République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat en Mathématiques

Option : Sur Certaines Classes d'Equations Elliptiques

Thème

Étude des problèmes elliptiques contenant des singularités prescrites

Présentée par

Mr MESSIRDI Sofiane

Devant le jury composé de :

Président :

Mr ABDELLAOUI Boumediene	Professeur	Univ. Tlemcen

Directeur de thèse :

Mr BOUCHEKIF Mohammed	Professeur	Univ. Tlemcen

Examinateurs :

Mr BOUZAR Chikh	Professeur	Univ. Oran 1
Mr MECHAB Mustapha	Professeur	Univ. Sidi Bel Abbes
Mme NASRI Yasmina	M.C.A,	Univ. Tlemcen

Année universitaire 2014-2015

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :
A mes très chers parents pour leurs dévouements, leurs amours, leurs sacrifices et leurs encouragements. Que ce travail soit, pour eux, un faible témoignage de ma profonde affection et tendresse.
A mes sœurs Selma, Sanaa et son mari et leurs trois enfants Meriem, Khalil et Nourhane.
A toute ma famille et à tous mes chers amis : Abdelah, Mohamed, Miloud, Djazia, Nabila, Amina et au groupe Btissama.
A tous mes amis et camarades Safia, Matalah, Abdelhadi et Ali ainsi à ceux dont je n'ai pas pu citer leurs noms.
Un grand merci à la famille Bendahmane dont je n'oublierais jamais leurs gratitudes.

Remerciements

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté pour terminer ce travail.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de système dynamique de la Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, de l'Université de Tlemcen.

Je tiens, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur **M. Bouchekif**, qui a été un second père pour moi pour ses conseils et ses recommandations qui m'ont été très bénéfiques.

Je remercie Monsieur le Professeur **B. Abdellaoui** de bien vouloir accepter de présider le jury d'examen de mon travail.

Je remercie aussi, les Professeurs **C. Bouzar**, **M. Mechab**, et Madame **Y. Nasri** d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Un grand merci à toutes les personnes qui m'ont soutenue de près ou de loin dans les moments difficiles.

Table des Matières

Notations **3**

Introduction **5**

1 Préliminaires **9**

1.1 Point critique 9

1.2 Principe variationnel d'Ekeland 10

1.3 Théorème du Col (Mountain Pass Theorem) 11

1.4 Espaces de Sobolev 12

1.5 Quelques inégalités et injections de Sobolev utiles 12

1.6 Inégalité de Hardy-Sobolev 13

2 Sur les équations elliptiques non homogènes avec un exposant critique de Sobolev et des singularités prescrites **15**

2.1 Introduction 15

2.2 Préliminaires 18

2.2.1 Quelques résultats 18

2.2.2 Problème de valeurs propres 20

2.2.3 Quelques lemmes 21

2.3 Preuve du théorème 2.1 25

2.3.1 Existence de solutions dans $\mathcal{N}^+$ 25

2.3.2 Existence de solutions dans $\mathcal{N}^-$ 29

3 Sur les problèmes elliptiques avec deux exposants critiques de Hardy-Sobolev au même pôle **37**

3.1 Introduction 37

3.2 Quelques résultats préliminaires 40

3.2.1 Généralités 40

3.2.2 Quelques lemmes 42

3.3 Preuve du théorème 3.1 47

4 Sur les équations elliptiques avec multiples exposants critiques et termes de Hardy **49**

4.1 Introduction 49

4.2 Généralités 51

4.3 Résultat de non existence 52

4.4 Résultat d'existence 55

4.4.1 Condition de Palais–Smale 55

4.4.2 Preuve du théorème 4.2 60

Perspectives **62**

Bibliographie **62**

Notations

- $\mathbb{R}^N$: L'espace Euclidien de dimension N.
- Si $x, y \in \mathbb{R}^N$ alors $x.y$ est le produit scalair dans $\mathbb{R}^N$, c-à-d: $x = (x_1, ..., x_N)$ et $y = (y_1, ..., y_N)$ alors $x.y = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i.y_i$.
- Si $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$.
- $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice.
- $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$.
- δ_a la masse de Dirac au point a.
- δ_∞ la masse de Dirac à l'infini.
- X un espace métrique.
- $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V (où V est un espace de Banach).
- $u_n \to u$ fortement dans V.
- Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
- $\partial\Omega$ le bord de Ω.
- $B(x, r)$ est la boule dans $\mathbb{R}^N$ de centre x et de rayon r notée B_x^r.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^t$ est le gradiant de la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

- Δu est le laplacien de la fonction u: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, c-à-d: $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$.

- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^p \nabla u)$ est le p-laplacien.

- $C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ a support compact dans Ω .

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ completion de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport a la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

- $H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

- H^{-1} le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.

- H_μ est la fermeture de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme
$\|u\| := \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu |x|^{-2} u^2) dx \right)^{1/2}$.

- $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev avec $0 \leq s < 2$.

- $2^*(0) = 2^*$ est l'exposant critique de Sobolev.

- $\overline{\mu} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ est la meilleure constante de Hardy.

- On note les normes de $L^s(\Omega)$, $(1 \leq s < \infty)$ et H^{-1} par $\|.\|_s$ et $\|.\|_-$

- $o_n(1)$ toute quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

- $\mathcal{O}(\varepsilon^t)$ toute quantité tel que $|\mathcal{O}(\varepsilon^t)| / \varepsilon^t < C$, $C > 0$ constante.

- $C([0,1], V)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans V.

- $C^k([0,1], V)$ est l'espace des fonctions de classe C^k de $[0,1]$ dans V, $k \in \mathbb{N}^*$.

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de deux classes de problèmes elliptiques:

- La première classe de problèmes contient un exposant critique et des poids singuliers, exemple type:

$$-\Delta u = \frac{|u|^{2^*(s)-2} u}{|x|^s} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}} |u|^{q_i-2} u$$

où $0 \leq \mu_i \leq \overline{\mu} := \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$qui est la meilleure constante de Hardy, $0 \leq \alpha_i, s < 2$ et $0 < q_i < 2^*$ pour $i = 1, ..., k$.

- La deuxième classe contient plusieurs exposants critiques et des poids avec un seul pôle, modèle type:

$$-\Delta u = \sum_{i=1}^{k} \frac{|u|^{2^*(s_i)-2} u}{|x|^{s_i}}.$$

où $0 \leq s_i < 2$ avec $s_i \neq s_j$ pour $i, j = 1, ..., k$.

Notre principal objectif est d'étudier l'effet des coefficients singuliers des non-linéarités dans l'existence et la multiplicité des solutions de ce genre de problèmes. Les méthodes variationnelles classiques ne s'appliquent pas sur ces types de problèmes.

Ces classes ont été introduites comme modèle de plusieurs phénomènes issus de la Physique, de la Mécanique Quantique, de la Chimie et de la Géométrie Différentielle etc...

L'étude de problèmes contenant un seul exposant a été largement étudiée, on les appelle problèmes de Brezis-Nirenberg. Depuis, il a été généralisé à d'autre opérateurs tels que $-\Delta - \dfrac{\mu}{|x|^2}$, $-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla}{|x|^{2(a+1)}}\right)$ et $-\operatorname{div}\left(|\nabla|^{p-2}\nabla\right)$.

L'estimation des niveaux d'énergies est calculée à partir des fonctions extrémales des inégalités de Sobolev, Hardy-Sobolev ou plus généralement de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Elle nous permet de récupérer la "compacité locale des suites de Palais-Smale" sous un certain seuil.

Il ressort de notre étude et des études antérieures [7, 8, 13, 16], que dans la première classe de problèmes il existe une compétition entre les énergies produites par les non-linéarités critiques. Le terme dont l'énergie dominante (plus forte) provoque l'existence des solutions, parmi elles une est appelée solution de moindre énergie (ground state).

Notre travail consiste à étudier localement en chaque pôle l'existence d'au moins deux solutions non triviales du problème considéré (positives lorsque la donnée est localement positive).

Dans le cas où les pôles des poids considérés sont identiques on a constaté qu'il n'y a pas de compétition entre les énergies produites par les non-linéarités critiques [14]. Les puissances des poids au voisinage du pôle déterminent l'existence de solutions.

Plus explicitement, le chapitre 2 est consacré à l'étude du problème elliptique suivant

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\Delta u - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\mu_i}{|x-a_i|^2}u = |u|^{2^*-2}u + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_i}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}}u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, $k \in \mathbb{N}^*$; pour $i = 1, ..., k$, $a_i \in \Omega$, $a_i \neq a_j$, $a_i \neq 0$ et α_i sont des constantes positives; λ_i et μ_i sont des paramètres positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i < \lambda^1$, où λ^1 est une consante qui sera définie par la suite et $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i < \overline{\mu} := \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.

Les résultats obtenus sont:

Si f est une fonction mesurable bornée et positive localement au voisinage de chaque

a_i vérifiant l'hypothèse suivante:

$$A_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}(f) := \inf_{\|u\|_{2^*}=1} \left\{ C_N \left(T(u)\right)^{(N+2)/4} - \int_\Omega fu \; dx \right\} > 0$$

où $T(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} u^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}} u^2 \right) dx,$
$C_N = \frac{4}{N-2} \left(\frac{N-2}{N+2}\right)^{(N+2)/4}, \tilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ et $\widetilde{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_k)\,;$

alors le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins $2k$ solutions positives.

Le chapitre 3 est dédié au problème suivant:

$$(\mathcal{P}_\Omega) \begin{cases} -\Delta u - \dfrac{\mu}{|x|^2} u = \dfrac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} u + \dfrac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)-2} u, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$, $0 < \alpha, \beta < 2$; et pour $0 < t < 2$, $2^*(t) = \frac{2(N-t)}{N-2}$ est l'exposant critique de Hardy-Sobolev.

De l'identité de Pohozaev il en ressort que le problème $(\mathcal{P}_\Omega)$ n'admet pas de solution non triviale lorsque Ω est un domaine borné étoilé par rapport à l'origine. L'étude du problème $(\mathcal{P}_{\mathbb{R}^N})$ a donné le résultat suivant:
L'existence d'au moins une solution positive du problème considéré en utilisant le principe de concentration de compacité de P.L. Lions et le théorème du Col.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude du problème $(\mathcal{P}_\Omega)$ moyennant une perturbation par un terme d'ordre inférieur à 2^* du type $|u|^{q-2} u$. Sous des conditions suffisantes sur q, on a montré l'existence d'au moins une solution non triviale.

Liste des publications

[1] M. Bouchekif, S. Messirdi, On elliptic problems with two critical Hardy-Sobolev exponents at the same pole, Appl. Math. Lett. 42 (2015) 9-14.

[2] M. Bouchekif, S. Messirdi, On nonhomogeneous elliptic equations with critical Sobolev exponent and prescribed singularities. Submitted.

[3] M. Bouchekif, S. Messirdi, Elliptic equations with multiple critical nonlinearities and Hardy term. In preparation.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle brièvement les définitions de base dont on fera usage fréquemment dans les parties suivantes. Il s'agit notamment de définir les points critiques, la condition de Palais-Smale et de rappeler le principe variationnel d'Ekeland et le Théorème du Col (Mountain Pass Theorem). Le chapitre s'achève par quelques inégalités et injections de Sobolev utiles pour la suite de notre travail.

1.1 Point critique

Soient V un espace de Banach, $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ et $E' : V \to V'$ (V' dual topologique de V), la dérivée au sens de Fréchet de E.

Définition 1.1 *[24] On dit que $u \in V$ est un point critique de E si $E'(u) = 0$, sinon u est dit un point régulier.*
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de E s'il existe un point critique u de E tel que $E(u) = c$. Sinon, c est dite une valeur régulière.

La notion de point critique peut être définie comme minimum local d'une fonctionnelle, mais en genéral ceci n'a lieu qu'en présence d'une certaine propriété de compacité, par exemple pour la fonction $E(u) = \exp(-u)$, la valeur $c = 0$ n'est jamais atteinte. Pour cela on exige que E satisfasse une certaine condition de compacité.

Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point dont on espère montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la condition de Palais-Smale.

Définition 1.2 *[24] On dit que $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ satisfait la condition de Palais-Smale de niveau c, ($(P\text{-}S)_c$ en abrégé), si de toute suite $(u_n) \subset V$ vérifiant*

$$E(u_n) \to c, \quad et \quad E'(u_n) \to 0 \quad dans \;\; V' \;\; quand \; n \to \infty,$$

on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans V vers un point critique de E.
Si la condition de $(P\text{-}S)_c$ est vérifiée pour tout $c \in \mathbb{R}$, on dit alors que E vérifie la condition de Palais-Smale ($(P\text{-}S)$ en abrégé).

1.2 Principe variationnel d'Ekeland

Le théorème et le corollaire suivants montrent qu'il est possible de trouver des suites minimisantes sous certaines conditions sur la fonctionnelle.

Théorème 1.1 *[12] Soit (X, d) un espace métrique complet et $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement. On suppose que E est bornée inférieurement et on pose*

$$c = \inf_X E > -\infty;$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_\varepsilon \in X$ tel que

$$\begin{cases} c \leq E(\gamma_\varepsilon) \leq c + \varepsilon \\ E(\gamma) - E(\gamma_\varepsilon) + \varepsilon d(\gamma, \gamma_\varepsilon) > 0 \quad \forall \gamma \in X, \;\; \gamma \neq \gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Corollaire 1.1 *[12] Si V est un espace de Banach et $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ est bornée inférieure-*

ment, alors il existe une suite minimisante (u_n) *de* V *telle que*

$$E(u_n) \to \inf_V E, \quad E'(u_n) \to 0 \ \textit{dans } V' \quad \textit{quand} \ \ n \to \infty.$$

1.3 Théorème du Col (Mountain Pass Theorem)

Le théorème suivant constitue un outil puissant pour montrer l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle.

