REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN -
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option **:** ***Equations Différentielles***

Thème

Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires

Présenté par : **Melle RAHOU Hadjar**

Soutenu le : / 06 /2015
Devant le Jury :

Mr.Yebedri Mustafa	***Président***
Mr.Mabkhout Benmiloud	***Examinateur***
Mr.Benchaib Abdelatif	***Examinateur***
Mr.Bouguima Sidi Mohammed	***Examinateur***
Mr.Slimani Boualem Attou	***Encadreur***

Année universitaire :
2014-2015

Dedicaces

Ce travail est dédié à :

Ma mère et mon père.

Mes frères et sœurs.

Ma famille et mes amies.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur, Boualem Attou Slimani, enseignant à la Faculté de Technologie de l'université Tlemcen d'avoir accepter de diriger mon mémoire. Il m'a guidé durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur Mebkhout Benmiloud, enseignant au département de mathématiques de l'université de Tlemcen de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Messieurs Bouguima Sidi Mohammed et Benchaib Abdellatif, enseignants au département de mathématiques de l'université de Tlemcen d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

Table des matières

Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondements de ce type de calcul (Voir les références [15, 22, 24, 27, 29, 33]), mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu un plus large intérêt ; voir les ouvrages [25, 29, 33, 35] .
Le calcul fractionnaire a un champ d'applications très vaste, (voir [14, 18, 19, 22, 27]), par exemples : viscoélasticité, théorie du contrôle, équation de diffusion, électricité, électromagnétique, biologie ...

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de Benchohra et al[7, 8, 10] et Byszewski et al[11, 12, 13].

Notre travail est réparti en cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de travail .

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude du problème de Cauchy de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0,T], 0 < \alpha < 1$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Dans le troisième chapitre on présente quelques résultats d'existences et d'unicité de solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On considère les deux problèmes suivants :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0,T], 0 < \alpha < 1$$

$$ay(0) + by(T) = c,$$

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0,T],\ 1 < \alpha \leq 2,$$

$$y(0) = y_0,\ y(T) = y_T,$$

Pour le quatrième chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions de problème aux limites avec conditions non locales en utilisant l'approche de point fixe via les théorèmes de Banach et Schaefer,

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0,T], 0 < \alpha < 1$$

$$y(0) + g(y) = y_0.$$

Ensuite on traite le problème aux limites avec conditions non locales dans le cas suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0, T], 1 < \alpha < 2$$
$$y(0) = g(y),\ y(T) = y_T.$$

Dans le dernier chapitre on obtient quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions pour le problème aux limites avec conditions intégrales suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ \text{pour tout } t \in J = [0, T],\ 0 < \alpha \leq 1$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)\, ds = y(T)$$

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, définitions relatives aux opérateurs d'ordre fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler, lemmes et théorèmes qui seront utilisés à travers les chapitres suivants.

1.1 Notations et définitions

Soit $J := [0,T]$, $T > 0$. Notons $C(J,\mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in J\}$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Soit $J := [0,T]$, $T > 0$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ $(0 \leq \gamma < 1)$, on introduit l'espace à poids $C_\gamma[0,T]$ des fonctions f définies sur $(0,T]$, tel que la fonction $x^\gamma f(x) \in C[0,T]$ et

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|x^\gamma f(x)\|_C,\ C_0[0,T] = C[0,T].$$

On note par $AC^1(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $f : J \to E$ dont la première dérivée est absolument continue.

Définition 1.1. *[37] Une fonction $f : J \to E$ est dite **absolument continue** si pour tout $\varepsilon \geq 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partiton finie $[a_i,b_i]_{i=1}^p$ vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i) < \delta,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{p}\|y(b_i) - y(a_i)\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2. *Soient E et F deux espaces de Banach, et $A : E \to F$ une application linéaire. On dit que A est **bornée** si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

Définition 1.3. *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle* ***opérateur borné*** *toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.4. *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est* ***complètement continue*** *si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite* ***compacte*** *si $f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Définition 1.5. *Soient (K,d) un espace métrique et F un evn. On dit qu'une partie $A \subset C(K,F)$ est* ***équicontinue*** *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,*

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon \; pour \; tout \; x,y \in K \; tq \; d(x,y) < \alpha(\varepsilon).$$

Définition 1.6. *Soient E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est* ***une contraction*** *(ou contractant), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\,\|x - y\|_E\,,\; pour \; tout \; x,y \in E.$$

Définition 1.7. *[37] Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit* ***point fixe*** *de T si $Tx = x$.*

Définition 1.8. *Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty)$ f est dite* ***d'ordre exponentielle*** *$\alpha(\alpha > 0)$ s'il existe une constante positive K et $T > 0$, telle que*

$$\forall t > T, \; on \; a \; |f(t)| \leq K e^{\alpha t}$$

Définition 1.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $[0,+\infty[$, et d'ordre exponentiel α.* ***La transformée de Laplace*** *de la fonction f est l'application $\mathcal{L}$ définie par*

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t), p \in \mathbb{C} \; avec Re(p) > \alpha.$$

1.2 Éléments de calcul fractionnaire

1.2.1 Un aperçu historique sur la dérivation fractionnaire

En 1695, dans une lettre au mathématicien français l'Hospital, Leibniz a soulevé la question suivante : « peut on généraliser le sens des dérivées avec un ordre entier aux dérivées avec un ordre non entier ? ». l'Hospital était un peu curieux au sujet de cette question et a répondu par une autre question à Leibniz : « et si l'ordre sera$\frac{1}{2}$? ». Leibniz dans une lettre datée du 30 septembre a répondu par « un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ».
Au fil des ans, de grands mathématiciens ont fourni des contributions importantes à cette théorie . Ainsi le **30 Septembre 1695** est considérée comme la date exacte de la naissance du « calcul fractionnaire » ! . le calcul fractionnaire trouve son origine dans les travaux de *Leibniz, L'Hopital* (1695), *Bernoulli* (1697), *Euler* (1730), et *Lagrange* (1772).
Quelques années plus tard, *Laplace* (1812), *Fourier* (1822), *Abel* (1823), *Liouville* (1832), *Riemann* (1847), *Grüunwald* (1867), *Letnikov* (1868), *Nekrasov* (1888), *Hadamard* (1892), *Heaviside* (1892), *Hardy* (1915), *Weyl* (1917), *Riesz* (1922), *P. Levy* (1923), *Davis* (1924), *Kober* (1940), *Zygmund* (1945), *Kuttner* (1953), *J. L. Lions* (1959), and *Liverman* (1964)...ont développé le concept de base du calcul fractionnaire.

En 1783, *Leonhard Euler* a fait ses premiers commentaires sur la dérivée d'ordre fractionnaire.Il a travaillé sur des progressions de chiffres et introduit la fonction *Gamma* qui géneralise la fonction factorielle. Un peu plus de cinquante ans après la mort de *Leibniz*, *Lagrange*, en 1772, indirectement a contribué à l'évolution de la loi des exposants pour les opérateurs différentiels d'ordre entier, qui peuvent être transférés à un ordre arbitraire, sous certaines conditions . En 1812, *Laplace* a fourni la première définition détaillée de la dérivée fractionnaire. *Laplace* affirme qu'une dérivée fractionnaire peut être définie par une fonction avec une représentation intégrale, en notation moderne, elle peut être écrite sous la forme $\int y(t)t^{-x}dt$. Quelques années après, Lacroix a travaillé sur la généralisation de la dérivée d'ordre entier de la fonction $y(t) = t^m$ pour un ordre fractionnaire, où m est un nombre naturel. Dans les notations modernes, la dérivée d'ordre entier n définie par Lacroix peut être donnée par

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{m!}{(m-n)!}t^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}t^{m-n}, m > n$$

Où, Γ est la *fonction Gamma eulérienne*.
Donc, en remplaçant n par $\frac{1}{2}$ et laissant $m = 1$, on obtient la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction t

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$$

Différentes approches ont été utilisés pour cette notion de dérivation :

- La limite de taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement.
- l'intégration, opérateur inverse, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo.
- Enfin les transformation de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(iw)^{\alpha}$ ou p^{α} avec α non entier.

