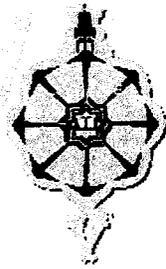


**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LARECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



**THESE DE DOCTORAT
EN MATHÉMATIQUES**

THEME

"Problèmes d'estimation de la moyenne en grandes dimensions"

**Présentée par:
Hamdaoui Abdenour**

Soutenue à Tlemcen le 09 Avril 2015 devant le jury composé de:

GHOUALI Nouredine	Président	Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
MOHDEB Zahir	Examineur	Professeur Université Constantine 1
LAKSACI Ali	Examineur	Professeur Université Djillali Liabes Sidi Belabbes
MOURID Tahar	Examineur	Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
DIB Hacem	Examineur	Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
BENMANSOUR Djamel	Directeur de Thèse	M.C.A Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Année universitaire 2014/2015



Résumé

Nous présentons une synthèse des travaux sur les problèmes d'estimations par rétrécisseurs de la moyenne d'une loi gaussienne multidimensionnelle

$X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p . Et plus précisément le comportement des risques ratios des estimateurs à rétrécisseurs de la forme :

$\delta = (1 - \psi(S^2, \|X\|^2)) X$ quand la dimension de l'espace des paramètres p , tend vers l'infini, sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c$ ($c > 0$). $1 - \psi$ est le rétrécisseur, dont plusieurs formes sont étudiées. Des résultats de convergence vers le rapport $\frac{c}{1+c}$ sont établis en particulier pour des formes extraites de la forme générale. (Quand n et p tendent vers l'infini).

Dans le cas de l'estimation de la moyenne θ d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$ dans \mathbb{R}^p , Casella et Hwang ont montré que si

$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c > 0$ alors le rapport $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ et $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$ tend vers $\frac{c}{1+c}$.

En prenant le même modèle, à savoir $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ avec cette fois-ci σ^2 inconnu, et estimé par la statistique $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$ indépendante de X , Nous avons pour notre part, montré que pour des estimateurs à rétrécisseurs de la forme : $\delta = (1 - \psi(S^2, \|X\|^2)) X$, nous obtenons un rapport similaire dépendant de la taille n de l'échantillon, à celui trouvé par ces derniers, dès

que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$. De plus nous obtenons un rapport constant inférieur à 1, quand n et p tendent simultanément vers $+\infty$ et ce, sans tenir compte d'une quelconque relation d'ordre ou fonctionnelle entre n et p . Nous avons obtenu le même résultat pour des formes particulières de δ , sans condition de minimaxité dessus et d'autres formes de δ qui sont plus précisément minimax. Enfin nous avons déduit que tout estimateur à rétrécisseur dominant l'estimateur primitif de James-Stein a un risque ratio qui tend vers $\frac{c}{1+c}$ quand n et p tendent vers l'infini. Li Sun s'est lui aussi intéressé au

cas où σ^2 est inconnu, mais a étudié le comportement des rapport $\frac{R(\delta, \theta)}{R(X, \theta)}$,

$\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ et $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$, quand seulement p tend vers l'infini. Les simulations montrent dans le cas des exemples choisis, des comportements asymptotiques des risques ratios, identiques, et convergent tous vers la même limite strictement inférieure à 1.

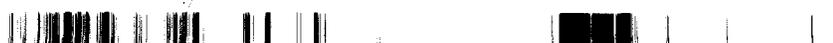
Mots-clés: Moyenne gaussienne, Estimateurs de James-Stein, Partie positive de l'estimateur de James-Stein, Rétrécisseurs, Coût quadratique, Minimaxité.

Table des Matières

Introduction	4
1 Rappels et Généralités	13
1.1 Inadmissibilité de l'estimateur usuel et estimateur de James-Stein	18
1.2 Estimateurs à rétrécisseurs différentiables	20
1.3 Estimateurs dominant l'estimateur de James-Stein	22
1.3.1 Amélioration de l'estimateur de James-Stein par tronca- ture	22
1.3.2 Amélioration de l'estimateur de James-Stein par des rétré- cisseurs polynômiaux	23
1.3.3 Estimateurs de Berger et Bock [7]	24
1.3.4 Conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein	27
1.3.5 Estimateurs de Shao et Strawderman	28
1.4 Approche Bayésienne	34
1.5 Norme l_p et minimaxité	39
1.5.1 Minimaxité	39
1.6 Estimation dans le cas d'une distribution sphérique symétrique .	41
1.6.1 Préliminaire	42
1.6.2 Estimateur de James-Stein et estimateur JSR	44
1.6.3 Minimaxité de l'estimateur de Bayes généralisé	56
2 Propriétés asymptotiques des estimateurs de James-Stein	62
2.1 Limites des fonctions de risque des estimateurs de James-Stein . .	62
2.1.1 Cas où la variance de la population est connue	62



2.1.2	Cas où la variance de la population est inconnue	65
3	Rapport de risques d'estimateurs de type James-Stein	80
3.1	Limite du rapport de risques d'estimateurs de James-Stein à variance inconnue	80
3.1.1	Introduction	80
3.1.2	Préliminaires	82
3.1.3	Bornes et limite du rapport des risques de l'estimateur de James-Stein	84
3.1.4	Bornes et limite du rapport de risque de la partie positive de l'estimateur de James-Stein	86
3.1.5	Simulations	94
3.2	Propriétés asymptotiques des rapports de risques d'estimateurs à rétrécisseurs	96
3.2.1	Introduction	96
3.2.2	Préliminaires	97
3.2.3	Borne Min des estimateurs à rétrécisseur	98
3.2.4	Minimaxité	104
3.2.5	Simulations	108
4	Appendice	111
5	Conclusion	116



Introduction

Présentation générale

L'estimation de la moyenne θ , d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$, où $\theta \in \mathbb{R}^p$, a connu de nombreux développements dans le cas où σ^2 est connu ou inconnu. On peut citer notamment Berger [6], Gruber [19], Hoffman [22] Benmansour [3] ...etc.

Stein [37], James et Stein [23], ont montré l'inadmissibilité de l'estimateur du maximum de vraisemblance, puis ils ont introduit une classe d'estimateurs "biaisés bien sûr" dénommés estimateurs à rétrécisseur et déduits de la moyenne empirique. Ils se sont avérés meilleurs en coût quadratique que la moyenne empirique.

Plus précisément, si X représente une observation ou un échantillon de la loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$, il s'agit d'estimer θ par un estimateur $\delta(X)$ relativement au coût quadratique:

$$L(\delta, \theta) = \|\delta(X) - \theta\|_p^2$$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme usuelle dans \mathbb{R}^p . Nous associons sa fonction de risque :

$$R(\delta, \theta) = E_\theta(L(\delta, \theta)) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\left(\|\delta(x) - \theta\|_p^2\right)}{\sigma (2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \frac{\|x - \theta\|_p^2}{2}\right) dx$$

Ainsi si nous prenons comme exemple l'estimateur classique des moindres carrés

$\delta_0(X) = X$, il est minimax et sa fonction de risque est égale $p \sigma^2$. En effet

$$R(\delta_0(X), \theta) = E_\theta\left(\|X - \theta\|_p^2\right) = \text{Var}(X) = \text{tr}(\sigma^2 I_p) = p \sigma^2.$$

Ainsi tout estimateur dominant l'estimateur des moindres carrés serait lui aussi minimax.

• **Dans le chapitre 1**, nous présentons une synthèse des travaux sur les estimateurs à rétrécisseurs de la moyenne θ , d'une loi gaussienne $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$. Nous donnons

l'essentiel des résultats obtenus depuis les premiers travaux de Stein [37]. Il a annoncé l'inadmissibilité de l'estimateur des moindres carrés $\delta_0(X) = X$, et a montré que les estimateurs de type $\delta_{a,b}(X) = \left(1 - \frac{a}{b + \|X\|^2}\right) X$ avec a, b des paramètres réels, ont un risque uniformément inférieur à celui de l'estimateur $\delta_0(X)$, à condition que a soit suffisamment petit et b suffisamment grand.

James et Stein [23], ont montré que les estimateurs (biaisés bien sûr) de type $\delta_a(X) = \left(1 - \frac{a}{\|X\|^2}\right) X$, sont effectivement uniformément meilleurs que l'estimateur des moindres carrés $\delta_0(X)$, au sens du risque quadratique, pour tout a tel que

$0 < a < 2(p - 2)$. Il est bien connu que pour $a = p - 2$, l'estimateur obtenu et dénommé estimateur primitif de James-Stein $\delta_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p - 2}{\|X\|^2}\right) X$, est uniformément meilleur dans la classe des estimateurs de type $\delta_a(X)$.

Des généralisations sur la forme des estimateurs de James-Stein $\delta_{JS}(X)$, ont été faites par plusieurs auteurs notamment :

Baranchik [1] a proposé une classe d'estimateurs de la forme

$\delta_r(X) = \left(1 - \frac{r \left(\frac{1}{2} \|X\|^2\right)}{\|X\|^2}\right) X$ dans le cas où $X \sim N_p(\theta, I_p)$, puis il a prouvé que sous certaines conditions, l'estimateur $\delta_r(X)$ est minimax. Le même travail a été fait par Baranchik [2], dans le cas où $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ avec σ^2 inconnu.

Strawderman [40], a amélioré les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ dans le cas où σ^2 connu.

Bock [8], a généralisé les travaux précédents au cas où $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 D)$, avec σ^2 connu ou inconnu et D est une matrice non singulière.

Berger [6], ont étudié les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ pour une fonction de coût quadratique définie par :

pour tout estimateur $\delta_r(X)$;

$$L(\delta_r(X), \theta) = (\delta_r(X) - \theta)^t Q (\delta_r(X) - \theta)$$

avec Q étant une matrice définie positive. Le cas particulier $Q = \sum^{-1}$, a été traité par plusieurs auteurs, notamment (James et Stein [23], Baranchik [2], Strawderman [40] et Benmansour [3]).

Brandwein et Strawderman [10] et Casella [13], ont donné différentes conditions pour

que l'estimateur de type $\delta_r(X)$ soit minimax.

Nous rappelons une égalité fondamentale établie par Stein [38] : Si $Y \sim N(\nu, 1)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que: $E[|g'(Y)|] < \infty$, alors

$$E[g(Y)(Y - \nu)] = E[g'(Y)] ,$$

appelée égalité de Stein. Pour des estimateurs de la forme générale $\delta_g(X) = X + g(X)$, nous rappelons le résultat de Stein [38], à savoir : Si $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, est une solution de l'inéquation différentielle suivante :

$$[\|g(x)\|^2] + 2 \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x) \right] \leq 0$$

alors $\delta_g(X) = X + g(X)$ est un estimateur minimax. Nous rappelons aussi un résultat de Efron et Morris [15], obtenu pour les estimateurs à rétrécisseurs uniformes $\delta_g(X)$ $\left(\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X \right)$, où g est une fonction réelle différentiable et soumise à la condition : si $g(u)$ est solution de l'inéquation différentielle

$$g(u) \frac{(2(p-2) - g(u))}{u} + 4g'(u) \geq 0$$

alors $\delta_g(X) = (1 - g(\|X\|^2) / \|X\|^2) X$ est minimax .

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous présentons des travaux fondés essentiellement sur la domination de l'estimateur primitif de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Baranchik [1], est le premier qui a proposé un estimateur appelé partie-positive de l'estimateur de James-Stein noté par $\delta_{JS}^+(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} \right)^+ X$; où pour tout nombre réel c , on a $c^+ = \max(0, c)$. Il a prouvé que cet estimateur a un risque uniformément inférieur à celui de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}(X)$, au sens du risque quadratique.

Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43], ont proposé des estimateurs appelés estimateurs polynomiaux. Ceux sont des types d'estimateurs dérivés des formes d'estimateurs proposés par Berger et Bock [7] qui sont comme suit : $\delta_\Psi(X) = \delta_{JS}(X) + \Psi_c(\|X\|^2) X$ avec Ψ_c est une fonction réelle.

Dans le cas où $\Psi_c(\|X\|^2) = \frac{c}{\|X\|^r}$, c, r étant réels. Ceux sont les estimateurs polynomiaux proposés par Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43]. Nous les notons

$$\delta_{TZ,c}(X) = \delta_{JS}(X) + \frac{c}{\|X\|^r} X.$$

Shao et Strawderman [35], ont considéré des estimateurs de la forme

$$\delta(a, g, X) = \delta_{JS}^+(X) - \frac{a g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} X I_{(p-2 \leq \|X\|^2 \leq p)}$$

avec $g(t)$ est une fonction symétrique au tour de point $t = p - 1$ tel que

$$g(p - 2) = g(p) = 0, \text{ et } a \text{ est un paramètre réel.}$$

Ils ont prouvé que sous certaines conditions, l'estimateur $\delta(a, g, X)$ domine la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^+(X)$, et par conséquent domine l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Benmansour et Mourid [5] ont exhibé des sous-espaces paramétriques généralement ne contenant pas l'origine, très "larges" et suffisants pour des applications, où ils ont obtenu une domination uniforme de la partie positive de l'estimateur de James-Stein.

Kubokawa [25], a montré que les estimateurs de la forme

$$\delta_K(X) = \left(1 - \frac{\Phi_K(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X$$

avec

$$\Phi_K(w) = w \frac{\int_0^1 \lambda^{\alpha(p/2-1)} \exp(-w \alpha \frac{\lambda}{2}) d\lambda}{\int_0^1 \lambda^{\alpha(p/2-1)-1} \exp(-w \alpha \frac{\lambda}{2}) d\lambda} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

dominent l'estimateur de James-Stein pour $\alpha \geq 1$; et coïncident avec la partie positive de l'estimateur de James-Stein quand α tend vers l'infini.

Maruyama et Strawderman [34], ont donné des conditions nécessaires pour que les estimateurs de type $\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X$, avec g est une fonction différentiable, dominant l'estimateur primitif de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Maruyama et Katsunori [33], ont considéré la variable aléatoire réelle $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 \neq 1$. Ils ont donné des conditions nécessaires de minimaxité de l'estimateur $\delta_\phi(X) = X + \phi(X)$, où ϕ est une fonction réelle.

Dans la suite de ce chapitre nous présentons un résumé des travaux sur une approche

bayésienne des estimateurs à rétrécisseurs pour certaines lois à priori du paramètre θ .

Dans cette partie nous présentons les travaux de plusieurs auteurs, notamment Baranchik [1]; Strawderman ([40], [41], [42]), Stein [39] et Maruyama et Katsunori [33].

Baranchik [1], a pris comme loi à priori du paramètre θ , de densité $\|\theta\|^{2-p+\varepsilon}$, ainsi il a trouvé que l'estimateur de Bayes

$$\delta_\varepsilon(X) = E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \|\theta\|^{2-p+\varepsilon} \prod_{i=1}^p d\theta_i}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \|\theta\|^{2-p+\varepsilon} \prod_{i=1}^p d\theta_i}$$

est donné par la formule suivante

$$\delta_\varepsilon(X) = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+2+\frac{\varepsilon}{2})}{k! \Gamma(\frac{p+2k+2}{2})} \left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)^k}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1+\frac{\varepsilon}{2})}{k! \Gamma(\frac{p+2k}{2})} \left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)^k} X.$$

Notons que pour $\varepsilon = p - 2$, on retrouve $\delta_\varepsilon(X) = X$ qui n'est autre que l'estimateur du maximum de vraisemblance. Il a montré que l'estimateur $\delta_\varepsilon(X)$ est un estimateur minimax pour $0 \leq \varepsilon \leq p - 2$.

Brandwein et Strawderman [10], ont amélioré, dans le cas σ^2 connu et égal à 1, les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ défini par la formule (1.5), proposé par Baranchik [1]. Ils ont pris pour loi à priori de θ , la loi conditionnelle suivante :

$\theta/\lambda \sim N(0, \lambda^{-1}(1-\lambda)I_p)$ avec λ ayant une densité de probabilité de la forme $\lambda^{-a}(1-a)$ pour tout $0 \leq a < 1$. Dans ce cas l'estimateur de Bayes est :

$$\delta_B(X) = \left\{ 1 - \left[\frac{p+2-2a}{\|X\|^2} - \frac{2 \exp\left(-\frac{1}{2}\|X\|^2\right)}{\|X\|^2 \int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2\right) d\lambda} \right] \right\} X.$$

Ils ont prouvé que l'estimateur $\delta_B(X)$ est minimax pour $p \geq 6$. Ils ont montré aussi que sous la condition $\frac{1}{2} \leq a < 1$, l'estimateur $\delta_B(X)$ est minimax pour $p \geq 5$.

Strawderman ([41], [42]), a fait la même étude dans son papier [40], mais dans le cas où $X \sim N(\theta, \sigma^2 I_p)$, avec σ^2 inconnu et estimé par la statistique $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$.

Stein [39], a étudié l'estimateur de Bayes de θ , où $X \sim N(\theta, I_p)$, avec θ ayant une loi

à priori $\pi(\theta)$. Il a montré que l'estimateur de Bayes

$$E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta}$$

s'écrit sous la forme

$$X + \nabla \log f(X) = X + \frac{\nabla f(X)}{f(X)}$$

avec ∇f désigne l'opérateur gradient de f et $f(X)$ étant la densité de X .

En utilisant des calculs de risques, il a donné des résultats sur la minimaxité des estimateurs de type $X + g(X)$, sous certaines conditions imposées à la loi à priori de densité $\pi(\theta)$.

Maruyama et Katsunori [33], ont traité le cas bayésien, où $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, avec σ^2 connu mais pas forcément égale à 1.

Ils ont montré que l'estimateur généralisé de Bayes, dans le cas où θ suit une loi à priori $\pi(\theta)$, est

$$E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta} = X + \sigma^2 \frac{d}{dX} \log m_\pi^B(X)$$

avec

$$m_\pi^B(X) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(X - \theta)^2}{2\sigma^2}\right) d\pi(\theta).$$

Nous présentons ensuite un résumé dans le cas de l'estimation de θ , par une nouvelle classe d'estimateurs de James-Stein avec des facteurs de rétrécissement définis à l'aide de

la norme l_p donnée par: $\|Z\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{i=d} |Z_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$.