Théorème 1.2 *[1] Soient* V *un espace de Banach et* $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ *vérifiant la condition de* $(P\text{-}S)$. *On suppose que*
(1) $E(0) = 0$;
(2) *il existe* $\rho > 0$, *et* $\alpha > 0$ *tels que si* $\|u\|_V = \rho$ *alors* $E(u) \geq \alpha$;
(3) *il existe* $u_1 \in V$ *tel que* $\|u_1\|_V \geq \rho$ *et* $E(u_1) < \alpha$.
Soit

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} E(u),$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \ V) \ ; \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = u_1\}.$$

Alors il existe une suite (u_n) *dans* V *telle que*

$$E(u_n) \to c \ \textit{et} \ E'(u_n) \to 0 \ \textit{dans} \ V'.$$

1.4 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.3 *[6] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ \ \textit{tels que} \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \ \forall i = 1, ..., N \right\},$$

où les dérivées sont considérées au sens des distributions.
On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Théorème 1.3 *[6] L'espace $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. Il est de plus séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.5 Quelques inégalités et injections de Sobolev utiles

On commence par l'injection classique de Sobolev.

Théorème 1.4 *[29, 6] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \textit{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} & \textit{si } p < N \\ L^q(\Omega) & \forall q \in [1, \infty) & \textit{si } p = N \\ C\left(\overline{\Omega}\right) & & \textit{si } p > N \end{cases},$$

avec injections continues.

De plus,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \forall q \in [1, p^*) \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} & \text{si } p < N \\ L^q(\Omega) & \forall q \in [1, \infty) & \text{si } p = N \\ C(\overline{\Omega}) & & \text{si } p > N \end{cases},$$

avec injections compactes.

Lemme 1.1 *[6] Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine ouvert borné , $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, et $1 \leq p \leq 2^*$. Alors il existe une constante positive C telle que*

$$\left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

L'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, est compacte si $p < 2^*$.

où $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$ obtenu par la complétion de l'espace des fonctions C^∞ sur Ω à support compact.

1.6 Inégalité de Hardy-Sobolev

On considère l'inégalité suivante de Hardy-Sobolev [17]:

$$\left(\int_\Omega |x|^{-s} |u|^{2^*(s)} dx \right)^{2/2^*(s)} \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

où $N \geq 3$ et $0 < s < 2$.

En particulier, pour $s = 0$ on obtient l'inégalité classique de Sobolev:

$$\int_\Omega |u|^{2^*} dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dans le cas où $s = 2$, on obtient l'inégalité de Hardy [18]:

$$\int_\Omega |x|^{-2} |u|^2 \, dx \leq \frac{1}{\mu} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \forall u \in C_0^\infty (\Omega) .$$

A partir de la première inégalité on peut définir la meilleure constante de Hardy-Sobolev par

$$S_{\mu,s} := \inf_{u \in H_\mu \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |x|^{-s} |u|^{2^*(s)} \, dx \right)^{2/2^*(s)}}.$$

Cette constante est atteinte par une famille de fonctions exrémales associée au problème étudier. Lorsque $s = 0$, S_0 est appelée la meilleure constante de Sobolev.

Chapitre 2

Sur les équations elliptiques non homogènes avec un exposant critique de Sobolev et des singularités prescrites

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la multiplicité des solutions du problème suivant:

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\Delta u - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\mu_i}{|x-a_i|^2} u = |u|^{2^*-2} u + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_i}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}} u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\, \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 3, k \in \mathbb{N}^*$; pour $i = 1, ..., k,\ a_i \in \Omega$; $\lambda_i,\ \mu_i$ sont des paramètres positifs et α_i des constantes positives; f est une fonction mesurable bornée.

Ce problème est caractérisé par la présence des poids singuliers avec différents pôles et l'exposant critique de Sobolev. Ce dernier provoque la perte de compacité de l'injection

de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$.
Dans ce cas, les méthodes classiques ne sont pas directement applicables ce qui rend l'étude plus difficile et originale.

Cette classe d'équations elliptiques contient des potentiels singuliers qui apparaissent dans de nombreux domaines, tels que la mécanique quantique, la physique nucléaire, la physique moléculaire et la cosmologie quantique, pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [13, 15].

On commence par donner un bref historique sur la question.
Le cas régulier i.e. $\lambda_i = \mu_i = 0$ pour $i = 1, ..., k$ a été étudié par Tarantello dans [30]. En utilisant le principe variationnel d'Ekeland [12] et le théorème du Col [1], elle a prouvé l'existence de multiples solutions pour $f \neq 0$ satisfaisant une hypothèse appropriée. Elles sont positives si f l'est aussi.

Pour $k = 1$, Kang et Deng dans [21] ont prouvé l'existence d'au moins deux solutions faibles dans $H_0^1(\Omega)$ pour le problème critique singulier non homogène:

$$-\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \frac{|u|^{2_*(s)-2} u}{|x|^s} + \lambda u + f$$

sous certaines hypothèses suffisantes sur f, λ et μ.

Dans [8], Chen a étudié le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \ V(x) \ u = K(x) \ |u|^{2^*-2} u + \theta h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial \ \Omega, \end{cases}$$

où le poids linéaire V possède m points singuliers, K est une fonction positive bornée définie sur $\overline{\Omega}$ et $h \in H^{-1}$ est positive. Sous certaines hypothèses sur V, θ et μ, il a obtenu l'existence de m solutions positives.

Chen et Rocha dans [10] ont montré l'existence d'au moins quatre solutions non triviales dans $H_0^1(\Omega)$ du problème suivant:

$$-\Delta u-\frac{\lambda}{|x|^2}u=|u|^{2^*-2}u+\frac{\mu}{|x|^{2-\alpha}}u+f$$

et ont établi que l'une au moins d'entre elles change de signe pour $0<\alpha<2$.

La question est: peut-on avoir au moins $2k$ solutions pour notre problème $(\mathcal{P})$? La réponse est affirmative. Plus explicitement, des informations importantes pour l'existence de plusieurs solutions du problème considéré sont obtenues.

Notre travail est lié aux résultats obtenus par Chen [8] et Chen et Rocha [10], à notre connaissance nos résultats sont nouveaux et intéressants, ils permettent d'obtenir $2k$ solutions du problème $(\mathcal{P})$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Dans ce qui suit, on indique les principaux résultats du chapitre. On utilise l'hypothèse suivante:

$$A_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}(f):=\inf_{\|u\|_{2^*}=1}\left\{C_N\left(T(u)\right)^{(N+2)/4}-\int_\Omega fu\,dx\right\}>0 \qquad (\mathcal{F})$$

où $T(u)=\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}u^2-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}}u^2\right)dx$,
$C_N=\frac{4}{N-2}\left(\frac{N-2}{N+2}\right)^{(N+2)/4}$, $\tilde{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_k)$ et $\widetilde{\mu}=(\mu_1,...,\mu_k)$.

Théorème 2.1 *Soient $\lambda_i,\mu_i\geq 0$ pour $i=1,..,k$ tels que $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i<\lambda^1$, $\sum_{i=1}^{k}\mu_i<\overline{\mu}:=\left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ et f est une fonction mesurable, bornée, qui est positive localement au voisinage de chaque a_i et satisfait $(\mathcal{F})$. Alors le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins $2k$ solutions positives dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $0<\alpha_i<\sqrt{\overline{\mu}-\mu_i}$.*

La constante positive λ^1 sera définie par la suite.

2.2 Préliminaires

On donne dans cette section quelques résultats préliminaires utiles pour la suite de notre travail.

2.2.1 Quelques résultats

Le problème $(\mathcal{P})$ est liée à l'inégalité de Hardy [18]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x-a|^2} dx \leq \frac{1}{\overline{\mu}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx, \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}^N,\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

où $\overline{\mu}$ est la meilleure constante de Hardy.

Si $\mu \in (0, \overline{\mu})$ et $a \in \Omega$, on pose

$$S_\mu(\Omega) := \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2 - \mu \left\| \frac{u}{|x-a|} \right\|^2}{\|u\|_{2^*}^2}$$

D'après [19], S_μ est indépendant de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dans le sens où $S_\mu(\Omega) = S_\mu\left(\mathbb{R}^N\right) = S_\mu$. En outre, S_μ est atteinte par la famille de fonctions

$$U_{\varepsilon,a}(x) := \frac{[4\varepsilon(\overline{\mu}-\mu)N/N-2]^{(N-2)/4}}{\left(\varepsilon |x-a|^{\gamma^-/\sqrt{\overline{\mu}}} + |x-a|^{\gamma^+/\sqrt{\overline{\mu}}}\right)^{(N-2)/2}},\ \varepsilon > 0,$$

où $\gamma^- = \sqrt{\overline{\mu}} - \sqrt{\overline{\mu}-\mu}$ et $\gamma^+ = \sqrt{\overline{\mu}} + \sqrt{\overline{\mu}-\mu}$.

De plus les fonctions $U_{\varepsilon,a}$ satisfassent

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x-a|^2} = |u|^{2^*-2} u & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{a\} \\ u \longrightarrow 0 & \text{quand } |x| \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |U_{\varepsilon,a}|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla U_{\varepsilon,a}|^2 - \mu \frac{U_{\varepsilon,a}^2}{|x-a|^2} \right) dx = S_\mu^{N/2}.$$

Dans la suite, on considère $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, pour $i = 1, .., k$, tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i < \lambda^1$ et $\sum_{i=1}^{k} \mu_i < \overline{\mu}$.

H designe fermeture de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour la norme

$$\|u\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x - a_i|^2} u^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Cette norme est équivalente, en vertu de l'inégalité de Hardy à la norme usuelle $(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx)^{1/2}$.

Pour tout $u \in H \backslash \{0\}$, on définit la quantité positive

$$t_{\max} = t_{\max}^u = (\frac{T(u)}{(2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*}})^{1/(2^*-2)}$$

et la fonctionnelle $J : H \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} J(u) &= t_{\max} T(u) - t_{\max}^{2^*-1} \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &= C_N T(u)^{(N+2)/4} |u|_{2^*}^{-N/2}. \end{aligned}$$

L'énergie fonctionnelle associée à $(\mathcal{P})$ est donnée par l'expression suivante:

$$I(u) := \frac{1}{2} T(u) - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega f u dx.$$

Alors $I \in C^1(H, \mathbb{R})$. Une solution faible du problème $(\mathcal{P})$ correspond à un point critique de I donnée par:

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla \varphi - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x - a_i|^2} u\varphi - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{|x - a_i|^{2-\alpha_i}} u\varphi \right) dx +$$

$$- \int_\Omega |u|^{2^*-2} u\varphi dx - \int_\Omega f\varphi dx = 0, \qquad \text{pour tout } \varphi \in H.$$

D'autres arguments de la régularité elliptique impliquent qu'une solution faible $u \in H$ est en effet de classe $C^2(\Omega \backslash \{a_1, a_2, ..., a_k\})$ et on peut dire que u satisfait $(\mathcal{P})$ dans le sens classique. L'étude de la régularité des solutions est prévue comme perspective du travail.

Comme I n'est pas bornée inférieurement dans H, on considère le problème sur la variété de Nehari:

$$\mathcal{N} = \{u \in H \backslash \{0\} \; ; \; \langle I'(u), u \rangle = 0\}.$$

Ainsi $u \in \mathcal{N}$ si et seulement si:

$$T(u) - |u|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega fu \; dx = 0.$$

Il est naturel de décomposer $\mathcal{N}$ en trois sous-ensembles disjoints:

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in \mathcal{N} \; ; \; \langle I''(u), u \rangle > 0\},$$

$$\mathcal{N}^- = \{u \in \mathcal{N} \; ; \; \langle I''(u), u \rangle < 0\}$$

et

$$\mathcal{N}^0 = \{u \in \mathcal{N} \; ; \; \langle I''(u), u \rangle = 0\},$$

avec

$$\begin{aligned}
\langle I''(u), u \rangle &= 2T(u) - 2^* \|u\|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega fu \; dx \\
&= T(u) - (2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*} \\
&= (2 - 2^*) T(u) + (2^* - 1) \int_\Omega fu \; dx.
\end{aligned}$$

2.2.2 Problème de valeurs propres

L'inégalité de Hardy montre que l'opérateur $L_{\widetilde{\mu}} u = -\Delta u - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x - a_i|^2} u$ avec $\widetilde{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_k)$ est définie positif sur H pour $\mu_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \mu_i < \overline{\mu}$ et a un spectre discret [11].

