République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr Belkaid, Tlemcen

Faculté des sciences

Département des mathématiques

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

Option: **Géométrie Différentielle**

Présentée par :

Hichem Boughazi

Intitulée :

Quelques propriétés des invariants conformes

Soutenue devant le jury composé de :

Directeur de thèse :	Mr. Mohammed Benalili	Prof. Univ de Tlemcen
Président de jury :	Mr. Mohammed Bouchekif	Prof. Univ de Tlemcen
Examinateurs :	Mr. Noureddine Rahmani	Prof. UST d'Oran
	Mr. Mohammed Bekkar	Prof. Univ Oran1.Ahmed Ben Bella
	Mr. S. Mohammed Bouguima	Prof. Univ de Tlemcen

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance envers mon directeur de thèse le professeur Mohammad Benalili. Il m'a introduit à la recherche mathématique, et j'ai particulièrement apprécié son honnêteté mathématique et sa façon de raisonner.

Je tiens à remercier le professeur Mohammad Bouchekif d'avoir accepté de présider mon jury. Je remercie le professeur Noureddine Rahmani, le professeur Mohammad Bekkar et le professeur S. Mohammad Bouguima d'avoir accepté d'examiner ma thèse et de participer à mon jury. Je les remercie tous pour leurs disponibilité et les remarques et les suggestions sur mon travail.

Je salue chaleureusement tous mes amis et collèges qui sont toujours de mon coté.
Enfin, je remercie profondément tous les membres de ma famille pour leur soutien constant durant toutes mes études. Ils occupent une place particulière au fond de moi.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail a la mémoire de mon père avec lequel je n’aurais pas le plaisir de partagé cet événement, mais qui est et qui demeurera dans mon cœur et à jamais.

Je le dédie aussi et surtout à celle qui est et qui seras un symbole de courage et qui m’a non seulement accompagné durant dans toute les étapes de ma vie, mais aussi guidé et encouragé et n’a lésiner sur aucun moyen. Celle a qui je dois tout, même ma vie mon adorable mère.

Je le dédie aussi à ma chère femme et à mes enfants et particulièrement ma Malak, à mes frères et aussi à ma sœur sans oublier mes beaux parents et beaux frères, tous mes amis, mes collèges et enfin à tout les enseignants et les professionnelles qui ont contribué à ma formation.

Table des Matières

.

Chapitre 1

Introduction (présentation de la thése et résumé)

Cette thèse est composée de trois parties, elle est le fruit d'un travail qui a duré presque une dizaine d'années. La première partie étudiée est intitulée "Sur le second invariant de Paneitz-Branson", qui a fait l'objet de notre première publication intitulée "On the second Paneitz -Branson invariant", là on a introduit l'opérateur de Paneitz-Branson, un opérateur elliptique du quatrième, conformément invariant et qui fait intervenir une quantité dite Q-courbure analogue de la courbure scalaire de l'opérateur de Yamabe, en effet notre motivation était une étude publier en 2005 par B. Ammann et E. Humbert sur l'opérateur de Yamabe, intitulée " On the second Yamabe invariant", où ces derniers ont introduit le premier et le second invariant de Yamabe et puis ils ont étudié leurs propriétés, en particulier quand est ce qu'il sont atteint, naturellement on commence par un rappel sur le problème de Yamabe, sur le second invariant de Yamabe puis on donne les motivations pour l'opérateur de Paneitz-Branson, position des problèmes et présentation des résultats. La deuxième partie est intitulée, le second invariant de Yamabe singulier, là aussi poussé par la même motivation et en introduisant une singularité sur l'opérateur de Yamabe, on étudie le premier et le second invariant et on finalise avec la troisième partie intitulée "Sur les solutions nodales d'une équation non linéaire de type Paneitz-Branson avec exposant critique", dans cette partie de nouveau on étudie les invariants conformes de l'opérateur de Paneitz-Branson mais contrairement à la première partie la courbure scalaire est prise négative, position des problèmes et résultats. La deuxième partie a fait objet de la publication suivante "The second Yamabe invariant with singularities". La dernière partie est une prépublication intitulée "On the nodales solutions of non linear Paneitz-Branson equation with critical exponent".

1.1 Le problème de Yamabe

Soit (M,g) un variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Dans les années 60 Yamabe a tenté de montrer qu'il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g de courbure scalaire $S_{\tilde{g}}$ constante. En 1968 Trudinger mettait en évidence une sérieuse difficulté dans la démonstration et donnait ainsi naissance à un des grand problème de l'analyse non linéaire sur les variété et depuis, il a fallu beaucoup de temps pour trouver la bonne approche. Aujourd'hui ce problème est complètement résolu et il est connu sous le non du problème de Yamabe. Les premières solutions rigoureuses de ce problème étaient données par Trudinger en affirmant que la preuve de Yamabe est vraie seulement si l'invariant de Yamabe μ est non positif. Huit ans après, Aubin résolvait le problème pour des variétés arbitraires non localement conformément plates et de dimension $n \geq 6$. Le problème est complètement résolu huit ans plus tard par Richard Schoen dans lequel la preuve repose sur le théorème de la masse positive du à Shoen et Yau. Le lecteur pourra se référer à [Yam60], [Tru68], [Aub76], [Sho84], [LP87] ou [Heb97] pour plus d'information sur le sujet. La méthode de résolution du problème de Yamabe est la suivante : Soit $u \in C^\infty$, $u > 0$ une fonction et $\tilde{g} = u^{(N-2)}g$ une métrique conforme à g où $N = 2n/(n-2)$, on pose :

$$L_g = \frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g + S_g$$

où $\Delta_g u = -g^{ij}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k})$ est le laplacien riemannien. L'opérateur L_g est appelé l'opérateur de Yamabe, il est conformément invariant dans le sens suivant : Pour tout

$v \in C^\infty$, $u^{N-1} L_{\tilde{g}}(v) = L_g(uv)$ et lorsque $v = 1$ cette propriété se traduit par une relation entre les courbures scalaires de g et de $\tilde{g}$:

$$u^{N-1} S_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u + S_g u.$$

Résoudre le problème de Yamabe est donc trouver une métrique $\tilde{g} = u^{(N-2)} g$ conforme à g de courbure scalaire $S_{\tilde{g}} = k$ (k une constante) c'est équivalent à trouver une solution régulière u strictement positive de l'équation

$$\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u + S_g u = k |u|^{N-2} u \ . \tag{1}$$

Pour obtenir des solutions, Yamabe définit la quantité suivante :

$$\mu = \inf_{u \in H_1^2(M),\ u > 0} Y(u).$$

où

$$Y(u) = \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{(n-2)} |\nabla u|^2 + S_g u^2 dv_g}{\left(\int_M |u|^N dv_g \right)^{2/N}} \qquad \text{et} \qquad H_1^2(M) = \left\{ u \in L^2(M), |\nabla u| \in L^2(M) \right\}.$$

De nos jours, $\mu(M, g)$ est appelé l'invariant usuel de Yamabe et Y la fonctionnelle de Yamabe. En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange associé à Y, on voit qu'il existe une bijection entre les points critiques de Y et les solutions de (1). En particulier, si u est une fonction régulière strictement positive vérifiant $Y(u) = \mu$, alors u est solution de l'équation (1) et $\tilde{g} = u^{(N-2)} g$ est la métrique désirée (de courbure scalaire constante).

Pour minimiser la fonctionnelle Y, Yamabe a introduit une nouvelle méthode aujourd'hui appelée méthode variationnelle. Cette dernière consiste à prendre une suite de fonctions non identiquements nulles minimisante de Y convergente faiblement vers une solution du problème, malheureusement l'inclusion de Sobolev $H_1^2(M) \subset L^N(M)$ est seulement continue et non pas compacte, alors Yamabe commence par étudier les équations dites sous critiques de la forme $\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u + S_g u = k u^{q-1}$ où l'exposant q est sous critique ($2 \leq q < N$) et il y a récupération de la compacité, après il fait tendre q vers l'exposant critique N et finalement, il obtient une solution $u \geq 0$ de l'équation de Yamabe. Trudinger constate que la solution u peut être identiquement nulle et que la preuve de Yamabe est incomplète et reste vraie seulement si l'invariant de Yamabe $\mu \leq 0$. Les points clés de la résolution du problème de Yamabe sont les théorèmes suivants du à Yamabe, Trudinger, Aubin et Shoen.

S_n désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ équipée de sa structure riemannienne usuelle.

Théorème 1.1 [*AH06*] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Si $\mu < \mu(S_n) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$ où ω_n est le volume de la sphère S_n, alors il existe une fonction u strictement positive de classe C^∞ qui réalise $Y(u) = \mu$.*

Théorème 1.2 [*AH06*] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Alors on a toujours $\mu \leq \mu(S_n)$. De plus, on a l'égalité si et seulement si (M, g) est conformément difféomorphe à la sphère S_n.*

Ces théorèmes résolvent le problème de Yamabe.

1.2 Rappel sur le second invariant de Yamabe

Soit (M, g) un variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, B. Ammann et E. Humbert [AH06] ont introduit une nouvelle définition de l'invariant usuel de Yamabe μ en l'appelant premier invariant conforme de Yamabe noté μ_1, cette définition a permis de généraliser la notion des invariants conformes d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Particulièrement, ils ont étudié le second invariant conforme de Yamabe μ_2 dans le cas de $\mu \geq 0$, ils ont prouvé que le second invariant conforme est atteint par une métrique généralisée contrairement au premier invariant qui est atteint par une métrique régulière et de plus ils ont obtenu une solution qui change de signe (solution nodale) de l'équation de Yamabe, cette dernière est une équation elliptique d'ordre 2 non linéaire avec exposant critique de Sobolev. D'après ces derniers, c'est une nouvelle technique pour la recherche des solutions qui changent de signe de l'équation de Yamabe en comparaison avec les méthodes classiques. L'opérateur L_g possède un spectre discret $spec(L_g) = \{\lambda_{1,g} , \lambda_{2,g} \ldots\}$, les valeurs propres $\lambda_{1,g} < \lambda_{2,g} \ldots$ apparaissent avec leurs multiplicités et la caractérisation variationnelle de $\lambda_{1,g}$ est donnée par :

$$\lambda_{1,g} = \inf_{u \in C^\infty(M),\ u>0} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{(n-2)} |\nabla u|^2 + S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^2 dv_g)}.$$

Soit $\langle g \rangle = \{\tilde{g} = u^{N-2} g\ ,\ u \in C^\infty(M) \ \text{ et } u > 0\}$ la classe conforme de la métrique g, B.ammann et E.Humbert dans leur article [AH06] affirment qu'il n'est pas difficile de voir que si $\mu \geq 0$, alors l'invariant de Yamabe μ est donné par :

$$\mu = \inf_{\tilde{g} \in \langle g \rangle} \lambda_{1,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}.$$

où $Vol(M, \tilde{g}) = \int_M dv_{\tilde{g}} = \int_M u^N dv_g$ est le volume riemannien de M pour la métrique $\tilde{g}$. Les auteurs généralisent cette définition, en introduisant le $k^{ièm}$ invariant de Yamabe μ_k par :

$$\mu_k = \inf_{\tilde{g} \in \langle g \rangle} \lambda_{k,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n} \quad \text{où } k \text{ est un entier} \geq 1.$$

Avec ces notations μ_1 est l'invariant usuel de Yamabe. Leur but est d'étudier le second invariant de Yamabe μ_2 et les motivations étaient de trouver des solutions qui changent de signe (solutions nodales) de l'équation de Yamabe (1), en particulier la question majeure était :

μ_2 est il atteint par une métrique?

Contrairement à l'invariant usuel, ils ont trouvé que μ_2 ne peut pas être atteint par une métrique régulière. En d'autres termes, il n'existe aucune métrique $\tilde{g} \in \langle g \rangle$ vérifiant $\mu_2 = \lambda_{2,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}$, pour trouver des minimiseurs, ils élargissent la classe conforme à ce qu'ils appellent la classe conforme généralisée de g. Une métrique généralisée est une "métrique" de la forme $\tilde{g} = u^{N-2}g$, où u n'est pas nécessairement strictement positive et régulière, mais seulement $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et $u \neq 0$. La définitions de $\lambda_{2,\tilde{g}}$ et de $Vol(M, \tilde{g})$ se généralisent naturellement. Les éléments importants de la résolution sont les théorèmes suivants.

Théorème 1.3 *[AH06] Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, alors μ_2 est atteint par une métrique généralisée dans les cas suivants :*

$$\mu > 0 \quad , \quad \mu_2 < \left[(\mu^{n/2} + (\mu(S_n))^{n/2}\right]^{2/n}$$

et

$$\mu = 0 \quad , \quad \mu_2 < \ \mu(S_n).$$

Comme la méthode consiste à faire une variation de la fonctionnelle associée au second invariant de Yamabe sur le plan, alors on est amené à trouver un couple de fonctions tests appropriées .

Théorème 1.4 *[AH06] Les hypothèse du théorème précédent sont réalisées dans les cas suivantes : (M, g) est non localement conformément plate, $n \geq 11$ et $\mu > 0$ ou bien (M, g) est non localement conformément plate, $\mu = 0$ et $n \geq 9$.*

Théorème 1.5 *[AH06] Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, on suppose que μ_2 est atteint par une métrique généralisée $\tilde{g} = u^{N-2}g$, alors il existe une solution qui change de signe (nodale) $w \in c^{2,\alpha}(M)$ de l'équation $L_g(w) = \mu_2|u|^{N-2}w$ telle que $|w| = u$ où $\alpha \leq N - 2$.*

Définition 1.1 *[AH06] l'ensemble des zéros de u noté $\overset{-1}{u}(o)$ est appelé l'ensemble nodale de u, une solution d'ensemble nodale non vide est dite solution nodale.*

Remarque 1.1 *[AH06] Si M est connexe, le changement de signe d'une fonction régulière u implique que l'ensemble des zéros $\overset{-1}{u}(o)$ est non vide.*

1.3 Première partie : Sur le second invariant de Paneitz-Branson.

1.3.1 Généralité sur l'opérateur de Paneitz-Branson et motivation.

La première partie de cette thèse consiste à faire une étude similaire à celle de Amman et Humbert mais avec l'opérateur de Paneitz -Branson, un opérateur elliptique du quatrième, conformément invariant et qui fait intervenir une quantité dite Q-courbure qui est l'analogue de la courbure scalaire S_g de l'opérateur de Yamabe, plus précisément on va faire une généralisation de cette étude sur l'opérateur de Paneitz -Branson. En 1983, Paneitz [Pan84] introduit un opérateur conformément invariant d'ordre 4 défini sur une variété riemannienne de dimension 4. Branson dans son article [Bra87] généralise la notion de l'opérateur sur des variétés de dimension $n \geq 5$. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, on note par Ric_g et S_g, la courbure de Ricci et la courbure scalaire. Pour $u \in C^\infty(M)$, l'opérateur de Paneitz-Branson est donné par l'expression suivante :

$$P_g u = \Delta_g^2 u - div_g\left[(A^\#)du\right] + \frac{n-4}{2} Q_g u \quad \text{où}$$

$\Delta_g u = -div_g(\nabla u)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami (le laplacien riemannien), $A = a_n S_g g + b_n Ric_g$ est un champs de tenseurs deux fois covariant, le symbole $\#$ signifie l'isomorphisme musical c'est à dire si T est un champ de tenseurs p fois covariant, $T^\#$ est le champ de tenseurs p fois contravariant défini par $T^\# = C_1^1 C_2^3 ... C_p^{2p-1}(g^{-1} \otimes ... \otimes g^{-1} \otimes T)$, où C_q^p est la contraction d'ordre (p, q) et g^{-1} est la métrique inverse de la métrique g, autrement dit l'expression de la divergence en coordonnées locales est donnée par :

$$div_g\left[(A^\#)du\right] = g^{ij}\left[\partial_i(A_{jk} g^{kq} \partial_q u) - \Gamma_{ij}^k A_{kt} g^{ts} \partial_s u\right] \qquad \text{où} \qquad A_{jk} = a_n S_g g_{jk} + b_n Ric_{jk}.$$

$$a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} \quad , \quad b_n = -\frac{4}{n-2}.$$

et

$$Q_g = \frac{1}{n-2}\Delta_g S_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|^2.$$

Soit $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{N-2}{2}} g$ une métrique conforme à g où φ est une fonction strictement positive et de classe C^∞ , $N = \frac{2n}{n-4}$ l'exposant critique, la propriété de l'invariance conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson se traduit par : pour tout $u \in C^\infty(M)$: $P_g(u\varphi) = \varphi^{N-1}P_{\widetilde{g}}(u)$. En prenant $u \equiv 1$, on trouve que $P_g(\varphi) = \frac{n-4}{2}Q_{\widetilde{g}}\varphi^{N-1}$. La quantité Q_g est dite la Q-courbure de P_g qui est l'analogue de la courbure scalaire du Laplacien conforme.

Vu l'utilisation de la méthode variationnelle et le fait que si $u \in H_2^2$, $|u|$ n'est pas nécessairement dans H_2^2, on constate qu'il y a des difficultés à obtenir des solutions positives, il n'existe pas de principe de maximum, l'analyse du problème nous a conduit à considérer l'opérateur de Paneitz -Branson sur une variété d'Einstein, l'opérateur est réduit à une forme simple et assez particulière. Si (M, g) est d'Einstein (voir l'article[FHR05]) l'opérateur géométrique de Paneitz-Branson P_g est réduit à :

$$P_g u = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u.$$

$$\text{où} \quad a_n = \frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}.$$

Une variété riemannienne (M, g) est dite d'Einstein si est seulement si le tenseur de Ricci Ric_g est un multiple de la métrique g par un scalaire réel et dans ce cas la courbure scalaire S_g est constante et les coefficients de l'opérateur P_g sont constants d'où sa coercivité et la possibilité d'avoir des solutions positives, de plus le choix de la positivité de la courbure scalaire ($S_g > 0$) nous conduit à la plupart des résultats souhaités, en premier lieu la remarque suivante :

Remarque 1.2 *Lorsque (M, g) est d'Einstein, de dimension $n \geq 5$ et de courbure* *scalaire S_g strictement positive on a :*

$$\left[\int_M |\Delta u|^2 + a_n S_g |\nabla u|^2 + b_n S_g^2 u^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_M u P_g u dv_g\right]^{\frac{1}{2}} = \|u\|$$

une norme équivalent à la norme de $H_2^2(M)$ où $H_2^2(M)$ est l'espace de Sobolev des fonctions u ,$|\nabla u|$, $\left|\nabla^2 u\right| \in L^2(M)$, munit de sa norme usuelle $\|u\| = \left[\int_M |\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}}$ et du coup, on a la coercivité de P_g et la méthode variationnelle sera applicable.

Avant de formuler notre problème, on a besoin d'introduire quelques définitions et propriétés.

P_g est un opérateur elliptique auto-adjoint, son spectre est discret :

$spec(P_g) = \{\lambda_1(g), \lambda_2(g), ...\}$ et ses valeurs propres sont telles que

$$\lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \cdots \to +\infty.$$

La $k^{ième}$ valeur propre $\lambda_k(g)$ est définie comme suit :

Définition 1.2 *[AH06] La $k^{ième}$ valeur propre $\lambda_k(g)$ de l'opérateur P_g est donnée par :*

$$\lambda_k(g) = \inf_{V \in Gr_k(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\Delta v|^2 + a_n S_g |\nabla v|^2 + b_n S_g^2 v^2 dv_g}{\int_M v^2 dv_g}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Gr_k(H_2^2(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k de $H_2^2(M)$.

Lemme 1.1 *[Car01] Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n,* *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $A(\varepsilon) > 0$ telle que*

$$\forall u \in H_2^2(M) \quad , \quad \|u\|_N^2 \leq (K_2^2 + \varepsilon)\|\Delta u\|_2^2 + A(\varepsilon)\|u\|_2^2$$

où $N = 2n/(n-4)$ et

$$K_2^{-2} = \pi^2 n(n^2-4)(n-4)\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)},$$

on a aussi l'expression suivante :

$$K_2^{-2} = \frac{n\,(n-4)\,(n^2-2)}{16}\omega_n^{\frac{4}{n}}.$$

K_2^{-2} est la meilleure constante de l'inclusion de Sobolev $\|u\|_N^2 \leq K_2^2\|\Delta u\|_2^2$ dans le cas Euclidien.

Définition 1.3 *Une métrique généralisée conforme à la métrique g est une métrique de la forme $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non identiquement nulle.*

Définition 1.4 *Pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$, on définit la $k^{ième}$-valeur propre $\lambda_k(\widetilde{g})$ de l'opérateur de Paneitz-Branson par*

$$\lambda_{k,\tilde{g}} = \inf_{V \in Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} I(w) \quad \text{où} \quad I(v) = \frac{\int\limits_M v P_g v dv_g}{\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g} \quad , \quad k \geq 1$$

et l'ensemble $Gr_k^u(H_2^2(M))$ est défini par : Soit $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non identiquement nulle, $Gr_k^u(H_2^2(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k $(k \geq 1)$ de $H_2^2(M)$ tel que le sous espace $span(v_1, ..., v_k) \in Gr_k^u(H_2^2(M))$ si est seulement si $v_1, ..., v_k$ sont linéairement indépendant sur $M \setminus u^{-1}(0)$.

Définition 1.5 *On définit le $k^{ièm}$ invariant de Paneitz-Branson par*

$$\mu_k(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) \left[vol(M,\widetilde{g})\right]^{\frac{4}{n}}$$

où $vol(M,\widetilde{g})$ est le volume riemannien de M pour la métrique $\widetilde{g}$ et

$$[g]=\left\{\widetilde{g}=\varphi^{\frac{N-2}{2}}g\ ,\ \varphi\in C^{\infty}(M)\ et\ \varphi>0\right\}$$

est la classe conforme de la métrique g.

Dans tout ce qui suit (M,g) est une variété d'Einstein compacte de dimension $n\geq 5$, de courbure scalaire S_g strictement positive.

1.3.2 Position du problème

Notre problème est l'étude des invariants conformes $\mu(M,g)$, $\mu_1(M,g)$ et $\mu_2(M,g)$ et particulièrement $\mu_2(M,g)$ est il atteint par une métrique généralisée?

Naturellement la réponse à ce problème n'était pas simple, elle a évoqué une chaine de questions intimement liées entre elles, en d'autres termes, il faut répondre aux questions suivantes :

Les valeurs propres de P_g sont elles atteintes **?** Les solutions correspondantes sont elles régulières ?

Comment régler la positivité de la solution correspondante à la première valeur propre?

Par analogie avec le problème de Yamabe, en introduisant l'invariant usuel de Paneitz-Branson μ :

$$\mu=\inf_{V\in H_2^2(M))}\frac{\int\limits_M vP_gvdv_g}{(\int\limits_M v^Ndv_g)^{\frac{2}{N}}}.$$

μ est il atteint?

Le premier invariant conforme $\mu_1=\inf\limits_{\widetilde{g}\in[g]}\lambda_1(\widetilde{g})\,[vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$ existe il ? Quelle est l'estimation de μ_1? est il atteint ? μ est il égal à μ_1?

Le second invariant conforme $\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_2(\widetilde{g})\,[vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$ existe il ? Quelle est l'estimation de μ_2? $\mu_2(M,g)$ est il atteint par une métrique généralisée? ...etc.

Voici les résultats les plus importants, ils sont classés dans l'ordre de progression des idées. On espère que le lecteur aura une idée simple et globale sur le contenu de cette première partie.

1.3.3 Présentations des résultats de la première partie.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

1) **Valeurs propres:**

Proposition (3.1) : Soit $\lambda_{1,\tilde{g}}$ la première valeur propre de $P_{\widetilde{g}}$. Pour chaque métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$, il existe une fonctions v non identiquement nulle de $H_2^2(M)$ solution au sense faible de l'équation $P_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$ vérifiant $\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$.

Proposition (3.2) : Soit v la solution construite précédemment, on pose $E = \{w \in H_2^2(M)$ telle que $u^{\frac{N-2}{2}} w \neq 0$, $\int\limits_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int\limits_M u^{N-2} wv dv_g = 0\}$. L'ensemble E n'est vide.

Proposition (3.3) : En posant $\lambda'_{2,g} = \inf_{w\in E} I(w)$, il existe une fonction w non identiquement nulle de $H_2^2(M)$ solution au sense faible de l'équation $L_g(w) = \lambda'_{2,g} u^{N-2} w$ vérifiant $\int\limits_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int\limits_M u^{N-2} wv dv_g = 0$.

Proposition (3.4) : On a toujours $\lambda'_{2,g} = \lambda_{2,\tilde{g}}$ où $\lambda_{2,\tilde{g}}$ est la deuxième valeur propre de $P_{\widetilde{g}}$.

2) **Positivité de la solution correspondante à la première valeur propre :**

Proposition (3.5) et (3.6) : Si la métrique $\widetilde{g}$ est régulière ($u \in C_+^\infty(M)$), alors les solutions v , w sont de classe C^∞. A partir de la solution v, on construit une autre fonction f strictement positive de classe C^∞ solution de l'équation $P_g(f) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} f$ avec la contrainte $\int\limits_M u^{N-2} f^2 dv_g = 1$.

3) l'invariant usuel de Paneitz-Branson $\mu(M,g)$ est toujours atteint par une

métrique conforme.

Proposition (3.7) : En introduisant l'invariant usuel de Paneitz-Branson $\mu(M,g)$ et lorsque (M,g) est non conformément plate de dimension $n \geq 9$, on a toujours μ atteint par une métrique conforme, autrement dit, il va exister $u \in C^{\infty}(M)$, $u > 0$ solution de l'équation $P_g u = \mu u^{N-1}$ vérifiant $\int\limits_M u^N dv_g = 1$.

4) Existence de μ_1 et son eventuelle égalité avec μ.

Théorème (3.2) : Le premier invariant $\mu_1(M,g) \leq \mu(M,g)$ et si $\mu_1 < K_2^{-2}$, alors $\mu_1(M,g)$ est atteint par une métrique généralisée, en d'autre termes ils existent deux fonctions u , v non identiquement nulles telles que $u \in L_+^N(M)$, $v \in H_2^2(M)$, $v \geq 0$ et qui vérifient l'équation $P_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ faiblement.

Proposition (3.8) : Les fonctions u, v sont égales et de plus $v > 0$ et de classe $C^{\infty}(M)$

.

Proposition (3.9) : μ_1 est égal à μ.

La proposition (3.9) permet de justifier la généralisation des invariants conformes d'ordre supérieurs.

5) Etude du second invariant conforme:

Proposition (3.10) : Une inégalité de type de Sobolev reliée à μ_2 : $\forall u \in L_+^N(M)$, $\forall v \in H_2^2(M)$, on a

$$\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq \left[2^{\frac{-4}{n}} (K_2^2 + \varepsilon) \int\limits_M |\Delta v|^2 dv_g + a(\varepsilon) \int\limits_M v^2 dv_g \right] \left[\int\limits_M u^N dv_g \right]^{\frac{4}{n}} .$$

Lemme (3.6) : la convergence faible des suites minimisantes v_m , u_m entrainent que $\int_M u_m^{N-2} (v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1)$.

6) Le second invariant conforme est atteint par métrique généralisée.

Proposition (3.12) : Soit $g_m = u_m^{N-2} g$ une suite minimisante de μ_2, alors ils existent

$v \geq 0$, $w \in H_2^2(M)$ solutions au sense faible des équations :

$$L_g(v) = \widetilde{\mu_1} u^{N-2} v \quad \text{et} \quad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2} w$$

où $\widetilde{\mu_1} = \lim\limits_m \lambda_{1,m}$ et u est la limite faible de u_m dans $L^N(M)$.

Le théorème (3.3) et la proposition (3.14) nous permettent de conclure que : Si $\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$, alors $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = \int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int_M u^{N-2} vw dv_g = 0$, les fonctions u, v et w sont non identiquement nulles et μ_2 est atteint par métrique généralisée.

7) Estimation de μ_2.

Théorème (3.4) **:** Lorsque (M, g) est non conformément plate et $n \geq 12$, alors $\mu_2 < \left[(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}} \right]^{\frac{4}{n}}$.

D'où la condition du Théorème (3.3) est toujours réalisée, $\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$.

8) Application.

Théorème (3.5) : l'équation $P_g w = \mu_2 u^{N-2} w$ possède une solution w qui change de signe.

1.4 Deuxième partie : Le second invariant de Yamabe singulier.

1.4.1 Généralité sur l'opérateur de Yamabe singulier et motivation.

F. Madani dans sa thése sous la direction de T. Aubin considère " le problème de Yamabe avec singularité " les résultats obtenus sont publiés dans [Mad08]. Il introduit une certaine singularité sur l'équation de Yamabe en d'autres termes la métrique g est choisie régulière sur M sauf en un nombre fini de points ou elle presente des singularités. Etant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, soit(H) l'hypothèse suivante : on suppose que g est une métrique dans l'espace de Sobolev $H_2^p(M, T^*M \otimes$

$T^*M)$ avec $p > n$ et qu'il existe un point $p \in M$, $\delta > 0$ telle que g est régulière dans la boule $B_p(\delta)$. On note par T^*M le fibré cotangent de M, l'espace de Sobolev $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ est l'ensemble des sections g (des tenseurs 2 fois covariants) telles que en coordonnées locales, les composantes g_{ij} de g sont dans $H_2^p(M)$ [Mad08]. On rappel que $H_2^p(M) = \{u \in L^p(M),\ |\nabla u| \in L^p(M) \text{ et } \Delta_g u \in L^p(M)\}$.

L'hypothèse (H) définit la notion de "singularité":

Par le plongement de Sobolev : $H_k^q(M) \subset C^m(M)$ si $0 > \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$, on a $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M) \subset C^1(M, T^*M \otimes T^*M)$, donc une métrique qui vérifie l'hypothése (H) est de classe C^1. Les symboles de Christoffels sont dans $H_1^p(M) \subset C^0(M)$, les composantes du tenseur de la courbure de Riemann, les composantes du tenseur de la courbure de Ricci et la courbure scalaire sont dans $L^p(M)$, en particulier l'équation de Yamabe $\Delta u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g = k|u|^{N-2}u$ est singulière ($S_g \in L^p(M)$).

Sous l'hypothèse (H) et lorsque (M, g) est non conforme à la sphère S_n, F.Madani a montré qu'il existe toujours une métrique $\tilde{g} = u^{N-2}g$ conforme à g de courbure scalaire $S_{\tilde{g}}$ constante où $u \in H_2^p(M)$ et $u > 0$. La méthode de résolution du problème de Yamabe avec singularités est la suivante : Soit $\tilde{g} = u^{N-2}g$ une métrique conforme à g où $u \in H_2^p(M)$ et $u > 0$ et $N = 2n/(n-2)$. On pose

$$L_g = \Delta + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g$$

Par analogie L_g est appelé l'opérateur de Yamabe singulier. De plus L_g est faiblement conformément invariant, cette propriété se traduit par une relation entre les courbures scalaires de g et de $\tilde{g}$: $\Delta u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u = S_{\tilde{g}} |u|^{N-2} u$, comme conséquence résoudre le problème de Yamabe singulier est équivalent à trouver une solution strictement positive $u \in H_2^p(M)$ de l'équation

$$L_g(u) = k|u|^{N-2}u, \tag{2}$$

où k est une constante.

Pour obtenir des solutions de l'équation (2), on définit le nombre :

$$\mu = \inf_{u \in H_2^p(M), u>0} Y(u).$$

Avec

$$Y(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^N dv_g)^{2/N}}.$$

Maintenant μ est appelé l'invariant de Yamabe avec singularités (l'invariant de Yamabe singulier). En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange associée à Y, il y a une correspondance entre les points critiques de Y et les solutions de l'équation $L_g(u) = k|u|^{N-2}u$. En particulier, si u est strictement positive, $u \in H_2^p(M)$, minimise Y alors u est une solution de l'équation et $\tilde{g} = u^{N-2}g$ est la métrique recherchée, elle est de courbure scalaire constante et μ est atteint par une métrique conforme particulière. La résolution de ce problème passe par les théorèmes suivants.

Théorème 1.6 [*Mad08*] *Si $p > n/2$ et $\mu < K^{-2}$, alors l'équation* (2) *admet une solution strictement positive $u \in H_2^p(M) \subset C^{1-[n/p],\beta)}(M)$. $[n/p]$ est la partie entière de n/p, $\beta \in (0,1)$ qui minimise Y, où $K^2 = \frac{4}{n(n-1)}\omega_n^{-2/n}$ avec ω_n le volume de S_n.*

Remarque 1.3 *Si $p > n$, alors $u \in H_2^p(M) \subset C^1(M)$.*

Théorème 1.7 [*Mad08*] *Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. g est une métrique qui vérifie l'hypothèse (H). Si (M, g) est non conforme à la sphère S_n, alors $\mu < K^{-2}$.*

Théorème 1.8 [*Mad08*] *Sur une variété riemannienne compacte (M, g), si $u \geq 0$ est une solution faible non triviale dans $H_1^2(M)$ de l'équation $\Delta u + hu = 0$ avec $h \in L^p(M)$ et $p > n/2$, alors $u \in C^{1-[n/p],\beta)}(M)$ et est strictement. $[n/p]$ est la partie entière de n/p, $\beta \in (0,1)$.*

proposition 1.1 [*Mad08*] *Soit $g \in H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ une métrique riemannienne sur M avec $p > n/2$. Si $\tilde{g} = u^{N-2}g$ est une métrique conforme particulière à la métrique*

g vérifiant $u \in H_2^p(M)$, $u > 0$, alors L_g est faiblement conformément invariant en ce sens

$$\forall v \in H_1^2(M)\ ,\quad |u|^{N-1} L_{\tilde{g}}(v) = L_g(uv) \ \ \textit{faiblement.}$$

De plus si $\mu > 0$, alors L_g est coercif et inversible.

Ces théorèmes résolvent le problème de Yamabe singulier.

Dans ce qui suit, g est une métrique qui vérifie l'hypothèse (H). F. Madani [Mad08] a montré que l'équation de Yamabe singulière possède une solution strictement positive. Naturellement on se pose la question suivante : l'équation de Yamabe singulière possède-t-elle- une solution qui change de signe (nodale)? La recherche de cette solution nous a conduit à une étude analogue à la première partie.

Maintenant on introduit le premier invariant de Yamabe avec singularités et le second invariant de Yamabe avec singularités respectivement (le premier invariant de Yamabe singulier, le second invariant de Yamabe singulier), puisque $S_g \in L^p(M)$, notre opérateur L_g restera elliptique et auto-adjoint sur M, son spéctre est discret $spec(L_g) = \{\lambda_{1,g}\ , \lambda_{2,g} \ldots\}$.

Ses valeurs propres sont telles que $\lambda_{1,g} < \lambda_{2,g} \ldots$.

La caractérisation variationnelle de $\lambda_{1,g}$ est donnée par :

$$\lambda_{1,g} \ = \inf_{u \in H_1^2(M), u > 0} \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u^2) dv_g}{(\int_M |u|^2 dv_g)}.$$

Soit $\langle g \rangle = \{\tilde{g} = u^{N-2} g\ ,\ u \in C^\infty(M)$ et $u > 0\}$ la classe conforme de g et soit $[g] = \{\tilde{g} = u^{N-2} g\ ,\ u \in H_2^p(M)$ et $u > 0\}$ la classe conforme particulière de g. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on définit le $k^{ièm}$ invariant de Yamabe singulier μ_k par

$$\mu_k = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_{k,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}.$$

Avec ces notations, μ_1 est le premier invariant de Yamabe singulier, entre autre pour trouver des minimiseurs, on élargit la classe conforme particulière à une classe de métriques dites généralisées où ces éléments sont de la forme $\tilde{g} = u^{N-2}g$ avec $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$, $u \neq 0$, de même les définitions de $\lambda_{k,\tilde{g}}$ et du $Vol(M,\tilde{g})^{2/n}$se généralisent naturellement.

1.4.2 Position du problème

Notre problème est l'étude des invariants conformes singuliers $\mu_1(M,g)$ et $\mu_2(M,g)$ et particulièrement,

$\mu_2(M,g)$ est il atteint par une métrique généralisée?

1.4.3 Présentations des résultats de la deuxième partie.

Comme pour la première partie et puisqu'il s'agit de faire une étude analogue avec l'opérateur de Yamabe singulier, aussi il faudrait répondre à plusieurs questions.

Les résultats les plus importants seront classés dans l'ordre évoquant à la fois la question et sa réponse. On espère que le lecteur aura une idée générale sur le contenue de cette deuxième partie, la coercivité de l'opérateur et l'étude de l'invariant usuel μ ont été établis par F. Madani [Mad08] .

1) On montre que la fonctionnelle est bornée inférieurement.

Proposition (4.3) étape1 : L'hypothèse $p > n$ est heureusement suffisante pour assurer que la fonctionnelle est bornée inférieurement et que les valeurs propres sont finies.

2) Etude des valeurs propres.

Proposition (4.3) étape 2 : Si $\mu > 0$, alors pour tout $u \in L_+^N(M)$, ils existent deux fonctions v , w appartenant à $H_1^2(M)$ avec $v \geq 0$ solutions au sens des distributions de

$$L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v \quad , \quad L_g(w) = \lambda'_{2,g} u^{N-2} w$$

vérifiant :

$$\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1 \quad , \quad \int_M u^{N-2} wv dv_g = 0$$

et on a toujours $\lambda'_{2,g} = \lambda_{2,\tilde{g}}$.

3) Existence du premier invariant conforme μ_1.

Lemme (4.3) : Si $p > n$, alors on a toujours $\mu_1 \leq \mu$.

Théorème (4.6) : Si $\mu > 0$, alors μ_1 est atteint par une métrique généralisée $\tilde{g} = u^{N-2}g$, en d'autres termes ils existent $u \in L^N(M)$, $v \in H_1^2(M)$ où $v \geq 0$ solutions de l'équation $L_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ et qui vérifient $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$.

Théorème (4.7) : Les fonctions u et v sont égales.

4) Egalité entre $\mu_1$et μ.

Théorème (4.9) : Si $\mu \geq 0$, alors $\mu_1 = \mu$.

5) Existence du second invariant conforme μ_2.

Théorème (4.12) : Si $1 - 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 > 0$, alors μ_2 est atteint par une métrique généralisée.

Théorème (4.13) : Si $\mu_2 < K^{-2}$, encore μ_2 est atteint par une métrique généralisée.

Théorème (4.14) : Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Sous l'hypothèse $(H\ )$ et supposons que μ_2 est atteint par une métrique généralisée $\tilde{g} = u^{N-2}g$, alors l'équation $L_g w = \mu_2 u^{N-2} w$ possède une solution $w \in C^1(M)$ et qui change de signe, de plus ils existent deux réels a , $b > 0$ tels que

$$u = aw_+ + bw_-$$

où $w_+ = sup(w, 0)$ et $w_- = sup(-w, 0)$.

6) Estimation de μ_2.

A l'aide de la conjecture d'Aubin et de l'hypothèse "g est régulière dans la boule $B_p(\delta)$ pour un certain point $p \in M$ avec $\delta > 0$ ", le même argument de Ammann et Humbert [Ah06] reste vrai dans notre cas et on obtient le théorème suivant:

Théorème (4.14) : Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et sous l'hypothèse (H), μ_2 est atteint par une métrique généralisée dans les cas suivant :

Si (M, g) est non localement conformément plate, $n \geq 11$ et $\mu > 0$, alors $\mu_2 <$

$\left[(\mu^{n/2} + (K^{-2})^{n/2}\right]^{2/n}$.

Si (M, g) est non localement conformément plate, $\mu = 0$ et $n \geq 9$, alors $\mu_2 < \mu(K^{-2})$. D'où les conditions des théorèmes (4.12) et (4.13) sont réalisées.

1.5 Troisième partie : Sur les solutions nodales d'une équation non linéaire de type Paneitz-Branson avec exposant critique

1.5.1 L'opérateur de Paneitz-Branson et les motivations de son étude la courbure scalaire est négative.

En 2012 S.E. Sayed publie un article intitulé : La deuxième valeur propre de l'opérateur de Yamabe et applications, ce dernier constitue une partie de sa thése de doctorat dirigée par E. Humbert. Inspiré par les observations de B. Ammann et E. Humbert[ElSay12], elle exploite la deuxième valeur propre $\lambda_2(g)$ de l'opérateur de Yamabe pour l'existence des solutions nodales de l'équation de Yamabe dans un cadre générale, plus précisément lorsque l'invariant usuel de Yamabe μ est négatif ($\mu < 0$), en d'autre terme l'opérateur de Yamabe n'est plus nécessairement coercif, en utilisant un raisonnement par absurde, elle a obtenu des suites minimisantes qui convergent faiblement vers des solutions et finalement elle a trouvé des solutions qui changent de signe de l'équation de Yamabe (solution nodales).

Dans son article elle explique comment le signe de $\lambda_2(g)$ est relié à l'existence des solutions nodales, elle donne aussi d'autre propriétés, par exemple le signe des valeurs propres est un invariant conforme, une relation entre l'invariant conforme et la topologie de la variété, elle montre que la méthode utilisée par [AH06] se généralise au cas $\mu(M, g) < 0$ lorsque $\lambda_2(g) \geq 0$. Spécialement quand la deuxième valeur propre $\lambda_2(g) < 0$ et sans aucune autre condition, elle obtient des solutions nodales de l'équation de Yamabe avec une méthode complètement différente. L'auteur obtient plusieurs résultats dont on cite deux qui sont à la base de nos inspirations.

Théorème 1.9 [*ElSay12*] *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geq 3$ *où son invariant de Yamabe* $\mu(M, g) < 0$*, on note par* λ_2 *la deuxième valeur propre de l'opérateur de Yamabe* L_g*, alors si* $\lambda_2 \leq 0$ *où si* $\lambda_2 > 0$*,* (M, g) *non localement conformément plate et* $n \geq 6$ *: il existe une fonction* w *qui change de signe, solution de l'équation* $L_g w = \varepsilon |w|^{N-2} w$*, où* $\varepsilon = +1$ *si* $\lambda_2 > 0$ *,* $\varepsilon = -1$ *si* $\lambda_2 < 0$ *et* $\varepsilon = 0$ *si* $\lambda_2 = 0$*. De plus* $w \in C^{3,\alpha}(M)$*, pour tout* $\alpha < N - 2$ *.*

proposition 1.2 [*ElSay12*] *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geq 6$*, supposons que* M *non localement conformément plate et son invariant de Yamabe* $\mu(M, g) < 0$*, alors* $\mu_2(M, g) < \mu(S_n)$*.*

La troisième partie est un complément de la première partie, en considérant cette fois que la courbure scalaire de la variété est négative et on préfère mettre cette partie dans cet ordre en suivant l'évolution de cette thèse dans le temps, c'est à dire après la publication de notre deuxième partie en 2012. Dans tout ce qui suit (M, g) une variété d'Einstein compacte de dimension $n \geq 5$ et de courbure scalaire strictement négative, en sait que l'opérateur géométrique de Paneitz-Branson P_g est réduit à

$$P_g u = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u \quad ,$$

$$a_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}.$$

Dans la première partie, on a introduit les définitions des valeurs propres $\lambda_k(\widetilde{g})$ et on a défini le $k^{ièm}$ invariant de Paneitz-Branson par

$$\mu_k(M, g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) \left[vol(M, \widetilde{g})\right]^{\frac{4}{n}} .$$

On remarque que lorsque S_g est négative, les valeurs propres peuvent être négatives.