Maruyama [32] considère le modèle suivant: $Z \sim N_d(\theta, I_d)$, ($Z \in \mathbb{R}^d$).

Il note aussi: $\|Z\|_p^m = \left\{ \sum_{i=1}^{i=d} |Z_i|^p \right\}^{\frac{m}{p}}$.

Il a défini une nouvelle classe d'estimateurs de James-Stein associée à la norme l_p définie comme suit: $\hat{\theta}_\phi = (\hat{\theta}_{1\phi}, \dots, \hat{\theta}_{d\phi})$ avec: $\hat{\theta}_{i\phi} = \left(1 - \phi(\|Z\|_p) / \|Z\|_p^{2-\alpha} |Z_i|^\alpha\right) Z_i$ où $0 \leq \alpha < (d-2)/d-1$, $p > 0$ (Puisque certaines composantes de l'estimateur peuvent être exactement zéro, le choix entre un modèle complet et modèles réduits est possible).

Quand $d \geq 3$, il établit la minimaxité de cette classe d'estimateurs, associée à la norme l_p avec des conditions sur $\hat{\theta}_\phi$ et pour tout p positif.

Notons que les fonctions de risque de ces estimateurs sont calculées par rapport à la fonction de coût quadratique usuelle (1.1).

Finalement, nous présentons quelques résultats sur l'estimation de la moyenne θ ($\theta \in \mathbb{R}^p$) dans le cas où X suit une loi sphérique symétrique. Ce problème a été traité par plusieurs auteurs notamment Brandwein et Strawderman [10], [11], [12] et Fourdrinier et Strawderman [18]. Ces auteurs ont étudié des classes d'estimateurs qui dominent l'estimateur usuel X , en particulier l'estimateur de James-Stein.

Nous en présentons particulièrement un extrait des travaux faits par Fourdrinier et Strawderman [16]. Ce travail est basé sur l'estimation de la moyenne θ d'une distribution sphérique symétrique.

Plus précisément, soit (X, U) un vecteur aléatoire suivant une loi sphérique symétrique autour de $(\theta, 0)$. Le coût quadratique étant : $L(\delta, \theta) = \|\delta - \theta\|^2$. L'estimateur de James-Stein est le suivant :

$$\delta_{JS}^a = \left(1 - \frac{a}{X'X}\right) X.$$

Une autre classe qui peut répondre à ce problème (domination de X), est la classe d'estimateurs de la forme

$$\delta_{JSR}^a = \left(1 - a \frac{U'U}{X'X}\right) X,$$

appelés estimateurs de James-Stein Robustes.

Cette dernière classe a une propriété importante, pour a bien choisi δ_{JSR}^a domine X pour toute distribution sphérique symétrique, avec des conditions adéquates sur les moments.

Dans la deuxième section nous présentons le travail qui a été réalisé par Fourdrinier et Strawderman [18]. Ils ont basé essentiellement leur étude sur la minimaxité de l'estimateur de Bayes généralisé de la moyenne d'une distribution sphérique symétrique, sous un coût quadratique.

• **Dans le chapitre 2**, Nous présentons un résumé des travaux de Casella et Hwang [14], et Li Sun [27], qui traitent des calculs des bornes et des limites des rapports des risques de l'estimateur de James-Stein à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Casella et Hwang [14]; ont étudié le modèle $X \sim N_p(\theta, I_p)$, avec $\theta \in \mathbb{R}^p$. Ils ont montré que sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c$ ($c > 0$); les rapports de risque de l'estimateur de

James-Stein $\delta_{JS}(X)$ et de sa partie positive $\delta_{JS}^+(X)$ à celui de l'estimateur des moindres carrés, tendent vers la limite finie, $\frac{c}{1+c}$, quand p tend vers l'infini. Pour assurer ce dernier résultat, ils ont encadré le rapport de risque $\frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$, en utilisant un lemme fondamental basé sur l'inégalité de Jensen. Ainsi ils ont pu déterminer la valeur de $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$ à partir de cet encadrement. Pour le rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+(X), \theta)}{R(X, \theta)}$, la même idée a été utilisée. C'est-à-dire, encadrer le rapport, à partir d'un lemme qui donne le risque de $\delta_{JS}^+(X)$ en fonction du risque de $\delta_{JS}(X)$.

Li Sun [27] a considéré le modèle (ANOVA1) suivant : $(y_{ij} \mid \theta_j, \sigma^2) \sim N(\theta_j, \sigma^2)$
 $i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$ où $E(y_{ij}) = \theta_j$ pour le groupe j et $var(y_{ij}) = \sigma^2$ est inconnu.

L'estimateur de James-Stein s'écrit dans ce cas

$$\delta^{JS} = (\delta_1^{JS}, \dots, \delta_m^{JS})^t \quad \text{avec} \quad \delta_j^{JS} = \left(1 - \frac{(m-3)S^2}{(N+2)T^2}\right) (\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y}, \quad j = 1, \dots, m$$

où

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_j)^2, \quad T^2 = n \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2,$$

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ij}}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{y}_j}{m}, \quad N = (n-1)m,$$

Il a montré que si : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2}{m} = q$, alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta^{JS}, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta^{JS+}, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = \frac{q}{q + \frac{\sigma^2}{n}}.$$

• Dans le chapitre 3, nous présentons en premier lieu l'essentiel de notre article publié dans le journal " **Far East Journal of theoretical Statistics, Volume 36, Issue1, Pages 31-53. (July 2011). ISSN: 0972-0863.**", intitulé " **Limit of the ratio of risks of James-Stein estimators with unknown variance**" [4].

Dans ce travail nous étudions l'estimation de la moyenne θ d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p , σ^2 étant inconnu et estimé par la statistique $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$.

Nous étudions particulièrement les bornes et limites des rapports de risques, de l'estimateur

de James-Stein δ_{JS} et de sa partie positive δ_{JS}^+ , à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance X quand $p \rightarrow \infty$.

Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$, nous montrons alors que les rapports de risques des estimateurs de James-Stein δ_{JS} , et de sa partie positive δ_{JS}^+ , à celui de l'estimateur des moindres carrés X (risques ratios) tendent vers la même limite $\frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c}$ quand p tend vers l'infini. Si n et p tendent vers l'infini nous montrons que les rapports de risques tendent vers $\frac{c}{1+c}$.

Et finalement nous illustrons graphiquement les rapports de risques correspondants des estimateurs de James-Stein δ_{JS} , et de sa partie positive δ_{JS}^+ , à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance X pour différentes valeurs de n et p .

Nous généralisons ensuite ces résultats à des classes plus larges d'estimateurs à rétrécisseurs dans le deuxième article publié dans le journal " **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**. Doi: 10,15672 / HJMS.2014377624, ISSN : 1303-5010), intitulé " **Asymptotic properties of risks ratios of shrinkage estimators** " [20]. Nous y étudions l'estimation de la moyenne θ d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p , σ^2 étant inconnu et estimé par la statistique $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$. Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude des bornes et des limites des rapports de risques des estimateurs à rétrécisseur à celui du maximum de vraisemblance (appelé risque ratio) quand n et p tendent vers l'infini, sous la condition: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$.

Le risque ratio pour cette classe d'estimateurs a une borne *Min* : $B_m = \frac{c}{1+c}$ quand n et p tendent vers l'infini sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$.

Nous donnons des conditions simples pour des estimateurs à rétrécisseurs, minimax, afin que leur risque ratio atteigne la borne B_m . Nous montrons aussi que l'estimateur de James-Stein ainsi que ceux qui le dominent, atteignent cette borne B_m (en particuliers sa partie positive).

Nous illustrons graphiquement les risques ratios correspondants des estimateurs de James-Stein δ_{JS} , et de sa partie positive δ_{JS}^+ , ainsi que celui d'un estimateur minimax et d'une classe dominant l'estimateur de James-Stein au sens du risque usuel (estimateurs de type polynômial, proposés par Tze Fen Li and Wen Hou Kuo [43]) pour différentes valeurs de n et p .

Chapitre 1

Rappels et Généralités

Introduction.

Ce chapitre se décompose en plusieurs parties; en premier lieu nous présentons les travaux démontrant l'inadmissibilité de l'estimateur des moindres carrés et la construction d'estimateurs à rétrécisseurs nommés estimateurs de James-Stein généralisés.

Stein [37], a annoncé l'inadmissibilité de l'estimateur des moindres carrés $\delta_0(X) = X$. Il a montré que les estimateurs de type $\delta_{a,b}(X) = \left(1 - \frac{a}{b + \|X\|^2}\right) X$ avec a, b des paramètres réels, ont un risque, relativement au coût quadratique usuel, uniformément inférieur à celui de l'estimateur $\delta_0(X)$, à condition que a soit suffisamment petit et b suffisamment grand.

James et Stein [23], ont montré que les estimateurs (biaisés bien sûr) de type $\delta_a(X) = \left(1 - \frac{a}{\|X\|^2}\right) X$, sont effectivement uniformément meilleurs que l'estimateur des moindres carrés $\delta_0(X)$, au sens du risque quadratique, pour tout a tel que $0 < a < 2(p-2)$. Pour $a = p-2$, l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right) X$, est uniformément meilleur dans la classe des estimateurs de type $\delta_a(X)$.

Des généralisations sur la forme des estimateurs de James-Stein $\delta_{JS}(X)$, ont été faites par plusieurs auteurs, notamment :

Baranchik [1], a proposé une classe d'estimateurs de la forme $\delta_r(X) = \left(1 - \frac{r \left(\frac{1}{2} \|X\|^2\right)}{\|X\|^2}\right) X$ dans le cas où $X \sim N_p(\theta, I_p)$, puis il a prouvé que sous certaines conditions, l'estimateur $\delta_r(X)$ est minimax. Le même travail a été fait par Baranchik [2], dans le cas où $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ avec σ^2 inconnu.

Strawderman [40], a amélioré les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ dans

le cas où σ^2 est connu.

Bock [8], a généralisé les travaux qui sont cités ci-dessus dans le cas où $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 D)$, avec σ^2 est un paramètre connu ou inconnu et D est une matrice non singulière.

Berger [6], ont étudié les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ pour une fonction de coût quadratique définie par : pour tout estimateur $\delta_r(X)$;

$$L(\delta_r(X), \theta) = (\delta_r(X) - \theta)^t Q (\delta_r(X) - \theta)$$

Q étant une matrice définie positive. Le cas particulier $Q = \Sigma^{-1}$, a été traité par plusieurs auteurs, notamment (James et Stein [23], Baranchik [2] et Strawderman [40]).

Brandwein et Strawderman [10] et Casella [13] ont donné différentes conditions pour que l'estimateur de type $\delta_r(X)$ soit minimax.

D'autres travaux ont été faits sur les estimateurs à rétrécisseur différentiable.

Stein [38], Efron et Morris [15] ont traité les estimateurs de type $\delta_g(X) = X + g(X)$ avec g est une fonction différentiable. Là aussi des conditions sur g ont été données pour la domination de l'estimateur des moindres carrés.

Dans la suite de ce chapitre nous présentons certains travaux fondés sur la domination de l'estimateur primitif de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Baranchik [1], est le premier qui a proposé un estimateur appelé partie-positive de l'estimateur de James-Stein noté par $\delta_{JS}^+(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right)^+ X$; où pour tout nombre réel c , $c^+ = \max(0, c)$. Il a montré que cet estimateur a un risque inférieur au risque de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43], ont proposé des estimateurs dénommés estimateurs polynomiaux. Ceux sont des types des estimateurs dérivés de l'estimateur proposé par Berger et Bock [7] qui ont la forme suivante $\delta_\Psi(X) = \delta_{JS}(X) + \Psi_c(\|X\|^2) X$ avec Ψ_c est une fonction réelle, et valant : $\Psi_c(\|X\|^2) = \frac{c}{\|X\|^r}$, c, r étant réels. Ceux sont les estimateurs polynomiaux proposé par Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43]. Nous les notons $\delta_{TZ,c}(X) = \delta_{JS}(X) + \frac{c}{\|X\|^r} X$.

Shao et Strawderman [35], ont considéré des estimateurs de la forme

$$\delta(a, g, X) = \delta_{JS}^+(X) - \frac{a g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} X I_{(p-2 \leq \|X\|^2 \leq p)}$$

avec $g(t)$ est une fonction symétrique au tour du point $t = p - 1$ tel que

$g(p - 2) = g(p) = 0$, et a est un paramètre réel. Ils ont prouvé que sous certaines conditions, l'estimateur $\delta(a, g, X)$ domine la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^+(X)$, et par conséquent domine l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Kubokawa [25], a montré que les estimateurs de la forme

$$\delta_K(X) = \left(1 - \frac{\Phi_K(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right) X$$

avec

$$\Phi_K(w) = w \frac{\int_0^1 \lambda^{p/2-1} \exp(-w \frac{\lambda}{2}) d\lambda}{\int_0^1 \lambda^{p/2-2} \exp(-w \frac{\lambda}{2}) d\lambda}$$

dominent l'estimateur de James-Stein, et est admissible.

Kubokawa [25], a montré que l'estimateur de type $\delta_\varphi(X) = \left(1 - \frac{\varphi(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right) X$ domine l'estimateur de James-Stein si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- a) $\varphi(\cdot)$ est monotone non-décroissante et $\lim_{w \rightarrow +\infty} \varphi(w) = p - 2$
- b) $\varphi(\cdot) \geq \Phi_K(w)$.

Maruyama [28], a prouvé que les estimateurs de la forme

$$\delta_\alpha(X) = \left(1 - \frac{\Psi_\alpha(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right) X$$

avec

$$\Psi_\alpha(w) = w \frac{\int_0^1 \lambda^{\alpha(p/2-1)} \exp(-w \alpha \frac{\lambda}{2}) d\lambda}{\int_0^1 \lambda^{\alpha(p/2-1)-1} \exp(-w \alpha \frac{\lambda}{2}) d\lambda} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

dominent l'estimateur de James-Stein pour $\alpha \geq 1$; et coïncident avec la partie positive de l'estimateur de James-Stein quand α tend vers l'infini.

Il est clair aussi que $\delta_1(X) = \delta_K(X)$.

Maruyama et Strawderman [34], ont donné des conditions nécessaires pour que les estimateurs de type $\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right) X$, avec g est une fonction différentiable,



dominent l'estimateur primitif de James-Stein $\delta_{JS}(X)$.

Maruyama et Katsunori [33], ont considéré la variable aléatoire réelle $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 \neq 1$. Ils ont donné des conditions nécessaires de minimaxité de l'estimateur $\delta_\phi(X) = X + \phi(X)$.

Approche Bayésienne : Dans cette partie nous présentons les travaux de plusieurs auteurs, notamment Baranchik [1]; Strawderman ([40], [41], [42]), Stein [39] et Maruyama et Katsunori [33].

Baranchik [1], a pris comme loi à priori du paramètre θ , de densité $\|\theta\|^{2-p+\varepsilon}$, ainsi il a trouvé que l'estimateur de Bayes

$$\delta_\varepsilon(X) = E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \|\theta\|^{2-p+\varepsilon} \prod_{i=1}^p d\theta_i}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \|\theta\|^{2-p+\varepsilon} \prod_{i=1}^p d\theta_i}$$

est donné par la formule suivante

$$\delta_\varepsilon(X) = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+2+\frac{\varepsilon}{2})}{k! \Gamma(\frac{p+2k+2}{2})} \left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)^k}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1+\frac{\varepsilon}{2})}{k! \Gamma(\frac{p+2k}{2})} \left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)^k} X$$

Il a constaté que pour $\varepsilon = p - 2$, $\delta_\varepsilon(X) = X$ qui est l'estimateur du maximum de vraisemblance. Il a prouvé aussi que l'estimateur $\delta_\varepsilon(X)$ est un estimateur minimax pour $0 \leq \varepsilon \leq p - 2$.

Strawderman [40], a amélioré les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ défini par la formule (1.5), proposé par Baranchik [1]; puis il a démontré que pour une loi à priori de θ , donné par la formule suivante : $\theta/\lambda \sim N(0, \lambda^{-1}(1-\lambda)I_p)$. Où λ a une densité de probabilité de la forme $\lambda^{-a}(1-a)$ pour tout $0 \leq a < 1$.

Ainsi l'estimateur de Bayes est

$$\delta_B(X) = \left\{ 1 - \left[\frac{p+2-2a}{\|X\|^2} - \frac{2 \exp\left(-\frac{1}{2}\|X\|^2\right)}{\|X\|^2 \int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2\right) d\lambda} \right] \right\} X.$$

Il a prouvé que l'estimateur $\delta_B(X)$ est minimax pour $p \geq 6$; il a montré aussi que sous la condition $\frac{1}{2} \leq a < 1$, l'estimateur $\delta_B(X)$ est minimax pour $p \geq 5$.

Strawderman ([41], [42]), a fait la même étude de son papier [40], mais dans le cas où $X \sim N(\theta, \sigma^2 I_p)$, avec σ^2 inconnu et estimé par la statistique S^2 , où $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$.

Stein [39], a étudié l'estimateur de Bayes de θ , où $X \sim N(\theta, I_p)$, avec θ ayant une loi à priori $\pi(\theta)$. Il a montré que l'estimateur de Bayes

$$E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}$$

s'écrit sous la forme

$$X + \nabla \log f(X) = X + \frac{\nabla f(X)}{f(X)}$$

avec $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x_p} \end{pmatrix}$ et $f(X)$ est la densité marginale de X .

En utilisant des calculs des risques, il a donné des résultats sur la minimaxité des estimateurs de type $X + g(X)$, sous certaines conditions posées sur la loi à priori $\pi(\theta)$.