En outre, le problème aux valeurs propres suivant avec des potentiels de Hardy et des coefficients singuliers, pour j fixé dans $\{1, ..., k\}$,

$$(\mathcal{E}_j) \begin{cases} -\Delta u - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\mu_i}{|x-a_i|^2} u = \lambda \dfrac{u}{|x-a_j|^{2-\alpha_j}} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\, \Omega. \end{cases}$$

où $0 < \alpha_j < 2$, λ et $\mu_i \geq 0$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i < \overline{\mu}$, possède une suite de valeurs propres $\left\{ \lambda_{\widetilde{\mu}}^k \left(|x-a_j|^{\alpha_j - 2} \right) \right\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$0 < \lambda_{\widetilde{\mu}}^1 \left(|x-a_j|^{\alpha_j-2} \right) < \lambda_{\widetilde{\mu}}^2 \left(|x-a_j|^{\alpha_j-2} \right) \leq ... \leq \lambda_{\widetilde{\mu}}^k \left(|x-a_j|^{\alpha_j-2} \right) ... \to \infty \text{ quand } k \to \infty.$$

La première valeur propre de $(\mathcal{E}_j)$ est simple, positive donnée par

$$\lambda_j^1 := \lambda_{\widetilde{\mu}}^1 \left(|x-a_j|^{\alpha_j-2} \right) = \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} u^2 \right) dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u^2}{|x-a_j|^{2-\alpha_j}} dx}.$$

On pose

$$\lambda^1 := \min_{j=1,..,k} \left\{ \lambda_j^1 \right\}.$$

2.2.3 Quelques lemmes

Lemme 2.1 *Soient $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ pour $i = 1, .., k$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i < \overline{\mu}$, et $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i < \lambda^1$. Alors $M > 0$ où $M := \inf \left\{ (T(u))^{1/2} \ ;\ u \in H \text{ et } \|u\|_{2^*} = 1 \right\}$.*

Preuve: On sait que

$$\lambda_i^1 \int_\Omega \frac{u^2}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}} dx \leq \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} u^2 \right) dx,$$

On en déduit

$$T(u) \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda^1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x - a_i|^2} u^2\right) dx.$$

Ainsi par l'inégalité de Hardy, on a l'estimation

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq T(u) \geq K \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx,$$

avec

$$K := \left(1 - \frac{1}{\lambda^1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}} \sum_{i=1}^{k} \mu_i\right).$$

D'où

$$(T(u))^{1/2} \geq K^{1/2} S_0 > 0, \text{ pour tout } u \in H \text{ tel que } \|u\|_{2^*} = 1,$$

où S_0 est la meilleure constante de Sobolev. ■

On définit la fonction $\varphi_a \in C_0^{\infty}(\Omega)$ telle que pour $\delta > 0$;

$$0 \leq \varphi_a \leq 1, \ \varphi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - a| \geq 2\delta \\ 1 & \text{si } |x - a| \leq \delta \end{cases} \quad \text{et } |\nabla \varphi_a(x)| \leq C.,$$

Posons $u_{\varepsilon,i}(x) = \varphi_{a_i}(x) U_{\varepsilon,a_i}(x)$ pour $i \in \{1, ..., k\}$.

Proposition 2.1 *Si $\omega \in H$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a*

$$(i) \quad \int_{\Omega} \left(|\nabla u_{\varepsilon,i}|^2 - \frac{\mu_i}{|x - a_i|^2} u_{\varepsilon,i}^2\right) dx = S_{\mu_i}^{N/2} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/2}\right).$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} u_{\varepsilon,i}^{2^*-1} \omega dx = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/4}\right).$$

$$(iii) \quad \int_{\Omega} u_{\varepsilon,i}^{2^*} dx = S_{\mu_i}^{N/2} - \mathcal{O}\left(\varepsilon^{N/2}\right).$$

$$(iv) \quad \int_{\Omega} |x - a_i|^{\alpha_i - 2} u_{\varepsilon,i}^2 \, dx = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\alpha_i \sqrt{\bar{\mu}}/2 \sqrt{\bar{\mu} - \mu_i}}\right) \text{ où } 0 < \alpha_i < 2\sqrt{\bar{\mu} - \mu_i}.$$

Preuve: Les preuves de $((i),(ii))$ et $((iii), (iv))$ sont similaires aux preuves de [[16], Lemme 11.1] et [[10], Proposition 2.4] respectivement. ■

Lemme 2.2 *Soit $f \neq 0$ satisfaisant la condition $(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{N}^0 = \varnothing$.*

Preuve: Supposons que $\mathcal{N}^0 \neq \varnothing$. Alors pour $u \in \mathcal{N}^0$,

$$T(u) = (2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*},$$

ainsi

$$0 = T(u) - \|u\|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega fu\ dx = (2^* - 2) \|u\|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega fu\ dx. \tag{2.2}$$

La condition $(\mathcal{F})$ et l'identité (2.2) donnent

$$\begin{aligned} 0 &< C_N \left(T(u)\right)^{(N+2)/4} - \int_\Omega fu\ dx \\ &= (2^* - 2) \|u\|_{2^*}^{2N/(N-2)} \left[\left(\frac{T(u)}{(2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*}} \right)^{(N+2)/4} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

ce qui nous mène à une contradiction ■

Lemme 2.3 *Supposons que $f \neq 0$ satisfaisant la condition $(\mathcal{F})$, alors pour chaque $u \in \mathcal{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $t : B(0, \varepsilon) \subset H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $t(0) = 1$, $t(v)(u - v) \in \mathcal{N}$ pour $\|v\| < \epsilon$ et*

$$\langle t'(0), v \rangle = \frac{\int_\Omega \left\{ 2 \left(\nabla u \nabla v - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\mu_i}{|x - a_i|^2} - \frac{\lambda_i}{|x - a_i|^{2-\alpha_i}} \right) uv \right) - 2^* |u|^{2^*-2} uv - fv \right\} dx}{T(u) - (2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*}}.$$

Preuve: Soit $F : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$, définit par

$$F(s, v) = sT(u - v) - s^{2^*-1} \|u - v\|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega f(u - v) dx.$$

Puisque $F(1,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial s}(1,0) = T(u) - (2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*} \neq 0$, alors en appliquant le théorème des fonctions implicites au point $(1,0)$, on obtient directement le résultat énoncé. ∎

On définit, pour $i \in \{1,..,k\}$,

$$\beta_i(u) := \frac{\int_\Omega \psi_i(x) |\nabla u|^2 \, dx}{|\nabla u|_2^2} \text{ où } \psi_i(x) = \min\{\delta, |x - a_i|\} \text{ et } \delta > 0.$$

Posons $r_0 = \frac{\delta}{3}$ avec $\delta < \frac{1}{4}\min_{i \neq j} |a_i - a_j|$ et soit

$$\mathcal{N}_i^+ = \left\{u \in \mathcal{N}^+ \mid \beta_i(u) \leq r_0\right\} \text{ et } \mathcal{N}_i^- = \left\{u \in \mathcal{N}^- \mid \beta_i(u) \leq r_0\right\}.$$

On note

$$m_i^+ := \inf_{u \in \mathcal{N}_i^+} I(u) \qquad \text{et} \qquad m_i^- := \inf_{u \in \mathcal{N}_i^-} I(u).$$

Lemme 2.4 *Soient $\delta > 0$ et r_0 défini comme ci-dessus. si $\beta_i(u) \leq r_0$ alors*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq 3 \int_{\Omega \setminus B_i^\delta} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Preuve: Evidente. ∎

Lemme 2.5 *Soit f satisfaisant la condition $(\mathcal{F})$. Alors pour tout $u \in H \setminus \{0\}$, il existe un unique $t^+ = t^+(u) > 0$ tel que $t^+ u \in \mathcal{N}^-$ et*

$$t^+ > \left(\frac{T(u)}{(2^* - 1) \|u\|_{2^*}^{2^*}}\right)^{(N-2)/4} := t_{\max}(u) = t_{\max},$$

$$I\left(t^+ u\right) = \max_{t \geq t_{\max}} I(tu).$$

Par ailleurs, si $\int_\Omega fu \, dx > 0$, alors il existe un unique $t^- = t^-(u) > 0$ tel que $t^- u \in \mathcal{N}^+$, $t^- < t_{\max}$ et $I(t^- u) = \min_{0 \leq t \leq t_{\max}} I(tu)$.

Preuve: La preuve est similaire à celle de [30]. ■

2.3 Preuve du théorème 2.1

Dans ce qui suit nous considérons j fixé dans $\{1, ..., k\}$.

2.3.1 Existence de solutions dans $\mathcal{N}^+$

En utilisant le principe variationel d'Ekeland on montre l'existence de k solutions dans $\mathcal{N}^+$.

Proposition 2.2 *Soit f une fonction mesurable bornée, localement positive au voisinage de chaque point a_i et satisfaisant $(\mathcal{F})$. Alors $m_i^+ = \inf\limits_{v \in \mathcal{N}_i^+} I(v)$ est atteinte au point $u_i \in \mathcal{N}_i^+$ qui est un point critique et même un minimum local de I.*

Preuve: On montre d'abord que I est bornée inférieurement sur $\mathcal{N}$. En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $u \in \mathcal{N}$, on obtient

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}T(u) - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega fu \\ &\geq \frac{-1}{16NK}\left[(N+2)\|f\|_-\right]^2. \end{aligned}$$

En particulier,

$$m_j^+ \geq m_0 \geq \frac{-1}{16NK}\left[(N+2)\|f\|_-\right]^2,$$

où $m_0 = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}} I(u)$.

On affirme que $m_j^+ < 0$. En fait, on a pour un certains $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $\int_{B_j^\varepsilon} fu_{\varepsilon,j} > 0$.

Soit $0 < t_{\varepsilon,j}^- < t_{\varepsilon,j,\max}$ défini dans le lemme 2.5 de telle sorte que $t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j} \in \mathcal{N}^+$. Puisque $\beta_j\left(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, on obtient l'existence de ε_2 tel que $\beta_j\left(t_{\varepsilon,j}^- u_{\varepsilon,j}\right) \leq r_0$ pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

Alors $t^-_{\varepsilon,j}u_{\varepsilon,j} \in \mathcal{N}^+_j$ et

$$\begin{aligned}
I\left(t^-_{\varepsilon,j}u_{\varepsilon,j}\right) &= \frac{\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2}{2}T(u_{\varepsilon,j}) - \frac{\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^{2^*}}{2^*}\left\|u_{\varepsilon,j}\right\|^{2^*}_{2^*} - t^-_{\varepsilon,j}\int_\Omega f u_{\varepsilon,j} \\
&= -\frac{\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2}{2}T(u_{\varepsilon,j}) + \frac{N+2}{2N}\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^{2^*}\left\|u_{\varepsilon,j}\right\|^{2^*}_{2^*} \\
&< -\frac{\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2}{N}T(u_{\varepsilon,j}) < 0,
\end{aligned}$$

cela conduit à $-\infty < m_0 \leq m^+_j < 0$.

Le principe variationnel d'Ekeland nous fournit une suite minimisante $(u_{j,n})_n \subset \mathcal{N}^+_j$ vérifiant les propriétés suivantes

$$(i) \qquad\qquad I\left(u_{j,n}\right) < m^+_j + \frac{1}{n}$$

et

$$(ii) \qquad\qquad I\left(w\right) \geq I\left(u_{j,n}\right) - \frac{1}{n}\left\|\nabla\left(w-u_{j,n}\right)\right\|_2, \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{N}^+_j.$$

En prenant n assez grand, on a pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$

$$I\left(u_{j,n}\right) = \frac{1}{N}T(u_{j,n}) - \frac{N+2}{2N}\int_\Omega f u_{j,n} < m^+_j + \frac{1}{n} \leq -\frac{\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2}{N}T(u_{\varepsilon,j}).$$

Cela implique

$$\int_\Omega f u_{j,n} \geq \frac{2}{N+2}\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2 T(u_{\varepsilon,j}) > 0.$$

Par conséquent, $u_{j,n} \neq 0$ et on a l'estimation

$$\frac{2}{N+2}\frac{\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2}{\|f\|_-}T(u_{\varepsilon,j}) \leq \|u_{j,n}\| \leq \frac{N+2}{2K}\|f\|_-.$$

D'où la convergence faible dans H de la suite$(u_{j,n})_n$ vers u_j.

Lemme 2.6 *Soit f satisfaisant la condition $(\mathcal{F})$, alors $\|I'(u_{j,n})\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Preuve: Supposons que $\|I'(u_{j,n})\|_2 > 0$ pour n assez grand.
En appliquant le lemme 2.3 avec $u = u_{j,n}$ et $w = \delta \frac{I'(u_{j,n})}{\|I'(u_{j,n})\|_2}$, $\delta > 0$ assez petit, on constate que pour

$$t_n(\delta) := t\left[u_{j,n} - \delta \frac{I'(u_{j,n})}{\|I'(u_{j,n})\|}\right], \ w_\delta = t_n(\delta)\left[u_{j,n} - \delta \frac{I'(u_{j,n})}{\|I'(u_{j,n})\|}\right] \in \mathcal{N}^+.$$

Ainsi, il existe δ_0 tel que $w_\delta \in \mathcal{N}_j^+$ pour tout $0 < \delta < \delta_0$.

