultat principal qui sera prouvé en Section 3.

4.2 Résultats auxiliaires

Avant d'entamer cette partie, signalons qu'il est bien connu que l'injection $(H^1(\mathbb{R}^3), \ \|.\|) \hookrightarrow (L^6(\mathbb{R}^3), \ |.|_6)$ est continue mais pas compacte et que la meilleure constante de Sobolev S_6 est atteinte dans $\mathbb{R}^3$ par les fonctions

$$u_\varepsilon(x) = (3\varepsilon)^{1/4} \left(\varepsilon + |x|^2\right)^{-1/2},$$

où $\varepsilon > 0$, pour plus de détails voir [25].

Puisque notre approche est variationnelle, on définit la fonctionnelle d'énergie I_λ associée au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ par:

$$I_\lambda(u) = \frac{a}{4}||u||^4 + \frac{b}{2}||u||^2 - \frac{1}{6}|u|_6^6 - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} fu \ , \text{ pour tout } u \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Il est claire que I_λ est bien définie dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et qu'elle est de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$. On dit qu'un point $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ est solution faible du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ s'il vérifie:

$$\left(a||u||^2 + b\right) \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} u^5 \varphi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} f\varphi \ = 0, \text{ pour tout } \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Rappelons la définition standard suivante:

Définition 4.1 *Une suite* $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *est dite une suite de Palais Smale de* I_λ *(suite de* $(PS)_c$ *en abrégé), si elle vérifie*

$$I_\lambda(u_n) \to c \quad \textit{et} \quad I'_\lambda(u_n) \to 0 \quad \textit{dans} \quad H^{-1}\left(\mathbb{R}^3\right) \ \textit{quand}\ n \to \infty. \tag{4.1}$$

Les lemmes suivants seront de rigueur dans la preuve de notre théorème.

Lemme 4.1 *Soit* $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *une suite de* $(PS)_c$ *de* I_λ *pour un certain* $c \in \mathbb{R}$. *Alors* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *avec* $I'_\lambda(u) = 0$.

Preuve: Considérant (4.1), on a

$$\begin{aligned} c + \circ_n(1) &= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{6}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \\ &\geq \frac{a}{12}||u_n||^4 + \frac{b}{3}||u_n||^2 - \lambda\frac{5}{6}\|f\|_- \|u_n\|. \end{aligned}$$

On déduit que (u_n) est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. Quitte à en extraire une sous suite, on obtient

$u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^6\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_n \to u$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$,

par conséquent, $\langle I'_\lambda(u_n), \varphi\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, ce qui implique que $I'_\lambda(u) = 0$.

■

Lemme 4.2 *Il existe des constantes positives* λ_1, ρ_1 *et* δ_1 *telles que pour tout* $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *on ait*

$$\begin{aligned} I_\lambda(u)|_{\partial B_0^{\rho_1}} &\geq \delta_1 \ \textit{et} \\ I_\lambda(u)|_{B_0^{\rho_1}} &\geq -\frac{\lambda^{3/2}}{2}\|f\|_-^2. \end{aligned}$$

Preuve: Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ et $\rho = \|u\|$. L'inégalité de Sobolev et celle de Hölder font que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{a}{4}\rho^4 + \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{1}{6S_6^3}\rho^6 - \left(\lambda^{3/4}\|f\|_-\right)\left(\lambda^{1/4}\rho\right),$$

Par ailleurs, de l'inegalité $\alpha\beta < \dfrac{\alpha^2}{2} + \dfrac{\beta^2}{2}$ vérifiée pour chaque α, $\beta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{a}{4}\rho^4 + \frac{b - \lambda^{1/2}}{2}\rho^2 - \frac{1}{6S_6^3}\rho^6 - \frac{\lambda^{3/2}}{2}\|f\|_-^2, \\ &\geq \frac{a}{4}\rho^4 - \frac{1}{6S_6^3}\rho^6 - \frac{\lambda^{3/2}}{2}\|f\|_-^2, \text{ pour tout } \lambda \leq b^2. \end{aligned}$$

Soit

$$\Psi(\rho) = \frac{a}{4}\rho^4 - \frac{1}{6S_6^3}\rho^6,$$

un calcul directe nous permettra de conclure que

$$\Psi(\rho) \geq 0 \text{ pour tout } \rho \leq \rho_1 \text{ avec } \rho_1 = \left(\frac{3}{2}aS_6^3\right)^{1/2},$$

de cette dernière et pour tout $\lambda \leq b^2$, on s'aperçoit immédiatement que

$$I_\lambda(u)|_{B_0^{\rho_1}} \geq -\frac{\lambda^{3/2}}{2}\|f\|_-^2,$$

et aussi

$$I_\lambda(u)|_{\partial B_0^{\rho_1}} \geq \frac{\Psi(\rho_1)}{2} \text{ pour tout } \lambda \leq \left(\frac{\Psi(\rho_1)}{\|f\|_-^2}\right)^{2/3}.$$

Prenant

$$\lambda_1 = \min\left\{b^2, \left(\frac{\Psi(\rho_1)}{\|f\|_-^2}\right)^{2/3}\right\} \text{ et } \delta_1 = \frac{\Psi(\rho_1)}{2},$$

la conclusion s'en suivra aisément. ■

Lemme 4.3 *Soit* $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *une suite de* $(PS)_c$ *de* I_λ *pour un certain* $c \in \mathbb{R}$ *tel que*

$u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. Alors

$$\textit{soit } u_n \to u \textit{ fortement, ou } c \geq I_\lambda(u) + C_{a,b,S_6},$$

où

$$C_{a,b,S_6} = \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{a^3}{24}S_6^6 + \left(\frac{a^2}{24}S_6^3 + \frac{b}{6}\right)\left(a^2S_6^6 + 4bS_6^3\right)^{1/2}.$$

Preuve: Comme nous l'avons montré précédemment (u_n) est bien une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, de plus en écrivant $v_n = u_n - u$; on en déduit que $v_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H^1, et en vertu du Lemme de Brezis-Lieb [9], on aura

$$\|u_n\|^2 = \|v_n\|^2 + \|u\|^2 + o_n(1) \text{ et } |u_n|_6^6 = |v_n|_6^6 + |u|_6^6 + o_n(1). \tag{4.2}$$