Maruyama et Katsunori [33], ont traité le cas bayésien, où $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, avec σ^2 est un paramètre connu mais pas forcément égale à 1.

Ils ont prouvé que l'estimateur généralisé de Bayes dans le cas où θ suit une loi à priori $\pi(\theta)$, est

$$E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta} = X + \sigma^2 \frac{d}{dX} \log m_\pi^B(X),$$

avec

$$m_\pi^B(X) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(X - \theta)^2}{2\sigma^2}\right) d\pi(\theta).$$

Nous présentons ensuite un résumé dans le cas de l'estimation de θ , par une nouvelle classe d'estimateurs de James-Stein avec des facteurs de rétrécissement définis à l'aide de la norme l_p donnée par: $\|Z\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{i=d} |Z_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$.

Notons que les fonctions de risque de ces estimateurs sont calculées par rapport à la fonction de coût quadratique usuelle (1.1).

Finalement, nous présentons quelques résultats sur l'estimation de la moyenne θ ($\theta \in \mathbb{R}^p$) dans le cas où X suit une loi sphérique symétrique.

1.1 Inadmissibilité de l'estimateur usuel et estimateur de James-Stein

Soit X une variable aléatoire suit une loi normale multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$, avec $\theta \in \mathbb{R}^p$.

Pour tout estimateur $\delta(X)$ de θ , on définit la fonction de coût quadratique par :

$$L(\delta(X), \theta) = \|\delta(X) - \theta\|_p^2 \quad (1.1)$$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme usuelle dans \mathbb{R}^p . Ainsi son risque quadratique est :

$$\begin{aligned} R(\delta(X), \theta) &= E_\theta(L(\delta(X), \theta)) = E_\theta(\|\delta(X) - \theta\|_p^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\|\delta(X) - \theta\|_p^2}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|_p^2\right) dX \end{aligned} \quad (1.2)$$

On sait que l'estimateur usuel de θ est $\delta_0(X) = X$, et son risque est $R(\delta_0(X), \theta) = p$.

Il est bien connu que parmi les estimateurs sans biais, ou bien parmi les estimateurs invariants par transformation orthogonale (c'est à dire : Pour toute matrice orthogonale Γ , $\Gamma(\delta(X) + d) = \delta(\Gamma(X + d))$). L'estimateur $\delta_0(X)$ à un risque minimal pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$. Par ailleurs, Stein [37], a montré que, quand $p \geq 3$ l'estimateur de la forme : $\delta_{a,b}(X) = \left(1 - \frac{a}{b + \|X\|^2}\right) X$ a un risque uniformément inférieur au risque de $\delta_0(X)$, pour a suffisamment petit et b suffisamment grand.

Soit maintenant la classe d'estimateurs définie par James et Stein [23] :

$$\delta_a(X) = \left(1 - \frac{a}{\|X\|^2}\right) X \quad (1.3)$$

avec $a > 0$.

Théorème 1.1 (*James et Stein [23]*).

$$i) R(\delta_a(X), \theta) = p - 2(p - 2)a E_\theta \left[\frac{p - 2}{p - 2 + 2K} \right] + a^2 E_\theta \left[\frac{p - 2}{p - 2 + 2K} \right] \quad (1.4)$$

avec $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|_p^2}{2}\right)$ indiquant la loi de Poisson de paramètre $\frac{\|\theta\|_p^2}{2}$.

ii) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\delta_a(X)$ domine $\delta_0(X)$ est que $0 \leq a \leq 2(p - 2)$.

iii) L'estimateur de James-Stein défini dans (1.3), pour $a = p - 2$, est le meilleur estimateur, au sens du risque quadratique usuel, dans la classe des estimateurs $\delta_a(X)$.

Ainsi $\delta_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p - 2}{\|X\|^2}\right) X$ est le meilleur estimateur dans la classe des estimateurs de type $\delta_a(X)$.

Une autre classe d'estimateurs minimax est donnée par le résultat suivant :

Soit l'estimateur

$$\delta_r(X) = \left(1 - \frac{(p - 2)r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)}{\|X\|^2}\right) X \quad (1.5)$$

Théorème 1.2 (*Baranchick [1]*). L'estimateur exprimé par (1.5), est minimax si

a) $r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)$ est une fonction monotone non-décroissante.

b) $0 \leq r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right) \leq 1$.

On retrouve dans ce résultat la forme de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}(X)$, en prenant $r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right) = 1$.

Strawderman [40], a amélioré les conditions sur le rétrécisseur $\left(1 - \frac{(p - 2)r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)}{\|X\|^2}\right)$ pour $p \geq 3$, il a donné le théorème suivant

Théorème 1.3 (*Strawderman [40]*). L'estimateur $\delta_r(X)$ exprimé par (1.5) est minimax si

a) $r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)$ est monotone non-décroissante.

b) $0 \leq r\left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right) \leq 2$.

Strawderman [42], a donné d'autres conditions pour la minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$, (formule (1.5)), exprimées dans le théorème suivante:

Théorème 1.4 (Strawderman [42]). Soit l'estimateur $\delta_r(X)$ formule (1.5) avec

$$0 \leq r(\cdot) \leq 1, \text{ si}$$

a) $r(\cdot)$ est monotone non-décroissante.

b) $\frac{r(t)}{t}$ est monotone non-croissante.

Alors: $\delta_r(X)$ est minimax.

Remarque 1.5 Strawderman [42], a démontré ce théorème dans un cas plus générale, c'est le cas où la densité de la variable X est de la forme

$$f(X - \theta) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|X - \theta\|^2\right) dG(\theta)$$

avec $G(\cdot)$ est complètement définie sur $(0, \infty)$; en opérant une " variance mixtures " des variables aléatoires i.i.d.

Casella [13], a remarqué que si $r(\cdot)$ exprimé dans la formule (1.5), est concave alors les conditions a et b dans le théorème précédant sont vérifiées.

Proposition 1.6 (Casella [13]). Soit $r : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. Si $r(\cdot)$ est une fonction concave, alors;

a) $r(\cdot)$ est monotone non-décroissante

b) $\frac{r(t)}{t}$ est monotone non-croissante.

1.2 Estimateurs à rétrécisseurs différentiables

Soit l'estimateur

$$\delta_g(X) = X + g(X) \tag{1.6}$$

avec $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable.

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 1.7 (Stein [38]). Soit l'estimateur $\delta_g(X)$ exprimé dans la formule (1.6).

Si $g(\cdot)$ est une solution de l'inéquation différentielle

$$\|g(X)\|^2 + 2 \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(X) \leq 0$$

alors; l'estimateur $\delta_g(X)$ est minimax et domine l'estimateur usuel $\delta_0(X) = X$.

La démonstration du Théorème 1.7 nécessite le lemme suivant :

Lemme 1.8 (*Egalité de Stein, Stein [38]*). Soit $Y \sim N(\nu, 1)$, alors :

$$E \left[g'(Y) - (Y - \nu) g(Y) \right] = 0 \quad (1.7)$$

où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle Lebesgue mesurable telle que $E(|g'(Y)|) < \infty$.

Efron et Morris [15] ont obtenu le résultat suivant pour les estimateurs à rétrécisseurs uniformes $\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X$, où g est une fonction réelle différentiable.

Théorème 1.9 (*Efron et Morris [15]*). Si g est solution de l'inéquation différentielle

$$g(u) \frac{(2(p-2) - g(u))}{u} + 4g'(u) \geq 0 \quad (1.8)$$

vérifiée, par exemple par : si

- 1) g est monotone non-décroissante
 - 2) $0 \leq g(u) \leq 2(p-2)$ pour tout $u \geq 0$,
- alors $\delta_g(X)$ est minimax.

Remarque 1.10 i) James et Stein [23] utilisent une démonstration assez longue par la méthode du χ^2 décentré. L'égalité de Stein (égalité (1.7)) permet d'écrire simplement: si

$$\delta_c(X) = \left(1 - \frac{c}{\|X\|^2} \right) X$$

alors

$$\begin{aligned} R(\delta_c(X), \theta) &= E_\theta \left(\left\| \left(1 - \frac{c}{\|X\|^2} \right) X - \theta \right\|^2 \right) \\ &= E_\theta (\|X - \theta\|^2) + c^2 E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) - 2c E_\theta \left(\sum_{i=1}^p \frac{X_i(X_i - \theta_i)}{\sum_{j=1}^p X_j^2} \right) \\ &= p + c^2 E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) - 2c \sum_{i=1}^p E_\theta \left[\frac{d}{dx_i} \left(\frac{X_i}{\sum_{j=1}^p X_j^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p + c^2 E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) - 2c \sum_{i=1}^p E_\theta \left[\frac{\sum_{j=1}^p X_j^2 - 2X_i^2}{\left(\sum_{j=1}^p X_j^2 \right)^2} \right] \\
&= p + [c^2 - 2(p-2)] E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right)
\end{aligned}$$

où la troisième égalité est obtenue à l'aide de l'égalité de Stein (égalité (1.7)). Ainsi $R(\delta_c(X), \theta) \leq p$ atteint sa valeur minimale pour $c = p - 2$. On obtient ainsi l'estimateur primitif de James-Stein δ_{JS} .

ii) Nous retrouvons dans le Théorème 1.9 des fonctions solutions vérifiant les mêmes conditions que celles du Théorème 1.3 (Strawderman [40]) avec en plus la condition supplémentaire de différentiabilité.

iii) Le Théorème 1.9 fournit à nouveau une classe d'estimateurs à rétrécisseurs différentiables dominant l'estimateur des moindres carrés $\delta_0(X) = X$, avec des rétrécisseurs uniformes. L'inégalité (1.8) étant satisfaite pour $g(u) = p - 2$, ce qui donne l'estimateur primitif de James-Stein .

1.3 Estimateurs dominant l'estimateur de James-Stein

1.3.1 Amélioration de l'estimateur de James-Stein par troncature

Pour des raisons de simplification d'écritures, nous adopterons le modèle simple: $X \sim N_p(\theta, I_p)$.

Rappelons que dans ce cas là, l'estimateur des moindres carrés $\delta_0(X) = X$. Rappelons aussi la forme de l'estimateur "primitif" de James-Stein :

$$\delta_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} \right) X ,$$

sa fonction de risque est

$$R(\delta_{JS}(X), \theta) = p - (p-2)^2 E(\|X\|^{-2}) .$$

La partie positive de l'estimateur "primitif" de James-Stein est

$$\delta_{JS}^+(X) = \max \left(0, 1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} \right) X ,$$

domine uniformément l'estimateur primitif de James-Stein δ_{JS} , C'est un résultat qu'on trouve dans Baranchik [1], qui utilise une démonstration assez longue utilisant des lois du χ^2 décentrées. Berger et Bock [7], Hamdaoui et Benmansour [20] retrouvent ce résultat plus simplement. Nous avons ainsi un estimateur obtenu par troncature inférieure qui domine δ_{JS} .

1.3.2 Amélioration de l'estimateur de James-Stein par des rétrécisseurs polynômiaux

Les estimateurs proposés par Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43], sont de la forme générale proposée par Berger et Bock [7] :

$$\delta_{\psi}(X) = \delta_{JS}(X) + \psi_c(\|X\|^2) X$$

où $\psi_c(\|X\|^2) = \frac{c}{\|X\|^r}$, c et r étant réels. Ceux sont les estimateurs polynômiaux proposés par Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43]. Nous les notons

$$\begin{aligned} \delta_{TZ,c}(X) &= \phi_{JS}(X) + \frac{c}{\|X\|^r} X \\ &= \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{c}{\|X\|^r} \right) X . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nous avons alors le résultat de domination de δ_{JS} suivant

Théorème 1.11 (Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43]). *Pour tout $2 < r < \frac{p+2}{2}$, l'estimateur $\phi_{TZ,\tilde{c}}(X)$ de la forme (1.9), avec*

$$\tilde{c} = (r-2) 2^{\left(\frac{r-2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-2r+2}{2}\right)} \quad (1.10)$$

domine δ_{JS} uniformément en θ .

Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43] construisent d'autres estimateurs en utilisant le



même procédé d'écriture. A partir de l'estimateur $\delta_{TZ,\tilde{c}}$ obtenu ci-dessus, ils lui ajoutent à nouveau la quantité $\frac{dX}{\|X\|^r}$, où d est réel. Ils obtiennent un nouvel estimateur, $\delta_{TZ,\tilde{d}}$ dominant $\delta_{TZ,\tilde{c}}$, avec bien entendu des conditions sur r et p (\tilde{d} étant la valeur de d rendant la fonction de risque de $\delta_{TZ,\tilde{d}}$ optimale). Ainsi, ils construisent au fur et à mesure des estimateurs de telle sorte que le dernier estimateur obtenu domine, au sens du risque quadratique, tous les estimateurs construits précédemment. Ces résultats sont obtenus sous des conditions, notamment la dimension de l'espace des paramètres p , est de plus en plus croissante. Le procédé est le suivant: pour $r = 4$; dans ce cas on obtient de l'égalité (1.10), $\tilde{c} = 2(p - 6)$ et donc

$$\delta_{TZ,2(p-6)} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{2(p-6)}{\|X\|^4}\right) X.$$

Ainsi pour $p > 6$, $\delta_{TZ,2(p-6)}$ domine δ_{JS} uniformément en θ . Pour $p > 10$, ils donnent dans le théorème qui suit, le principe de construction de $\delta_{TZ,\tilde{d}}$.

Théorème 1.12 (Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43]). Pour $p > 10$, l'estimateur $\delta_{TZ,2(p-10)^2}(X)$ défini par

$$\delta_{TZ,2(p-10)^2} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{2(p-6)}{\|X\|^4} + \frac{2(p-10)^2}{\|X\|^6}\right) X \quad (1.11)$$

domine $\delta_{TZ,2(p-6)}$ uniformément en θ .

1.3.3 Estimateurs de Berger et Bock [7]

Il s'agit d'estimer la moyenne $\theta \in \mathbb{R}^p$ d'une variable aléatoire $X \in \mathbb{R}^p$ dont la densité de probabilité est de la forme $f(x - \theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Nous présentons des résultats généraux sur une classe particulière d'estimateurs proposés par Berger et Bock [7] de la forme :

$$\delta_{\Phi}(X) = \Phi(X) X \quad (1.12)$$

$$\delta_{\Phi,\Psi}(X) = (\Phi(X) + \Psi(X))X \quad (1.13)$$

où $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des matrices $p \times p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on note $x^i = {}^t(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$.

On notera aussi par I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A . Nous donnons les définitions suivantes.

Définition 1.13 Une fonction $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite *symétrique par coordonnée* si

$$g(x_i, x^i) = g(-x_i, x^i)$$

pour tout x_i, x^i et $1 \leq i \leq p$

Définition 1.14 La densité de probabilité $f(x - \theta) = f(x_i - \theta_i, x^i - \theta^i)$ est dite *unimodale par coordonnée* si $f(x_i - \theta_i, x^i - \theta^i)$ est unimodale comme fonction de x_i pour tout $x^i, 1 \leq i \leq p$.

Ils donnent ensuite le théorème suivant, en adoptant la fonction de coût donnée par (1.1).

Théorème 1.15 (Berger et Bock [7]). Si

- 1) $f(x - \theta)$ est unimodale symétrique par coordonnée
- 2) $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des matrices diagonales dont les éléments notés $\phi_i(x)$ (respectivement $\psi_i(x)$) vérifient:

a) $\psi_i(x)$ est symétrique par coordonnée et non négative, pour tout $1 \leq i \leq p$.

b)

$$\sum_{i=1}^p [\phi_i^2(x) - \{\phi_i(x) + \psi_i(x)\}^2 x_i^2] \geq 0$$

alors

$$R(\delta_{\Phi, \Psi}, \theta) \leq R(\delta_{\Phi}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}^p$$

Ils déduisent alors du Théorème 1.15 les corollaires suivants :

Corollaire 1.16 (Berger et Bock [7]). Si $f(x - \theta)$ et $\Phi(x)$ vérifient les conditions du Théorème 1.15 et si

- 1) $\phi_i(x)$ est symétrique par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq p$.
- 2) Soient, pour tout $1 \leq i \leq p$, $W_i = \{x \in \mathbb{R}^p : \phi_i(x) < 0\}$,
 - a) $t_i : \mathbb{R}^p \rightarrow [1, 2]$ une fonction symétrique par coordonnée
 - b) et $\delta_{i, \phi_i}^*(X)$, l'estimateur dont les coordonnées sont définies par



$\delta_{i,\phi_i}^*(X) = \{1 - t_i(X)I_{W_i}\} \phi_i(X)X_i$; alors

$$R(\delta_{\Phi}^*, \theta) \leq R(\delta_{\Phi}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}^p$$

Notons que δ_{Φ}^* est un estimateur à rétrécisseur positif, et que dans le cas où $t_i \equiv 1$, $1 \leq i \leq p$, nous retrouvons naturellement sa partie positive δ_{Φ}^{*+} . Ils déduisent alors le corollaire suivant:

Corollaire 1.17 (Berger et Bock [7]). Si $f(x - \theta)$ et $\Phi(x)$ vérifient les conditions du Corollaire 1.16. Alors pour l'estimateur dont les coordonnées sont définies par

$$\delta_{i,\Phi}^+(X) = \phi_i^+(X) X_i$$

avec

$$\phi_i^+(X) X_i = \phi_i(X) I_{[0,\infty]} \phi_i(X)$$

on a

$$R(\delta_{\Phi}^+, \theta) \leq R(\delta_{\Phi}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}^p.$$

Le Corollaire 1.17 se déduit simplement du Corollaire 1.16 en prenant $t_i \equiv 1$, $1 \leq i \leq p$.