1.5.2 Position du problème

Dans cette troisième partie, contrairement à la première partie, la courbure scalaire S_g < 0.

Notre problème est d'étudier encore les invariants conformes de Paneitz -Branson et particulièrement $\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_2(\widetilde{g})\,[vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$ et quand est qu'il est atteint ?

Lorsque $S_g < 0$ il n'est pas difficile de voir que l'opérateur n'est pas nécessairement coercif, pour cela on a exploité les idées dans [ElSay12] pour contourner cette difficulté et pouvoir encore utiliser la méthode variationnelle et naturellement on a réussi à répondre aux questions suivantes :

Notre fonctionnelle est elle bornée?

Les valeurs propres sont elle atteintes? Peut-on avoir la positivité des solutions?

Peut-on trouver des solutions qui change de signes correspondantes aux valeurs propres?

L'invariant standard de Paneitz-Branson $\mu(M,g)$ est il atteint ?

Le premier invariant de Paneitz-Branson $\mu_1(M,g)$ est il atteint? Quelle estimation de $\mu_1(M,g)$

Est ce qu'il y a égalité entre $\mu(M,g)$ et $\mu_1(M,g)$?

Le second invariant de Paneitz-Branson $\mu_2(M,g)$ est il atteint? Quelle estimation de $\mu_2(M,g)$ ....etc.

Voici les résultats les plus importants, ils sont classés dans l'ordre.

1.5.3 Résultats de la troisième partie.

1) La suite minimisante de $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est bornée dans $H_2^2(M)$

Proposition (5.2) : Soit $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ une métrique généralisée conforme à la métrique g, on suppose que $u > 0$. Alors toute suite minimisante de$\lambda_1(\widetilde{g})$ est bornée dans $H_2^2(M)$ et $\lambda_1(\widetilde{g}) > -\infty$.

Proposition (5.3) : Supposons que $\lambda_1(g) < 0$, alors il existe $u \in L^N(M)$, $u \neq 0$ et

$u \geq 0$ vérifiant

$$\lambda_1(\widetilde{g}) = -\infty \quad \text{où} \;\; \tilde{g} = u^{N-2}g.$$

2) **Etude des valeurs propres :**

Proposition (5.4) : Pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}}g$ conforme g, supposons que $u > 0$. Ils existent deux fonctions $v, w \in H_2^2(M)$ solutions au sens faible des équations $P_g v = \lambda_1(\widetilde{g})|u|^{N-2}v$ et $P_g w = \lambda_2(\widetilde{g})|u|^{N-2}w$ avec les contraintes $\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$, $\int\limits_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1$ et $\int\limits_M u^{N-2}vw dv_g = 0$, en particulier si $u \in C^\infty(M)$, alors $v, w \in C^\infty(M)$.

3) Le signe des solutions:

Proposition (5.5) : lorsque g est dans la classe conforme et si $\lambda_1(\widetilde{g}) \leq 0$, alors v est une solution qui change de signe et si $\lambda_1(\widetilde{g}) > 0$ aucune conclusion sur le signe de v.

4) Estimation de μ et son existence :

Proposition (5.6) : Lorsque (M, g) est non conformément plate et $n \geq 9$, on a toujours $\mu(M, g) < K_2^{-2}$ et $\mu(M, g)$ est atteint par une fonction de classe $C^{4,\alpha}(M)$.

5) Etude de μ_1 et son existence:

Proposition (5.7) : Supposons que $\lambda_1(g) < 0$, alors $\mu_1(M, g) \to -\infty$ et on a toujours $\mu(M, g) > -\infty$ contrairement à $\mu_1(M, g)$.

Théorème (5.2) : Si $\lambda_1(g) > 0$. Alors $\mu_1(M, g) \geq 0$ et ils existent deux fonctions non triviales $u \in L_+^N(M)$, $v \in H_2^2(M)$ solution de

$$L_g v = \mu_1(M, g)|u|^{N-2}v \qquad \text{et} \quad \text{vérifiant} \int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1.$$

en d'autres termes $\mu_1(M, g)$ est atteint par une métrique généralisée.

6) Estimation de μ_2 :

Théorème (5.3) : Lorsque (M, g) est non conformément plate, $n \geq 9$ et $\mu(M, g) < 0$ alors $\mu_2(M, g) < K_2^{-2}$.

On distingue deux cas intéressants : soit $\lambda_1(g) > 0$, soit $\lambda_1(g) < 0$ et $\lambda_2(g) > 0$ pour l'existence de $\mu_2(M, g)$.

8) Existence de μ_2 :

Théorème (5.4) : Si $\mu_2(M, g) < K_2^{-2}$, alors $\mu_2(M, g)$ est atteint par une métrique généralisée, autrement dit ils existent deux fonctions non triviales $u \in L_+^N(M)$, $w \in H_2^2(M)$ solution de l'équation $P_g v = \mu_2(M, g)u^{N-2}w$.

1.6 Généralité et définition

Dans cette partie on rappelle uniquement quelques définitions ou théorèmes qui seront utiles par la suite, le lecteur sera contraint de connaître un minimum de géométrie différentielle.

Définition 1.6 [*AH06*] *On dit que la métrique $\tilde{g}$ est conforme à la métrique g ssi $\tilde{g} = fg$ où f est une fonction de classe C^∞ strictement positive, l'ensemble $\langle g \rangle = \{ fg \ , \ f \in C^\infty$ et $f > 0 \}$ est dit la classe conforme de g .*

Définition 1.7 [*Heb97*] *Soit (Ω, ξ) une carte de M en x. La courbure scalaire de (M, g) est la fonction de M dans $\mathbb{R}$ donnée par l'expression $S_g(x) = g^{ij}(x)R_{ij}(x) = g^{ij}(x)g^{\alpha\beta}(x)R_{\alpha i\beta j}(x)$ avec $R_{ij}(x) = g^{\alpha\beta}(x)R_{\alpha i\beta j}(x)$. La sommation des indices est suivant la convention d'Einstein, en coordonnées locales, les g^{ij} sont les composantes du tenseur métrique inverse g^{-1}, R_{ij} sont les composantes du tenseur de Ricci Ric_g et les $R_{i\alpha j\beta}$ sont les composantes du tenseur de Riemann Rm_g, les $R_{\alpha i\beta j} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ij}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\beta}}{\partial x_j} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^\alpha_{jk}\Gamma^k_{i\beta}$ où $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = D_\alpha(u \circ \xi^{-1})(\xi(x))$ n'est que la dérivée partielle de la fonction u, les $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}(\frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m})$ sont les symboles de christoffel de la connexion de Levi-civita associée, les $R_{i\alpha j\beta}$ sont les fonctions des dérivées secondes de g_{ij}.*

Définition 1.8 [*Heb97*] *On dit que la variété (M, g) est conformément plate si en tout point p de M, il existe un voisinage ouvert U de p et une métrique g_0 conforme à g telle que le tenseur de courbure Rm_{g_0} est identiquement nul sur tout U .*

Définition 1.9 [*Heb97*] *Une variété riemannienne* (M,g) *est dite d'Einstein si est seulement si le tenseur de Ricci* Ric_g *est un multiple de la métrique* g *par un scalaire réel et dans ce cas la courbure scalaire* S_g *est constante .*

Définition 1.10 [*Heb97*] *Soit* (M,g)*une variété riemannienne de dimension* n, $p \geq 1$ *un nombre réel,* k *et* r *sont deux entiers naturels. L'espace de Sobolev* $H_k^p(M)$ *est le complété de l'espace* $\{f \in C^\infty(M)\ ,\ |\nabla^l f| \in L^p(M)\ \ \text{lorsque}\ \ 0 \leq l \leq k\}$ *pour la norme* $\|f\|_{H_k^2} = \sum_{l=0}^{k} \left\|\nabla^l f\right\|_{L^p}$.

Définition 1.11 [*Heb97*] $\Delta_g u = -g^{ij}\left(\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ *est le laplacien riemannien où* $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ *sont les dérivées partielles de* u *en coordonnées locales.*

Théorème 1.10 [*Heb97*] *Soit* $p \in]1,+\infty[$ *et* $(u_i)_{i\in N}$ *une suite bornée dans* $L^p(E)$ *qui converge presque par tout vers* u*, alors* $u \in L^p(E)$ *et* (u_i) *converge faiblement vers* u *dans* $L^p(E)$*.*

Définition 1.12 [*Heb97*] *Un espace de Banach* E *est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est faiblement compact. Puisque les espaces de Sobolev sont réflexifs, on utilisera ce théorème comme suit :*

Théorème 1.11 [*Heb97*] *Si on a une certaine suite de fonctions* $(u_i)_{i\in N}$ *bornée dans* $H_k^2(M)$*, alors il existe une sous-suite* $(u_i)_{i\in N}$ *qui converge faiblement vers* $u \in H_k^2(M)$ *et*

$$\liminf \|u_i\|_{H_k^2} \geq \|u\|_{H_k^2}.$$

Définition 1.13 [*Heb97*] *Soit* (M,g) *une variété riemannienne de dimension* $n \geq 3$*, le tenseur de courbure de Weyl* W *est définie par le champ de tenseurs quatre fois covariants dont les composantes sont :* $W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{jl}) + \frac{R_g}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$

Le tenseur de Weyl est obtenu à partir du tenseur de courbure de Riemann, en recherchant un tenseur invariant par transformation conforme de la variété : si $\tilde{g} = e^f g$ est une métrique conforme à g alors $W_{\tilde{g}} = e^f W_g$.

Le tenseur de Weyl est identiquement nul si la variété est de dimension 3 ou si elle est conformément plate .

Théorème 1.12 [*Heb97*] *(Théorème d'inclusions de Sobolev). Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n.*

1) Si k et l deux entiers($k > l \geq 0$), p et q deux réels ($p > q \geq 1$) qui vérifient $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-l}{n}$ alors $H_k^q(M)$ est inclus dans $H_l^p(M)$ et cette inclusion est seulement continue.

2) Si $r \in \mathbb{N}$ et $\frac{k-r}{n} > \frac{1}{q}$ alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^r(M)$ est continue.

Remarque : Dans tous les cas $H_k^q(M)$ ne dépend pas de la métrique g .

Théorème 1.13 [*Heb97*] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, k un entier naturel, p et q deux nombres réels qui vérifient $1 \geq \frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k-l}{n} > 0$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset L^p(M)$ est compacte.*

Définition 1.14 [*Mad08*] *Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension n. On note par $T^*(M)$ le fibré cotangent de M. L'espace $H_k^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ est l'ensemble des sections g (des tenseurs 2 fois covariants) telles que dans toute carte locale, les composantes g_{ij} de g sont dans H_k^p. L'espace $H_k^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ ne dépend pas de la métrique g_0.*

Définition 1.15 [*Heb97*] *Les deux variétés (M, g_0) et (N, g_1) sont conformément difféomorphe s'il existe un difféomorphisme Φ de M dans N telle que l'image réciproque $\Phi^* g_1$ appartient à la classe conforme de g_0. Si (Ω, ψ) et (Ω', φ) sont deux cartes de M et N telles que $\Phi(\Omega) \subset \Omega'$, l'expression de $(\Phi^* g_1)_{ij}$ est donnée par :*

$$(\Phi^* g_1)_{ij} = g_1(\Phi(x))_{\alpha\beta} (\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_i})_x (\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x_j})_x$$

où $g_1(\Phi(x))_{\alpha\beta}$ sont les composantes de g_1 dans la carte (Ω', φ) et on diras que Φ est difféomorphisme de classe C^k de M sur N, si Φ réalise une bijection de M sur N où Φ et Φ^{-1}sont respectivement de classe C^ksur M et sur$N$.

Théorème 1.14 *[Heb97] (Principe du maximum) : Si u satisfait l'inégalité différentielle*

$$(L+h)u \geq 0$$

avec $h \leq 0$, et L uniformément elliptique dans Ω où $L = \sum_{i,j+1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné. Si de plus les coefficients de L et h sont(localement) uniformément bornés (ou bien continus). Si u atteint son maximum positif sur Ω, on a $u \equiv M$.

Théorème 1.15 *[Heb97] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et L un opérateur linéaire d'ordre 2 uniformément elliptique qui s'écrit sous la forme $L(u) = a^{ij}\partial_{ij}u + b^i\partial_i u + hu$ où a_{ij}, b_i et h sont des fonctions bornées dans C^k, $k \in N$. Soit u une solution de l'équation $Lu = f$ au sens des distributions. (i) Si $f \in C^k(\Omega)$, alors $u \in C^{k+2}(\Omega)$. (ii) Si $f \in H_k^p(\Omega)$ alors $u \in H_{k+2}^p(\Omega)$.*

Chapitre 2

Second invariant de Paneitz-Branson.

2.1 Généralité

En 1983, Paneitz [Pan83] introduit un opérateur conformément invariant d'ordre 4 défini sur une variété riemannienne de dimension 4. Branson[Bra87] généralise la définition de l'opérateur sur des variétés de dimension $n \geq 5$. Soit(M, g) une variété riemannienne compacte dimension $n \geq 5$, on note par Ric_g et S_g, la courbure de Ricci et la courbure scalaire g, pour $u \in C^{\infty}(M)$ l'opérateur de Paneitz-Branson est donné par l'expression suivante :

$$P_g u = \Delta_g^2 u - div_g \left[(A^{\#}) du \right] + \frac{n-4}{2} Q_g u,$$

$\Delta_g u = -div_g(\nabla u)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami (le laplacien riemannien),

$A_g^n = a_n S_g g + b_n Ric_g$ est un champs de tenseur deux fois covariant, le symbole # signifie l'isomorphisme musical,

$$a_n = \frac{(n-2)^2 + 4}{2(n-1)(n-2)} \quad , \quad b_n = -\frac{4}{n-2}.$$

et

$$Q_g = \frac{1}{n-2}\Delta_g S_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2} S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}|Ric_g|^2.$$

L'expression de la divergence en coordonnées locales est donnée par :

$$div_g\left[(A^{\#})du\right] = g^{ij}\left[\partial_i(A_{jk}g^{kq}\partial_q u) - \Gamma_{ij}^k A_{kt} g^{ts}\partial_s u\right]$$

où $A_{jk} = a_n S_g g_{jk} + b_n Ric_{jk}$. Soit $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{N-2}{2}} g$ une métrique conforme à g où $\varphi \in C^\infty(M)$ strictement positive et $N = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique, la propriété de l'invariance conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson se traduit par : pour tout $u \in C^\infty(M)$, $P_g(u\varphi) = \varphi^{N-1}P_{\widetilde{g}}(u)$. En prenant $u \equiv 1$, on trouve que $P_g(\varphi) = \frac{n-4}{2}Q_{\widetilde{g}}\varphi^{N-1}$ [VHR05]. La quantité Q_g est dite la Q-courbure de P_g qui est l'analogue de la courbure scalaire du Laplacien conforme. Si (M,g) est d'Einstein, l'opérateur géométrique de Paneitz-Branson P_g est réduit à

$$P_g u = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u$$

$$a_n = \frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}.$$

Rappellons qu'une variété riemannienne (M,g) est dite d'Einstein si est seulement si le tenseur de Ricci Ric_g est un multiple de la métrique g par un scalaire réel et de plus sa courbure scalaire S_g est constante et on a toujours

$$\frac{(a_n S_g)^2}{4} - \ b_n S_g^2 = [\frac{S_g}{n(n-1)}]^2 > 0.$$

Soit $H_2^2(M)$ l'espace de Sobolev des fonctions u ,$|\nabla u|$, $\left|\nabla^2 u\right| \in L^2(M)$ munit de la norme équivalente $\|u\| = \left[\int\limits_M |\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}}$. Du théorème(13) des injections de Sobolev [Heb97], on a $H_2^2(M)$ s'injecte dans $L^q(M)$ où $1 < q \leq N = 2n/(n-4)$ et cette injection est compacte lorsque $q < N$.

P_g est un opérateur elliptique auto-adjoint, d'où son spectre est discret :

$spec(P_g) = \{\lambda_1(g), \lambda_2(g), ... \quad \}$et ses valeurs propres sont telles que :

$$\lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \to +\infty$$

La $k^{ième}$-valeur propre $\lambda_k(g)$ est caractérisée par la définition suivante :

Définition 2.1 *La $k^{ième}$-valeur propre $\lambda_k(g)$ de l'opérateur P_g est données par :*

$$\lambda_k(g) = \inf_{V \in Gr_k(C^\infty)} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_M |\Delta v|^2 + a_n S_g |\nabla v|^2 + b_n S_g^2 v^2 dv_g}{\int\limits_M v^2 dv_g}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Gr_k(C^\infty(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k de $C^\infty(M)$.

Remarque : Si (M, g) est d'Einstein et de dimension $n \geq 3$, la courbure scalaire S_g est constante et si de plus elle est strictement positive on a :

$$\left[\int\limits_M |\Delta u|^2 + a_n S_g |\nabla u|^2 + b_n S_g^2 u^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int\limits_M uLgudv_g\right]^{\frac{1}{2}} = \|u\|$$

qui est une norme équivalent à la norme de $H_2^2(M)$.

Notation : on pose

$$I(w) = \frac{\int_M wL_g(w)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2} w^2 dv_g)} \qquad \text{et} \qquad I(u, w) = \frac{\int_M wL_g(w)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2} w^2 dv_g)} (\int_M u^N dv_g)^{\frac{4}{n}} .$$

Lemme 2.1 [*Car01*] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte dimension n, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $b(\varepsilon) > 0$ telle que*

$$\forall u \in H_2^2(M) \ , \quad \|u\|_N^2 \leq (K_2^2 + \varepsilon)\|\Delta u\|_2^2 + b(\varepsilon)\|u\|_2^2 \ ,$$

où $N = 2n/(n-4)$ *et*

$$K_2^{-2} = \pi^2 n(n^2-4)(n-4)\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} = \frac{n\,(n-4)\,(n^2-2)}{16}\omega_n^{\frac{4}{n}}$$

avec ω_n *le volume de* S_n *la sphère unité de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lemme 2.2 [*DHL00*] *Soit* (S_n, h) *la sphère unité de* $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 5$ *et* P_g *l'opérateur de Paneitz-Branson sur* (S_n, h) *alors*

$$K_2^{-2} = \inf_{v \in H_2^2(S_n), v \neq 0} \frac{\int\limits_{S_n} v P_h v dv_h}{(\int\limits_{S_n} v^N dv_h)^{\frac{2}{N}}}$$

.

Lemme 2.3 [*DHL00*] *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte dimension* $n \geq 5$, α *un nombre positif et* b *une fonction définie sur* M *et* $u \in H_2^2(M)$ *une solution faible de l'équation* $\Delta_g^2 u + \alpha \Delta_g u + \frac{\alpha^2}{4} u = bu$. *Si* $b \in L^{\frac{n}{4}}(M)$, *alors* $u \in L^s(M)$ $\forall s \geq 1$.

Définition 2.2 *Soit* $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ *et non identiquement nulle.* $Gr_k^u(H_2^2(M))$ *est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension* k $(k \geq 1)$ *de* $H_2^2(M)$ *tel que le sous espace* $span(v_1, ..., v_k) \in Gr_k^u(H_2^2(M))$ *si est seulement si* $v_1, ..., v_k$ *sont linéairement indépendant sur* $M \setminus u^{-1}(0)$.

Définition 2.3 *Une métrique généralisée conforme à la métrique* g *est une métrique de la forme* $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ *où* $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ *et non identiquement nulle.*

Définition 2.4 *Pour toute métrique généralisée* $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$, *la* $k^{ième}$*-valeur propre* $\lambda_k(\widetilde{g})$

de l'opérateur de Paneitz-Branson est définie par :

$$\lambda_{k,\tilde{g}} = \inf_{V \in Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} I(w) \qquad où \qquad I(v) = \frac{\int\limits_M v P_g v dv_g}{\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g} \quad et \quad k \geq 1.$$

Définition 2.5 *Le $k^{ièm}$ invariant de Paneitz-Branson est défini par :*

$$\mu_k(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) \left[vol(M,\widetilde{g})\right]^{\frac{4}{n}}$$

où $vol(M,\widetilde{g})$ est le volume riemannien de M pour la métrique $\widetilde{g}$ et

$$[g] = \left\{\widetilde{g} = \varphi^{\frac{N-2}{2}} g \ , \varphi \in C^\infty(M) \ et \ \varphi > 0\right\}$$

est la classe conforme de la métrique g.

2.2 Première et Deuxième valeur propre pour une métrique généralisée.

Dans tout se qui suit (M,g) est une variété d'Einstein compacte de dimension $n \geq 5$, de courbure scalaire S_g strictement positive, $N = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique de l'injection Sobolev de $H_2^2(M)$ dans les espaces $L^q(M)$.

Lemme 2.4 *Soit $u \in L_+^N(M)$ et v_m une suite de $H_2^2(M)$ qui converge faiblement vers v, alors*

$$\int\limits_M u^{N-2}(\left|v_m^2 - v^2\right|) dv_g \to 0.$$

Preuve: Soit A un nombre réel positif, on pose $u_A = inf(u,A)$. La suite tronquée $(u_A)_A$ est monotone, converge simplement vers u lorsque A est très grand. Du théorème de la convergence monotone, on obtient

$$\int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})^{\frac{N}{N-2}} dv_g \to 0 \text{ quand } A \text{ tend vers } +\infty.$$

D'autre part on a,

$$\begin{aligned}
\int_M u^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g &= \int_M u^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| + u_A^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| - u_A^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g \\
&= \int_M u_A^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g + \int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2}) \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g
\end{aligned}$$

et puisque $u_A^{N-2} \leq A^{N-2}$,

$$\int_M u^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g \leq \int_M A^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g + \int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})(|v_m| + |v|)^2 dv_g.$$

Et à l'aide de l'inégalité de Hölder appliquée à $\int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})(|v_m| + |v|)^2 dv_g$, on trouve

$$\int_M u^{N-2} \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g \leq A^{N-2} \int_M \left|v_m^2 - v^2\right| dv_g$$

$$+ (\int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})^{\frac{N}{N-2}} dv_g)^{\frac{N-2}{N}} (\int_M (|v_m| + |v|)^N dv_g)^{\frac{2}{N}}$$

tenant compte de la convergence forte de v_m dans $L^2(M)$, le fait que v_m est bornée dans $L^N(M)$ et comme on peut prendre A assez grand, on obtient le résultat. ■

proposition 2.1 *Pour tout $u \in L_+^N(M)$, il existe une fonction v de $H_2^2(M)$ solution au sens des distributions de l'équation $L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$ vérifiant $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, où $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est la première valeur propre de L_g pour la métrique $\tilde{g}$.*

Preuve: Soit (v_m) une suite minimisante de $\lambda_{1,\tilde{g}}$, une suite $v_m \in H_2^2(M)$ telles que $u^{\frac{N-2}{2}}v_m \neq 0$ et

$$\lim_m \frac{\int_M v_m L_g(v_m) dv_g}{(\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g)} = \lambda_{1,\tilde{g}}.$$

Sans perdre de généralité, on peut toujours normaliser v_m par :

$$\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g = 1 \text{ car } \frac{\int_M \lambda v L_g(\lambda v) dv_g}{\int_M |u|^{N-2} (\lambda v)^2 dv_g} = \frac{\int_M v L_g(v) dv_g}{(\int_M |u|^{N-2} v^2 dv_g)}.$$

D'où (λv_m) est encore minimisante et avec $\lambda = \frac{1}{(\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g)^{\frac{1}{2}}}$, la nouvelle suite (λv_m) est normalisée. Pour un rang m assez grand, on a $\|v_m\|^2 = \int_M v_m L_g(v_m) dv_g \leq \lambda_{1,\tilde{g}} + 1$, notre suite (v_m) est bornée dans $H_2^2(M)$. Aprés restriction à une sous suite, il va exister un v dans $H_2^2(M)$ tel que $v_m \to v$ faiblement $H_2^2(M)$, fortement $L^2(M)$ et presque partout sur M , il suit que $\int_M v L_g(v) dv_g \leq \liminf \int_M v_m L_g(v_m) dv_g = \lambda_{1,\tilde{g}}$, du lemme (3.4) on a

$$\int_M u^{N-2}(v^2 - v_m^2)\, dv_g \to 0 \quad \text{donc} \quad \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1,$$

la fonction v est non identiquement nulle et comme $\lambda_{1,\tilde{g}}$ etant l'inf, il découle que $\int_M v L_g(v) dv_g = \lambda_{1,\tilde{g}}$, en écrivant l'équation d'Euler-Lagrange associé à notre problème de minimisation, v est solution au sens des distributions de l'équation

$$L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v,$$

et de plus on a $\|v\|_{H_2^2}^2 = \lambda_{1,\tilde{g}} > 0$, en ajoutant et en retranchant la quantité $\frac{(a_n S_g)^2}{4} v$ de l'équation $\Delta_g^2 v + a_n S_g \Delta_g v + b_n S_g^2 v = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$, on a

$$\Delta_g^2 v + a_n S_g \Delta_g v + \frac{(a_n S_g)^2}{4} v = (\frac{(a_n S_g)^2}{4} - b_n S_g^2 + \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2}) v.$$

Nous avons :

$$N-2=\frac{2n}{n-2}-2=\frac{2n-2n+4}{n-2}=\frac{4}{n-2},$$

de l'inégalité d'Hölder on retrouve :

$$\int\limits_M (u^{N-2})^{\frac{n}{4}}dv_g=\int\limits_M (u^{\frac{4}{n-2}})^{\frac{n}{4}}dv_g=\int\limits_M u^{\frac{N}{2}}dv_g\leq (\int\limits_M u^N dv_g)^{\frac{1}{2}}(\int\limits_M dv_g)^{\frac{1}{2}}<+\infty$$

i.e $u^{N-2}\in L^{\frac{n}{4}}(M)$ et d'après le lemme (3.3)

$$v\in L^{\infty}(M).$$

v est un minimiseur non identiquement nul dans $L^{\infty}(M)$ de $\lambda_{1,\tilde{g}}$ vérifiant $\int\limits_M u^{N-2}v^2dv_g=$ 1. ■

proposition 2.2 *Soit v la solution construite précédemment et soit l'ensemble*

$$E=\{\ \ w\in H_2^2(M)\ \ \textit{telle que}\ u^{\frac{N-2}{2}}w\neq 0\ ,\int\limits_M u^{N-2}w^2dv_g=1\ \textit{et}\int\limits_M u^{N-2}wvdv_g=0\}.$$

L'ensemble E n'est pas vide.

Preuve: Soient v,s deux éléments de $H_2^2(M)$ linéairement indépendants, quitte à les multiplier par des constantes, on peut supposer que : $\int\limits_M u^{N-2}v^2dv_g=\int\limits_M u^{N-2}s^2dv_g=1.$ Nécessairement $u^{\frac{N-2}{2}}v$, $u^{\frac{N-2}{2}}s$ sont non identiquement nulles, posons $w=\alpha v+\beta s$ avec α,β des réels. Trouvant α,β tels que $w\in E$? En multipliant w par $u^{N-2}v$ et en intégrant, on trouve

$$\int\limits_M u^{N-2}wvdv_g=\alpha+\beta\int\limits_M u^{N-2}svdv_g=0$$

i.e

$$\beta = -\frac{\alpha}{\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g}.$$

Si $\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g = 0$, alors $s \in E$ et E est non vide, sinon $\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g \neq 0$ d'où β est bien défini.

De la quantité $\int\limits_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$, on obtient : $\int\limits_M u^{N-2} (\alpha v + \beta s)^2 dv_g = 1$ i.e $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \int\limits_M u^{N-2} s v dv_g = 1$,

$$\alpha = \pm \frac{\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g}{(1 - [\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g]^2)^{\frac{1}{2}}}$$

α est bien défini car $\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g < 1$. En effet si $\int\limits_M u^{N-2} s v dv_g \geq 1$ et d'après l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$1 \leq \int\limits_M u^{N-2} s v dv_g = \int\limits_M u^{\frac{N-2}{2}} s \, u^{\frac{N-2}{2}} v dv_g \leq [\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g]^{\frac{1}{2}} [\int\limits_M u^{N-2} s^2 dv_g]^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

c'est l'égalité dans l'inégalité d'Hölder, cela entraine que v sera un multiple de s d'où v, s seront linérairement dépendants, ce qui contredit notre hypothèse. ■

proposition 2.3 *Soient u et v les fonctions fixées dans la proposition (3.1), il existe une fonction w de $H_2^2(M)$ solution au sens faible de l'équations $L_g(w) = \lambda'_{2,g} u^{N-2} w$, vérifiant $\int\limits_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int\limits_M u^{N-2} w v dv_g = 0$ où $\lambda'_{2,g} = \inf\limits_E I(w)$*

Preuve: Soit (w_m) une suite minimisante de $\lambda'_{2,g}$ i.e une suite $w_m \in E$ telle que

$$\lim_m \frac{\int_M w_m L_g(w_m) dv_g}{(\int_M u^{N-2} w_m^2 dv_g)} = \lambda'_{2,g},$$

avec la même preuve de la proposition (3.1), on trouve un $w \in L^\infty(M)$ solution faible de $L_g(w) = \lambda'_{2,g}\ u^{N-2} w$

vérifiant $\int\limits_M u^{N-2} w^2 = 1$ et pour l'orthogonalité on a,

$$\int\limits_M u^{N-2} w v dv_g = \int\limits_M u^{N-2} w_m v - u^{N-2} w_m v + u^{N-2} w v dv_g$$

$$= \int\limits_M u^{N-2} v (w - w_m) dv_g + \int\limits_M u^{N-2} w_m v dv_g = 0.$$

En effet la suite $w_m \in E$ donc $\int\limits_M u^{N-2} w_m v dv_g = 0$ puis de la convergence faible de w_m vers w dans $L^N(M)$, on a

$$\int\limits_M u^{N-2} v (w - w_m) dv_g \to 0 \quad (u^{N-2} v \in L^{\frac{N}{N-1}} \text{ dual de } L^N(M)).$$

■

proposition 2.4 *On a toujours*

$$\lambda'_{2,g} = \lambda_{2,\tilde{g}}$$

Preuve: Puisque $w \in E$, les fonctions $u^{\frac{N-2}{2}} v$, $u^{\frac{N-2}{2}} w$ sont linérairement indépendantes donc $V_0 = span(v, w) \in Gr_2^u(H_2^2(M))$,posons $f = \alpha v + \beta w$ avec α, β deux réels non nuls et évaluons

$$s = \frac{\int_M f L_g(f) dv_g}{\int_M u^{N-2} f^2 dv_g}$$

sur V_0, nous obtenons

$$s = \frac{\alpha^2 \int_M vL_g(v)dv_g + \beta^2 \int_M wL_g(w)dv_g}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$s = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\lambda_{1,\tilde{g}} + \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\lambda'_{2,\tilde{g}}$$

et comme $\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$, alors pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $s = \lambda_{1,\tilde{g}} \cos^2\theta + \lambda'_{2,\tilde{g}} \sin^2\theta$.
D'autre part

$$\frac{ds}{d\theta} = (\lambda'_{2,\tilde{g}} - \lambda_{1,\tilde{g}}) \sin 2\theta,$$

et en tenant compte du fait que :

$$\lambda_{1,\tilde{g}} = \inf_{H_2^2} \leq \lambda'_{2,\tilde{g}} = \inf_{E} \text{ car } E \subset H_2^2(M).$$

On obtient que $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est un minimum de $s(\theta)$ et $\lambda'_{2,\tilde{g}}(\theta)$ est un maximum de s donc

$$\lambda'_{2,\tilde{g}} = \sup_{f\in V_0} \frac{\int_M fL_g(f)dv_g}{\int_M u^{N-2}f^2dv_g},$$

et comme l'infimum de la quantité $\sup\limits_{f\in V_0} \frac{\int_M fL_g(f)dv_g}{\int_M u^{N-2}f^2dv_g}$ sur tous les éléments de $Gr_2^u(H_2^2(M)$ est atteint sur V_0, il découle que

$$\lambda'_{2,\tilde{g}} = \inf_{V\in Gr_2^u(H_2^2(M))} \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_M vP_gvdv_g}{\int\limits_M u^{N-2}v^2dv_g} = \lambda_{2,\tilde{g}}.$$

■

Conclusion 1 *Pour tout $u \in L_+^N$ (pour chaque métrique généralisée), ils existent deux fonctions $v, w \in H_2^2(M)$ solutions au sens faible de $L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}}u^{N-2}v$ et $L_g(w) =$*

$\lambda_{2,\tilde{g}} u^{N-2} w$ *vérifiant*

$$\int\limits_M u^{N-2} w^2 dv_g = \int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1 \qquad et \qquad \int\limits_M u^{N-2} wv dv_g = 0.$$

2.2.1 Régularité et positivité de la solution

proposition 2.5 *Si* $u \in C^\infty(M)$ *et* $u > 0$, *alors toute solution faible de l'équation* $L_g v = \lambda u^{N-2} v$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est de classe* $C^\infty(M)$.

Preuve: On a $L_g v = (\Delta + a)(\Delta + b) v = \lambda u^{N-2} v$ où a, b sont des solutions de l'équation $x^2 + a_n S_g x + b_n S_g = o$.

Posons $z = (\Delta + b) v$, on trouve $(\Delta + a) z = \lambda u^{N-2} v$, puisque $v \in H_2^2$, $u^{N-2} v \in H_2^2(M)$ et avec le théorème (2.6), $z \in H_4^2(M)$, puis $v \in H_6^2(M)$ et par récurrence $v \in H_k^2(M)$ avec k assez grand. A l'aide du théorème (2.3), on obtient $v \in C^\infty(M)$. ■

proposition 2.6 *Si* $u \in C_+^\infty(M)$ *et puisque* S_g *est strictement positive, alors l'équation* $L_g v = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$ *possède encore une solution* $v \in C^\infty$ *strictement positive vérifiant* $\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$.

Preuve: Soit v une solution de classe $C^\infty(M)$ de l'équation $L_g v = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$ et soit f la solution de l'équation

$$\Delta f + \frac{a_n S_g}{2} f = \left| \Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \right|.$$

Comme $S_g > 0$, l'opérateur $\Delta + \frac{a_n S_g}{2}$est inversible car toutes les valeurs propres du laplacien sont positives et du coup f existe et elle est de classe $C^2(\left|\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v\right|$est continue). Si $\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \geq 0$, on a $f = v$, si $\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \leq 0$, on a $f = -v$ et si $\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v$ change de signe, on pose $w = f \pm v$ et on obtient:

$$\Delta w + \frac{a_n S_g}{2} w = \left| \Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \right| \pm \left[\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \right] \geq 0.$$

Comme $\frac{a_n S_g}{2} > 0$, du principe du maximum de Hopf (théorème (2.5)[Heb97] , il suit que la fonction $-w$ ne peut avoir de maximum local positif ou nul sans être identiquement nulle, autrement dit $f = \pm v$ et nous n'avons pas $f = \pm v$ car si c'est le cas, on retrouve les cas $\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \geq 0$ ou $\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v \leq 0$, donc obligatoirement la fonction w est partout strictement positive. On conclut que $w = f \pm v > 0$, donc $f > |v| \geq 0$. De plus, on a $\int\limits_M u^{N-2} f^2 dv_g \geq \int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, alors soit le réel k tel que $\int\limits_M u^{N-2} (kf)^2 dv_g = 1$, on peut prendre $k \in]0,1[$. Posons $h = kf$ et calculons la quantité suivante:

$$\int\limits_M |\Delta h|^2 + a_n S_g |\nabla h|^2 + b_n S_g^2 h^2 dv_g - \lambda_{1,\tilde{g}} =$$

$$k^2 \int\limits_M |\Delta f|^2 + a_n S_g |\nabla f|^2 + b_n S_g^2 f^2 dv_g - \lambda_{1,\tilde{g}} =$$

$$k^2 \int\limits_M (\Delta f + \frac{a_n S_g}{2} f)^2 - \frac{a_n^2 S_g^2}{4} f^2 + b_n S_g^2 f^2 dv_g - \lambda_{1,\tilde{g}} =$$

$$k^2 \int\limits_M (\Delta v + \frac{a_n S_g}{2} v)^2 - \frac{a_n^2 S_g^2}{4} f^2 + b_n S_g^2 f^2 dv_g - \lambda_{1,\tilde{g}} =$$

$$(k^2 - 1)\lambda_{1,\tilde{g}} + k^2 (b_n S_g^2 - \frac{a_n^2 S_g^2}{4}) \int\limits_M (f^2 - v^2) dv_g \leq 0$$

et comme $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est l'infimum, on obtient

$$\int\limits_M |\Delta h|^2 + a_n S_g |\nabla h|^2 + b_n S_g^2 h^2 dv_g = \lambda_{1,\tilde{g}}.$$

Finalement on vient de construire une solution h de classe C^∞ strictement positive de l'équation $L_g v = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$. ■

Remarque 2.1 *On a toujours $\lambda_{1,\tilde{g}} < \lambda_{2,\tilde{g}}$. En effet si l'y égalité notre v sera solution de $L_g v = \lambda_{2,\tilde{g}} u^{N-2} v$, donc v minimise $\lambda_{2,\tilde{g}}$ et cela entraine que $v \in E$, ce qui est impossible.*

2.3 L'invariant usuel de Paneitz -Branson $\mu(M, g)$.

L'invariant usuel de l'opérateur de Paneitz-Branson $\mu(M, g)$ est défini par :

$$\mu(M,g) = \inf_{V \in H_2^2(M), v \neq 0} \frac{\int_M v P_g v dv_g}{[\int_M v^N dv_g]^{\frac{2}{N}}}.$$

Après usage des notations utilisés dans [Car01], on définit l'invariant usuel de Paneitz-Branson $\mu(M, g)$ comme suit :

$$\mu(M,g) = \inf_{V \in H_2^2(M), v \neq 0} I(v) \quad \text{où} \quad I(v) = \frac{\int_M |\Delta v|^2 - \int_M (-a_n S_g) \nabla^i v \nabla_i v + \int_M b_n S_g^2 v^2 dv_g}{[\int_M v^N dv_g]^{\frac{2}{N}}}$$

où $\Delta_g^2 u - \nabla^i [a_n S_g \nabla_i u] + b_n S_g^2 u = \mu(M, g) |u|^{N-1}$ n'est autre que l'équation d'Euler-Lagrange correspondante i.e

$$\Delta_g^2 u + \nabla^i [-a_n S_g \nabla_i u] + b_n S_g^2 u = \mu(M, g) |u|^{N-1}.$$

Remarque 2.2 *$-a_n S_g = a$ et $b_n S_g^2 = h$ où a , h comme dans l'article [Car01], ce type d'équation a été étudié par plusieurs auteurs dans un cadre un peu plus général "the fourth order elliptic equations with critical Sobolev exponent ". D'après [Car01] on a le théorème suivant :*

Théorème 2.1 *On a toujours $\mu(M, g) \leq K_2^{-2}$. Si $\mu(M, g) < K_2^{-2}$,l'équation $\Delta_g^2 u + \nabla^i [a \nabla_i u] + hu = \mu(M, g) |u|^{N-1}$ possède une solution de classe $C^{4,\alpha}$ vérifiant $\int_M u^N dv_g = 1$, de plus si a , h sont constants et que les racines du trinôme $x^2 + ax + h$ sont positives, la solution u est strictement positive et de classe $C^\infty(M)$.*

proposition 2.7 *Lorsque* (M, g) *est non conformément plate et* $n \geq 9$, *on a toujours* $\mu(M, g) < K_2^{-2}$ *et que l'équation* $\Delta_g^2 u - \nabla^i [a_n S_g \nabla_i u] + b_n S_g^2 u = \mu(M, g) |u|^{N-1}$ *possède une solution* u *de classe* $C^\infty(M)$ *strictement positive vérifiant* $\int\limits_M u^N dv_g = 1$.

Preuve: On a par définition,

$$\mu(M, g) \leq I(1)$$

1) Si $\mu(M, g) = I(1)$, cela entraîne que $u = 1$ est solution, le $\mu(M, g)$ est atteint par une $C^\infty(M)$ positive fonction u telle que $\int\limits_M u^N dv_g = 1$ et aussi on a la valeur de μ,

$$\mu(M, g) = b_n S_g^2 [vol(M, g)]^{\frac{4}{n}} > 0.$$

2) Sinon $\mu(M, g) < K_2^{-2}$. En effet, soient x_0 un point de M, δ un réel strictement positif suffisamment petit, $B_{x_0}(\delta)$ la boule de centre au point x_0 et de rayon δ et η une C^∞ fonction telle que :

$$\eta(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{si} & x \in B_{x_0}(\delta) \\ 0 & \text{si} & x \in B_{x_0}(2\delta) \end{matrix} \right| .$$

Posons

$$\phi_\varepsilon = \eta \left(r^2 + \varepsilon^2\right)^{-\frac{n-4}{2}},$$

la fonction $\phi_\varepsilon \in H_2^2$ et $r = d(x, x_0)$. Pour $n \geq 9$, voir [ER02] on a :

$$\int_M \phi_\varepsilon P_g \phi_\varepsilon dv_g = \frac{n(n-4)(n^2-4)}{2^n \varepsilon^{n-4}} \omega_n - \frac{c_n |Weyl_g(x_0)|^2}{\varepsilon^{n-8}} + 0\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-8}}\right),$$

où $|Weyl_g(x_0)|$ est la norme du tenseur de Weyl au point x_0 et $c_n > 0$,

$$(\int_M \phi_\varepsilon^N dv_g)^{-\frac{2}{N}} = \frac{2^{n-4} \varepsilon^{n-4}}{[\omega_n]^{\frac{n-4}{n}}} + 0(\varepsilon^n).$$

Maitenant en calculant le rapport suivant,

$$Y(\phi_\varepsilon) = \frac{\int_M \phi_\varepsilon P_g \phi_\varepsilon dv_g}{(\int_M \phi_\varepsilon^N dv_g)^{\frac{2}{N}}} = \frac{n\,(n-4)\,(n^2-2)}{16}\omega_n^{\frac{4}{n}} - \widetilde{c}_n \left|Weyl_g(x_0)\right|^2 \varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4)$$

i.e

$$Y(\phi_\varepsilon) = K_2^{-2} - \widetilde{c}_n \left|Weyl_g(x_0)\right|^2 \varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4)$$

Comme $|Weyl_g(x_0)| \neq 0$, alors

$$Y(\phi_\varepsilon) = K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4) \quad \text{ avec } c > 0,$$

on déduit que

$$Y(\phi_\varepsilon) < K_2^{-2}$$

et comme $\mu(M,g)$ étant l'inf, on aura $\mu(M,g) < K_2^{-2}$, d'après le théorème (3.1) de [Car01] l'équation possède toujours une solution de classe $C^{4,\alpha}$et comme le trinome $x^2 - a_n S_g x + b_n S_g^2$ possède des racines strictement positives, u est de classe $C^\infty(M)$ et est strictement positive. En effet le discriminant $(-a_n S_g)^2 - 4b_n S_g^2 = a_n^2 S_g^2 - 4b_n S_g^2 = 4(\frac{(a_n S_g)^2}{4} - b_n S_g^2) = 4[\frac{S_g}{n(n-1)}]^2 > 0$, le trinome $x^2 - a_n S_g x + b_n S_g^2$ possède deux solutions strictements positives lorsque $n \geq 9$: $x_1 = \frac{a_n S_g - 2\frac{S_g}{n(n-1)}}{2} = \frac{1}{2}S_g(a_n - \frac{2}{n(n-1)}) = \frac{1}{2}S_g(\frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} - \frac{4}{2n(n-1)}) = \frac{1}{2}S_g(\frac{n^2-2n-8}{2n(n-1)}) > 0$ et $x_2 = \frac{a_n S_g + 2\frac{S_g}{n(n-1)}}{2} > 0$. Le même résultat découle aussi du principe du maximum décrit dans l'article [ER02]. ■

2.4 L'existence du premier invariant de Paneitz - Branson $\mu_1(M,g)$.

Définition 2.6 *On definit le $k^{ièm}$ invariant de Paneitz-Branson par*

$$\mu_k(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_k(\widetilde{g})\,[vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$$

où $vol(M,\widetilde{g})$ est le volume riemannien de M pour la métrique $\widetilde{g}$ et

$$[g]=\left\{\widetilde{g}=\varphi^{\frac{N-2}{2}}g\ ,\varphi\in C^{\infty}(M)\ et\ \varphi>0\right\}$$

est la classe conforme de la métrique g.