D'après (ii), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\|w_\delta - u_{j,n}\| &\geq I(u_{j,n}) - I(w_\delta) \\ &= (1 - t_{j,n}(\delta))\langle I'(w_\delta),\ u_{j,n}\rangle + \delta t_{j,n}(\delta)\left\langle I'(w_\delta), \frac{I'(u_{j,n})}{\|I'(u_{j,n})\|}\right\rangle + o_n(\delta).\end{aligned}$$

Divisant par δ et passant à la limite quand δ tend vers zéro, on obtient

$$\frac{1}{n}(1 + |t'_{j,n}(0)|\,\|u_{j,n}\|) \geq -t'_{j,n}(0)\langle I'(u_{j,n}),\ u_{j,n}\rangle + \|I'(u_{j,n})\| = \|I'(u_{j,n})\|,$$

où

$$t'_{j,n}(0) = \left\langle t'(0), \frac{I'(u_{j,n})}{\|I'(u_{j,n})\|}\right\rangle.$$

Comme $(u_{j,n})$ est une suite bornée, on conclut que

$$\|I'(u_{j,n})\| \leq \frac{C}{n}\left(1 + |t'_{j,n}(0)|\right).$$

Pour établir le résultat du lemme il suffit de montrer que $|t'_{j,n}(0)|$ est bornée uniformément par rapport à u. En effet, $(u_{j,n})$ est une suite bornée et $w \in B_\delta$, alors

$$\left|t'_{j,n}(0)\right| \leq \frac{C}{\left|T(u_{j,n}) - (2^* - 1)\left\|u_{j,n}\right\|_{2^*}^{2^*}\right|}.$$

Il suffit donc prouver que $\left|T(u_{j,n}) - (2^* - 1)\left\|u_{j,n}\right\|_{2^*}^{2^*}\right|$ est bornée pour n tendant vers ∞. Raisonnant par l'absurde, supposons que

$$T(u_{j,n}) - (2^* - 1)\left\|u_{j,n}\right\|_{2^*}^{2^*} = o_n(1). \tag{2.3}$$

(2.3), implique

$$\left\|u_{j,n}\right\|_{2^*} \geq \gamma, \text{ pour une constante appropriée } \gamma$$

et le fait que $u_{j,n} \in \mathcal{N}$ nous amène à

$$\int_\Omega f u_{j,n} = (2^* - 2)\left\|u_{j,n}\right\|_{2^*}^{2^*} + o_n(1).$$

par suite,

$$0 < \gamma A_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}(f) \leq C_N \left(T(u_{j,n})\right)_{2^*}^{(N+2)/4}\left\|u_{j,n}\right\|_{2^*}^{-N/2} - \int_\Omega f u_{j,n} = o_n(1),$$

ce qui est absurde. Ainsi $\left\|I'\left(u_{j,n}\right)\right\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. ■

On en déduit à l'aide du lemme précédent,

$$\left\langle I'\left(u_j\right), w\right\rangle = 0, \text{ pour tout } w \in H \tag{2.4}$$

i.e. u_j est une solution faible du problème $(\mathcal{P})$.

En particulier, $u_j \in \mathcal{N}$, on a aussi

$$\int_\Omega f u_j = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f u_{j,n} \geq \frac{2}{N+2}\left(t^-_{\varepsilon,j}\right)^2 T(u_{\varepsilon,j}) > 0.$$

Ainsi $u_j \neq 0$. En outre, en vertu du lemme 2.4 et de (2.4), il en résulte que $u_j \in \mathcal{N}^+$ nécessairement.

Comme

$$\beta_j(u_j) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \beta_j(u_{j,n}) \leq r_0,$$

alors $u_j \in \mathcal{N}_j^+$. D'où

$$m_j^+ \leq I(u_j) = \frac{1}{N} T(u_j) - \frac{N+2}{2N} \int_\Omega f\ u_j \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf I(u_{j,n}) = m_j^+.$$

Ainsi $u_{j,n} \longrightarrow u_j$ fortement dans H et $I(u_j) = m_j^+$. A l'aide du lemme 2.4, on en déduit l'existence de k solutions du problème $(\mathcal{P})$. ■

2.3.2 Existence de solutions dans $\mathcal{N}^-$

Dans cette section on détermine le niveau c pour lequel I vérifie la condition de $(PS)_c$.

Lemme 2.7 *la fonctionnelle $I(u)$ satisfait la condition $(PS)_c$ pour tout $c < \frac{1}{N} S_{\mu_l}^{N/2}$, où* $S_{\mu_l}^{N/2} = \min\left(S_{\mu_1}^{N/2}, ..., S_{\mu_k}^{N/2}\right)$.

Preuve: Soit (u_n) une suite vérifiant $(PS)_c$ de I avec $c \in \left(0, \frac{1}{N} \min\left(S_{\mu_1}^{N/2}, ..., S_{\mu_k}^{N/2}\right)\right)$. On sait que (u_n) est bornée dans H, et il existe une suite (u_n) et $v \in H$ tels que

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup v & \text{faiblement dans } H, \\ u_n \rightharpoonup v & \text{faiblement dans } L^2\left(\Omega, |x-a_i|^{-2}\right) \text{ pour } 1 \leq i \leq k; \text{ dans } L^{2^*}(\Omega), \\ u_n \to v & \text{fortement } L^2\left(\Omega, |x-a_i|^{\alpha_i - 2}\right) \text{ pour } 1 \leq i \leq k, \\ u_n \to v & \text{fortement } L^s(\Omega) \text{ pour tout } s,\ 1 \leq s < 2^*. \end{array}$$

Par un argument standard, on en déduit que v est une solution du problème $(\mathcal{P})$. Donc

$$I'(v) = 0 \text{ et } \int_\Omega f u_n = \int_\Omega f v + o_n(1).$$

Ensuite, on vérifie que $v \neq 0$. Supposons par l'absurde que $v \equiv 0$. Par le principe de concentration de compacité [26, 27], il existe une sous-suite, notée aussi (u_n), un ensemble au plus dénombrable $\Im$, des points $(x_j)_{j\in\Im} \subset \Omega\backslash \underset{j\in\Im\backslash\{1,\dots,k\}}{\cup}\{a_j\}$ et un ensembles de nombres non négatifs μ_{x_j}, ν_{x_j}; $\mu_{a_i}, \gamma_{a_i}, \nu_{a_i}$ pour $j \in \Im$ et $1 \leq i \leq k$ tels que:

$$\begin{aligned} |\nabla u_n|^2 &\rightharpoonup d\mu \geq \sum_{j\in\Im} \mu_{x_j}\delta_{x_j} + \sum_{i=1}^{k} \mu_{a_i}\delta_{a_i} \\ \frac{|u_n|^2}{|x-a_i|^2} &\rightharpoonup d\gamma = \gamma_{a_i}\delta_{a_i} \end{aligned}$$

et

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup d\nu = \sum_{j\in\Im} \nu_{x_j}\delta_{x_j} + \sum_{i=1}^{k} \nu_{a_i}\delta_{a_i}$$

où δ_x est la masse de Dirac au point x.

Par les inégalités de Hardy-Sobolev, on trouve

$$\mu_{a_i} - \mu_i\gamma_{a_i} \geq S_{\mu_i}\nu_{a_i}^{2/2^*} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k. \tag{2.5}$$

Vérifions que l'ensemble $\Im$ est fini et soit $\nu_{x_j} = 0$ ou $\nu_{x_j} \geq S_0^{N/2}$ pour tout $j \in \Im$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $a_i \notin B_{x_j}^{\varepsilon}$ pour tout $1 \leq j \leq k$ et $B_{x_i}^{\varepsilon} \cap B_{x_j}^{\varepsilon} = \varnothing$ pour $i \neq j$, et $i, j \in \Im$.
Soit ϕ_ε^j une fonction test centrée au point x_j telle que

$$0 \leq \phi_\varepsilon^j \leq 1,\ \phi_\varepsilon^j = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - x_j| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{si } |x - x_j| > \varepsilon, \end{cases} \text{ et } \left|\nabla\phi_\varepsilon^j\right| \leq \frac{4}{\varepsilon},$$

alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi_\varepsilon^j = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} \phi_\varepsilon^j d\mu \geq \mu_{x_j}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x-a_i|^2}\phi_\varepsilon^j = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_\varepsilon^j d\gamma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}\phi_\varepsilon^j = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_\varepsilon^j d\nu = \nu_{x_j}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\phi_\varepsilon^j = 0.$$

D'où

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\langle I'(u_n), u_n\phi_\varepsilon^j\right\rangle \geq \mu_{x_j} - \nu_{x_j}.$$

Par l'inégalité de Sobolev, on a aussi

$$S_0\nu_{x_i}^{2/2^*} \leq \mu_{x_j},$$

et alors

$$\nu_{x_j} = 0 \text{ ou } \nu_{x_j} \geq S_0^{N/2},$$

ce qui implique que $\Im$ est fini.

Montrons maintenant que la concentration ne peut pas avoir lieu aux points a_i, avec $1 \leq i \leq k$.

Sinon, soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $j \in \Im$ tel que $x_j \notin B_{a_j}^\varepsilon$ et $B_{a_i}^\varepsilon \cap B_{a_j}^\varepsilon = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq k$.

Soit ψ_ε^i une fonction test centrée au point x_i telle que

$$0 \leq \psi_\varepsilon^i \leq 1,\ \psi_\varepsilon^i = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{si } |x - x_i| > \varepsilon, \end{cases} \quad \text{et } \left|\nabla\psi_\varepsilon^i\right| \leq \frac{4}{\varepsilon},$$

alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\psi_\varepsilon^i = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \psi_\varepsilon^i d\mu \geq \mu_{a_i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}\psi_\varepsilon^i = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \psi_\varepsilon^i d\nu = \nu_{a_i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x - a_i|^2}\psi_\varepsilon^i = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \psi_\varepsilon^i d\gamma = \gamma_{a_i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x-a_j|^2}\psi_\varepsilon^i = 0 \text{ pour } j \neq i,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varepsilon^i = 0.$$

Ainsi

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\langle I'(u_n), u_n\psi_\varepsilon^i\right\rangle \geq \mu_{a_i} - \mu_i\gamma_{a_i} - \nu_{a_i}. \tag{2.6}$$

D'après (2.5) et (2.6), on en déduit que

$$S_{\mu_i}\nu_{a_i}^{2/2^*} \leq \nu_{a_i}$$

et alors soit $\nu_{a_i} = 0$ ou $\nu_{a_i} \geq S_{\mu_i}^{N/2}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

D'après (2.3), on conclut que

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty}\left(I(u_n) - \frac{1}{2}\left\langle I'(u_n), u_n\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{N}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*} \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{j\in\Im}\nu_{x_j} + \sum_{i=1}^k \nu_{a_i}\right). \end{aligned}$$

Donc si $\nu_{a_i} = \nu_{x_j} = 0$ pour tout $i \in \{1,...,k\}, j \in \Im$, alors $c = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $c > 0$.

D'autre part, s'il existe un $i \in \{1,...,k\}$ tel que $\nu_{a_i} \neq 0$ ou il existe un $j \in \Im$ tel que $\nu_{x_j} \neq 0$ alors,

$$c \geq \frac{1}{N}S_{\mu_l}^{N/2} = c^*.$$

il en résulte que v est une solution non nulle du problème $(\mathcal{P})$. ■

Lemme 2.8 *Sous les mêmes hypothèses du lemme 2.2 alors pour $0 < \alpha_l < \sqrt{\bar{\mu} - \mu_l}$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on ait*

$$\sup_{s>0} I\left(u_j + su_{\varepsilon,l}\right) < m_j^+ + \frac{1}{N} S_{\mu_l}^{N/2}.$$

Preuve: Comme u_j est une solution du problème $(\mathcal{P})$, alors on a

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\nabla u_j \nabla u_{\varepsilon,l} - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} u_j u_{\varepsilon,l} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{|x-a_i|^{2-\alpha_i}} u_j u_{\varepsilon,l} \right) \\ = & \int_\Omega \left(|u_j|^{2^*-2} u_j u_{\varepsilon,l} + f u_{\varepsilon,l} \right) . \end{aligned}$$

D'après les estimations données dans [7], on a aussi

$$\begin{aligned} \|u_j + su_{\varepsilon,l}\|_{2^*}^{2^*} &= \|u_j\|_{2^*}^{2^*} + \|su_{\varepsilon,l}\|_{2^*}^{2^*} + 2^* s \int_\Omega |u_j|^{2^*-2} u_j u_{\varepsilon,l} \\ & \quad + 2^* s^{2^*-1} \int_\Omega u_{\varepsilon,l}^{2^*-1} u_j + o\left(\varepsilon^{(N-2)/2}\right), \end{aligned}$$

ainsi

$$I\left(u_j + su_{\varepsilon,l}\right) = I\left(u_j\right) + J\left(su_{\varepsilon,l}\right) - s^{2^*-1} \int_\Omega u_{\varepsilon,l}^{2^*-1} u_j dx + o\left(\varepsilon^{(N-2)/2}\right)$$

où

$$J\left(su_{\varepsilon,l}\right) = I\left(su_{\varepsilon,l}\right) + s \int_\Omega f u_{\varepsilon,l} dx.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \sup_{s>0} J\left(su_{\varepsilon,l}\right) &= \sup_{s>0} \left(\frac{s^2}{2} T\left(u_{\varepsilon,l}\right) - \frac{s^{2^*}}{2^*} \int_\Omega |u_{\varepsilon,l}|^{2^*} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \left(T\left(u_{\varepsilon,l}\right) \right)^{2^*/(2^*-2)} \left(\int_\Omega |u_{\varepsilon,l}|^{2^*} \right)^{2/(2^*-2)} \\ &= \frac{1}{N} \left(S_{\mu_l}^{N/2} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/4}\right) - \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\alpha_l \sqrt{\bar{\mu}}/2\sqrt{\bar{\mu}-\mu_l}}\right) \right)^{N/2} \left(S_{\mu_l}^{N/2} - \mathcal{O}\left(\varepsilon^{N/2}\right) \right)^{1-(N/2)} \\ &= \frac{1}{N} S_{\mu_l}^{N/2} - \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\alpha_l \sqrt{\bar{\mu}}/2\sqrt{\bar{\mu}-\mu_l}}\right). \end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.1, on a

$$
\begin{aligned}
\sup_{s>0} I\left(u_j+su_{\varepsilon,j}\right) &\leq I\left(u_j\right)+\sup_{s_\varepsilon>0} J\left(s_\varepsilon u_{\varepsilon,l}\right)-s_\varepsilon^{2^*-1}\int_\Omega u_{\varepsilon,l}^{2^*-1}u_j \\
&\leq m_j^+ + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/4}\right)+\frac{1}{N}S_{\mu_l}^{N/2}-\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\alpha_l\sqrt{\overline{\mu}}/2\sqrt{\overline{\mu}-\mu_l}}\right)-\mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/4}\right) \\
&= m_j^+ + \frac{1}{N}S_{\mu_l}^{N/2}-\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\alpha_l\sqrt{\overline{\mu}}/2\sqrt{\overline{\mu}-\mu_l}}\right) \\
&< m_j^+ + \frac{1}{N}S_{\mu_l}^{N/2} \text{ puisque } \alpha_l<\sqrt{\overline{\mu}-\mu_l}.
\end{aligned}
$$

■

Le lemme 2.5 montre que si $u \in H$ tel que $\|u\|_2 = 1$, il existe un unique $t^+(u) > 0$ tel que $t^+(u)\,u \in \mathcal{N}^-$ et $I(t^+(u)\,u) = \max_{t\geq t_{\max}} I(tu)$.