Remarque 1.18 i) On peut déduire du Théorème 1.15, une démonstration très simple de la domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^+(X)$, sur l'estimateur primitif de James-Stein $\phi_{JS}(X)$. En effet

$$\begin{aligned} \delta_{JS}(X) &= \delta_{JS}^+(X) - \delta_{JS}^-(X) \\ \text{où } \delta_{JS}^-(X) &= \max\left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1\right) X \end{aligned}$$

Ainsi en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^p , nous avons :

$$\begin{aligned} R(\delta_{JS}(X), \theta) - R(\delta_{JS}^+(X), \theta) &= E_{\theta} \left(\|\delta_{JS}^-(X)\|^2 \right) + 2E_{\theta} (\langle \theta, \delta_{JS}^-(X) \rangle) \\ &= E_{\theta} \left(\|\delta_{JS}^-(X)\|^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^p E_{\theta} \left(\max\left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1\right) \theta_i X_i \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Comme $\max\left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1\right) \geq 0$, alors le Théorème 1.15 implique que le deuxième membre de la deuxième égalité est positif. D'où le résultat.

1.3.4 Conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein

Maruyama et Strawderman [34], obtiennent pour des estimateurs de la forme

$$\delta_\xi(X) = \left(1 - \frac{\xi(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right) X$$

où ξ est différentiable, des conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein. Ils montrent

$$R(\delta_{JS}, \theta) - R(\delta_\xi, \theta) = E_\theta(g_\xi(\|X\|^2))$$

où

$$g_\xi(u) = -\frac{\{\xi(u) - (p-2)\}^2}{u} + 4\xi'(u) \quad (1.14)$$

obtenue à l'aide de l'égalité de Stein, et donnent des conditions nécessaires sur ξ et g_ξ pour que $\delta_\xi(X)$ domine $\delta_{JS}(X)$.

Leur résultat est le suivant (Théorème 2.1 [34].)

Théorème 1.19 (Maruyama et Strawderman [34]). *Supposons que la fonction g_ξ est bornée. Si l'estimateur δ_ξ domine l'estimateur de James-Stein δ_{JS} alors pour tout $u \geq 0$, il existe $u_0 > u$ tel que $g_\xi(u_0) \geq 0$.*

Les auteurs donnent aussi d'autres conditions nécessaires (Théorème 2.3 [34]) dans le cas où ξ est deux fois différentiable.

Théorème 1.20 (Maruyama et Strawderman [34]). *Supposons que les fonctions ξ et $\frac{\xi(u)}{u}$ sont bornées, et que $\xi'(u) = o\left(\frac{1}{u}\right)$ et $\xi''(u) = o\left(\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right)$. Si l'estimateur δ_ξ domine l'estimateur de James-Stein δ_{JS} alors $\lim_{u \rightarrow +\infty} \xi(u) = p - 2$.*

Maruyama et Katsunori [33], ont considéré la variable aléatoire réelle $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 \neq 1$.

Il ont montré que la différence de risque entre l'estimateur de type $\delta_\phi(X) = X + \phi(X)$

(où $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$) et l'estimateur du maximum de vraisemblance X est

$$\begin{aligned} \Delta &= R(\delta_\phi(X), \theta) - R(X, \theta) \\ &= 2c \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(w) \{ \phi(w) - \Psi_{\sigma^2}(w, \theta) \} \left\{ \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(w-t-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) dt \right\} dw \end{aligned}$$

où $c = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}$ et

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma^2}(w, \theta) &= \frac{\int_0^{\infty} (t - w + \theta) \exp\left(-\frac{(w-t+\theta)^2}{2\sigma^2}\right) dt}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(w-t+\theta)^2}{2\sigma^2}\right) dt} \\ &= \sigma^2 \left(\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} + \frac{t(w-\theta)}{2\sigma^2}\right) dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $\Psi_{\sigma^2}(w, \theta)$ est croissante en θ , donc $\Psi_{\sigma^2}(w, \theta) \geq \Psi_{\sigma^2}(w, 0)$ pour $\theta \geq 0$. Notons par $\phi_{\sigma^2}(w) = \Psi_{\sigma^2}(w, 0)$, ainsi Δ est non négative pour tout $\theta \geq 0$ quand $\phi(w)$ est non croissante et $\phi(w) \leq \phi_{\sigma^2}(w)$. Comme $\lim_{w \rightarrow \infty} \phi_{\sigma^2}(w) = 0$, on a le résultat suivant

Théorème 1.21 (Maruyama et Katsunori [33]). Pour $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ avec $\theta \geq 0$, l'estimateur $\delta_\phi(X) = X + \phi(X)$ est minimax si

$$\phi(w) \text{ est monotone non-croissante et } 0 \leq \phi(w) \leq \phi_{\sigma^2}(w).$$

1.3.5 Estimateurs de Shao et Strawderman

Nous signalons tout d'abord que Gruber ([19] pp 307-370) a fait une étude numérique détaillée d'une classe d'estimateurs proposés par Judge et Bock [24] dans laquelle plusieurs formes d'estimateurs susceptibles de dominer la partie positive de l'estimateur de James-Stein sont proposées. Gruber [19], note :

$$\delta(X_i) = (1 - u_1)I_{[0,1]}(u_1)X_i + a_1(1 - u_1)I_{[1,\alpha]}(u_1)X_i + a_2(1 - u_1)I_{[\alpha,+\infty]}(u_1)X_i \quad 1 \leq i \leq p$$

où

$$I_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les choix de a_1 , a_2 et α sont résumés comme suit:

<i>Estimateurs</i>	a_1	a_2	α
δ_{JS}	1	0	∞
$\delta_{0,JS}^+ := \phi_{JS}^+$	0	0	0
$\delta_{1,JS}^+$	-1	0	∞
$\delta_{2,JS}^+$	-1	1	2
$\delta_{3,JS}^+$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\delta_{4,JS}^+$	1	1	2

L'étude de ces différentes formes d'estimateurs montre qu'aucun ne domine l'estimateur δ_{JS}^+ , uniformément en θ . L'estimateur $\delta_{2,JS}^+$ est le seul à dominer δ_{JS}^+ pour les grandes valeurs de $\lambda = \|\theta\|^2$, avec des choix de a_1 , a_2 et α , appropriés. De plus les gains de ces différentes formes d'estimateurs se font sur des domaines très réduits dans l'espace du paramètre θ .

Benmansour et Mourid [5] ont exhibé des sous-espaces paramétriques généralement ne contenant pas l'origine, très "larges" et suffisants pour des applications, où ils ont obtenu une domination uniforme de la partie positive de l'estimateur de James Stein.

Shao et Strawderman [35] ont proposé deux classes d'estimateurs dominant $\delta_{JS}^+(X)$ uniformément en θ . Ils donnent d'abord une généralisation de l'égalité de Stein (donnée par (1.7)) dans un lemme fondamental et ensuite proposent leurs classes d'estimateurs. Le lemme s'écrit comme suit :

Lemme 1.22 (Shao et Strawderman [35]). Soit ψ une fonction à support $[a, b]$ et continue telle que ψ' possède au plus un nombre fini de points de discontinuité $0 \leq a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = b$. Si, pour $i = 0, \dots, k+1$, $\psi'(a_i^+)$ et $\psi'(a_i^-)$ sont finies. Alors

$$E_\theta^t \left[t(X - \theta) X \psi(\|X\|^2) I_{\{a < \|X\|^2 < b\}} \right] = E_\theta \left[(2\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + p\psi(\|X\|^2)) I_{\{a < \|X\|^2 < b\}} \right] + f(a) - f(b) \quad (1.15)$$

où

$$\begin{aligned}
 f(a) &= K_1 g_1(\sqrt{a}) + (p-1) K_1 g_2(\sqrt{a}) \\
 f(b) &= K_2 g_1(\sqrt{b}) + (p-1) K_2 g_2(\sqrt{b}) \\
 K_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^p 2^{p-1} \psi(a) (\sqrt{a})^p \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2 + a}{2}\right) \\
 K_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^p 2^{p-1} \psi(b) (\sqrt{b})^p \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2 + b}{2}\right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 g_1(c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\alpha))^2 (\sin(\alpha))^{p-2} [\exp(\|\theta\| c \sin(\alpha) \cos(\varphi_1)) + \exp(-\|\theta\| c \sin(\alpha) \cos(\varphi_1))] \\
 &\quad \times (\sin(\varphi_1))^{p-3} \dots \sin(\varphi_{p-3}) d\alpha d\varphi_1 \dots d\varphi_{p-2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 g_2(c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\alpha))^2 (\sin(\alpha))^{p-2} [\exp(\|\theta\| c \cos(\alpha)) + \exp(-\|\theta\| c \cos(\alpha))] \\
 &\quad \times (\sin(\varphi_1))^{p-3} \dots \sin(\varphi_{p-3}) d\alpha d\varphi_1 \dots d\varphi_{p-2}
 \end{aligned}$$

Remarquons que $g_1(a)$, $g_2(b)$ ont respectivement le signe de $\psi(a)$ et $\psi(b)$, et que si $a = 0$ alors $f(a) = 0$.

${}^t(X - \theta)$ indiquant le transposé du vecteur $(X - \theta)$. Si de plus $\psi(a) = \psi(b) = 0$, on retrouve alors l'égalité de Stein pour des fonctions invariantes orthogonalement. Enfin signalons aussi que Shao et Strawderman [35] ont proposé deux classes d'estimateurs dominant $\phi_{JS}^+(X)$.

La première de la forme

$$\delta(a, g, X) = \phi_{JS}^+(X) - \frac{ag(\|X\|^2)}{\|X\|^2} X I_{(p-2 \leq \|X\|^2 \leq p)} \quad (1.16)$$

où g est définie sur le compact $[p-2, p]$, ($p \geq 3$) linéaire et symétrique autour du point $p-1$, avec $g(p-2) = g(p) = 0$, $g'(p-2) < 0$ et $|g'(u)| \equiv 1$ p s sur $[p-2, p]$ (la courbe de g étant en forme de ${}_jW_1$). Ils construisent ensuite g sur des subdivisions dans l'intervalle $[p-1, p]$ et donnent des conditions sur le paramètre a pour que l'estimateur

$\delta(a, g, X)$ domine $\phi_{js}^+(X)$. Ils définissent ensuite

$$S(t) = 2(p-1) - t \quad p-1 \leq t \leq p$$

et

$$F_n(t) = \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+n-1} \quad p-1 \leq t \leq p \text{ et } n \text{ un entier naturel } > 0$$

Les auteurs montrent ensuite que si $p \geq 3$ et $n \geq j(p)$, avec $j(p)$ le plus petit nombre entier supérieur à $(5 + \sqrt{1+6p})/2$ et $t \in [p-1, p]$ alors $F_n''(t) \geq 0$. Ils démontrent aussi l'existence d'un point $c_0 \in [p-1, p-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$ tel que

$$\int_{p-1}^{c_0} F_0(t) dt = \int_{c_0}^p F_0(t) dt$$

Ils définissent un point $c_j \in [p-1, p]$ tel que

$$\int_{p-1}^{c_j} F_0(t) dt = \int_{c_j}^p F_0(t) dt$$

Leur résultat fondamental est le suivant

Théorème 1.23 (Shao et Strawderman [35]). Soit a un réel positif, $p \geq 3$ et soit p^* une valeur de l'intervalle

$$\left(c_0, \min(c_1, c_2, \dots, c_{j(p)-1}, p-1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\right)$$

où

$$b = 1 - \sqrt{2}(p^* - (p-1)) < \min\left(\frac{1}{2}, p - p^*\right)$$

et soit

$$g(t) = \begin{cases} t - p, & \text{si } p^* \leq t \leq p \\ 2p^* - p - t, & \text{si } p-1 \leq t \leq p^* \end{cases}$$

la définition de g s'étendant sur $[p-2, p-1]$ par symétrie autour de $p-1$, c'est à dire

$$g(t) = \begin{cases} t - 3p + 2p^* + 2, & \text{si } 2(p-1) - p^* \leq t \leq p-1 \\ p-2-t, & \text{si } p-2 \leq t \leq 2(p-1) - p^* \end{cases}$$

Soit

$$A = 1 - \exp(1-b)^{\frac{p}{2}+j(p)-1}$$

et

$$B = \min \left\{ \frac{\int_{p-2}^p g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+j-1} dt}{\int_{p-2}^p g^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+j-2} dt} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, j_{(p)-1} \right\}$$

si

$$0 < a \leq \min(B, 2(p-2)bA)$$

Alors l'estimateur $\delta(a, g, X)$, défini par (1.16), domine la partie positive de James-Stein $\delta_{JS}^+(X)$ uniformément en θ .

La deuxième classe est de la forme:

$$\delta(a, k, h, g, X) = \phi_{JS}^+(X) - a \left[\frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} I_{(\|X\|^2 \geq q)} + kh(\|X\|^2) I_{(\|X\|^2 < q)} \right] X \quad (1.17)$$

où g est différentiable avec un graphe en forme de "W" et h est bornée continue et négative.

Les auteurs dans [35] donnent alors le théorème suivant de domination de l'estimateur (1.17) sur δ_{JS}^+ .

Théorème 1.24 (Shao et Strawderman [35]). Soient a et k deux nombres réels positifs et g une fonction continue, avec un graphe en forme de]W], définie sur $[q, +\infty[$, avec $g(q) = g(\infty) = 0$, et $p-2 < q < p-1$. De plus g est dérivable sauf en un certain nombre fini de points où il existe une dérivée à droite et à gauche et prenant des signes successivement positifs, puis négatifs (g est dite "piecewise" différentiable) : il existe des nombres t_1, t_2, \dots, t_6 , tels que

$$p-2 < q < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6 < \infty$$

avec

$$g(t_2) = g(t_4) = 0$$

et

$$g'(t) = \begin{cases} \geq 0, & \text{si } t_1 \leq t \leq t_3 \text{ ou } t_5 < t < \infty \\ \leq 0, & \text{si } q \leq t < t_1 \text{ ou } t_3 \leq t \leq t_5 \end{cases}$$

Soit h une fonction continue, bornée et négative définie sur $[0, q]$, telle que $|h(t)| < M$ et $h(q) = 0$ pour $p - 2 < q < p - 1$.

Soit

$$b_j = 2^{\frac{p}{2}+j} j! \Gamma\left(\frac{p}{2} + j\right)$$

et on suppose qu'il existe un entier J tel que

$$\int_q^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+J+1} dt > 0$$

$$\int_{t_3}^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+J-1} dt \geq 0$$

On suppose aussi que pour tout $t > t_6$

$$g^2(t) \leq 4tg'(t)$$

Soit $B_1 < B_2$ deux constantes telles que si $0 \leq w \leq 2B_1$ ou $2B_2 \leq w$ pour un entier $N > J$,

$$\int_q^\infty \frac{g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt}{b_0} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\int_q^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+j-1} dt}{b_j} \left(\frac{w}{2}\right)^j \geq 0$$

On suppose

$$k \geq \frac{4b_1 \sum_{j=1}^{J-1} \int_q^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+j-1} dt (B_2^j) / b_j}{B_1 \int_0^{p-2} h(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}} dt}$$

et

$$2 \int_q^\infty g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt + k(q - p + 2) \int_{p-2}^q h(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt > 0$$

et

$$0 < a < \min(0.5, A_1, A_2, \frac{1}{qkM}, \frac{B_1}{kM})$$

où

$$A_1 = \frac{2G_1 + k(q - p + 2)H_1}{M_1 + k^2N_1}, G_1 = \int_q^\infty g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt$$

et

$$H_1 = \int_{p-2}^q h(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt$$

$$M_1 = \int_q^\infty g^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-2} dt$$

$$N_1 = \int_0^q h^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}} dt$$

la quantité A_2 est donnée par

$$A_2 = \frac{4G_2}{4G_2 + M_2}$$

où

$$G_2 = \int_{t_6}^\infty g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt, M_2 = \int_q^{t_6} g^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt$$

Sous toutes ces conditions et hypothèses, l'estimateur $\delta(a, k, h, g, X)$, défini par (1.17), domine la partie positive de James-Stein $\delta_{js}^+(X)$ uniformément en θ .

1.4 Approche Bayésienne

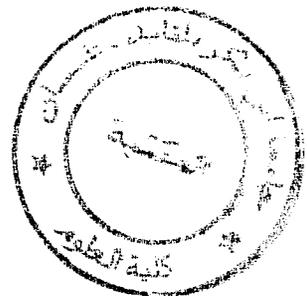
Proposition 1.25 (Baranchik [1]). Si $X \sim N(\theta, I_p)$ avec θ ayant une loi a priori

$\theta \sim \|\theta\|^{2-p+\varepsilon}$. L'estimateur de Bayes de θ est donné par la formule

$$\delta_\varepsilon(X) = E(\theta/X) = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+2+\frac{\varepsilon}{2})}{k! \Gamma\left(\frac{p+2k+2}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)^k}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1+\frac{\varepsilon}{2})}{k! \Gamma\left(\frac{p+2k}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\|X\|^2\right)^k} X$$

De plus si $\varepsilon = p - 2$, on a $\delta_{p-2}(X) = X$.

Strawderman [40], a amélioré les conditions de minimaxité de l'estimateur $\delta_r(X)$ défini par la formule (1.5), proposé par Baranchik [1]; puis il a démontré que pour une loi à priori de θ , donnée par la formule suivante : $\theta/\lambda \sim N(0, \lambda^{-1}(1-\lambda)I_p)$, où λ a une densité de probabilité de la forme $\lambda^{-a}(1-a)$ pour tout $0 \leq a < 1$.



L'estimateur de Bayes est

$$\delta_B(X) = \left\{ 1 - \left[\frac{p+2-2a}{\|X\|^2} - \frac{2 \exp(-\frac{1}{2}\|X\|^2)}{\|X\|^2 \int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2) d\lambda} \right] \right\} X \quad (1.18)$$

En effet

$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= E(\theta/X) = E[E(\theta/X, \lambda)/X] \\ &= E[(1-\lambda)X/X] \\ &= [1 - E(\lambda/X)]X \end{aligned} \quad (1.19)$$

où l'égalité (1.19) découle des résultats de Lindley et Smith [26].