Mais ces différentes définitions ont pendant longtemps semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats. Cette incohérence apparente a pu être dissipée dans le cadre nouveau proposé par la théorie des distributions de Laurent Schwartz[36]. Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquement dans les différents champs de recherches. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés. On peut noter que pour la majeure partie des domaines d'application, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire. Mentionnons les ouvrages [18, 19, 22, 27, 28, 33] qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire.

1.2.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt,$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = [-e^{-t}t^z]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La fonction Bêta

Définition 1.10. *La fonction $B(p,q)$ est la fonction **Bêta** (ou intégrale eulerienne de première espèce), définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx \quad p > 0, q > 0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulerienne de première et seconde espèce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; Re(p) > 0; Re(q) > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle joue très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [30, 31] et désignée par la fonction suivante [16, 17] :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}. \tag{1.1}$$

La fonction de **Mittag-Leffler** à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [3] et elle est définie par le développement en série suivant [16, 17] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.2}$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.1). A partir de la relation (1.2) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2.3 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville.

Définition 1.11. *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a,b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$; est définie par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds,$$

où Γ est la fonction Gamma. Lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$
où $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0, \varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\varphi_\alpha \to \delta$, quand $\alpha \to 0$.

Thoérème 1.12. *Pour $h \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta h(t) \right) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) \ \ pour \ \ \alpha > 0, \beta > 0$$

Propriétés 1.13. *Nous avons les propriétés suivantes :*
i) $I_a^0 h(t) = h(t)$,
ii) l'opérateur intégral I_0^α est linéaire.

Exemple 1.14. *Soit $h(t) = (t-a)^m$*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^m\, ds. \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ on obtient,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha h(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha} \Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+m+1)} \end{aligned}$$

D'où

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{m+\alpha}.$$

1.2.4 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

Approche de Grunwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. La dérivée de Grunwald-Letnikov d'ordre α est définie par

$$(D^{\alpha}_{a^+}f)(t) := \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh).$$

Les coefficients binomiaux avec des signes alternatifs pour des valeurs positives de n sont définis comme

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Pour le calcul des coefficients binomiaux on peut utilisés la relation entre la fonction Gamma d'Euler et la factorielle, définie comme

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}$$

La dérivée de Grunwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(t-jh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur $\mathbb{R}$ (de Liouville). Par contre les inconvénients de cette approche sont sa difficulté technique pour faire les calculs, les preuves et les grandes restrictions sur les fonctions [40].

Exemple 1.9.

1. **La dérivée d'une fonction constante au sens de Grunwald-Letnikov**
   En général la dérivée d'une fonction constante au sens de Grunwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.
   Si $f(t) = c$ et α non entier positif on a :

$$f^{(k)}(t) = 0, \text{ pour } k = 1, 2, ..., n$$

$$\begin{aligned} {}^{G}D^{\alpha}f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-\alpha)^{-\alpha} \end{aligned}$$

2. **La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Grunwald-Letnikov**
   Si α non entier et $0 \le n-1 < \alpha < n$ avec $p > n-1$ alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour } k = 1, 2, ..., n-1$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n}$$

d'où

$${}^{G}D^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a+s(t-a)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.15. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n-1 \leq \alpha < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \\
&= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t))
\end{aligned}$$

Propriétés

1. **Composition avec l'intégrale fractionnaire**

   - L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

     $${}^{RL}D^{\alpha}(I^{\alpha}f(t)) = f(t),$$

     en général on a

     $${}^{RL}D^{\alpha}(I^{\beta}f(t)) = {}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)$$

     et si $\alpha-\beta<0$, ${}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t) = I^{\beta-\alpha}f(t)$.

   - En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

     $${}^{RL}D^{-\alpha}({}^{RL}_{a}D^{\beta}_{t}f(t)) = {}^{RL}D^{\beta-\alpha}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{RL}D^{\beta-k}_{t}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

     avec $m-1 \leq \beta < m$.

2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**
   La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne comutent que si :
   $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0,1,2,...,n-1$.
   $$\frac{d^n}{dt^n}(^{RL}D^{\alpha} f(t)) =^{RL} D^{n+\alpha} f(t),$$
   mais
   $$^{RL}D^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) =^{RL} D^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$
3. **Composition avec les dérivées fractionnaires**
   Soit $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$, alors
   $$^{RL}D^{\alpha}(^{RL}D_t^{\beta} f(t)) =^{RL} D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [^{RL}D^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$
   et
   $$^{RL}D^{\beta}(^{RL}D_t^{\alpha} f(t)) =^{RL} D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{n} [^{RL}D^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}$$
   par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D^{\alpha}$ et $^{RL}D^{\beta} (\alpha \neq \beta)$, ne commutent que si $[^{RL}D^{\beta-k} f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1,2,...,n$, et $[^{RL}D^{\alpha-k} f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1,2,...,m$.

Exemples

1. **La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville**
   En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :
   $$^{RL}D^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$
2. **La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville**
   Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, alors on a :
   $$^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta} d\tau$$
   En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :
   $$\begin{aligned} ^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.16. *Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a,b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f, d'ordre $\alpha > 0$ est définie par*

$$^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds,$$

ici $n = [\alpha]+1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α.

Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $f : [a,b] \to E$ une fonction absolument continue alors la dérivée d'ordre fractionnaire α de f existe.

Propriétés

1. **La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville**
   Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}^{c}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t)$ et ${}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t)$ existent alors

   $$^{c}D^{\alpha}f(t) =^{RL} D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

   On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0,1,2,...,n-1$, on aura $^{c}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t)$.

2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**
   Si f est une fonction continue on a

   $$^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}_{a}f = f \text{ et } I^{\alpha c}_{a}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}$$

   donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples

1. **La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo**
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

   $$^{c}D^{\alpha}C = 0$$

2. **La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Caputo**
   Soit n un entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on

   $$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n},$$

   d'où

   $$^{c}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau$$

en effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
{}^cD^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

- L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- Une autre différence entre la définition la de Riemann et celle de Caputo de Caputo et que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.
- Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville) , c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordere entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputoon commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. **Linéarité**
   La dérivation fractionnaire est une opération linéaire
   $$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha}f(t) + \mu D^{\alpha}g(t)$$
2. **La règle de Leibniz**
   Pour n entier on a
   $$\frac{d^n}{dt^n(f(t)g(t))} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$
   La généralisation de cette formule nous donne
   $$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)D^{(\alpha-k)}g(t) + R_n^{\alpha}(t),$$
   où $n \geq \alpha+1$ et
   $$R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)d\tau\int_{\tau}^{t} f^{(n+1)}(\zeta)(\tau-\zeta)^n d\zeta,$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^\alpha(t) = 0$.

Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t).$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Malheureusement, le calcul fractionnaire lui manque une interprétation géométrique de l'intégration ou la différentiation d'ordre arbitraire. On renvoie les lecteurs aux ouvrages tels que[22, 25, 26, 29, 32, 33, 35]et les articles[1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 24, 34]

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de théorèmes de point fixe suivants :

Thoérème 1.17. *(Banach)[20]*

Soient X un espace de Banach, et $A : X \to X$ un opérateur contractant.

Alors A admet un point fixe unique. i.e $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.

Thoérème 1.18. *(Schauder)[38]*

Soit (E,d) un espace metrique complet, soit X une partie convexe et fermé de E, et soit $A : X \to X$ une application telle que l'ensemble $\{Ax : x \in X\}$ est relativement compacte dans E. Alors A possède au moins un point fixe.

Thoérème 1.19. *(Schaefer)[20, 21]*

Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu.

Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda A u = u,\ \text{pour un certain } \lambda \in]0,1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Thoérème 1.20. *(Ascoli-Arzelà)[21]*

Soit A un sous ensemble de $C(J,E)$, A est relativement compacte dans $C(J,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f(x)\| \leq K \quad \text{pour tout} \quad x \in J \text{ et tout } f \in A,$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$,ilexiste$\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A,$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compacte.

1.4 Lemmes fondamentaux

Lemme 1.21. *[39] Soit* $\alpha > 0$, *alors l'équation différentielles*

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet les solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,...,n-1$, $n = [\alpha]+1$.