En combinant (2.1) et (2.2), on obtient

$$c + o_n(1) = I_\lambda(u) + \frac{a}{4}\|v_n\|^4 + \frac{b}{2}\|v_n\|^2 + \frac{a}{2}\|v_n\|^2\|u\|^2 - \frac{1}{6}|v_n|_6^6,$$

et aussi

$$o_n(1) = a\|v_n\|^4 + b\|v_n\|^2 + 2a\|v_n\|^2\|u\|^2 - |v_n|_6^6. \tag{4.3}$$

Par conséquent,

$$c + o_n(1) = I_\lambda(u) + \frac{a}{12}\|v_n\|^4 + \frac{b}{3}\|v_n\|^2 + \frac{a}{6}\|v_n\|^2\|u\|^2 \tag{4.4}$$

Supposant que $\|v_n\| \to l > 0$, considérant (2.3) et appliquant l'inégalité de Sobolev, on aboutira à

$$S_6^{-3}l^6 \geq al^4 + bl^2,$$

ce qui implique que

$$l^2 \geq \frac{a}{2}S_6^3 + \frac{1}{2}S_6\left(a^2S_6^4 + 4S_6b)\right)^{1/2}.$$

De cette dernière inégalité et de (2.4) , on conclut que

$$
\begin{aligned}
c &\geq I_\lambda(u)+\frac{a}{12}l^4+\frac{b}{3}l^2 \\
&\geq I_\lambda(u)+\frac{ab}{4}S_6^3+\frac{a^3}{24}S_6^6+\left(\frac{a^2}{24}S_6^3+\frac{b}{6}\right)\left(a^2S_6^6+4bS_6^3\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la preuve du lemme. ■

4.3 Preuve du Théorème 4 1

Cette preuve s'établira en deux parties.

4.3.1 Existence d'un minimiseur local

Premièrement, du Lemme 4.2 on définit

$$c_1=\inf\left\{I_\lambda(u)\,;\ u\in\bar{B}_0^{\rho_1}\right\}.$$

Puisque $f\not\equiv 0$, on peut choisir $\Phi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\right)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^3}f\Phi>0$. Il existe $t_0>0$ suffisament petit tel que $\|t_0\Phi\|<\rho_1$ et

$$I_\lambda(t_0\Phi)=\frac{a}{4}t_0^4\|\Phi\|^4+\frac{b}{2}t_0^2\|\Phi\|^2-\frac{t_0^6}{6}|\Phi|_6^6-\lambda t_0\int_{\mathbb{R}^3}f\Phi\ <0,$$

ce qui implique que $c_1<0=I_\lambda(0)$. Le principe variationnel d'Ekeland appliqué à l'espace métrique $\bar{B}_{\rho_1}$ complet pour la norme de $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, va nous assurer l'existense d'une suite de $(\mathrm{PS})_{c_1}$ $(u_n)\subset\bar{B}_{\rho_1}$ telle que $u_n\rightharpoonup u_1$ faiblement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ pour certain u_1 avec $\|u_1\|\leq\rho_1$. Supposons que $u_n\nrightarrow u_1$ fortement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$, il s'en suivra du Lemme 4.3 que

$$c_1\geq I_\lambda(u_1)+C_{a,b,S_6}>c_1,$$

ce qui donne lieu à une contradiction. On conclut que u_1 est une solution non triviale du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ avec énergie négative.

4.3.2 Existence d'une solution du type Mountain Pass

L'existence de cette solution suivra immédiatement du Lemme suivant.

Lemme 4.4 *Soit $\lambda_2 > 0$ tel que*

$$-\frac{\lambda^{3/2}}{2}\left\|f\right\|_{-}^{2} + C_{a,b,S_6} > 0, \ \textit{pour tout } \lambda \in (0,\lambda_2).$$

Il existe alors $z_\varepsilon \in H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $0 < \lambda_* \leq \lambda_2$ tels que

$$\sup_{t\geq 0} I_\lambda(tz_\varepsilon) < c_1 + C_{a,b,S_6}, \quad \textit{pour tout } \lambda \in (0,\lambda_*)$$

Preuve: Puisque $f \not\equiv 0$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ et $z_\varepsilon\left(x\right) = \pm u_\varepsilon\left(x\right)$ tels que $\int_{\mathbb{R}^3} fz_\varepsilon > 0$. Considérons les fonctions

$$\Phi_1(t) = \frac{at^4}{4}\left\|z_\varepsilon\right\|^4 + \frac{bt^2}{2}\left\|z_\varepsilon\right\|^2 - \frac{t^6}{6}\left|z_\varepsilon\right|_6^6.$$

et

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t) - \lambda t \int_{\mathbb{R}^3} fz_\varepsilon \ .$$

Alors pour tout $\lambda \in (0,\lambda_2)$, on a

$$\Phi_2(0) = 0 < -\frac{5}{24}\lambda^2\left\|f\right\|_{H_-} + C_{a,b,S_6}.$$

Il découlera de la continuité de $\Phi_2(t)$, l'existence de $t_1 > 0$ suffisamment petit tel que

$$\Phi_2(t) < -\frac{5}{24}\lambda^2\left\|f\right\|_{H_-} + C_{a,b,S_6} \ \ \text{pour tout } t \in \left(0,t_1\right).$$

Par ailleurs, la fonction $\Phi_1(t)$ atteint son maximum en

$$t_\varepsilon = \left[\frac{a\left\|z_\varepsilon\right\|^4 + \left(a^2\left\|z_\varepsilon\right\|^8 + 4b\left\|z_\varepsilon\right\|^2\left|z_\varepsilon\right|_6^6\right)^{1/2}}{2\left|z_\varepsilon\right|_6^6}\right]^{1/2}.$$