La densité du couple (λ, X) est

$$\begin{aligned} g(X, \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^p} h(X, \lambda, \theta) \Pi_{i=1}^p d\theta_i \\ &= K_1 \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^{-a} \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\|\theta\|^2\right) \Pi_{i=1}^p d\theta_i \\ &= K_2 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2\right) \text{ avec } 0 < \lambda \leq 1; \|X\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E(\lambda/X) &= \frac{\int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a+1} \exp(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2) d\lambda}{\int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2) d\lambda} \\ &= \frac{p+2-2\lambda}{\|X\|^2} - \frac{2 \exp(-\frac{1}{2}\|X\|^2)}{\|X\|^2 \int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2) d\lambda} \end{aligned}$$

la dernière égalité découle de l'intégration par partie. Ainsi l'estimateur de Bayes associé à la loi à priori définie ci-dessus est:

$$\delta_B(X) = \left\{ 1 - \left[\frac{p+2-2a}{\|X\|^2} - \frac{2 \exp(-\frac{1}{2}\|X\|^2)}{\|X\|^2 \int_0^1 \lambda^{\frac{1}{2}p-a} \exp(-\frac{1}{2}\lambda\|X\|^2) d\lambda} \right] \right\} X.$$

Théorème 1.26 (Strawderman [40]). Pour $p \geq 6$ l'estimateur défini par la formule (1.18) est minimax si $0 < a < 1$. Et pour $p = 5$ l'estimateur défini par la formule (1.18) est minimax pour tout a tel que $1/2 < a < 1$.

Strawderman ([41], [42]), a fait la même étude dans son papier [40], mais dans le cas où $X \sim N(\theta, \sigma^2 I_p)$, avec σ^2 étant inconnu et estimé par la statistique S^2 où $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$.

Stein [39], a étudié l'estimateur de Bayes de θ , où $X \sim N(\theta, I_p)$, avec θ ayant pour loi à priori de densité $\pi(\theta)$. Il a montré que l'estimateur de Bayes

$$E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta}$$

s'écrit sous la forme

$$X + \nabla \log f(X) = X + \frac{\nabla f(X)}{f(X)}$$

avec $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x_p} \end{pmatrix}$ et $f(X)$ est la densité de X .

En effet

$$\begin{aligned} \delta_\pi(X) &= E(\theta/X) = E(\theta - X + X/X) \\ &= X + E(\theta - X/X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X + \frac{\int (\theta - X) \exp\left(-\frac{1}{2} \|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp\left(-\frac{1}{2} \|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta} \\
&= X + \nabla \log f(X)
\end{aligned}$$

avec

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int \exp\left(-\frac{1}{2} \|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta$$

est la loi marginale du variable aléatoire X .

Il est claire que

$$\begin{aligned}
R(\delta_\pi(X), \theta) &= R(X + \nabla \log f(X); \theta) \\
&= p + E_\theta \left\{ 2 \frac{\nabla^2 f(X)}{f(X)} - \frac{\|\nabla f(X)\|}{f^2(X)} \right\}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Ensuite Stein[39] fait une comparaison entre

$$\rho(X) = p + 2 \frac{\nabla^2 f(X)}{f(X)} - \frac{\|\nabla f(X)\|}{f^2(X)} \tag{1.21}$$

et l'estimateur de Bayes $\delta_\pi(X)$ de θ , dont le le risque a postérieur $E(\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2 / X)$ est :

$$\begin{aligned}
E(\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2 / X) &= E(\|\theta - X - \nabla \log f(X)\|^2 / X) \\
&= E_X \{ \|\theta - X\|^2 - \|\nabla \log f(X)\|^2 \}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$= p + \frac{\nabla^2 f(X)}{f(X)} - \|\nabla \log f(X)\|^2 \tag{1.23}$$

l'égalité (1.22) vient du Théorème de Pythagore dans un espace de Hilbert; le carré de la distance entre θ et X égale à la somme du carré de la distance entre θ et la variable $X + \nabla \log f(X)$ et le carré de la distance entre les deux variables X et $X + \nabla \log f(X)$.

La dernière égalité vient de

$$\frac{\nabla^2 f(X)}{f(X)} = \frac{\nabla^2 \int \exp\left(-\frac{1}{2} \|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp\left(-\frac{1}{2} \|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\int (\|X - \theta\|^2 - p) \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta} \\
&= E_X (\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2 - p).
\end{aligned}$$

En comparant (1.21) et (1.23) on voit que

$$E_X (\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2) = \rho(X) - \frac{\nabla^2 f(X)}{f(X)},$$

ceci montre que si la fonction f est superharmonique on trouve que

$$E_\theta \{E_X (\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2)\} \geq E_\theta (\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2)$$

ainsi la condition de superharmonicité de la densité f , permet d'obtenir la minimaxité de l'estimateur de Bayes.

Il a constaté aussi d'après l'écriture suivante:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int \exp\left(-\frac{1}{2}\|x - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int \exp\left(-\frac{1}{2}\|y\|^2\right) \pi(x - y) dy$$

que si la densité de la loi à priori $\pi(\theta)$ est superharmonique alors la fonction f est superharmonique, et par conséquent l'estimateur de Bayes est minimax.

Maruyama et Katsunori [33], ont traité le cas Bayésien, où $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, avec σ^2 connu et différent de 1.

Ils ont prouvé que l'estimateur généralisé de Bayes dans le cas où θ suit une loi à priori $\pi(\theta)$, est

$$E(\theta/X) = \frac{\int \theta \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\|X - \theta\|^2\right) \pi(\theta) d\theta} = X + \sigma^2 \frac{d}{dX} \log m_\pi^B(X)$$

avec

$$m_\pi^B(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x - \theta)^2}{2\sigma^2}\right) d\pi(\theta)$$

Théorème 1.27 (Maruyama et Katsunori [33]). *L'estimateur de Bayes généralisé associé à une loi à priori $\pi(\theta)$, est admissible si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

- a) $\sigma^2 \left(\frac{d}{dX} \right) \log m_\pi^B(X)$ est uniformément borné pour $x \geq 0$.
- b) Les deux intégrales $\int_1^\infty [m_\pi^B(x)]^{-1} dx$ et $\int_{-\infty}^{-1} [m_\pi^B(x)]^{-1} dx$ sont divergentes.

1.5 Norme l_p et minimaxité

Introduction.

Dans cette partie nous présentons un résumé sur les estimateurs à rétrécisseurs définis par la norme l_p et leur propriétés de minimaxité dont nous tirons l'essentiel du papier de Maruyama [32].

On considère $Z \sim N_d(\theta, I_d)$, et nous nous intéressons à l'estimation du paramètre θ par un estimateur à rétrécisseur. Le critère de comparaison adopté est le risque quadratique, associé à une fonction de coût quadratique définie par $L(\delta, \theta) = \sum_{i=1}^d (\delta_i - \theta_i)^2$. Ce travail basé principalement sur l'étude de la minimaxité des estimateurs de type $\hat{\theta}_\phi = (\hat{\theta}_{1\phi}, \hat{\theta}_{2\phi}, \dots, \hat{\theta}_{d\phi})$ avec

$$\hat{\theta}_{i\phi} = \left(1 - \phi \left(\|Z\|_p \right) / \left\{ \|Z\|_p^{2-\alpha} |Z_i|^\alpha \right\} \right) Z_i, \quad (1.24)$$

où $\|Z\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^d |Z_i|^p \right\}^{1/p}$. Notons que le facteur de rétrécissement dans (1.24), est symétrique par rapport aux variables Z_i . Zhou et Hwang [44], ont montré (Théorème 4), que l'estimateur à rétrécisseur dont le facteur de rétrécissement est symétrique, est dominé par l'estimateur déduit de sa partie positive. Ainsi la minimaxité de l'estimateur $\hat{\theta}_\phi$ entraîne la minimaxité de l'estimateur $\hat{\theta}_\phi^+$.

1.5.1 Minimaxité

Lemme 1.28 (Maruyama [32]). Si $\phi(v)$ est absolument continue. Alors la fonction de risque de l'estimateur $\hat{\theta}_\phi$ est

$$E \left[\left\| \hat{\theta}_\phi - \theta \right\|_2^2 \right] = d + E \left[\phi \left(\|Z\|_p \right) \|Z\|_p^{\alpha-p-2} \left\{ \sum_i |Z_i|^{p-\alpha} \right\} \psi_\phi(Z) \right] \quad (1.25)$$

où

$$\begin{aligned} \psi_\phi(Z) = & \phi\left(\|Z\|_p\right) \|Z\|_p^{p+\alpha-2} \frac{\sum_i |Z_i|^{2(1-\alpha)}}{\sum_i |Z_i|^{p-\alpha}} - 2(1-\alpha) \|Z\|_p^p \frac{\sum_i |Z_i|^{-\alpha}}{\sum_i |Z_i|^{p-\alpha}} \\ & - 2\left\{\alpha - 2 + \|Z\|_p \phi'\left(\|Z\|_p\right) / \phi\left(\|Z\|_p\right)\right\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Soit $0 \leq \alpha \leq 1$, alors

$$\sum_{i=1}^d |Z_i|^{-\alpha} \geq d \frac{\sum_{i=1}^d |Z_i|^{-\alpha+p}}{\sum_{i=1}^d |Z_i|^p} = d \frac{\sum_{i=1}^d |Z_i|^{-\alpha+p}}{\|Z\|_p^p}.$$

Pour $p > 0$ et

$$\|Z\|_p^{p+\alpha-2} \frac{\sum_i |Z_i|^{2(1-\alpha)}}{\sum_i |Z_i|^{p-\alpha}} = \frac{\sum_i q_i^{2(1-\alpha)/p}}{\sum_{i=1}^d q_i^{(p-\alpha)/p}} \leq \max\left(1, d^{(p+\alpha-2)/p}\right),$$

où $q_i = |Z_i|^p / \|Z\|_p^p$. En utilisant les inégalités précédentes dans (1.26), on trouve

$$\psi_\phi(Z) \leq \Psi_\phi\left(\|Z\|_p\right), \text{ où}$$

$$\Psi_\phi(v) = \max\left(1, d^{(p+\alpha-2)/p}\right) \phi(v) - 2\{d-2-\alpha(d-1)\} - 2v\phi'(v) / \phi(v).$$

Ainsi, une condition suffisante pour que $E\left[\left\|\hat{\theta}_\phi - \theta\right\|_2^2\right] \leq d$ (avec $\phi \geq 0$) est $\Psi_\phi(v) \leq 0$ pour tout $v \geq 0$.

Il est clair que $\phi(v) = c$ où $0 < c < 2(d-2)\gamma(d, p, \alpha)$, avec

$$\gamma(d, p, \alpha) = \min\left(1, d^{(2-p-\alpha)/p}\right) \{1 - \alpha\{d-1\} / \{d-2\}\} \quad (1.27)$$

satisfait la condition : $\Psi_\phi(v) \leq 0$.

Plus généralement, nous avons le théorème suivant qui donne une condition suffisante de minimaxité.

Théorème 1.29 (Maruyama [32]). *Supposons $d \geq 3$ et $0 \leq \alpha < (d-2)/(d-1)$. Et*

soit $\phi(v)$ absolument continue et

$$0 \leq \phi(v) \leq 2(d-2)\gamma(d, p, \alpha)$$

où $\gamma(d, p, \alpha)$ est donné par (1.27). De plus, pour tout v tel que $\phi(v) < 2(d-2)\gamma(d, p, \alpha)$

$$g_\phi(v) = \frac{v^{d-2-\alpha(d-1)}\phi(v)}{2(d-2)\gamma(d, p, \alpha) - \phi(v)}$$

est supposée non-décroissante. Aussi s'il existe $v_* > 0$ tel que $\phi(v) = 2(d-2)\gamma(d, p, \alpha)$, pour tout $v \geq v_*$. Alors $\hat{\theta}_\phi$ est minimax.

Remarque 1.30 La solution de $\Psi_\phi(v) = 0$ où $g_\phi(v) = 1/\lambda$ pour tout $\lambda > 0$, est:

$$\phi_{DS}(v) = \frac{2(d-2)\gamma(d, p, \alpha)}{1 + \lambda v^{d-2-\alpha(d-1)}}.$$

1.6 Estimation dans le cas d'une distribution sphérique symétrique

Introduction.

Cette section se décompose en deux parties. Dans la première partie nous présentons des résultats généraux sur l'estimation de paramètres dans le cas des lois sphériques symétriques. Ce problème a été traité par plusieurs auteurs notamment Brandwein et Strawderman ([10], [11] et [12]) et Fourdrinier et Strawderman [18]...etc. Ces auteurs ont étudié des classes d'estimateurs qui dominent l'estimateur usuel X , en particulier l'estimateur de James-Stein, et plus particulièrement nous présentons un résumé des travaux de Fourdrinier et Strawderman [16]. Ce travail est basé sur l'estimation de la moyenne θ d'une distribution sphérique symétrique.

Plus précisément, soit (X, U) un vecteur aléatoire de loi sphérique symétrique autour de $(\theta, 0)$. La fonction de coût étant : $L(\delta, \theta) = \|\delta - \theta\|^2$.

L'estimateur classique de James-Stein est

$$\delta_{JS}^a = \left(1 - \frac{a}{X'X}\right) X.$$



Une autre classe qui peut répondre à ce problème (domination de X), c'est la classe des estimateurs de la forme

$$\delta_{JSR}^a = \left(1 - a \frac{U'U}{X'X}\right) X ,$$

appelée estimateur de James-Stein Robuste, et notée **JSR**.

Cette dernière classe a une propriété importante: A savoir, pour a bien choisi δ_{JSR}^a domine X pour toute distribution sphérique symétrique, avec des conditions sur les moments, (d'où la robustesse).

Dans la deuxième partie nous présentons une synthèse du papier de Fourdrinier et Strawderman [18]. Ils ont traité notamment de la minimaxité de l'estimateur de Bayes généralisé du paramètre de localisation d'une distribution sphérique symétrique, sous un coût quadratique.

1.6.1 Préliminaire

Nous rappelons dans ce qui suit quelques résultats sur les lois sphériques symétriques, qui nous serviront pour la suite.

Définition 1.31 Une loi P sur \mathbb{R}^n est dite radiale si elle est invariante par toute transformation orthogonale φ ; autrement dit la loi image $\varphi(P)$ est égale à P .

Définition 1.32 Soit $\theta \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'une loi P_θ sur \mathbb{R}^n est sphérique symétrique autour de θ , si elle est l'image d'une loi radiale par la translation du vecteur θ .

Théorème 1.33 Soit $\theta \in \mathbb{R}^n$, et soit P_θ une loi sur \mathbb{R}^n absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{R}^n . La loi P_θ est sphérique symétrique autour de θ si et seulement si, il existe une fonction g mesurable positive, telle que la fonction

$$x \mapsto g(\|x - \theta\|^2) \text{ soit une densité de } P_\theta \text{ par rapport à } \lambda.$$

Maintenant on suppose que $(X, U)'$ suit une distribution sphérique symétrique autour du paramètre $(\theta, 0)'$. La dimension des vecteurs X et θ est p et la dimension de U et 0 est k .

Lemme 1.34 Soit g une fonction vectorielle $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, et soit h une fonction à valeurs



dans \mathbb{R} . Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$ on a

$$E_\theta \left[h(U'U) (X - \theta)' g(X) \right] = -E_\theta \left[\frac{H(U'U)}{(U'U)^{k/2-1}} \operatorname{div} g(X) \right]$$

où H est l'intégrale indéfinie de la fonction $t \mapsto -\frac{1}{2}h(t)t^{k/2-1}$, nulle en 0. Avec la condition que les espérances ci-dessus existent.

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [16]. ■

Corollaire 1.35 Soit g une fonction vectorielle $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a

$$E_\theta \left[(U'U)^\alpha (X - \theta)' g(X) \right] = \frac{1}{k + 2\alpha} E_\theta \left[(U'U)^{\alpha+1} \operatorname{div} g(X) \right].$$

Avec la condition que les espérances ci-dessus existent. De plus

Si $\alpha = 0$

$$E_\theta \left[(X - \theta)' g(X) \right] = \frac{1}{k} E_\theta \left[(U'U) \operatorname{div} g(X) \right],$$

et, si $\alpha = 1$

$$E_\theta \left[(U'U) (X - \theta)' g(X) \right] = \frac{1}{k + 2} E_\theta \left[(U'U)^2 \operatorname{div} g(X) \right].$$

Démonstration. Le résultat découle du fait que, si $h(t) = t^\alpha$, alors l'intégrale indéfinie de $-\frac{1}{2}h(t)t^{k/2-1} = -\frac{1}{2}t^{k/2-1+\alpha}$ est nulle en 0, et $H(t) = -t^{k/2+\alpha}/(k+2\alpha)$. ■

Lemme 1.36 Supposons que $p \geq 2$. Si g et h deux fonctions mesurables à valeurs dans \mathbb{R} , alors pour tout $R > 0$ et pour chaque $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a

$$E_{R,\theta} \left[g(X'X) h(U'U) \right] = \int_0^1 h(R^2(1-u)) \int_0^1 \frac{1}{2} [g(R^2u + \|\theta\|^2 - 2\|\theta\|Ru^{1/2}v^{1/2}) \\ + g(R^2u + \|\theta\|^2 + 2\|\theta\|Ru^{1/2}v^{1/2})] B\left(\frac{1}{2}, \frac{p-1}{2}, dv\right) B\left(\frac{p}{2}, \frac{k}{2}, du\right).$$

Avec la condition que les espérances ci-dessus existent.

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [16]. ■

(v, v) : La dimension des vecteurs X et θ est p et la dimension de U et U est k .

Nous nous proposons d'estimer le paramètre inconnu θ , sous le coût quadratique $L(\delta, \theta) = \|\delta - \theta\|^2$.

L'estimateur classique de James-Stein est

$$\delta_{JS}^a = \left(1 - \frac{a}{X'X}\right) X \tag{1.28}$$

où a est une constante positive.