Preuve. Supposons que

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = 0,$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} h(t) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} h(s)\,ds = 0,$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} h(s)\,ds = 0,$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1} * h^{(n)}(s) = 0.$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L\left(t^{n-\alpha-1} * h^{(n)}(t)\right)(p) = L(0)(p) = 0$$

posant $H(p) = L(h)(p)$ on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{p^{n-\alpha}}\left(p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{(k-1)}(0)\right) = 0,$$

alors

$$p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{(k-1)}(0) = 0,$$

donc

$$H(p) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{(k-1)}(0),$$

appliqunat maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(H(p))(t) = L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{(k-1)}(0)\right)(t)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=1}^{n} h^{(k-1)}(0) L^{-1}\left(p^{-k}\right)(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h^{(k-1)}(0) \cdot \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

pour $c_i = \frac{h_i(0)}{i!}$ on a

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i.$$

Supposons maintenant que

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha} h(t) &= {}^{c}D^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^c D^{\alpha} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n t^i \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a

$${}^{c}D^{\alpha} h(t) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 1.22. *[39] Soit* $\alpha > 0$*, alors*

$$I^{\alpha\, c}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Preuve. On a par la définition de la dérivée fractionaire de Caputo

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = I^{n-\alpha}h^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) &= I^{\alpha}I^{n-\alpha}h^{(n)}(t) \\
&= I^{nRL}D^{n}h(t) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n}h(t) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} h(t)\right)(0) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h^{(n-j)}(0)
\end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)\, t^k}{k!} \\
&= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c'_k t^k}{k!} \\
&= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème pour équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Des résultats d'existence et d'unicité sont obtenues pour ce problème moyennant le théorème de point fixe de Banach

2.1 Résultats d'existences

Dans cette section, on donne les conditions de l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.2) dans l'espace $C_{\gamma}[0, T]$ définie pour $0 < \alpha < 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}\,(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ par

$$C_{\gamma} = \left\{ f(t) : t^{\gamma} f(t) \in C[0, T], \|f\|_{C_{\gamma}} = \|t^{\gamma} f(t)\|_{C} \right\} \tag{2.3}$$

$$C_{\gamma}^{\alpha}[0, T] = \left\{ f(t) \in C[0, T] :^{c} D_{0^{+}}^{\alpha} f \in C_{\gamma}[0, T] \right\} \tag{2.4}$$

Notre approche est basée sur la réduction du problème considéré en une équation intégrale de Volterra

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds \text{ , } 0 \leq t \leq T \tag{2.5}$$

Lemme 2.1. *soit $\alpha \in \mathbb{R}\,(0 < \alpha < 1)$,et soit $f_{1-\alpha}(t) = \left(I_{0^{+}}^{1-\alpha} f\right)(t)$. Si $f(t) \in C_{\gamma}[0, T]$ et $f_{1-\alpha}(t) \in C_{\gamma}^{1}[0, T]$,alors*

$$(I^{\alpha} D^{\alpha} f)(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, t \in [0, T] \tag{2.6}$$

Lemme 2.2. *Si $\gamma \in \mathbb{R}\,(0 \leq \gamma < 1)$, alors l'opérateur d'intégration $I_{0^+}^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est borné dans $C_{\gamma}[0,T]$*

$$\|I^{\alpha}g\|_{C\gamma} \leq T^{\alpha}\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\|g\|_{C_{\gamma}} \tag{2.7}$$

Tout d'abord, nous établissons une équivalence entre le problème (2.1)-(2.2) et l'équation intégrale (2.5) dans l'espace $C[0,T]$ des fonctions continues.

Lemme 2.3. *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,h(s)\,ds \tag{2.8}$$

si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t)\,,\; t \in [0,T]\,, \tag{2.9}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.10}$$

Preuve. Soit y la solution de l'équation intégrale (2.8). On commence par la vérification de la condition initiale, on a d'après (2.8)

$$|y(t)-y_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right|,$$

alors

$$\begin{aligned} |y(t)-y_0| &\leq \frac{\|h\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{\|h\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha}. \end{aligned}$$

On prend la limite quand $t \longrightarrow 0$, et on obtient

$$y(0) = y_0.$$

Donc (2.8) vérifie la condition initiale (2.10). Il reste a montrer qu'elle vérifie l'équation (2.9).

On a,

$$\begin{aligned} y(t)-y_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,h(s)\,ds \\ &= I^{\alpha}h(t) \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur D^{α} aux deux membres de l'égalité,

on aura

$$D^{\alpha}(y(s)-y_0)(t) = h(t)\,,$$

de plus, on a

$$D^{\alpha}(y(s)-y_0)(t) =^{c} D^{\alpha}y(t)\,.$$

par suite

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t)\,,\;\; t \in [0,T]\,.$$

Inversement on a

$$ {}^{c}D^{\alpha}y(t) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}[y(s) - y_0](t). $$

Comme $h(t)$ est continue, il s'ensuit que ${}^{c}D^{\alpha}y$ est continu, et par suite $I^{1-\alpha}[y(s) - y_0]$ est continu.

En appliquant l'opérateur I^{α} aux deux membres de l'égalité précédente, on aurra

$$ I^{\alpha}\, {}^{c}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y_0 - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I^{1-\alpha}[y(s) - y(0)](t), $$

d'autre part, on a

$$ \begin{aligned} \left|I^{1-\alpha}[y(s) - y_0](t)\right| &\leq \frac{\sup\limits_{t\in[0,T]} |y(t) - y_0|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{\|y - y_0\|_{\infty}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{1-\alpha}, \end{aligned} $$

par suite

$$ \lim_{t\to 0} \left|I^{1-\alpha}[y(s) - y(0)](t)\right| = 0, $$

par conséquent

$$ I^{\alpha}\, {}^{c}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y_0. $$

On a $h \in C([0,T], \mathbb{R})$, et par conséquent $I^{\alpha}h$ est continu.

Appliquons I^{α} aux deux membres de (2.9)

$$ I^{\alpha}\, {}^{c}D^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}h(t) $$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$ \begin{aligned} y(t) &= y_0 + I^{\alpha}h(t) \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} $$

c'est à dire $y(t) \in C[0,T]$ est la solution de l'équation intégrale (2.8). □

Maintenant, on va établir l'existence et l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) dans l'espace $C_{\gamma}[0,T]$ sous les hypothèses du lemme(2.3) et une condition de Lipschitz. Pour cela on a besoin du résultat auxilliaire suivant :

Lemme 2.4. *Soit $J = [0,T]$, $0 < c < T, g \in C[0,c]$ et $g \in C[c,T]$ alors $g \in C[0,T]$ et*

$$ \|g\|_{C[0,T]} \leq \sup\left[\|g\|_{C[0,c]}, \|g\|_{C[c,T]}\right] \tag{2.11} $$

Thoérème 2.5. *Soit* $0 < \alpha < 1$, *et* $0 \leq \gamma \leq \alpha$. *Soit G un ouvert de* $\mathbb{R}$, *et soit* $f : (0,T] \times G \to \mathbb{R}$, *une fonction telle que, pour chaque* $y \in G$, $f[t,y] \in C_\gamma[0,T]$ *et vérifie la condition de lipschitz suivante (H1) Il existe une constante* $A > 0$ *telle que :*

$$|f(t,y) - f(t,\bar{y})| \leq A|y-\bar{y}|, \textit{pour tout } t \in [0,T], \textit{et tout } y,\bar{y} \in G.$$

Alors il existe une solution unique $y(t)$ *pour le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) dans l'espace* $C_\gamma[0,T]$.

Preuve. On commence par montrer l'existence d'une solution unique $y(t) \in C[0,t_1]$. D'après le lemme (2.3), il suffit de montrer que l'équation intégrale de Volterra (2.8) possède une solution unique $y(t) \in C[0,t_1]$. On montre le résultat en premier temps sur une partie de l'intervalle $[0,T]$ l'équation intégrale (2.8) a un sens sur chaque intervalle $[0,t_1] \subset [0,T]$. Choisissons t_1 tel que l'inégalité,

$$A\frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.12}$$

soit vérifiée, ensuite on montre l'existence d'une solution unique $y(t) \in C[0,t_1]$ pour l'équation intégrale de Volterra (2.8) sur $[0,t_1]$. Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'éspace $C[0,T]$ qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par

$$d(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C[0,t_1]} = \sup_{t\in[0,t_1]} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

On réecrit l'équation intégrale (2.8) sous la forme suivante :

$$y(t) = (Ty)(t).$$

Où

$$(Ty)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\,ds \tag{2.13}$$

Pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. Si $y(t) \in C[0,t_1]$ alors $(Ty)(t) \in C[0,t_1]$

2. Pour chaque $y_1,y_2 \in C[0,t_1]$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0,t_1]} \leq w\|y_1 - y_2\|_{C[0,t_1]}\, avec\, (0 < w < 1). \tag{2.14}$$

Comme $f[t,y] \in C[0,t_1]$, et tenant compte du lemme(2.2), on a

$$\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(s,y(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right\|_{C[0,t_1]} \leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(t,y(t))\|_{C[0,t_1]}$$

alors $(Ty)(t) \in C[0,t_1]$. Montrons maintenant (2.14).