De la définition de S on aura

$$\begin{aligned}
\frac{at_\varepsilon^4}{4}\left\|z_\varepsilon\right\|^4 &= \frac{a}{4}\left\|z_\varepsilon\right\|^4\left[\frac{a\left\|z_\varepsilon\right\|^4 + \left(a^2\left\|z_\varepsilon\right\|^8 + 4b\left\|z_\varepsilon\right\|^2\left|z_\varepsilon\right|_6^6\right)^{1/2}}{2\left|z_\varepsilon\right|_6^6}\right]^2 \\
&= \frac{a}{16}\left[\frac{a\left|z_\varepsilon\right|^6}{\left|z_\varepsilon\right|_6^6} + \left[\frac{a^2\left\|z_\varepsilon\right\|^{12} + 4b\left\|z_\varepsilon\right\|^6\left|z_\varepsilon\right|_6^6}{\left|z_\varepsilon\right|_6^{12}}\right]^{1/2}\right]^2 \\
&= \frac{a}{16}\left[aS_6^3 + \left[a^2S_6^6 + 4bS_6^3\right]^{1/2}\right]^2 \\
&= \frac{a^3}{8}S_6^6 + \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{a^2}{8}\left(a^2S_6^{12} + 4bS_6^9\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Et de façon similaire, on obtient

$$\frac{bt_\varepsilon^2}{2}\left\|z_\varepsilon\right\|^2 = \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{b}{4}\left(a^2S_6^6 + 4bS_6^3\right)^{1/2},$$

et

$$\frac{t_\varepsilon^6}{6}\left|z_\varepsilon\right|_6^6 = \frac{a^3}{12}S_6^6 + \frac{ab}{4}S_6^3 + \frac{1}{12}\left(a^2S_6^3 + b\right)\left(a^2S_6^6 + 4bS_6^3\right)^{1/2}.$$

Les estimations précédentes nous permettront de déduire que $\sup\limits_{t\geq 0}\Phi_1(t) \leq C_{a,b,S_6}$.
Par ailleurs, en sollicitant le Lemme 2 on s'aperçoit que

$$c_1 \geq -\frac{\lambda^{3/2}}{2}\left\|f\right\|_-^2 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in (0, \lambda_1),$$

de surcroit on a

$$c_1 > -t_1\lambda\int_{\mathbb{R}^3} fz_\varepsilon dx \quad \text{si } \lambda < 4\left(t_1\int_{\mathbb{R}^3} fz_\varepsilon\right)^2 / \left\|f\right\|_-^4.$$

Prenant $\lambda_* = \min\left\{\lambda_2,\ 4\left(t_1 \int_{\mathbb{R}^3} f z_\varepsilon\ dx\right)^2 / \|f\|_-^4\right\}$, on déduit que

$$\sup_{t\geq 0} I_\lambda(tz_\varepsilon) < c_1 + C_{a,b,S_6} \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_*)\,.$$

■

Notons que $I_\lambda(0) = 0$ et $I_\lambda(Tz_\varepsilon) < 0$ pour T suffisament grand, et encore du Lemme 4.2, on sait que

$$I_\lambda\,(u)|_{\partial B_0^{\rho_1}} \geq \delta_1 > 0 \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Alors du Théorème de Mountain Pass, on a l'existence d'une suite de $(\mathrm{PS})_{c_2}$ où

$$c_2 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda\left(\gamma\left(t\right)\right),$$

avec

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,\ 1]\,,\ H^1\left(\mathbb{R}^3\right)),\ \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = Tz_\varepsilon\right\}.$$

Utilisant le Lemme 4.1, on conclut que (u_n) possède une sous suite encore notée (u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u_2$ faiblement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. De plus, on sait en vertu du Lemme 4.4 que

$$\sup_{t\geq 0} I_\lambda(tz_\varepsilon) < C_{a,b,S_6} + c_1, \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_*),$$

par conséquent, du Lemme 4.3 on conclut que $u_n \rightarrow u_2$ fortement dans $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. On obtient donc un point critique u_2 de I_λ satisfaisant $I_\lambda\left(u_2\right) > 0$ ou plus exactement une deuxième solution du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ avec énergie positive.ar montrer par l'absurde que u_λ n'est pas identiquement nulle. Supposons que $u_\lambda \equiv 0$.

On écrit à partir de i) du Lemme 5.6:

$$\frac{1}{6}\int f(u_n^+)^6 = \frac{a}{4}\left\|u_n\right\|^4 + \frac{b}{2}\left\|u_n\right\|^2 - c_\lambda^+.$$

Puisque $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^+$, on a:

$$0 < (4-q)a\left\|u_n\right\|^4 + (2-q)b\left\|u_n\right\|^2 - (6-q)\int f(u_n^+)^6 + o(1).$$

Combinant ces deux dernières, on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{(q-10)}{2}a\left\|u_n\right\|^4 + (2q-16)b\left\|u_n\right\|^2 - 6(6-q)c_\lambda^+ + o(1) \\ &< 6(6-q)c_\lambda^+ + o(1) < 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne lieu à une contradiction. On conclut alors que u_λ n'est pas identiquement nulle. Par conséquent,

$$c_\lambda^+ \leq I_\lambda(u_\lambda) = \frac{a}{12}\left\|u_\lambda\right\|^4 + \frac{b}{3}\left\|u_\lambda\right\|^2 - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f(u_\lambda^+)^q \leq \varliminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c_\lambda^+,$$

donc $c_\lambda^+ = I_\lambda(u_\lambda)$. Il s'en suit que (u_n) converge fortement vers u_λ dans H et nécessairement $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Pour conclure que u_λ est un minimum local de I_λ, rappelons que pour chaque $u \in H$, on a

$$I_\lambda(su) \geq I_\lambda\left(t^- u\right) \text{ pour tout } 0 < s < t_{a,\max}^u,$$

en particulier pour $u = u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$, on a $t^- = 1 < t_{a,\max}^{u_\lambda}$. Choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit de telle manière à avoir $1 < t_{a,\max}^{u_\lambda - w}$ et $t(w)$ satisfaisant $t(w)(u_\lambda - w) \in \mathcal{N}_\lambda$ pour tout $\|w\| < \varepsilon$. Puisque $t(w) \to 1$ quand $\|w\| \to 0$, on peut toujours supposer que

$$t(w) < t_{a,\max}^{u_\lambda - w} \text{ pour tout } w \text{ tel que } \|w\| < \varepsilon,$$

alors $t(w)(u_\lambda - w) \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et pour $0 < s < t_{a,\max}^{u_\lambda - w}$, on a:

$$I_\lambda(s(u_0 - w)) \geq I_\lambda(t(w)(u_\lambda - w)) \geq I_\lambda(u_\lambda),$$

prenant $s=1$, on conclut que $I_{\lambda}\left(u_{\lambda}-w\right)\geq I_{\lambda}\left(u_{\lambda}\right)$, pour tout $w\in H$ tel que $\|w\|<\varepsilon$.