L'unicité et la propriété extrémale du $t^+(u)$ nous assurent la continuité de cette fonction par rapport à u.

Soit

$$U_1 = \{0\} \cup \left\{v\ ;\ \|v\| < t^+\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\} \text{ et } U_2 = \left\{v\ ;\ \|v\| > t^+\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\}.$$

Remarquons que $H\backslash\mathcal{N}^- = U_1 \cup U_2$ et $\mathcal{N}^+ \subset U_1$. En particulier, $u_j \in U_1$ pour tout $j \in \{1, ..., k\}$.

Comme dans [30], pour s_l soigneusement choisi et pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on a $\widehat{u_j} = u_j + s_l u_{\varepsilon,l} \in U_2$.

Posons

$$\pounds_j = \{h : [0,1] \longrightarrow H \text{ continue avec } h(0) = u_j,\ h(1) = \widehat{u_j}\}.$$

Soit $h \in \pounds_j$ définie par $h(t) = u_j + ts_l u_{\varepsilon,l}$ pour $t \in [0,1]$.

On établit alors les résultats suivants:

Lemme 2.9 *Par un choix approprié de $s_l > 0$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la valeur*

$$c_j^* = \inf_{h \in \pounds_j} \max_{t \in [0,1]} I(h(t))$$

définit une valeur critique pour I et $c_j^* \geq m_j^-$.

Preuve: On a,

$$I(h(t)) < m_j^+ + \frac{1}{N} S_{\mu_l}^{N/2}, \text{ pour } h \in \pounds_j$$

d'où

$$c_j^* < m_j^+ + \frac{1}{N} S_{\mu_l.}^{N/2.}$$

En outre, puisque le chemin de tout $h \in \pounds_j$ intersecte $\mathcal{N}^-$, on a aussi

$$c_j^* \geq m_j^-.$$

En appliquant le théorème du Col, on vérifie facilement que c_j^* est bien une valeur critique pour I. ■

Proposition 2.3 *Supposons que f vérifie la condition $(\mathcal{F})$ et $0 < \alpha_l < \sqrt{\overline{\mu} - \mu_l}$, alors I a un minimiseur $v_j \in \mathcal{N}_j^-$ tel que $m_j^- = I(v_j)$. D'autre part, v_j est une solution du problème $(\mathcal{P})$.*

Preuve: Il existe une suite minimisante $(v_{j,n}) \subset \mathcal{N}_j^-$ telle que $I(v_{j,n}) \longrightarrow m_j^-$ et $I'(v_{j,n}) \longrightarrow 0$ dans H.

Le lemme 2.9 montre que $m_j^- < m_j^+ + \frac{1}{N} S_{\mu_l}^{N/2}$. On en déduit en vertu du lemme 2.8 que $v_{j,n}$ converge fortement vers v_j dans H. Ainsi $v_j \in \mathcal{N}_j^-$ ($v_j \in \mathcal{N}^-$, $\mathcal{N}^-$ est fermé et $\beta_j(v_j) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \beta_j(v_{j,n}) \leq r_0$) et $m_j^- = I(v_j)$.

Alors $I'(v_j) = 0$ et ainsi v_j est une solution du problème $(\mathcal{P})$. On conclut alors que $(\mathcal{P})$ admet également k solutions dans $\mathcal{N}^-$. ■

Preuve: [Preuve du Théorème 2.1] A l'aide des propositions 2.2 et 2.3, on en déduit que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins $2k$ solutions distinctes dans H.

$\blacksquare$

Chapitre 3

Sur les problèmes elliptiques avec deux exposants critiques de Hardy-Sobolev au même pôle

3.1 Introduction

Nous nous intéressons ici au problème elliptique suivant:

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{\mu}{|x|^2}u = \dfrac{1}{|x|^\alpha}|u|^{2^*(\alpha)-2}u + \dfrac{1}{|x|^\beta}|u|^{2^*(\beta)-2}u, \\ u > 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \end{cases}$$

où $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$; $0 \leq \mu < \overline{\mu} := \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.

Les potentiels singuliers apparaissent dans plusieurs domaines d'applications et sont soumis à une recherche mathématique large et récente. L'équation du problème $(\mathcal{P}_1)$ est caractérisée par la présence de singularités, un terme de Hardy et des non-linéarités critiques. Différentes motivations physiques du problème $(\mathcal{P}_1)$ sont décrites dans [15].

Le cas des problèmes elliptiques avec multi-pôles singuliers et non-linéarité critique a été considéré par de nombreux auteurs, en particulier Felli et Terracini [13]. Ils ont prouvé que l'existence de solutions dépend fortement de la puissance et de la localisation des singularités.

Kang a étudié dans [20] une équation elliptique semi-linéaire définie sur un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 dans son intérieur

$$-\Delta u - \frac{\mu}{|x|^2} u = \frac{1}{|x|^{t_1}} u^{2^*(t_1)-2} u + \frac{1}{|x-\xi|^{t_2}} u^{2^*(t_2)-2} u + \lambda u$$

cette équation est caractérisée par la présence d'un double exposant critique de Hardy-Sobolev, un potentiel de Hardy et un terme linéaire. Il a établi l'existence d'une solution non triviale. La difficulté majeure provient du fait qu'il y'a présence dans le potentiel considéré de deux exposants critiques dans deux pôles différents. Dans ce cas, il y a une interaction entre les énergies portées par les deux non-linéarités critiques. Si une énergie domine l'autre, alors la plus faible étant absorbée.

Le cas des problèmes avec un seul pôle:

Le problème $(\mathcal{P}_1)$ avec $\alpha = \beta$ est complètement résolu contrairement au cas où Ω est un domaine en forme d'étoile par rapport à l'origine, où il n'y a pas solution non triviale, voir [23]. Certains travaux méritent d'être signalés, par exemple:

Chaudhuri et Ramaswamy dans [9] ont étudié le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\mu}{|x|^\alpha} |u|^{2^*_\alpha - 2} u + f(x) g(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $0 \leq \alpha \leq 2$, f est une fonction positive mesurable dans Ω, ayant une singularité à l'origine d'ordre inférieur à $|x|^{-2}$ et g est une fonction dans $\mathbb{R}$ qui est soit linéaire ou super-linéaire.

Lorsque $g(u) = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et f vérifiant la condition suivante

$$f \in \Im_2 := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \; ; \; \lim_{|x| \to 0} |x|^2 f(x) = 0 \text{ pour } f \in L^\infty_{loc}(\Omega \backslash \{0\}) \right\},$$

ils ont prouvé l'existence d'une solution faible non triviale.

Si $g(u) = \lambda |u|^{q-2} u$ avec $2 < q < 2^*_\beta$ et

$$f \in \Re_{2,\beta} := \left\{ f \in \Im_2 \ ; \ \lim_{|x| \to 0} |x|^\beta f(x) < \infty \right\} \text{ avec } 0 < \beta < 2,$$

ils ont montré l'existence de solutions positives.

De nombreux auteurs ont étudié l'existence de solutions non triviales pour des problèmes elliptiques quasi-linéaires et semi-linéaires. En particulier, Ghoussoub et Yuan ont fourni dans leur célèbre papier [16], une étude complète du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{r-2} u + \dfrac{\mu}{|x|^s} |u|^{q-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\, \Omega, \end{cases}$$

où λ et μ sont deux paramètres positifs, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné ouvert de frontière régulière qui contient 0 dans son intérieur et $1 < p < N$, $0 \leq s \leq p \leq q \leq p^*(s)$ et $q \leq r \leq p^*(0)$. Ils ont distingué différents cas en fonction de la variation des exposants q et r.

Ce problème présente beaucoup de difficultés contrairement au cas d'un exposant critique voir par exemple [28].

On mentionne quelques recherches qui ont été réalisées dans l'espace $\mathbb{R}^N$ et sur lesquelles nous nous sommes inspirés dans notre travail. Filippucci et al. dans [14] ont considéré le problème du p-laplacien avec des non-linéarités critiques multiples dans le potentiel associé. Ils ont étudié le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \frac{\mu}{|x|^p} |u|^{p-2} u = |u|^{p^*-2} u + \frac{|u|^{p^*(s)-2} u}{|x|^s}, \ u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \\ u \geq 0, \end{cases}$$

où $\mu < \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$, $p \in (1, N)$ et $p^*(s) := \frac{p(N-s)}{N-p}$ avec $s \in (0, p)$.

En montrant l'existence d'un équilibre entre les énergies des deux non-linéarités, ils ont donné des résultats d'existence par le choix d'un niveau d'énergie approprié pour le lemme de Pass Mountain et une analyse précise de concentration.

Notre problème est en fait une généralisation du problème indiqué dans [14] pour le cas $p = 2$. Cependant, en raison de la présence de deux exposants critiques dans le même pôle, le problème $(\mathcal{P}_1)$ devient plus compliqué dans l'étude de l'existence de solutions.

Une question naturelle et intéressante est: pouvons-nous élargir l'étude dans le cas double critique? Plus explicitement, nous considérons le cas où le problème elliptique a un seul pôle avec différentes puissances de singularités et deux exposants critiques de Hardy-Sobolev. La réponse à la question posée dépend du domaine: nous obtenons le résultat de non-existence lorsque Ω est un domaine borné en forme d'étoile par rapport à l'origine, de nouveau sur $\mathbb{R}^N$, nous y arrivons à prouver l'existence d'une solution.

A notre connaissance, les résultats suivants sont nouveaux.

Théorème 3.1 *Soient $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$ et $0 \leq \mu < \overline{\mu}$, alors le problème $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution positive.*

Remarque 3.1 *De l'identité Pohozaev [2], on en déduit que le problème $(\mathcal{P}_1)$ définie sur un domaine borné étoilé par rapport à l'origine, n'a pas de solution non triviale.*

3.2 Quelques résultats préliminaires

3.2.1 Généralités

Dans ce qui suit on note par $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ la fermeture de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} u^2) dx \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } \mu < \overline{\mu}.$$

Ainsi, cette norme est équivalente à la norme usuelle $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$.

La fonction $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ est dite solution faible du problème $(\mathcal{P}_1)$ si elle satisfait pour tout $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla v - \mu \frac{uv}{|x|^2} - \frac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} uv - \frac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)-2} uv \right) dx = 0$$

La fonctionnelle d'énergie correspondante au problème $(\mathcal{P}_1)$ est définie sur $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ par

$$I(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2^*(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\alpha)} \frac{1}{|x|^\alpha} dx - \frac{1}{2^*(\beta)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\beta)} \frac{1}{|x|^\beta} dx.$$

Il est clair que $I \in C^1 \left(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R} \right)$ et une solution de $(\mathcal{P}_1)$ correspond à un point critique de I.

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev, on définit la constante:

$$S_{\mu,s} := \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(s)} |x|^{-s} dx \right)^{2/2^*(s)}}, \tag{3.1}$$

avec $0 \leq \mu < \overline{\mu}$ et $0 \leq s < 2$. D'après [22], on sait que la constante $S_{\mu,s}$ est atteinte par la famille des fonctions:

$$V_{\mu,s}^{\varepsilon}(x) := \left(\frac{2\varepsilon^2(\overline{\mu}-\mu)(N-s)}{\sqrt{\overline{\mu}}} \right)^{\sqrt{\overline{\mu}}/(2-s)} \left(|x|^{-\left(\sqrt{\overline{\mu}}-\sqrt{\overline{\mu}-\mu}\right)} \left(\varepsilon^2 + |x|^{(2-s)\sqrt{\overline{\mu}-\mu}/\sqrt{\overline{\mu}}} \right)^{(2-N)/(2-s)} \right), \tag{3.2}$$

pour $\varepsilon > 0$.

La fonction $V_{\mu,s}^{\varepsilon}$ est solution de l'équation suivante

$$-\Delta u - \frac{\mu}{|x|^2} u = \frac{1}{|x|^s} |u|^{2^*(s)-2} u, \text{ dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

et satisfait

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla V^{\varepsilon}_{\mu,s}\right|^2-\mu\frac{\left(V^{\varepsilon}_{\mu,s}\right)^2}{|x|^2}\right)dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|V^{\varepsilon}_{\mu,s}\right|^{2^*(s)}}{|x|^{2^*(s)}}dx \\ &= \left(S_{\mu,s}\right)^{(N-s)/(2-s)}.\end{aligned}$$

3.2.2 Quelques lemmes

Lemme 3.1 *La fonctionnelle d'énergie I associée au problème $(\mathcal{P}_1)$ vérifie les propriétés suivantes:*

(i) $I(0)=0$,

(ii) *il existe des nombres positifs suffisamment petits ξ et ρ tels que* $\inf\limits_{\|v\|=\rho} I(v)\geq\xi$.