Définition 2.7 *Le premier invariant de Paneitz -Branson est donné par :*

$$\mu_1(M,g)=\inf_{\tilde{g}\in[g]}\lambda_{1,\tilde{g}}Vol(M,\tilde{g})^{4/n},$$

encore

$$\mu_1=\inf_{u\in C_+^{\infty}(M),V\in Gr_1^u(H_2^2)}\quad\sup_{v\in V}\frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M|u|^{N-2}v^2dv_g}(\int\limits_M u^N dv_g)^{\frac{4}{n}}.$$

Lemme 2.5 *On a toujours*

$$\mu_1\leq\mu.$$

Preuve:

$$\mu_1=\inf_{u\in C_+^{\infty},V\in Gr_1^u(H_2^2)}\sup_{v\in V}\frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M|u|^{N-2}v^2dv_g}(\int\limits_M u^N dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

$$\leq\inf_{u\in C_+^{\infty},V\in Gr_1^u(C_+^{\infty})}\sup_{v\in V}\frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M|u|^{N-2}v^2dv_g}(\int\limits_M u^N dv_g)^{\frac{4}{n}},$$

car $C_+^{\infty}(M)\subset H_2^2(M)$ et lorsque $u=v$ on retrouve :

$$\mu_1\leq\inf_{v\in C_+^{\infty},V\in Gr_1^u(C_+^{\infty})}\sup_{v\in V}\frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M|v|^{N-2}v^2dv_g}(\int\limits_M v^N dv_g)^{\frac{4}{n}}=\mu.$$

■

Lemme 2.6 *Soient (v_m) et (u_m) deux suites telles que : $v_m\to v$ faiblement dans*

$H_2^2(M)$, $u_m \to u$ *faiblement dans* $L^N(M)$ *vérifiant* $\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$, *alors*

$$\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1).$$

Preuve: En développant,

$$\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = \int_M u_m^{N-2} {v_m}^2 dv_g + \int_M u_m^{N-2} v^2 dv_g - \int_M 2u_m^{N-2} v_m v dv_g$$

$$= 1 + \int_M u_m^{N-2} v^2 dv_g - \int_M 2u_m^{N-2} v_m v dv_g.$$

La suite u_m^{N-2} est bornée dans $L^{\frac{N}{N-2}}(M)$ et $u_m^{N-2} \to u^{N-2}$ presque partout, alors $u_m^{N-2} \to u^{N-2}$ faiblement dans $L^{\frac{N}{N-2}}(M)$ et

$$\forall \Phi \in L^{\frac{N}{2}}(M), \quad \int_M \Phi u_m^{N-2} dv_g \to \int_M \Phi u^{N-2} dv_g,$$

en particulier pour $\Phi = v^2$, alors $\int_M v^2 u_m^{N-2} dv_g \to \int_M v^2 u^{N-2} dv_g$.

$u_m^{N-2} v_m$ est bornée dans $L^{\frac{N}{N-1}}(M)$, car

$$\int_M u_m^{N-2\frac{N}{N-1}} v_m^{\frac{N}{N-1}} dv_g \leq (\int_M {u_m}^N dv_g)^{\frac{N-2}{N-1}} (\int_M v_m^N dv_g)^{\frac{1}{N-1}} \ ,$$

et $u_m^{N-2} v_m \to u^{N-2} v$ presque partout, alors $u_m^{N-2}\ v_m \to u^{N-2} v$ faiblement dans $L^{\frac{N}{N-1}}(M)$,

$$\forall \Phi \in L^N, \ \int_M u_m^{N-2} v_m \Phi dv_g \to \int_M u^{N-2} v \Phi dv_g.$$

Lorsque $\Phi = v \in L^N$, $\int_M u_m^{N-2} v_m v dv_g \to \int_M u^{N-2} v^2 dv_g$, donc

$$\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1).$$

■

Théorème 2.2 *Si $\mu_1 < K_2^{-2}$, alors μ_1 est atteint par métrique généralisée.*

Preuve: Soit $g_m = u_m^{\frac{N-2}{2}} g$ une suite de métriques conformes $(u_m \in C^\infty(M),\, u_m > 0)$ minimisante de μ_1, une suite de métriques telles que:

$$\mu_1 = \lim_m \lambda_{1,m} (Vol(M, g_m))^{\frac{4}{n}}$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $Vol(M, g_m) = \int\limits_M u_m^N dv_g = 1$. En effet si (u_m) minimise $I(u,v)$, la suite $(\lambda u_m)_m$ est minimisante aussi, car

$$I(\lambda u, v) = \frac{\int_M v L_g(v) dv_g}{(\int_M |\lambda u|^{N-2} v^2 dv_g)} (\int\limits_M (\lambda u)^N dv_g)^{\frac{4}{n}} = I(u,v) \ , \ (\frac{\lambda^{\frac{4N}{n}}}{\lambda^{N-2}} = 1) \text{ et} \frac{4N}{n} = \frac{8n}{n(n-4)} = \frac{2n}{n-4} - 2.$$

La suite (u_m) est bornée dans $L^N(M)$ et donc il existe $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ telle que $u_m \to u$ faiblement dans $L^N(M)$.

On va montrer qu'une métrique généralisée $u^{\frac{N-2}{2}} g$ avec $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et $u \neq 0$ minimise μ_1. La proposition (3.6) implique l'existence d'une suite $v_m \in C^\infty(M)$, $v_m > 0$ vérifiant :

$$L_g(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \quad \text{et} \quad \int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1.$$

D'où pour un rang m assez grand on a,

$$\|v_m\|^2 = \int_M v_m L_g(v_m) dv_g = \lambda_{1,m} \leq \mu_1 + 1,$$

donc notre suite v_m est bornée dans $H_2^2(M)$, il existe $v \in H_2^2(M)$, $v \geq 0$ telle que $v_m \to v$ faiblement dans $H_2^2(M)$ et avec la convergence faible de u_m, on obtient au sens des distributions que v satisfait l'équation suivante :

$$L_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_M |u_m|^{N-2}(v_m-v)^2 dv_g &\leq \left[\int_M |u_m|^{\frac{N}{N-2}N-2} dv_g\right]^{\frac{N-2}{N}} \left[\int_M (v_m-v)^{\frac{N}{2}2} dv_g\right]^{\frac{2}{N}} \\
&\leq \|v_m-v\|_N^2,
\end{aligned}$$

du lemme (3.1), il suit que

$$\|v_m-v\|_N^2 \leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\int_M |\Delta(v_m-v)|^2 dv_g + b(\varepsilon)\int_M (v_m-v)^2 dv_g\right],$$

et de la convergence forte de v_m dans $L^{2\cdot}(M)$, on a aussi

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\int_M |\Delta(v_m-v)|^2 dv_g + o(1)\right]$$

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\int_M |\Delta(v_m)|^2 + |\Delta v|^2 - 2\Delta v_m \Delta v dv_g + o(1)$$

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\int_M |\Delta(v_m)|^2 - |\Delta v|^2 dv_g + o(1)$$

car $\int_M \Delta v_m \Delta v dv_g \to \int_M |\Delta v|^2 dv_g$, puisque $\Delta v \in L^2(M)$, $\Delta v_m \in L^2(M)$ et comme Δv_m converge faiblement dans $L^2(M)$ et de la convergence forte dans $H_1^2(M)$,

$$\int_M (v_m^2 - v^2) dv_g = o(1) \quad \text{et} \int_M (|\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2) dv_g = o(1),$$

on en déduit que : $\displaystyle\int_M u_m^{N-2}(v_m-v)^2 dv_g \leq$

$$(K_2^2+\varepsilon)\left[\int_M |\Delta v_m|^2 - |\Delta v|^2 + \underbrace{a_n S_g(|\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2)}_{o(1)} + \underbrace{b_n S_g^2(v_m^2 - v^2) dv_g}_{o(1)}\right] + o(1)$$

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\int\limits_M (|\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2) - (|\Delta v|^2 + a_n S_g |\nabla v|^2 + b_n S_g^2 v^2) dv_g\right] + o(1)$$

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\int_M v_m L_g(v_m) - v L_g(v) dv_g\right] + o(1)$$

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\lambda_{1,m} - \int_M v L_g(v) dv_g\right] + o(1)$$

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\lambda_{1,m} - \mu_1 \int_M u^{N-2} v^2 dv_g)\right] + o(1)$$

et comme $\lambda_{1,m} \leq \mu_1$, il suit

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1),$$

indépendamment du lemme (3.6), $\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1)$ d'où

$$1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1)$$

i.e

$$\begin{aligned} &\leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1 - (K_2^2+\varepsilon)\mu_1 \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1) \\ 1 - (K_2^2+\varepsilon)\mu_1 &\leq \int_M u^{N-2} v^2 dv_g - (K_2^2+\varepsilon)\mu_1 \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1) \end{aligned}$$

$$1 - K_2^2\mu_1 \leq (1 - K_2^2\mu_1)\int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1) + \varepsilon\mu_1(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g).$$

ε est choisi suffisamment petit et par hypothèse $1 - K_2^2\mu_1 > 0$, nécessairement

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \geq 1,$$

puis le lemme de Fatou entraine que

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq \underline{\lim} \int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$$

et finalement on retrouve

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1,$$

d'où v et u sont non identiquement nulles, de plus $\mu_1 = \|v\|^2 = \int_M v L_g(v) dv_g > 0$ et μ_1 est atteint par la métrique généralisée $u^{\frac{N-2}{2}} g$.

Lemme 2.7 *La suite* v_m *converge fortement vers* v *dans* $H_2^2(M)$ *et dans* $L^N(M)$.

■

Preuve: On a

$$\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g =$$

$$\int_M |\Delta(v_m)|^2 + |\Delta v|^2 - 2\Delta v_m \Delta v dv_g$$

$$= \int_M |\Delta(v_m)|^2 - |\Delta v|^2 dv_g + o(1)$$

$$= \int_M v_m L_g(v_m) - v L_g(v) dv_g + o(1)$$

$$= \mu_1 (1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1)$$

$$= o(1).$$

Il résulte que $v_m \to v$ fortement dans $H_2^2(M) \subset L^N(M)$. ■

2.5 L'égalité entre le premier invariant de Paneitz -Branson et l'invariant usuel

proposition 2.8 *Soit $v \in H_2^2(M)$ la solution positive de l'équation $L_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ qui vérifie $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, alors nécessairement $u = b.v$ où $0 < b \leq 1$.*

Preuve: Soit la fonction $h = av \in L_+^N(M)$ avec $a > 0$ choisie telle que $\int_M h^N dv_g = 1$, par définition

$$\mu_1 \leq \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M h^{N-2}v^2 dv_g}$$
$$= \frac{\mu_1 \int_M u^{N-2}v^2 dv_g}{\int_M h^{N-2}v^2 dv_g} = \frac{a^2\mu_1 \int_M u^{N-2}v^2 dv_g}{a^2 \int_M h^{N-2}v^2 dv_g}$$
$$= \frac{\mu_1 \int_M u^{N-2}(av)^2 dv_g}{\int_M (av)^{N-2}(av)^2 dv_g} = \frac{\mu_1 \int_M u^{N-2}(av)^2 dv_g}{\int_M h^N dv_g}$$
$$= \mu_1 \int_M (u)^{N-2}(av)^2 dv_g.$$

Après application de l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\leq \mu_1 (\int_M (u)^{N-2\frac{N}{N-2}})^{\frac{N-2}{N}} (\int_M (av)^{2\frac{N}{2}} dv_g)^{\frac{2}{N}} \leq \mu_1,$$

et comme il y égalité dans l'inégalité d'Hölder, cela entraine qu'il va exister une constante c strictement positive telle que : $u = c(av)$, posons $b = ca$ cette nouvelle constante, en d'autres termes $u = b.v$. D'une part, de l'égalité $1 = \int_M u^{N-2}v^2 dv_g = b^{N-2} \int_M v^N dv_g$, on obtient $\frac{1}{b^{N-2}} = \int_M v^N dv_g$ et d'autre part de l'inégalité $\int_M u^N dv_g \leq \underline{\lim} \int_M u_m^N dv_g = 1$, on en déduit que $b^N \int_M v^N dv_g \leq 1$, finalement on a :

$$\frac{1}{b^{N-2}} = \int_M v^N dv_g \leq \frac{1}{b^N},$$

d'où $0 < b \leq 1$. ∎

proposition 2.9 *On a toujours* $\mu_1 = \mu$.

Preuve: On sait que si $\mu_1 < K_2^{-2}$, on a toujours une solution positive $v \in H_2^2(M)$ de l'équation $L_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ vérifiant $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, de la définition de μ et en particulier pour v, on a :

$$\mu \leq \frac{\int\limits_M v P_g v dv_g}{[\int\limits_M v^N dv_g]^{\frac{2}{N}}} = \frac{\mu_1}{[\int\limits_M v^N dv_g]^{\frac{2}{N}}} \leq \mu_1.$$

En effet, on a

$$1 = \int_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq (\int_M (u)^{N-2\frac{N}{N-2}})^{\frac{N-2}{N}} (\int_M (v)^{2\frac{N}{2}} dv_g)^{\frac{2}{N}} \leq (\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}},$$

d'où

$$1 \leq (\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} \qquad \text{i.e} \qquad \frac{1}{[\int\limits_M v^N dv_g]^{\frac{2}{N}}} \leq 1$$

i.e

$$\mu \leq \mu_1,$$

et avec le lemme (3.5), on retrouve $\mu_1 = \mu$.

Si $\mu_1 \geq K_2^{-2}$, on a $K_2^{-2} \leq \mu_1 \leq \mu \leq K_2^{-2}$ d'où

$$\mu = \mu_1.$$

Remarque 2.3 *En revenant un peu en arrière, avec*

$$\mu \leq \frac{\int\limits_M vP_g v dv_g}{\left[\int\limits_M v^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}}} = \frac{\mu_1}{\left[\int\limits_M v^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}}} \leq \mu_1.$$

Nécessairement $\int\limits_M v^N dv_g = 1$, *c'est à dire :* $b^{N-2} = 1 \Leftrightarrow e^{(N-2)\ln b} = e^0$, *donc* $b = 1$ *et* $u = v$ *. On déduit que* v *est solution de* $L_g(v) = \mu_1 v^{N-1}$, *et le théorème (3.1) entraine que* $v > 0$ *et* $v \in C^\infty(M)$, *en conclut que* μ_1 *est atteint par une métrique conforme ce qui est normal puisque l'égalité* $\mu_1 = \mu$ *entraine légitiment* $v > 0$ *et* $v \in C^\infty(M)$ *car* μ *est atteint par une métrique conforme.*

■

2.6 Inégalité de Sobolev reliée à $\mu_2(M, g)$

proposition 2.10 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* $n \geq 5$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $A(\varepsilon)$ *tels que pour tout* $u \in L_+^N(M)$ *et tout pour* $v \in H_2^2(M)$, *on a:*

$$\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq \left[2^{\frac{-4}{n}} K_2^2 (1+\varepsilon) \int\limits_M |\Delta v|^2 dv_g + A(\varepsilon) \int\limits_M v^2 dv_g\right] \left[\int\limits_M u^N dv_g\right]^{\frac{4}{n}}$$

Preuve: Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)K_2^2 2^{\frac{-4}{n}}(1+\varepsilon)$ où $B(\varepsilon)$ est la constante décrite dans le lemme (3.1) et soit :

$$G(u,v) = \frac{\int_M |\Delta v|^2 \, dv_g + b(\varepsilon)\int_M v^2 dv_g}{\int_M u^{N-2}v^2 dv_g} \left[\int_M u^N dv_g\right]^{\frac{4}{n}},$$

où $u \in L_+^N(M)$, $v \in H_2^{2\cdot}(M)$, $v \neq 0$ et vérifiant $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g \neq 0$. On a $G(u,v)$ est continue sur $L_+^N(M) \times H_2^{2\cdot}(M)$, on pose $I(u,V) = \sup_{v \in V - \{0\}} G(u,v)$, il dépend continument de u et $V \in Gr_2^u(H_2^2(M)$. On va montrer que

$$I(u,V) \geq 2^{\frac{4}{n}} K_2^{-2}(1+\varepsilon)^{-1}.$$

Puisque $L_+^N(M)$ n'est que le complété $C_+^\infty(M)$, il suffit de montrer l'inégalité pour tout $u \in C_+^\infty(M)$ et pour tout $V \in Gr_2^u(C_+^\infty(M))$. Sans perdre de généralité, on suppose $\int_M u^N dv_g = 1$, en effet l'opérateur

$$Q(v) = u^{\frac{2-N}{2}} \Delta^2 (u^{\frac{2-N}{2}} v) + B(\varepsilon) u^{2-N} v$$

est auto-adjoint avec un spectre discret $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$où les fonctions propres corespondantes $\varphi_1, \varphi_2, ...$sont telles que les fonctions $v_i = u^{\frac{2-N}{2}} \varphi_i$ vérifient:

$$\int_M |\Delta v_i|^2 \, dv_g + B(\varepsilon)\int_M v_i^2 dv_g = \lambda_i \int_M u^{N-2} v_i^2 dv_g$$

et

$$\int_M u^{N-2} v_i v_j dv_g = 0.$$

Soit $\widetilde{P}$ l'opérateur définit sur $C^\infty(M)$ par $\widetilde{P}(v) = \Delta^2(v) + B(\varepsilon)v$ et soient Ω_1, Ω_2 deux ensembles ouverts non vides disjoints de M et soient v_1, v_2 deux solutions non triviales de $\widetilde{P}(v) = \lambda_2 u^{N-2}v$ de support inclus respectivement dans l'adhérence de Ω_1, Ω_2. Quitte à multiplier v_1, v_2 par des constantes, on peut supposer que $\int\limits_M u^{N-2}v_i^2 dv_g = 1$, on a :

$$2 = \int\limits_M u^{N-2}v_1^2 dv_g + \int\limits_M u^{N-2}v_2^2 dv_g.$$

Appliquons l'inégalité d'Hölder et le lemme (3.1), on obtient

$$\leq \left[\int\limits_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} \left[\int\limits_M v_1^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}} + \left[\int\limits_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} \left[\int\limits_M v_2^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}}$$

$$\leq \left[\int\limits_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} (K_2^2+\varepsilon) \underbrace{\left[\int\limits_M |\Delta v_1|^2 dv_g + B(\varepsilon)\int\limits_M v_1^2 dv_g\right]}_{=\lambda_2} +$$

$$\left[\int\limits_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} (K_2^2+\varepsilon) \underbrace{\left[\int\limits_M |\Delta v_2|^2 dv_g + B(\varepsilon)\int\limits_M v_2^2 dv_g\right]}_{=\lambda_2}.$$

On retrouve,

$$\leq \left[\int\limits_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} (K_2^2+\varepsilon)\lambda_2 + \left[\int\limits_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} (K_2^2+\varepsilon)\lambda_2,$$

i.e

$$2 \leq \lambda_2(K_2^2+\varepsilon)\left(\left[\int\limits_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} + \left[\int\limits_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} \right).$$

On utilisant la convexité de la fonction x^p, on obtient

$$\left[\int_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} + \left[\int_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} \leq 2^{\frac{2}{N}}(\int_{\Omega_1} u^N dv_g + \int_{\Omega_2} u^N dv_g)^{\frac{N-2}{N}}$$

et comme $\int_{\Omega_1} u^N dv_g + \int_{\Omega_2} u^N dv_g = \int_M u^N dv_g = 1$, d'où,

$$2 \leq \lambda_2(K_2^2 + \varepsilon)2^{\frac{2}{N}} \Leftrightarrow 2 \leq \lambda_2 K_2^2(1 + \frac{\varepsilon}{K_2^2})2^{\frac{2}{N}}$$

encore,

$$2 \leq \lambda_2 K_2^2(1+\varepsilon)2^{\frac{2}{N}} \Leftrightarrow 2^{1-\frac{2}{N}} K_2^{-2}(1+\varepsilon)^{-1} \leq \lambda_2$$

.

et finalement on a,

$$2^{\frac{4}{n}} K_2^{-2}(1+\varepsilon)^{-1} \leq \lambda_2.$$

On sait que d'après la définition de λ_2,

$$\lambda_2 = \inf_{V \in Gr_2^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_M v\widetilde{P}_g v dv_g}{\int_M u^{N-2} v^2 dv_g}$$

On a, l' inf de la fonctionnelle est atteint sur

$$V_0 = span(v_1, v_2) \in H_2^2(M) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \sup_{v \in V_0 \setminus \{0\}} \frac{\int_M v\widetilde{P}_g v dv_g}{\int_M u^{N-2} v^2 dv_g}$$

autrement dit,

$$I(u,V_0)=\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}}G(u,\alpha v_1+\beta v_2)=\lambda_2\geq 2^{\frac{4}{n}}K_2^{-2}(1+\varepsilon)^{-1}.$$

Alors pour tout $u\in L_+^N(M)$, $v\in H_2^2(M)$:

$$2^{\frac{4}{n}}K_2^{-2}(1+\varepsilon)^{-1}\leq\frac{\int\limits_M|\Delta v|^2\,dv_g+b(\varepsilon)\int\limits_M v^2dv_g}{\int\limits_M u^{N-2}v^2dv_g}.$$

■

proposition 2.11 *Soit (S_n,h)la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$et soit P l'opérateur de Paneitz-Branson sur S_n. Pour tout $u\in L_+^N(S_n)$ et tout pour $v\in H_2^2(S_n)$ on a*

$$\int\limits_{S_n}u^{N-2}v^2dv_h\leq\left[2^{\frac{-4}{n}}K_2^2\int\limits_{S_n}vP_hvdv_h\right]\left[\int\limits_{S_n}u^Ndv_h\right]^{\frac{4}{n}}.$$

Preuve: Avec le même argument décrit dans la preuve précédente, on pose cette fois

$$Q(v)=u^{\frac{2-N}{2}}\Delta^2(u^{\frac{2-N}{2}}v)+a_nS_gu^{\frac{2-N}{2}}\Delta(u^{\frac{2-N}{2}}v)+b_nS_g^2u^{2-N}v$$

qui est auto-adjoint avec un spectre discret $\lambda_1<\lambda_2<$ ...où les fonctions propres correspondantes sont $\varphi_1,\varphi_2,...$

On a

$$Q(\varphi_i)=u^{\frac{2-N}{2}}\Delta^2(u^{\frac{2-N}{2}}\varphi_i)+a_nS_gu^{\frac{2-N}{2}}\Delta(u^{\frac{2-N}{2}}\varphi_i)+b_nS_g^2u^{2-N}\varphi_i=\lambda_i\varphi_i$$

avec $v_i=u^{\frac{2-N}{2}}\varphi_i$, on obtient

$$u^{\frac{2-N}{2}}\Delta^2(v_i)+a_nS_gu^{\frac{2-N}{2}}\Delta(v_i)+b_nS_g^2u^{\frac{2-N}{2}}v_i=\lambda_iu^{\frac{N-2}{2}}v_i\ ,$$

et en multipliant par $u^{\frac{N-2}{2}}$, on trouve

$$P_h v_i = u^{N-2}\lambda_i v_i.$$

Soient Ω_1, Ω_2 deux ensembles ouverts non vides disjoints de M et soient v_1, v_2 deux solutions non triviales de $P_h(v) = \lambda_2 u^{N-2} v$ de support inclus respectivement dans l'adhérence de Ω_1 , Ω_2. Quitte à multiplier v_1, v_2 par des constantes, on peut assumer que $\int\limits_M u^{N-2} v_i^2 dv_g =$ 1,

$$\int\limits_{S_n} v_i P v_i dv_h = \int\limits_{S_n} |\Delta v_i|^2 + a_n S_g |\nabla v_i|^2 + b_n S_g^2 v_i^2 dv_h = \lambda_i \int\limits_{S_n} u^{N-2} v_i^2 dv_h$$

et

$$\int\limits_{S_n} u^{N-2} v_i v_j dv_h = 0,$$

multipliant les fonctions v_1, v_2 par des constantes, on peut assumer que $\int\limits_{S_n} u^{N-2} v_i^2 dv_h = 1$.

On a

$$2 = \int\limits_{S_n} u^{N-2} v_1^2 dv_h + \int\limits_{S_n} u^{N-2} v_2^2 dv_h,$$

appliquons l'inégalité d'Holder, puis le lemme (18), on a $K_2^{-2} = \inf\limits_{V \in H_2^2(S_n))} \frac{\int\limits_{S_n} v P_h v dv_h}{(\int\limits_{S_n} v^N dv_h)^{\frac{2}{N}}}$,

d'où

$$2 \leq \left[\int\limits_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} \left[\int\limits_{S_n} v_1^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}} + \left[\int\limits_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} \left[\int\limits_{S_n} v_2^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}}$$

$$\leq \left[\int\limits_{\Omega_1} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} (K_2^2) \left[\int\limits_{S_n} v_1 P_h v_1 dv_h\right] + \left[\int\limits_{\Omega_2} u^N dv_g\right]^{1-\frac{2}{N}} (K_2^2) \left[\int\limits_{S_n} v_2 P_h v_2 dv_h\right],$$

de même, on retrouve :

$$2^{\frac{4}{n}} K_2^{-2} \leq \lambda_2.$$

■

2.7 Existence du second invariant de Paneitz -Branson $\mu_2(M,g)$.

proposition 2.12 *Soit* $g_m = u_m^{N-2} g$ *une suite minimisante de* μ_2*, alors ils existent* $v \geq 0$, $w \in H_2^2$ *solutions au sens faible de*

$$L_g(v) = \widetilde{\mu_1} u^{N-2} v \qquad et \qquad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2} w$$

où $\widetilde{\mu_1} = \lim_m \lambda_{1,m} = \lambda_1(g_m)$ *et* u *la limite faible de* u_m *dans* L^N.

Preuve: Soit $g_m = u_m^{\frac{N-2}{2}} g$ une suite de métriques conformes $(u_m \in C^\infty(M)$, $u_m > 0)$ minimisante de μ_2, une suite de métriques telles que

$$\mu_2 = \lim_m \lambda_{2,m} (Vol(M, g_m))^{4/n}.$$

Sans perdre de généralité, on peut assumer que $\int_M u_m^N dv_g = 1$. En particulier, la suite u_m est bornée dans L^N, donc il existe $u \in L^N$, $u \geq 0$ telle que $u_m \to u$ faiblement dans $L^N(M)$. Des propositions (3.1),(3.2),(3.3),(3.4),(3.5) et (3.6), on obtient l'existence de v_m, $w_m \in C^\infty(M)$, $v_m > 0$ de manière que les équations:

$$L_g(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \qquad \text{et} \qquad L_g(w_m) = \lambda_{2,m} u_m^{N-2} w_m$$

sont satisfaites et qui vérifient:

$$\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1 \quad , \quad \int_M u_m^{N-2} w_m^2 dv_g = 1 \quad \text{et} \quad \int_M u_m^{N-2} v_m w_m dv_g = 0,$$

d'où pour un rang m assez grand, on a

$$\|w_m\|^2 = \int_M w_m L_g(w_m) dv_g = \lambda_{2,m} \leq \mu_2 + 1,$$

et comme $\lambda_{1,m} \leq \lambda_{2,m}$,

$$\|v_m\|^2 = \int_M v_m L_g(v_m) dv_g = \lambda_{1,m} \leq \lambda_{2,m} \leq \mu_2 + 1.$$

Les suites v_m, w_m sont bornées dans $H_2^2(M)$, ils existent $v, w \in H_2^2(M)$, $v \geq 0$ telles que $v_m \to v$, $w_m \to w$ faiblement dans $H_2^2(M)$, avec la convergence faible de u_m, les fonctions v, w sont solutions au sens des distributions des équations :

$$L_g(v) = \widetilde{\mu_1} u^{N-2} v \qquad \text{et} \qquad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2} w$$

où $\lambda_{1,m} \to \widetilde{\mu_1}$. ■

Théorème 2.3 *Si* $\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$, *alors* v, w *et* u *sont non identiquement nulles.*

Preuve: Grâce à la proposition(3.10), on trouve

$$\int_M u_m^{N-2} (v_m - v)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{4}{n}} (K_2^2 + \varepsilon) \left[\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g + a(\varepsilon) \int_M (v_m - v)^2 dv_g \right].$$

L'injection de $H_2^2(M)$ dans $H_1^2(M)$ est compacte entraine que v_m converge forte dans L^2 et dans $H_1^2(M)$.

De la convergence de forte de la suite v_m dans $L^2(M)$, on a $\int_M (v_m^2 - v^2) dv_g = o(1)$

donc

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m-v)^2dv_g \le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\left[\int\limits_M |\Delta(v_m-v)|^2\,dv_g\right]+o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\int_M |\Delta(v_m)|^2+|\Delta v|^2-2\Delta v_m\Delta v dv_g+o(1)$$

et comme $\int_M \Delta v_m\Delta v dv_g \to \int_M |\Delta v|^2\,dv_g$, car $\Delta v\in L^2(M)$, $\Delta v_m\in L^2(M)$ et Δv_m converge faiblement dans $L^2(M)$, on trouve

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m-v)^2dv_g \le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\left[\int_M |\Delta(v_m)|^2-|\Delta v|^2\,dv_g\right]+o(1),$$

aussi v_m converge fortement dans $H_1^2(M)$ entraine $\int\limits_M (|\nabla v_m|^2-|\nabla v|^2)dv_g=o(1)$,

nous obtenons :

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m-v)^2dv_g \le$$

$$2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)[\int\limits_M |\Delta v_m|^2-|\Delta v|^2+\underbrace{a_nS_g(|\nabla v_m|^2-|\nabla v|^2)}_{o(1)}+\underbrace{b_nS_g^2(v_m^2-v^2)dv_g}_{o(1)}]+o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\left[\int\limits_M (|\Delta v_m|^2+a_nS_g|\nabla v_m|^2+b_nS_g^2v_m^2)-|\Delta v|^2+a_nS_g|\nabla v|^2+b_nS_g^2v^2)dv_g\right]+o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\left[\int_M v_mL_g(v_m)-vL_g(v)dv_g\right]+o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\left[\lambda_{1,m}-\int_M vL_g(v)dv_g\right]+o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\left[\lambda_{1,m}-\widetilde{\mu_1}\int_M u^{N-2}v^2dv_g)\right]+o(1)$$

et comme $\lambda_{1,m} \leq \widetilde{\mu_1}$, il suit

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\widetilde{\mu_1}(1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1),$$

encore $\widetilde{\mu_1} \leq \mu_2$ donne :

$$\int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2(1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1),$$

et avec le lemme (3.6) $\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g &\leq 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2(1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1) \\
&\leq 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2 - 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2 \int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1) \\
1 - 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2 &\leq \int_M u^{N-2}v^2 dv_g - 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2 \int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1)
\end{aligned}$$

$$1 - 2^{-\frac{4}{n}}K_2^2\mu_2 \leq (1 - 2^{-\frac{4}{n}}K_2^2\mu_2)\int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1) + 2^{-\frac{4}{n}}\varepsilon\mu_2(1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g).$$

ε est choisi suffisamment petit et par hypothèse $1 - 2^{-\frac{4}{n}}K_2^2\mu_2 > 0$, nécessairement $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g \geq 1$, avec le lemme de Fatou, on a $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g \leq \underline{\lim} \int_M u_m^{N-2}v_m^2 dv_g = 1$, et finalement, on a le résultat:

$$\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1.$$

D'où v et u sont non identiquements nulles, de plus

$$\mu_1 = \|v\|^2 = \int_M vL_g(v)dv_g > 0.$$

La même méthode avec la suite w_m donne :

$$\int_M u_m^{N-2}(w_m - w)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon) \int_M w_m L_g(w_m) - w L_g(w) dv_g + o(1)$$

$$\leq 2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2 + \varepsilon)\mu_2(1 - \int_M u^{N-2} w^2 dv_g) + o(1),$$

et on retrouve aussi $\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$, d'où w est non identiquement nulle et $\mu_2 = \|w\|^2 = \int_M w L_g(w) dv_g > 0$. ■

proposition 2.13 *Les suites v_m, w_m convergent fortements dans $H_2^2(M)$ donc dans $L^N(M)$.*

Preuve: La suite v_m vérifie :

$$\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g = \int_M |\Delta(v_m)|^2 + |\Delta v|^2 - 2\Delta v_m \Delta v dv_g$$

$$= \int_M |\Delta(v_m)|^2 - |\Delta v|^2 dv_g + o(1)$$

$$= \int_M v_m L_g(v_m) - v L_g(v) dv_g + o(1)$$

$$= \widetilde{\mu_1}(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1)$$

$$\leq \mu_2(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1)$$

et comme $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, il suit que $\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g \leq o(1)$, on déduit que $v_m \to v$ fortement dans $H_2^2(M)$, donc dans $L^N(M)$. Même résultat avec la suite w_m ■

proposition 2.14 *Les solutions u, v vérifient la condition d'orthogonalité,*

$$\int_M u^{N-2} v w dv_g = 0$$

et la métrique généralisée $u^{\frac{N-2}{2}} g$ minimise μ_2.

Preuve: On a

$$\int_M u_m^{N-2}v_m w_m - u^{N-2}vwdv_g = \int_M u_m^{N-2}v_m w_m - u_m^{N-2}vw_m + u_m^{N-2}vw_m - u^{N-2}vwdv_g$$

$$= \int_M u_m^{N-2}(v_m - v)w_m dv_g + \int_M u_m^{N-2}vw_m - u^{N-2}vwdv_g$$

$$= \int_M [u_m^{\frac{N-2}{2}} w_m][u_m^{\frac{N-2}{2}}(v_m - v)]dv_g + \int_M u_m^{N-2}vw_m - u^{N-2}vwdv_g$$

$$\leq \left[\int_M u_m^{N-2}w_m^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g)\right]^{\frac{1}{2}} + \int_M u_m^{N-2}vw_m - u^{N-2}vwdv_g$$

$$\leq \left[\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \int_M u_m^{N-2}vw_m - u^{N-2}vwdv_g$$

$$\leq \left\{\left[\int_M u_m^{N-2\frac{N}{N-2}}\right]^{\frac{N-2}{N}} \left[\int_M (v_m - v)^{2\frac{N}{2}}\right]^{\frac{2}{N}}\right\}^{\frac{1}{2}} + \int_M u_m^{N-2}vw_m - u^{N-2}vwdv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M u_m^{N-2}v(w_m - w) + (u_m^{N-2} - u^{N-2})vwdv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M (u_m^{\frac{N-2}{2}} v)(u_m^{\frac{N-2}{2}}(w_m - w)) + (u_m^{N-2} - u^{N-2})vwdv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + (\int_M (u_m^{N-2}v^2)dv_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M (u_m^{N-2}(w_m - w)^2 dv_g))^{\frac{1}{2}} + \int_M (u_m^{N-2} - u^{N-2})vwdv_g$$

$$\begin{aligned} &\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + (\int_M (u_m^{N-2}v^2)dv_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M (w_m - w)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M (u_m^{N-2} - u^{N-2})vwdv_g \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

En effet,

$$\int_M u_m^{N-2}v^2 dv_g \leq (\int_M u_m^N dv_g)^{\frac{N-2}{N}} (\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} < +\infty,$$

et comme $u_m^{N-2} \to u^{N-2}$ faiblement dans $L^{\frac{N}{N-2}}(M)$ et $vw \in L^{\frac{N}{2}}(M)$ ($L^{\frac{N}{2}}(M)$ dual de$L^{\frac{N}{N-2}}(M)$), il découle $\int_M (u_m^{N-2} - u^{N-2})vwdv_g \to 0$ et finalement la convegence forte de v_m, w_m dans $L^N(M)$ nous conduit à $\int_M u^{N-2}vwdv_g \geq 0$, puis avec le lemme de Fatou, on a $\int_M u^{N-2}vwdv_g \leq \underline{\lim} \int_M u_m^{N-2}v_m w_m dv_g = 0$, d'où l'orthogonalité $\int_M u^{N-2}vwdv_g = 0$.

Conclusion 2 *On vient de trouver un $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non identiquement nul tels qu'ils existent $v, w \in H_2^2(M)$, $v \geq 0$ des solutions non identiquement nulles au sens faible de :*

$$L_g(v) = \widetilde{\mu_1}u^{N-2}v \quad , \quad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2}w$$

et vérifiant $\int_M u^{N-2}vwdv_g = 0$ *et* $\int_M u^{N-2}v^2dv_g = \int_M u^{N-2}w^2dv_g = 1$. *En d'autres termes, la métrique généralisée $u^{\frac{N-2}{2}}g$ minimise μ_2.*

■

2.8 Estimation de μ_2

Théorème 2.4 *Lorsque (M, g) est non conformément plate et $n \geq 12$, alors*

$$\mu_2 < ((\mu^{\frac{n}{4}} + (K_2^{-2})^{\frac{n}{4}})^{\frac{4}{n}}.$$

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.8 [*AH06*] *Pour tout $x > 0$, $y > 0$ et $p > 2$, il existe une constante $C > 0$ tels que:*

$$(x+y)^p \leq x^p + y^P + C(x^{p-1}y + xy^{p-1}).$$

Preuve: Du théorème :

Soient x_0 un point de M, δ un réel strictement positif suffisament petit, $B_{x_0}(\delta)$ la boule de centre x_0 et de rayon δ et η une C^∞ fonction telle que :

$$\eta(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in B_{x_0}(\delta) \\ 0 & \text{si} & x \in B_{x_0}(2\delta) \end{array}\right| .$$

Posons

$$\phi_\varepsilon = \eta \left(r^2 + \varepsilon^2\right)^{-\frac{n-4}{2}},$$

la fonction $\phi_\varepsilon \in H_2^2$ et $r = d(x, x_0)$. Pour $n \geq 9$, (voir la preuve de la proposition(3.7)), on sait qu'il existe une constante strictement positive c tel que :

$$Y(\phi_\varepsilon) = K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4).$$

On considère la fonction $v_\varepsilon = c_\varepsilon \phi_\varepsilon$ avec $c_\varepsilon > 0$ une constante telle que $\int_M v_\varepsilon^N dv_g = 1$, on a aussi :

$$\int_M \phi_\varepsilon^N dv_g = \frac{\omega_n}{2^n \varepsilon^n}\left[1 + 0(\varepsilon^4)\right] \approx c\varepsilon^{-n} \quad \text{où} \qquad c > 0$$

en d'autres termes, on peut toujours trouver une constante $c_1 > 0$ tel que $c_\varepsilon = c_1 \varepsilon^{\frac{n-4}{2}}$.
Soient v la solution de l'équation $L_g(v) = \mu_1 v^{N-1}$ qui vérifie $\|v\| = 1$ et

$$u_\varepsilon = Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v.$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a

$$\int_M (\alpha v_\epsilon + \beta v) P_g (\alpha v_\epsilon + \beta v) dv_g$$

$$= \alpha^2 \int_M v_\epsilon P_g v_\epsilon dv_g + \beta^2 \int_M v P_g v dv_g + 2\alpha\beta \int_M v_\epsilon P_g v dv_g.$$

Puisque

$$\int_M v P_g v dv_g = \mu_1 \qquad \text{et} \qquad \int_M v_\epsilon P_g v_\epsilon = Y(v_\epsilon),$$

on a :

$$\int_M (\alpha v_\epsilon + \beta v) P_g (\alpha v_\epsilon + \beta v) dv_g = \alpha^2 Y(v_\epsilon) + \beta^2 \mu_1 + 2\alpha\beta\mu_1 \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g,$$

et

$$\int_M u_\varepsilon^{N-2}(\alpha v_\varepsilon+\beta v)^2 dv_g = \int_M u_\varepsilon^{N-2}(\alpha v_\varepsilon)^2 dv_g + \int_M u_\varepsilon^{N-2}(\beta v)^2 dv_g + 2\alpha\beta\int_M u_\varepsilon^{N-2} v_\varepsilon v dv_g$$

$$\geq \alpha^2 Y(v_\epsilon)\int_M {v_\epsilon}^N dv_g + \beta^2\mu_1\int_M v^N dv_g + 2\alpha\beta\int_M u_\varepsilon^{N-2} v_\varepsilon v dv_g$$

$$= \alpha^2 Y(v_\epsilon) + \beta^2\mu_1 + 2\alpha\beta\int_M u_\varepsilon^{N-2} v_\varepsilon v dv_g.$$

D'autre par, on a aussi

$$\int_M u_\varepsilon^{N-2} v_\varepsilon v dv_g \geq \mu_1 \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g,$$

si $\alpha\beta \geq 0$, on trouve

$$\frac{\int_M (\alpha v_\epsilon+\beta v)P_g(\alpha v_\epsilon+\beta v)dv_g}{\int_M u_\varepsilon^{N-2}(\alpha v_\varepsilon+\beta v)^2 dv_g} \leq 1,$$

et si $\alpha\beta \leq 0$, alors lorsque $N-2\in(0,1]$

$$u_\varepsilon^{N-2} = (Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v)^{N-2}$$

entraine que

$$u_\varepsilon^{N-2} \leq Y(v_\epsilon)v_\epsilon^{N-2} + \mu_1 v^{N-2},$$

et pour cela, il est nécessaire de prendre $n \geq 12$ et par conséquent, on a $Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v \geq Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon$ entraine $u_\varepsilon^{N-2} = (Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v)^{N-2} \geq Y(v_\epsilon)v_\epsilon^{N-2}$, donc $\alpha^2\int_M u_\varepsilon^{N-2}{v_\varepsilon}^2 dv_g \geq \alpha^2\int_M Y(v_\epsilon)v_\epsilon^{N-2}{v_\varepsilon}^2 dv_g = \alpha^2\int_M Y(v_\epsilon)v_\epsilon^N dv_g = \alpha^2 Y(v_\epsilon)$ de même, $Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v \geq \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v$ entraine $u_\varepsilon^{N-2} = (Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1^{\frac{1}{N-2}} v)^{N-2} \geq \mu_1 v^{N-2} \beta^2\int_M u_\varepsilon^{N-2} v^2 dv_g \geq \beta^2\int_M \mu_1 v^{N-2} v^2 dv_g = \beta^2\int_M \mu_1 v^N dv_g = \mu_1\beta^2$ et $2\alpha\beta\int_M u_\varepsilon^{N-2} v_\varepsilon v dv_g \geq 2\alpha\beta\int_M (Y(v_\epsilon)v_\epsilon^{N-2} + \mu_1 v^{N-2}) v_\varepsilon v dv_g = 2\alpha\beta Y(v_\epsilon)\int_M v_\epsilon^{N-1} v dv_g + 2\alpha\beta\mu_1\int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g$.