En vertu de (2.3), du lemme(2.2), et en utilisant la condition de Lipschitz ,
On obtient

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0,t_1]} &= \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s)))(t-s)^{\alpha-1}ds\right\|_{C[0,t_1]} \\
&\leq \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(s,y_1(t)) - f(s,y_2(t))\|_{C[0,t_1]} \\
&\leq \frac{At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|_{C[0,t_1]}
\end{aligned}$$

à l'aide du (2.12), on obtient (2.14), avec $w = \frac{At_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, et alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $y^*(t) \in C[0,t_1]$ de l'équation intégrale (2.3) sur $[0,t_1]$. Par le théorème de Banach, la solution $y^*(t)$ est une limite de la suite convergente $(T^n y_0)(t)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n y_0^* - y^*\|_{C[0,t_1]} = 0 \tag{2.15}$$

On prend

$$y_0^* = y_0.$$

Tenant compte de l'équation intégrale (2.8), la suite $\left(T^n y_0^*\right)(t)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^n y_0^*)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f\left(s, \left(T^{n-1} y_0^*\right)(s)\right)(t-s)^{\alpha-1} ds,\ n = 1,2,...$$

Si on note, $y_n(t) = \left(T^n y_0^*\right)(t)$, alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$(y_n)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s,(y_{n-1})(s))(t-s)^{\alpha-1} ds, (n \in \mathbb{N})$$

et (2.15) devient

$$\lim_{n\to+\infty} \|y_n - y\|_{C[0,t_1]} = 0.$$

Après, on considère l'intervalle $[t_1,t_2]$,où $t_2 = t_1 + h_1$ et $h_1 > 0$, avec $t_2 < T$.

Réecrivons l'équation intégrale (2.3) sous la forme

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s,y(s))(t-s)^{\alpha-1} ds + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s,y(s))(t-s)^{\alpha-1} ds,$$

puisque la fonction $y(s)$ est définie uniquement sur $[0,t_1]$,

nous obtenons

$$y(t) = y_{01} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\,ds,$$

où

$$y_{01} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s,y(s))(t-s)^{\alpha-1} ds,$$

Par une technique similaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution sur $[0,t_1]$, on peut déduire qu'il existe une solution unique $y_1^*(t) \in C[t_1,t_2]$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[t_1,t_2]$. On prend l'intervalle suivant $[t_2,t_3]$, où $t_3 = t_2 + h_2$ et $h_2 > 0$, sont tel que $t_3 < T$. En répétant ce processus, on trouve qu'il existe une solution unique $y(t)$ de l'équation (2.3), telle que

$$y(t) = y_k^*(t)$$

et

$$y_k^* \in C[t_{k-1},t_k],\ (k = 1,...,L)$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_L = T$. Par le lemme(2.4), il s'ensuit qu'il existe une solution unique $y(t) \in C[0,T]$ sur l'intervalle $[0,T]$ tout entier. Par conséquent, il existe une solution unique $y(t) = y^*(t) \in C[0,T]$ de l'équation intégrale de Volterra (2.3) et alors du problème de Cauchy (2.1)-(2.2). Pour completer la démonstration, il reste à montrer que cette solution $y(t) \in C[0,T]$, appartienne à l'espace $C_\gamma^\alpha[0,T]$. Par la définition , il faut montrer que ${}^cD^\alpha y(t) \in C_\gamma[0,T]$. D'après ce qui précède $y(t) \in C[0,T]$ est une limite de la suite $y_n(t) = \left(T^n y_0^*\right)(t) \in C[0,T]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \|y_n - y\|_{C[0,t_1]} = 0 \tag{2.16}$$

En utilisant ensuite (2.1) et la condition de Lipschitz, on a

$$\begin{aligned}
\|{}^cD^\alpha y_n - {}^cD^\alpha y\|_{C[0,t_1]} &\leq \|f(t,y_n(t)) - f(t,y(t))\|_{C_\gamma[0,T]} \\
&\leq A\|y_n - y\|_{C_\gamma[0,T]} \\
&\leq AT^\gamma \|y_n - y\|_{C[0,T]} \\
&\leq A\|y_n - y\|_{C[0,T]}
\end{aligned}$$

de plus (2.16) permet d'obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \|{}^cD^\alpha y_n - {}^cD^\alpha y\|_{C[0,t_1]} = 0$$

alors ${}^cD^\alpha y(t) \in C_\gamma[0,T]$, et donc, $y \in C_\gamma^\alpha[0,T]$. Ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour des equations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites du premier ordre, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire .

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \tag{3.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{3.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Puis, nous examinerons le problème aux limites suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J := [0, T],\ 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.3}$$

$$y(0) = y_0,\ y(T) = y_T, \tag{3.4}$$

Où f est comme dans le problème (3.1)-(3.2)
Pour le premier problème on présentera deux résultats d'existence, le premier est basé sur le théorème de point fixe de Banach et le second sur le théorème de point fixe de Schaefer, ces résultats sont dus à Benchohra et Al [8]. Pour le deuxième problème nous présenterons un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder pour plus de détails voir [2]

3.1 Problème aux limites dans le cas $0 < \alpha < 1$

3.1.1 Existence des solutions

On commence par la définition d'une solution du problème (3.1)-(3.2).

Définition 3.1. *Une fonction $y \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.1)-(3.2) si y satisfait l'équation $^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$ sur J et la condition $ay(0) + by(T) = c$.*

Pour l'existence de la solution du problème (3.1)-(3.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2. *soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - c \right] \tag{3.5}$$

si et seulement si y est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t),\ t \in [0,T], \tag{3.6}$$

$$ay(0) + by(T) = c \tag{3.7}$$

Preuve. D'après le lemme(2.3) On a

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.$$

Il reste à vérifier les conditions aux limites, on a

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds,$$

or

$$ay(0) + by(T) = c,$$

par suite

$$ay(0) + by(0) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds = c, \quad \text{avec } a+b \neq 0,$$

c'est à dire

$$y(0) = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \right],$$

et on obtient (3.5). Ce qui achève la démonstration. □

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.2), en utilisant le théorème de contraction de Banach

Thoérème 3.3. *Supposons que :*

(H1) Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq k\,|u - \bar{u}|, \textit{pour tout } t \in J, \textit{et tout } u, \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.8}$$

alors, le problème (3.1)-(3.2) admet une solution unique sur $[0,T]$.

Preuve. On va transformer le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$$

défini par

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - c\right] \tag{3.9}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.1)-(3.2). F est bien défini, en effet : si $y \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors ,$(Fy) \in C([0,T],\mathbb{R})$. Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en effet : si $x,y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$.On a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty$$

En vertu de (3.8), on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.1)-(3.2). □

Notre deuxième résultat pour le problème (3.1)-(3.2) est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Thoérème 3.4. *Supposons que :*

(H2) La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(H3) Il existe une constante M> 0 telle que

$$|f(t,u)| \leq M \quad \textit{pour tout } t \in J \ \textit{,et tout } u \in \mathbb{R}.$$

alors, le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.9) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : *F est continue.*

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$. Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
& |F(y_n)(t) - F(y)(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \\
\leq\ & \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
\leq\ & \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

Puisque f est continue alors,

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

d'où la continuité de F.

Etape 2 : *L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$.*

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$,il existe une constante positive l telle que pour tout $y \in B_{\eta^*}, B_{\eta^*} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$, on a $\|F(y)\|_\infty \leq l$. Par (H3) on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq\ & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq\ & \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} :\ = l,$$

et par suite $F(B_{\eta^*})$ est borné.