Chapitre 5

Positives solutions pour un problème de Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev et poids

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions du problème suivant:

$$(\mathcal{P}_\lambda)\begin{cases} -M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \lambda f(x)\,|u|^{q-2}\,u + g(x)\,|u|^4\,u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $M(t) = at + b$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $1 < q < 2$, a, b sont des constantes positives, λ un paramètre positif et f et g des fonctions continues non négatives sur $\overline{\Omega}$.

Etalons à présent un bref historique:

Pour $a = 0$, $b = 1$ et $f = g \equiv 1$, Ambrosetti et.al. [1] ont obtenu l'existence de λ_0 tel que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet deux solutions positives pour $\lambda \in (0, \lambda_0)$, une solution positive pour $\lambda = \lambda_0$, et aucune solution positive pour $\lambda > \lambda_0$.

Pour $a = 0$ et $b = q = 1$, et $g \equiv 1$, Tarantello [26] a montré l'existence d'au moins deux solutions sous une certaine condition sur f.

Pour $a, b > 0$, $q = 1$ et $g \equiv 1$, Bouchekif et al. [6] ont prouvé l'existence de deux solutions sous certaines conditions sur f .

Pour $a = 0$ et $b = 1$, Lin [19] a montré l'existence de λ_0 tel que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution positive de moindre énergie pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ et l'existence de $\lambda_1 < \lambda_0$ tel que sous certaines conditions, le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet k solutions positives pour $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

La question qui fuse alors, est la suivante: Peut on obtenir des résultats similaires pour $a > 0$?

Avant de donner notre résultat principal, considérons les hypothèses suivantes:

(H1) $f, g \in C(\overline{\Omega})$, $f \geq 0, f \neq 0$ et $g > 0$.

(H2) Il existe $a_1, ..., a_k \in \Omega$, $g(a_i) = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} g(x)$, $1 \leq i \leq k$.

(H3) choisissons $\rho_0 > 0$ tel que $\overline{B_{a_i}^{\rho_0}} \cap \overline{B_{a_j}^{\rho_0}} = \emptyset$ pour $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$ et $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{a_i}^{\rho_0}} \subset \Omega$, il existe α tel que $f(x) \geq \alpha > 0$, pour tout $x \in B_{a_i}^{\rho_0/2}$.

Soient

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{q S_q^{q/2} \sqrt{8ab}}{\sqrt{2}(6-q) \|f\|_\infty} \left[\frac{2 S_6^3 \sqrt{3ab(4-q)(2-q)}}{(6-q) \|g\|_\infty} \right]^{(3-q)/3}, \\
\lambda_2 &= \frac{4qb S_q^{q/2}}{2(6-q) \|f\|_\infty} \left[\frac{b S_6^3 (2-q)}{(6-q) \|g\|_\infty} \right]^{(6-q)/4}
\end{aligned}$$

et $\lambda_* = \max(\lambda_1, \lambda_2)$

Nos principaux résultats sont les suivants:

Théorème 5.1 *Si $\lambda \in (0, \lambda_*)$, alors il existe une solution positive de moindre énergie pour le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.*

Théorème 5.2 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), alors le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet k solutions positives pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$.*

Ce travail est réparti comme suit: En section 2, on donne des résultats préliminaires utiles par la suite. La Section 3 est consacrée à l'étude de l'existence d'une solution positive de moindre énergie. Dans la Section 4, on prouve l'existence de k solutions positives correspondant aux k maximums de g.

5.2 Résultats préliminaires

On définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ par

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u\|^2\right) - \frac{1}{6}\int g(u^+)^6 - \frac{\lambda}{q}\int f(u^+)^q, \text{ pour tout } u \in H$$

où $\widehat{M}(t)$ est la primitive de $M(t) = at + b$ $(\widehat{M}(0) = 0)$. Il claire que I_λ soit bien définie et de classe C^1 sur H et ses points critiques sont des solutions faibles du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$, ceci veut dire qu'un point $u \in H$ est dit solution faible de $(\mathcal{P}_\lambda)$ s'il satisfait $(a||u||^2 + b)\int \nabla u \nabla v - \int g(u^+)^5 v - \lambda \int f(u^+)^{q-1} v = 0$, pour tout $v \in H$.

Constatons que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} I_\lambda(tu) = -\infty$, I_λ n'est donc pas bornée inférieurement sur H. Afin de contourner cela, on introduit la variété de Nehari définie par

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in H \backslash \{0\} : \langle I'_\lambda(u),\ u\rangle = 0\}.$$

En fait, l'ensemble $\mathcal{N}_\lambda$ est lié au comportement de l'application $h_u(t) := I_\lambda(tu)$ for $t \in \mathbb{R}^*$ and $u \in H\backslash\{0\}$. Ces applications sont communèment dites applications "fibering" et ce sont Drábek et Pohozaev qui en furent les instigateurs pour plus de détails nous prions le lecteur de consulter [16], [11] or [14].

On a: $h''_u(t) = 3at^2||u||^4 + b||u||^2 - \lambda(q-1)t^{q-2}\int f(u^+)^q - 5t^4\int g(u^+)^6$. Ceci nous incitera à décomposer $\mathcal{N}_\lambda$ en trois sous ensembles disjoints:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda^+ &: = \{u \in \mathcal{N}\colon h''_u(1) > 0\}, \\ \mathcal{N}_\lambda^0 &: = \{u \in \mathcal{N}\colon h''_u(1) = 0\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{N}_\lambda^- := \{u \in \mathcal{N} \colon h_u''(1) < 0\},$$

qui correspondent aux minima locaux, points d'inflexion et maxima locaux de I_λ respectivement.

Commençons par donner les résultats suivants.

Lemme 3 *Supposons que u_0 soit un minimiseur local de I_λ dans $\mathcal{N}_\lambda$ et que $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$. Alors $I_\lambda'(u_0) = 0$ dans H^{-1}.*

Preuve: Si u_0 est un minimiseur local de I_λ dans $\mathcal{N}_\lambda$, alors u_0 est solution du problème $\mathrm{Min}\{I_\lambda(u);\ \gamma_\lambda(u) = 0\}$, où

$$\gamma_\lambda(u) = a||u||^4 + b||u||^2 - \lambda \int f(u^+)^q - \int g(u^+)^6.$$

Donc, en appliquant la théorie des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $I_\lambda(u_0) = \mu\gamma_\lambda(u_0)$. Par conséquent, $\left\langle I_\lambda'(u_0), u_0\right\rangle = \mu\left\langle \gamma_\lambda'(u_0), u_0\right\rangle$. Puisque, $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda$ et $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0$, donc $\left\langle \gamma_\lambda'(u_0), u_0\right\rangle \neq 0$ on déduit que $\mu = 0$. La preuve est complète. ■

Les lemmes suivants interviendront dans la démonstration de nos résultats principaux.