On en déduit:

$$\int_M u_\varepsilon^{N-2}(\alpha v_\varepsilon+\beta v)^2 dv_g = \alpha^2\int_M u_\varepsilon^{N-2}{v_\varepsilon}^2 dv_g + \beta^2\int_M u_\varepsilon^{N-2} v^2 dv_g + 2\alpha\beta\int_M u_\varepsilon^{N-2} v_\varepsilon v dv_g$$

$$\geq \alpha^2 Y(v_\epsilon) + \beta^2\mu_1 + 2\alpha\beta Y(v_\epsilon)\int_M v_\epsilon^{N-1} v dv_g + 2\alpha\beta\mu_1 \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g$$

$$= \left[\underbrace{\alpha^2 Y(v_\epsilon) + \beta^2\mu_1 + 2\alpha\beta\mu_1 \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g}_{=\int_M (\alpha v_\epsilon + \beta v) P_g (\alpha v_\epsilon + \beta v) dv_g}\right] + \left[\underbrace{2\alpha\beta Y(v_\epsilon)\int_M v_\epsilon^{N-1} v dv_g}_{=0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})}\right]$$

alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a

$$\int_M u_\varepsilon^{N-2} (\alpha v_\varepsilon + \beta v)^2 dv_g \geq \int_M (\alpha v_\epsilon + \beta v) P_g (\alpha v_\epsilon + \beta v) dv_g + 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}),$$

$$\frac{\int_M (\alpha v_\epsilon + \beta v) P_g (\alpha v_\epsilon + \beta v) dv_g}{\int_M u_\varepsilon^{N-2} (\alpha v_\varepsilon + \beta v)^2 dv_g} \leq 1 + 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}),$$

et grâce au lemme (3.8), il existe une constante $c_0 > 0$ tel que :

$$\int_M u_\varepsilon^N dv_g \leq Y(v_\epsilon)^{\frac{n}{4}} \int_M v_\epsilon^N dv_g + \mu_1^{\frac{n}{4}} \int_M v^N dv_g$$

$$+ c_0 (\int_M v_\epsilon^{N-1} v dv_g + \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g)$$

i.e

$$\int_M u_\varepsilon^N dv_g \leq Y(v_\epsilon)^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}} + c_0 (\int_M v_\epsilon^{N-1} v dv_g + \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g)$$

et comme φ_ε se trouve dans L^N, les intégrales $\int\limits_M \varphi_\varepsilon dv_g$ et $\int\limits_M \varphi_\varepsilon^{N-1} dv_g$ sont finis et comme $v \in L^\infty$, on peut toujours trouver des constantes telles que :

$$\int\limits_M v^{N-1} v_\varepsilon dv_g \leq \|v\|_\infty^{N-1} \int\limits_M v_\varepsilon dv_g \leq c_0.C_\varepsilon \int\limits_M \varphi_\varepsilon dv_g \leq c_1 \varepsilon^{\frac{n-4}{2}}$$

et

$$\int\limits_M v_\varepsilon^{N-1} v dv_g \leq \|v\|_\infty \int\limits_M v_\varepsilon^{N-1} dv_g \leq c_4.C_\varepsilon^{N-1} \int\limits_M \varphi_\varepsilon^{N-1} dv_g \leq c_5.\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}}$$

il découle que : $\int\limits_M v^{N-1} v_\varepsilon dv_g = 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})$ et $\int\limits_M v_\varepsilon^{N-1} v dv_g = 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}})$. On trouve

$$\int_M u_\varepsilon^N dv_g \leq Y(v_\epsilon)^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}} + 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})$$

$$\int_M u_\varepsilon^N dv_g \leq (K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4))^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}} + 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})$$

$$\int_M u_\varepsilon^N dv_g \leq (K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4))^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}} + 0(\varepsilon^4) \qquad \text{car} \qquad \frac{n-4}{2} \geq 4,$$

comme $c > 0$ et lorsque ε tend vers 0 : $K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4) < K_2^{-2}$, on a

$$\int_M u_\varepsilon^N dv_g < (K_2^{-2})^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}}$$

$$(\int_M u_\varepsilon^N dv_g)^{\frac{4}{n}} < \left[(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}.$$

Donc pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\mu_2 \leq \frac{\int_M (\alpha v_\epsilon + \beta v) P_g(\alpha v_\epsilon + \beta v) dv_g}{\int_M u_\varepsilon^{N-2}(\alpha v_\varepsilon + \beta v)^2 dv_g} (\int_M u_\varepsilon^N dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

$$< \left[(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}.$$

D'où

$$\mu_2 < \left[(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}.$$

■

Lemme 2.9 *Soit* $u \in L_+^N$ *avec* $\int\limits_M u^N dv_g = 1$. *Supposons que* z *et* $w \in H_2^2$, z , $w \geq 0$ *vérifiant:*

$$\int_M w L_g(w) dv_g \leq \mu_2 \int_M u^{N-2} w^2 dv_g \tag{6}$$

et

$$\int_M zL_g(z)dv_g \le \mu_2 \int_M u^{N-2}z^2 dv_g \tag{7}$$

et que l'ensemble $(M - z^{-1}(0) \cap (M - w^{-1}(0))$ *est de mesure nul. Alors* u *est une combinaison linéaire de* z *et* w *et on a égalité dans* (6)*et*(7).

Preuve: Même méthode de [AH06] . ■

Théorème 2.5 *Supposons que* μ_2 *est atteint par la métrique généralisée* $g_0 = u^{N-2}g$, *alors la solution* w *de l'équation* $Pv = \mu_2 u^{N-2}v$ *change de signe.*

Preuve: Soient v, w comme dans la proposiotion (3.1) et (3.6), on a : $v \geq 0$, w sont solutions de : $Pv = \widetilde{\mu_1}u^{N-2}v$ et $Pw = \mu_2 u^{N-2}w$, tels que $\int_M u^{N-2}wvdv_g = 0$ et $\int_M u^{N-2}w^2dv_g = \int_M u^{N-2}v^2dv_g = 1$.

1) Sans perdre de généralité, on peut prendre $\int_M u^N dv_g = 1$, il suffit de mettre $u_0 = \alpha u$ où $\alpha = \frac{1}{\left[\int_M u^N dv_g\right]^{\frac{1}{N}}}$, $\int_M u_0^N dv_g = 1$, pour les valeurs propres, on pose

$$\lambda_1 = \frac{\widetilde{\mu_1}}{\alpha^{N-2}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{\alpha^{N-2}}.$$

Après le changement on a:

$$Pv = \lambda_1 u_0^{N-2}v \qquad \text{et} \qquad Pw = \lambda_2 u_0^{N-2}w$$

Multipliant la première équation par la constante β, on obtient $P(\beta v) = \lambda_1 u_0^{N-2}(\beta v)$, posons $v_0 = \beta v$ et choisissons β de manière que l'on ait : $\int_M u_0^{N-2}v_0^2 dv_g = 1$.

$\int_M u_0^{N-2}\beta^2v^2dv_g = \int_M \alpha^{N-2}u^{N-2}\beta^2v^2dv_g = \alpha^{N-2}\beta^2\int_M u^{N-2}v^2dv_g = \alpha^{N-2}\beta^2 = 1$

d'où $\beta = \sqrt{\frac{1}{\alpha^{N-2}}}$, et $\int_M u^{N-2}wvdv_g = \frac{1}{\alpha^{N-2}\beta^2}\int_M u_0^{N-2}w_0v_0dv_g = 0$, donc $\int_M u_0^{N-2}w_0v_0dv_g = 0$,

conclusion : on a pour la métrique $g_0 = u_0^{\frac{N-2}{2}}g$, $\int_M u_0^N dv_g = 1$ et $v_0 = \beta v \geq 0$, $w_0 = \beta w$ solutions de : $Pv_0 = \lambda_1 u_0^{N-2}v_0$ et $Pw_0 = \lambda_2 u_0^{N-2}w_0$, tels que $\int_M u_0^{N-2}w_0v_0dv_g = 0$

et $\int_M u_0^{N-2} v_0^2 dv_g = \int_M u_0^{N-2} w_0^2 dv_g = 1$.

2) Comme λ_2 est atteint par une métrique généralisée, il suit que $\lambda_1 < \lambda_2$.

3) Supposons que $w = w_0$ est de signe constant :

disant $w \geq 0$, comme $\int_M u^{N-2} wv dv_g = 0$, l'ensemble $(M - w^{-1}(0)) \cap (M - v^{-1}(0))$ est de mesure nul, la fonction v vérifie l'inégalité (7) du lemme (3.9), on obtient : $\int_M vL_g(v) dv_g \leq \lambda_2 \int_M u^{N-2} v^2 dv_g$. Par application du lemme (3.9) , on a :

$$\int_M vL_g(v) dv_g = \lambda_2 \int_M u^{N-2} v^2 dv_g,$$

et comme $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$ et $\int_M vL_g(v) dv_g = \lambda_1$, il suit que $\lambda_2 = \int_M vL_g(v) dv_g = \lambda_1$, contradiction et w nécessairement change de signe. Si $w \leq 0$, on a $-w \geq 0$ et comme $-w$ sera positive et vérifie aussi $\int_M u^{N-2}(-w) v dv_g = 0$, $\int_M (-w) L_g(-w) dv_g \leq \mu_2 \int_M u^{N-2} (-w)^2 dv_g$, on retrouve le même chose. $\blacksquare$

Chapitre 3

Le second invariant de Yamabe singulier

3.1 Rappel sur le problème de Yamabe singulier et généralité.

F. Madani et sous la direction de T. Aubin avait preparé une thése de doctorat dont un premier travail fut publié en 2010 sous le titre " Sur le problème de Yamabe avec singularité ", il introduit une certaine singularité sur l'équation de Yamabe[Mad08]. En d'autre termes c'est exactement le problème de Yamabe mais la métrique g est choisie régulière sur M sauf en un nombre fini de points singuliers, plus précisément, étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ la métrique g vérifie l'hypothèse suivante :

$(H) = \{$on suppose que g est une métrique dans l'espace de Sobolev $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ avec $p > n$ et qu'il existe un point $p \in M$, $\delta > 0$ telle que g est régulière dans la boule $B_p(\delta)\}$. On note par T^*M le fibré cotangent de M, l'espace de Sobolev $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ est l'ensemble des sections g (des tenseurs 2 fois covariants) telles que dans toute carte exponentielle, les composantes g_{ij} de g sont dans $H_2^p(M)$, on rappel que $H_2^p(M) = \{u \in L^p(M), |\nabla u| \in L^p(M) \text{et } \Delta_g u \in L^p(M)\}$. L'hypothèse$(H)$ définit la notion de singularité .

Par le plongement de Sobolev : $H_k^q(M) \subset C^m$ si $0 > \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$. On a $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M) \subset C^1(M, T^*M \otimes T^*M)$, donc une métrique qui vérifie l'hypothèse (H) est de classe $C^1(M)$. Les symboles de Christoffels sont dans $H_1^p \subset C^0$, les composantes du tenseur de courbure de Riemann, les composantes du tenseur de courbure de Ricci et la courbure scalaire sont dans $L^p(M)$, en particulier l'équation de Yamabe $\Delta u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u = k|u|^{N-2}u$ est singulière $(S_g \in L^p(M))$.

Sous l'hypothèse (H) et lorsque (M, g) est non conforme à la sphère S_n, F. Madani a montré qu'il existe toujours une métrique $\tilde{g} = u^{N-2}g$ conforme à g de courbure scalaire $S_{\tilde{g}}$ constante où $u \in H_2^p(M)$ et $u > 0$. La méthode de résolution du problème de Yamabe avec singularité est la suivante : Soit $\tilde{g} = u^{N-2}g$ une métrique conforme à g où $u \in H_2^p(M)$, $u > 0$ et $N = 2n/(n-2)$. On pose

$$L_g = \Delta + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g$$

Par analogie L_g est appelé l'opérateur de Yamabe singulier $(S_g \in L^p(M))$. De plus L_g est faiblement conformément invariant, cette propriété se traduit par une relation entre les courbures scalaires de g et celle de $\tilde{g}$: $\Delta u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u = S_{\tilde{g}} |u|^{N-2} u$, comme conséquence rédoudre le problème de Yamabe singulier est équivalent à trouver une solution strictement positive $u \in H_2^p(M)$ de l'équation $L_g(u) = k|u|^{N-2}u$ où k est une constante donnée.

Pour obtenir des solutions, on définit le nombre:

$$\mu = \inf_{u \in H_2^p(M), u > 0} Y(u)$$

avec

$$Y(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^N dv_g)^{2/N}}$$

Maintenant μ est appelé l'invariant de Yamabe avec singularités (l'invariant de Yamabe singulier). En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange associée à Y, il y a une correspondance entre les points critiques de Y et les solutions de l'équation $L_g(u) = k|u|^{N-2}u$. En particulier, si u est strictement positive, $u \in H_2^p(M)$, minimise Y alors u est une solution de l'équation et $\tilde{g} = u^{N-2}g$ est la métrique cherchée, elle est de courbure scalaire constante et μ est atteint par une métrique conforme particulière. La résolution de ce problème passe par les théorèmes suivants.

Théorème 3.1 [*Mad08*] *Si $p > n/2$ et $\mu < K^{-2}$, alors l'équation* (2) *admet une solution strictement positive $u \in H_2^p(M) \subset C^{(1-[n/p],\beta)}(M)$. $[n/p]$ est la partie entière de n/p , $\beta \in (0,1)$ qui minimise Y, où $K^2 = \frac{4}{n(n-1)}\omega_n^{-2/n}$ avec ω_n le volume de S_n.*

Remarque : Si $p > n$, alors $u \in H_2^p(M) \subset C^1(M)$.

Théorème 3.2 [*Mad08*] *Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. g est une métrique qui vérifie l'hypothèse (H). Si (M, g) est non conforme à la sphère S_n, alors $\mu < K^{-2}$.*

Théorème 3.3 [*Mad08*] *Sur une variété riemannienne compacte (M, g), Si $u \geq 0$ est une solution faible non triviale dans $H_1^2(M)$ de l'équation $\Delta u + hu = 0$ avec $h \in L^p(M)$ et $p > n/2$, alors $u \in C^{1-([n/p],\beta)}(M)$ et est strictement positive. $[n/p]$ est la partie entière de n/p, $\beta \in (0,1)$.*

proposition 3.1 [*Mad08*] *Soit $g \in H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ une métrique riemannienne sur M avec $p > n/2$. Si $\tilde{g} = u^{N-2}g$ est une métrique conforme particulière à la métrique g vérifiant $u \in H_2^p(M)$, $u > 0$, alors L_g est faiblement conformément invariant en ce sens*

$$\forall v \in H_1^2, |u|^{N-1}L_{\tilde{g}}(v) = L_g(uv) \text{ faiblement.}$$

De plus si $\mu > 0$, alors L_g est coercif et inversible.

Ces théorèmes résolvent le problème de Yamabe singulier

3.2 Définition des invariant conformes singuliers

Dans ce qui suit, (M, g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, on suppose que g est une métrique dans l'espace de Sobolev $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ avec $p > n$ et qu'il existe un point $p \in M$, $\delta > 0$ telle que g est régulière dans la boule $B_p(\delta)$.

Contrairement au second invariantYamabe, la courbure scalaire $S_g \in L^p(M)$, cette condition définit la notion de singularité.

Maintenant on va introduire deux invariants appelés, le premier invariant de Yamabe avec singularités et le second invariant de Yamabe avec singularités respectivement (le premier invariant de Yamabe singulier, le second invariant de Yamabe singulier), notre opérateur L_g reste elliptique et auto-adjoint sur M, son spectre est discret, $spec(L_g) = \{\lambda_{1,g}\ , \lambda_{2,g} \ldots\}$, où les valeurs propres sont telles que : $\lambda_{1,g}\ < \lambda_{2,g} \ldots$.

La caractérisation variationnelle de $\lambda_{1,g}$ est donnée par,

$$\lambda_{1,g} = \inf_{u \in H_1^2(M), u>0} \frac{\int_M |\nabla u|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^2 dv_g)}.$$

Soit $\langle g \rangle = \{\tilde{g} = u^{N-2}g, u \in C^\infty(M), u > 0\}$ la classe conforme de g et soit $[g] = \{\tilde{g} = u^{N-2}g\ ,\ u \in H_2^p(M)$ et $u > 0\}$ sa classe conforme particulière, Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on définit le $k^{ièm}$ invariant de Yamabe singulier μ_k par

$$\mu_k = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_{k,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}.$$

Avec ces notations, μ_1 est le premier invariant de Yamabe singulier. Pour trouver des minimiseurs, on élargie la classe conforme particulière à une classe de métrique généralisée où ces élément sont de la forme, $\tilde{g} = u^{N-2}g$ avec $u \in L^N(M), u \geq 0$ et $u \neq 0$, de même les définitions de $\lambda_{k,\tilde{g}}$ et de $Vol(M, \tilde{g})^{2/n}$se généralisent naturellement.

Dans tout ce qui suit, (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ vérifiant l'hypothèse (H).

3.3 Métrique généralisée et l'équation d' Euler-Lagrange

On note

$$L_+^N(M) = \{u \in L^N(M) \quad \text{tel que} \quad u \geq 0 \;\;,\;\; u \neq 0\}$$

et

$$C_+^\infty(M) = \{u \in C^\infty(M) \quad \text{tel que} \quad u > 0\}$$

Définition 3.1 *Soit $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non indentiquement nulle. $Gr_k^u(H_2^2(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k ($k \geq 1$) de $H_1^2(M)$ tel que le sous espace $span(v_1, ..., v_k) \in Gr_k^u(H_2^2(M))$ si est seulement si $v_1, ..., v_k$ sont linéairement indépendant sur $M \setminus u^{-1}(0)$.*

Définition 3.2 *Une métrique généralisée conforme à la métrique g est une métrique de la forme $\widetilde{g} = u^{N-2}g$ où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non indentiquement nulle.*

Définition 3.3 *Pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{N-2}g$, on définit la $k^{ième}$-valeur propre $\lambda_k(\widetilde{g})$ de l'opérateur de Yamabe singulier par :*

$$\lambda_{k,\tilde{g}} = \inf_{V \in Gr_k^u(H_1^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_M v L_g v dv_g}{\int\limits_M u^{N-2} v^2 dv_g} \qquad \text{où} \qquad k \geq 1$$

Théorème 3.4 [*Mad08*] *Sur une variété riemannienne compacte (M, g), si $u \in H_1^2(M)$, non trivial et positive solution faible de l'équation*

$$\Delta u + hu = cu^{N-1}$$

où $h \in L^p(M)$ et $p > n/2$, alors

$$u \in H_2^p(M) \subset C^{1-[n/p],\beta)}(M),$$

et de plus elle est strictement positive. $[n/p]$ *est la partie entière de* n/p, $\beta \in (0,1)$.

proposition 3.2 *Soit* (v_m) *une suite d'élément de* H_1^2, *telle que* $v_m \to v$ *fortement dans* L^2, *alors pour tout* $u \in L_+^N(M)$

$$\int_M u^{N-2}(v^2 - v_m^2)\ dv_g \to 0.$$

Preuve: Même preuve donnée dans la première partie. ■

Un grand merci à F.Madani pour la proposition (4.1) qui affirme que si $\mu > 0$, l'opérateur L_g est coercif, c'est un élément important pour l'obtention du résultat suivant.

proposition 3.3 *Si* $\mu > 0$, *alors pour tout* $u \in L_+^N(M)$, *ils existent deux fonctions* v, w *appartenants à* $H_1^2(M)$ *avec* $v \geq 0$ *solutions au sens des distributions de*

$$L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v \quad \text{et} \quad L_g(w) = \lambda_{2,\tilde{g}} u^{N-2} w,$$

vérifiant

$$\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1 \quad \text{et} \quad \int_M u^{N-2} wv dv_g = 0 \tag{5}$$

Preuve: **Etape 1 :** On montre que $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est fini.

L'opérateur L_g est coercif, alors pour tout $v \in H_1^2(M)$ on peut toujours trouver une constante $c > 0$ telle que

$$-c\int_M |S_g|\, v^2 \leq c\, \|v\|_{H_1^2}^2 \leq \int_M vL_g(v) dv_g = \int_M |\nabla v|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g v^2 dv_g.$$

Comme $p > n > \frac{n}{2}$, l'espace $L^p(M)$ s'injecte dans $L^{\frac{n}{2}}(M)$, $S_g \in L^{\frac{n}{2}}(M)$ et on obtient,

$$\int_M |S_g|\, v^2 \leq (\int_M |S_g|^{\frac{n}{2}})^{\frac{2}{n}} (\int_M v^N)^{\frac{2}{N}} = \|S_g\|_{\frac{n}{2}} \|v\|_N^2$$

donc

$$-c\int_M |S_g|\, v^2 \geq -c\,\|S_g\|_{\frac{n}{2}}\,\|v\|_N^2\,.$$

D'autre part

$$\int_M |u|^{N-2}v^2dv_g \leq (\int_M |u|^{N-2\frac{N}{N-2}}dv_g)^{\frac{N-2}{N}}(\int_M v^{2\frac{N}{2}}dv_g)^{\frac{2}{N}} = \|u\|_N^{N-2}\,\|v\|_N^2$$

implique

$$\frac{1}{\int_M |u|^{N-2}v^2dv_g} \geq \frac{1}{\|u\|_N^{N-2}\,\|v\|_N^2},$$

ou encore

$$\frac{\int_M |\nabla v|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)}S_g v^2 dv_g}{\int_M |u|^{N-2}v^2dv_g} \geq \frac{\int_M |\nabla v|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)}S_g v^2 dv_g}{\|u\|_N^{N-2}\,\|v\|_N^2} \geq \frac{-c\int_M |S_g|\, v^2}{\|u\|_N^{N-2}\,\|v\|_N^2}$$

$$\geq \frac{-c\,\|S_g\|_{\frac{n}{2}}\,\|v\|_N^2}{\|u\|_N^{N-2}\,\|v\|_N^2} \geq \frac{-c\,\|S_g\|_{\frac{n}{2}}}{\|u\|_N^{N-2}} \geq c_0,$$

en effet v , u sont des éléments non nuls de $L^N(M)$, $\|v\|_N^2 \neq 0$, la quantité $\|u\|_N^{N-2}$ est fini et c_0 est une constante.

Notre fonctionnelle est bornée inférieurement et $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est finie.

Etape2 : Soit v_m une suite minimisante de $\lambda_{1,\tilde{g}}$, une suite $v_m \in H_1^2(M)$ telle que

$$\lim \frac{\int_M v_m L_g(v_m)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v_m^2dv_g)} = \lambda_{1,\tilde{g}}$$

On sait que $(|v_m|)_m$ est aussi une suite minimisante, donc on peut assumer que $v_m \geq 0$ et de plus on peut supposer que

$$\int_M |u|^{N-2}v_m^2dv_g = 1.$$

$\mu > 0$, L_g est coercif, alors pour un rang m assez grand, on a :

$$c\|v_m\|_{H_1^2} \leq \int_M v_m L_g(v_m) dv_g \leq \lambda_{1,\tilde{g}} + 1,$$

il découle que v_m est bornée dans $H_1^2(M)$, après restriction à une sous suite, il va exister un v dans $H_1^2(M)$, $v \geq 0$ telle que $v_m \to v$ faiblement $H_1^2(M)$, fortement dans L^2 et presque partout, d'où v est solution au sens des distributions de l'équation:

$$L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v.$$

1) Si $u \in H_2^p(M) \subset C^1(M)$, alors

$$\int_M u^{N-2}(v^2 - v_m^2)\, dv_g \to 0, \text{ c'est à dire } \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1.$$

Donc v est un minimiseur positif non nul de $\lambda_{1,\tilde{g}}$ et de plus en écrivant l'équation $L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$ sous la forme suivante $\Delta v + (\frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g - \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2}) v = 0$ où $h = \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g - \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} \in L^p(M)$, du théorème (4.3) on en déduit que:

$$v \in C^1, \quad v > 0$$

2) Si $u \in L_+^N(M)$, proposition(4.2) montre que,

$$\int_M u^{N-2}(v^2 - v_m^2)\, dv_g \to 0, \text{ d'où } \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1,$$

d'où v est minimiseur positif non nul de $\lambda_{1,\tilde{g}}$ appartient à $H_1^2(M)$ est qui vérifie $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$.

Maintenant, on définit

$$\lambda'_{2,g} = \inf \frac{\int_M wL_g(w)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}w^2dv_g)}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble

$$E = \{w \in H_1^2(M),\ u^{\frac{N-2}{2}}w \neq 0, \int\limits_M u^{N-2}w^2dv_g = 1 \ \text{ et } \int\limits_M u^{N-2}wvdv_g = 0\}.$$

E n'est pas vide, la preuve est exactement la même preuve construite dans la première partie.

Soit (w_m) une suite minimisante de $\lambda'_{2,g}$ autrement dit, une suite $w_m \in E$ telle que,

$$\lim_m \frac{\int_M w_mL_g(w_m)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}w_m^2dv_g)} = \lambda'_{2,g}$$

avec la même méthode, on trouve un minimiseur w de $\lambda'_{2,g}$vérifiant $\int\limits_M u^{N-2}w^2 = 1$.

De plus en écrivant

$$\int\limits_M u^{N-2}wvdv_g = \int\limits_M u^{N-2}w_mv - u^{N-2}w_mv + u^{N-2}wvdv_g$$

$$= \int\limits_M u^{N-2}v(w-w_m)dv_g + \int\limits_M u^{N-2}w_mvdv_g = 0.$$

En effet $\int\limits_M u^{N-2}w_mvdv_g = 0$, de la convergence faible de $w_m \to w$ dans $L^N(M)$ et comme $u^{N-2}v \in L^{\frac{N}{N-1}}(M)$(forme linéaire), on retrouve $\int\limits_M u^{N-2}v(w-w_m)dv_g = 0$.

D'où w est solution faible de $L_gw = \lambda'_{2,g}u^{N-2}w$ vérifiant aussi $\int\limits_M u^{N-2}wvdv_g = 0.$ ■

proposition 3.4 *On a toujours*

$$\lambda'_{2,g} = \lambda_{2,\tilde{g}}.$$

.

Preuve: La preuve est la même qui se trouve dans la première partie. ∎

Remarque 3.1 *Si* $u \in H_2^p(M) \subset C^1(M)$, *Alors* $v, w \in C^1(M)$, *tel que* $v > 0$.*(la régularité classique)*

Remarque 3.2 *On a toujours* $\lambda_{1,\tilde{g}} < \lambda_{2,\tilde{g}}$. *En effet si l'y égalité notre* v *sera solution de* $L_g v = \lambda_{2,\tilde{g}} u^{N-2} v$, *donc* v *minimise* $\lambda_{2,\tilde{g}}$ *et cela entraine que* $v \in E$, *ce qui est impossible.*

Pour la régularité, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit* $u \in L_+^N(M)$ *et* v *dans* $H_1^2(M)$. *On assume que l'équation* $L_g(v) = u^{N-2}v$ *soit vérifiée au sens des distributions, alors*

$$v \in L^{N+\epsilon}(M)$$

pour certain $\varepsilon > 0$.

Preuve: La preuve est la même donnée dans [Mad08] sauf avec la modification suivante, dans [Mad08] , on a l'équation $L_g(v) = v^{N-1}$ i.e $L_g(v) = v^{N-2}v$, avec $v \in L_+^N(M)$, maintenant notre équation est la suivante $L_g(v) = u^{N-2}v$ où $u \in L_+^N(M)$, donc en remplacant dans la preuve la fonction v^{N-2} par u^{N-2}, toute les étapes restent vérifiées et donc $v \in L^{N+\epsilon}(M)$ d'où $v \in L^s(M), \forall s \geq 1$. ∎

3.4 Caracterisation variationnelle de $\mu_1$et son existence

Dans cette section on a besoin des théorèmes suivants:

Théorème 3.5 [*Mad08*] *Sur une variété riemannienne compacte* (M, g). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* $A(\varepsilon) > 0$ *telle que*

$$\forall u \in H_1^2, \|u\|_N^2 \leq (K^2 + \varepsilon)\|\nabla u\|_2^2 + A(\varepsilon)\|u\|_2^2.$$

où $N = 2n/(n-2)$ *et* $K^2 = 4/(n(n-2))\ \omega_n^{\frac{-2}{n}}$ *avec* ω_n *le volume de* S_n.

Lemme 3.2 [*BL83*] *Soit* (u_m) *une suite de fonctions mesurables dans* $(\Omega, \sum, \mu)$. *Si* u_m *est uniformément bornée dans* $L^p(M)$ *avec* $0 < p < +\infty$ *et* $u_m \to u$ *presque partout, alors*

$$\lim_m \|u_m\|_p^p - \|u_m - u\|_p^p = \|u\|_p^p.$$

Définition 3.4 *Soit* $\langle g \rangle = \{\tilde{g} = u^{N-2}g\ , u \in C^\infty(M),\ u > 0\}$ *la classe conforme de* g *et soit* $[g] = \{\tilde{g} = u^{N-2}g\ ,\ u \in H_2^p(M)$ *et* $u > 0\}$ *la classe conforme particulière de* g, *le premier invariant de Yamabe singulier* μ_1 *est défini par*

$$\mu_1 = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_{1,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}$$

et de plus, on a

$$\mu_1 = \inf_{u \in H_2^p(M), V \in Gr_1^u(H_1^2(M))} \sup_{v \in V} \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g)} (\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}.$$

Lemme 3.3 *Si* $p > n$, *alors on a toujours :*

$$\mu_1 \leq \mu.$$

.

Preuve:

$$\mu_1 = \inf_{u \in H_2^p, V \in Gr_1^u(H_1^2)} \sup_{v \in V} \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g)} (\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}$$

lorsque $p > n$, on a $H_2^p(M) \subset H_1^2(M)$,

$$\mu_1 \leq \inf_{u \in H_2^p(M), V \in Gr_1^u(H_2^p(M))} \sup_{v \in V} \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g)} (\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}.$$

En effet le plongement de Sobolev des $H_k^q(M) \subset H_m^p(M)$ (si $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$) entraine que $H_2^p(M) \subset H_1^2(M)$ si $p \geq 2n/(n+2)$ et en particulier lorsque $p > n$. Encore lorsque $u = v$, on retrouve

$$\mu_1 \leq \inf_{v \in H_2^P, V \in Gr_1^u(H_2^P)} \sup_{v \in V} \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |v|^{N-2}v^2 dv_g)} (\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{n}} = \mu.$$

i.e

$$\mu_1 \leq \mu.$$

■

Théorème 3.6 *Si* $\mu > 0$*, alors une métrique généralisée* $\tilde{g} = u^{N-2}g$ *minimise* μ_1*.*

Preuve: La preuve est donnée en plusieurs étapes.

Etape1

On étudie une suite de métriques $g_m = u_m^{N-2}g$ avec $u_m \in H_2^p$, $u_m > 0$ minimisante de l'infimum dans la définition de μ_1, plus précisément une suite de métriques telle que:

$$\mu_1 = \lim_m \lambda_{1,m}(Vol(M, g_m)^{2/n}$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $Vol(M, g_m) = \int_M u_m^N dv_g = 1$, en effet de l'égalité des puissances $\frac{2N}{n} = \frac{4n}{n(n-2)} = \frac{2n}{n-2} - 2 = N - 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |\lambda u|^{N-2}v^2 dv_g)}(\int\limits_M (\lambda u)^N dv_g)^{\frac{2}{n}} &= \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\lambda^{N-2}(\int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g)}\lambda^{\frac{2N}{n}}(\int\limits_M (u)^N dv_g)^{\frac{2}{n}} \\
&= \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g)}(\int\limits_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}.
\end{aligned}$$

Donc si u_m est minimisante, $\lambda\ u_m$ l'est aussi.

Puisque la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $L^N(M)$, il va exister un $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ vérifiant $u_m \to u$ faiblement dans $L^N(M)$ et de la proposition (4.3) on déduit que pour chaque u_m il va exister un $v_m \in C^1(M)$, $v_m > 0$ vériufiant

$$L_g(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \quad \text{et} \quad \int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1,$$

par coercivité de l'opérateur, on a

$$c\|v_m\|_{H_1^2} \leq \int_M v_m L_g(v_m) dv_g = \lambda_{1,m} \leq \mu_1 + 1.$$

La suite v_m est bornée dans $H_1^2(M)$, il existe $v \in H_1^2(M)$, $v \geq 0$ tels que $v_m \to v$ faiblement dans $H_1^2(M)$ et avec la convergence faible de u_m, pour tout $\xi \in H_1^2(M)$, on a

$$\int_M \nabla\xi\nabla v_m dv_g \to \int_M \nabla\xi\nabla v dv_g,$$

aussi

$S_g\xi \in L^2(M)$, car$\int_M S_g^2\xi^2 dv_g \leq \left[\int_M S_g^{2\frac{N}{N-2}} dv_g\right]^{\frac{N-2}{N}} \left[\int_M \xi^{2\frac{N}{2}} dv_g\right]^{\frac{2}{N}} = \left[\int_M S_g^n dv_g\right]^{\frac{N-2}{N}} \left[\int_M \xi^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}}$, puisque $p > n$ assure que $S_g \in L^P(M) \subset L^n(M)$, d'où $\int_M S_g^2 v_m^2 dv_g < +\infty$, cela nous conduit à:

$$\int_M \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g\xi v_m dv_g \to \int_M \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g\xi v dv_g,$$

et grâce au fait que

$$\int_M (u_m^{N-2}v_m)^{\frac{N}{N-1}} dv_g = \int_M u_m^{N-2\frac{N}{N-1}} v_m^{\frac{N}{N-1}} dv_g \leq \left[\int_M u_m^{N-2\frac{N}{N-1}\frac{N-1}{N-2}} dv_g\right]^{\frac{N-2}{N-1}} \left[\int_M v_m^{\frac{N}{N-1}\frac{N-1}{1}} dv_g\right]^{\frac{1}{N-1}}$$

$\leq \left[\int_M u_m^N dv_g\right]^{\frac{N-2}{N-1}} \left[\int_M v_m^N dv_g\right]^{\frac{1}{N-1}} < +\infty$, on a $u_m^{N-2}v_m \in L^{\frac{N}{N-1}}(M)$ et comme $\xi \in L^N$ (M) et

$$\int_M \xi u_m^{N-2} v_m \xi dv_g \to \int_M \xi u^{N-2} v dv_g.$$

D'où u, v vérifient l'équation $L_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ au sens des distributions.

Etape2

On pose $z_m = v_m - v$, on a

$$\int_M |\nabla v_m|^2 dv_g = \int_M |\nabla z_m|^2 dv_g + \int_M |\nabla v|^2 dv_g + 2\int_M \nabla z_m \nabla v dv_g$$

et comme $z_m \to 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^q(M)$ avec $q < N$ alors $\forall \Phi \in H_1^2(M)$, $\int_M \nabla z_m \nabla \Phi + z_m \Phi dv_g \to \int_M \nabla z \nabla \Phi + z\Phi \, dv_g$, en particulier lorsque $\Phi = v$, on obtient $\int_M \nabla z_m \nabla v dv_g = o(1)$. D'où

$$\int_M |\nabla v_m|^2 dv_g = \int_M |\nabla z_m|^2 dv_g + \int_M |\nabla v|^2 dv_g + o(1).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g (v_m - v)^2 dv_g &\leq \frac{n-2}{4(n-1)} \left[\int_M S_g^p dv_g\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_M (v_m - v)^{2\frac{p}{p-1}} dv_g\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_p \|v_m - v\|^2_{\frac{2p}{p-1}} \to 0 \text{ fortement, car } 2p/(p-1) < N
\end{aligned}$$

i.e

$$\int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g (v_m)^2 dv_g = \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g (v)^2 dv_g + 0(1),$$

on déduit que

$$\int_M |\nabla v_m|^2 \, dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g (v_m)^2 dv_g$$

$$= \int_M |\nabla z_m|^2 \, dv_g + \int_M |\nabla v|^2 \, dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g (v)^2 dv_g + 0(1),$$

alors

$$\int_M v_m L_g(v_m) dv_g = \int_M |\nabla z_m|^2 \, dv_g + \int_M |\nabla v|^2 \, dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(v)^2 dv_g + 0(1).$$

De la définition de μ et du lemme (4.3), on a

$$\int_M |\nabla v|^2 \, dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(v)^2 dv_g \geq \mu(\int\limits_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} \geq \mu_1(\int\limits_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}},$$

alors on arrive à : $\int_M v_m L_g(v_m) dv_g \geq \int_M |\nabla z_m|^2 \, dv_g + \mu_1(\int\limits_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} + 0(1)$ sachant que $\int_M v_m L_g(v_m) dv_g = \lambda_{1,m} \leq \mu_1 + 0(1)$, il suit $\int_M |\nabla z_m|^2 \, dv_g + \mu_1(\int\limits_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} \leq \mu_1 + 0(1)$ i.e

$$\mu_1 \|v\|_N^2 + \|\nabla z_m\|_2^2 \leq \mu_1 + 0(1) \ . \tag{10}$$

Indépendamment par le lemme (4.2), on a

$$\lim_m \int_M v_m^N - z_m^N dv_g = \int\limits_M v^N dv_g$$

i.e $\lim\limits_m \|v_m\|_N^N - \|z_m\|_N^N = \|v\|_N^N$, on conclut

$$\|v_m\|_N^N + 0(1) = \|z_m\|_N^N + \|v\|_N^N.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à l'expression $\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$, on a $\|v_m\|_N^N \geq 1$, on déduit

$$\int_M v^N + z_m^N \, dv_g = \int_M v_m^N dv_g + 0(1) \geq 1 + 0(1),$$

il suit que

$$(\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} + (\int_M z_m^N dv_g)^{\frac{2}{N}} \geq 1 + 0(1)$$

i.e

$$\|z_m\|_N^2 + \|v\|_N^2 \geq 1 + 0(1)$$

Par le théorème (4.5) et le fait que $z_m \to 0$ fortement dans $L^2(M)$, on trouve

$$\|z_m\|_N^2 \leq (K^2 + \varepsilon)\|\nabla z_m\|_2^2 + o(1)$$

$$1 + o(1) \leq \|z_m\|_N^2 + \|v\|_N^2 \leq \|v\|_N^2 + (K^2 + \varepsilon)\|\nabla z_m\|_2^2 + o(1)$$

$$1 + o(1) \leq \|v\|_N^2 + (K^2 + \varepsilon)\|\nabla z_m\|_2^2 + o(1),$$

multipliant par μ_1 ($\mu_1 \geq 0$)

$$\mu_1(1 + o(1)) \leq \mu_1(\|v\|_N^2 + (K^2 + \varepsilon)\|\nabla z_m\|_2^2 + o(1)),$$

avec l'inégalité (10), on obtient

$$\|\nabla z_m\|_2^2 + \mu_1\|v\|_N^2 \leq \mu_1((K^2 + \varepsilon)\|\nabla z_m\|_2^2 + \|v\|_N^2) + o(1),$$

encore

$$(1 - \mu_1(K^2 + \varepsilon))\|\nabla z_m\|_2^2) \leq 0(1)$$

à présent, on peut choisir ε tel que le premier facteur de cette inégalité devient positif et comme $\mu_1 K^2 < 1$, il découle que $v_m \to v$ fortement dans $H_1^2(M)$ donc dans $L^N(M)$.

Etape3

$$\lim_m \int_M u_m^{N-2}v_m^2 - u^{N-2}v^2 + u_m^{N-2}v^2 - u_m^{N-2}v^2 dv_g = \lim_m \int u_m^{N-2}(v_m^2 - v^2) + (u_m^{N-2} - u^{N-2})v^2 dv_g$$

La convergence simple de u_m vers u implique la convergece simple de u_m^{N-2} vers $u^{\ N-2}$, comme l'inégalité de Holder nous donne

$$\int_M u_m^{N-2} dv_g \leq (\int u_m^N dv_g)^{\frac{(N-2)}{N}} (\int_m (1^N dv_g)^{\frac{2}{N}} \leq c$$

notre nouvelle suite u_m^{N-2}est bornée dans $L^{N/N-2}(M)$ et cela entraine que $u_m^{N-2} \to u^{\ N-2}$ faiblement dans $L^{N/(N-2)}(M)$ donc :

$$\lim_m \int (u_m^{N-2} - u^{N-2})v^2 dv_g = 0$$

car $v^2 \in L^{\frac{N}{2}}(M)$(une forme linéaire), aussi avec l'inégalité de Hölder,

$$\lim_m \int u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (\int u_m^N dv_g)^{(N-2)/N} (\int_m (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{2}{N}} \leq 0$$

et de la convergence forte de v_m dans $L^N(M)$, on a le résultat $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$, d'où v et u sont non triviales.