Etape 3 : *L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.*

Soient $t_1, t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$, B_{η^*} un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right] ds \\ &\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2 - t_1)^{\alpha} + t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha} \right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^{\alpha} \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^{\alpha} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha})\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F . D'après l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F est complètement continu, et d'après l'étape 1, F est continu. Par conséquent $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4 :

Maintenant, il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est borné. Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$. On a

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds - c \right] \right],$$

alors, d'après (H3),et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))|\, ds \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))|\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\quad + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^{\alpha} + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^{\alpha} + \frac{|c|}{|a+b|}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0,T]$,on a

$$\|F(y)\|_{\infty} \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^{\alpha} + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^{\alpha} + \frac{|c|}{|a+b|} :\, = R$$

Cela montre que ε est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème(3.1)-(3.2). □

3.1.2 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^{t})(1+|y(t)|)},\ t \in J := [0,1],\ \alpha \in (0,1], \tag{3.10}$$

$$y(0)+y(1)=0. \tag{3.11}$$

Posons

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^{t})(1+x)},\quad (t,x) \in J \times [0,\infty).$$

Soit $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f(t,x)-f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}\left|\frac{x}{(1+x)}-\frac{y}{(1+y)}\right| \\ &= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^{t})(1+x)(1+y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|x-y|. \end{aligned}$$

Alors la conditions $(H1)$ est vérifiée avec $k=\frac{1}{10}$. On doit vérifier que la condtion (3.8) est satisfaite pour des valeurs appropriées de $\alpha \in (0,1]$ avec $a=b=T=1$.

En effet

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{3k}{2} = 0.15. \tag{3.12}$$

Alors d'après le Théorème(3.3) le problème (3.10)-(3.11) a une seule solution sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (3.12).

3.2 Probème aux limites dans le cas $1 < \alpha \leq 2$

3.2.1 Existence des solutions

Dans cette section on est concerné par l'éxistence des solutions du problème (3.3)-(3.4).
On commence par donner la définition d'une solution du problème (3.3)-(3.4).

Définition 3.5. *Une fonction $y \in C(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.3)-(3.4) si y satisfait (3.3) et (3.4).*

Soit $h : C[0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t),\ t \in J,\ 1 < \alpha \leq 2 \tag{3.13}$$

On note le problème (3.13)-(3.4) par (LP).

Pour l'existence de la solution, on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.6. *Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)h(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)}{T}t, \tag{3.14}$$

si et seulement si y est une solution de (LP), où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, & 0 \le s \le t \le T; \\ \frac{-t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, & 0 \le t \le s \le T. \end{cases} \tag{3.15}$$

Remarque la fonction $t \in J \to \int_0^T |G(t,s)|\, ds$ est continue sur J, et est donc bornée. Soit

$$\widehat{G} = \sup \left\{ \int_0^T |G(t,s)|\, ds, t \in J \right\}$$

Preuve.

Supposons que y satisfait (3.13), alors le lemme(1.22) nous donne

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

Par (3.4), on a

$$y(0) = y_0,$$

et

$$y(T) = y_0 + c_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

donc

$$c_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{y_T - y_0}{T}.$$

c'est à dire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1})h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{y_T - y_0}{T}t.$$

par suite, on trouve l'équation (3.14). Inversement, si y satisfait l'équation (3.14), alors l'équation (3.13)-(3.4) est vérifiée.

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder.

Thoérème 3.7. *Supposons que*
(H1) La fonction $f : J \times I\!R \to I\!R$ *est continue.*
(H2) Ils existent une fonction $\rho \in C(J, I\!R_+)$, *et* $\psi \in [0,\infty) \to [0,\infty)$ *continues et non décroissantes. Telles que*

$$|f(t,u)| \leq \rho(t)\psi(|u|), \text{ pour } t \in J \text{ et tout } u \in I\!R.$$

(H3) Il existe une constante $M > 0$ *telle que*

$$\frac{M}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho^*\psi(M)\widehat{G} + |y_0| + |y_T - y_0|} \geq 1 \tag{3.16}$$

où $\rho^* = \sup \rho(s), s \in J$

Preuve. Soit $C = \{y \in C(J, I\!R),\ \|y\|_\infty \leq M\}$. Où M est la constante donnée par (H3). Il est clair que le sous-ensemble C est fermé et convexe. Nous allons montrer que F satisfait les conditions du théorème de point fixe de Schauder.

Etape 1. *F est continu.*

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t \in J$.

$$|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t,s)||f(s,y_n) - f(s,y(s))|ds$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que .

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to 0$$

Etape 2. *F transforme C en un ensemble borné de* $C(J,\mathbb{R})$.

Soit $y \in C$, alors pour chaque $t \in J$, (H2) implique

$$\begin{aligned}(Fy)(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t,s)|f(s,y(s))ds + |y_0| + \frac{|(y_T - y_0)|}{T}|t| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\rho(t)\psi(|y(t)|) \int_0^T |G(t,s)|ds + |y_0| + |y_T - y_0|\end{aligned}$$

donc,

$$\|Fy\|_\infty \leq \rho^*\psi(M)\widehat{G} + y_0 + |y_T - y_0| := l$$

Etape 3 *F transforme C en un ensemble équicontinue de* $C(J,\mathbb{R})$.

Soit $y \in C$, $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$; alors

$$\begin{aligned}|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t_2,s)f(s,y(s))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t_1,s)f(s,y(s))ds\right| \\ &\quad + \left|\frac{y_T - y_0}{T}t_2 - \frac{y_T - y_0}{T}t_1\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)||f(s,y(s))|ds \\ &\quad + \frac{y_T - y_0}{T}|t_2 - t_1|\end{aligned}$$

quand $t_1 \to t_2$. Le membre à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par le théorème d'Ascoli-Arzélà, $N(C)$ est relativement compact pour tout borné de F. Alors N est complètement continu.

Etape 4 $F(C) \subset C$

Soit $y \in C$. On va montrer que $Fy \in C$. Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |(Fy)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))|ds + |y_0| + \frac{|y_T - y_0|}{T}|t| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \rho^* \psi(\|y\|_\infty) \widehat{G} + |y_0| + |y_T - y_0| \end{aligned}$$

alors

$$\|Fy\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \rho^* \psi(M) \widehat{G} + |y_0| + |y_T - y_0|$$

par (3.16) on a

$$\|Fy\|_\infty \leq M.$$

Par suite, on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème aux limites (3.3)-(3.4).□

Chapitre 4

Problèmes aux limites avec conditions non locales

Dans ce chapitre on présente quelques résultats d'existence et d'unicité des soltions du problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales.

On considère les deux problèmes suivants :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout } t \in J = [0,T], 0 < \alpha < 1 \tag{4.1}$$

$$y(0) + g(y) = y_0. \tag{4.2}$$

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \text{ ,pour tout} \in J = [0,T], 1 < \alpha < 2 \tag{4.3}$$

$$y(0) = g(y),\ y(T) = y_T. \tag{4.4}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : C([0,T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Ce type de problème a été introduit par le mathématicien

polonais L.Byszewski, il a remarqué que la condition non locale est trèsappropriée que la condition locale (initiale) pour décrire correctement des phénomènes physiques[11], il a prouvé l'existence et l'unicité des solutions faibles et aussi des solutions classiques pour ce genre de problèmes.

Dans ce chapitre on présente quelques résultats d'existence et d'unicité[11, 12, 13] en s'appuyant sur les théorèmes de point fixe de Banach et de Schaefer

4.1 Problème aux limites avec conditions non locales dans le cas 0<α<1

Définition 4.1. *Une fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution de (4.1)-(4.2) si elle satisfait l'equation (4.1) sur J et la condition (4.2)*

Introduisons les hypothèses suivantes :
(H1) Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq k|u-\bar{u}|\,, pour\ tout\ \ t \in J, et\ tout\ u, \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

(H2) Il existe une constante M> *0 telle que*

$$|f(t,u)| \leq M \quad \text{pour tout } t \in J \ \ \text{, et tout } \ u \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe une constante $\bar{M} > 0$, telle que

$$|g(y)| \leq \bar{M} \text{ pour tout } u \in C([0,T],\mathbb{R})$$

(H4) Il existe une constante $\bar{k}$ telle que

$$|g(y) - g(\bar{y})| \leq \bar{k}|y-\bar{y}|\,, \text{ pour tout } y, \bar{y} \in C([0,T],\mathbb{R})\,.$$

Thoérème 4.2. *Soit $f \in C(J, I\!R)$ et supposons que (H1), (H4) sont satisfaites si :*

$$\bar{k} + \frac{KT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{4.5}$$

alors le problème non local (4.1)-(4.2) admet une solution unique sur $[0,T]$.