Lemme 4 *Pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$ et pour chaque $u \in H \setminus \{0\}$, il existe un unique $t^+ = t^+(u) \geq t_{\max}^u$ tel que $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, et $I_\lambda(t^+u) = \max_{t \geq t_{\max}^u} I_\lambda(tu)$.*

De plus, si $\int f(u^+)^q > 0$, il existe un unique $t^- = t^-(u) \leq t_{\max}^u$ tel que $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et $I_\lambda(t^-u) = \min_{0 \leq t \leq t_{\max}^u} I_\lambda(tu)$.

Preuve: Posons $h_u'(t) = t^{q-1}(H_u(t) - \lambda \int f(u^+)^q)$ où

$$H_u(t) = a||u||^4 t^{4-q} + b||u||^2 t^{2-q} - t^{6-q} \int g(u^+)^6.$$

On a $H_u(0) = 0$ et $\lim_{t \longrightarrow +\infty} H_u(t) = -\infty$, alors $H_u(t)$ atteint son maximum au point $t_{\max}^u$, elle est croissante sur $(0, t_{\max}^u)$ et décroissante sur $(t_{\max}^u, \infty)$. Le résultat s'en suivra immédiatement. ■

Lemme 5 *Pour tout* $0 < \lambda < \lambda_*$, *on a* $\mathcal{N}^0 = \varnothing$.

Preuve: Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$ i.e

$$3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 = (q-1)\lambda \int f(u^+)^q + 5 \int g(u^+)^6$$

et u vérifie

$$a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - \int g(u^+)^6 - \lambda \int f(u^+)^q = 0.$$

De ceci et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(4-q)(2-q)ab} \|u\|^3 &\leq a(4-q) \|u\|^4 + b(2-q) \|u\|^2 \\ &\leq (6-q) S_6^{-3} \|g\|_\infty \|u\|^6, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\sqrt{8ab} \|u\|^3 &\leq 2a \|u\|^4 + 4b \|u\|^2 \\ &\leq \lambda(6-q) \|f\|_\infty S_q^{-q/2} \|u\|^q, \end{aligned}$$

il en résulte

$$\left(\frac{2S_6^3 \sqrt{(4-q)(2-q)ab}}{(6-q) \|g\|_\infty} \right)^{1/3} \leq \|u\| \leq \left(\frac{\lambda(6-q) \|f\|_\infty}{2S_q^{q/2} \sqrt{8ab}} \right)^{1/(3-q)},$$

et

$$\left(\frac{(2-q)bS_6^3}{(6-q) \|g\|_\infty} \right)^{1/4} \leq \|u\| \leq \left(\frac{\lambda(6-q) \|f\|_\infty}{4bS_q^{q/2}} \right)^{1/(2-q)}.$$

ce qui contredit le fait que $0 < \lambda < \lambda_*$. ■

Lemme 6 *Pour tout* $0 < \lambda < \lambda_*$ *et pour chaque* $u \in \mathcal{N}_\lambda$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et une fonction* *différentiable* $t : B_0^{\varepsilon} \subset H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tels que* $t(0) = 1$, $t(v)(u - v) \in \mathcal{N}_\lambda$ *pour* $\|v\| < \epsilon$ *et*

$$\langle t'(0), v\rangle = \frac{\left(4a\|u\|^2 + 2b\right)\int \nabla u \nabla v - 6\int g(u^+)^5 v - \lambda q \int f(u^+)^{q-1} v}{h_u''(1)}.$$

Preuve: Définissons l'application $F : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$, par:

$$F(s, w) = as^3||u - w||^4 + bs||u - w||^2 - s^5 \int g(u^+ - w)^6 - \lambda \int f(u^+ - w)^q$$

Puisque

$$F(1, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial s}(1, 0) = h_u''(1) \neq 0,$$

en appliquant le théorème des fonctions implicites au point $(1, 0)$, on obtient le résultat de ce lemme. ■

Lemme 5.1 *La fonctionnelle* I_λ *est coercive et bornée inférieurement sur* $\mathcal{N}_\lambda$.

Preuve: On sait que pour tout $u \in \mathcal{N}_\lambda$,

$$a\|u\|^4 + b\|u\|^2 = \int g|u|^6 + \lambda \int f|u|^q.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{6}\int g|u|^6 - \frac{\lambda}{q}\int f|u|^q \\
&= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{6}(a\|u\|^4 + b\|u\|^2) - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f|u|^q \\
&\geq \frac{1}{12}\|u\|^2\left[a\|u\|^2 + 4b\right] - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\|f\|_\infty S_q^{-q/2}\|u\|^q \\
&\geq \frac{b}{3}\|u\|^2 - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\|f\|_\infty S_q^{-q/2}\|u\|^q. \\
&\geq -\lambda\frac{(6-q)}{6q}\|f\|_\infty S_q^{-q/2}\|u\|^q.
\end{aligned}$$

Alors, I_λ est coercive et bornée inférieurement sur $\mathcal{N}_\lambda$. ■

Définissons $c_\lambda^+ = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} I_\lambda(u)$, $c_\lambda^- = \inf\limits_{v\in\mathcal{N}_\lambda^-} I_\lambda(v)$ et.$c_\lambda = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u)$. De plus si u_λ est un minimum local de I_λ, on a alors $3a\|u_\lambda\|^4 + b\|u_\lambda\|^2 - \lambda(q-1)\int f(u_\lambda^+)^q - 5\int g(u_\lambda^+)^6 \geq 0$ et puisque $\mathcal{N}_\lambda^0 = \varnothing$, on déduit que $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Par conséquent $c_\lambda^+ = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$.