La proposition suivante montre que le risque des estimateurs de type δ_α^a existe si le moment d'ordre 2 de loi sphérique symétrique existe et $E_\theta \left(\frac{(U'U)^{2\alpha}}{X'X} \right) < \infty$.

Proposition 1.37 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, le risque de l'estimateur δ_α^a est

$$R(\delta_\alpha^a, \theta) = E_0 [X'X] + a^2 E_\theta \left[\frac{(U'U)^{2\alpha}}{X'X} \right] - 2a \frac{p-2}{k+2\alpha} E_\theta \left[\frac{(U'U)^{\alpha+1}}{X'X} \right]$$

Démonstration. Soit θ fixé dans \mathbb{R}^p . Il est facile de voir que

$$R(\delta_\alpha^a, \theta) = E_\theta [\|X - \theta\|^2] + a^2 E_\theta \left[\frac{(U'U)^{2\alpha}}{X'X} \right] - 2a E_\theta \left[\frac{(U'U)^\alpha (X - \theta)' X}{X'X} \right].$$

On note par $E_0 [X'X] = E_\theta [\|X - \theta\|^2]$ et d'après le Corollaire 1.35, en prenant $g(X) = \frac{X}{X'X}$, on trouve

$$E_\theta \left[\frac{(U'U)^\alpha (X - \theta)' X}{X'X} \right] = \frac{p-2}{k+2\alpha} E_\theta \left[\frac{(U'U)^{\alpha+1}}{X'X} \right]$$

la dernière égalité découle du fait que $\operatorname{div} \left(\frac{X}{X'X} \right) = \frac{p-2}{X'X}$. D'où le résultat ci-dessus.

■

Il est facile de déduire d'après la Proposition 1.37, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, la constante a qui minimise $R(\delta_\alpha^a, \theta)$ est

$$\hat{a}(\theta) = \frac{p-2}{k+2\alpha} \frac{E_\theta \left[\frac{(U'U)^{\alpha+1}}{X'X} \right]}{E_\theta \left[\frac{(U'U)^{2\alpha}}{X'X} \right]},$$

ainsi le risque correspondant est

$$R(\delta_\alpha^{\hat{a}}, \theta) = E_0 [X'X] - \left(\frac{p-2}{k+2\alpha} \right)^2 \frac{\left(E_\theta \left[\frac{(U'U)^{\alpha+1}}{X'X} \right] \right)^2}{E_\theta \left[\frac{(U'U)^{2\alpha}}{X'X} \right]}.$$

Nous remarquons que dans le cas de l'estimateur de James-Stein (i.e. $\alpha = 0$), la valeur

optimale de a qui minimise le risque dépend de θ , et est égale à

$$\hat{a}(\theta) = \frac{p-2}{k} \frac{E_{\theta} \left[\frac{(U'U)}{X'X} \right]}{E_{\theta} \left[\frac{1}{X'X} \right]},$$

par contre pour l'estimateur JSR , la valeur optimale de a qui minimise le risque ne dépend pas de θ , et est égale à

$$\hat{a} = \frac{p-2}{k+2}.$$

Cependant, notons que dans le cas de la loi normale $N(\theta, \sigma^2 I_{p+k})$, la valeur optimale de la constante a (pour l'estimateur δ_{JS}^a) ne dépend pas de θ et est égale à $\hat{a} = \frac{p-2}{k} E_0 [(U'U)] = (p-2) \sigma^2$.

En général pour que $\hat{a}(\theta)$ soit indépendant de θ , il est nécessaire que les deux variables $U'U$ et $\frac{1}{X'X}$ ne soient pas corrélées pour tout θ . Mais ce cas ne se vérifie que dans le cas d'une distribution normale (l'indépendance de X et U est une caractérisation de normalité dans le cas des distributions sphériques).

• **Bornes de $E_{\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$**

D'après la Proposition 1.37, les bornes des risques des estimateurs de type (1.28) et (1.29) sont liées avec les bornes de $E_{\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$ avec q entier. Les propositions suivantes donnent les bornes inférieure et supérieure de $E_{\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$.

Soit $R = (\|X - \theta\|^2 + U^2)^{1/2}$, et nous noterons par $E_{R,\theta}$ l'espérance suivant la loi uniforme $U_{R,\theta}$ dans la sphère $S_{R,\theta} = \{y \in \mathbb{R}^{p+k} / \|y - \theta\| = R\}$ de centre θ et de rayon R . Ainsi $E_{\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] = E \left\{ E_{R,\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] \right\}$, avec E désignant l'espérance suivant la distribution de rayon R .

Proposition 1.38 *Pour $p \geq 3$, pour tout $R \geq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, et pour tout entier q tel*

que $-k/2 < q$, l'espérance de $\frac{(U'U)^q}{X'X}$ conditionnellement à R est

$$E_{R,\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] = \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + q\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + q\right)} \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \frac{R^{2q}(R^2u + \|\theta\|^2)}{(R^2u + \|\theta\|^2)^2 - 4\|\theta\|^2 R^2uv} B\left(\frac{1}{2}, \frac{p-1}{2}, dv\right) B\left(\frac{p}{2}, \frac{k}{2} + q, du\right)$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 1.36 avec $g(X'X) = \frac{1}{X'X}$ et $h(U'U) = (U'U)^q$, pour $R \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}^p$ on a

$$E_{R,\theta} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] = R^{2q} \int_0^1 (1-u)^q \\ \times \left[\int_0^1 \frac{R^2u + \|\theta\|^2}{(R^2u + \|\theta\|^2)^2 - 4\|\theta\|^2 R^2uv} B\left(\frac{1}{2}, \frac{p-1}{2}, dv\right) \right] B\left(\frac{p}{2}, \frac{k}{2}, du\right)$$

en introduisant $(1-u)^q$ dans la distribution $B\left(\frac{p}{2}, \frac{k}{2}, du\right)$, on a le résultat. ■

Dans le cas particulier $\theta = 0$, on a le corollaire suivant:

Corollaire 1.39 *Sous les conditions de la Proposition 1.38, on a*

$$E_{R,0} \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] = \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + q\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + q\right)} \frac{p+k+2q-2}{p-2} R^{2q-2},$$

et dans les cas particuliers: $q = 0, 1$ and 2 , on a

$$E_{R,0} \left[\frac{1}{X'X} \right] = \frac{p+k-2}{p-2} \frac{1}{R^2} \\ E_{R,0} \left[\frac{U'U}{X'X} \right] = \frac{k}{p-2} \\ E_{R,0} \left[\frac{(U'U)^2}{X'X} \right] = \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} R^2.$$

La proposition suivante donne une borne inférieure de $E_\theta \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$.

Proposition 1.40 Soit q un entier tel que $q > -k/2$. Si $p \geq 5$ alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a

$$E_\theta \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] \geq \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + q\right) (p+k+2q-2)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + q\right) (p-2)} E \left[\frac{R^{2q}}{R^2 + \frac{p+k+2q-4}{p-4} \|\theta\|^2} \right].$$

Pour $q = 0, 1$ et 2 , on déduit immédiatement le corollaire suivant

Corollaire 1.41 Si $p \geq 5$ alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a

$$E_\theta \left[\frac{1}{X'X} \right] \geq \frac{p+k-2}{p-2} E \left[\frac{1}{R^2 + \frac{p+k-4}{p-4} \|\theta\|^2} \right]$$

$$E_\theta \left[\frac{U'U}{X'X} \right] \geq \frac{k}{p-2} E \left[\frac{R^2}{R^2 + \frac{p+k-2}{p-4} \|\theta\|^2} \right]$$

$$E_\theta \left[\frac{(U'U)^2}{X'X} \right] \geq \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} E \left[\frac{R^4}{R^2 + \frac{p+k-2}{p-4} \|\theta\|^2} \right]$$

Une borne supérieure de $E_\theta \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$ est donnée par la proposition suivante

Proposition 1.42 Soit q un entier tel que $-k/2 < q$. Si $p \geq 6$ alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, une borne supérieure de $E_\theta \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$ est

$$E_\theta \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right] \leq \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + q\right) (p+k+2q-2)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+k}{2} + q\right) (p-2)} E \left[\frac{R^{2q}}{R^2 + \frac{(p+k+2q-2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right].$$

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [16]. ■

Dans le cas particulier $q = 0, 1$, et 2 on a le corollaire suivant

Corollaire 1.43 Si $p \geq 6$ alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a

$$E_{\theta} \left[\frac{1}{X'X} \right] \leq \frac{p+k-2}{p-2} E \left[\frac{1}{R^2 + \frac{(p+k-2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right]$$

$$E_{\theta} \left[\frac{U'U}{X'X} \right] \leq \frac{k}{p-2} E \left[\frac{R^2}{R^2 + \frac{(p+k)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right]$$

$$E_{\theta} \left[\frac{(U'U)^2}{X'X} \right] \leq \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} E \left[\frac{R^4}{R^2 + \frac{(p+k+2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right].$$

Remarque 1.44 Toutes les bornes qui sont données dans cette section sont exactes en $\theta = 0$.

• **Bornes des risques de l'estimateur de JS et de l'estimateur JSR**

Dans cette partie nous donnons des bornes inférieures et supérieures des risques des estimateurs de JS définis en (1.28) et des estimateurs JSR définis en (1.29). les valeurs de ces risques correspondant respectivement au cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ dans la Proposition 1.37, ainsi

$$R(\delta_{JS}^a, \theta) = E_0 [X'X] + a^2 E_{\theta} \left[\frac{1}{X'X} \right] - 2a \frac{p-2}{k} E_{\theta} \left[\frac{U'U}{X'X} \right] \quad (1.30)$$

$$R(\delta_{JSR}^a, \theta) = E_0 [X'X] + \left(a^2 - 2a \frac{p-2}{k+2} \right) E_{\theta} \left[\frac{(U'U)^2}{X'X} \right]. \quad (1.31)$$

Il est clair d'après la formule (1.31) que l'estimateur δ_{JSR}^a domine l'estimateur usuel X quand $0 < a < 2(p-2)/(k+2)$. Dans ce cas les bornes de $R(\delta_{JS}^a, \theta)$ et $R(\delta_{JSR}^a, \theta)$ sont déduites immédiatement à partir des Corollaires 1.41 et 1.43.



Proposition 1.45 Si $p \geq 6$ alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a

$$E_0 [X'X] + a^2 \frac{p+k-2}{p-2} E \left[\frac{1}{R^2 + \frac{p+k-4}{p-4} \|\theta\|^2} \right]$$

$$- 2a E \left[\frac{R^2}{R^2 + \frac{(p+k)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right] \leq R(\delta_{JS}^a, \theta)$$

et

$$R(\delta_{JS}^a, \theta) \leq E_0 [X'X] + a^2 \frac{p+k-2}{p-2} E \left[\frac{1}{R^2 + \frac{(p+k-2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right]$$

$$- 2a E \left[\frac{R^2}{R^2 + \frac{p+k-2}{p-4} \|\theta\|^2} \right]$$

et pour $R(\delta_{JSR}^a, \theta)$ on a les bornes suivantes:

$$E_0 [X'X] + \left(a^2 - 2a \frac{p-2}{k+2} \right) \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} E \left[\frac{R^4}{R^2 + \frac{(p+k+2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \right]$$

$$\leq R(\delta_{JSR}^a, \theta)$$

et

$$R(\delta_{JSR}^a, \theta) \leq E_0 [X'X] + \left(a^2 - 2a \frac{p-2}{k+2} \right) \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} E \left[\frac{R^4}{R^2 + \frac{(p+k)}{(p-4)} \|\theta\|^2} \right]$$

Remarque 1.46 Toutes les bornes données ci-dessus sont exactes en $\theta = 0$, car elles sont déduites à partir des bornes de $E_\theta \left[\frac{(U'U)^q}{X'X} \right]$, qui sont exactes en $\theta = 0$. Cependant, il est souvent souhaitable d'avoir des bornes en fonction des moments de R^2 .

En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction $R^{2q}/(R^2 + A)$, où q est un entier fixé et A une constante non-négative fixée, on trouve

$$\frac{(E[R^{2q-2}])^2}{E[R^{2q-2}] + AE[R^{2q-4}]} \leq E\left[\frac{R^{2q}}{R^2 + A}\right] \leq \frac{E[R^{2q}] E[R^{2q-2}]}{E[R^{2q}] + AE[R^{2q-2}]}$$

Alors d'après les Corollaires 1.41 et 1.43, quand $p \geq 6$, on trouve les bornes suivantes

$$\frac{p+k-2}{p-2} \frac{\left(E\left[\frac{1}{R^2}\right]\right)^2}{E\left[\frac{1}{R^2}\right] + \frac{p+k-4}{p-4} \|\theta\|^2} \leq E_\theta\left[\frac{1}{X'X}\right]$$

et

$$E_\theta\left[\frac{1}{X'X}\right] \leq \frac{p+k-2}{p-2} \frac{E\left[\frac{1}{R^2}\right]}{1 + \frac{(p+k-2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2 E\left[\frac{1}{R^2}\right]},$$

et pour $E_\theta\left[\frac{U'U}{X'X}\right]$ on a les bornes suivantes:

$$\frac{k}{p-2} \frac{1}{1 + \frac{p+k-2}{p-4} \|\theta\|^2 E\left[\frac{1}{R^2}\right]} \leq E_\theta\left[\frac{U'U}{X'X}\right]$$

et

$$E_\theta\left[\frac{U'U}{X'X}\right] \leq \frac{k}{p-2} \frac{E[R^2]}{E[R^2] + \frac{(p+k)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2}$$

et finalement pour $E_\theta\left[\frac{(U'U)^2}{X'X}\right]$ on a les bornes suivantes:

$$\frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} \frac{(E[R^2])^2}{E[R^2] + \frac{p+k}{p-4} \|\theta\|^2} \leq E_\theta\left[\frac{(U'U)^2}{X'X}\right]$$

et

$$E_\theta\left[\frac{(U'U)^2}{X'X}\right] \leq \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} \frac{E[R^4] E[R^2]}{E[R^4] + \frac{(p+k+2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2 E[R^2]}.$$

Nous remarquons aussi que toutes les bornes ci-dessus sont exactes pour $\theta = 0$. Il est facile de déduire des bornes des risques des estimateurs de JS et de l'estimateur JSR en terme de moment de R^2 , qui sont exactes en $\theta = 0$.

Proposition 1.47 *Si $p \geq 6$ alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a*

$$E_0 [X'X] + a^2 \frac{p+k-2}{p-2} \frac{\left(E \left[\frac{1}{R^2} \right]\right)^2}{E \left[\frac{1}{R^2} \right] + \frac{p+k-4}{p-4} \|\theta\|^2} - 2a \frac{E[R^2]}{E[R^2] + \frac{(p+k)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} \leq R(\delta_{JS}^a, \theta)$$

et

$$R(\delta_{JS}^a, \theta) \leq E_0 [X'X] + a^2 \frac{p+k-2}{p-2} \frac{E \left[\frac{1}{R^2} \right]}{1 + \frac{(p+k-2)(p-6)}{p-4} \|\theta\|^2} E \left[\frac{1}{R^2} \right] - 2a \frac{1}{1 + \frac{p+k-2}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} E \left[\frac{1}{R^2} \right]$$

et pour $R(\delta_{JSR}^a, \theta)$ on a les bornes suivantes:

$$E_0 [X'X] + \left(a^2 - 2a \frac{p-2}{k+2}\right) \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} \frac{E[R^4] E[R^2]}{E[R^4] + \frac{(p+k+2)(p-6)}{(p-2)^2} \|\theta\|^2} E[R^2] \leq R(\delta_{JSR}^a, \theta)$$

et

$$R(\delta_{JSR}^a, \theta) \leq E_0 [X'X] + \left(a^2 - 2a \frac{p-2}{k+2}\right) \frac{k(k+2)}{(p+k)(p-2)} \frac{(E[R^2])^2}{E[R^2] + \frac{p+k}{p-4} \|\theta\|^2}.$$

• **Domination de l'estimateur de JS par l'estimateur JSR**

D'après la formule (1.31), on peut voir que la valeur optimale de la constante a pour laquelle le risque de l'estimateur δ_{JSR} est minimal, vaut : $(p-2)/(k+2)$.

Ainsi le risque de l'estimateur optimale δ_{JSR}^{opt} est

$$R(\delta_{JSR}^{opt}, \theta) = E_0[X'X] - \left(\frac{p-2}{k+2}\right)^2 E_\theta \left[\frac{(U'U)^2}{X'X} \right] \quad (1.32)$$

Le théorème suivant fourni une condition suffisante de domination de l'estimateur δ_{RJS}^{opt} à l'estimateur de James-Stein δ_{JS}^a .

Théorème 1.48 *L'estimateur de James-Stein Robuste optimale δ_{JSR}^{opt} domine uniformément (en θ) tous les estimateurs de James-Stein δ_{JS}^a , si pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, on a*

$$\frac{\left(E_\theta \left[\frac{U'U}{X'X} \right]\right)^2}{E_\theta \left[\frac{(U'U)^2}{X'X} \right] E_\theta \left[\frac{1}{X'X} \right]} < \left(\frac{k}{k+2}\right)^2 \quad (1.33)$$

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [16] ■

La condition (1.33) peut être difficile à vérifier directement. Le corollaire suivant donne une condition plus simple à vérifier que la condition du Théorème 1.48.

Corollaire 1.49 *Pour $p \geq 6$, une condition suffisante pour que l'estimateur δ_{JSR}^{opt} domine uniformément (en θ) tous les estimateurs δ_{JS}^a est:*

$$\frac{\left(E \left[\frac{R^2}{R^2 + [((p+k)(p-6))/(p-2)^2] \|\theta\|^2} \right]\right)}{E \left[\frac{R^4}{R^2 + [(p+k)/(p-4)] \|\theta\|^2} \right] E \left[\frac{1}{R^2 + [(p+k-4)/(p-4)] \|\theta\|^2} \right]} < \left(\frac{k}{k+2}\right) \left(\frac{p+k-2}{p+k}\right). \quad (1.34)$$

Le corollaire suivant fourni une condition suffisante de domination pour $\theta = 0$.