Preuve.
On transforme le problème (4.1)-(4.2) en un problème du point fixe. Considérons l'opérateur $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ défini par

$$\widetilde{F}(y)(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\,ds \tag{4.6}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur $\widetilde{F}$ sont les solutions du problème (4.1)-(4.2). Il reste à montrer que $\widetilde{F}$ est une contraction, en effet : si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$,
alors, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}(x)(t) - \widetilde{F}(y)(t)\right| &= \left|g(x) - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds\right| \\ &\leq |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\,ds,\end{aligned}$$

par (H1),(H4)

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}(x)(t) - \widetilde{F}(y)(t)\right| &\leq \bar{k}\|x-y\|_\infty + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds \\ &\leq \bar{k}\|x-y\|_\infty + \frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty,\end{aligned}$$

et par suite

$$\left\|\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(y)\right\|_\infty \leq \left(\bar{k} + \frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)\|x-y\|_\infty.$$

En vertu de (4.5). On peut déduire que $\widetilde{F}$ est une contraction, et d'après le théorème de Banach. F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (4.1)-(4.2).□

Maintenant nous donnons un résultat de l'existence basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Thoérème 4.3. *Soit $f \in C(J, I\!R)$ et supposons que (H2), (H3) sont satisfaites . Alors, le problème (4.1)-(4.2) admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que $\widetilde{F}$ défini par (4.6) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : $\widetilde{F}$ *est continu.*

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C([0,T], \mathbb{R})$, Alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}(y_n)(t) - \widetilde{F}(y)(t)\right| &\leq |g(y_n) - g(y)| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq |g(y_n) - g(y)| + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty\end{aligned}$$

Puisque f et g sont continues, alors $\left\|\widetilde{F}(y_n) - \widetilde{F}(y)\right\|_\infty \to 0$, quand $n \to 0$, d'où la continuité de $\widetilde{F}$.

Etape 2 : $\widetilde{F}(B_{\eta^*})$ *est borné.*

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}(y)(t)\right| &\leq |y_0| + |g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq |y_0| + \bar{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\widetilde{F}(y)\right\|_\infty \leq |y_0| + \bar{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha \doteqdot \widetilde{l}$$

et par suite $\widetilde{F}(B_{\eta^*})$ est borné.

Etape 3 : *L'image de tout borné par* $\widetilde{F}$ *est un ensemble équicontinue de* $C([0,T], \mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in (0,T]$, $t_1 < t_2$, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}&\left|\widetilde{F}(y)(t_2) - \widetilde{F}(y)(t_1)\right| \\ = &\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \, ds\right|.\end{aligned}$$

Et comme l'étape 3 du théorème (3.4) $\widetilde{F}$ est équicontinue . Par un raisonnement pareil $\widetilde{F} : C([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4 :

Il reste à montrer que $\bar{\varepsilon} = \left\{y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda \bar{F}(y) \, pour 0 < \lambda < 1\right\}$ est borné

Soit $y \in \bar{\varepsilon}$, alors $y = \lambda \bar{F}(y)$; pour 0< λ< 1. Donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda \left[y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \, ds\right].$$

Alors, d'après (H2),(H3), et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\bar{F}(y)(t)\right| &\leq |y_0| + |g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq |y_0| + \bar{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha.\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\left\|\widetilde{F}(y)\right\|_{\infty} \leq |y_0| + \bar{M} + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^{\alpha} \doteq \bar{R}$$

Cela montre que $\bar{\varepsilon}$ est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que $\widetilde{F}$ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (4.1)-(4.2)

4.2 Problème aux limites avec conditions non locales dans le cas 1<α< 2

Définition 4.4. *Une fonction $y \in C^2(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème (4.3)-(4.4) si y satisfait l'équation ${}^cD^{\alpha}y(t) = f(t,y(t))$ sur J, et les conditions $y(0) = g(y)$, $y(T) = y_T$.*

Pour l'existence des solutions du problème (4.3)-(4.4) on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.5. *Soit $1< \alpha< 2$ et soit $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'equation intégrale fractionnaire suivante*

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds \\ &\quad -\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds - \left(\frac{t}{T}-1\right)g(y) + \frac{t}{T}y_T \end{aligned}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites

$$ {}^cD^{\alpha}y(t) = h(y(t)), t \in J$$

$$y(0) = g(y),\ y(T) = y_T$$

Preuve.
D'après le lemme(1.22) on a

$$y(t) = c_0 + c_1t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds$$

ils restent à trouver c_0, c_1.
on a

$$y(0) = c_0$$

or d'après la condition non locale

$$y(0) = g(y)$$

on obtient

$$c_0 = g(y)$$

d'autre part

$$y(T) = g(y) + c_1T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)\,ds$$

$$c_1 T = y(T) - g(y) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds$$

c'est à dire

$$c_1 = \frac{1}{T} y(T) - \frac{1}{T} g(y) - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds$$

par suite

$$\begin{aligned} y(t) &= g(y) + \frac{1}{T} y(T) - \frac{t}{T} g(y) - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &\quad - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \end{aligned}$$

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (4.3)-(4.4), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Soient les hypothèses suivantes
(H1) La fonction $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.
(H2) Ils existent des constantes $M_1, M_2 > 0$,$\bar{\alpha} \in (0,1)$ telles que

$$|f(t,u)| \leq M_1 |u|^{\bar{\alpha}} + M_2, \text{ pour chaque } t \in J, \text{et pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe une constante k>0 tel que

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq k |u - \bar{u}|, \text{ pour chaque } t \in J, \text{ et pour tout } u, \bar{u} \in \mathbb{R}$$

(H4) Il existe une constante $\bar{k}$ telle que

$$|g(y) - g(\bar{y})| \leq \bar{k} |y - \bar{y}|, \text{pour tout } y, \bar{y} \in C([0,T], \mathbb{R}).$$

Thoérème 4.6. *Supposons que (H3) et (H4) sont satisfaites et si*

$$\frac{2kb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{k} < 1$$

alors, le problème (4.3)-(4.4) admet une solution unique sur J.

Preuve. On transforme le problème (4.3)-(4.4) en un problème du point fixe .
Considérons l'opérateur

$$F_3 : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$$

défini par :

$$\begin{aligned} F_3(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &\quad - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \end{aligned} \tag{4.7}$$

F_3 est bien défini, en effet si $y \in C(J,\mathbb{R})$ alors $(F_3 y) \in C(J,\mathbb{R})$.

Pour monter que F_3 admet un point fixe il suffit de montrer que F_3 est une contraction, en effet si $x,y \in C(J,\mathbb{R})$ pour tout $t \in J$, alors

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t) - F_3(x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right| |f(s,y(s)) - f(s,x(s))| ds \\
&\quad + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left|(T-s)^{\alpha-1}\right| |f(s,y(s)) - f(s,x(s))| ds + \left|\frac{t}{T} - 1\right| |g(y) - g(x)| \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left|(T-s)^{\alpha-1}\right| ds + |g(y) - g(x)| \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{k\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \bar{k}\|x-y\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{k}\right) \|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\|(F_3 y) - (F_3 x)\|_\infty \leq \left(\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \bar{k}\right) \|x-y\|_\infty$$

Donc F_3 est une contraction et d'après le théorème de Banach F_3 admet un seul point fixe qui est une solution du problème (4.3)-(4.4).

Notre deuxième résultat d'existence des solutions (4.3)-(4.4) est basé sur le théorème du point fixe de schaefer .

Thoérème 4.7. *Supposons que les hypothèses (H1),(H2) et l'hypothèse suivante :*
(H5) Il existe une constante $M_3 > 0$*, telle que*

$$|g(u)| \leq M_3, \text{ pour chaque } u \in C(J,\mathbb{R}).$$

sont satisfaites.
Alors le problème aux limites (4.3)-(4.4) a au moinx une solution sur J.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F_3 défini par (4.7) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : F_3 *est continue.*

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|_\infty=0.$$

Il faut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_3(y_n)-F_3(y)\|_\infty=0$. Pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}
&|F_3(y_n)(t)-F_3(y)(t)|\\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds\\
&+\frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds+\left|\frac{t}{T}-1\right||g(y_n)-g(y)|\\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds\\
&+\frac{T}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds+|g(y_n)-g(y)|\\
\leq\ & \frac{\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}ds\right]+|g(y_n)-g(y)|\\
\leq\ & \frac{2T^\alpha\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}+|g(y_n)-g(y)|
\end{aligned}$$

Puisque f et g sont continues, alors $\|F_3(y_n)-F_3(y)\|_\infty\to0$, quand $n\to0$, d'où la continuité de F_3.