On a le résultat suivant:

Lemme 5.2 *Pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$, il existe deux suites minimisantes $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ et $(v_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ telles que*

i) $I_\lambda(u_n) < c_\lambda^+ + \frac{1}{n}$ et $I_\lambda(w_1) \geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{n}\|w_1 - u_n\|$ pour tout $w_1 \in \mathcal{N}_\lambda^+$.

ii) $I_\lambda(v_n) < c_\lambda^- + \frac{1}{n}$ et $I_\lambda(w_2) \geq I_\lambda(v_n) - \frac{1}{n}\|w_2 - v_n\|$ pour tout $w_2 \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

Preuve: Il est clair que I_λ est bornée dans $\mathcal{N}_\lambda$. Alors en appliquant le principe variationnel d'Ekeland, on obtient deux suites minimisantes $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ et $(v_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ qui vérifient (i) et (ii) respectivement. ■

5.3 Preuve du Théorème 5.1

La démonstration du Théorème 5.1 fait intervenir la proposition suivante:

Proposition 7 *Pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$, on a $c_\lambda^+ < 0$.*

Preuve: Soit $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Puisque

$$\begin{aligned}\lambda(6-q)\int f(u^+)^q &> 2a\|u\|^4 + 4b\|u\|^2 \\ &\geq 4b\|u\|^2.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{6}\int g(u^+)^6 - \lambda\int f(u^+)^q \\
&= \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{6}(a\|u\|^4 + b\|u\|^2) - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f(u^+)^q \\
&\leq \frac{b}{3}\|u\|^2 - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f(u^+)^q \\
&\leq -\frac{4b(2-q)}{12}\|u\|^2 < 0.
\end{aligned}$$

On déduit que $c_\lambda^+ < 0$. ■

Dans ce qui suit, on prouvera l'existence d'une solution positive de moindre énergie en utilisant le principe variationnel d'Ekeland. En effet, on a d'aprés i) du Lemme 5.6, l'existence d'une suite minimisante $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ telle que $I_\lambda(u_n) < c_\lambda^+ + \frac{1}{n}$ et $I_\lambda(w) \geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{n}\|w - u_n\|$ pour tout $w \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Puisque (u_n) est bornée dans H, quitte à extraire une sous suite,on a : $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ faiblement dans H.

Commençons par montrer par l'absurde que u_λ n'est pas identiquement nulle. Supposons que $u_\lambda \equiv 0$.

On écrit à partir de i) du Lemme 5.6:

$$\frac{1}{6}\int f(u_n^+)^6 = \frac{a}{4}\|u_n\|^4 + \frac{b}{2}\|u_n\|^2 - c_\lambda^+.$$

Puisque $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^+$, on a:

$$0 < (4-q)a\|u_n\|^4 + (2-q)b\|u_n\|^2 - (6-q)\int f(u_n^+)^6 + o(1).$$

Combinant ces deux dernières, on obtient:

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{(q-10)}{2}a\|u_n\|^4 + (2q-16)b\|u_n\|^2 - 6(6-q)c_\lambda^+ + o(1) \\
&< 6(6-q)c_\lambda^+ + o(1) < 0.
\end{aligned}$$

Ce qui donne lieu à une contradiction. On conclut alors que u_λ n'est pas identiquement nulle.

Par conséquent,

$$c_\lambda^+ \leq I_\lambda(u_\lambda) = \frac{a}{12}\|u_\lambda\|^4 + \frac{b}{3}\|u_\lambda\|^2 - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f(u_\lambda^+)^q \leq \varliminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c_\lambda^+,$$

donc $c_\lambda^+ = I_\lambda(u_\lambda)$. Il s'en suit que (u_n) converge fortement vers u_λ dans H et nécessairement $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Pour conclure que u_λ est un minimum local de I_λ, rappelons que pour chaque $u \in H$, on a

$$I_\lambda(su) \geq I_\lambda\left(t^- u\right) \text{ pour tout } 0 < s < t_{a,\max}^u,$$

en particulier pour $u = u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$, on a $t^- = 1 < t_{a,\max}^{u_\lambda}$. Choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit de telle manière à avoir $1 < t_{a,\max}^{u_\lambda - w}$ et $t(w)$ satisfaisant $t(w)(u_\lambda - w) \in \mathcal{N}_\lambda$ pour tout $\|w\| < \varepsilon$. Puisque $t(w) \to 1$ quand $\|w\| \to 0$, on peut toujours supposer que

$$t(w) < t_{a,\max}^{u_\lambda - w} \text{ pour tout } w \text{ tel que } \|w\| < \varepsilon,$$

alors $t(w)(u_\lambda - w) \in \mathcal{N}_\lambda^+$ et pour $0 < s < t_{a,\max}^{u_\lambda - w}$, on a:

$$I_\lambda(s(u_0 - w)) \geq I_\lambda(t(w)(u_\lambda - w)) \geq I_\lambda(u_\lambda),$$

prenant $s = 1$, on conclut que $I_\lambda(u_\lambda - w) \geq I_\lambda(u_\lambda)$, pour tout $w \in H$ tel que $\|w\| < \varepsilon$.

5.4 Preuve du Théorème 5.2

La meilleure constante de Sobolev S_6 est atteinte dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$U_{\varepsilon,a}(x) = \varepsilon^{1/2}\left(\varepsilon^2 + |x-a|^2\right)^{-1/2},$$

où $a \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Définissons une fonction test $\varphi_a \in C_0^1(\Omega)$ telle que pour $\delta > 0$, $\varphi_a(x) = 0$ si $|x-a| \geq 2\delta, \varphi_a(x) = 1$ si $|x-a| \leq \delta$; $0 \leq \varphi_a(x) \leq 1$ et $|\nabla \varphi_a(x)| \leq C$. Posons $u_{\varepsilon,i} = \varphi_{a_i} U_{\varepsilon,a_i}$ pour $i \in \{1, ..., k\}$.

Définissons pour $i \in \{1, .., k\}$,

$$\beta_i(u) := \frac{\displaystyle\int_\Omega \psi_i(x) |\nabla u|^2 \, dx}{|\nabla u|_2^2} \text{ où } \psi_i(x) = \min\{\delta, |x - a_i|\} \text{ et } \delta > 0.$$

Prenons $r_0 = \frac{\delta}{3}$ avec $\delta < \frac{1}{4} \min_{i \neq j} |a_i - a_j|$. Soit

$$\mathcal{N}_i^+ = \left\{ u \in \mathcal{N}_\lambda^+ \mid \beta_i(u) \leq r_0 \right\}.$$

Notons

$$c_i^+ := \inf_{u \in \mathcal{N}_i^+} I(u).$$

Lemme 5.3 *Soit $\delta > 0$ et r_0 défini précédemment. Si $\beta_i(u) \leq r_0$ alors*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq 3 \int_{\Omega \setminus B_{a_i}^\delta} |\nabla u|^2 \, dx.$$

La preuve de ce lemme est dans [12].