(iii) *pour tout $v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$, il existe $t_0>0$ tel que $\|t_0v\|>\rho$ et $I(t_0v)<0$.*

Soit

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$$

où

$$\Gamma:=\left\{\gamma\in C^0\left([0,1],D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\right)\mid\gamma(0)=0,\ I(\gamma(1))<0\right\}.$$

Par une version du théorème du Col, il existe une suite (u_n) dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$I(u_n)\longrightarrow c,\ \text{ et } I'(u_n)\longrightarrow 0 \text{ dans } D^{-1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ le dual de } D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Lemme 3.2 *Soient $N\geq 3$, $0<\alpha,\beta<2$, et $0\leq\mu<\overline{\mu}$, alors la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ pour $c<c^*:=\min\left\{c^*_\alpha,c^*_\beta\right\}$ où*

$$c^*_s:=\tfrac{2-s}{2(N-s)}S_{\mu,s}^{(N-s)/(2-s)}.$$

Preuve: Soit (u_n) une suite qui satisfait la condition $(PS)_c$ avec $c<c^*$. Alors (u_n) est bornée dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. En considérons une sous-suite extraite de (u_n), on peut supposer

que $u_n \rightharpoonup u$ dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^{2^*(s)}(\mathbb{R}^N, |x|^{-s})$, pour $s = 2, \alpha, \beta$ et $u_n \to u$ p.p.

Ainsi u est une solution faible du problème $(\mathcal{P}_1)$.

L'ensemble $\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ est compact pour la topologie de la norme ce qui signifie que les mesures peuvent être identifiées dans l'espace dual $C\left(\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}\right)$. Par exemple, δ_∞ est bien défini et $\delta_\infty(\varphi) = \varphi(\infty)$.

Par le principe de concentration de compacité [26], [27], il existe une suite extraite, notée encore par (u_n) et des nombres réels $\eta_0, \eta_\infty, \gamma_0, \gamma_\infty, \tau_0, \tau_\infty, \nu_0$ et ν_∞ tels que:

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\eta \geq |\nabla u|^2 + \eta_0\delta_0 + \eta_\infty\delta_\infty. \tag{3.3}$$

$$|u_n|^2 |x|^{-2} \rightharpoonup d\gamma = |u|^2 |x|^{-2} + \gamma_0\delta_0 + \gamma_\infty\delta_\infty. \tag{3.4}$$

$$|u_n|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} \rightharpoonup d\tau = |u|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} + \tau_0\delta_0 + \tau_\infty\delta_\infty. \tag{3.5}$$

et

$$|u_n|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} \rightharpoonup d\upsilon = |u|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} + \nu_0\delta_0 + \nu_\infty\delta_\infty. \tag{3.6}$$

où δ_0 et δ_∞ sont les masses de Dirac à l'origine et à l'infini respectivement.

Pour $\varepsilon > 0$, soit ϕ une fonction de $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ positive telle que

$$0 \leq \phi \leq 1, \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \epsilon \end{cases} \text{ et } |\nabla\phi| \leq \frac{4}{\epsilon}.$$

Testant $I'(u_n)$ avec $u_n\phi$, on a

$$\langle I'(u_n), u_n\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 \phi + u_n \nabla u_n \nabla\phi - \mu\frac{u_n\phi}{|x|^2} - \frac{|u_n|^{2^*(\alpha)}\phi}{|x|^\alpha} - \frac{|u_n|^{2^*(\beta)}\phi}{|x|^\beta} \right) dx, \tag{3.7}$$

ainsi, par (3.3)-(3.7) on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \phi dx \geq \eta_0, \tag{3.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2\phi dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \nabla \phi dx = 0, \tag{3.9}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_n\phi \left|x\right|^{-2} dx = \gamma_0, \tag{3.10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n\right|^{2^*(\alpha)} \phi \left|x\right|^{-\alpha} dx = \tau_0, \tag{3.11}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left|u_n\right|^{2^*(\beta)} \phi \left|x\right|^{-\beta} dx = \nu_0, \tag{3.12}$$

par conséquent, en utilisant (3.8)-(3.12) on a

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \left\langle I'\left(u_n\right), u_n\phi\right\rangle \geq \eta_0 - \mu\gamma_0 - \tau_0 - \nu_0. \tag{3.13}$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev, on en déduit

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} S_{\mu,\alpha} \leq \eta_0 - \mu\gamma_0 \tag{3.14}$$

$$\nu_0^{2/2^*(\beta)} S_{\mu,\beta} \leq \eta_0 - \mu\gamma_0. \tag{3.15}$$

D'après (3.13), on trouve $\eta_0 - \mu\gamma_0 \leq \tau_0 + \nu_0$, utilisant (3.14) et (3.15), on obtient

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} S_{\mu,\alpha} \leq \tau_0 + \nu_0 \text{ et } \nu_0^{2/2^*(\beta)} S_{\mu,\beta} \leq \tau_0 + \nu_0.$$

Il s'ensuit que

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} \leq S_{\mu,\alpha}^{-1}\left(\nu_0 + \tau_0\right) \text{ et } \tau_0^{2/2^*(\alpha)}\left(1 - S_{\mu,\alpha}^{-1}\tau_0^{(2^*(\alpha)-2)/2^*(\alpha)}\right) \leq S_{\mu,\alpha}^{-1}\nu_0.$$

Le fait que (u_n) est bornée dans $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$, nous assure que $\tau_0 \leq C_1$, ainsi

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)}\left(1 - S_{\mu,\alpha}^{-1}C_1^{(2^*(\alpha)-2)/2^*(\alpha)}\right) \leq S_{\mu,\alpha}^{-1}\nu_0,$$

il existe alors Y dépendant de α, $2^*(\alpha)$, et C_1 tel que

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} \leq Y\nu_0.$$

De même, il existe Z dépendant de β, $2^*(\beta)$ et C_2 tel que

$$\nu_0^{2/2^*(\beta)} \leq Z\tau_0.$$

En particulier, il en résulte que :

$$\text{Soit } \nu_0 = 0,\ \tau_0 = 0 \text{ ou } \nu_0 \geq S_{\mu,\beta}^{(N-\beta)/(2-\beta)}, \tau_0 \geq S_{\mu,\alpha}^{(N-\alpha)/(2-\alpha)}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} c &= I(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle + o(1) \\ &\geq \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} dx + \tau_0\right) + \tfrac{2-\beta}{2(N-\beta)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} dx + \nu_0\right) + o(1) \\ &\geq \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)}\tau_0 + \tfrac{2-\beta}{2(N-\beta)}\nu_0. \end{aligned}$$

Pour étudier la concentration à l'infini, on considère la fonction test $\psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N, [0,1]\right)$ telle que pour $R > 0$

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < R/2 \\ 0 & \text{si } |x| > R \end{cases} \quad \text{et } |\nabla\psi| \leq \frac{2}{R}.$$

et on prend en compte les quantités suivantes

$$\eta_\infty = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 \psi dx,\ \gamma_\infty = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup \int_{|x|>R} u_n\psi |x|^{-2} dx,$$

$$\tau_\infty = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup \int_{|x|>R} |u_n|^{2^*(\alpha)} \psi |x|^{-\alpha} dx$$

et

$$\tau_\infty = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup\int_{|x|>R} |u_n|^{2^*(\beta)}\,\psi\,|x|^{-\beta}\,dx.$$

En utilisant la même technique que celle faite à l'origine, on obtient le même résultat, notamment

$$\nu_\infty = 0,\ \tau_\infty = 0 \text{ ou } \nu_\infty \geq S_{\mu,\beta}^{(N-\beta)/(2-\beta)}, \tau_\infty \geq S_{\mu,\alpha}^{(N-\alpha)/(2-\alpha)}.$$

De même,

$$c \geq \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)}\tau_\infty + \tfrac{2-\beta}{2(N-\beta)}\nu_\infty.$$

En utilisant l'hypothèse $c < c^*$, alors la sous-suite (u_n) converge fortement vers u dans $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

■

Notons

$$\widetilde{U}(x) = \begin{cases} U^\varepsilon_{\mu,\alpha}(x) & \text{si } c^*_\alpha \leq c^*_\beta \\ U^\varepsilon_{\mu,\beta}(x) & \text{si } c^*_\beta \leq c^*_\alpha, \end{cases} \tag{3.16}$$

on a alors le lemme suivant:

Lemme 3.3 *Sous les hypothèses du théorème* 3.1*, on a*

$$\sup_{t\geq 0} I\left(t\widetilde{U}\right) < c^*\ .$$

Preuve: Considérons $c^*_\alpha \leq c^*_\beta$, alors

$$\begin{aligned} I\left(t\widetilde{U}\right) &= I\left(tU^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right) = \frac{t^2}{2}\left\|U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right\|^2 - \frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}\left|U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right|^{2^*(\alpha)}|x|^{-\alpha}\,dx \\ &\quad - \frac{t^{2^*(\beta)}}{2^*(\beta)}\int_{\mathbb{R}^N}\left|U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right|^{2^*(\beta)}|x|^{-\beta}\,dx. \end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\sup_{t\geq 0} I\left(tU^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right) \leq \sup_{t\geq 0} f_\alpha(t) = c^*_\alpha$$

avec

$$f_\alpha(t)=\frac{t^2}{2}\left\|U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right\|^2-\frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}\left|U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right|^{2^*(\alpha)}|x|^{-\alpha}\,dx.$$

On affirme que $c_\alpha<c^*_\alpha$, où

$$c_\alpha:=\inf_{\gamma\in\Gamma_\alpha}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$$

avec

$$\Gamma_\alpha:=\left\{\gamma\in C^0\left([0,1],D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\right)\ ;\ \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=t_0U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right\}.$$

Raisonnons par l'absurde, supposons que $c_\alpha=c^*_\alpha$ alors $\sup_{t\geq 0}I\left(tU^\varepsilon_{\mu,s}\right)=\sup_{t\geq 0}f_\alpha(t)$.

Les fonctionnelles I et f_α atteignent leurs maximums aux points positifs t_1 et t_2 respectivement. Alors, on a

$$f_\alpha(t_1)-\frac{t_1^{2^*(\beta)}}{2^*(\beta)}\int_{\mathbb{R}^N}\left|U^\varepsilon_{\mu,\alpha}\right|^{2^*(\beta)}|x|^{-\beta}\,dx=f_\alpha(t_2)$$

Il en découle que $f_\alpha(t_2)<f_\alpha(t_1)$, ce qui nous amène à une contradiction.

De même pour le cas où $c^*_\beta\leq c^*_\alpha$, on trouve $c_\beta\leq c^*_\beta$. Ainsi, $\sup_{t\geq 0}I\left(t\widetilde{U}\right)<c^*$. ■

3.3 Preuve du théorème 3.1

Preuve: Comme $2^*(s)>2$ $(s=\alpha,\beta)$ il existe en vertu du Lemme 3.1, ξ et ρ suffisamment petits tels que $\inf_{\|u\|=\rho}I(u)\geq\xi$, $u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. Puisque $I\left(tU^\varepsilon_{\mu,s}\right)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers ∞, alors il existe $t_0>0$ tel que $\left\|t_0U^\varepsilon_{\mu,s}\right\|>\rho$ et $I\left(t_0U^\varepsilon_{\mu,s}\right)<0$.

En outre en utilisant le lemme du Col, il existe une suite (u_n) dans $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ telle que

$$I(u_n)\longrightarrow c,\ \text{ et }\ I'(u_n)\longrightarrow 0 \text{ dans } D^{-1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

D'après les Lemmes 3.2 et 3.3, on obtient

$$0<c\leq\sup_{t\in[0,1]}I\left(tt_0U^\varepsilon_{\mu,s}\right)\leq\sup_{t>0}I\left(tU^\varepsilon_{\mu,s}\right)<c^*.$$

On en déduit alors que (u_n) possède une sous-suite notée aussi (u_n), telle que $u_n \to u$ fortement dans $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi u est une solution non triviale du problème $(\mathcal{P}_1)$. Par le principe du maximum, on obtient que $u > 0$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. $\blacksquare$

Chapitre 4

Sur les équations elliptiques avec multiples exposants critiques et termes de Hardy

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie le problème elliptique suivant:

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{\mu}{|x|^2}u = \dfrac{1}{|x|^{\alpha}}|u|^{2^*(\alpha)-2}u + \dfrac{1}{|x|^{\beta}}|u|^{2^*(\beta)-2}u + \lambda |u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\,\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, $0 \in \Omega$; $0 < \alpha, \beta < 2$; $\lambda > 0$;
$0 \leq \mu < \overline{\mu}$ et $2 < q < 2^*$.

Le cas régulier i.e. $\mu = 0$; $\alpha = \beta = 0$ et $2 < q < 2^*$, a été étudié par Brezis et Nirenberg dans leur célèbre papier [7] où ils ont montré l'existence de solutions non triviales en utilisant une version du théorème du Col d'Ambrosetti-Rabinowitz si une des conditions suivantes est satisfaite:

a) $N \geq 4$, pour tout $\lambda > 0$.

b) i) $N=3$, $3<q<5$, pour tout $\lambda>0$.

ii) $N=3$, $1<q\leq 3$, pour λ assez grand.