Etape 2 : *L'image de tout ensemble borné par* F_3 *est un ensemble borné dans* $C([0,T],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^*>0$, il existe une constante positive l telle que pour tout $y\in B_{\eta^*}, B_{\eta^*}=\{y\in C([0,T],\mathbb{R})\ :\|y\|_\infty\leq\eta^*\}$, on a $\|F_3(y)\|_\infty\leq l$. Par (H2)-(H5) on a pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t)|\ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\,ds\\
&+\frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\,ds+\left|\frac{t}{T}-1\right||g(y)|+\frac{|t|}{T}y_T\\
\leq\ & \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar\alpha}+M_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|t|\left(M_1\|y\|_\infty^{\bar\alpha}+M_2\right)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}ds+|g(y)|+y_T\\
\leq\ & \frac{M_1\eta^{*\bar\alpha}+M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha+\frac{M_1\eta^{*\bar\alpha}+M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha+M_3+y_T,
\end{aligned}$$

donc

$$\|F_3(y)\|_\infty\leq\frac{M_1\eta^{*\bar\alpha}+M_2}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha+\frac{M_1\eta^{*\bar\alpha}+M_2}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha+M_3+y_T\doteqdot l,$$

et par suite $F_3(B_{\eta^*})$ est borné.

Etape 3 : *L'image du tout borné par* F_3 *est un ensemble équicontinu de* $C([0,T],\mathbb{R})$.
Soient $t_1,t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$, B_{η^*} un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in B_{\eta^*}$.Alors

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t_2) - F_3(y)(t_1)| &\leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right] ds \\
&\quad + \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds + \frac{(t_2-t_1)\left(M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2\right)}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right) M_3 + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right) y_T \\
&\leq \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right] + \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha \\
&\quad + \frac{T^\alpha\left(M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2\right)}{T\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1) + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right) M_3 + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right) y_T \\
&\leq \frac{2\left(M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2\right)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha + \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha) \\
&\quad + \left(\frac{T^{\alpha-1}\left(M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2\right)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M_3 + y_T}{T}\right) (t_2-t_1)
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F_3 .
D'après l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà $F_3(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F_3 est complètement continu, et d'après l'étape 1, F_3 est continu. Par conséquent $F_3 : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4 :

Maintenant, il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F_3(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est borné. Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F_3(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$. On a

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T\right],$$

alors, d'après (H2)-(H5), et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|F_3(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\, ds \\
&\quad + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\, ds \\
&\quad + \left|\frac{t}{T} - 1\right| |g(y)| + \frac{|t|}{T} y_T \\
&\leq \frac{M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \frac{|t|\left(M_1\|y\|_\infty^{\bar{\alpha}} + M_2\right)}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + |g(y)| + y_T \\
&\leq \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}} + M_2}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + M_3 + y_T.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0,T]$,on a

$$\|F(y)\|_{\infty} \leq \frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}}+M_2}{\Gamma(\alpha+1)}T^{\alpha}+\frac{M_1\eta^{*\bar{\alpha}}+M_2}{\Gamma(\alpha+1)}T^{\alpha}+M_3+y_{T}.:\ =R$$

Cela montre que ε est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que F_3 admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (4.3)-(4.4).

Chapitre 5

Problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires avec des conditions intégrales

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], \ 0 < \alpha \leq 1 \tag{5.1}$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)\, ds = y(T) \tag{5.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiants certaines hypothèses qui seront précisées plus tard. Et $\mu \in \mathbb{R}^*$. Nous consacrons la première section à l'existence des solutions du problème (5.1)-(5.2) qui est basé sur le théorème du point fixe de Banach et la deuxième section sera réservée à des exemples illustrants l'applicabilité des conditions imposées. Les résultats de ce chapitre s'inspirent des travaux de Benchohra et Ouaar[10]

5.1 Existence des solutions

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (5.1)-(5.2).

Définition 5.1. *Une fonction $y \in C(J, \mathbb{R})$ est dite une solution de (5.1)-(5.2) si elle satisfait l'équation (5.1) sur J, et la condition (5.2).*

Pour l'existence de la solution du problème (5.1)-(5.2) nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 5.2. *Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et soit* $h \in C(J, \mathbb{R})$ *une fonction donnée. Alors le problèmes aux limites*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t), t \in J \tag{5.3}$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)\,ds = y(T), \mu \in \mathbb{R}^* \tag{5.4}$$

admet une seule solution donnée par

$$y(t) = \int_0^T G(t,s)\,h(s)\,ds \tag{5.5}$$

où $G(t,s)$ *est la fonction de Green donnée par*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{-(T-s)^{\alpha} + \alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & si\ 0 \leq s \leq t \\ \frac{-(T-s)^{\alpha}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & si\ t \leq s \prec T \end{cases} \tag{5.6}$$

Preuve. Par le lemme(1.22), on peut réduire le problème (5.3)-(5.4) en une équivalente équation intégrale

$$\begin{aligned} y(t) &= I^{\alpha}h(t) - c_0 \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds - c_0 \end{aligned}$$

pour une constante $c_0 \in \mathbb{R}$. On a par une intégration (en utilisant le théorème d'intégration de Fubini)

$$\begin{aligned} \int_0^T y(s)\,ds &= \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau)\,d\tau - c_0 \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_{\tau}^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right) h(\tau)\,d\tau - c_0 T \\ &= \int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)\,d\tau - c_0 T \end{aligned}$$

En appliquant la condition intégrale (5.4). On a

$$y(0) = -c_0$$

$$y(T) = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds - c_0$$

Il reste à trouver c_0. On a, d'après (5.4).

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)\,ds = y(T),$$

c'est à dire

$$-c_0 + \mu \int_0^T y(s)\,ds = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds - c_0,$$

$$\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds = \mu \int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)\,d\tau - c_0\mu T,$$

donc

$$c_0\mu T = \mu \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds - \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds,$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(-\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} + \frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) h(s)\,ds,$$

par suite, la solution unique de (5.3)-(5.4) est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds + \frac{1}{T}\int_0^T \left(-\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} + \frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) h(s)\,ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{-(T-s)^{\alpha} + \alpha T (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right) h(s)\,ds + \int_0^T \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right) h(s)\,ds \\ &= \int_0^T G(t,s)\,h(s)\,ds \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration .□

Remarque la fonction $t \in J \to \int_0^T |G(t,s)|\,ds$ est continue sur J, et est donc bornée. Soit

$$\widehat{G} = \sup\left\{\int_0^T |G(t,s)|\,ds, t \in J\right\}$$

Notre premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Thoérème 5.3. *Supposons que :*
(H1) Il existe un k> 0 , tel que

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u-v|, \text{ pour tout } t \in J \text{ et pour chaque } u,v \in \mathbb{R}.$$

Si

$$k\widehat{G} < 1, \tag{5.7}$$

alors, il existe une solution unique pour le problème aux limites (5.1)-(5.2).

Preuve. Considérons l'opérateur $N : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ défini par

$$(Ny)(t) = \int_0^T G(t,s)\,f(s,y(s))\,ds$$

Où $G(t,s)$ est la fonction de Green donnée par (5.2). D'après le lemme(5.2) les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problèmes (5.1)-(5.2). On doit montrer que N est une contraction. Considérons $x, y \in C(J,\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$. On a

$$\begin{aligned} |(Nx)(t) - (Ny)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)|\,|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\,ds \\ &\leq k\|x-y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)|\,ds \\ &\leq k\widehat{G}\|x-y\|_\infty, \end{aligned}$$

Donc, on obtient que

$$\|N(x)-N(y)\|_\infty \leq L\|x-y\|_\infty,$$

où

$$L := k\widehat{G} < 1$$

et notre théorème est prouvé.

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder.

Thoérème 5.4. *Le problème aux limites (5.1)-(5.2) admet au moins une solution si les conditions suivantes sont satisfaites*

(C1) la fonction $f : J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue.