A présent fixons a_j, $j \in \{1, .., k\}$.

Proposition 8 *Sous les hypothèses (H1)-(H3) pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$ et $j = 1, .., k$, alors $c_j^+ = \inf_{v \in \mathcal{N}_j^+} I_\lambda(v)$ est atteinte en un point $u_j \in \mathcal{N}_j^+$ qui est un point critique est aussi un minimum local de I_λ.*

Preuve: On sait d'après ce qui précède que pour $u \in \mathcal{N}_j^+ \subset \mathcal{N}_\lambda$, on a:

$$I_\lambda(u) \geq -\lambda \frac{(6-q)}{6q} \|f\|_\infty S_q^{-q/2} \|u\|^q.$$

En particulier

$$c_j^+ \geq c_\lambda \geq -\lambda \frac{(6-q)}{6q} \|f\|_\infty S_q^{-q/2} \|u\|^q ,$$

Par ailleurs, on sait que pour $u \in \mathcal{N}_j^+ \subset \mathcal{N}_\lambda^+$, on a

$$I_\lambda(u) \leq -\frac{4b(2-q)}{12} \|u\|^2 < 0.$$

D'où $c_j^+ < 0$.Utilisant l'hypothèse (H3), on peut conclure l'existence de ε_1 tel que $\int f(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}^+)^q > 0$ pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Soit $0 < t_{\varepsilon,j}^- < t_{\varepsilon,j,\max}$ défini comme dans le Lemme 5 2 tel que $t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j} \in \mathcal{N}_\lambda^+$. Du fait que $\beta_j\left(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, il existe ε_2 tel que $\beta_j\left(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right) \leq r_0$ pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$.
Alors $t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j} \in \mathcal{N}_j^+$ d'où

$$\begin{aligned}
I_\lambda\left(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right) &= \frac{a}{4}\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^4 + \frac{b}{2}\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^2 - \frac{1}{6}\int g(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}^+)^6 - \lambda \int f(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}^+)^q \\
&= \frac{a}{4}\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^4 + \frac{b}{2}\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^2 - \frac{1}{6}(a\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^4 + b\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^2) - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}^+)^q \\
&\leq \frac{b}{3}\left\|t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right\|^2 - \lambda\frac{(6-q)}{6q}\int f(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}^+)^q \\
&\leq -\frac{4b(2-q)(t_{\varepsilon,j}^-)^2}{12}\left\|u_{\varepsilon,j}\right\|^2 < 0.
\end{aligned}$$

On conclut que $-\infty < c_\lambda \leq c_j^+ < 0$. Du principe variationnel d'Ekeland, on obtient une suite minimisante $(u_{j,n})_n \subset \mathcal{N}_j^+$ avec les propriétés suivantes:

$$(i) \qquad I_\lambda(u_{j,n}) < c_j^+ + \frac{1}{n}$$

et

$$(ii) \qquad I_\lambda(w) \geq I_\lambda(u_{j,n}) - \frac{1}{n}\left|\nabla(w - u_{j,n})\right|_2, \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{N}_j^+.$$

En prenant n assez grand, on obtient pour un certain $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$I_\lambda\left(u_{j,n}\right) < c_j^+ + \frac{1}{n} \leq -\frac{4b(2-q)\left(t_{\varepsilon,j}^-\right)^2}{12}\left\|u\right\|^2.$$

Usant du fait que $u_{j,n} \in \mathcal{N}_\lambda^+$, on obtient

$$-2a\left\|u_{j,n}\right\|^4 - 4b\left\|u_{j,n}\right\|^2 + \lambda(6-q)\int f(u_{j,n}^+)^6 > 0.$$

On conclut que $\int f(u_{j,n}^+)^6 > 0$, d'où $u_{j,n}$ n'est pas identiquement nulle. La suite $\left(u_{j,n}\right)_n$ est bornée quitte à extraire une sous suite on a $u_{j,n} \rightharpoonup u_j$ faiblement dans H. Montrons à présent que u_j n'est aussi pas identiquement nulle. Raisonnons par l'absurde en supposons que $u_j \equiv 0$. On a à partir de i)

$$\frac{1}{6}\int f(u_{j,n}^+)^6 = \frac{a}{4}\left\|u_{j,n}\right\|^4 + \frac{b}{2}\left\|u_{j,n}\right\|^2 - c_j^+.$$

Puisque $u_{n,j} \in \mathcal{N}_\lambda^+$, on a:

$$0 < (4-q)a\left\|u_{j,n}\right\|^4 + (2-q)b\left\|u_{j,n}\right\|^2 - (6-q)\int f(u_{j,n}^+)^6 + o\left(1\right).$$

Combinant ces dernières, on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{(q-10)}{2}a\left\|u_{j,n}\right\|^4 + (2q-16)b\left\|u_{j,n}\right\|^2 - 6(6-q)c_j^+ + o\left(1\right) \\ &< 6(6-q)c_j^+ + o\left(1\right) < 0 \end{aligned}$$

D'où la contradiction. Par conséquent u_j n'est pas identiquement nulle et du fait que $\left\|I'\left(u_{j,n}\right)\right\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on déduit que

$$\left\langle I_\lambda'\left(u_j\right), w\right\rangle = 0, \text{ pour tout } w \in H$$