Kang et Peng ont prouvé dans [22] l'existence de solutions positives du problème

$$(\mathcal{P}_3)\begin{cases} -\Delta u-\dfrac{\mu}{|x|^2}u=\frac{\mu}{|x|^\alpha}|u|^{2_\alpha^*-2}u+\lambda|u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $2\leq q<2^*$. En utilisant des méthodes variationnelles, ils ont obtenu des résultats d'existence par le théorème du Col pour différents choix des paramètres λ,μ et q.

Le cas des problèmes elliptiques avec multi-pôles a été considéré par de nombreux auteurs en particulier Felli et Terracini [13]. Ils ont montré que l'existence de solutions dépend fortement de la puissance et de la localisation des singularités. Ces types de problèmes demeurent mathématiquement subtiles à résoudre comparés aux cas d'un seul exposant critique voir par exemple [28].

L'étude de ce type de problèmes est motivée par ses diverses applications, par exemple: en Mécanique Quantique, en Chimie, en Physique et en Géométrie Différentielle, etc...

On peut se référer aux travaux suivants [15, 25] et les références qu'ils contiennent. L'intérêt mathématique réside dans le fait que ces problèmes non linéaires sont doublement critiques en raison de la présence de différents exposants de Hardy-Sobolev et de termes de Hardy.

En raison de la présence de deux exposants critiques avec le même pôle, le problème $(\mathcal{P}_2)$ devient plus compliqué dans l'étude de l'existence de solutions.

Une question naturelle et intéressante est: peut-on étendre l'étude de $(\mathcal{P}_3)$ dans le cas double critique? Plus précisément, on considère le cas où le problème elliptique a un seul pôle et différentes puissances des deux exposants critiques de Hardy-Sobolev et une certaine perturbation du potentiel. La réponse à notre question est affirmative.

Théorème 4.1 *Soient* $N \geq 3,\ 0 < \alpha, \beta < 2,\ \lambda = 0;\ 0 \leq \mu < \overline{\mu}$ *et* Ω *est un domaine borné étoilé par rapport à l'origine. Alors le problème* $(\mathcal{P}_2)$ *n'admet pas de solution non triviale.*

Théorème 4.2 *Soient* $N \geq 3,\ 0 < \alpha, \beta < 2,\ \lambda > 0;\ 0 \leq \mu < \overline{\mu}$, *et*

$$\max\left\{2, \frac{N}{\sqrt{\overline{\mu}} + \sqrt{\overline{\mu} - \mu}}, \frac{N - 2\sqrt{\overline{\mu} - \mu}}{\sqrt{\overline{\mu}}}\right\} < q < \min\left(2^*(\alpha), 2^*(\beta)\right) \leq 2^*.$$

Alors le problème $(\mathcal{P}_2)$ *admet une solution positive.*

4.2 Généralités

Une fonction $u \in H_\mu$ est dite une solution faible du problème $(\mathcal{P}_2)$ si u satisfait l'identité

$$\int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - \mu \frac{uv}{|x|^2} - \frac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} uv - \frac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)-2} uv - \lambda |u|^{q-2} uv\right) dx = 0,$$

pour tout $v \in H_\mu$.

La fonctionnelle d'énergie associée au problème $(\mathcal{P}_2)$ est:

$$I(u) := \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{2^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} |u|^{2^*(\alpha)} dx - \frac{1}{2^*(\beta)} \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |u|^{2^*(\beta)} dx - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q dx.$$

$I \in C^1(H_\mu, \mathbb{R})$. Notons que $0 \in \Omega$, et $S_{\mu,s}(\Omega)$ est indépendante de Ω dans le sens où $S_{\mu,s}(\Omega) = S_{\mu,s}(\mathbb{R}^N) = S_{\mu,s}$. $S_{\mu,s}$ est ici définie par (3.1) lorsque l'inf est étendu à $H_\mu \backslash \{0\}$, et est atteinte par la famille des fonctions $V_{\mu,s}^\varepsilon$ données dans (3.2).

On a besoin d'établir d'abord quelques estimations utiles sur les fonctions extremales $V_{\mu,s}^\varepsilon$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ définie par

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 2r \\ 1 & \text{si } |x| \leq r \end{cases} \quad \text{et } |\nabla \varphi(x)| < 2/r,$$

où $B_0^{2r} \subset \Omega$ avec $r > 0$.

Posons

$$\begin{aligned} U_{\mu,s}^{\varepsilon}(x) &= \varphi(x) V_{\mu,s}^{\varepsilon}(x), \\ u_{\mu,s}^{\varepsilon}(x) &= U_{\mu,s}^{\varepsilon}(x) \left(\int_{\Omega} \left| U_{\mu,s}^{\varepsilon} \right|^{2^*(s)} |x|^{-s} dx \right)^{-1/2^*(s)}, \end{aligned}$$

de sorte que $\int_{\Omega} \left| U_{\mu,s}^{\varepsilon} \right|^{2^*(s)} |x|^{-s} dx = 1$.

En s'appuyant sur les résultats de [16], on a

$$\left\| u_{\mu,s}^{\varepsilon}(x) \right\|^2 = S_{\mu,s} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/(2-s)} \right) \tag{4.1}$$

et

$$\int_{\Omega} \left| u_{\mu,s}^{\varepsilon}(x) \right|^q dx = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\left(\sqrt{\overline{\mu}}/(2-s)\right)q} \right) & \text{si } 1 \leq q < \frac{N}{\sqrt{\overline{\mu}}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \\ \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\left(\sqrt{\overline{\mu}}/(2-s)\right)q} \right) |\ln \varepsilon| & \text{si } q = \frac{N}{\sqrt{\overline{\mu}}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \\ \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\left(\sqrt{\overline{\mu}}/(2-s)\sqrt{\overline{\mu}-\mu}\right)\left(N-q\sqrt{\overline{\mu}}\right)} \right) & \text{si } \frac{N}{\sqrt{\overline{\mu}}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} < q < 2^*. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.3 Résultat de non existence

Dans cette section, on fournit la preuve du Théorème 4.1 via l'indentité de Pohozaev.

Preuve: Posons

$$g(x,u) = \mu \frac{u}{|x|^2} + \frac{|u|^{2^*(\alpha)-2} u}{|x|^{\alpha}} + \frac{|u|^{2^*(\beta)-2} u}{|x|^{\beta}},$$

alors

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\,ds = \frac{\mu}{2} \frac{|u|^2}{|x|^2} + \frac{1}{2^*(\alpha)} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}} + \frac{1}{2^*(\beta)} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^{\beta}},$$

$$(\partial_i G)(x,u) = -\mu \frac{|u|^2}{|x|^4} x_i - \frac{\alpha}{2^*(\alpha)} \frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}} x_i + \frac{\beta}{2^*(\beta)} \frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^{\beta}} x_i,$$

$$\partial_i \left(G\left(x,u\right)\right) = \left(\partial_i G\right)\left(x,u\right) + g\left(x,u\right)\partial_i u. \tag{4.3}$$

ici $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i = 1, ..., N$.

Multipliant l'équation de $(\mathcal{P}_2)$ par $(x, \nabla u)$ des deux côtés, on obtient

$$-\int_\Omega \triangle u.\left(x,\nabla u\right)dx = \int_\Omega g\left(x,u\right)\left(x,\nabla u\right)dx.$$

En appliquant le théorème de la divergence, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \triangle u.\left(x,\nabla u\right)dx &= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\nabla u\right)\left(x,\nabla u\right)dx \\
&= -\int_\Omega g\left(x,u\right)\left(x,\nabla u\right)dx \\
&= \int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2\left(x,\upsilon\right)d\upsilon - \int_\Omega \left(\nabla u, \nabla\left(x,\nabla u\right)\right)dx \\
&= \int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2\left(x,\upsilon\right)d\upsilon - \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(x, \nabla\left(\left|\nabla u\right|^2\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2\left(x,\upsilon\right)d\upsilon - \frac{2-N}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

où υ est la normale extérieure au bord $\partial\Omega$.

D'après (4.3), on a aussi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g\left(x,u\right)\left(x,\nabla u\right)dx &= -N\int_\Omega G\left(x,u\right)dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} x_i\left(\partial_i G\right)\left(x,u\right)dx \\
&= -N\int_\Omega \left(\frac{\mu}{2}\frac{|u|^2}{|x|^2} + \frac{1}{2^*\left(\alpha\right)}\frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} + \frac{1}{2^*\left(\beta\right)}\frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta}\right)dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(\mu\frac{|u|^2}{|x|^2} + \frac{\alpha}{2^*\left(\alpha\right)}\frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} + \frac{\beta}{2^*\left(\beta\right)}\frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta}\right)dx.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} g(x,u)(x,\nabla u)\,dx = \frac{(2-N)}{2}\int_{\Omega}\mu\frac{|u|^2}{|x|^2}dx - \frac{(N-\alpha)}{2^*(\alpha)}\int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}}dx - \frac{(N-\beta)}{2^*(\beta)}\int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^{\beta}}dx, \tag{4.5}$$

puisque

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx - \mu\int_{\Omega}\frac{|u|^2}{|x|^2}dx = \int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}}dx + \int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^{\beta}}dx. \tag{4.6}$$

En combinant (4.5) et (4.6) dans (4.4), on trouve

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2(x,\upsilon)\,d\upsilon - \frac{(2-N)}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx = \frac{(N-2)}{2}\int_{\Omega}\mu\frac{|u|^2}{|x|^2}dx + \frac{(N-\alpha)}{2^*(\alpha)}\int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}}dx + \frac{(N-\beta)}{2^*(\beta)}\int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^{\beta}}dx,$$

cette dernière identité est équivalente à

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2(x,\upsilon)\,d\upsilon = \left(\frac{2-N}{2}+\frac{N-\alpha}{2^*(\alpha)}\right)\int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\alpha)}}{|x|^{\alpha}}dx + \left(\frac{2-N}{2}+\frac{N-\beta}{2^*(\beta)}\right)\int_{\Omega}\frac{|u|^{2^*(\beta)}}{|x|^{\beta}}dx.$$

Enfin, on conclut que

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|^2(x,\upsilon)\,d\upsilon = 0,$$

puisque Ω est un domaine étoilé par rapport à l'origine i.e. $(x,\upsilon) > 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que $u = 0$. ■

4.4 Résultat d'existence

4.4.1 Condition de Palais–Smale

Lemme 4.1 *I satisfait les conditions suivantes:*

(i) $I(0) = 0$,

(ii) $\exists\ \xi$ et ρ tel que $\inf\limits_{\|v\|=\rho} I(v) \geq \xi$.

(iii) pour tout $v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\|t_0 v\| > \rho$ et $I(t_0 v) < 0$.

D'après une version du théorème du Col, il existe une suite (u_n) dans $H_0^1(\Omega)$ telle que $I(u_n) \longrightarrow c$, et $I'(u_n) \longrightarrow 0$ dans H^{-1} .

Lemme 4.2 *Soient $N \geq 3$, $0 < \alpha, \beta < 2$, et $0 \leq \mu < \overline{\mu}$, alors la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais–Smale $(PS)_c$ pour $c < c^* := \min\left\{c_\alpha^*, c_\beta^*\right\}$ où*

$$c_s^* := \frac{2-s}{2(N-s)} S_{\mu,s}^{(N-s)/(2-s)}.$$

Remarque 4.1 *Les Lemmes 4.1 et 4.2 sont semblables aux Lemmes 3.1 et 3.2, néanmoins signalons qu'on utilise ici la structure Hilbertienne de H_0^1 et de son dual H^{-1}, alors que dans les Lemmes 3.1 et 3.2 on utilise la topologie Banachique des espaces correspondants.*

Preuve: [du Lemme 4.2]

Soit (u_n) une suite satisfaisant la condition $(PS)_c$ avec $c < c^*$. alors (u_n) est bornée dans H_μ. on peut supposer que:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } H_\mu, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ dans } L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}), \text{ pour } s = 2, \alpha, \beta, \\ u_n &\longrightarrow u \text{ dans } L^q(\Omega) \end{aligned}$$

et

$$u_n \to u \text{ p.p. dans } \Omega,$$

d'où u est une solution faible du problème $(\mathcal{P}_2)$.

Par le principe de concentration de compacité [26, 27], il existe une sous-suite, notée encore (u_n) et des nombres réels η_0, γ_0, τ_0 et ν_0 tels que:

$$\begin{aligned} |\nabla u_n|^2 &\rightharpoonup d\eta \geq |\nabla u|^2 + \eta_0 \delta_0. && (4.7)\\ |u_n|^2 |x|^{-2} &\rightharpoonup d\gamma = |u|^2 |x|^{-2} + \gamma_0 \delta_0. && (4.8)\\ |u_n|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} &\rightharpoonup d\tau = |u|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha} + \tau_0 \delta_0. && (4.9) \end{aligned}$$

et

$$|u_n|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} \rightharpoonup d\upsilon = |u|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} + \nu_0 \delta_0. \tag{4.10}$$

où δ_0 est la masse de Dirac à l'origine.