Corollaire 1.50 *L'estimateur optimal de James-Stein en $\theta = 0$ est $\delta_{JS}^{a_0}$, où*

$$a_0 = (p-2)/(p+k-2) \left\{ \frac{1}{E \left[\frac{1}{R^2} \right]} \right\}. \text{ Alors L'estimateur optimale } \delta_{JSR}^{opt} \text{ domine}$$

l'estimateur δ_{JS}^{ao} en $\theta = 0$, si et seulement si

$$E[R^2] E\left[\frac{1}{R^2}\right] > \frac{k+2}{k} \frac{p+k}{p+k-2} \quad (1.35)$$

Démonstration. Découle immédiatement du corollaire précédent. ■

La condition de domination de l'estimateur δ_{JSR}^{opt} à l'estimateur δ_{JS}^a , pour $\|\theta\|$ à l'infini, est déduit à partir de la formule (1.34) en divisant le numérateur et le dénominateur par $\|\theta\|^4$.

Corollaire 1.51 Pour $p \geq 7$, l'estimateur optimale de James-Stein Robuste δ_{JSR}^{opt} domine tous les estimateurs δ_{JS}^a pour $\|\theta\|$ à l'infini si

$$\frac{(E[R^2])^2}{E[R^4]} < \frac{k}{k+2} \frac{(p-4)^2 (p-6)^2 p+k-2}{(p-2)^2 p+k-4}. \quad (1.36)$$

• Exemples et contre exemples

Cette section contient des exemples et des contre exemples où l'estimateur de James-Stein Robuste δ_{JSR}^{opt} domine l'estimateur de James-Stein δ_{JS}^a .

Condition en $\theta = 0$: Nous donnons trois contre exemples où l'estimateur Optimale de James-Stein Robuste δ_{JSR}^{opt} ne domine pas l'estimateur de James-Stein δ_{JS}^a et un exemple qui montre que l'estimateur δ_{JSR}^{opt} domine l'estimateur δ_{JS}^a .

1. Si $(X, U)'$ a une loi normale de matrice de variance covariance la matrice I_{p+k} , alors R^2 a une loi χ_{p+k}^2 , et la condition (1.35) devient

$$\frac{p+k}{p+k-2} > \frac{k+2}{k} \frac{p+k}{p+k-2}$$

qui n'est jamais satisfaite.

2. Si $(X, U)'$ a une loi uniforme sur la sphère $S_{R_0} = \{y \in \mathbb{R}^{p+k} / \|y\| = R_0\}$ de rayon R_0 et de centre 0, alors la condition (1.35) devient

$$1 > \frac{k+2}{k} \frac{p+k}{p+k-2}$$

qui n'est pas satisfaite pour tous k et p .

3. Si $(X, U)'$ a une loi uniforme sur la Boule $B_{R_0} = \{y \in \mathbb{R}^{p+k} / \|y\| \leq R_0\}$ de rayon R_0 et de centre 0, alors la condition (1.35) devient

$$\frac{p+k}{p+k-2} > \frac{k+2}{k}$$

qui n'est pas satisfaite pour tous k et $p \geq 3$.

4. Si $R^2 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la condition (1.35) est équivalente à

$$1 < \alpha < \frac{(k+2)(p+k)}{2(p+2k)}$$

C'est un exemple de domination de l'estimateur δ_{JSR}^{opt} à l'estimateur δ_{JS}^a en $\theta = 0$

(Remarquons que $\frac{(k+2)(p+k)}{2(p+2k)} > 1$ pour $k > 2$ et toutes les valeurs de p). Notons aussi que cette condition est indépendante de β .

Condition en $\|\theta\|$ à l'infini : Si $R^2 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la condition (1.36) est équivalente à

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} < \frac{k}{k+2} \frac{(p-4)^2 (p-6)^2}{(p-2)^2} \frac{p+k-2}{p+k-4}$$

Il est clair que le membre à gauche de l'inégalité croît de 0 à 1 quand α croît de 0 à l'infini.

Alors l'estimateur δ_{JSR}^{opt} domine l'estimateur δ_{JS}^a pour des petites valeurs de α .

Domination uniforme en θ : Il est clair qu'il est plus difficile d'obtenir la domination uniforme (en $\theta \in \mathbb{R}^p$) de l'estimateur δ_{JSR}^{opt} à l'estimateur δ_{JS}^a .

On considère alors que $P(R^2 = \lambda) = \alpha = 1 - P(R^2 = H\lambda)$, pour λ fixé et $H > 0$ et on a le résultat suivant:

Proposition 1.52 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, tout $\lambda > 0$ et pour tout p et k suffisamment grands, il existe H_0 tel que pour tout $H > H_0$ l'estimateur δ_{JSR}^{opt} domine uniformément et simultanément tous les estimateurs δ_{JS}^a*

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [16]. ■

1.6.3 Minimaxité de l'estimateur de Bayes généralisé

Soit X un vecteur aléatoire suivant une distribution sphérique symétrique dans \mathbb{R}^p autour d'un vecteur inconnu $\theta \in \mathbb{R}^p$, i.e :

$$X \sim f(\|X - \theta\|^2) \quad (1.37)$$

Supposons que θ suit une loi à priori $\pi(\theta)$, et soit la fonction de coût quadratique donnée par la formule (1.1). On suppose aussi que $E_\theta(\|X\|^2) < +\infty$.

L'estimateur de Bayes généralisé étant la moyenne à postériori, il est ainsi donné par

$$\begin{aligned} \delta_\pi(X) &= E_\theta(\theta/X) = X + E_\theta(\theta - X/X) \\ &= X + \int_{\mathbb{R}^p} (\theta - X) \mathcal{L}(\theta/X) d\theta \\ &= X + \frac{1}{m(X)} \int_{\mathbb{R}^p} (\theta - X) f(\|X - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (1.38)$$

où

$$m(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f(\|x - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta \quad (1.39)$$

est la loi marginale de variable aléatoire X .

Il est bien connu depuis Stein [39], que dans le cas gaussien ($f(x) \propto \exp -x^2/2\sigma^2$, σ^2 connu), la superharmonicité de $\sqrt{m(x)}$ est une condition suffisante de la minimaxité de l'estimateur $\delta_\pi(X)$.

Dans le cas non gaussien, la minimaxité de l'estimateur $\delta_\pi(X)$ a été étudiée par plusieurs auteurs notamment Strawderman [42] et Brandwin et Strawderman [11]. La plupart de ces auteurs ont considéré des estimateurs de type "Baranchik" qui sont de la forme $X - \frac{a r(\|X\|^2)}{\|X\|^2} X$. et en déduisant la minimaxité pour a dans un intervalle borné de \mathbb{R} , et par la propriété de la monotonie de la fonction $r(t)$. Seulement quelques auteurs ont étudié la minimaxité des estimateurs de bayes, parmi eux Strawderman [42], Maruyama [30] et Fourdrinier, Strawderman et Wells [17]. Ces auteurs ont établi la minimaxité des estimateurs de type "Baranchik", et ils ont étudié seulement dans le cas où la densité f est une mixture d'une distribution normale et d'une distribution de la variance σ^2 .

C'est-à-dire:

$$f(x - \theta) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{p/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|x - \theta\|^2\right) dG(\sigma) \quad (1.40)$$

où la fonction $G(\cdot)$ est complètement connue sur $]0, +\infty[$.

L'essentiel de ce travail est d'établir la minimaxité de l'estimateur de bayes généralisé pour une classe plus large des lois sphériques symétriques, qui ne sont pas restreints à la distribution (1.40).

• Estimateur de Bayes et fonction de risque

Supposons que la densité de X est donnée par (1.37). Soit, pour tout $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_t^{+\infty} f(u) du, \quad (1.41)$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$M(x) = \int_{\mathbb{R}^p} F(\|x - \theta\|^2) \pi(\theta) d\theta. \quad (1.42)$$

Alors, l'estimateur de bayes généralisé défini en (1.38), peut s'écrire sous la forme

$$\delta_\pi(X) = X + \frac{\nabla M(X)}{m(X)} \quad (1.43)$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient.

Comme X est minimax alors $\delta_\pi(X)$ et aussi minimax si la différence des risques

$$\Delta_\theta(\delta_\pi) = E_\theta [\|\delta_\pi(X) - \theta\|^2 - \|X - \theta\|^2], \quad (1.44)$$

est non-positive.

Il est clair que la différence des risques de l'estimateur $\delta(X) = X + g(X)$ et X est

$$\Delta_\theta(\delta) = E_\theta [\|\delta(X) - \theta\|^2 - \|X - \theta\|^2] = E_\theta [2(X - \theta) \cdot g(X) + \|g(X)\|^2]. \quad (1.45)$$

Lemme 1.53 Soit g une fonction faiblement différentiable de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p . Alors

$$E_\theta [(X - \theta) \cdot g(X)] = E_\theta \left[\frac{F(\|X - \theta\|^2)}{f(\|X - \theta\|^2)} \operatorname{div} g(X) \right] \quad (1.46)$$

où les deux espérances sont supposées finies.

La preuve de ce lemme est basé sur le Théorème de Stokes.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} E_\theta [(X - \theta) \cdot g(X)] &= \int_{\mathbb{R}^p} (x - \theta) \cdot g(x) f(\|X - \theta\|^2) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{S_{r,\theta}} (x - \theta) \cdot g(x) d\sigma_{r,\theta}(x) f(r^2) dr \end{aligned}$$

où $\sigma_{r,\theta}$ est la mesure uniforme sur la sphère $S_{r,\theta}$ de centre 0 et de rayon r . En introduisant le vecteur extérieur unitaire $\eta(x) = \frac{x - \theta}{\|x - \theta\|}$, et en utilisant le Théorème de Stokes sous la forme

$$\int_{S_{r,\theta}} \eta(x) \cdot g(x) d\sigma_{r,\theta}(x) = \int_{B_{r,\theta}} \operatorname{div} g(x) dx ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} E_\theta [(X - \theta) \cdot g(X)] &= \int_0^{+\infty} \int_{S_{r,\theta}} \frac{(x - \theta)}{\|x - \theta\|} \cdot g(x) d\sigma_{r,\theta}(x) f(r^2) dr \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{B_{r,\theta}} \operatorname{div} g(x) dx r f(r^2) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\|x-\theta\|}^{+\infty} r f(r^2) dr \operatorname{div} g(x) dx . \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du Théorème de Fubini. Par le changement de variable

$u = r^2$, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \int_{\|x-\theta\|^2}^{+\infty} f(u) du \operatorname{div} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} F(\|x-\theta\|^2) \operatorname{div} g(x) dx ,$$

d'où le résultat. ■

Le lemme suivant découle immédiatement du Lemme 1.53.

Lemme 1.54 *La différence des risques exprimée en (1.45) vaut*

$$\Delta_{\theta}(\delta) = E_{\theta} \left[2 \frac{F(\|X-\theta\|^2)}{f(\|X-\theta\|^2)} \operatorname{div} g(X) + \|g(X)\|^2 \right] \quad (1.47)$$

Une condition suffisante pour que l'estimateur $\delta(X)$ soit minimax est fournie par le lemme suivant:

Lemme 1.55 *Supposons que $\frac{F(t)}{f(t)} \geq c > 0$ pour tout $t \geq 0$ et que $E_{\theta} [\|g(X)\|^2] < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$. Alors l'estimateur $\delta(X)$ est minimax à condition que*

$$2c \operatorname{div} g(x) + \|g(x)\|^2 \leq 0 , \quad (1.48)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

Démonstration. Découle immédiatement du Lemme 1.54. ■

Appliquant le Lemme 1.55 à l'estimateur de bayes $\delta_{\pi}(X)$ donné par la formule (1.43), on obtient le lemme suivant

Lemme 1.56 *Supposons que $\frac{F(t)}{f(t)} \geq c > 0$ pour tout $t \geq 0$ et que*

$E_{\theta} \left[\left\| \frac{\nabla M(X)}{m(X)} \right\|^2 \right] < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$. Alors l'estimateur de bayes $\delta_{\pi}(X)$ donné par la formule (1.43) est minimax à condition que

$$2c \frac{\Delta M(x)}{m(x)} - 2c \frac{\nabla M(x) \cdot \nabla m(x)}{m^2(x)} + \frac{\|\nabla M(x)\|^2}{m^2(x)} \leq 0 , \quad (1.49)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

Démonstration. Découle immédiatement de la définition de la fonction $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla M(x)}{m(x)} \right)$.

■

Maintenant supposons que la loi à priori $\pi(\theta)$ est à symétrie sphérique, qui est par un abus de notation de la forme

$$\pi(\|\theta\|^2) \quad (1.50)$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $m(x)$ et $M(x)$ sont des fonctions de $t = \|x\|^2$, on notera par

$$m(x) = m(t) \text{ et } M(x) = M(t)$$

d'où

$$\nabla m(x) = 2x m'(t) \text{ et } \nabla M(x) = 2x M'(t) . \quad (1.51)$$

Le lemme suivant montre que $M'(t) \leq 0$ pour des lois $\pi(\|\theta\|^2)$ unimodales.

Lemme 1.57 *Supposons que $\pi'(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Alors $M'(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [18]. ■

Dans ce qui suit nous présentons quelques résultats essentiels du papier de Fourdrinier et Strawderman [18].

Lemme 1.58 *Soit π une loi à priori de la forme (1.50). pour tout $x \in \mathbb{R}^p$*

$$x \cdot \nabla m(x) = -2 \int_0^\infty H(u, \|x\|^2) u^{p/2} f'(u) du$$

et

$$x \cdot \nabla M(x) = \int_0^\infty H(u, \|x\|^2) u^{p/2} f(u) du$$

où, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$

$$H(u, \|x\|^2) = \lambda(B) \int_{B_{\sqrt{u},x}} x \cdot \theta \pi'(\|\theta\|^2) dV_{\sqrt{u},x} \quad (1.52)$$

$V_{\sqrt{u},x}$ étant la distribution uniforme sur la boule $B_{\sqrt{u},x}$ de centre x et de rayon \sqrt{u} , et $\lambda(B)$ est le volume de la boule unité.

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [18]. ■

Lemme 1.59 Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction $H(u, \|x\|^2)$ donnée en (1.52) est non-décroissante en u si $\Delta\pi(\|\theta\|^2)$ est non-décroissante en $\|\theta\|^2$.

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [18]. ■

Lemme 1.60 Soit $h(\|\theta - x\|^2)$ une densité unimodale et soit $\psi(\theta)$ est une fonction symétrique. Alors

$$\int_0^\infty x \cdot \theta \psi(\theta) h(\|\theta - x\|^2) d\theta \geq 0 \quad (1.53)$$

dès que ψ est non négative.

Démonstration. Voir Fourdrinier et Strawderman [18]. ■

Théorème 1.61 Supposons que X suit une distribution sphérique symétrique dans \mathbb{R}^p , de densité $f(\|\theta - x\|^2)$. Et soit θ ayant une loi à priori $\pi(\|\theta\|^2)$ superharmonique, telle que $\pi(\|\theta\|^2)$ est non-croissante et $\Delta\pi(\|\theta\|^2)$ est non-décroissante en $\|\theta\|^2$. Si $\frac{f'(t)}{f(t)}$ est non-décroissante, $\frac{F(t)}{f(t)} \geq c > 0$ pour tout $t \geq 0$, et

$$\int_0^\infty f(t) t^{p/2} dt \leq 4c \int_0^\infty -f'(t) t^{p/2} dt < \infty. \quad (1.54)$$

l'estimateur de bayes $\delta_\pi(X)$ est minimax.

Remarque 1.62 Comme $\frac{f'(t)}{f(t)}$ est non-décroissante entraine que $\frac{F(t)}{f(t)}$ est aussi non-décroissante, la borne inférieure c , est égale à $\frac{F(0)}{f(0)}$.

En effet on peut écrire

$$\frac{f(t)}{F(t)} = 2 \frac{\int_t^\infty \frac{-f'(u)}{f(u)} f(u) du}{\int_t^\infty f(u) du} = 2 E_t \left[\frac{-f'(u)}{f(u)} \right],$$

où E_t désigne l'espérance associée à une densité proportionnelle à $f(u) I_{]t, +\infty[}(u)$.

Chapitre 2

Propriétés asymptotiques des estimateurs de James-Stein

Introduction.

Dans ce chapitre nous présentons deux travaux essentiels, qui ont traité de la limite des rapports des risques de l'estimateur de James-Stein à celui de l'estimateur du maximum du vraisemblance, le premier a été fait par Casella et Hwang [14] dans le cas où la variance de la population est connue. Le deuxième a été fait par Li Sun [27] qui a adopté le modèle ANOVA1, dans le cas où la variance de la population est inconnue.

Casella et Hwang [14]; ont pris le modèle $X \sim N_p(\theta, I_p)$, θ étant le paramètre à estimer. Ils ont montré que sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c$ ($c > 0$); les rapports de risque de l'estimateur de James-Stein δ_{JS} et de sa partie positive δ_{JS}^+ , à celui de l'estimateur des moindres carrés, tendent vers la même limite $\frac{c}{1+c}$, quand p tend vers l'infini. Pour assurer ce dernier résultat, ils ont encadré le rapport de risque $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$, en utilisant un lemme fondamentale basé sur l'inégalité de Jensen.

2.1 Limites des fonctions de risque des estimateurs de James-Stein

2.1.1 Cas où la variance de la population est connue

Soit X une variable aléatoire gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$.