i.e. u_j est une solution faible de $(\mathcal{P}_\lambda)$. En particulier $u_j \in \mathcal{N}_\lambda$ et pour conclure que $u_j \in \mathcal{N}_\lambda^+$, il suffit de montrer que $\mathcal{N}_j^+$, $j \in \{1, ..., k\}$ est fermé dans H. En effet d'après le Lemme 5 3, on a pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$, $\mathcal{N}^0 = \varnothing$ on écrit alors $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^+$ ($\mathcal{N}_\lambda^\pm$ étant fermés dans $H \backslash \{0\}$). Pour j fixé dans $\{1, .., k\}$, on a $\mathcal{N}_j^+ = \mathcal{N}_\lambda^+ \cap \beta_j^{-1}([0, r_0])$. Il suffit de montrer que β_j est une fonction continue sur $\mathcal{N}_\lambda^+$.Soit $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ telle que $u_n \to u$ dans H i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0(\varepsilon) > 0$, $\forall n \geq N_0$, $|\nabla(u_n - u)|_2 < \varepsilon$.Constatons que pour $u \in \overline{\mathcal{N}_\lambda^+} = \mathcal{N}_\lambda^+$, alors $u \neq 0$ dans H et $|\nabla u_n|_2 = |\nabla u|_2 + o_n(1)$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\beta_j(u_n) - \beta_j(u)\right| &\leq \frac{1}{|\nabla u_n|_2^2} \int_\Omega \psi_j(x) \left| |\nabla u_n(x)|^2 - |\nabla u(x)|^2 \right| dx + \\ &+ \int_\Omega \psi_j(x) \, |\nabla u(x)|^2 \left| \frac{1}{|\nabla u_n|_2^2} - \frac{1}{|\nabla u|_2^2} \right| dx \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left|\beta_j(u_n) - \beta_j(u)\right| \leq 4 \frac{\delta \varepsilon}{|\nabla u|_2}.$$

Ainsi

$$c_j^+ \leq I_\lambda(u_j) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf I_\lambda(u_{j,n}) = c_j^+.$$

Par conséquent, $u_{j,n} \longrightarrow u_j$ fortement dans H et $I_\lambda(u_j) = c_j^+ = \inf_{v \in \mathcal{N}_j^+} I_\lambda(v)$. On conclut du Lemme 5 1 et du principe du maximum que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ possède k solutions positives. ∎

Perspectives

Nos principales préocupations seraient de:

1)Généraliser nos résultats obtenus en dimension trois, à des dimensions supérieures.

2)Etendre ces mêmes résultats à une fonction $M(t)$ plus générale.

Notons que ces deux perspectives requièrent de bonnes troncations et des estimations à priori des solutions obtenues via ces troncations.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[2] C.O. Alves, F J.S.A. Correa, T.F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl. 49 (2005) 85-93.

[3] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[4] P. D'Ancona,Y. Shibata, On global solvability of nonlinear viscoelastic equations in the analytic category, Math. Methods Appl. Sci. 17 (1994) 477-489.

[5] P. D'Ancona, S. Spagnolo, Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data, Invent. Math. 108 (1992) 247-262.

[6] S. Benmansour, M. Bouchekif, Nonhomogeneous elliptic Kirchhoff type problems involving critical Sobolev exponent, Electon. J. Diff. Equ. vol. 2015 (2015), No. 69, pp. 1-11.

[7] A. Bensedik, M. Bouchekif, On an elliptic equation of Kirchhoff-type with a potential asymptotically linear at infinity, Math. Comput. Model. 49, 1089-1096 (2009).

[8] B. Cheng, New existence and multiplicity of nontrivial solutions for nonlocal elliptic Kirchhoff type problems, J. Math. Anal. Appl. 394 (2012) 488-495.

[9] H. Brezis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functional, Proc. Am. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

[10] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[11] K.J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight functions, J. Differential Equations. 193 (2003) 481-499.

[12] C. M. Chu, Multiplicity of positive solutions for Kirchhoff type problem involving critical exponent and sign-changing weight functions, Boundary Value Problems (2014) 1-19.

[13] C. Y. Chen, Y. C. Kuo, T. F. Wu, The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions, J. Differential Equations 250 (20011) 1876-1908.

[14] Y. Chen, Y.C. Kuo, T.F. Wu, The Nehari manifold for a Kirchhoff type problems with critical exponent functions, J. Differential Equations. 250 (2011) 1876-1908.

[15] S. J. Chena, L. Li, Multiple solutions for the nonhomogeneous Kirchhoff equation on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis: Real World Applications 14 (2013) 1477-1486.

[16] P. Drábek, S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997) 703-726.

[17] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324-353.

[18] G. Kirchhoff, Mechanik. Teubner. Leipzig (1883).

[19] H.L. Lin, Positive solutions for nonhomogeneous ellptic equations involving critical Sobolev exponent, Nonlinear Anal. 75 (2012) 2660-2671.

[20] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential

Equations in: North-Holland Math. Stud. vol. 30. North-Holland. Amsterdam.(1978) 284-346.

[21] F. Li, Y. Li, J. Shi, Existence of positive solutions to Kirchhoff type problems with zero mass, J. Math. Anal. Appl. 410 (2014) 361-374.

[22] S.H. Liang, S.Y. Shi, Soliton Solutions for Kirchhoff type problems involving the critical growth in R^N, Nonlinear Anal. 81 (2013) 31-41.

[23] T.F. Ma, J.E. Munoz Rivera, Positive solutions for a nonlinear elliptic transmission problem, Appl. Math. Lett. 16(2) (2003) 243-248.

[24] J. Sun, S. Liu, Nontrivial solutions of Kirchhoff type problems, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 500–504.

[25] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976) 353-372.

[26] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Nonlinéaire 9 (1992) 281-304.

[27] X. Wu, Exitence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011) 1278-1287.

Résumé

L'objet de la présente thèse est l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions pour certains problèmes elliptique du type Kirchhoff contenant un exposant critique de Sobolev. Dans de tels problèmes la présence d'une intégrale sur tout le domaine rend cette étude difficile et donc particulièrement intéressante. On.utilise le principe variationnel d'Ekeland et le théorème de passe montagne.

Mots clés : Méthodes variationnelles, exposants critiques, condition de Palais-Smale

.

Abstract

In this thesis, we study the existence and the multiplicity of solutions for elliptic Kirchhoff type problems involving critical Sobolev exponent.In such problems, the presence of the integral over the domain makes this study more complicated and so particularly interesting.We use the Ekeland varitional principle and Mountain Pass Theorem.

Keywords: Variational methods, critical exponents, Palais-Smale condition.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود وتعدد الحلول للمعادلات الاهليجية من نوع كيرشوف الحاملة للأس الحرج لسوبولاف. في مثل هذه المعادلات وجود التكامل على كل المجال يجعل هذه الدراسة صعبة وذات أهمية كبيرة. نستعمل مبدأ التغاير لايكلاند ونظرية مونتان باس .

الكلمات المفتاحية: طرق التغاير. أسس حرجة .شرط بالي سمال .

.