(C2) Ils existent $p\in C(J\times\mathbb{R}^+)$ et $\Psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ continues et non décroissantes. Telles que

$$|f(t,u)|\leq p(t)\Psi(|u|),\ \textit{pour } t\in J \textit{ et tout } u\in\mathbb{R}$$

(C3) Il existe une constante $M>0$, telle que

$$\frac{M}{p^*\Psi(M)\widehat{G}}>1 \tag{5.8}$$

où

$$p^* = \sup\{p(s), s\in J\}.$$

Preuve. Soit $C=\{y\in C(J,\mathbb{R}), \|y\|_\infty\leq M\}$. Où M est la constante donnée par (C3). Il est clair que le sous-ensemble C est fermé et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les conditions du théorème de point fixe de Schauder.

Etape 1. *N est continu.*

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n\to y$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t\in J$.

$$|N(y_n)(t)-N(y)(t)|\leq\int_0^T|G(t,s)||f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que .

$$\|N(y_n)-N(y)\|_\infty\to 0 \textit{ quand } n\to 0$$

Etape 2. *N transforme C en un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$.*

Soit $y\in C$, alors pour chaque $t\in J$, (C2) implique

$$\begin{aligned}(Ny)(t) &\leq \int_0^T|G(t,s)||f(s,y(s))|\,ds\\ &\leq p(t)\Psi(|y(t)|)\int_0^T|G(t,s)|\,ds\\ &\leq p^*\Psi(\|y\|_\infty)\int_0^T|G(t,s)|\,ds,\end{aligned}$$

donc,

$$\|Ny\|_\infty\leq p^*\Psi(M)\widehat{G} := l$$

Etape 3 *N transforme Cen un ensemble équicontinue de $C(J,\mathbb{R})$.*
Soit $y \in C$, $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$; alors

$$\begin{aligned} |N(y)(t_2) - N(y)(t_1)| &= \left| \int_0^T G(t_2,s) f(s,y(s))\, ds - \int_0^T G(t_1,s) f(s,y(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \, |f(s,y(s))|\, ds \\ &\leq p^* \Psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, ds \end{aligned}$$

quand $t_1 \to t_2$ Le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par le théorème d'Ascoli-Arzélà, $N(C)$ est relativement compact pour tout borné de C. Alors N est complètement continu.
Etape 4 $N(C) \subset C$
Soit $y \in C$. On va montrer que $Ny \in C$. Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |(Ny)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)| \, |f(s,y(s))|\, ds \\ &\leq p^* \Psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t,s)|\, ds, \end{aligned}$$

alors

$$\|Ny\|_\infty \leq p^* \Psi(M) \widehat{G}$$

par (5.8) on a

$$\|Ny\|_\infty \leq M.$$

Par suite, on déduit que N admet un point fixe qui est une solution du problème aux limites (5.1)-(5.2).□

5.2 Exemple

Considérons le problème aux limites

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |y(t)|, \; t \in J := [0,1], \alpha \in (0,1] \tag{5.9}$$

$$y(0) + \int_0^1 y(s)\, ds = y(1) \tag{5.10}$$

Soit

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} x, \quad (t,x) \in J \times (0,\infty),$$

soit $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |x-y| \\ &\leq \frac{1}{20} |x-y| \end{aligned}$$

alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{20}$.

D'après (5.2) G est donnée par

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{-(1-s)^{\alpha}+\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leq \mathrm{s}<\mathrm{T}\,;\\ \frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \mathrm{t}\leq \mathrm{s}\leq \mathrm{T}\,.\end{cases} \tag{5.11}$$

D'après (5.11) ona

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(t,s)\,ds &= \int_0^t G(t,s)\,ds+\int_t^1 G(t,s)\,ds\\ &= \int_0^t\left(\frac{-(1-s)^{\alpha}+\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)ds+\int_t^1\left(\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)ds\\ &= \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\right]_0^t-\left[\frac{\alpha(t-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)}\right]_0^t+\left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]_0^t\\ &\quad+\left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\right]_t^1-\left[\frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]_t^1\\ &= \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

par suite

$$\hat{G}<\frac{4}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{3}{\Gamma(\alpha+2)}$$

alors la condition (5.7) est satisfaite pour $T=\mu=1$. En effet $\widehat{G}k<1$ est satisfaite pour chaque $\alpha\in(0,1]$. Alors d'après le théorème(5.3) , le problème (5.9)-(5.10) a une seule solution sur $[0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec conditions locales et intégrales.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach, Schaefer et Schauder.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, S. Arshad, D.O'Regan, V. Lupulescu, Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition., *Fract. Calc. Appl.*, **15** (2012), 572-590.

[2] R.P. Agarwal, M. Benchohra, J.Nieto et A.Ouhab, Fractional Differantial Equations and Inclusions , *Springer* 2010

[3] R.P. Agarwal. A propos d'une note de M. Pierre Humbert, *C. R. Académie des sciences* , **236**, 2031-2032(1953).

[4] S.Abbas, M. Benchohra and A N. Vityuk,On fractional order derivatives and Darboux problem for implicit differential equations , *Frac. Calc. Appl. Anal.* **15.**, (2012), 168-182.

[5] A. Babakhani and V. Daftardar-Gejji, Existence of positive solutions for multi-term non-autonomous fractional differential equations with polynomial coefficients. *Electron. J. Differential Equations* **2006**, No. 129, 12 pp.

[6] M. Belmekki and M. Benchohra, Existence results for Fractional order semilinear functional differential equations, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **146** (2008), 9-20.

[7] M. Benchohra, J.R. Graef and S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, *Appl. Anal.* **87** (7) (2008), 851-863.

[8] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, *Surv. Math. Appl.* **3** (2008), 1-12.

[9] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas and A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2) (2008), 1340-1350.

[10] M. Benchohra and F.Ouaar, Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions , *Math. Anal and Appl* **2** (2010), 7-15.

[11] L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.* **162** (1991), 494-505.

[12] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem. *Selected problems of mathematics*, 25–33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ. Technol, Krakow, 1995

[13] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, *Appl. Anal.* **40** (1991), 11-19.

[14] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[15] A. M. A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, *J. Fract. Calc.* **7** (1995), 89-100.

[16] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, *volume 2.* McGraw-Hill, New York (1955).

[17] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, *volume 3.* McGraw-Hill, New York (1955).

[18] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, *Mech. Systems Signal Processing* **5** (1991), 81-88.

[19] W. G. Glockle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, *Biophys. J.* **68** (1995), 46-53.

[20] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[21] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations *Applied Mathematical Sciences*, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[22] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[23] E.R. Kaufmann and E. Mboumi, Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2007, No. 3, 11 pp.

[24] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differential Equations* **41** (2005), 84-89.

[25] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[26] V. Lakshmikantham , S.Leela and J. Vasundhara , Theory of fractional Dynamical Systems. *Cambridge Academic Publishers.* Cambridge, 2009.

[27] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

[28] F. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, *J. Chem. Phys.* **103** (1995), 7180-7186.

[29] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.

[30] G. M. Mittag-Leffler.Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Académie des Sciences.* **137**,554–558 (1903).

[31] G. M. Mittag-Leffler.Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogéne. *Acta Mathematica* . **29**,101–182 (1905).

[32] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London, 1974.

[33] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.

[34] X. Su and L. Liu, Existence of solution for boundary valiue problem of nonlinear fractional differential equation, *Appl. Math.* **22**(3) (2007), 291-298

[35] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[36] L. Schwartz, Theorie des distributions, *Hermann*, Paris, 1966.

[37] K. Yosida, *Functional Analysis*, Spring-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[38] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*,Fixed Point Theorems Spring-Verlag, New York, 1986.

[39] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional diffrential equations, *Electron. J. Diff. Equ.* 2006, No. 36, pp, 1-12.

[40] S. Zhang, J. Liu, L. Wei and C. Ma,Finit element method for Grünwald-Letnikov time-fractional partial differential equation , *Applicable Analysis 92*(10) 2013, pp. 1-12.

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach, Schaefer et Schauder.

Abstract

In this paper, we present existence results of solutions for fractional order differential equations in the sense of Caputo, for boundary value problems. These results were obtained by using the Banch fixed point theorem, Schaefer's fixed point theorem and Schauder's fixed point theorem.