Théorème 3.7 *Soit v une solution faible de l'équation $L_g(v) = \mu_1 u^{N-2}v$ vérifiant $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$, alors*

$$u = v.$$

■

Preuve: Soit $\overline{u} = av \in L_+^N(M)$ avec $a > 0$ tel que $\int\limits_M \overline{u}_m^N dv_g = 1$,

$$\mu_1 \leq \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M \overline{u}^{N-2}v^2 dv_g}$$

$$\leq \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{\int_M (av)^{N-2}v^2 dv_g} = \frac{a^2\mu_1 \int_M u^{N-2}v^2 dv_g}{\int_M \overline{u}^{N-2}(av)^2 dv_g}$$

de l'inégalité de Hölder,

$$\leq \mu_1 \int_M (u)^{N-2}(av)^2 dv_g$$

$$\leq \mu_1 (\int_M (u)^{N-2\frac{N}{N-2}})^{\frac{N-2}{N}} (\int_M (av)^{2\frac{N}{2}} dv_g)^{\frac{2}{N}} \leq \mu_1$$

d'où l'égalité dans l'inégalité de Hölder donne nécessairement :

$$u = bv$$

où b est une certainne constante, à l'aide du même argument construit dans la première partie, on retrouve

$$u = v$$

■

Théorème 3.8 *Si $\mu > 0$, alors une métrique particulière conforme $\tilde{g} = u^{N-2}g$ minimises μ_1.*

Preuve: Soit v la solution de $L_g(v) = \mu_1 v^{N-1}$, par le théorème (4.4), on a : $v \in H_2^p \subset C^1$ et $v > 0$, autrement dit μ_1 est atteint par une métrique particulière conforme. ■

3.5 l'égalité : $\mu_1 = \mu$

Théorème 3.9 *Si $\mu \geq 0$, alors $\mu_1 = \mu$.*

Preuve: 1) Si $\mu > 0$ et si v est une solution de $L_g(v) = \mu_1 v^{N-1}$ vérifiant $\int_M v^N dv_g = 1$, alors par coercivité

$$\mu_1 = \int_M vL_g(v)dv_g \geq c\|v\|_{H_1^2},$$

le fait que v est non triviale entraine que $\mu_1 > 0$ et de la définition de μ, on obtient

$$\mu = \inf \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}}} \leq \int_M vL_g(v)dv_g = \mu_1.$$

Par le lemme (4.3), on retrouve l'égalité :

$$\mu_1 = \mu.$$

2) Si $\mu = 0$, alors par le lemme (4.3), $\mu_1 \leq 0$ et encore de la définition de μ, pour tout $v \in H_1^2$

$$\int_M vL_g(v)dv_g \geq 0$$

et pour tout $u \in L_+^N$, la quantité

$$\frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g)}(\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}} \geq 0$$

alors notre μ_1 inf de la quatité précédente est positif et en fin de compte, on a :

$$\mu_1 = 0 = \mu.$$

■

3.6 Caractérisation variationnelle de μ_2

Définition 3.5 *Soit* $\langle g\rangle = \{\tilde{g} = u^{N-2}g,\ u \in C^\infty$ *et* $u > 0\}$ *la classe conforme de* g *et soit* $[g] = \{\tilde{g} = u^{N-2}g,\ u \in H_2^P$ *et* $u > 0\}$ *sa classe conforme particulière, le second invariant de Yamabe singulier* μ_2 *est définie par :*

$$\mu_2 = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \lambda_{2,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}$$

ou bien sous la forme suivante,

$$\mu_2 = \inf_{u\in H_2^p(M), V\in Gr_2^u(H_1^2(M))} \sup_{v\in V} \frac{\int_M vL_g(v)dv_g}{(\int_M |u|^{N-2}v^2dv_g)} (\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}$$

Lemme 3.4 [*AH06*] *Pour toute variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geq 3$, il existe $B_0 > 0$ telle que*

$$\mu_1(S_n) = n(n-1)\omega_n^{2/n} = \inf_{u\in H_1^2, u\neq 0} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{(n-2)}|\nabla u|^2 + B_0 u^2 dv_g}{(\int_M |u|^N dv_g)^{2/N}}$$

où ω_n est le volume de S_n. En posant, $K^2 = \mu_1(S_n)^{-1}C_n$ où $C_n = (4(n-1))/(n-2)$, alors on peut reécrire l'inégalité précédente sous la forme suivante : pour tout $u \in H_1^2(M)$, $u \neq 0$

$$(\int_M |u|^N dv_g)^{2/N} \leq K^2 \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \int_M B_0 u^2 dv_g.$$

A partir de ce théorème Ammann et Humbert ont construit l'inégalité suivante :

Théorème 3.10 [*AH06*] *Sur une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geq 3$, pour tout $v \in H_1^2$ et pour tout $u \in L_+^N$, on a l'inégalité de type de Sobolev :*

$$2^{\frac{2}{n}} \int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g \leq (K^2 \int_M |\nabla v|^2 dv_g + \int_M B_0 v^2 dv_g)(\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}$$

ou bien, on peut aussi l'écrire de cette façon :

$$2^{\frac{2}{n}} \int_M |u|^{N-2}v^2 dv_g \leq \mu_1(S_n)(\int_M C_n|\nabla v|^2 + B_0 v^2 dv_g)(\int_M u^N dv_g)^{\frac{2}{n}}.$$

3.7 Proprieté de μ_2

On sait que g est régulière dans la $B_p(\delta)$ par l'hypothèse (H), c'est suffisant de voir que la conjecture d'Aubin est toujours réalisée dans le cas où (M, g) est non conformément plate dans un voisinage d'un point p et dimension $n \geq 6$. On définit $u_\varepsilon = \eta v_\varepsilon$ avec η est une fonction à support dans la boule $B_p(2\varepsilon)$, $\eta = 1$ dans $B_p(\varepsilon)$, $2\varepsilon \leq \delta$ et

$$v_\varepsilon(q) = (\frac{\varepsilon}{r^2 + \varepsilon^2})^{\frac{n-2}{2}} \quad \text{où} \quad r = d(p, q),$$

sachant que

$$Y(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 + \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^N dv_g)^{2/N}},$$

on a le lemme suivant (Aubin) :

Lemme 3.5 $[Heb97]$

$$\mu \leq Y(v_\varepsilon) = \begin{Bmatrix} K^{-2} - c|w(p)|^2\varepsilon^4 + 0(\varepsilon^4) & si \;\; n > 6 \\ K^{-2} - c|w(p)|^2\varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon} + 0(\varepsilon^4) & si \;\; n = 6 \end{Bmatrix}$$

où $|w(p)|$ est la norme du tenseur de Weyl au point p et c est contante strictement positve.

De la conjecture d'Aubin et de la régularité de g dans la boule $B_p(\delta)$, l'estimation faite par Ammann et Humbert est vérifiée dans ce cas et on obtient le théorèmr suivant :

Théorème 3.11 *Si (M, g) est non localement conformément plate, de dimension $n \geq 11$ et $\mu > 0$, on trouve*

$$\mu_2 < ((\mu^{\frac{n}{2}} + (K^{-2})^{\frac{n}{2}})^{\frac{2}{n}}$$

et si $\mu = 0$, $n \geq 9$, alors on a

$$\mu_2 < K^{-2}.$$

3.8 Existence du minimum de μ_2

Lemme 3.6 *Supposons que $v_m \to v$ faiblement dans $H_1^2(M)$, $u_m \to u$ faiblement L^N (M) et vérifiant $\int_M {u_m}^{N-2}{v_m}^2 dv_g = 1$, alors on a*

$$\int_M {u_m}^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1).$$

Preuve: La preuve est exactement la même faite dans la partie1. ■

Théorème 3.12 *Si $1 - 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 > 0$, alors une métrique généralisé minimise μ_2.*

Preuve: **Etape1**:

Soit $g_m = u_m^{N-2} g$ une suite de métriques telles que $u_m \in H_2^P(M)$, $u_m > 0$ minimisante de infimum de μ_2 i.e. un suite telles que

$$\mu_2 = \lim_m \lambda_{2,m}(Vol(M, g_m)^{2/n}$$

On peut assumer que $Vol(M, g_m) = \int\limits_M u_m^N dv_g = 1$, en particulier la suite u_m est bornée dans $L^N(M)$ et donc il existe $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ tel que $u_m \to u$ faiblement dans $L^N(M)$. Proposition (4.3) entraine l'existence de $v_m, w_m \in C^1(M)$, $v_m > 0$ tels que :

$$L_g(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \quad \text{et} \quad L_g(w_m) = \lambda_{2,m} u_m^{N-2} w_m$$

vérifiant $\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = \int_M u_m^{N-2} w_m^2 dv_g = 1$ et $\int_M u_m^{N-2} v_m w_m dv_g = 0$. Les suites v_m ,w_m sont bornées dans $H_1^2(M)$, ils existent $v, w \in H_1^2(M)$, $v \geq 0$ telles que $v_m \to v$, $w_m \to w$ faiblement $H_1^2(M)$. Avec la convergence de u_m dans $L^N(M)$, v et w sont solutions faibles de

$$L_g(v) = \widehat{\mu}_1 u^{N-2} v \quad \text{et} \quad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2} w$$

où

$$\widehat{\mu_1} = \lim_m \lambda_{1,m} \leq \ \mu_2.$$

Etape2 : Maintenant on va montrer que $v_m \to v$, $w_m \to w$ fortement dans $H_1^{2\cdot}(M)$.

En appliqant le théorème (4.10) à la suite $(v_m - v)$, on a

$$\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (2^{-\frac{2}{n}} K^2 \int_M |\nabla(v_m - v)|^2 dv_g + \int_M B_0(v_m - v)^2 dv_g)(\int_M u_m^N dv_g)^{\frac{2}{n}}$$

de la convergence forte de v_m dans $L^2(M)$, il suit que

$$\begin{aligned}\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g &\leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \int_M |\nabla(v_m - v)|^2 dv_g + o(1) \\ &\leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \int_M |\nabla(v_m)|^2 + |\nabla v|^2 - 2\nabla v_m \nabla v dv_g + o(1),\end{aligned}$$

la convergence faible de v_m conduit à $\int_M \nabla v_m \nabla v dv_g = \int_M |\nabla v|^2 dv_g + o(1)$, nous obtenons donc

$$\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \int_M |\nabla(v_m)|^2 - |\nabla v|^2 dv_g + o(1).$$

Encore comme $\int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g {v_m}^2 dv_g = \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v^2 dv_g + 0(1)$,

$$\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 (\int_M |\nabla(v_m)|^2 - |\nabla v|^2 dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(v_m^2 - v^2) dv_g) + o(1)$$

$$\leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 (\int_M v_m L_g(v_m) - v L_g(v) dv_g) + o(1)$$

$$\leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 (\lambda_{1,m} - \widehat{\mu_1} \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1)$$

et puisque $\lim_m \lambda_{1,m} = \ \widehat{\mu_1} \leq \mu_2$, on déduit

$$\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 (1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1).$$

Maintenant à l'aide des convergences faibles de v_m dans $H_1^2(M)$ et de u_m dans $L^N(M)$ et du lemme (4.6), on a

$$\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1)$$

i.e

$$1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g \leq 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 (1 - \int_M u^{N-2}v^2) dv_g + o(1)$$

$$1 - 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 \leq (1 - 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2) \int_M u^{N-2}v^2 dv_g + o(1)$$

Si $1 - 2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 > 0$ alors $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g \geq 1$et avec le lemme de Fatou, $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g \leq \underline{\lim} \int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$

D'où $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$ et on conclut que les fonctions v et u sont non identiquement nulles.

De plus

$$\int_M |\nabla(v_m - v)|^2 dv_g = \int_M |\nabla(v_m)|^2 + |\nabla v|^2 - 2\nabla v_m \nabla v dv_g + o(1)$$

$$= \int_M |\nabla(v_m)|^2 - |\nabla v|^2 dv_g + o(1)$$

et par le fait que $\int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g {v_m}^2 dv_g - \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v^2 dv_g = 0(1)$, on a ausi

$$\int_M |\nabla(v_m - v)|^2 dv_g = \int_M v_m L_g(v_m) - v L_g(v) dv_g + o(1)$$

$$\leq \mu_2 (1 - \int_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1)$$

alors

$$\int_M |\nabla(v_m - v)|^2 dv_g \leq o(1)$$

Conclusion : $v_m \to v$ fortement dans $H_1^2(M)$,on a la même chose avec w_m.

Etape3 : On montre que $\int_M u^{N-2} v w dv_g = 0$.

En développant l'expression suivante, on a

$$\int_M u_m^{N-2} v_m w_m - u^{N-2} vw dv_g = \int_M u_m^{N-2} v_m w_m - u_m^{N-2} v w_m + u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$= \int_M u_m^{N-2}(v_m - v) w_m dv_g + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$= \int_M [u_m^{\frac{N-2}{2}} w_m][u_m^{\frac{N-2}{2}}(v_m - v)] dv_g + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$\leq \left[\int_M u_m^{N-2} w_m^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g)\right]^{\frac{1}{2}} + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$\leq \left[\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$\leq \left\{\left[\int_M u_m^{N-2\frac{N}{N-2}}\right]^{\frac{N-2}{N}} \left[\int_M (v_m - v)^{2\frac{N}{2}}\right]^{\frac{2}{N}}\right\}^{\frac{1}{2}} + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u^{N-2} vw dv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M u_m^{N-2} v w_m - u_m^{N-2} vw + u_m^{N-2} vw - u^{N-2} vw dv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M u_m^{N-2} v(w_m - w) + (u_m^{N-2} - u^{N-2}) vw dv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M (u_m^{\frac{N-2}{2}} v)(u_m^{\frac{N-2}{2}}(w_m - w)) + (u_m^{N-2} - u^{N-2}) vw dv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + (\int_M (u_m^{N-2} v^2) dv_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M (u_m^{N-2}(w_m - w)^2 dv_g))^{\frac{1}{2}} + \int_M (u_m^{N-2} - u^{N-2}) vw dv_g$$

$$\leq (\int_M (v_m - v)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + (\int_M (u_m^{N-2} v^2) dv_g)^{\frac{1}{2}} (\int_M (w_m - w)^N dv_g)^{\frac{1}{N}} + \int_M (u_m^{N-2} - u^{N-2}) vw dv_g$$

Comme

$$\int_M u_m^{N-2} v^2 dv_g \leq (\int_M u_m^N dv_g)^{\frac{N-2}{N}} (\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}} < +\infty$$

et

$$\int_M (u_m^{N-2} - u^{N-2}) vw dv_g \to 0$$

car $u_m^{N-2} \to u^{N-2}$ faiblement dans $L^{\frac{N}{N-2}}(M)$ et $vw \in L^{\frac{N}{2}}(M)$ et de la convegence forte de v_m, w_m dans $H_1^2(M) \subset L^N(M)$, on a :

$$\int_M u^{N-2} vw dv_g = 0.$$

La métrique généralisée $u^{N-2}g$ minimise μ_2. ■

Théorème 3.13 *Si $\mu_2 < K^{-2}$, encore μ_2 est atteint par une métrique généralisée.*

Preuve: **Etape 1:** Soit $g_m = u_m^{N-2}g$ une suite de métriques telles que $u_m \in H_2^p(M)$, $u_m > 0$ minimisante de infimum de μ_2 i.e une suite telles que

$$\mu_2 = \lim_m \lambda_{2,m} (Vol(M, g_m))^{2/n}$$

On peut assumer que $Vol(M, g_m) = \int\limits_M u_m^N dv_g = 1$, notre suite $(u_m)_m$ est bornée dans $L^N(M)$ et donc il existe $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ tel que $u_m \to u$ faiblement dans $L^N(M)$. Proposition (4.3) prouve l'existence de deux suites $v_m, w_m \in C^1(M)$, $v_m > 0$ solutions respectivement de

$$L_g(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \quad \text{et} \quad L_g(w_m) = \lambda_{2,m} u_m^{N-2} w_m$$

vérifiant

$$\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = \int_M u_m^{N-2} w_m^2 dv_g = 1 \quad \text{et} \quad \int_M u_m^{N-2} v_m w_m dv_g = 0.$$

Les suites v_m ,w_m sont bornées dans $H_1^2(M)$, ils existent $v, w \in H_1^2(M)$, $v \geq 0$ telles que $v_m \to v$, $w_m \to w$ faiblement $H_1^2(M)$ et avec la convergence de u_m, on obtient au sens des distributions :

$$L_g(v) = \widehat{\mu_1} u^{N-2} v \quad \text{et} \quad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2} w$$

où $\widehat{\mu_1} = \lim_m \lambda_{1,m} \leq \ \mu_2$.

Etape 2 : Par l'inégalité de Hölder, lemme (4.4) et la convergence forte de v_m dans $L^2(M)$, on a

$$\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq \|v_m - v\|_N^2 \leq K^2 \|\nabla(v_m - v)\|_2^2 + o(1)$$

$$\leq K^2 \int_M |\nabla(v_m)|^2 + |\nabla v|^2 - 2\nabla v_m \nabla v dv_g + o(1)$$

$$\leq K^2 \int_M |\nabla(v_m)|^2 - |\nabla v|^2 \, dv_g + o(1)$$

$$\leq K^2 \int_M v_m L_g(v_m) - v L_g(v) dv_g + o(1)$$

$$\leq K^2 \mu_2 (1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1).$$

Avec le lemme (4.6), on a $\int_M |u_m|^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g = 1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g + o(1)$ donc

$$1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq K^2 \mu_2 (1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g) + o(1)$$

i.e

$$1 - K^2 \mu_2 \leq (1 - K^2 \mu_2) \int_M u^{N-2} v^2 dv_g$$

Si $1 - K^2 \mu_2 > 0$,

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \geq 1$$

aussi du lemme de Fatou, $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq \underline{\lim} \ \int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$. On trouve

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1.$$

D'où v et u sont non nulles et de l'inégalité $\int_M |\nabla(v_m - v)|^2 \, dv_g \leq o(1)$, on a $v_m \to v$ fortement $H_1^2(M) \subset L^N(M)$. La même chose pour la suite w_m d'où le résultat. ■

Lemme 3.7 *Soit* $u \in L^N(M)$ *avec* $\int\limits_M u^N dv_g = 1$. *Supposons que* z, w *deux fonctions positives de* $H_1^2(M)$, $z, w \geq 0$ *vérifiant*

$$\int_M wL_g(w)dv_g \leq \mu_2 \int_M u^{N-2}w^2 dv_g \tag{6}$$

et

$$\int_M zL_g(z)dv_g \leq \mu_2 \int_M u^{N-2}z^2 dv_g. \tag{7}$$

Supposons encore que $(M - z^{-1}(0)) \cap (M - w^{-1}(0))$ *est de mesure nulle, alors* u *est une combinaison linéaire de* z *et de* w *et on a égalité dans (6) et (7).*

Preuve: La preuve de ce résultat est la même donnée par Ammann et Humbert dans l'article $[AH06]$. ■

Théorème 3.14 *Si* μ_2 *est atteint par une métrique généralisée* $u^{N-2}g$, *alors l'équation*

$$L_g(w) = \mu_2 u^{N-2} w$$

possède une solution qui change de signe $w \in C^1(M)$. *De plus ils existent deux réels* $a, b > 0$ *telles que*

$$u = aw_+ + bw_-$$

où $w_+ = sup(w, 0)$ *et* $w_- = sup(-w, 0)$.

Preuve: **Etape 1** : En appliquant le lemme (4.7) pour $w_+ = sup(w, 0)$ et $w_- = sup(-w, 0)$, on obtient l'existence de $a, b > 0$ tels que $u = aw_+ + bw_-$, par le lemme

(4.1), $w_+, w_- \in L^\infty(M)$, c'est à dire $u \in L^\infty(M)$, $u^{N-2} \in L^\infty(M)$, alors

$$h = S_g - \mu_2 u^{N-2} \in L^p(M),$$

par le théorème (4.3) il découle que

$$w \in H_2^p(M) \subset C^1(M).$$

Etape 2 : On a toujours $\mu_2 > \widehat{\mu}_1$. En effet si l'y égalité notre v sera solution de $L_g v = \mu_2 u^{N-2} v$ et comme μ_2 est atteint par une métrique généralisée $v \in E$, ce qui est impossible.

Etape 3 : La fonction w change de signe.

Supposons que $w \geq 0$, le lemme (4.7) est applicable à la fonction $z = v$ et à la fonction w entraine l'égalité dans la deuxième inégalité (7) et comme v est solution de $L_g(v) = \widehat{\mu}_1 u^{N-2} v$, l'étape 2 implique que l'inégalité (7) est stricte ($\int_M v L_g(v) dv_g < \mu_2 \int_M u^{N-2} v^2 dv_g$) d'où la contradiction. ∎

Remarque 3.3 *Etape1 montre que* u *n'est pas continue contrairement au second invariant de Yamabe.*

Chapitre 4

Solutions nodales d'une équation non linéaire de type Paneitz-Branson avec exposant critique

4.1 Un rappel sur l'opérateur de Paneitz-Branson et les résultas obtenus

Soit (M, g) une variété d'Einstein compacte de dimension $n \geq 5$ de courbure scalaire S_g strictement négative, dans cette partie on va étudier les invariants conformes $\mu(M, g)$, $\mu_1(M, g)$ et particulièrement $\mu_2(M, g)$ puis le signe des solutions correspondantes (solutions des équations de type de Paneitz-Branson avec exposant critique). En sait que Paneitz [Pan83] a introduit un opérateur conformément invariant d'ordre 4 défini sur une variété riemannienne de dimension 4. Branson[Bra87] généralise la définition de l'opérateur sur des variétés de dimension $n \geq 5$. Etant donnée (M, g) une variété d'Einstein, l'opérateur géométrique de Paneitz-Branson P_g est réduit à

$$P_g u = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u$$

$$a_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} \quad , \; b_n = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}.$$

Dans la première partie, on a défini le $k^{ièm}$ Paneitz-Branson invariant par :

$$\mu_k(M, g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) \, [vol(M, \widetilde{g})]^{\frac{4}{n}} .$$

On a montré que si $S_g > 0$, $\mu(M, g)$ est atteint par une métrique conforme et toujours notre $\mu(M, g) > 0$, le premier invariant de Paneitz-Branson $\mu_1(M, g)$ est atteint par une métrique généralisée et de plus de la régularité cette métrique est conforme d'où on a son égalité avec $\mu(M, g)$ et pour le second invariant, il est aussi atteint par une métrique généralisée.

4.2 Rappel sur un travail intitulé : Seconde valeur propre de l'opérateur de Yamabe et application

En 2012 S.E. Sayed publie un article intitulé [ElSay12]: La deuxième valeur propre de l'opérateur de Yamabe et applications. Inspiré par les observations de Ammann et Humbert, elle exploite la deuxième valeur propre $\lambda_2(g)$ de l'opérateur de Yamabe pour l'existence des solutions nodales de l'équation de Yamabe dans un cadre générale, plus précisément lorsque l'invariant usuel de Yamabe μ est négatif ($\mu < 0$), en d'autres termes l'opérateur de Yamabe n'est plus nécessairement coercif et en utilisant un raisonnement par absurde, elle a obtenu des suites minimisantes qui convergent faiblement vers des solutions et finalement elle retrouve des solutions qui changent de signe de l'équation de Yamabe (solutions nodales).

Dans son article elle explique comment le signe de $\lambda_2(g)$ est relié à l'existense de solutions nodales, elle donne aussi d'autre propriétés, par exemple le signe des valeurs propres est un invariant conforme, une relation entre l'invariant conforme et la topologie de la variété, elle montre que la méthode utilisée par [AH06] se généralise au cas $\mu(M, g) <$

0 lorsque $\lambda_2(g) \geq 0$. Spécialement quand la deuxième valeur propre $\lambda_2(g) < 0$ et sans aucune autre condition, elle obtient des solutions nodales de l'équation de Yamabe avec une méthode complètement différente. L'auteur obtient plusieurs résultas dont on cite deux qui sont à la base de notre motivation.

Théorème 4.1 [*ElSay12*] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ où son invariant de Yamabe $\mu(M, g) < 0$, on note par λ_2 la deuxième valeur propre de L_g, alors si $\lambda_2 \leq 0$ ou si $\lambda_2 > 0$, (M, g) non localement conformément plate et $n \geq 6$, il existe une fonction w qui change de signe, solution de l'équation*

$$L_g w = \varepsilon |w|^{N-2} w,$$

où $\varepsilon = +1$ si $\lambda_2 > 0$, $\varepsilon = -1$ si $\lambda_2 < 0$ et $\varepsilon = 0$ si $\lambda_2 = 0$. De plus $w \in C^{3,\alpha}(M)$ pour tout $\alpha < N - 2$.

proposition 4.1 [*ElSay12*] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$, suppose que M non localement conformément plate et son invariant de Yamabe $\mu(M, g) < 0$, alors $\mu_2(M, g) < \mu(S_n)$.*

4.3 Première et deuxième valeurs propres d'une métrique généralisée

On rappelle dans tout ce qui suit que (M, g) est d'Einstein, compacte de dimension $n \geq 5$ et de courbure scalaire S_g strictement négative, $N = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique de l'injection de $H_2^2(M)$ dans $L^q(M)$, la grasmanniene $Gr_k^u(H_2^2(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k $(k \geq 1)$ de $H_2^2(M)$ tel que le sous espace $span(v_1, ..., v_k)$ $\in Gr_k^u(H_2^2(M))$ si est seulement si $v_1, ..., v_k$ sont linéairement indépendent sur $M \setminus u^{-1}(0)$, une métrique généralisée conforme à la métrique g est une métrique de la forme $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non identiquement nulle et pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$, on définit la $k^{ième}$-valeur propre $\lambda_k(\widetilde{g})$ de l'opérateur de Paneitz-Branson par :

$$\lambda_k(\widetilde{g}) = \inf_{V \in Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \backslash \{0\}} \frac{\int\limits_M vPgvdv_g}{\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g}$$

Contrairement à la première partie, lorsque S_g est négative, les valeurs propres peuvent être négatives,

i.e $\int\limits_M vPgvdv_g$ peut être négative et là on peut distinguer les cas suivant $\lambda_1(g) > 0$ et surtout le cas $\lambda_1(g) < 0$.

proposition 4.2 *Soit $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ une métrique généralisée conforme à la métrique g, on assume que $u > 0$, alors toute suite minimisante de $\lambda_1(\widetilde{g})$ est bornée dans $H_2^2(M)$ et $\lambda_1(\widetilde{g}) > -\infty$.*

Preuve: Soit (v_m) une suite minimisante de $\lambda_1(\widetilde{g})$, une suite telle que :

$$\lim_m \frac{\int\limits_M |\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2 dv_g}{\int\limits_M u^{N-2} v_m^2 dv_g} = \lim_m \lambda_{1,m} = \lambda_1(\widetilde{g}),$$

on peut toujours supposer que $\int\limits_M u^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$, puisque $S_g < 0$ notre opérateur n'est pas nécessairement coercif, alors on va supposer que v_m n'est pas bornée dans $H_2^2(M)$ et on considère la nouvelle suite :

$$v\prime_m = \frac{v_m}{\|v_m\|}$$

où$\|v_m\|$est la norme usuelle de $H_2^2(M)$, il est évident que $\|v\prime_m\| = 1$, la suite $(v\prime_m)$est bornée dans $H_2^2(M)$ et après passage à une sous suite notée encore $(v\prime_m)$, il existe $v\prime \in H_2^2(M)$ tels que :

(i) $\quad v\prime_m \to v\prime \quad$ faiblement dans $H_2^2(M)$.

(ii) $\quad v\prime_m \to v\prime \quad$ fortement dans $H_1^2(M)$ et dans $L^2(M)$.

Puisque $\|v_m\| \to +\infty$, il découle que $v\prime_m \to 0$ presque partout, de plus en écrivant

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M u^{N-2}(v\prime - v\prime_m)^2 dv_g, \\ 0 &\leq \int_M u^{N-2} v\prime^2 dv_g - 2\int_M u^{N-2} v\prime v\prime_m dv_g + \int_M u^{N-2} {v\prime_m}^2 dv_g \end{aligned}$$

et en remarquant que par convergence faible dans $H_2^2(M)$ on a : $\lim\limits_m \int_M u^{N-2} v\prime v\prime_m dv_g =$ $\int_M u^{N-2} v\prime^2 dv_g$ on obtient que :

$$\int_M u^{N-2} v\prime^2 dv_g \leq \lim_m \int_M u^{N-2} v\prime_m^2 dv_g = \lim_m \frac{\int_M u^{N-2} v_m^2 dv_g}{\|v_m\|^2} \to 0,$$

il suit que

$$\int_M u^{N-2} v\prime^2 dv_g = 0$$

et comme $u > 0$,

$$v\prime = 0.$$

Le fait que $\|v\prime_m\| = 1$ i.e $\int_M |\Delta v\prime_m|^2 + |\nabla v\prime_m|^2 + v\prime_m^2 dv_g = 1$ et par le point (ii), on a $\int_M |\nabla v\prime_m|^2 + v\prime_m^2 dv_g \to 0$ et on déduit que $\int_M |\Delta v\prime_m|^2 dv_g \to 1$, d'autre part $v\prime_m$ vérifie l'équation

$$\int_M |\Delta v\prime_m|^2 + a_n S_g |\nabla v\prime_m|^2 + b_n S_g^2 v\prime_m^2 dv_g = \lambda_{1,m} \int_M u^{N-2} v\prime_m^2 dv_g$$

alors pour m assez grand, on obtient la contradiction suivante :

$$\underbrace{\int_M |\Delta v\prime_m|^2 dv_g}_{\hookrightarrow 1} \quad + \quad \underbrace{\int_M a_n S_g |\nabla v\prime_m|^2 + b_n S_g^2 v\prime_m^2 dv_g}_{\hookrightarrow 0} \quad = \quad \underbrace{\lambda_{1,m} \int_M u^{N-2} v\prime_m^2 dv_g}_{\hookrightarrow 0}$$

Cela signifie que (v_m) est bornée dans $H_2^2(M)$ et implique que $\lambda_{1,m} \geq C$. i.e

$$\lambda_{1,\tilde{g}} > -\infty.$$

En effet puisque S_g est négative, on a

$$a_n S_g \|v_m\|_{H_2^2}^2 \leq \int_M |\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2 dv_g.$$

et comme la suite est normalisée par $\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$,

$$\lambda_{1,m} = \frac{\int_M |\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2 dv_g}{\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g} = \int_M |\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2 dv_g$$

il découle que

$$\lambda_{1,m} \geq a_n S_g \|v_m\|_{H_2^2}^2 > -\infty.$$

■

proposition 4.3 *Supposons que* $\lambda_1(g) < 0$*, alors il existe* $u \in L^N(M)$*,* $u \neq 0$ *et* $u \geq 0$ *vérifiant*

$$\lambda_1(\widetilde{g}) = -\infty \quad où \quad \tilde{g} = u^{N-2} g.$$

Preuve: Soit v la fonction propre associée à $\lambda_1(g)$, si $\lambda_1(g) < 0$, alors $\int\limits_M vP_g v dv_g = \lambda_1(g)\int\limits_M v^2 dv_g < 0$. Soit p un point de M, pour $\varepsilon > 0$, on définit ϕ_ε une fonction de classe C^∞ tels que $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$ et

$$\begin{array}{ccc} \phi_\varepsilon = 0 & \text{sur} & B_\varepsilon(p) \\ \phi_\varepsilon = 1 & \text{sur} & M\backslash B_{2\varepsilon}(p) \\ |\nabla\phi_\varepsilon| \leq \frac{c}{\varepsilon} & \text{et} & |\Delta\phi_\varepsilon| \quad \leq \frac{c}{\varepsilon^2} \end{array}$$

où $B_\delta(p)$ est la boule de centre p et de rayon δ (voir[HR01] pour cette fonction), alors on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_M (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{B_\varepsilon(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g + \int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g + \int\limits_{M\backslash B_{2\varepsilon}(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g\right] \\
= &\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_\varepsilon(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{M\backslash B_{2\varepsilon}(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g \\
= &\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g}_{=0} + \int\limits_M vP_g v dv_g < 0 = \int\limits_M vP_g v dv_g < 0.
\end{aligned}$$

En effet $\int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} (\phi_\varepsilon v)P_g(\phi_\varepsilon v)dv_g = \int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} |\Delta(\phi_\varepsilon v)|^2 + a_n S_g |\nabla(\phi_\varepsilon v)|^2 + b_n S_g^2(\phi_\varepsilon v)^2 dv_g$
et comme
$\int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} |\nabla(\phi_\varepsilon v)|^2 dv_g = \int\limits_{B_{2\varepsilon}(P)\backslash B_\varepsilon(P)} [v^2 |\nabla\phi_\varepsilon|^2 + \phi_\varepsilon^2 |\nabla v|^2 + 2v\phi_\varepsilon(\nabla\phi_\varepsilon, \nabla v)]dv_g$, on déduit après passage en coordonnées polaires que :

$$\int_{B_{2\varepsilon}(P)\setminus B_\varepsilon(P)} v^2 \left|\nabla\phi_\varepsilon\right|^2 dv_g \;\leq\; \|v\|_\infty^2 \tfrac{c^2}{\varepsilon^2} \int_{B_{2\varepsilon}(P)\setminus B_\varepsilon(P)} dv_g \;\leq\; \tfrac{C}{\varepsilon^2}\int_\varepsilon^{2\varepsilon} r^{n-1}dr \;=\; \tfrac{C}{\varepsilon^2}\left[\tfrac{r^n}{n}\right]_\varepsilon^{2\varepsilon} \;\to\; 0.$$

quand $\varepsilon \to 0$.

et de la même manière il facile de voir que les autres intégrales seront nulles.

Si on pose $w = \phi_\varepsilon v$ et pour un petit ε, on a $\int_M wP_g w dv_g < 0$.

Soit $u \geq 0$, $u \neq 0$ de classe C^∞ avec support dans $B_\varepsilon(p)$, de la définition de $\lambda_1(\widetilde{g})$

$$\lambda_1(\widetilde{g}) = \inf_v \frac{\int_M vP_g v dv_g}{\int_M u^{N-2}v^2 dv_g}$$

en particulier, pour un réel $\alpha > 0$ et pour $v = w + \alpha$, on obtient

$$\lambda_1(\widetilde{g}) \leq \lim_{\alpha\to 0} \frac{\int_M (w+\alpha)P_g(w+\alpha)dv_g}{\int_M u^{N-2}(w+\alpha)^2 dv_g} = -\infty$$

car :

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M (w+\alpha)P_g(w+\alpha)dv_g = \int_M wP_g w dv_g < 0$$

et comme les fonctions u et w par constructions ont des supports disjoints, on a

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M u^{N-2}(w+\alpha)^2 dv_g = 0.$$

■

proposition 4.4 *Pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ conforme à g, supposons que $u > 0$. Ils existent deux fonctions $v, w \in H_2^2(M)$ solutions au sens faible des équa-*

tions $P_g v = \lambda_1(\widetilde{g})|u|^{N-2}v$ *et* $P_g w = \lambda_2(\widetilde{g})|u|^{N-2}w$ *vérifiant* $\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$, $\int\limits_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1$ *et* $\int\limits_M u^{N-2}vw dv_g = 0$.

Remarque : En particulier lorsque $\widetilde{g}$ est conforme, on a $u > 0$.

Preuve: Soit (v_m) une suite minimisante de $\lambda_1(\widetilde{g})$ i.e une suite $v_m \in H_2^2(M)$ telle que

$$\lim_m \frac{\int_M v_m L_g(v_m) dv_g}{(\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g)} = \lambda_1(\widetilde{g})$$

En normalisant v_m par $\int_M |u|^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$ et d'après la proposition (5.2), v_m est bornée dans $H_2^2(M)$ et comme dans la première partie, après passage à une sous suite, il exite un v dans $H_2^2(M)$, tels que $v_m \to v$ faiblement dans $H_2^2(M)$, fortement dans $H_1^2(M)$, fortement dans $L^2(M)$ et presque partout sur M, on en déduit que v satisfait au sens des distributions l'équation $L_g(v) = \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2}v$ et vérifie $\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$, d'où v est un minimiseur non trivial dans $H_2^2(M)$ de $\lambda_1(\widetilde{g})$. On construit

$$\lambda_2'(\widetilde{g}) = \inf \frac{\int_M w P_g(w) dv_g}{(\int_M |u|^{N-2} w^2 dv_g)}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble $E = \{w \in H_2^2(M), u^{\frac{N-2}{2}} w \neq 0$, $\int\limits_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int\limits_M u^{N-2} wv dv_g = 0\}$. Soit (w_m) une suite minimisante de $\lambda_2'(\widetilde{g})$, avec la même méthode (voir la partie 1), on trouve une solution faible w non trivial dans $H_2^2(M)$ de l'équation $L_g(v) = \lambda_2'(\widetilde{g})u^{N-2}v$ vérifiant $\int\limits_M u^{N-2}w^2 = 1$ et $\int\limits_M u^{N-2}vw dv_g = 0$ et de plus $\lambda_2'(\widetilde{g}) = \lambda_2(\widetilde{g})$

■

Remarque 4.1 *Si* $u \in C^\infty(M)$, *alors* $v, w \in C^\infty(M)$.

proposition 4.5 *lorsque g est dans la classe conforme et si $\lambda_1(\widetilde{g}) \leq 0$, alors v est une solution qui change de signe et si $\lambda_1(\widetilde{g}) > 0$ aucune conclusion sur le signe de v.*

Preuve: v vérifie $L_g(v) = \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2}v$ i.e

$$\Delta_g^2 v + a_n S_g \Delta_g v + b_n S_g^2 v = \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2}v.$$

En intégrant sur M on obtient :

$$\int_M \Delta_g^2 v + a_n S_g \Delta_g v + b_n S_g^2 v dv_g = \int_M \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2} v dv_g$$

et puisque $v \in C^\infty(M)$

$$\int_M \Delta_g(\Delta_g v) dv_g + a_n S_g \int_M \Delta_g v dv_g + b_n S_g^2 \int_M v dv_g = \int_M \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2} v dv_g$$

on a

$$\underbrace{\int_M \Delta_g(\Delta_g v) dv_g}_{=0} + \underbrace{a_n S_g \int_M \Delta_g v dv_g}_{=0} + b_n S_g^2 \int_M v dv_g = \int_M \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2} v dv_g$$

1) si $\lambda_1(\widetilde{g}) < 0$, on suppose que $v \geq 0$, alors

$$\underbrace{b_n S_g^2 \int_M v dv_g}_{\geq 0} = \underbrace{\int_M \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2} v dv_g}_{\leq 0}$$

et puisque $v \neq 0$, on a une contradiction, si on suppose que $v \leq 0$, alors

$$\underbrace{b_n S_g^2 \int_M v dv_g}_{\leq 0} = \underbrace{\int_M \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2} v dv_g}_{\geq 0}$$

et on a contradiction.

2) si $\lambda_1(\widetilde{g}) = 0$, on suppose que $v \geq 0$ où $v \leq 0$,

$$\underbrace{b_n S_g^2 \int_M v dv_g}_{\neq 0} = \underbrace{\int_M \lambda_1(\widetilde{g}) u^{N-2} v dv_g}_{=0}$$

Puisque $v \neq 0$ contraduction, d'où nécessairement v change de signe. ■

4.4 L'invariant de Paneitz -Branson

On sait que l'invariant usuel de Paneitz-Branson $\mu(M,g)$ est donné par

$$\mu(M,g) = \inf_{V \in H_2^2(M))} I(v) \quad \text{où} \quad I(v) = \frac{\int_M |\Delta u|^2 dv_g - \int_M (-a_n S_g) \nabla^i u \nabla_i u \; dv_g + \int_M b_n S_g^2 u^2 dv_g}{(\int_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}}}$$

L'équation d'Euler correspondante est alors :

$$\Delta_g^2 u + \nabla^i \left[-a_n S_g \nabla_i u \right] + b_n S_g^2 u = \mu(M,g) \left| u \right|^{N-1}$$

Remarque 4.2 : $-a_n S_g = a$ *et* $b_n S_g^2 = h$ *où* a , h *sont décrient dans l'article [Car01]*

proposition 4.6 *Lorsque* (M,g) *est non conformément plate et* $n \geq 9$, *on a toujours* $\mu(M,g) < K_2^{-2}$ *et que* $\mu(M,g)$ *est atteint par une fonction de classe* $C^{4,\alpha}(M)$ *vérifiant* $\int_M u^N dv_g = 1$ *où*

$$K_2^{-2} = \frac{n(n^2-4)(n-4)\omega_n^{\frac{4}{n}}}{16}.$$

Preuve: Par définition de μ, on a toujours

$$\mu(M,g) = \inf_{V \in H_2^2(M))} I(v) \leq I(1).$$

1) Si $\mu(M,g) = I(1)$ implique que $u = 1$ est une solution, d'où $\mu(M,g)$ est atteint par une $C^{\infty}(M)$ positive fonction vérifiant $\int\limits_M u^N dv_g = 1$ et que

$$\mu(M,g) = b_n S_g^2 \left[vol(M,g)^{\frac{4}{n}} \right] > 0.$$

2) Sinon $\mu(M,g) < K_2^{-2}$ (voir la partie 1, la proposition (3.7)), à partir de $n \geq 9$ l'équation $\Delta_g^2 u + \nabla^i \left[-a_n S_g \nabla_i u \right] + b_n S_g^2 u = \mu(M,g) \left| u \right|^{N-1}$ possède toujours une solution de classe $C^{4,\alpha}$ vérifiant $\int\limits_M u^N dv_g = 1$ et en particulier u n'est pas nécessairement positive.

3) Si $\mu(M,g) \leq 0 < K_2^{-2}$ et à partir de $n \geq 5$, l'équation a toujours une solution de classe $C^{4,\alpha}$.

4) Soit $\delta = a^2 - 4h$ le dicriminant de $x^2 + ax + h = 0$, $\delta = (-a_n S_g)^2 - 4\ b_n S_g^2 = 4[\frac{S_g}{n(n-1)}]^2 > 0$, la première racine $x_1 < 0$ et il n'est plus possible de chercher une solution positive comme dans la première partie.

5) On a toujours $\mu(M,g) > -\infty$ et qu'il est atteint par une fonction de classe $C^{4,\alpha}$ vérifiant $\int\limits_M u^N dv_g = 1$ contrairment à ce qu'on va voir avec $\mu_1(M,g)$. ■

4.5 Le premier et le second invariant de Paneitz - Branson

proposition 4.7 *Supposons que* $\lambda_1(g) < 0$, *alors* $\mu_1(M,g) \to -\infty$

Preuve: Par définition on a

$$\mu_1(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_1(\widetilde{g}) \left[vol(M,\widetilde{g}) \right]^{\frac{4}{n}}$$

$$= \inf_{u \in L_+^N(M) \text{ et } Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_M v P_g v dv_g}{\int_M u^{N-2} v^2 dv_g}$$

En particulier pour le choix de $v = w + \alpha$ et u comme dans la proposition (5.3), on a

$$\mu_1(M,g) \leq \frac{\int_M (w+\alpha) P_g (w+\alpha) dv_g}{\int_M u^{N-2} (w+\alpha)^2 dv_g} \leq \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M (w+\alpha) P_g (w+\alpha) dv_g}{\int_M u^{N-2} (w+\alpha)^2 dv_g} = -\infty.$$

d'où la nécessité de prendre $\lambda_1(g) > 0$ pour l'étude $\mu_1(M,g)$. ■

Théorème 4.2 *Si $\lambda_1(g) > 0$, alors $\mu_1(M,g) \geq 0$ et ils existent deux fonctions non nulles $u \in L_+^N(M)$, $v \in H_2^2(M)$ vérifiant l'équation $L_g v = \mu_1(M,g) |u|^{N-2} v$ au sens faible et telle que $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$. Autrement dit $\mu_1(M,g)$ est atteint par une métrique généralisée.*

Preuve: On a

$$\mu_1(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_1(\widetilde{g}) \left[vol(M, \widetilde{g}) \right]^{\frac{4}{n}} .$$

Si $\lambda_1(g) = \inf \frac{\int_M v P_g v dv_g}{\int_M v^2 dv_g} > 0$, on déduit que pour tout $v \in H_2^2(M)$, $\int_M v P_g v dv_g > 0$, alors pour toute métrique généralisée $\widetilde{g}$, $\lambda_1(\widetilde{g}) > 0$ i.e $\lambda_1(\widetilde{g}) \left[vol(M, \widetilde{g}) \right]^{\frac{4}{n}} > 0$ donc $\mu_1(M,g) \geq 0$. Soit $(u_m^{\frac{N-2}{2}} g)_m$ une suite de métriques conformes ($u_m \in C^\infty(M)$, $u_m > 0$) qui minimise $\mu_1(M,g)$,

$$\mu_1(M,g) = \lim_m \lambda_1(\widetilde{g}_m) \left[\int_M u_m^N dv_g \right]^{\frac{4}{n}} .$$

On peut supposer que $\int\limits_M u_m^N dv_g = 1$ i.e $\mu_1(M,g) = \lim\limits_m \lambda_1(\widetilde{g}_m)$.