Pour $\varepsilon > 0$, soit ϕ une fonction test centrée en 0, telle que

$$0 \leq \phi \leq 1, \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad \text{et } |\nabla \phi| \leq \frac{4}{\varepsilon}.$$

On a

$$\langle I'(u_n), u_n\phi \rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 \phi + u_n \nabla u_n \nabla \phi - \mu \frac{u_n \phi}{|x|^2} - \frac{|u_n|^{2^*(\alpha)} \phi}{|x|^\alpha} - \frac{|u_n|^{2^*(\beta)} \phi}{|x|^\beta} - \lambda |u_n|^q \phi \right) dx. \tag{4.11}$$

Ainsi, en utilisant (4.7) à (4.10), on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi dx \geq \eta_0. \tag{4.12}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n^2 \phi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \phi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |u_n|^q \phi dx = 0. \tag{4.13}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n \phi |x|^{-2} dx = \gamma_0. \tag{4.14}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |u_n|^{2^*(\alpha)} \phi |x|^{-\alpha} dx = \tau_0. \tag{4.15}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^*(\beta)} \phi |x|^{-\beta} dx = \nu_0. \tag{4.16}$$

Par conséquent, en utilisant (4.12)-(4.16), on obtient

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \langle I'(u_n), u_n \phi \rangle \geq \eta_0 - \mu \gamma_0 - \tau_0 - \nu_0. \tag{4.17}$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev, on en déduit que

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} S_{\mu,\alpha} \leq \eta_0 - \mu \gamma_0 \tag{4.18}$$

$$\nu_0^{2/2^*(\beta)} S_{\mu,\beta} \leq \eta_0 - \mu \gamma_0, \tag{4.19}$$

D'après (4.17), on a

$$\eta_0 - \mu \gamma_0 \leq \tau_0 + \nu_0,$$

En utilisant (4.18) et (4.19), on a aussi

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} S_{\mu,\alpha} \leq \tau_0 + \nu_0,$$

et alors

$$\nu_0^{2/2^*(\beta)} S_{\mu,\beta} \leq \tau_0 + \nu_0.$$

Il s'ensuit que

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} \leq S_{\mu,\alpha}^{-1} (\nu_0 + \tau_0),$$

et

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} \left(1 - S_{\mu,\alpha}^{-1} \tau_0^{(2^*(\alpha)-2)/2^*(\alpha)}\right) \leq S_{\mu,\alpha}^{-1} \nu_0.$$

En utilisant le fait que (u_n) est bornée dans H_μ, on a $\tau_0 \leq C_1$, d'où

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} \left(1 - S_{\mu,\alpha}^{-1} C_1^{(2^*(\alpha)-2)/2^*(\alpha)}\right) \leq S_{\mu,\alpha}^{-1} \nu_0,$$

il existe alors Y dépendant de α, $2^*(\alpha)$, et C_1 tel que

$$\tau_0^{2/2^*(\alpha)} \leq Y\nu_0.$$

De même, il existe Z dépendant de β, $2^*(\beta)$ et C_2 tel que

$$\nu_0^{2/2^*(\beta)} \leq Z\tau_0.$$

En particulier, il en résulte que :

$$\text{soit } \nu_0 = 0,\ \tau_0 = 0 \text{ ou } \nu_0 \geq S_{\mu,\beta}^{(N-\beta)/(2-\beta)}, \tau_0 \geq S_{\mu,\alpha}^{(N-\alpha)/(2-\alpha)}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} c &= I(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle + o(1) \\ &\geq \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)}\left(\int_\Omega |u|^{2^*(\alpha)}|x|^{-\alpha}\,dx + \tau_0\right) \\ &\quad + \tfrac{2-\beta}{2(N-\beta)}\left(\int_\Omega |u|^{2^*(\beta)}|x|^{-\beta}\,dx + \nu_0\right) + o(1) \\ &\geq \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)}\tau_0 + \tfrac{2-\beta}{2(N-\beta)}\nu_0. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $c < c^*$, on a alors une sous-suite (u_n) qui converge fortement vers u dans H_μ. ■

Lemme 4.3 *Sous les mêmes hypothèses du théorème* 4.2, *on a*

$$\sup_{t\geq 0} I\left(t\widetilde{U}\right) < c^*.$$

où $\widetilde{U}$ est la fonction définie au chapitre précédent par (3.16).

Preuve: Si $c_\alpha^* \leq c_\beta^*$ et $\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^{2^*(\alpha)} |x|^{-\alpha}\, dx = 1$, alors

$$\begin{aligned} I\left(t\widetilde{U}\right) &= I\left(tu_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right) \\ &= \frac{t^2}{2}\left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^2 - \frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)} - \frac{t^{2^*(\beta)}}{2^*(\beta)}\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta}\, dx \\ &\quad -\lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^q dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\sup_{t\geq 0} I\left(tu_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right) \leq \sup_{t\geq 0} g_\alpha(t) = c_\alpha^*,$$

avec

$$g_\alpha(t) = \widetilde{g_\alpha}(t) - \lambda\frac{t^q}{q}\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^q dx,$$

où on a posé

$$\widetilde{g_\alpha}(t) = \frac{t^2}{2}\left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^2 - \frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, d'après ce qui précède, $\sup\limits_{t\geq 0} g_\alpha(t)$ est atteint pour un certain $t_\varepsilon > 0$. Du fait que

$$0 = g_\alpha'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon\left(\left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^2 - t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2} - \lambda t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^q dx\right),$$

on a

$$\begin{aligned} \left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^2 &= t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2} + \lambda t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^q dx \\ &\geq t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2}, \end{aligned}$$

et alors,

$$t_\varepsilon \leq \left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^{2/(2^*(\alpha)-2)} := t_0. \tag{4.20}$$

Ainsi

$$\left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^2 \leq t_0^{2^*(\alpha)-2} + \lambda\left\|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right\|^{2(q-2)/(2^*(\alpha)-2)}\int_\Omega \left|u_{\mu,\alpha}^\varepsilon\right|^q dx.$$

D'autre part, la fonction $\widetilde{g_\alpha}(t)$ atteint t_0 et est croissante dans l'intervalle $[0, t_0]$, donc à partir de (4.1), (4.2) et (4.20), il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
g_\alpha(t_\varepsilon) &= \widetilde{g_\alpha}(t_\varepsilon) - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega \left| u_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right|^q dx \\
&\leq \widetilde{g_\alpha}(t_0) - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega \left| u_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right|^q dx \\
&= \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)} \left\| u_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right\|^{2(N-\alpha)/(2-\alpha)} - \lambda \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega \left| u_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right|^q dx \\
&\leq \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)} S_{\mu,\alpha}^{(N-\alpha)/(2-\alpha)} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{(N-2)/(2-\alpha)}\right) - C \int_\Omega \left| u_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right|^q dx, \\
&< \tfrac{2-\alpha}{2(N-\alpha)} S_{\mu,\alpha}^{(N-\alpha)/(2-\alpha)}
\end{aligned}$$

quand

$$\frac{N - 2\sqrt{\overline{\mu} - \mu}}{\sqrt{\overline{\mu}}} < q < 2^*.$$

Les fonctionnelles I et g_α atteignent leurs maximums aux points positifs t_1 et t_2 respectivement. Alors

$$g_\alpha(t_1) - \frac{t_1^{2^*(\beta)}}{2^*(\beta)} \int_\Omega \left| u_{\mu,\alpha}^\varepsilon \right|^{2^*(\beta)} |x|^{-\beta} dx = g_\alpha(t_2).$$

Il s'ensuit que $g_\alpha(t_2) < g_\alpha(t_1)$, ce qui nous amène à une contradiction.

De même dans le cas où $c_\beta^* \leq c_\alpha^*$, on trouve $c_\beta \leq c_\beta^*$. Ainsi on aura $\sup_{t\geq 0} I\left(t\widetilde{U}\right) < c^*$.

■

4.4.2 Preuve du théorème 4.2

Preuve: En utilisant les lemmes 4.1 , 4.2 et 4.3, on a

$$\begin{aligned}
0 &< c \leq \sup_{t\in[0,1]} I\left(tt_0\widetilde{U}\right) \\
&\leq \sup_{t>0} I\left(t\widetilde{U}\right) < c^*,
\end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) possède une sous-suite, notée encore (u_n), telle que $u_n \to u$ fortement dans H_μ. Ainsi u est une solution non triviale du problème $(\mathcal{P}_2)$. Par le principe du maximum, on obtient que $u > 0$ dans $H_\mu \backslash \{0\}$. $\blacksquare$

Perspectives

1 - Etendre le travail du chapitre 2 cas des problèmes quasi-linéaires du type p-Laplacien.

2 - Que peut-on dire lorsque le terme perturbateur du chapitre 4 est concave c'est à dire $1 < q < 2$?

3 - Peut-on récupérer la compacité (compacité globale) d'une suite de $(PS)_c$ lorsque $c \neq c_\alpha^*$ et $c \neq c_\beta^*$ du problème du chapitre 4 ?

4 - Etudier la régularité des solutions des problèmes étudiés.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal., 14 (1973) 349-381.

[2] M. Bouchekif, Y. Nasri, Elliptic equations with critical nonlinearities and Hardy terms, Georgian Math. J., DOI 10.1515 (2014).

[3] M. Bouchekif, S. Messirdi, Elliptic equations with multiple critical nonlinearities and Hardy term. In preparation.

[4] M. Bouchekif, S. Messirdi, On elliptic problems with two critical Hardy–Sobolev exponents at the same pole, Appl. Math. Lett. 42 (2015) 9-14.

[5] M. Bouchekif, S. Messirdi, On nonhomogeneous elliptic equations with critical Sobolev exponent and prescribed singularities. Submitted.

[6] H. Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson, 1983.

[7] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1983) 437-477.

[8] J. Chen, Multiple positive solutions for a semilinear equation with prescribed singularity. J. Math. Anal. Appl., 305 (2005) 140-157.

[9] N. Chaudhuri, M. Ramaswamy, Existence of positive solutions of some semilinear elliptic equations with singular coefficients. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 131 (2001) 1275-1295.

[10] J. Chen, E.M. Rocha, Four solutions of an inhomogeneous elliptic equation with critical exponent and singular term, Nonlinear Anal., 71 (2009) 4739-4750.

[11] H. Egnell, Elliptic boundary value problems with singular coefficients and critical nonlinearities, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989) 235-251.

[12] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 17 (1974) 324-353.

[13] V. Felli, S. Terracini, Elliptic equations with multi-singular inverse-square potentials and critical nonlinearity, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006) 469-495.

[14] R. Filippucci, P. Pucci, F. Robert, On a p-Laplace equation with multiple critical nonlinearities, J. Math. Pures Appl., 91 (2009) 156-177.

[15] W.M. Frank, D.J. Land, R.M. Spector, Singular potentials, Rev. Modern Phys., 43 (1971) 36-98.

[16] N. Ghoussoub, C. Yuan, Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents. Trans. Amer. Math. Soc., 352 (2000) 5703-5743.

[17] G. Hardy, J. Littlewood, G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1934.

[18] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, inequalities, reprint of the 1952 edition, Cambridge Mathematical Library Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[19] E. Jannelli, The role played by space dimension in elliptic critical problems, J. Differential Equations, 156 (1999) 407-426.

[20] D. Kang, Nontrivial solutions to semilinear elliptic problems involving two critical Hardy Sobolev exponents, Nonlinear Anal., 72 (2010) 4230-4243.

[21] D. Kang, Y. Deng, Multiple solutions for inhomogeneous elliptic problems involving critical Sobolev–Hardy exponents, Nonlinear Anal., 60 (2005) 729-753.

[22] D. Kang, S. Peng, Positive solutions for singular critical elliptic problems, Appl. Math. Lett., 17 (2004) 411-416.

[23] D. Kang, S. Peng, Solutions for semilinear elliptic problems with critical Sobolev–Hardy exponents and Hardy potential, Appl. Math. Lett., 18 (2005) 1094-1100.

[24] O. Kavian, Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques., 1993.

[25] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory, Pergamon Press. Ltd., London-New York, 1965.

[26] P.L. Lions, The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (I), Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (1) (1985) 145-201.

[27] P.L. Lions, The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (II), Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (2) (1985) 45-121.

[28] P. Pucci, R. Servadei, Existence, nonexistence and regularity of radial ground states for p-Laplacian equations with singular weights. Ann. Inst. H. Poincaré, 25 (2006) 505-537.

[29] M. Struwe, Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems., 1990.

[30] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire, 9 (1992) 281-309.

Résumé

Dans cette thèse on s'est intéressé à deux classes d'équations elliptiques:

- La première classe de problèmes contient un exposant critique et des poids singuliers.

- La deuxième classe contient plusieurs exposants critiques et des poids avec un seul pôle.

De tels problèmes ne peuvent pas être résolus par les méthodes variationnelle classiques. Notre travail consiste à étudier localement en chaque pôle l'existence de solutions via le principe variationnel d'Ekeland et le théorème du Col.

Mots clés : Méthodes variationnelles, exposants critiques, condition de Palais-Smale, principe de concentration de compacité.

Abstract

In this thesis we are interested in two classes of elliptic equations:

- The first class of problems contains a critical exponent and singular weights.

- The second class contains several critical exponents and singular weights with a same pole.

Such problems can not be solved by classical variational methods. Our work is to study the existence of solutions locally in each pole via Ekeland's Variational Principle and the Mountain Pass Lemma.

Keywords: Variational methods, critical exponents, Palais-Smale condition, concentration compactness principle.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة دراسة صنفين من المعادلات الإهليجية:

- معادلات إهليجية تحتوي على قوى أسية و ثقل شاد.

- معادلات إهليجية تحتوي على قوى أسية و ثقل شاد في نفس القطب .

هذا النوع من المشاكل الرياضية لا يمكن حلّه بالطرق الكلاسكية المعروفة لهذا نهتم بدراسة إمكانية وجود على الأقل حل محلي عند كل قطب بإستعمال مبدأ Ekeland ونظرية Mountain pass.

الكلمات المفتاحية:

شرط Palais-Smale, طرق التغاير، الأس الحرج، مبدأ التركيزالمتراص