De la proposition (5.4) on a pour chaque $(u_m)_m$ une fonction $v_m \in C^\infty(M)$ vérifiant $L_g v_m = \lambda_1(\widetilde{g}_m)|u_m|^{N-2}v_m$ avec la contrainte $\int\limits_M u_m^{N-2}v_m^2 dv_g = 1$. Puisque $\int\limits_M u_m^N dv_g = 1$, $(u_m)_m$ est bornée $L^N(M)$ et par réflexivité, il existe $u \in L^N(M)$ telle que u_m converge faiblement vers u dans $L^N(M)$. Supposons que $\|v_m\| \to +\infty$, soit

$$v\prime_m = \frac{v_m}{\|v_m\|}$$

il suit que $\|v\prime_m\| = 1$, $(v\prime_m)$ est bornée dans $H_2^2(M)$ et après passage à une sous suite encore notée $(v\prime_m)$, il existe $v\prime \in H_2^2(M)$ tel que (i) $v\prime_m \to v\prime$ faiblement dans $H_2^2(M)$, (ii) $v\prime_m \to v\prime$ fortement dans $H_1^2(M)$ et dans $L^2(M)$.

On a :

$$\Delta_g^2 v_m + a_n S_g \Delta v_m + b_n S_g^2 v_m = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\,|u_m|^{N-1} v_m,$$

en multipliant l'équation par $\Phi \in C^\infty(M)$,

$$\Phi\Delta_g^2 v_m + a_n S_g \Phi\Delta v_m + b_n S_g^2 \Phi v_m = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\,|u_m|^{N-1} \Phi v_m,$$

puis par intégration,

$$\int\limits_M \Phi\Delta_g^2 v_m + a_n S_g \Phi\Delta v_m + b_n S_g^2 \Phi v_m dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\int\limits_M |u_m|^{N-1} \Phi v_m dv_g$$

encore par $\frac{1}{\|v_m\|}$,

$$\frac{1}{\|v_m\|}\int\limits_M \Phi\Delta_g^2 v_m + a_n S_g \Phi\Delta v_m + b_n S_g^2 \Phi v_m dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\frac{1}{\|v_m\|}\int\limits_M |u_m|^{N-1} \Phi v_m dv_g$$

i.e

$$\frac{1}{\|v_m\|}\int\limits_M \Delta v_m \Delta\Phi + a_n S_g(\nabla v_m, \nabla\Phi) + b_n S_g^2 v_m \Phi dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\int\limits_M u_m^{N-2} v_m \Phi dv_g,$$

$$\int\limits_M \frac{1}{\|v_m\|}\Delta v_m \Delta\Phi + a_n S_g(\frac{1}{\|v_m\|}\nabla v_m, \nabla\Phi) + b_n S_g^2 \frac{1}{\|v_m\|} v_m \Phi dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\int\limits_M u_m^{N-2}\frac{1}{\|v_m\|} v_m \Phi dv_g.$$

d'où $v\prime_m$ vérifie l'équation suivante :

$$\int\limits_M \Delta v\prime_m \Delta\Phi + a_n S_g(\nabla v\prime_m, \nabla\Phi) + b_n S_g^2 v\prime_m \Phi dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m)\int\limits_M u_m^{N-2} v\prime_m \Phi dv_g.$$

pour le second membre, on a

$$\int\limits_M u_m^{N-2} v\prime_m \Phi dv_g \leq \|\Phi\|_\infty \int\limits_M (u_m^{\frac{N-2}{2}} v\prime_m)(u_m^{\frac{N-2}{2}}) dv_g$$

Appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int\limits_M u_m^{N-2} v\prime_m \Phi dv_g &\leq \|\Phi\|_\infty (\int\limits_M u_m^{N-2} v\prime_m^2 dv_g)^{\frac{1}{2}} (\int\limits_M u_m^{N-2} dv_g)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\Phi\|_\infty (\int\limits_M u_m^{N-2}\left[\frac{v_m}{\|v_m\|}\right]^2 dv_g)^{\frac{1}{2}} (\int\limits_M u_m^{N-2} dv_g)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|\Phi\|_\infty (\int\limits_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g)^{\frac{1}{2}}}{\|v_m\|} (\int\limits_M u_m^{N-2} dv_g)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|\Phi\|_\infty (\int\limits_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g)^{\frac{1}{2}}}{\|v_m\|} (\left[\int\limits_M u_m^{N-2\frac{N}{N-2}} dv_g\right]^{\frac{N-2}{N}\frac{1}{2}} \left[\int\limits_M dv_g\right]^{\frac{2}{N}\frac{1}{2}} \leq \frac{\|\Phi\|_\infty}{\|v_m\|}\left[vol(M,g)\right]^{\frac{1}{N}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_M \Phi P_g(v\prime)dv_g = \lim_m \int_M \Phi P_g(v_m\prime)dv_g = \lim_m \int_M \Delta v\prime_m \Delta\Phi + a_n S_g \nabla v\prime_m \nabla\Phi + b_n S_g^2 v\prime_m \Phi dv_g = 0$$

d'où $P_g v' = 0$ et comme la première valeur propre (hypothèse) $\lambda_1(g) > 0$, on a $v' = 0$. D'autre part, on a

$\Delta_g^2 v_m + a_n S_g \Delta v_m + b_n S_g^2 v_m = \mu(M,g) |u_m|^{N-1} v_m$, après muliplication par v_m puis par intégration on a :

$$\int_M |\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2 dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m) \int_M u^{N-2} v_m^2 dv_g,$$

$$\tfrac{1}{\|v_m\|^2}[\int_M |\Delta v_m|^2 + a_n S_g |\nabla v_m|^2 + b_n S_g^2 v_m^2 dv_g] = \lambda_1(\widetilde{g}_m) \tfrac{1}{\|v_m\|^2} \int_M u^{N-2} v_m^2 dv_g \text{ i.e}$$

$$\int_M |\Delta v\prime_m|^2 + a_n S_g |\nabla v\prime_m|^2 + b_n S_g^2 v\prime_m^2 dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}_m) \int_M u^{N-2} v\prime_m^2 dv_g$$

$$= \lambda_1(\widetilde{g}_m) \int_M u_m^{N-2} \left[\frac{v_m}{\|v_m\|}\right]^2 dv_g = \frac{\lambda_1(\widetilde{g}_m)}{\|v_m\|^2} \underset{m}{\to} 0.$$

Il suit que $\int_M |\Delta v\prime_m|^2 + a_n S_g |\nabla v\prime_m|^2 + b_n S_g^2 v\prime_m^2 dv_g \to 0$ et comme $v' = 0$ et du point (ii) on auras

$$\int_M b_n S_g^2 v\prime_m^2 dv_g \to 0 \quad \text{et} \quad \int_M a_n S_g |\nabla v\prime_m|^2 \to 0,$$

alors on a nécessairement :

$$\int_M |\Delta v\prime_m|^2 dv_g \to 0$$

et finalement on aboutit à la contradiction suivante :

$$\|v'_m\|^2 = 1 = \int_M |\Delta v\prime_m|^2 + |\nabla v\prime_m|^2 + v\prime_m^2 dv_g \to 0.$$

On conclut que notre suite v_m est bornée dans $H_2^2(M)$, il existe $v \in H_2^2(M)$ tel que : $v_m \rightharpoonup v$ faiblement dans $H_2^2(M)$ et $v_m \to v$ fortement dans $H_1^2(M)$, il suit qu'au sens des distributions v satisfait l'équation

$$P_g v = \mu_1(M,g)|u|^{N-2}v.$$

A présent on va montrer que u et v sont non identiquements nulles.

Aprés l'application de l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme (3.1), on a

$$\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq \left[\int_M u_m^N dv_g\right]^{\frac{N-2}{N}} \left[\int_M (v_m - v)^N dv_g\right]^{\frac{2}{N}}.$$

$$\leq (K_2^2 + \varepsilon)\left[\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g + b(\varepsilon)\int_M (v_m - v)^2 dv_g\right]$$

de la convergence forte de v_m dans $H_1^2(M)$ i.e $\int_M (v_m^2 - v^2) dv_g = o(1)$ et $\int_M (|\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2) dv_g = o(1)$, il suit que

$$\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g \leq (K_2^2 + \varepsilon)\left[\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g + \underbrace{b(\varepsilon)\int_M (v_m - v)^2 dv_g}_{\to 0(1)}\right]$$

donc on a

$$\leq (K_2^2 + \varepsilon)\left[\int_M |\Delta(v_m - v)|^2 dv_g + \underbrace{b_n S_g^2 \int_M (v_m - v)^2 dv_g}_{\to 0(1)} + \underbrace{a_n S_g \int_M (|\nabla v_m|^2 - |\nabla v|^2) dv_g}_{\to 0(1)}\right]$$

encore

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\left[\int\limits_M (v_m P_g v_m - v P_g v)dv_g\right] + o(1)$$

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g)\int\limits_M (u_m^{N-2}{v_m}^2 - u^{N-2}v^2)dv_g + o(1)$$

$$\leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g)(1-\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1)$$

et puisque $\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1 - \int\limits_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g + o(1)$ voir la partie 1, on trouve

$$1-\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g)(1-\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1)$$

$$1-\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g \leq (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g) - (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g)\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1)$$

$$1-(K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g) \leq \int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g - (K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g)\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g) + o(1)$$

$$1-(K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g) \leq (\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g)\left[(1-(K_2^2+\varepsilon)\mu_1(M,g)\right] + o(1).$$

Maintenant comme $\mu_1(M,g) \leq \mu(M,g) < K_2^{-2}$, on retrouve

$$\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g \geq 1$$

et avec le lemme de Fatou, on a l'inverse d'où :

$$\int\limits_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1.$$

Les fonctions u et v sont non identiquements nulles et $\mu_1(M,g)$ est atteint par une métrique généralisée. ■

4.6 Une estimation de $\mu_2(M,g)$

Théorème 4.3 *Lorsque* (M,g) *est non conformément plate,* $n \geq 9$ *et* $\mu(M,g) < 0$*, alors* $\mu_2(M,g) < K_2^{-2}$.

Preuve: Soit $\varphi_\varepsilon = [\eta(r^2+\varepsilon^2]^{-\frac{n-4}{2}}$ une fonction test appartenant à $H_2^2(M)$ et soit $v_\varepsilon = C_\varepsilon \varphi_\varepsilon$ où $C_\varepsilon = c\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}$ est une constante telle que $\int\limits_M v_\varepsilon^N dv_g = 1$, on a $I(v_\varepsilon) = K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)$ (voir la partie (1) i.e à partir de $n \geq 9$) et soit v une solution de classe $C^{4,\alpha}$de l'équation $P_g v = \mu(M,g)v^{N-1}$ vérifiant $\int\limits_M v^N dv_g = 1$.

On sait que

$$\mu_2(M,g) = \inf_{u \in L_+^N(M) \text{ et } V \in Gr_2^u(H_2^2(M))} \sup_{f \in V \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_M f P_g f dv_g}{\int\limits_M u^{N-2} f^2 dv_g} \left[\int\limits_M u^N dv_g \right]^{\frac{4}{n}}.$$

En particulier pour $f = \lambda v + \mu v_\varepsilon$ et $u = v_\varepsilon$, on a :

$$\mu_2(M,g) \leq \sup_{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(o,o)\}} \frac{\int\limits_M (\lambda v + \mu v_\varepsilon) P_g (\lambda v + \mu v_\varepsilon) dv_g}{\int\limits_M v_\varepsilon^{N-2} (\lambda v + \mu v_\varepsilon)^2 dv_g}$$

Soient $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ des réels vérifiant $\lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 = 1$, on pose

$$F(v_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v + \mu_\varepsilon v_\varepsilon) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2-\{(o,o)\}} \frac{\int\limits_M (\lambda v + \mu v_\varepsilon) P_g(\lambda v + \mu v_\varepsilon) dv_g}{\int\limits_M v_\varepsilon^{N-2}(\lambda v + \mu v_\varepsilon)^2 dv_g},$$

on a

$$F(v_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v + \mu_\varepsilon v_\varepsilon) = \frac{\lambda_\varepsilon^2 \mu(M,g) + \mu_\varepsilon^2 I(v_\varepsilon) + 2\lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon \mu(M,g) \int\limits_M v^{N-1} v_\varepsilon dv_g}{\lambda_\varepsilon^2 \int\limits_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 dv_g + \mu_\varepsilon^2 + 2\lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon \int\limits_M v_\varepsilon^{N-1} v dv_g} = \frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon},$$

alors comme $\mu(M,g) < 0$, $\int\limits_M v^{N-1} v_\varepsilon dv_g \to 0$, $\int\limits_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 dv_g \to 0$ et $\int\limits_M v_\varepsilon^{N-1} v dv_g \to 0$

1) Si $\lambda_\varepsilon \to \lambda \neq 0$, $\mu_\varepsilon \to \mu \neq 0$, d'où

$$F(v_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v + \mu_\varepsilon v_\varepsilon) \to \frac{\lambda^2 \mu(M,g) + \mu^2 K_2^{-2}}{\mu^2} = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\mu(M,g) + K_2^{-2} < K_2^{-2}.$$

2) Si $\mu_\varepsilon \to 0$, $\lambda_\varepsilon^2 \to 1$, alors

$$A_\varepsilon \sim \mu(M,g) < 0 \quad \text{et} \quad B_\varepsilon \geq 0$$

et cela conduit aussi à ce que,

$$F(v_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v + \mu_\varepsilon v_\varepsilon) = \frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon} \leq 0 < K_2^{-2}$$

3) Supposons que $\lambda_\varepsilon \to 0$ et $\mu_\varepsilon \to \pm 1$, on peut toujours trouver une constante $c > 0$ telle que

$$\lambda_\varepsilon \leq c\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}$$

donc $\lambda_\varepsilon = 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})$

$$\lambda_\varepsilon^2 = 0(\varepsilon^{n-4}) \quad \text{et} \quad \mu_\varepsilon^2 = 1 - 0(\varepsilon^{n-4}).$$

Sans perdre de généralité, on prend $\lambda_\varepsilon^2 = 0(\varepsilon^{n-4}) = \varepsilon^{n-3}$ et $\mu_\varepsilon^2 = 1 - .\varepsilon^{n-3}$. Comme φ_ε se trouve dans $L^N(M)$, les intégrales $\int_M \varphi_\varepsilon dv_g$, $\int_M \varphi_\varepsilon^{N-2} dv_g$ et $\int_M \varphi_\varepsilon^{N-1} dv_g$ sont finies et puisque $v \in C^{4,\alpha}$, on peut toujours trouver des constantes telles que :

$$\begin{aligned}
\int_M v^{N-1} v_\varepsilon dv_g &\leq \|v\|_\infty^{N-1} \int_M v_\varepsilon dv_g \leq c_0.C_\varepsilon \int_M \varphi_\varepsilon dv_g \leq c_1.C_\varepsilon = c_1 \varepsilon^{\frac{n-4}{2}} = 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}) \\
\int_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 dv_g &\leq \|v\|_\infty^2 \int_M v_\varepsilon^{N-2} dv_g \leq c_2.C_\varepsilon^{N-2} \int_M \varphi_\varepsilon^{N-2} dv_g \leq c_3.C_\varepsilon^{N-2} = c_3 \varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{8}{n-4}} = 0(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

et

$$\int_M v_\varepsilon^{N-1} v dv_g \leq \|v\|_\infty \int_M v_\varepsilon^{N-1} dv_g \leq c_4.C_\varepsilon^{N-1} \int_M \varphi_\varepsilon^{N-1} dv_g \leq c_5.C_\varepsilon^{N-1} = c_5.\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}} = 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}}).$$

Evaluons $\frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \lambda_\varepsilon^2 \mu(M,g) + \mu_\varepsilon^2 I(v_\varepsilon) + 2\lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon \mu(M,g) \int_M v^{N-1} v_\varepsilon dv_g \\
&= \varepsilon^{n-3}\ \mu(M,g) + (1 - .\varepsilon^{n-3})(K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)) + 2\left[0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}})\right] \sqrt{\varepsilon^{n-3}} \sqrt{(1 - .\varepsilon^{n-3})} \mu(M,g)
\end{aligned}$$

$$B_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^2 \int_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 dv_g + \mu_\varepsilon^2 + 2\lambda_\varepsilon \mu_\varepsilon \int_M v_\varepsilon^{N-1} v dv_g$$

$$= \varepsilon^{n-3} 0(\varepsilon^4) + (1 - .\varepsilon^{n-3}) + 2\left[0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})\right] \sqrt{\varepsilon^{n-3}} \sqrt{(1 - .\varepsilon^{n-3})}.$$

D'où :

$$\frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{n-3}\ \mu(M,g) + (1 - .\varepsilon^{n-3})(K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)) + 2\left[0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}})\right] \sqrt{\varepsilon^{n-3}} \sqrt{(1 - .\varepsilon^{n-3})} \mu(M,g)}{\varepsilon^{n-3} 0(\varepsilon^4) + (1 - .\varepsilon^{n-3}) + 2\left[0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})\right] \sqrt{\varepsilon^{n-3}} \sqrt{(1 - .\varepsilon^{n-3})}}.$$

Pour $n \geq 9$, il découle que lorsque $\varepsilon \to 0$, pour A_ε on a : $\quad \varepsilon^{n-3} \to 0$, $\sqrt{(1-.\varepsilon^{n-3})} \to 1$, $\quad (1-.\varepsilon^{n-3}) \to 1$ et

$0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}})\sqrt{\varepsilon^{n-3}}\sqrt{(1-.\varepsilon^{n-3})} = 0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}\frac{n+2}{n-2}})\sqrt{\varepsilon^{n-3}} \geq 0(\varepsilon^{\frac{5}{2}\frac{11}{9}})\varepsilon^3 \geq 0(\varepsilon^4)$.

Et pour B_ε, on a : $\varepsilon^{n-3}0(\varepsilon^4) \geq 0(\varepsilon^4)$ et $\left[0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})\right]\sqrt{\varepsilon^{n-3}}\sqrt{(1-.\varepsilon^{n-3})} = \left[0(\varepsilon^{\frac{n-4}{2}})\right]\sqrt{\varepsilon^{n-3}} \geq 0(\varepsilon^{\frac{5}{2}})\varepsilon^3 \geq 0(\varepsilon^4)$ et comme $c > 0$,

$$\frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon} = \frac{K_2^{-2} - c\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)}{1 + o(\varepsilon^4)} < K_2^{-2}.$$

On distingue deux cas intéressant : soit $\lambda_1(g) > 0$, soit $\lambda_1(g) < 0$ et $\lambda_2(g) > 0$ pour l'existence de $\mu_2(M,g)$. ■

Théorème 4.4 *Si $\mu_2(M,g) < K_2^{-2}$, alors $\mu_2(M,g)$ est atteint par une métrique généralisée, autrement dit ils existent deux fonctions non triviales $u \in L_+^N(M)$, $w \in H_2^2(M)$ solution de l'équation $P_g v = \mu_2(M,g)u^{N-2}w$*

Preuve: On a

$$\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_2(\widetilde{g})\left[vol(M,\widetilde{g})\right]^{\frac{4}{n}}.$$

Soit $(u_m)_m$ une suite minimisante de $\mu_2(M,g)$, u_m est positive et de classe C^∞ i.e

$$\mu_2(M,g) = \lim_{m\to+\infty} \lambda_2(\widetilde{g}_m)\left[\int_M u_m^N \, dv_g\right]^{\frac{4}{n}}$$

On peut supposer que $\int_M u_m^N \, dv_g = 1$, c'est à dire $\mu_2(M,g) = \lim_{m\to+\infty} \lambda_2(\widetilde{g}_m)$. Pour chaque u_m, la proposition (5.4) donne l'existence de deux fonctions v_m , $w_m \in C^\infty(M)$ telles que :

$$L_g v_m = \lambda_1(\widetilde{g}_m)|u_m|^{N-2}v_m \qquad \text{et} \qquad L_g w_m = \lambda_2(\widetilde{g}_m)|u_m|^{N-2}w_m$$

et vérifiant

$$\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1 \quad , \quad \int_M u_m^{N-2} w_m^2 dv_g = 1 \quad \text{et} \quad \int_M u_m^{N-2} v_m w_m dv_g = 0.$$

Puisque $\int_M u_m^N \, dv_g = 1$, $(u_m)_m$ est bornée dans $L^N(M)$ donc il existe un $u \in L^N(M)$ telle que u_m converge faiblement vers u dans $L^N(M)$. A l'aide de la même preuve du théorème (5.2) appliqué à la suite v_m on obtient $P_g v' = 0$ et la suite w_n' on obtient $P_g w' = 0$ et comme la première valeur propre $\lambda_1(g) < 0$ et $\lambda_2(g) > 0$, on a nécessairement $v' = 0$, $w' = 0$. D'où v_n, w_m sont bornées dans $H_2^2(M)$, donc ils existent v, $w \in H_2^2(M)$ telles que $v_m \to v$ et $w_m \to w$ faiblement dans $H_2^2(M)$ et $v_m \to v$, $w_m \to w$ fortement dans $H_1^2(M)$, il découle que v , w sont des solutions au sens faible de

$$P_g v = \widetilde{\mu}_1(M,g)|u|^{N-2} v \text{ et } P_g v = \mu_2(M,g)|u|^{N-2} w$$

où $\widetilde{\mu}_1$est la limite de $\lambda_1(\widetilde{g}_m)$.

Comme dans le théorème (5.2) et comme $\mu_2(M,g) < K_2^{-2}$, on retrouve $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, $\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int_M u^{N-2} vw dv_g = 0$ d'où u, v et w sont non triviales.

Conclusion 3 $\mu_2(M,g)$ *est atteint par une métrique généralisée.*

■

Bibliographie

[AH06] B. Ammann.and E. Humbert, The second Yamabe invariant. J. Funct. Anal.235(2006), no. 2, 377-412.

[Aub76] T.Aubin . Equation différentielle non linéaire et problème de Yamabé concernant la courbure scalaire.J. Math. Pur Appl.,IX,Ser.,55(1976),269-296.

[BB10] M. Benalili,H. Boughazi, On the second Paneitz Branson invariant, Houston J. Math. 36 (2010), no. 2, 393–420.

[BB12] M. Benalili,H. Boughazi, The second Yamabe invariant with singularities, Annales mathématique Blaise Pascal.Volume 19, no.1, (2012), p.147-176.

[BB14] M. Benalili,H. Boughazi, On the nodales solutions of non linear Paneitz-Branson equation with critical exponent". submitted

[Bra87] T.P. Branson, Group representations arising from Lorentz conformal geometry, J.Funct. Anal., 74, 1987, 199-291.

[BL83] H. Brezis and E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. 88(1983), 486-490.

[Car01] D. Caraffa, Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposents critiques sur les variétés riemanniennes compactes. J. Math. Pures et Appl., 80, 9(2001), 941-960.

[Cha99] S.Y.A. Chang, On Paneitz operator- a fourth order differential operator in conformal geometry, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, Essays in honor of Alberto P. Calderon, Eds. M. Christ, C. Kenig and C. Sadorsky, Chicago Lectures in Mathematics, 1999, 127-150.

[CY99] S.Y.A. Chang, P.C. Yang. On four order curvature invariant, Contemp. Math.237, Spectral Problems in Geometry and Arithmetic, Ed. T. Branson, AMS, 1999,9-28.

[DHL00] Z. Djadli ,E. Hebey, M.Ledoux, Paneitz-type operators and applications, Duke Math. J. 104, 2000, 129-169.

[DJ02] Z. Djadli, A.Jourdain, Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds, Boll. Unione Mat. Ital. Sez.B. Artic. Ric. Mat. (8), 5 No1, (2002) 205-226.

[El.Say 12] S. ElSayed, Second eigenvalue of the Yamabe operator and applications. Calculus of Variations & Partial Differential Equations; Jul 2014, Vol. 50 Issue 3/4, p665.

[ER02] P. Esposito and F. Robert, Mountain pass critical points for Paneitz-Branson operators, Calc.Var. Partial Differential Equations 15 (2002), no. 4, 493–517.

[FHR05] V. Felli,E Hebey and F.Robert, Fourth order equations of critical Sobolev growth. Energy function and solutions of bounded energy in the conformally flat case. Nonlinear Differential Equations and Applications, 12, (2005), 171-213.

[FR09] Fourth order equations with critical growt in riemannian geometry. Notes from a course given at the univercity of wisconsin at Madison and at the technische universit at in Berlin.

[Heb97] E. Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés. Diderot Editeur, Arts et sciences.,1997.

[HV96] E. Hebey and M.Vaugon, Meilleurs constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 13, 1996, 57-93.

[HR01] E.Hebey.and F.Robert, Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients, Calc. Var. Partial Differential Equations, 13 (2001) 491-517.

[Hol99] D. Holcman, Solutions nodales sur les variétés riemanniennes. J. Funct. Anal. 161 (1999), No 1, 219–245.

[LP87] JM.Lee and T.H.Parker, The Yamabe problem. Bull. Am. Math. Soc, New Ser,17(1987),37-91.

[Mad08] F. Madani, Le problème de Yamabe avec singularités. Bulletin des Sciences Mathématiques 132(2008) 575–591.

[Pan83] S. A. Paneitz, quartic conformally invariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds, Preprint, 1983.

[Sho84] R. Shoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Diff. Geom,20(1984),479-495.

[SY88] R. Shoen.and .S.T. Yau, Conformally flat manifolds, Kleinian groupes and scalar curvature.Invent.Math,9247-71, 1988.

[Tru68] N.S. Trudinger, Remarks concerning the confomal deformation of Riemannian structures on compacts manifold. Ann. Sc. Norm. Super. Pipa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., 22(1968).265-274.

[Yam60] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compacts manifolds. Osaka Math. J,12(1960),21-37.

Résumé : En 2005 Ammann et Humbert ont introduit une nouvelle définition de l'invariant usuel de Yamabe en l'appelant premier invariant de Yamabe, cette définition a permis la généralisation des invariants conformes d'ordre supérieur. Particulièrement ils ont étudié les propriétés du second invariant de Yamabe, ils ont prouvé qu'il est atteint par une métrique généralisée et ils ont obtenu une solution qui change de signe de l'équation de Yamabe. La première partie étudiée est intitulée "Sur le second invariant de Paneitz-Branson", là on a introduit l'opérateur de Paneitz-Branson, un opérateur elliptique du quatrième, conformément invariant et qui fait intervenir une quantité dite Q-courbure analogue de la courbure scalaire de l'opérateur de Yamabe, dans ce travail on retrouve un petit rappel du problème de Yamabe et du second invariant, puis on donne nos motivations pour l'opérateur de Paneitz-Branson, puis on étudie les invariants conformes de cet opérateur, quand est ce qu'ils sont atteints et la recherche de solution positive ou de solution qui change de signe des équations correspondantes. La deuxième partie est intitulée, le second invariant de Yamabe singulier, là aussi poussé par la même motivation et en introduisant une singularité sur l'opérateur de Yamabe, on étudie le premier et le second invariant de Yamabe singulier, quand est ce qu'ils sont atteints et le signe des solutions. On finalise avec la troisième partie intitulée "Sur les solutions nodales d'une équation non linéaire de type Paneitz-Branson avec exposant critique", dans cette partie de nouveau, on étudie les invariants conformes de l'opérateur de Paneitz-Branson mais lorsque la courbure scalaire est négative, quand est ce qu'ils sont atteints et le signe des solutions.

Mots clés : problème de Yamabe et second invariant de Yamabe, opérateur de Paneitz Branson, invariants conformes, méthodes variationnelle, équation différentielle du quatrième ordre.

Abstract : In 2005 Ammann and Humbert introduced a new definition of the Yamabe invariant calling first Yamabe invariant, this definition has allowed the widespread use of consistent higher order invariants. Particularly they studied the properties of the second invariant of Yamabe, they proved that he is suffering a generalized metric and they got a solution that changes sign in the equation of Yamabe. The first part study is entitled "On the second invariant Paneitz-Branson", there was introduced the operator-Paneitz Branson, an elliptic operator of fourth accordance invariant and which involves a known quantity like Q-curvature scalar curvature operator Yamabe in this work include a reminder of the Yamabe problem and the second invariant, then give our motivations for the operator to Paneitz-Branson and studying compliant invariants of this operator, when is what they are looking for and achieved positive solution or solution that changes sign corresponding equations. The second part is called the second invariant of singular Yamabe, again driven by the same motivation and introducing a singularity on the operator Yamabe, we study the first and the second invariant of singular Yamabe, when are they are met and the sign of the solutions. It completes the third part entitled "On the nodal solutions of a nonlinear equation Paneitz-Branson guy with critical exponent" in that part again, we study the compliance of the invariants Paneitz-Branson operator but when the scalar curvature is negative, when will they suffer and the sign solutions.

Keywords: Yamabe problem and second Yamabe invariant, operator Paneitz Branson, consistent invariants, variational methods, differential equation of the fourth order.

خلاصة:
في 2005 قدّم عمّان و هومبرت تعريف جديدة من المعتادة ثابتة من يمب ب يدعو هو أولى ثابتة من يمب, هذا تعريف سمح التعميم من ال إينفرينت في توافق من طبيعة هيغر. بشكل خاصّ درس هم الخاصية من الثاني ثابتة من يمب, هم برهنوا أنّ هو بلغت بمتريّة يعمّر وهم نالوا حل أيّ يغيّر إشارة من المعادلة يمب. خوّلت الأولى يدرس جزء "على الثاني ثابتة من بنيتز-برنسن", هناك واحدة قدّم المشغلة بنيتز-برنسن, مشغلة إهليلجيّة من الرابعة, كنفورممنت ثابتة وأيّ يستعمل كمية يعرف ك ق-كرف مماثلة من المنحنى عدديّة من المشغلة يمب, في هذا عمل واحدة يجد إستدعاء صغيرة من المشكلة يمب والثاني ثابتة, بعد ذلك واحدة يعطي تحاريضنا للمشغلة بنيتز-برنسن, بعد ذلك واحدة يدرس ال إينفرينت في توافق من هذا مشغلة, عندما ماذا هم يكون بلغت والبحث من حل إيجابيّة أو حل أيّ يغيّر إشارة من ال يماثل معادلات. خوّلت الثاني جزء, الثاني ثابتة من يمب فريدة, هناك تحريض كاملة أيضا بالتّالي وب يقدّم تفرد على المشغلة يمب, واحدة يدرس الأولى والثاني ثابتة من يمب فريدة, عندما ماذا هم يكون بلغت والإشارة من الحلول. واحدة يكمل مع الجزء ثالثة يخوّل "على الحلول عقديّة من معادلة لاخطّيّ من بنيتز-برنسن نوع مع عارضة حرجة", في هذا جزء ثانية, واحدة يدرس ال إينفرينت في توافق من المشغلة بنيتز-برنسن غير أنّ عندما المنحنى عدديّة سلبيّة, عندما ماذا هم يكون بلغت والإشارة من الحلول

كلمة مفتاحيّة :
مشكلة يمب وثانية ثابتة من يمب, مشغلة بنيتز برنسن, إينفرينت في توافق, طرق مختلفة, ديفّرنتيل قوأيشن من الأمر رابعة

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Aboubekr Belkaid, Tlemcen

Faculté des sciences
Département de mathématiques

Thèse de doctorat (résumé)

Discipline : Mathématiques
Option: Géométrie Différentielle

présenté par :
Hichem Boughazi

intitulée :

Quelques propriétés des invariants conformes

Soutenue devant le jury composé de :

Directeur de thèse	: Mr. **Mohammed Benalili**	Prof. Univ de Tlemcen
Président de jury	: Mr. **Mohammed Bouchekif**	Prof. Univ de Tlemcen
Examinateur	: Mr. **Noureddine Rahmani**	Prof. UST d'Oran
Examinateur	: Mr. **Mohammed-Bekkar**	Prof. Univ Oran1.Ahmed Ben Bella
Examinateur	: Mr. **S.Mohammed Bouguima**	Prof. Univ de Tlemcen

1 Introduction (présentation de la thése et résumé)

Cette thèse est composée de trois parties, elle est le fruit d'un travail qui a duré presque une dizaine d'années. La première partie étudiée est intitulée "Sur le second invariant de Paneitz-Branson", qui a fait l'objet de notre première publication intitulée "On the second Paneitz -Branson invariant", là on a introduit l'opérateur de Paneitz-Branson, un opérateur elliptique du quatrième, conformément invariant et qui fait intervenir une quantité dite Q-courbure analogue de la courbure scalaire de l'opérateur de Yamabe, en effet notre motivation était une étude publier en 2005 par B. Ammann et E. Humbert sur l'opérateur de

Yamabe, intitulée " On the second Yamabe invariant", où ces derniers ont introduit le premier et le second invariant de Yamabe et puis ils ont étudié leurs propriétés, en particulier quand est ce qu'il sont atteint, naturellement on commence par un rappel sur le problème de Yamabe, sur le second invariant de Yamabe puis on donne les motivations pour l'opérateur de Paneitz-Branson, position des problèmes et présentation des résultats. La deuxième partie est intitulée, le second invariant de Yamabe singulier, là aussi poussé par la même motivation et en introduisant une singularité sur l'opérateur de Yamabe, on étudie le premier et le second invariant et on finalise avec la troisième partie intitulée "Sur les solutions nodales d'une équation non linéaire de type Paneitz-Branson avec exposant critique", dans cette partie de nouveau on étudie les invariants conformes de l'opérateur de Paneitz-Branson mais contrairement à la première partie la courbure scalaire est prise négative, position des problèmes et résultats. La deuxième partie a fait objet de la publication suivante "The second Yamabe invariant with singularities". La dernière partie est une prépublication intitulée "On the nodales solutions of non linear Paneitz-Branson equation with critical exponent".

2 Le problème de Yamabe

Soit (M,g) un variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Dans les années 60 Yamabe a tenté de montrer qu'il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g de courbure scalaire $S_{\tilde{g}}$ constante. En 1968 Trudinger mettait en évidence une sérieuse difficulté dans la démonstration et donnait ainsi naissance à un des grand problème de l'analyse non linéaire sur les variété et depuis, il a fallu beaucoup de temps pour trouver la bonne approche. Aujourd'hui ce problème est complètement résolu et il est connu sous le non du problème de Yamabe. Les premières solutions rigoureuses de ce problème étaient données par Trudinger en affirmant que la preuve de Yamabe est vraie seulement si l'invariant de Yamabe μ est non positif. Huit ans après, Aubin résolvait le problème pour des variétés arbitraires non localement conformément plates et de dimension $n \geq 6$. Le problème est complètement résolu huit ans plus tard par Richard Schoen dans lequel la preuve repose sur le théorème de la masse positive du à Shoen et Yau. Le lecteur pourra se référer à [Yam60], [Tru68], [Aub76], [Sho84], [LP87] ou [Heb97] pour plus d'information sur le sujet. L'invariant de Yamabe μ est donnée par : $\mu = \inf_{u \in H_1^2(M),\, u>0} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{(n-2)} |\nabla u|^2 + S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^N dv_g)^{2/N}}$.

Théorème 1[AH06] Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Si $\mu < \mu(S_n) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$ où ω_n est le volume de la sphère S_n, alors il existe une fonction u strictement positive de classe C^∞ qui réalise $Y(u) = \mu$.

Théorème 2[AH06] Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Alors on a toujours $\mu \leq \mu(S_n)$. De plus, on a l'égalité si et seulement si (M,g) est conformément difféomorphe à la sphère S_n.

Ces théorèmes résolvent le problème de Yamabe.

3 Rappel sur le second invariant de Yamabe

Soit (M, g) un variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, B. Ammann et E. Humbert [AH06] ont introduit une nouvelle définition de l'invariant usuel de Yamabe μ en l'appelant premier invariant conforme de Yamabe noté μ_1, cette définition a permis de généraliser la notion des invariants conformes d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Particulièrement, ils ont étudié le second invariant conforme de Yamabe μ_2 dans le cas de $\mu \geq 0$, ils ont prouvé que le second invariant conforme est atteint par une métrique généralisée contrairement au premier invariant qui est atteint par une métrique régulière et de plus ils ont obtenu une solution qui change de signe (solution nodale) de l'équation de Yamabe, cette dernière est une équation elliptique d'ordre 2 non linéaire avec exposant critique de Sobolev. D'après ces derniers, c'est une nouvelle technique pour la recherche des solutions qui changent de signe de l'équation de Yamabe en comparaison avec les méthodes classiques. L'opérateur L_g possède un spectre discret $spec(L_g) = \{\lambda_{1,g}, \lambda_{2,g} \ldots\}$, les valeurs propres $\lambda_{1,g} < \lambda_{2,g} \ldots$ apparaissent avec leurs multiplicités et la caractérisation variationnelle de $\lambda_{1,g}$ est donnée par :

$$\lambda_{1,g} = \inf_{u \in C^\infty(M),\ u>0} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{(n-2)} |\nabla u|^2 + S_g u^2 dv_g}{(\int_M |u|^2 dv_g)}.$$

Soit $\langle g \rangle = \{\tilde{g} = u^{N-2} g \ , \ u \in C^\infty(M) \ \text{ et } u > 0\}$ la classe conforme de la métrique g, B.ammann et E.Humbert dans leur article [AH06] affirment qu'il n'est pas difficile de voir que si $\mu \geq 0$, alors l'invariant de Yamabe μ est donné par :

$$\mu = \inf_{\tilde{g} \in \langle g \rangle} \lambda_{1,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}.$$

où $Vol(M, \tilde{g}) = \int_M dv_{\tilde{g}} = \int_M u^N dv_g$ est le volume riemannien de M pour la métrique $\tilde{g}$. Les auteurs généralisent cette définition, en introduisant le $k^{ièm}$ invariant de Yamabe μ_k par :

$$\mu_k = \inf_{\tilde{g} \in \langle g \rangle} \lambda_{k,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n} \quad \text{où } k \text{ est un entier} \geq 1.$$

Avec ces notations μ_1 est l'invariant usuel de Yamabe. Leur but est d'étudier le second invariant de Yamabe μ_2 et les motivations étaient de trouver des solutions qui changent de signe (solutions nodales) de l'équation de Yamabe (1), en particulier la question majeure était :

μ_2 est il atteint par une métrique?

Contrairement à l'invariant usuel, ils ont trouvé que μ_2 ne peut pas être atteint par une métrique régulière. En d'autres termes, il n'existe aucune métrique $\tilde{g} \in \langle g \rangle$ vérifiant $\mu_2 = \lambda_{2,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}$, pour trouver des minimiseurs, ils élargissent la classe conforme à ce qu'ils appellent la classe conforme généralisée de g. Une métrique généralisée est une "métrique" de la forme

$\tilde{g} = u^{N-2}g$, où u n'est pas nécessairement strictement positive et régulière, mais seulement $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et $u \neq 0$. La définitions de $\lambda_{2,\tilde{g}}$ et de $Vol(M, \tilde{g})$ se généralisent naturellement. Les éléments importants de la résolution sont les théorèmes suivants.

Théorème 3 :[AH06] Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, alors μ_2 est atteint par une métrique généralisée dans les cas suivants :

$$\mu > 0 \quad , \quad \mu_2 < \left[(\mu^{n/2} + (\mu(S_n))^{n/2} \right]^{2/n}$$

et

$$\mu = 0 \quad , \quad \mu_2 < \ \mu(S_n).$$

Comme la méthode consiste à faire une variation de la fonctionnelle associée au second invariant de Yamabe sur le plan, alors on est amené à trouver un couple de fonctions tests appropriées .

Théorème 4 :[AH06] Les hypothèse du théorème précédent sont réalisées dans les cas suivantes : (M, g) est non localement conformément plate, $n \geq 11$ et $\mu > 0$ ou bien (M, g) est non localement conformément plate, $\mu = 0$ et $n \geq 9$.

Théorème 5[AH06] Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, on suppose que μ_2 est atteint par une métrique généralisée $\tilde{g} = u^{N-2}g$, alors il existe une solution qui change de signe (nodale) $w \in c^{2,\alpha}(M)$ de l'équation $L_g(w) = \mu_2 |u|^{N-2} w$ telle que $|w| = u$ où $\alpha \leq N - 2$.

4 Première partie : Sur le second invariant de Paneitz-Branson.

4.1 Généralité sur l'opérateur de Paneitz-Branson et motivation.

La première partie de cette thèse consiste à faire une étude similaire à celle de Amman et Humbert mais avec l'opérateur de Paneitz -Branson, un opérateur elliptique du quatrième, conformément invariant et qui fait intervenir une quantité dite Q-courbure qui est l'analogue de la courbure scalaire S_g de l'opérateur de Yamabe, plus précisément on va faire une généralisation de cette étude sur l'opérateur de Paneitz -Branson. En 1983, Paneitz [Pan84] introduit un opérateur conformément invariant d'ordre 4 défini sur une variété riemannienne de dimension 4. Branson dans son article [Bra87] généralise la notion de l'opérateur sur des variétés de dimension $n \geq 5$. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. L'analyse du problème nous a conduit à considérer l'opérateur de Paneitz -Branson sur une variété d'Einstein, l'opérateur est réduit à :

$$P_g u = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u.$$

$$\text{où} \quad a_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}.$$

Une variété riemannienne (M,g) est dite d'Einstein si est seulement si le tenseur de Ricci Ric_g est un multiple de la métrique g par un scalaire réel et dans ce cas la courbure scalaire S_g est constante de plus le choix de la positivité de la courbure scalaire $(S_g > 0)$ nous conduit à la plupart des résultats souhaités, en premier lieu la remarque suivante :

Lorsque (M,g) est d'Einstein, de dimension $n \geq 5$ et de courbure scalaire S_g strictement positive on a :

$$\left[\int_M |\Delta u|^2 + a_n S_g |\nabla u|^2 + b_n S_g^2 u^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_M u P_g u dv_g\right]^{\frac{1}{2}} = \|u\|$$

une norme équivalent à la norme de $H_2^2(M)$ où $H_2^2(M)$ est l'espace de Sobolev des fonctions u ,$|\nabla u|, |\nabla^2 u| \in L^2(M)$, munit de sa norme usuelle $\|u\| = \left[\int_M |\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2 dv_g\right]^{\frac{1}{2}}$ et du coup, on a la coercivité de P_g et la méthode variationnelle sera applicable.

Avant de formuler notre problème, on a besoin d'introduire quelques définitions et propriétés.

P_g est un opérateur elliptique auto-adjoint, son spectre est discret :
$spec(P_g) = \{\lambda_1(g), \lambda_2(g), ...\}$ et ses valeurs propres sont telles que

$$\lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \cdots \to +\infty.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Gr_k(H_2^2(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k de $H_2^2(M)$.

Définition 1:

$$K_2^{-2} = \frac{n(n-4)\left(n^2-2\right)}{16}\omega_n^{\frac{4}{n}}.$$

K_2^{-2} est la meilleure constante de l'inclusion de Sobolev $\|u\|_N^2 \leq K_2^2 \|\Delta u\|_2^2$ dans le cas Euclidien.

Définition 2 : Une métrique généralisée conforme à la métrique g est une métrique de la forme $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et non identiquement nulle.

Définition 3 : Pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$, on définit la $k^{ième}$-valeur propre $\lambda_k(\widetilde{g})$ de l'opérateur de Paneitz-Branson par

$$\lambda_{k,\tilde{g}} = \inf_{V \in Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} I(w) \quad \text{où} \quad I(v) = \frac{\int_M v P_g v dv_g}{\int_M u^{N-2} v^2 dv_g} \quad , \quad k \geq 1$$

$Gr_k^u(H_2^2(M))$ est l'ensemble de tous les sous espaces de dimension k $(k \geq 1)$ de $H_2^2(M)$ tel que le sous espace $span(v_1, ..., v_k) \in Gr_k^u(H_2^2(M))$ si est seulement si $v_1, ..., v_k$ sont linéairement indépendant sur $M \setminus u^{-1}(0)$.

Définition 4 : On définit le $k^{ièm}$ invariant de Paneitz-Branson par

$$\mu_k(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) \, [vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$$

où $vol(M,\widetilde{g})$ est le volume riemannien et $[g]$est la classe conforme de la métrique g.

4.2 Position du problème

Notre problème est l'étude des invariants conformes $\mu(M,g)$, $\mu_1(M,g)$ et $\mu_2(M,g)$ et particulièrement $\mu_2(M,g)$ est il atteint par une métrique généralisée?

Naturellement la réponse à ce problème n'était pas simple, elle a évoqué une chaine de questions intimement liées entre elles, en d'autres termes, il faut répondre aux questions suivantes :

Les valeurs propres de P_g sont elles atteintes **?** Les solutions correspondantes sont elles régulières ?

Comment régler la positivité de la solution correspondante à la première valeur propre?

Par analogie avec le problème de Yamabe, en introduisant l'invariant usuel de Paneitz-Branson μ :

$$\mu = \inf_{V \in H_2^2(M))} \frac{\int\limits_M v P_g v dv_g}{(\int\limits_M v^N dv_g)^{\frac{2}{N}}}.$$

μ est il atteint?

Le premier invariant conforme $\mu_1 = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_1(\widetilde{g}) \, [vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$ existe il ? Quelle est l'estimation de μ_1? est il atteint ? μ est il égal à μ_1?

Le second invariant conforme $\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_2(\widetilde{g}) \, [vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$existe il ? Quelle est l'estimation de μ_2? $\mu_2(M,g)$ est il atteint par une métrique généralisée? ...etc.

Voici les résultats les plus importants, ils sont classés dans l'ordre de progression des idées. On espère que le lecteur aura une idée simple et globale sur le contenu de cette première partie.

4.3 Présentations des résultats de la première partie.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

1) **Valeurs propres:**

Proposition (3.1) : Soit $\lambda_{1,\tilde{g}}$ la première valeur propre de $P_{\widetilde{g}}$. Pour chaque métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$, il existe une fonctions v non identiquement nulle de $H_2^2(M)$ solution au sense faible de l'équation $P_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v$ vérifiant $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$.

Proposition (3.2) : Soit v la solution construite précédemment, on pose $E = \{w \in H_2^2(M)$ telle que $u^{\frac{N-2}{2}} w \neq 0$, $\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int_M u^{N-2} wv dv_g = 0\}$. L'ensemble E n'est vide.

Proposition (3.3) : En posant $\lambda'_{2,g} = \inf_{w \in E} I(w)$, il existe une fonction w non identiquement nulle de $H_2^2(M)$ solution au sense faible de l'équation $L_g(w) = \lambda'_{2,g} u^{N-2} w$ vérifiant $\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int_M u^{N-2} wv dv_g = 0$.

Proposition (3.4) : On a toujours $\lambda'_{2,g} = \lambda_{2,\tilde{g}}$ où $\lambda_{2,\tilde{g}}$ est la deuxième valeur propre de $P_{\widetilde{g}}$.

2) **Positivité de la solution correspondante à la première valeur propre :**

Proposition (3.5) et (3.6) : Si la métrique $\widetilde{g}$ est régulière ($u \in C_+^\infty(M)$), alors les solutions v , w sont de classe C^∞. A partir de la solution v, on construit une autre fonction f strictement positive de classe C^∞ solution de l'équation $P_g(f) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} f$ avec la contrainte $\int_M u^{N-2} f^2 dv_g = 1$.

3) l'invariant usuel de Paneitz-Branson $\mu(M, g)$ est toujours atteint par une métrique conforme.

Proposition (3.7) : En introduisant l'invariant usuel de Paneitz-Branson $\mu(M, g)$ et lorsque (M, g) est non conformément plate de dimension $n \geq 9$, on a toujours μ atteint par une métrique conforme, autrement dit, il va exister $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ solution de l'équation $P_g u = \mu u^{N-1}$ vérifiant $\int_M u^N dv_g = 1$.

4) Existence de μ_1 et son eventuelle égalité avec μ.

Théorème (3.2) : Le premier invariant $\mu_1(M, g) \leq \mu(M, g)$ et si $\mu_1 < K_2^{-2}$, alors $\mu_1(M, g)$ est atteint par une métrique généralisée, en d'autre termes ils existent deux fonctions u , v non identiquement nulles telles que $u \in L_+^N(M)$, $v \in H_2^2(M)$, $v \geq 0$ et qui vérifient l'équation $P_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ faiblement.

Proposition (3.8) : Les fonctions u, v sont égales et de plus $v > 0$ et de classe $C^\infty(M)$.

Proposition (3.9) : μ_1 est égal à μ.

La proposition (3.9) permet de justifier la généralisation des invariants conformes d'ordre supérieurs.

5) Etude du second invariant conforme:

Proposition (3.10) : Une inégalité de type de Sobolev reliée à μ_2 : $\forall u \in$

$L_{+}^{N}(M)$,$\forall v \in H_2^2(M)$, on a

$$\int_M u^{N-2}v^2dv_g \leq \left[2^{\frac{-4}{n}}(K_2^2+\varepsilon)\int_M |\Delta v|^2\, dv_g + a(\varepsilon)\int_M v^2 dv_g\right]\left[\int_M u^N dv_g\right]^{\frac{4}{n}} .$$

Lemme (3.6) : la convergence faible des suites minimisantes v_m , u_m entrainent que $\int_M u_m^{N-2}(v_m-v)^2dv_g = 1 - \int_M u^{N-2}v^2dv_g + o(1)$.

6) Le second invariant conforme est atteint par métrique généralisée.

Proposition (3.12) **:** Soit $g_m = u_m^{N-2}g$ une suite minimisante de μ_2, alors ils existent $v \geq 0$, $w \in H_2^2(M)$ solutions au sense faible des équations :

$$L_g(v) = \widetilde{\mu_1}u^{N-2}v \quad \text{ et } \quad L_g(w) = \mu_2 u^{N-2}w$$

où $\widetilde{\mu_1} = \lim_m \lambda_{1,m}$ et u est la limite faible de u_m dans $L^N(M)$.

Le théorème (3.3) et la proposition (3.14) nous permettent de conclure que : Si $\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$, alors $\int_M u^{N-2}v^2dv_g = \int_M u^{N-2}w^2dv_g = 1$ et $\int_M u^{N-2}vwdv_g = 0$, les fonctions u, v et w sont non identiquement nulles et μ_2 est atteint par métrique généralisée.

7) Estimation de μ_2.

Théoreme (3.4) **:** Lorsque (M,g) est non conformément plate et $n \geq 12$, alors $\mu_2 < \left[(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}} + \mu_1^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}$.

D'où la condition du Théorème (3.3) est toujours réalisée, $\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$.

8) Application.

Théorème (3.5) : l'équation $P_g w = \mu_2 u^{N-2}w$ possède une solution w qui change de signe.

5 Deuxième partie : Le second invariant de Yamabe singulier.

5.1 Généralité sur l'opérateur de Yamabe singulier et motivation.

F. Madani dans sa thése sous la direction de T. Aubin considère " le problème de Yamabe avec singularité " les résultats obtenus sont publiés dans [Mad08]. Il introduit une certaine singularité sur l'équation de Yamabe en d'autres termes la métrique g est choisie régulière sur M sauf en un nombre fini de points ou elle presente des singularités. Etant donnée (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, soit(H) l'hypothèse suivante : on suppose que g est une métrique dans l'espace de Sobolev $H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ avec $p > n$ et qu'il existe un point $p \in M$, $\delta > 0$ telle que g est régulière dans la boule $B_p(\delta)$. On note par T^*M le fibré cotangent de M,

$g \in H_2^p(M, T^*M \otimes T^*M)$ signifie qu' en coordonnées locales, les composantes $g_{ij} \in H_2^p(M)$

L'hypothèse (H) définit la notion de "singularité":

Une métrique qui vérifie l'hypothése (H) est de classe C^1. Les symboles de Christoffels sont dans $H_1^p(M) \subset C^0(M)$, les composantes du tenseur de la courbure de Riemann, les composantes du tenseur de la courbure de Ricci et la courbure scalaire sont dans $L^p(M)$.

Théorème 6: [Mad08] Si $p > n/2$ et $\mu < K^{-2}$, alors l'équation (2) admet une solution strictement positive $u \in H_2^p(M) \subset C^{1-[n/p],\beta)}(M)$. $[n/p]$ est la partie entière de n/p , $\beta \in (0,1)$ qui minimise Y, où $K^2 = \frac{4}{n(n-1)}\omega_n^{-2/n}$ avec ω_n le volume de S_n.

Théorème 7 : [Mad08] Soit (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. g est une métrique qui vérifie l'hypothèse (H). Si (M, g) est non conforme à la sphère S_n, alors $\mu < K^{-2}$.

Ces théorèmes résolvent le problème de Yamabe singulier.

Naturellement on se pose la question suivante : l'équation de Yamabe singulière possède-t-elle- une solution qui change de signe (nodale)? La recherche de cette solution nous a conduit à une étude analogue à la première partie.

Maintenant on introduit le premier invariant de Yamabe avec singularités et le second invariant de Yamabe avec singularités respectivement (le premier invariant de Yamabe singulier, le second invariant de Yamabe singulier),

Définition 5 : On définit le $k^{ièm}$ invariant de Yamabe singulier μ_k par

$$\mu_k = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_{k,\tilde{g}} Vol(M, \tilde{g})^{2/n}.$$

Avec ces notations, μ_1 est le premier invariant de Yamabe singulier, entre autre pour trouver des minimiseurs, on élargit la classe conforme particulière à une classe de métriques dites généralisées

5.2 Position du problème

Notre problème est l'étude des invariants conformes singuliers $\mu_1(M, g)$ et $\mu_2(M, g)$ et particulièrement,

$\mu_2(M, g)$ est il atteint par une métrique généralisée?

5.3 Présentations des résultats de la deuxième partie.

Comme pour la première partie et puisqu'il s'agit de faire une étude analogue avec l'opérateur de Yamabe singulier, aussi il faudrait répondre à plusieurs questions.

Les résultats les plus importants seront classés dans l'ordre évoquant à la fois la question et sa réponse. On espère que le lecteur aura une idée générale sur le contenue de cette deuxième partie, la coercivité de l'opérateur et l'étude de l'invariant usuel μ ont été établis par F. Madani [Mad08] .

1) On montre que la fonctionnelle est bornée inférieurement.

Proposition (4.3) étape1 : L'hypothèse $p > n$ est heureusement suffisante pour assurer que la fonctionnelle est bornée inférieurement et que les valeurs propres sont finies.

2) Etude des valeurs propres.

Proposition (4.3) étape 2 : Si $\mu > 0$, alors pour tout $u \in L_+^N(M)$, ils existent deux fonctions v , w appartenant à $H_1^2(M)$ avec $v \geq 0$ solutions au sens des distributions de

$$L_g(v) = \lambda_{1,\tilde{g}} u^{N-2} v \quad , \quad L_g(w) = \lambda'_{2,g} u^{N-2} w$$

vérifiant :

$$\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1 \quad , \quad \int_M u^{N-2} wv dv_g = 0$$

et on a toujours $\lambda'_{2,g} = \lambda_{2,\tilde{g}}$.

3) Existence du premier invariant conforme μ_1.

Lemme (4.3) : Si $p > n$, alors on a toujours $\mu_1 \leq \mu$.

Théorème (4.6) : Si $\mu > 0$, alors μ_1 est atteint par une métrique généralisée $\tilde{g} = u^{N-2} g$, en d'autres termes ils existent $u \in L^N(M)$, $v \in H_1^2(M)$ où $v \geq 0$ solutions de l'équation $L_g(v) = \mu_1 u^{N-2} v$ et qui vérifient $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$.

Théorème (4.7) : Les fonctions u et v sont égales.

4) Egalité entre $\mu_1$et μ.

Théorème (4.9) : Si $\mu \geq 0$, alors $\mu_1 = \mu$.

5) Existence du second invariant conforme μ_2.

Théorème (4.12) : Si $1-2^{-\frac{2}{n}} K^2 \mu_2 > 0$, alors μ_2 est atteint par une métrique généralisée.

Théorème (4.13) : Si $\mu_2 < K^{-2}$, encore μ_2 est atteint par une métrique généralisée.

Théorème (4.14) : Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Sous l'hypothèse $(H\ )$ et supposons que μ_2 est atteint par une métrique généralisée $\tilde{g} = u^{N-2} g$, alors l'équation $L_g w = \mu_2 u^{N-2} w$ possède une solution $w \in C^1(M)$ et qui change de signe, de plus ils existent deux réels a , $b > 0$ tels que

$$u = aw_+ + bw_-$$

où $w_+ = sup(w, 0)$ et $w_- = sup(-w, 0)$.

6) Estimation de μ_2.

A l'aide de la conjecture d'Aubin et de l'hypothèse "g est régulière dans la boule $B_p(\delta)$ pour un certain point $p \in M$ avec $\delta > 0$ ", le même argument de Ammann et Humbert [Ah06] reste vrai dans notre cas et on obtient le théorème suivant:

Théorème (4.14) : Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et sous l'hypothèse (H), μ_2 est atteint par une métrique généralisée dans les cas suivant :

Si (M,g) est non localement conformément plate, $n \geq 11$ et $\mu > 0$, alors $\mu_2 < \left[(\mu^{n/2} + (K^{-2})^{n/2}\right]^{2/n}$.

Si (M,g) est non localement conformément plate, $\mu = 0$ et $n \geq 9$, alors $\mu_2 < \mu(K^{-2})$.

D'où les conditions des théorèmes (4.12) et (4.13) sont réalisées.

6 Troisième partie : Sur les solutions nodales d'une équation non linéaire de type Paneitz-Branson avec exposant critique

6.1 L'opérateur de Paneitz-Branson et les motivations de son étude la courbure scalaire est négative.

En 2012 S.E. Sayed publie un article intitulé : La deuxième valeur propre de l'opérateur de Yamabe et applications, ce dernier constitue une partie de sa thése de doctorat dirigée par E. Humbert. Inspiré par les observations de B. Ammann et E. Humbert[ElSay12], elle exploite la deuxième valeur propre $\lambda_2(g)$ de l'opérateur de Yamabe pour l'existence des solutions nodales de l'équation de Yamabe dans le cas $\mu < 0$.

La troisième partie est un complément de la première partie, en considérant cette fois que la courbure scalaire de la variété est négative et on préfère mettre cette partie dans cet ordre en suivant l'évolution de cette thèse. Dans tout ce qui suit (M,g) une variété d'Einstein compacte de dimension $n \geq 5$ et de courbure scalaire strictement négative, en sait que l'opérateur géométrique de Paneitz-Branson P_g est réduit à

$$P_g u = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u \quad ,$$

$$a_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}.$$

Dans la première partie, on a introduit les définitions des valeurs propres $\lambda_k(\widetilde{g})$ et on a défini le $k^{ièm}$ invariant de Paneitz-Branson par

$$\mu_k(M,g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) \left[vol(M,\widetilde{g})\right]^{\frac{4}{n}} .$$

On remarque que lorsque S_g est négative, les valeurs propres peuvent être négatives.

6.2 Position du problème

Dans cette troisième partie, contrairement à la première partie, la courbure scalaire $S_g < 0$.

Notre problème est d'étudier encore les invariants conformes de Paneitz - Branson et particulièrement $\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_2(\widetilde{g})\,[vol(M,\widetilde{g})]^{\frac{4}{n}}$ et quand est qu'il est atteint ?

Lorsque $S_g < 0$ il n'est pas difficile de voir que l'opérateur n'est pas nécessairement coercif, pour cela on a exploité les idées dans [ElSay12] pour contourner cette difficulté et pouvoir encore utiliser la méthode variationnelle et naturellement on a réussi à répondre aux questions suivantes (on énonce le résultat évoquant la question):

6.3 Résultats de la troisième partie.

1) La suite minimisante de $\lambda_{1,\tilde{g}}$ est bornée dans $H_2^2(M)$

Proposition (5.2) : Soit $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ une métrique généralisée conforme à la métrique g, on suppose que $u > 0$. Alors toute suite minimisante de$\lambda_1(\widetilde{g})$ est bornée dans $H_2^2(M)$ et $\lambda_1(\widetilde{g}) > -\infty$.

Proposition (5.3) : Supposons que $\lambda_1(g) < 0$, alors il existe $u \in L^N(M)$, $u \neq 0$ et $u \geq 0$ vérifiant

$$\lambda_1(\widetilde{g}) = -\infty \quad \text{où} \;\; \tilde{g} = u^{N-2} g.$$

2) **Etude des valeurs propres :**

Proposition (5.4) : Pour toute métrique généralisée $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ conforme g, supposons que $u > 0$. Ils existent deux fonctions $v, w \in H_2^2(M)$ solutions au sens faible des équations $P_g v = \lambda_1(\widetilde{g})|u|^{N-2} v$ et $P_g w = \lambda_2(\widetilde{g})|u|^{N-2} w$ avec les contraintes $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$, $\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1$ et $\int_M u^{N-2} vw dv_g = 0$, en particulier si $u \in C^\infty(M)$, alors $v, w \in C^\infty(M)$.

3) Le signe des solutions:

Proposition (5.5) : lorsque g est dans la classe conforme et si $\lambda_1(\widetilde{g}) \leq 0$, alors v est une solution qui change de signe et si $\lambda_1(\widetilde{g}) > 0$ aucune conclusion sur le signe de v.

4) Estimation de μ et son existence :

Proposition (5.6) : Lorsque (M,g) est non conformément plate et $n \geq 9$, on a toujours $\mu(M,g) < K_2^{-2}$ et $\mu(M,g)$ est atteint par une fonction de classe $C^{4,\alpha}(M)$.

5) Etude de μ_1 et son existence:

Proposition (5.7) : Supposons que $\lambda_1(g) < 0$, alors $\mu_1(M,g) \to -\infty$ et on a toujours $\mu(M,g) > -\infty$ contrairement à $\mu_1(M,g)$.

Théorème (5.2) : Si $\lambda_1(g) > 0$. Alors $\mu_1(M,g) \geq 0$ et ils existent deux fonctions non triviales $u \in L_+^N(M)$, $v \in H_2^2(M)$ solution de

$$L_g v = \mu_1(M,g)|u|^{N-2} v \qquad \text{et} \qquad \text{vérifiant} \int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1.$$

en d'autres termes $\mu_1(M,g)$ est atteint par une métrique généralisée.

6) Estimation de μ_2 :

Théorème (5.3) : Lorsque (M,g) est non conformément plate, $n \geq 9$ et $\mu(M,g) < 0$ alors $\mu_2(M,g) < K_2^{-2}$.

On distingue deux cas intéressants : soit $\lambda_1(g) > 0$, soit $\lambda_1(g) < 0$ et $\lambda_2(g) > 0$ pour l'existence de $\mu_2(M,g)$.

8) Existence de μ_2 :

Théorème (5.4) : Si $\mu_2(M,g) < K_2^{-2}$, alors $\mu_2(M,g)$ est atteint par une métrique généralisée, autrement dit ils existent deux fonctions non triviales $u \in L_+^N(M)$, $w \in H_2^2(M)$ solution de l'équation $P_g v = \mu_2(M,g)u^{N-2}w$.

Houston Journal of Mathematics
© 2010 University of Houston
Volume 36, No. 2, 2010

ON THE SECOND PANEITZ-BRANSON INVARIANT

MOHAMMED BENALILI AND HICHEM BOUGHAZI

Communicated by Min Ru

Abstract. We define the second Paneitz-Branson operator on a compact Einsteinian manifold of dimension $n \geq 5$ and we give sufficient conditions that make it attained.

1. Introduction

In 1983, Paneitz [11] discovered a conformally invariant fourth order operator on 4-dimensional Riemannian manifolds. Branson [2] extended the notion to Riemannian manifolds of dimension $n \geq 5$. This operator has geometrical roots, it is associated to the notion of the Q-curvature which can be seen as the analogue of the scalar curvature for the conformal Laplacian. Let (M, g) be a Riemannian manifold; the Paneitz-Branson operator reads as

$$P_g(u) = \Delta^2 u - div\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}S_g.g - \frac{4}{n-2}Ric_g\right)du + \frac{n-4}{2}Q_g u$$

where Ric_g and S_g denote respectively the Ricci curvature and the scalar curvature of g and where

$$Q_g = \frac{1}{2(n-1)}\Delta S_g + \frac{n^3-4n^2+16(n-1)}{8(n-1)^2(n-2)^2}S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2}\left|Ric_g\right|^2.$$

The conformal property of the Paneitz-Branson expresses as: let $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}}g$ be a conformal metric to g, where $\varphi > 0$ is smooth function on M. Then

$$P_g(u\varphi) = \varphi^{N-1}P_g(u)$$

where $N = \frac{2n}{n-4}$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53A30; Secondary 58J50.

Key words and phrases. Paneitz-Branson operator, fourth order partial differential equations, generalized class of metrics, nodal solutions.

Observe that when (M, g) is Einstein, the Paneitz-Branson operator is reduced to

$$P_g(u) = \Delta^2 u + \alpha \Delta u + \overline{\alpha} u$$

where

$$\Delta = -div \nabla$$

and

$$\alpha = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} S_g \ , \ \ \overline{\alpha} = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2} S_g^2.$$

Notice that

$$\frac{\alpha^2}{4} - \overline{\alpha} = \frac{S_g^2}{n^2(n-1)^2}. \tag{1.1}$$

Let $H_2^2(M)$ be the standard Sobolev space, which is the completion of the space

$$C_2^2(M) = \left\{ \varphi \in C^\infty(M), \ \|\varphi\|_{2,2} < \infty \right\}$$

with respect to the norm

$$\|\varphi\|_{2,2} = \left(\|\Delta \varphi\|_2^2 + \|\nabla \varphi\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let $Gr_k(H_2^2)$ be the k-dimensional Grassmannian manifold in $H_2^2(M)$ i.e. the set of all subspaces of $H_2^2(M)$ of dimension $k \geq 1$.

Denote by $[g]$ the conformal class of the metric g i.e. $\widetilde{g} \in [g]$, $\widetilde{g} = ug$ with $u > 0$ a smooth function on M. The minimax characterization of the eigenvalue of order $k \geq 1$ of the Paneitz-Branson operator P_g is given by

$$\lambda_k(g) = \inf_{V \in G^r(H_2^2)} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M v P_g(v) dv_g}{\int_M v^2 dv_g}.$$

Similarly to the Yamabe invariant of higher order introduced by Amman and Humbert([1]), we define the Paneitz-Branson invariant.

Definition 1. *Let $k \in N^*$. The k^{th} Paneitz-Branson invariant is defined by*

$$\mu_k(M, g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_k(\widetilde{g}) Vol(M, \widetilde{g})^{\frac{4}{n}}.$$

In a recent paper [1] Amman and Humbert introduced the Yamabe invariant of high order $\mu_k(M, g)$, $k \geq 1$ and studied $\mu_2(M, g)$, mainly they showed that contrary to the standard Yamabe invariant $\mu_1(M, g)$ the second invariant $\mu_2(M, g)$ cannot be attained by a metric if the manifold (M, g) is connected. To find a minimizer to $\mu_2(M, g)$, they enlarge the class $[g]$ of conformal metric to what they called the generalized conformal metric to g i.e. $\widetilde{g} \in [g]$ if $\widetilde{g} = u^{2^*-2}g$ where $u \in L^{2^*}(M)$ and $u \geq 0$ not identically null and where $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

The goal of this paper is to study the second Paneitz-Branson invariant on Einsteinian manifolds we seek for situations where this latter is attained. Observe that to have positive solutions in case of the Yamabe invariant it suffices to remark that for any $u \in H_1^2(M)$, $|u| \in H_1^2(M)$ and $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ which is no longer true in the case of the Branson-Paneitz operator because of the term $\int_M (\Delta u)^2 \, dv_g$ and also if $u \in H_2^2(M)$, $|u|$ is not necessary in $H_2^2(M)$. The condition (1.1) implies by ([10] Theorem1.1) that Paneitz-Branson operator is coercive i.e.

$$\int_M uP_g(u)dv_g \geq \Lambda \|u\|_{2,2}$$

where the left hand side of this inequality has to be understood in the distribution sense and where $\Lambda > 0$ is a constant.

Hereafter, the space $H_2^2(M)$ will be endowed with the norm

$$\|u\| = \left(\int_M uP_g(u)dv_g \right)^{\frac{1}{2}}$$

which is equivalent to the norm $\|.\|_{2,2}$.

$\|,\|_p$ will denote the L^p-norm with respect to the Riemannian measure dv_g.

The main results we obtain are

Theorem 1. *If the compact manifold (M, g) is Einstein and of dimension $n \geq 12$ then $\mu_2(M, g)$ is attained by a generalized metric.*

Theorem 2. *Let (M, g) be a compact Einstein manifold of positive scalar curvature and of dimension $n \geq 5$. Assume that $\mu_2(M, g)$ is attained by a generalized metric $u^{N-2}g$ with $u \in L^N(M)$ and $u \geq 0$ not identically null.*

Then there exist a nodal solution $w \in C^{4,\alpha}(M)$ ($\alpha < N-2$) to the equation $P_g(w) = \mu_2(M, g)u^{N-2}w$ such that $|w| = u$.

Our paper is organized as follows

In the first section we give some properties of the first and second eigenvalues of the Branson-Paneitz operator. In the second one we establish a Sobolev inequality related to the second Branson-Paneitz invariant $\mu_2(M, g)$. The third section is devoted to the existence of a minimizer to $\mu_2(M, g)$. In the fourth section an estimation of $\mu_2(M, g)$ is given in terms of $\mu_1(M, g)$ and of the best constant K_2 in the Sobolev embedding of $H_2^2(R^n)$ in $L^N(R^n)$. In the fifth section we give a sufficient condition which assures the strong convergence of a sequence of solutions. In the last section, we analyze situations where nodal solutions exist and by the way we deduce that $\mu_2(M,g)$ is not attained by a classical conformal metric.

Now, we quote some facts which will be of use in the sequel of this paper.

Lemma 1. *([4]) Let (M,g) be a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 5$, for any $\epsilon > 0$ there exists a constant $A(\epsilon)$ such that every $u \in H_2^2(M)$ fulfills*

$$\|u\|_N^2 \leq (K_2^2 + \epsilon) \|\Delta u\|_2^2 + A(\epsilon) \|u\|_2^2$$

with $N = \frac{2n}{n-4}$ and $K_2^{-2} = \pi^2 n(n-1)(n^2-4)\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)}$

where Γ denotes the Euler function.

Lemma 2. *([7]) Let (S^n, h) be the standard unit sphere of R^{n+1}, $n \geq 5$, and let P be the Paneitz-Branson operator on (S^n, h), then*

$$K_2^{-2} = \inf_{u \in C^\infty(S^n)-\{0\}} \frac{\int_{S^n} uP(u)dv_h}{\left(\int_{S^n} |u|^N dv_h\right)^{\frac{2}{N}}}.$$

Lemma 3. *([7]) Let (M,g) be a smooth compact n-dimensional ($n \geq 5$) Riemannian manifold, α a positive real number, let b be a real valued functions defined on M and $u \in H_2^2(M)$ be a weak solution of*

$$\Delta^2 u + \alpha \Delta u + \frac{\alpha^2}{4} u = bu.$$

If $b \in L^{\frac{n}{4}}(M)$, then $u \in L^s(M)$ for all $s \geq 1$.

2. First and second eigenvalues for a generalized metric

Let $L_+^N(M)$ be the space of L^N-integrable non negative functions which are not identically 0. Denote by $Gr_k^u(H_2^2)$ the set of all k-dimensional subspaces ($k \geq 1$) of $H_2^2(M)$ which are the span of the functions u_1, ..., u_k if and only if $u_{1|_{M-u_1^{-1}(0)}}$,..., $u_{k|_{M-u_k^{-1}(0)}}$ are linearly independent.

Definition 2. *A generalized metric conform to a metric g is of the form $\widetilde{g} = ug$ with $u \in L_+^N(M)$.*

Definition 3. *For any generalized metric $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ of a Riemannian metric g we define the eigenvalue of order $k \geq 1$ to the Branson-Paneitz operator P_g by*

$$\lambda_k(\widetilde{g}) = \inf_{V \in Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v \in V-\{0\}} \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\int_M u^{N-2} v^2 dv_g}.$$

We need the following lemma which is first given in ([1]) for sequences in $H_1^2(M)$ but its proof remains unchanged and we reproduce it here for reason of completeness.

Lemma 4. *If $u \in L_+^N(M)$ and (v_n) is a sequence in $H_2^2(M)$ which converges weakly to v, then*

$$\int_M u^{N-2} \left| v_m^2 - v^2 \right| dv_g \to 0. \tag{2.1}$$

Proof. Letting A be any real positive number, we put $u_A = \inf(u, A)$. Then $(u_A)_A$ is a monotone sequence which converges pointwisely almost everywhere to v, so by Lebesgue monotone convergence theorem, we get

$$\int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})^{\frac{N}{N-2}} dv_g \to 0.$$

On the other hand, we have

$$\int_M u^{N-2} \left| v_m^2 - v^2 \right| dv_g \le \int_M u_A^{N-2} \left| v_m^2 - v^2 \right| dv_g$$
$$+ \int_M \left(u^{N-2} - u_A^{N-2} \right) (|v_m| + |v|)^2 dv_g.$$

Using the Hölder inequality, we obtain

$$\int_M u^{N-2} \left| v_m^2 - v^2 \right| dv_g \le A^{N-2} \int_M \left| v_m^2 - v^2 \right| dv_g$$
$$+ \left(\int_M \left| u^{N-2} - u_A^{N-2} \right|^{\frac{N}{N-2}} dv_g \right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int_M (|v_m| + |v|)^N dv_g \right)^{\frac{2}{N}}.$$

Taking account of the boundedness and the strong convergence of (v_m) to v in $L^2(M)$ we get the result. □

Proposition 1. *Let $\widetilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ be any generalized conformal metric to a metric g. The equation*

$$P_g v = \lambda_1 u^{N-2} v \tag{2.2}$$

has a solution of class $C^{4,\alpha}(M)$ ($0 < \alpha < N-2$) with the constraint

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1.$$

Proof. Let (v_m) be a minimizer sequence of $\lambda_1(\widetilde{g}\ )$ with the constraint $\int_M u^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$. The sequence (v_m) is bounded in $H_2^2(M)$ and by passing to a subsequence also labelled (v_m), there exists $v \in H_2^2(M)$ such that

(i) $v_m \to v$ weakly in $H_2^2(M)$

(ii) $v_m \to v$ strongly in $L^2(M)$

From (i), we obtain

$$\|v\| \leq \liminf \|v_m\|$$

and by Lemma 4 we get

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = \lim_{m\to\infty} \int_M u^{N-2} v_m^2 dv_g = 1$$

and we derive that $\|v\|^2 = \lambda_1(\widetilde{g})$.

Consequently v is a non trivial weak solution of the equation (2.2).

By Lemma 3, $v \in L^s(M)$ for any $s \geq 1$ and it follows that $v \in C^{4,\alpha}(M)$, with $\alpha < N-2$. □

2.1. **Positivity of solutions.** Now we are going to show that the equation (2.2) admits a positive solution.

Proposition 2. *If the scalar curvature S_g of the Einsteinian manifold (M,g) is positive, the equation*

$$P_g f = \lambda_1 u^{N-2} v \tag{2.3}$$

has a positive solution with the constraint

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1. \tag{2.4}$$

Proof. Let v be a solution to the equation (2.3) and let f be the solution of the equation

$$\Delta f + \frac{\alpha}{2} f = \left|\Delta v + \frac{\alpha}{2} v\right|$$

with $\alpha > 0$. Clearly $f \in C^{2,\alpha}(M)$ $(\alpha < N-2)$.

If $\Delta v + \frac{\alpha}{2} v \geq 0$ (resp. $\Delta v + \frac{\alpha}{2} v \leq 0$) we have $f = v$ (resp. $f = -v$).

If it is not the case, putting $w = f \pm v$, we get

$$\Delta w \pm \frac{\alpha}{2} w = \left|\Delta f + \frac{\alpha}{2} f\right| \pm \left(\Delta v + \frac{\alpha}{2} v\right) \geq 0 \tag{2.5}$$

so $\Delta(-w) \pm \frac{\alpha}{2}(-w) \leq 0$. The maximum principle asserts that $-w = v \pm f$ attains a maximum $M \geq 0$ then w is a constant function but this is excluded since $-\alpha$ $M \leq 0$ implies that $M = 0$. Consequently $f > |v| \geq 0$.

Let $k \geq 0$ be a real number such that $\int_M u^{N-2}(kf)^2 dv_g = 1$, then $0 < k < 1$. Now letting $\widehat{f} = kf$ and taking account of the equation (2.3) we get

$$\int_M \left(\left(\Delta \widehat{f} \right)^2 + \alpha \left| \nabla \widehat{f} \right|^2 + \overline{\alpha} \widehat{f}^2 \right) dv_g - \lambda_1(\widetilde{g}) =$$

$$k^2 \int_M \left((\Delta f)^2 + \alpha \left| \nabla f \right|^2 + \overline{\alpha} f^2 \right) dv_g - \lambda_1(\widetilde{g}) =$$

$$k^2 \int_M \left(\left(\Delta f + \frac{\alpha}{2} f \right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} f^2 + \overline{\alpha} f^2 \right) dv_g - \lambda_1(\widetilde{g}) =$$

$$k^2 \int_M \left(\left(\Delta v + \frac{\alpha}{2} v \right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} f^2 + \overline{\alpha} f^2 \right) dv_g - \lambda_1(\widetilde{g}) =$$

$$(k^2 - 1)\lambda_1(\widetilde{g}) + \left(\overline{\alpha} - \frac{\alpha^2}{4} \right) \int_M \left(f^2 - v^2 \right) dv_g \leq 0.$$

Consequently

$$\int_M \left(\left(\Delta \widehat{f} \right)^2 + \alpha \left| \nabla \widehat{f} \right|^2 + \overline{\alpha} \widehat{f}^2 \right) dv_g = \lambda_1(\widetilde{g}). \tag{2.6}$$

$\square$

Proposition 3. *Let $u \in L_+^N(M)$, if $v \in H_2^2(M)$ is a weak solution of the equation*

$$P_g v = \lambda_1(\widetilde{g}) u^{N-2} v \tag{2.7}$$

with

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1 \tag{2.8}$$

then there is a weak solution $w \in H_2^2(M)$ of the equation

$$P_g w = \lambda_2'(\widetilde{g}) u^{N-2} w \tag{2.9}$$

with the constraints

$$\int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1, \int_M u^{N-2} vw dv_g = 0$$

where

$$\lambda_2'(\widetilde{g}) = \inf_E \frac{\int_M w P_g w dv_g}{\int_M u^{N-2} w^2 dv_g}$$

and

$$E = \{ u^{\frac{N-2}{2}} w \,:\, w \in H_2^2(M) /\ u^{\frac{N-2}{2}} w \neq 0,\ \int_M u^{N-2} vw dv_g = 0$$
$$\text{and } \int_M u^{N-2} w^2 dv_g = 1 \ \}.$$

Proof. First, we show that the set E is non empty. Let v , $s \in H_2^2(M)$ noncolinear such that $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$, $\int_M u^{N-2}s^2 dv_g = 1$. Necessarily $u^{\frac{N-2}{2}}v \neq 0$ and $u^{\frac{N-2}{2}}s \neq 0$. Observe that $\int_M u^{N-2}vsdv_g \neq 1$, since if it is not the case the equality is attained in the Hölder inequality and this possible if and only if there a real constant c such that $v = cs$.

Putting $w = \alpha v + \beta s$ with α, $\beta \in R$, we obtain

$$u^{N-2}w = \alpha u^{N-2}v + \beta u^{N-2}s$$

so to get

$$\int_M u^{N-2}vwdv_g = \alpha + \beta \int_M u^{N-2}vsdv_g = 0$$

and

$$\int_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1$$

we let

$$\beta = -\frac{\alpha}{\int_M u^{N-2}vsdv_g}$$

and

$$1 = \int_M u^{N-2}\left(\alpha v + \beta s\right)^2 dv_g$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \int_M u^{N-2}vsdv_g.$$

We obtain

$$\alpha = \pm\left(\frac{\int_M u^{N-2}vsdv_g}{1 - \int_M u^{N-2}vsdv_g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\beta = \pm\frac{1}{\left(\left(1 - \int_M u^{N-2}vsdv_g\right)\int_M u^{N-2}vsdv_g\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Now we will show that w is a weak non trivial solution of the equation (2.9). Let (w_n) be a minimizer sequence of $\lambda_2'(\widetilde{g})$ such that

$$\int_M u^{N-2}w_m^2 dv_g = 1$$

and

$$\int_M u^{N-2}w_m v dv_g = 0.$$

Then the sequence (w_m) is bounded in $H_2^2(M)$ and there is $w \in H_2^2(M)$ a weak solution of the equation (2.9). It remains to verify that $\int_M u^{N-2}w^2 = 1$ and also

$\int_M u^{N-2}wvdv_g = 0$. The first equality follows from Lemma 4 the second one is true since the function $\varphi = u^{N-2}v \in L^{\frac{N}{N-1}}(M)$. $\square$

Proposition 4. *Suppose that the solutions v and w of the equations (2.7) and (2.9) are as in proposition 6, then $\lambda_2(\widetilde{g}) = \lambda_2'(\widetilde{g})$.*

Proof. The weak solution $w \in H_2^2(M)$ of the equation

$$P_g w = \lambda_2'(\widetilde{g}) u^{N-2} w$$

is a minimizer of

$$\lambda_2'(\widetilde{g}) = \inf_{w\in E} \frac{\int_M wP_g w dv_g}{\int_M u^{N-2}w^2 dv_g}$$

where

$$E = \{u^{\frac{N-2}{2}}w : w \in H_2^2(M) \text{ s. t. } u^{\frac{N-2}{2}}w \neq 0 \ , \int_M u^{N-2}vwdv_g = 0$$

$$\text{and } \int_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1\}.$$

Since $u^{\frac{N-2}{2}}v$ and $u^{\frac{N-2}{2}}w$ are linearly independent it follows that $V_o = \text{span}(v,w) \in Gr_2^u(H_2^2(M))$.

Putting

$$f = \lambda v + \mu w \quad \text{with } (\lambda,\mu) \in R^2 - \{(0,0)\}$$

we evaluate

$$s = \frac{\int_M fP_g f dv_g}{\int_M u^{N-2}f^2 dv_g}$$

on the plane V_o.

We obtain

$$\begin{aligned} s &= \frac{\lambda^2 \int_M vP_g(v)\, dv_g + \mu^2 \int_M wP_g(w)\, dv_g}{\lambda^2+\mu^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}\lambda_1(\widetilde{g}) + \frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}\lambda_2'(\widetilde{g}) \\ &= \lambda_1(\widetilde{g})\cos^2\theta + \lambda_2'(\widetilde{g})\sin^2\theta \end{aligned}$$

with $\theta \in \mathbb{R}$.

On the other hand, we have

$$\frac{ds}{d\theta} = (\lambda_2'(\widetilde{g}) - \lambda_1(\widetilde{g}))\sin 2\theta$$

and noting that

$$\lambda_1(\widetilde{g}) \leq \lambda_2'(\widetilde{g})$$

we get easily

$$\min s(\theta) = \lambda_1(\widetilde{g}) \text{ and } \max s(\theta) = \lambda_2'(\widetilde{g}).$$

Consequently

$$\lambda_2'(\widetilde{g}) = \sup_{w \in V_o} \frac{\int_M w P_g(w) dv_g}{\int_M u^{N-2} w^2 dv_g}.$$

On the other hand the infimum of $\sup_{w \in V - \{0\}} \frac{\int_M w P_g(w) dv_g}{\int_M u^{N-2} w^2 dv_g}$ on all the subspaces of $Gr_2^u(H_2^2(M))$ is attained by $V_o = span(v, w)$.

Hence

$$\lambda_2'(\widetilde{g}) = \lambda_2(\widetilde{g}).$$

□

Proposition 5. *If $u \in C^\infty(M)$ with $u \geq 0$ not identically 0. Then any weak solution of the equation*

$$P_g v = \mu u^{N-2} v \tag{2.10}$$

is of class $C^\infty(M)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Proof. Let $u \in C^\infty(M)$, $u \geq 0$ and not identically 0 and v a weak solution of the equation (2.10). We have

$$(\Delta + a)(\Delta + b) v = \mu u^{N-2} v$$

with $a = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\overline{\alpha}}}{2}$ and $b = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\overline{\alpha}}}{2}$.

Putting

$$z = (\Delta + b) v$$

we get

$$(\Delta + a) z = \mu u^{N-2} v$$

and since $v \in H_2^2(M)$, $u^{N-2} v \in H_2^2(M)$ so $z \in H_4^2(M)$. Recurrently, for any $k \geq 2$ we obtain $v \in H_k^2$. Now, classical regularity theorem allows us to conclude that $v \in C^\infty(M)$. □

3. A Sobolev inequality related to $\mu_2(M, g)$

The Sobolev inequality given by Lemma 1 which allows to avoid concentration phenomena for the minimizing sequence of the first Paneitz-Branson invariant $\mu_1(M, g)$ is not sufficient in the case of the second Paneitz-Branson invariant $\mu_2(M, g)$, we propose the following Sobolev type inequality.

Proposition 6. *Let (M,g) be a Riemannian manifold of dimension $n \geq 5$. For any $\epsilon > 0$ there is a constant $A(\epsilon)$ such that, for any $u \in L_+^N(M)$ and any $v \in H_2^2(M)$, we have*

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \leq \left(2^{-\frac{4}{n}}(K_2^2+\epsilon)\int_M (\Delta v)^2 dv_g + A(\epsilon)\int_M v^2 dv_g\right)\left(\int_M u^N dv_g\right)^{\frac{2}{N}}$$

Proof. For any $\epsilon > 0$, put

$$B(\epsilon) = A(\epsilon) K_2^{-2}(1+\epsilon)^{-1}$$

and let

$$G(u,v) = \frac{\int_M (\Delta v)^2 dv_g + B(\epsilon)\int_M v^2 dv_g}{\int_M u^{N-2} v^2 dv_g}\left(\int_M u^N dv_g\right)$$

where $u \in L_+^N(M)$ and $v \in H_2^2(M) - \{0\}$ such that $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \neq 0$.

Obviously $G(u,v)$ is continuous on $L_+^N(M) \times H_2^2(M) - \{0\}$. So $I(u,V) = \sup_{v \in V - \{0\}} G(u,v)$ depends continuously on $u \in L_+^N(M)$ and $V \in Gr_2^u(H_2^2(M))$. We must show that

$$I(u,V) \geq 2^{\frac{4}{n}} K_2^{-2}(1+\epsilon)^{-1}$$

for all $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ and $V \in Gr_2^u(C^\infty(M))$.

Without lost of generality, we suppose that $\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1$. On the other hand the operator

$$v \to Q(v) = u^{\frac{2-N}{2}} \Delta^2 (u^{\frac{2-N}{2}} v) + B(\epsilon) u^{2-N} v \tag{3.1}$$

is a fourth order elliptic and self adjoint with respect to the inner product in $L^2(M)$. Q has a discrete spectrum $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$

The corresponding eigenfunctions $\varphi_1, \varphi_2, ...$ are smooth functions on M. Letting $v_i = u^{\frac{2-N}{2}} \varphi_i$, we get

$$\int_M (\Delta v_i)^2 dv_g + B(\epsilon)\int_M v_i^2 dv_g = \lambda_i \int_M u^{N-2} v_i^2 dv_g$$

with

$$\int_M u^{N-2} v_i v_j dv_g = 0.$$

Let $\widetilde{P}_g$ be the operator defined on $C^\infty(M)$ by $\widetilde{P}_g u = \Delta_g^2 u + B(\epsilon) u$ and let Ω_1 and Ω_2 be two non empty open disjoint sets in M and let v_1 and v_2 be two non trivial solutions to the equation

$$\widetilde{P}_g v_i = \lambda_2 u^{N-2} v_i \tag{3.2}$$

$i = 1, 2$ with supports included respectively in $\overline{\Omega}_1$ and $\overline{\Omega}_2$, the closer sets of Ω_1 and Ω_2 and where λ_2 is the second eigenvalue of the operator Q defined above. By multiplying if necessary $v_1$and v_2 by constants, we assume that $\int_M u^{N-2}v_1^2dv_g = \int_M u^{N-2}v_2^2dv_g = 1$.

Using the Hölder inequality and the Sobolev one given in Lemma 1, we get

$$2 = \int_M u^{N-2}v_1^2dv_g + \int_M u^{N-2}v_2^2dv_g$$

$$\leq \left(\int_{\Omega_1} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} \left(\int_M |v_1|^N dv_g\right)^{\frac{2}{N}} + \left(\int_{\Omega_2} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} \left(\int_M |v_2|^N dv_g\right)^{\frac{2}{N}}$$

$$\leq \left(\int_{\Omega_1} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} K_2^2(1+\epsilon)\left(\int_M (\Delta v_1)^2 dv_g + B(\epsilon)\int_M v_1^2 dv_g\right)$$

$$+\left(\int_{\Omega_2} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} K_2^2(1+\epsilon)\left(\int_M (\Delta v_2)^2 dv_g + B(\epsilon)\int_M v_2^2 dv_g\right).$$

And since v_1 and v_2 are solutions to the equation (3.2), we obtain

$$2 \leq K_2^2(1+\epsilon)\lambda_2\left(\left(\int_{\Omega_1} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} + \left(\int_{\Omega_2} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}}\right).$$

Using Hölder inequality, we get

$$\left(\int_{\Omega_1} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} + \left(\int_{\Omega_2} u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}} \leq 2^{\frac{2}{N}}\left(\int_{\Omega_1} u^N dv_g + \int_{\Omega_2} u^N dv_g\right)$$

so

$$\lambda_2 \geq 2^{\frac{4}{n}}(1+\epsilon)^{-1}K_2^{-2}.$$

Letting $V = span(v_1, v_2)$, we obtain for any $(\alpha,\beta) \in R^2 - (0,0)$,

$$G(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \frac{\int_M \left[(\Delta(\alpha v_1 + \beta v_2))^2 + B(\epsilon)(\alpha v_1 + \beta v_2)^2\right] dv_g}{\int_M u^{n-2}(\alpha v_1 + \beta v_2)^2 dv_g}$$

$$= \frac{\alpha^2 \int_M \left((\Delta v_1)^2 + B(\epsilon)v_1^2\right) dv_g + \alpha^2 \int_M \left((\Delta v_2)^2 + B(\epsilon)v_2^2\right) dv_g}{\alpha^2 \int_M u^{N-2}v_1^2 dv_g + \beta^2 \int_M u^{N-2}v_2^2 dv_g}$$

$$= \lambda_2.$$

Then

$$I(u, V) = \sup_{(\alpha,\beta)\in R^2-(0,0)} G(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda_2$$

and the proof of the proposition is achieved. □

In the particular case of the standard unit (S^n, h) sphere of R^{n+1}, we obtain

Proposition 7. *Let (S^n,h) be the unit sphere of R^{n+1}, $n\geq 5$, and let P be the Paneitz-Branson operator on (S^n,h) . For any $u\in L_+^N(S^n)$ and any $v\in H_2^2(S^n)$, we have*

$$\int_{S^n} u^{N-2}v^2 dv_h \leq 2^{-\frac{4}{n}} K_2^2 \int_{S^n} vP(v)dv_h \left(\int_{S^n} u^N dv_h\right)^{\frac{2}{N}} .$$

Proof. The proof is similar to that of the Proposition 6, by using the Sobolev inequality given by Lemma 2 instead of that given by Lemma 1. □

As corollary of Proposition 7, we get the following Sobolev inequality on the Euclidean space R^n.

Corollary 1. *Let $C_c^\infty(R^n)$ be the space of functions of class C^∞ and of compact supports on R^n. For any $u\in L_+^N(R^n)$ and any $v\in H_2^2(R^n)$, we have*

$$\int_{R^n} u^{N-2}v^2 dx \leq 2^{-\frac{4}{n}} K_2^2 \int_{R^n} (\Delta v)^2 dx \left(\int_{M} u^N dx\right)^{\frac{2}{N}}$$

where dx denotes the Euclidean measure on R^n.

Proof. Since R^n is conformal to $S^n-\{p\}$, where p is any point of S^n and the Paneitz-Branson is a conformal invariant the Corollary 1 follows from Proposition 7. □

Proposition 8. *If $\mu_1(M,g)K_2^2<1$, then*

$$\mu(M,g)=\mu_1(M,g)$$

Proof.

$$\mu_1(M,g)=\inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_1(\widetilde{g})\left(vol(M)\right)^{\frac{4}{n}}$$

$$= \inf_{\substack{u\in C^\infty(M)\\ u>0}} \inf_{v\in C^\infty(M)-\{0\}} \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\int_M u^{N-2}v^2 dv_g}\left(\int_M u^N dv_g\right)^{\frac{4}{n}}$$

$$\leq \inf_{v\in C^\infty(M)-\{0\}} \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\left(\int_M |v|^N dv_g\right)^{\frac{2}{N}}} = \mu(M,g).$$

The inequality in the other sense requires a variational method. Let $g_m=u_m^{\frac{N-2}{2}}g$ with $u_m\in L_+^N(M)$, a minimizer sequence of $\mu_1(M,g)$ i.e.

$$\mu_1(M,g)=\lim_{m\to\infty}\lambda_1(g_m)\left(vol(M,g)\right)^{\frac{4}{n}} .$$

Considering the Yamabe functional

$$Y(u,v) = \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\int_M u^{N-2}v^2 dv_g}\left(\int_M u^N dv_g\right)^{\frac{4}{n}}$$

with $v \in H_2^2(M) - \{0\}$ and $u \in L_+^N(M)$, we write, for any $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} Y(\lambda u, v) &= \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\lambda^{N-2}\int_M u^{N-2}v^2 dv_g}\lambda^{\frac{2N}{n}}\left(\int_M u^N dv_g\right)^{\frac{4}{n}} \\ &= Y(u,v). \end{aligned}$$

So, we can choose the sequence (u_m) such that $\int_M u_m^N dv_g = 1$ and there is a subsequence of (u_m) still labelled by (u_m) converging weakly to $u \geq 0$ in $L^N(M)$.

On the other hand, by Proposition 3 for any $u_m \in L_+^N(M)$ there is $v_m \in H_2^2(M)$ solutions of the equation

$$P_g(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m$$

with the constraint

$$\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1.$$

Obviously (v_m) is bounded in $H_2^2(M)$ so there is $v \in H_2^2(M)$ such that $v_m \to v$ weakly in $H_2^2(M)$, $v_m \to v$ a.e. in M.

Since $\lim_{m\to\infty} \lambda_{1,m} = \mu_1(M,g)$, v is a weak solution of the equation

$$P_g(v) = \mu_1(M,g)u^{N-2}v \ .$$

Now, we are going to show that v satisfies the condition

$$\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1.$$

It is obvious that

$$\int_M u^{N-2}v^2 dv_g \leq 1$$

So we have to show the inequality in the other sense, to do so, we consider

$$\begin{aligned} \int_M u^{N-2}v^2 dv_g &= \int_M u_m^{N-2}v_m^2 dv_g - \int_M (u_m^{N-2}v_m^2 - u^{N-2}v^2)dv_g \\ &= 1 - \int_M (u_m^{N-2}v_m^2 - u^{N-2}v^2)dv_g. \end{aligned}$$

Now, since

$$\left|u_m^{N-2}v_m^2 - u_m^{N-2}(v_m - v)^2\right| \leq C u_m^{N-2}\left|v_m + v\right|\left|v\right|$$

where C is a positive constant

we get

$$u_m^{N-2} v_m^2 - u_m^{N-2}(v_m - v_2)^2 \to u^{N-2} v^2 \text{ in } L^1(M)$$

and

$$\int_M \left(u_m^{N-2} v_m^2 - u^{N-2} v^2\right) dv_g \to \int_M u_m^{N-2}(v_m - v_2)^2 dv_g.$$

so

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g = 1 - \int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g + o(1). \tag{3.3}$$

where $o(1)$ is a sequence converging to 0 as $m \to +\infty$. Using simultaneously the Hölder inequality and the Sobolev inequality given by Lemma 1, we get

$$\begin{aligned}
\int_M u_m^{N-2}(v_m - v)^2 dv_g &\leq \left(K_2^2 + \epsilon\right) \|\Delta (v_m - v)\|_2^2 + A(\epsilon) \|v_m - v\|_2^2 \\
&\leq \left(K_2^2 + \epsilon\right) \left(\int_M (v_m P_g(v_m) - v P_g(v))\, dv_g\right) + o(1) \\
&\leq \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_1(M, g) \int_M (u_m^{N-2} v_m^2 - u^{N-2} v^2) dv_g + o(1) \\
&\leq \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_1(M, g) \left(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Taking account of (3.3), we have

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \geq 1 - \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_1(M, g) \left(1 - \int_M u^{N-2} v^2 dv_g\right) + o(1).$$

Then

$$\left(1 - \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_1(M, g)\right) \int_M u^{N-2} v^2 dv_g \geq 1 - 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_1(M, g) + o(1).$$

So if

$$\mu_1(M, g) K_2^2 < 1$$

we get

$$\int_M u^{N-2} v^2 dv_g \geq 1.$$

Consequently

$$\mu_1(M, g) > 0.$$

Let $\overline{u} = a\,|v|$ with $a > 0$ and

$$\int_M \overline{u}^N dv_g = a^N \int_M v^N dv_g = 1$$

then

$$\begin{aligned}\mu_1(M,g) &\leq \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\int_M \overline{u}^{N-2}v^2 dv_g}\\ &\leq \frac{\mu_1(M,g)\int_M u^{N-2}v^2 dv_g}{a^{N-2}\int_M v^N dv_g}\\ &\leq a^2\mu_1(M,g)\int_M u^{N-2}v^2 dv_g\\ &\leq \mu_1(M,g)\int_M u^{N-2}\overline{u}^2 dv_g\end{aligned}$$

The Hölder inequality implies that

$$\begin{aligned}\mu_1(M,g) \leq \mu_1(M,g)\left(\int_M u^N dv_g\right)^{1-\frac{2}{N}}\left(\int_M \overline{u}^N dv_g\right)^{\frac{2}{N}}\\ \leq \mu_1(M,g).\end{aligned}$$

So the equality is attained in the Hölder inequality and this is possible only if

$$\overline{u} = cu$$

with $c > 0$ is a constant which implies that

$$c = 1$$

and

$$u = \overline{u} = a\,|v|\,.$$

Also

$$a^{N-2}\int_M v^N dv_g = \int_M u^{N-2}v^2 dv_g = 1$$

and

$$\frac{a^N\int_M v^N dv_g}{a^2} = 1$$

Finally since $a > 0$, we get $a = 1$, hence

$$u = |v|\,.$$

That means that v is a weak solution in $H_2^2(M)$ to the equation

$$P_g(v) = \mu_1(M,g)\,|v|^{N-2}\,v.$$

The condition $\int_M v^N dv_g = 1$ implies that v is non trivial. Consequently

$$\mu_1(M,g) = \frac{\int_M P_g(v)dv_g}{\int_M |v|^N dv_g} \geq \mu(M,g).$$

$\square$

4. Existence of a minimizer to $\mu_2(M,g)$

Proposition 9. *If* $\mu_2(M,g)K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$, *then* $\mu_2(M,g)$ *is attained by a generalized metric* $u^{N-2}g$, $u \in L_+^N(M)$.

Proof. Let $g_m = u_m^{N-2}g$ with $u_m \in C^\infty(M)$ and $u_m > 0$ be a minimizing sequence of $\mu_2(M,g)$. Since we can assume that

$$\int_M u_m^N dv_g = 1$$

we have

$$\lim_n \lambda_{2,m} = \mu_2(M,g)$$

By Proposition 3, there are $v_m, w_m \in H_2^2(M)$ such that

$$P(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \tag{4.1}$$

and

$$P(w_m) = \lambda_{2,m} u_m^{N-2} w_m \tag{4.2}$$

with the normalized conditions

$$\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = \int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 1, \quad \int_M u_m^{N-2} v_m w_m dv_g = 0. \tag{4.3}$$

First, we have for any integer $m \geq 1$,

$$\lambda_{1,m} < \lambda_{2,m}.$$

Since, if $\lambda_{1,m} = \lambda_{2,m}$; w_m is a minimizer of $\lambda_{1,m}$. On other hand taking account of the coerciveness of the Paneitz operator P and applying the Lax-Milgram theorem, we get easily that the first eigenvalue $\lambda_{1,m}$ of P_g is simple, so $w_m = \alpha v_m$ with a real $\alpha \neq 0$. Thus by (4.3), we get that

$$\int_M u_m^{N-2} v_m^2 dv_g = 0$$

a contradiction. The sequences $(v_m)_m$ and $(w_m)_m$ are bounded in $H_2^2(M)$ so there are functions $v, w \in H_2^2(M)$ and subsequences still denoted by $(v_m)_m$ and $(w_m)_m$ converging weakly to v and w, respectively, in $H_2^2(M)$. This latter facts and the weak convergence of (u_m) to u in $L^N(M)$ allow us to write in the weak sense that

$$P_g(v) = \nu u^{N-2} v \tag{4.4}$$

and

$$P_g(w) = \mu_2(M,g) u^{N-2} w \tag{4.5}$$

where $\nu = \lim_m \lambda_{1,m} \leq \mu_2(M, g)$.

Now, we are going to show that v ,w fulfill respectively the conditions $\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = \int_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1$ and by the way v, w are not identically null. To do so, we borrow ideas and notations from ([1]).

Set

$$S_m = \left\{\lambda_m v_m + \mu_m w_m \colon\ (\lambda_m, \mu_m) \in R^2,\ \lambda_m^2 + \mu_m^2 = 1,\ \lambda_m \mu_m > \alpha > 0\ \right\}$$

$$S = \left\{\lambda v + \mu w \colon\ (\lambda, \mu) \in R^2,\ \lambda^2 + \mu^2 = 1\right\}$$

and let $\overline{w}_m = \lambda_m v_m + \mu_m w_m$, $\overline{w} = \lambda v + \mu w$ where up to a subsequence $(\lambda_m, \mu_m) \to (\lambda, \mu)$.

Obviously, we have

$$\int_M u^{N-2}\overline{w}^2 dv_g \leq \liminf_m \int_M u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 dv_g = 1. \tag{4.6}$$

For the inequality in the other sense, we have

$$\begin{aligned}\int_M u^{N-2}\overline{w}^2 dv_g &= \int_M u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 dv_g - \int_M (u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 - u^{N-2}\overline{w}^2) dv_g \\ &= 1 - \int_M (u_m^{N-2}v_m^2 - u^{N-2}v^2) dv_g.\end{aligned}$$

Now, since

$$\left|u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 - u_m^{N-2}(\overline{w}_m - \overline{w})^2\right| \leq C u_m^{N-2} \left|\overline{w}_m + \overline{w}\right| \left|\overline{w}\right| \tag{4.7}$$

where $C > 0$ is some constant

we get

$$\left|u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 - u_m^{N-2}(\overline{w}_m - \overline{w})^2\right| \to u^{N-2}\overline{w}^2 \text{ in } L^1(M)$$

and

$$\int_M \left(u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 - u^{N-2}\overline{w}^2\right) dv_g \to \int_M u_m^{N-2}(\overline{w}_m - \overline{w})^2 dv_g. \tag{4.8}$$

Thus

$$\int_M u^{N-2}\overline{w}^2 dv_g = 1 - \int_M u_m^{N-2}(\overline{w}_m - \overline{w})^2 dv_g + o(1)$$

where $o(1)$ is a sequence which goes to 0 as $m \to +\infty$.

Using the Sobolev inequality given by Proposition 6, and taking account of

$$\|u_m\|_N = 1$$

we get

$$\int_M u_m^{N-2}(\overline{w}_m - \overline{w})^2 dv_g \leq 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \|\Delta(\overline{w}_m - \overline{w})\|_2^2 + A(\epsilon) \|\overline{w}_m - \overline{w}\|_2^2 .$$

Now by the Brezis-Lieb lemma ([3]) and the fact that $\|\overline{w}_m - \overline{w}\|_2 \to 0$ as $m \to +\infty$, we obtain

$$\int_M u_m^{N-2} (\overline{w}_m - \overline{w})^2 dv_g \leq 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \left(\|\Delta \overline{w}_m\|_2^2 - \|\Delta \overline{w}\|_2^2 \right) + o(1). \tag{4.9}$$

By the fact that

$$\overline{w}_m - \overline{w} \to 0 \text{ in } H_q^2(M),\ q = 0, 1 \text{ as } m \to +\infty$$

we have

$$\begin{gathered} \|\Delta \overline{w}_m\|_2^2 - \|\Delta \overline{w}\|_2^2 = \textstyle\int_M \left(\overline{w}_m P_g(\overline{w}_m) - \overline{w} P(\overline{w})\right) dv_g + o(1) = \\ \lambda_{1,m} \lambda_m^2 \textstyle\int_M u_m^{N-2} v_m^2 + \lambda_{2,m} \mu_m^2 \int_M u_m^{N-2} w_m^2 - \\ \nu(M,g) \lambda^2 \textstyle\int_M u^{N-2} v^2 - \mu_2 \mu^2 \int_M u^{N-2} w^2 + o(1) \end{gathered}$$

Taking into account of (4.6), we get

$$\begin{aligned} \|\Delta \overline{w}_m\|_2^2 - \|\Delta \overline{w}\|_2^2 &\leq \lambda_{2,m} \left(\int_M u_m^{N-2} \overline{w}_m^2 - \int_M u^{N-2} \overline{w}^2 dv_g \right) \\ + \left(\lambda_{1,m} \lambda_m^2 - \nu(M,g)\lambda^2\right) &\int_M u^{N-2} v^2 + \left(\lambda_{2,m} \mu_m^2 - \mu_2 \mu^2\right) \int_M u^{N-2} w^2 + o(1) \\ &\leq \mu_2(M,g) \int_M (u_m^{N-2} \overline{w}_m^2 - u^{N-2} \overline{w}^2) dv_g + o(1). \end{aligned}$$

Consequently

$$\int_M u^{N-2} \overline{w}^2 dv_g \geq 1 - 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_2(M,g) \int_M (u_m^{N-2} \overline{w}_m^2 - u^{N-2} \overline{w}^2) dv_g + o(1)$$

and since

$$\int_M u_m^{N-2} \overline{w}_m^2 dv_g = 1$$

we obtain

$$\left(1 - 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_2(M,g)\right) \int_M u^{N-2} \overline{w}^2 dv_g \geq 1 - 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_2(M,g) + o(1).$$

So if

$$K_2^2 \mu_2(M,g) 2^{-\frac{4}{n}} < 1$$

we choose $\epsilon > 0$ sufficiently small and get

$$\int_M u^{N-2} \overline{w}^2 dv_g \geq 1.$$

The inequality (4.9), the Lieb-Brezis lemma ([3]) and the strong convergence of the sequence $(\overline{w}_m)_m$ to $\overline{w}$ in $H_q^2(M)$, $q = 0, 1$, we get

$$\int_M u_m^{N-2}(\overline{w}_m - \overline{w})^2 dv_g \le 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \left(\|\Delta\overline{w}_m\|_2^2 - \|\Delta\overline{w}\|_2^2\right) + o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \left(\lambda_{2,m} \int_M u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 dv_g - \mu_2(M,g) \int_M u^{N-2}\overline{w}^2 dv_g\right) + o(1)$$

$$\le 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \left[(\lambda_{2,m} - \mu_2(M,g)) \int_M u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 dv_g + \mu_2(M,g) \int_M \left(u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 - u^{N-2}\overline{w}^2\right) dv_g\right] + o(1).$$

Since $\lambda_{2,m} \to \mu_2(M,g)$ as $m \to +\infty$ and

$$\int_M \left(u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 - u^{N-2}\overline{w}^2\right) dv_g = \int_M u_m^{N-2} \left(\overline{w}_m - \overline{w}\right)^2 dv_g + o(1) \tag{4.10}$$

we obtain

$$\left(1 - 2^{-\frac{4}{n}} \left(K_2^2 + \epsilon\right) \mu_2(M,g)\right) \int_M u_m^{N-2} \left(\overline{w}_m - \overline{w}\right)^2 dv_g \le o(1).$$

So if

$$K_2^2\mu_2(M,g)2^{-\frac{4}{n}} < 1$$

we get

$$\lim_{m\to+\infty} \int_M u_m^{N-2} \left(\overline{w}_m - \overline{w}\right)^2 dv_g = 0.$$

Hence by the equality (4.10), we get

$$\int_M u_m^{N-2}\overline{w}_m^2 dv_g \to \int_M u^{N-2}\overline{w}^2 dv_g.$$

So

$$\int_M u^{N-2}\overline{w}^2 dv_g = 0$$

and since

$$\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = \int_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1$$

and

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1, \lambda\mu \ne 0$$

it follows that

$$\int_M u^{N-2}vw dv_g = 0.$$

Thus the functions $u^{\frac{N-2}{2}}v$, $u^{\frac{N-2}{2}}w$ are linearly independent. □

5. An estimation to $\mu_2(M,g)$

Mimicking which is done in [1], we establish the following lemma.

Lemma 5. *If the manifold (M,g) is of dimensional $n \geq 12$, then* $\mu_2(M,g) < \left[\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}} + \left(K_2^{-2}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}$.

To prove this lemma, we need the following elementary inequality.

Lemma 6. [1] *For any real numbers $x>0$, $y>0$ and $p>2$, there is a constant $C>0$ such that*

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p + C(x^{p-1}y + xy^{p-1}).$$

Proof of Lemma 5. Let $x_o \in M$, $\delta > 0$ sufficiently small and $B_{x_o}(\delta)$ the ball of center x_o and of radius δ and η a C^∞-function

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B_{x_o}(\delta) \\ 0 & \text{if } x \notin B_{x_o}(2\delta) \end{cases} .$$

Put

$$\varphi_\epsilon = \eta(r^2+\epsilon^2)^{-\frac{n-4}{2}}$$

where η is a bumping function, obviously $\varphi_\epsilon \in H_2^2(M)$.

For any $n > 6$ and $\epsilon \to 0$, a calculation done in [4] leads to

$$Y(\varphi_\epsilon) \to K^{-2} - \epsilon^2 c_o + O(\epsilon^3) \tag{5.1}$$

where

$$Y(v) = \frac{\int_M vP_g(v)dv_g}{\left(\int_M |v|^N dv_g\right)^{\frac{2}{N}}}$$

$c_o > 0$

and

$$K_2^{-2} = \frac{n(n+2)(n-2)(n-4)}{16}\omega_{n-1}^{\frac{4}{n}}.$$

ω_{n-1} denotes the volume of the unit Euclidean sphere.

Consider the function

$$v_\epsilon = c_\epsilon \varphi_\epsilon \tag{5.2}$$

with $c_\epsilon > 0$ is such that $\int_M v_\epsilon^N dv_g = 1$. Standard computations give

$$c_\epsilon = c_o \epsilon^{\frac{n-4}{2}} \tag{5.3}$$

with $c_o > 0$.

Denote also by v a smooth positive solution of the equation

$$P_g(v) = \mu_1(M,g)v^{N-1}$$

with $\|v\|_N = 1$. .

Put

$$u_\epsilon = Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1(M,g)^{\frac{1}{N-2}} v.$$

For any $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, we have

$$\int_M (\lambda v_\epsilon + \mu v) P_g(\lambda v_\epsilon + \mu v) dv_g)^2 dv_g$$

$$= \int_M \left(\lambda^2 v_\epsilon P(v_\epsilon) dv_g + \mu^2 v P(v) + 2\lambda\mu v_\epsilon P(v)\right) dv_g.$$

Since $\int_M v P_g(v) dv_g = \mu_1(M,g)$ and $\int_M v_\epsilon P_g(v_\epsilon) dv_g = Y(v_\epsilon)$, we get

$$\int_M (\lambda v_\epsilon + \mu v) P_g(\lambda v_\epsilon + \mu v) dv_g = \lambda^2 Y(v_\epsilon) + \mu^2 \mu_1(M,g)$$

$$+2\lambda\mu\mu_1(M,g)\int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g.$$

and

$$\int_M u_\epsilon^{N-2}(\lambda v_\epsilon + \mu v)^2 dv_g = \lambda^2 \int_M u_\epsilon^{N-2} v_\epsilon^2 dv_g + \mu^2 \int_M u_\epsilon^{N-2} v^2 dv_g$$

$$+2\lambda\mu \int_M u_\epsilon^{N-2} v_\epsilon v dv_g$$

$$\geq \lambda^2 Y(v_\epsilon) \int_M v_\epsilon^N dv_g + \mu^2 \mu_1(M,g) \int_M v^N dv_g + 2\lambda\mu \int_M u_\epsilon^{N-2} v_\epsilon v dv_g$$

$$= \lambda^2 Y(v_\epsilon) + \mu^2\mu_1(M,g) + 2\lambda\mu \int_M u_\epsilon^{N-2} v_\epsilon v dv_g.$$

We have also

$$\int_M u_\epsilon^{N-2} v_\epsilon v dv_g \geq \mu_1(M,g) \int_M v_\epsilon v^{N-1} dv_g$$

so, if $\lambda\mu \geq 0$

$$\frac{\int_M (\lambda v_\epsilon + \mu v) P_g(\lambda v_\epsilon + \mu v) dv_g}{\int_M u_\epsilon^{N-2}(\lambda v + \mu v_\epsilon)^2 dv_g} \leq 1.$$

In the case $\lambda\mu < 0$ and $N-2 \in (0,1]$ i.e. $n \geq 12$, we have

$$u_\epsilon^{N-2} = \left(Y(v_\epsilon)^{\frac{1}{N-2}} v_\epsilon + \mu_1(M,g)^{\frac{1}{N-2}} v\right)^{N-2}$$

$$\leq Y(v_\epsilon) v_\epsilon^{N-2} + \mu_1(M,g) v^{N-2}.$$

Consequently

$$\int_M u_\epsilon^{N-2}(\lambda v_\epsilon+\mu v)^2 dv_g = \lambda^2\int_M u_\epsilon^{N-2}v_\epsilon^2 dv_g + \mu^2\int_M u_\epsilon^{N-2}v^2 dv_g$$
$$+2\lambda\mu\int_M u_\epsilon^{N-2}v_\epsilon v dv_g \geq \lambda^2 Y(v_\epsilon)+\mu^2\mu_1(M,g)$$
$$+2\lambda\mu Y(v_\epsilon)\int_M v_\epsilon^{N-1}v dv_g + 2\lambda\mu\mu_1(M,g)\int_M v_\epsilon v^{N-1}dv_g$$
$$\geq \lambda^2 Y(v_\epsilon)+\mu^2\mu_1(M,g) - C\left(\int_M v_\epsilon^{N-1}v dv_g+\int_M v_\epsilon v^{N-1}dv_g\right)$$

where $C>0$ is a constant independent of ϵ.

Now taking account of (5.2) and (5.3) we get, for any $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$,

$$\frac{\int_M(\lambda v_\epsilon+\mu v)P_g(\lambda v_\epsilon+\mu v)dv_g}{\int_M u_\epsilon^{N-2}(\lambda v+\mu v_\epsilon)^2dv_g}\leq 1+O(\epsilon^{\frac{n-4}{2}}).$$

By Lemma 6, we obtain

$$\int_M u_\epsilon^N dv_g \leq Y(v_\epsilon)^{\frac{n}{4}}\int_M v_\epsilon^N dv_g+\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}}\int_M v^N dv_g \geq$$
$$+C\left(\int_M v_\epsilon^{N-1}v dv_g+\int_M v v_\epsilon^{N-1}dv_g\right)$$
$$= Y(v_\epsilon)^{\frac{n}{4}}+\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}}+C\left(\int_M v_\epsilon^{N-1}v dv_g+\int_M v_\epsilon v^{N-1}dv_g\right).$$

And by the relation (5.1), we deduce that

$$\left(\int_M u_\epsilon^N dv_g\right)^{\frac{4}{n}} \leq \left[\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}}+(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}}-c.\epsilon^2+o(\epsilon^3)+o(\epsilon^{\frac{n-4}{2}})\right]^{\frac{4}{n}}$$
$$=\left[\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}}+(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}-c.\epsilon^2+o(\epsilon^3) \qquad (\frac{n-4}{2}\geq 4).$$

where $c>0$ is a constant.

Hence, for any $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$,

$$\frac{\int_M(\lambda v_\epsilon+\mu v)P_g(\lambda v_\epsilon+\mu v)dv_g}{\int_M u_\epsilon^{N-2}(\lambda v+\mu v_\epsilon)^2dv_g}\left(\int_M u_\epsilon^N dv_g\right)^{\frac{4}{n}}\leq$$
$$\left[\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}}+(K_2^{-2})^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}-c.\epsilon^2+O(\epsilon^3)$$

so

$$\mu_2(M,g)<\left[\mu_1(M,g)^{\frac{n}{4}}+\left(K_2^{-2}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}}.$$

$\square$

6. Strong convergence

Lemma 7. *Suppose that* $\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} < 1$. *Then the sequence* $(v_m)_m$ *(resp.* $(w_m)_m$*) of solutions of the equations (4.1) (resp. of solutions of the equations (4.2)) has a bounded subsequence on* M.

Proof. Let as in the section2 $u_m \in L_+^N(M)$ and $v_m, w_m \in H_2^2(M)$ solutions respectively of the equations

$$P(v_m) = \lambda_{1,m} u_m^{N-2} v_m \tag{6.1}$$

and

$$P(w_m) = \lambda_{2,m} u_m^{N-2} w_m. \tag{6.2}$$

Set

$$S_m = \left\{\lambda_m v_m + \mu_m w_m \colon\ (\lambda_m, \mu_m) \in R^2,\ \lambda_m^2 + \mu_m^2 = 1,\ \lambda_m \mu_m > \alpha > 0\ \right\}$$

$$S = \left\{\lambda v + \mu w \colon\ (\lambda, \mu) \in R^2,\ \lambda^2 + \mu^2 = 1\right\}$$

and let $\overline{w}_m = \lambda_m v_m + \mu_m w_m$, $\overline{w} = \lambda v + \mu w$ where up to a subsequence $(\lambda_m, \mu_m) \to (\lambda, \mu)$.

First we are going to show that the sequence $(\overline{w}_m)_m$ is uniformly bounded on the manifold M. Suppose by contradiction that $(\overline{W}_m)_m$ is unbounded. Then, for every m there exists a point $x_m \in M$ such that

$$\overline{w}_m(x_m) = \max_{x \in M} \overline{w}_m = \xi_m \to +\infty \text{ as } m \to +\infty.$$

Given $\delta > 0$ less than the injectivity radius of (M, g), we let $\widetilde{w}_m$ and $\widetilde{u}_m$ be the functions defined on the Euclidean ball of center 0 and radius $\delta\xi_m$, $B_o(\delta\xi_m)$, by

$$\widetilde{w}_m(x) = \frac{1}{\xi_m} \overline{w}_m(\exp_{x_m}(\frac{x}{\xi_m}))$$

where $\exp_m$ is the exponential map at x_m. Denote by

$$g_m(x) = \left(\exp_{x_m}\right)^* g(\frac{x}{\xi_m})$$

the Riemannian metric on the ball $B_o(\delta\xi_m)$. Clearly, if E is the Euclidean metric, $g_m \to E$ in C^2 on any compact set.

Now, since the functions v_m and w_m are solutions respectively of the equations (6.1) and (6.2) then multiplying by $\overline{w}_m \in H_2^2(M)$ and integrating over the geodesic ball $\exp_{x_m}(B_o(\delta\xi_m))$, we obtain

$$\int_{B_o(\delta\xi_m)} \widetilde{w}_m \Delta_{g_m}^2 \widetilde{w}_m dv_{g_m} + \frac{\alpha}{\xi_m^2} \int_{B_o(\delta\xi_m)} \widetilde{w}_m \Delta \widetilde{w}_m dv_{g_m}$$

$$+\frac{a}{\xi_m^4}\int_{B_o(\delta\xi_m)}\widetilde{w}_m^2 dv_{g_m} \le \lambda_{2,m}\int_{B_o(\delta\xi_m)}\widetilde{u}_m^{N-2}\widetilde{w}_m^2 dv_{g_m}.$$

Thus the fact that $|\widetilde{w}_m| \le 1$ on $B_o(\delta\xi_m)$ and standard elliptic theory lead after passing to a subsequence to

$$\widetilde{w}_m \to \widetilde{w} \quad \text{in } C^4_{loc}(R^n).$$

Independently, we have, for any $R > 0$

$$\int_{B_o(R\delta)}\widetilde{u}_m^{N-2}dx = \int_{B_o(R\delta)} u_m^{N-2}(\exp_{x_m}(\frac{x}{R}))\widetilde{w}_m^2 dv_{g_m} + o(1)$$

$$= \int_{B(x_m,R\delta)} u_m^{N-2}(\exp_{x_m}(\frac{x}{R}))dv_g + o(1)$$

$$\le \int_M u_m^{N-2}(x)dv_g + o(1).$$

So $\widetilde{u}_m \to \widetilde{u}$ weakly in $L^N_{loc}(R^n)$

$$\int_{B_o(R\delta)} u_m^N(\exp_{x_m}(\frac{x}{R}))dv_{g_m} = \int_{B(x_m,R\delta)} u_m^N(x)dv_g \le \int_M u_m^N(x)dv_g$$

Now letting $m \to \infty$, we get

$$\int_{R^n}(\Delta_E\widetilde{w})^2\,dx \le \mu_2\int_{R^n} u^{N-2}\widetilde{w}^2 dx$$

and by the Sobolev inequality given by Corollary 1, we obtain that

$$\int_{R^n}(\Delta_E\widetilde{w})^2\,dx \le \mu_2 2^{-\frac{4}{n}}K_2^2\int_{R^n}(\Delta_E\widetilde{w})^2\,dx\left(\int_{R^n}u^N dx\right)^{\frac{2}{N}}$$

$$\le \mu_2 2^{-\frac{4}{n}}K_2^2\int_{R^n}(\Delta_E\widetilde{w})^2\,dx.$$

Consequently

$$\mu_2 K_2^2 2^{-\frac{4}{n}} \ge 1$$

which contradicts the inequality of the hypothesis, so the sequence $(\overline{w}_m)$ is bounded on M. □

Corollary 2. *The sequence $(v_m)_m$ (resp. $(w_m)_m$)given in (4.1) (resp. in (4.2)) converges strongly in $L^N(M)$.*

Proof. Let $\epsilon > 0$, the Hölder inequality leads to

$$\int_M |v_n - v|^N dv_g \leq \left(\int_M |v_n - v|^{N-\epsilon} dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |v_n + v|^{N+\epsilon} dv_g\right)^{\frac{1}{2}}.$$

By the boundedness of the sequence $(v_n)_n$ in M and the strong convergence of the latter to v in $L^{N-\epsilon}(M)$, we get that $v_n \to v$ in $L^N(M)$. The same is also true for the sequence $(w_n)_n$. $\square$

Corollary 3. *The functions $u^{\frac{N-2}{2}}v$ and $u^{\frac{N-2}{2}}w$ are linearly independent.*

Indeed, since the sequence $(v_m)_m$ (resp.$(v_m)_m$) converges strongly to v (resp.to w) in $L^N(M)$, we pass to the limit in the last equality in (4.3) and get $\int_M u^{N-2} vw dv_g = 0$

As a corollary of Lemma 7 and Corollary 2, we obtain our main result

Theorem 3. *If the Einsteinian manifold (M, g) is of dimension $n \geq 12$, then $\mu_2(M, g)$ is attained by a generalized metric.*

7. Nodals solutions

The same arguments as in the proof of Lemma 3.3 [1] allow us to state.

Lemma 8. *Let $u \in L_+^N(M)$ with $\|u\|_N = 1$.Suppose that w_1, $w_2 \in H_2^2(M) - \{0\}$, such that $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ satisfy*

$$\int_M w_1 P(w_1) dv_g \leq \mu_2(M, g) \int_M u^{N-2} w_1^2 dv_g \tag{7.1}$$

$$\int_M w_2 P(w_2) dv_g \leq \mu_2(M, g) \int_M u^{N-2} w_2^2 dv_g. \tag{7.2}$$

If $(M - w_1^{-1}(0)) \cap (M - w_2^{-1}(0))$ has measure 0, then there exist constants $a > 0$ and $b > 0$ such that $u = aw_1 + bw_2$ and the equalities in (7.1) and (7.2) hold.

Now we establish the existence of a nodal solution.

Theorem 4. *Let v and w as in the Proposition 3 and suppose that the scalar curvature of $(M; g)$ is positive and $\mu_2(M, g) \neq 0$ and attained by a general metric $\widetilde{g} = u^{N-2}g$ with $u \in L_+^N(M)$. Then $u = |w|$ and in particular the equation*

$$P_g(w) = \mu_2(M, g) |w|^{N-2} w \tag{7.3}$$

has a nodal solution.

PROOF. Let v and w as in the Proposition 3. Without lost of generality, we choose $u \in L_+^N(M)$ with $\int_M u^N dv_g = 1$, hence $\lambda_2(\widetilde{g}) = \mu_2(M,g)$. As in the proof of Proposition 9 we have $\lambda_1(\widetilde{g}) < \lambda_2(\widetilde{g})$. Suppose that the solution of the equation (7.3) is not nodal, by taking $-\ w$ if w is non positive, we assume that $w \geq 0$. On the other hand since the scalar curvature of (M,g) is positive, by Proposition 2 the equation

$$P_g(v) = \lambda_1(\widetilde{g})u^{N-2}v$$

has a positive solution and by Proposition 3 with the constraints

$$\int_M u^{N-2}v^2 dv_g = \int_M u^{N-2}w^2 dv_g = 1$$

and

$$\int_M u^{N-2}vw dv_g = 0.$$

This latter equality implies that the set $(M - v^{-1}(0)) \cap (M - w^{-1}(0))$ has measure 0. So by Lemma 8, we get equalities in (7.3), a contradiction with the fact that $\lambda_1(\widetilde{g}) < \lambda_2(\widetilde{g})$. Consequently w is a nodal function.

Suppose that the compact manifold M splits into two non empty disjoint domains $\Omega_1$and Ω_2 such that $M = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup F$ with measure$(F) = 0$. Let v_1 and v_2 be positive solutions to the equation $P_g(v_i) = \lambda_2 u^{N-2} v_i$, such that $v_i = 0$ and $\Delta v_i = 0$ on $\partial\Omega_i$, where λ_2 is the second eigenvalue of the Paneitz-Branson operator P_g. By Lemma 8, there exist constants $a > 0$ and $b > 0$ such that $u = av_1 + bv_2$. It follows that u is of class $C^{o,\alpha}(M)$ with $\alpha \in (0, N-2)$. Observe that the nodal set $u^{-1}(0) \subset v_1^{-1}(0) \cap v_2^{-1}(0) \subset F$.

Now we follows the proof in [1]. Let $h \in C^\infty(M)$ with support in $M - u^{-1}(0)$ and put $u_t = u + th$. Since u is continuous and positive on the support of h, then $u_t > 0$ for t close to 0. The same arguments as the proof in the Proposition 3.3 in [1] we obtain that $|w| = u$ on $M - u^{-1}(0)$. Independently since the nodal set $u^{-1}(0)$ is negligible and u, $|w|$ are continuous, then $|w| = u$ on M. □

Corollary 4. *$\mu_2(M,g)$ is not attained by a classical conformal metric.*

Since if it is not the case, $u > 0$ and w such that $|w| = u$ is not nodal.

References

[1] Amman, B. and Humbert, E. The second Yamabe invariant. J. Funct. Anal. 235(2006), no. 2, 377-412.

[2] Branson, T.P., Group representations arising from Lorentz conformal geometry, J. Funct. Anal., 74, 1987, 199-291.

[3] Brezis, H. and Lieb, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc.88(1983), 486-490.

[4] Caraffa, D., Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposents critiques sur les variétés Riemanniennes compactes. J. Math. Pures et Appl., 80, 9(2001), 941-960.

[5] Chang, S.Y.A., On Paneitz operator- a fourth order differential operator in conformal geometry, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, Essays in honor of Alberto P. Calderon, Eds. M. Christ, C. Kenig and C. Sadorsky, Chicago Lectures in Mathematics, 1999, 127-150.

[6] Chang, S.Y.A. and Yang, P.C., On four order curvature invariant, Contemp. Math. 237, Spectral Problems in Geometry and Arithmetic, Ed. T. Branson, AMS, 1999, 9-28.

[7] Djadli, Z., Hebey, E. , Ledoux, M. , Paneitz-type operators and applications, Duke Math. J. 104, 2000, 129-169.

[8] Djadli, Z., Jourdain, A., Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. Artic. Ric. Mat. (8), 5 No1, (2002) 205-226.

[9] Felli,V., Hebey, E.and Robert, F., Fourth order equations of critical Sobolev growth. Energy function and solutions of bounded energy in the conformally flat case. Nonlinear Differential Equations and Applications, 12, (2005), 171-213

[10] Hebey, E.and Robert, F. Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients, Calc. Var. Partial Differential Equations, 13 (2001) 491-517.

[11] Paneitz, S. A quartic conformally invariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds, Preprint, 1983.

Received June 3, 2007

E-mail address: `m_benalili@mail.univ-tlemcen.dz`

Department of Mathematics, Faculty of Sciences BP119 University Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen Algeria.