Il est connu que les estimateurs δ_{JS} et δ_{JS}^+ , dominent l'estimateur du maximum de vraisemblance $\delta_0(X) = X$ pour tout θ . Le but de ce travail est de montrer que les deux estimateurs δ_{JS} et δ_{JS}^+ , dominent aussi l'estimateur du maximum de vraisemblance $\delta_0(X) = X$, quand p et $\|\theta\|^2$ tendent vers l'infini sous la condition: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c$ ($c > 0$). Casella et Hwang [14] ont établi le lemme suivant:

Lemme 2.1 (Casella et Hwang [14]). Soit $X \sim N_p(\theta, I_p)$, Si $p \geq 3$, on a

$$\frac{1}{p-2+\|\theta\|^2} \leq E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \leq \frac{1}{(p-2)} \frac{p}{(p+\|\theta\|^2)} \quad (2.1)$$

• **Bornes des rapports des risques**

Théorème 2.2 (Casella et Hwang [14]). Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c$, alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}.$$

Démonstration. Comme

$$R(X, \theta) = p, \text{ et } R(\delta_{JS}(X), \theta) = p - (p-2)^2 E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right)$$

alors

$$\frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)} = 1 - \frac{(p-2)^2}{p} E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right)$$

et d'après le lemme précédent (Lemme 2.1), on trouve

$$1 - \frac{p-2}{p+\|\theta\|^2} \leq \frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)} \leq 1 - \frac{(p-2)^2}{p} \frac{1}{p-2+\|\theta\|^2} \quad (2.2)$$

il est clair que la borne inférieure et la borne supérieure dans la formule (2.2), tendent vers la même limite $\frac{c}{1+c}$, quand p tend vers l'infini. ■

Remarque 2.3 Si $\|\theta\| = 0$, les bornes inférieure et supérieure sont égales à $\frac{2}{p}$, ainsi nous obtenons la valeur exacte du rapport $\frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$ qui tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

Comme la différence des deux bornes vaut $\frac{2(p-2)\|\theta\|^2}{p(p-2+\|\theta\|^2)(p+\|\theta\|^2)}$, nous remarquons

que l'approximation de la valeur exacte du rapport $\frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$ par ses bornes inférieure et supérieure est moins forte et s'amenuise de plus en plus quand p et $\|\theta\|^2$ croissent.

Le tableau suivant représente la borne inférieure, la valeur exacte du rapport $R = \frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$, et la borne supérieure du rapport pour différentes valeurs de p et $\|\theta\|^2$.

$\ \theta\ ^2$	$p = 3$	5	7	9	11	13	15	25	
0	<i>Inf</i>	0.6667	.4000	.2857	.2222	.1818	.1538	.1333	.0800
	<i>R</i>	.6667	.4000	.2857	.2222	.1818	.1538	.1333	.0800
	<i>Sup</i>	.6667	.4000	.2857	.2222	.1818	.1538	.1333	.0800
1	<i>Inf</i>	.7500	.5000	.3750	.3000	.2500	.2143	.1875	.1154
	<i>R</i>	.7584	.5046	.3774	.3014	.2508	.2148	.1879	.1155
	<i>Sup</i>	.8333	.5500	.4048	.3194	.2636	.2244	.1952	.1183
2	<i>Inf</i>	.8571	.6667	.5455	.4615	.4000	.3529	.3158	.2069
	<i>R</i>	.8933	.6940	.5625	.4726	.4075	.3582	.3197	.2081
	<i>Sup</i>	.9333	.7429	.6032	.5051	.4336	.3795	.3337	.2163
3	<i>Inf</i>	.9167	.7857	.6875	.6111	.5500	.5000	.4583	.3235
	<i>R</i>	.9563	.8262	.7181	.6338	.5671	.5131	.4686	.3273
	<i>Sup</i>	.9667	.8500	.7449	.6597	.5909	.5346	.4879	.3387
4	<i>Inf</i>	.9474	.8571	.7826	.7200	.6667	.6207	.5808	.4390
	<i>R</i>	.9775	.8951	.8158	.7475	.6892	.6393	.5961	.4459
	<i>Sup</i>	.9804	.9053	.8299	.7633	.7055	.6553	.6115	.4574
5	<i>Inf</i>	.9643	.9000	.8438	.7941	.7500	.7105	.6750	.5400
	<i>R</i>	.9861	.9310	.8736	.8208	.7733	.7308	.6927	.5494
	<i>Sup</i>	.9872	.9357	.8810	.8299	.7834	.7415	.7035	.5592
10	<i>Inf</i>	.9903	.9714	.9533	.9358	.9189	.9027	.8870	.8160
	<i>R</i>	.9966	.9822	.9654	.9482	.9313	.9148	.8988	.8258
	<i>Sup</i>	.9967	.9825	.9660	.9491	.9324	.9161	.9003	.8280
15	<i>Inf</i>	.9956	.9870	.9784	.9701	.9619	.9538	.9458	.9080
	<i>R</i>	.9985	.9920	.9844	.9764	.9683	.9603	.9524	.9142
	<i>Sup</i>	.9985	.9921	.9545	.9765	.9685	.9606	.9527	.9147

Le tableau montre que pour des petites valeurs de $\|\theta\|^2$, la borne inférieure donne une bonne approximation de la valeur exacte du rapport $\frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$; et pour des valeurs plus grandes, la borne supérieure donne une bonne approximation du rapport $\frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)}$.

• Partie positive de l'estimateur de James-Stein

Les résultats obtenus pour la partie positive de l'estimateur de James-Stein, sont similaires à ceux de l'estimateur de James-Stein. En effet le lemme suivant donne une valeur de la différence de risque de $\delta_{JS}^+(X)$ et $\delta_{JS}(X)$.

Lemme 2.4 (Casella et Hwang [14]).

$$R(\delta_{JS}^+(X), \theta) = R(\delta_{JS}(X), \theta) + E \left\{ \left[\|X\|^2 + (p-2)^2 \frac{1}{\|X\|^2} - 2p \right] I_{[0, p-2]}(\|X\|^2) \right\} \quad (2.3)$$

Théorème 2.5 (Casella et Hwang [14]). Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c$ ($c > 0$), alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}^+(X), \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}.$$

2.1.2 Cas où la variance de la population est inconnue

Dans cette partie nous résumons l'essentiel des travaux de Li Sun [27]. Le but étant l'estimation de la moyenne, d'une loi normale multidimensionnelle. Il a considéré le modèle ANOVA1 suivant:

$$(y_{ij} \mid \theta_j, \sigma^2) \sim N(\theta_j, \tau^2) \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

où $E(y_{ij}) = \theta_j$ pour le groupe j et $\text{var}(y_{ij}) = \tau^2$, est un paramètre inconnu

Soit la famille d'estimateurs

$$\delta_j = [1 - \rho(S^2, T^2)] (\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

où ρ est une fonction des deux variables indépendantes S^2 et T^2 :

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 \quad ; \quad T^2 = n \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \quad (2.5)$$

avec

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_j .$$

Nous remarquons que l'estimateur donné en (2.4), rétrécit l'estimateur du maximum de vraisemblance vers \bar{y} au lieu de 0.

• Fonctions de risque et estimateur de James-Stein

Nous donnons au préalable le lemme suivant

Lemme 2.6 (Li Sun [27]). Soit $K \sim P(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre λ , avec $\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2$. Pour S^2, T^2 donnés en (2.5), on a

$$\begin{aligned} a) \quad E(f(S^2, T^2)) &= E\{f(\tau^2 \chi_N^2, \tau^2 \chi_{2K+m-1}^2)\} \\ b) \quad E\left\{g(S^2, T^2) \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})(\bar{y}_j - \bar{y})\right\} &= \frac{2\tau^2}{n} E\{K g(\tau^2 \chi_N^2, \tau^2 \chi_{2K+m-1}^2)\} \end{aligned}$$

avec $N = (n-1)m$ et pour toute fonction f, g à deux variables, telle que les espérances en a) et b) existent.

Démonstration. Il est clair d'après (2.5), que S^2 et T^2 sont indépendantes. Il est évident aussi d'après le Théorème 4.1 et la Proposition 4.2 de l'Appendice que $\frac{S^2}{\tau^2} \sim \chi_N^2$ (avec $N = (n-1)m$), suit la loi du Khi-deux centrée à N degrés de liberté; et pour θ, τ^2 donnés, le rapport $\frac{T^2}{\tau^2} \sim \chi_{m-1}^2 \left(\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2 \right)$, suit la loi du Khi-deux non-centrée à $m-1$ degrés de liberté et de paramètre de non centralité λ . En utilisant le Lemme 4.4 de l'Appendice, on déduit le résultat. ■

Théorème 2.7 (Li Sun [27]). On suppose que $K \sim P(\lambda)$, avec

$\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2$, et soit δ l'estimateur donné en (2.4). Alors pour $m > 3$; la fonction de risque de l'estimateur δ est

$$R(\delta, \theta) = \frac{\tau^2}{n} E[\rho_K \chi_{2K+m-1}^2 - 2 \rho_K (\chi_{2K+m-1}^2 - 2K) + m] \quad (2.6)$$

où

$$\rho_K = \rho(\tau^2 \chi_N^2, \tau^2 \chi_{2K+m-1}^2); \quad N = (n-1)m.$$

De plus

$$R(\delta, \theta) \geq B_m(\theta) \quad (2.7)$$

avec

$$B_m(\theta) = \frac{\tau^2}{n} \left\{ m - 2 - E \left[\frac{(m-3)^2}{2K+m-3} \right] \right\} \quad (2.8)$$

$B_m(\theta)$ étant la borne inférieure de la fonction de risque de l'estimateur δ donné en (2.4).

Notons que la formule (2.7) du théorème précédent est déduit du résultat suivant:

$$R(\delta, \theta) = B_m(\theta) + \frac{\tau^2}{n} E \left\{ \chi_{2K+m-1}^2 \left(\rho_K - 1 + \frac{2K}{\chi_{2K+m-1}^2} \right)^2 \right\}. \quad (2.9)$$

Dans le cas particulier où $\rho(S^2, T^2) = c \frac{S^2}{T^2}$ avec c est une constante strictement positive, et en notant $\delta^c = (\delta_1^c, \delta_2^c, \dots, \delta_m^c)$ tel que

$$\delta_j^c = \left[1 - c \frac{S^2}{T^2} \right] (\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

En utilisant la formule (2.6) avec $\rho_K = c \frac{\chi_N^2}{\chi_{2K+m-1}^2}$; la fonction de risque de δ_j^c est

$$R(\delta^c, \theta) = \frac{\tau^2}{n} \left\{ m + [c^2(N+2) - 2c(m-3)] NE \left[\frac{1}{2K+m-3} \right] \right\}; \quad N = (n-1)m \quad (2.11)$$

On remarque que si $c = 0$, l'estimateur δ^0 est l'estimateur du maximum de vraisemblance \bar{y}_j ; et son risque vaut $m \frac{\tau^2}{n}$.

L'estimateur primitif de James-Stein est obtenu en minimisant la fonction de risque $R(\delta^c; \theta)$, c'est-à-dire pour $c = \frac{(m-3)}{N+2}$.

Ainsi on trouve le résultat suivant:

Corollaire 2.8 (Li Sun [27]) L'estimateur de James-Stein $\delta^{JS} = (\delta_1^{JS}, \delta_2^{JS}, \dots, \delta_m^{JS})$ avec

$$\delta_j^{JS} = \left[1 - \frac{(m-3)S^2}{N+2} \frac{1}{T^2} \right] (\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.12)$$

a un risque minimale dans la classe des estimateurs δ^c , et vaut

$$R(\delta^{JS}, \theta) = \frac{\tau^2}{n} \left\{ m + \frac{N}{N+2} E \left[\frac{(m-3)^2}{2K+m-3} \right] \right\}; \quad N = (n-1)m \quad (2.13)$$

Démonstration. Immédiate d'après la formule (2.11). ■

• **Borne inférieure**

D'après le Théorème 2.7, il est évident que pour tout estimateur de la forme (2.4), on a

$$\frac{R(\delta, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} \geq \frac{B_m(\theta)}{R(\delta^0, \theta)} = b_m(\theta)$$

où

$$b_m(\theta) = \frac{1}{m} \left\{ m - 2 - E \left[\frac{(m-3)^2}{2K+m-3} \right] \right\} \quad (2.14)$$

avec $K \sim P \left(\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2 \right)$.

Dans cette section nous étudions les rapports de risques dans le cas où m est grand. Pour la suite on a besoin du lemme suivant, qui est similaire au lemme donné par Casella et Hwang [14].

Lemme 2.9 (Li Sun [27]). Soit $K \sim P(\lambda)$, la loi de Poisson de paramètre λ . Alors pour tout nombre réel $a > 2$, on a

$$i) \quad \frac{1}{2\lambda + a} \leq E \left(\frac{1}{2K + a} \right) \leq \frac{1}{2\lambda + a - 2}$$

de plus si $\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2}{m} = q$; alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E \left[\frac{m}{2K + m} \right] = \frac{\frac{\tau^2}{n}}{q + \frac{\tau^2}{n}}$$

Démonstration. D'une part d'après l'inégalité de Jensen on a

$$\frac{1}{2\lambda + a} \leq E \left(\frac{1}{2K + a} \right).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{2K+a}\right) &= E\left(\frac{1}{a-2+2(K+1)}\right) = E\left(\frac{1}{(K+1)\left[\frac{a-2}{K+1}+2\right]}\right) \\ &= E\left\{\frac{\left(\frac{1}{K+1}\right)}{\left[(a-2)\frac{1}{K+1}+2\right]}\right\} = E\left\{\frac{Z}{(a-2)Z+2}\right\}, \text{ avec } Z = \frac{1}{K+1} \end{aligned}$$

et comme la fonction $g(z) = \frac{z}{(a-2)z+2}$, est une fonction concave on trouve

$$E\left\{\frac{Z}{(a-2)Z+2}\right\} \leq \frac{E(Z)}{(a-2)E(Z)+2}$$

et du fait que

$$E(Z) = E\left(\frac{1}{K+1}\right) = \frac{1}{\lambda}(1 - \exp(-\lambda))$$

on a $E(Z) \leq \frac{1}{\lambda}$. Et comme la fonction g est croissante, on obtient

$$E\left\{\frac{Z}{(a-2)Z+2}\right\} \leq \frac{\frac{1}{\lambda}}{(a-2)\frac{1}{\lambda}+2} = \frac{1}{a-2+2\lambda}.$$

Ainsi

$$E\left(\frac{1}{2K+a}\right) \leq \frac{1}{a-2+2\lambda}.$$

Remarquons que si

$$\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2 \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2}{m} = q,$$

alors il est immédiat que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E\left[\frac{m}{2K+m}\right] = \frac{\frac{\tau^2}{n}}{q + \frac{\tau^2}{n}}.$$



■

Théorème 2.10 (Li Sun [27]). Supposons que $q = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2}{m}$ existe, alors la limite de la borne inférieure de rapport du risque est

$$a) \lim_{m \rightarrow +\infty} b_m(\theta) = \frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}}, \quad (2.15)$$

avec $b_m(\theta)$, donné par la formule (2.14).

$$b) \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta^{JS}, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = \frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}}. \quad (2.16)$$

Démonstration. a) D'après le Lemme 2.9, avec $\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2$, on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m(\theta) = \frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}}$$

b) d'après le Corollaire 2.8 et le Lemme 2.9, on obtient aussi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta^{JS}, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = \frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}}.$$

■

Considérons maintenant la classe d'estimateurs de type (2.4) avec cette fois-ci :

$$\rho(S^2, T^2) = C(S^2, T^2) \frac{S^2}{T^2} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\delta_j = \left(1 - C(S^2, T^2) \frac{S^2}{T^2} \right) (\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.17)$$

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires pour que le rapport de risque de l'estimateur donné en (2.17), atteigne la limite de la borne inférieure donnée en (2.15).

Théorème 2.11 (Li Sun [27]). Soit δ_j donné en (2.17) et $C(S^2, T^2)$ vérifiant les conditions suivantes:

a) $C(S^2, T^2) \rightarrow c$ en probabilité quand $m \rightarrow +\infty$ avec c est une constante.



b) $|C(S^2, T^2)| \leq a(S^2)$ p.s, avec $a(S^2)$ satisfaisant;

$$\sup_{m \geq 1} E \left\{ \frac{[a(S^2) S^2]^2}{m T^2} \right\}^{1+\gamma} < +\infty, \text{ pour } \gamma > 0.$$

Alors : Si $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2}{m} = q$ existe; le rapport du risque de δ atteint la limite de la borne inférieure définie en (2.15), si et seulement si $c = \frac{1}{n-1}$.

Démonstration. Supposons que $K \sim P(\lambda)$, avec $\lambda = n \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 / 2\tau^2$, soit δ^c l'estimateur donné en (2.10) avec son risque donné en (2.11). Comme $R(\delta^0; \theta) = m \frac{\tau^2}{n}$; $N = (n-1)m$; le rapport du risque de l'estimateur δ^c est

$$\frac{R(\delta^c, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = 1 - \left[c^2 \left(n-1 + \frac{2}{m} \right) - 2c \left(1 - \frac{3}{m} \right) \right] (n-1) E \left[\frac{m}{2K + m - 3} \right].$$

D'après le Lemme 2.9, on obtient

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta^c, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = 1 - [c^2(n-1) - 2c] (n-1) \frac{\frac{\tau^2}{n}}{q + \frac{\tau^2}{n}}$$

cette limite vaut $\frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}}$ si et seulement si $c = \frac{1}{n-1}$. Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta, \theta) - R(\delta^c, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = 0,$$

ou bien

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} [R(\delta, \theta) - R(\delta^c, \theta)] = 0. \quad (2.18)$$

En effet

$$\begin{aligned} R(\delta, \theta) &= E \left[\sum_{j=1}^m (\delta_j - \theta_j)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^m (\delta_j - \delta_j^c)^2 \right] + 2E \left[\sum_{j=1}^m (\delta_j - \delta_j^c) (\delta_j^c - \theta_j) \right] + R(\delta^c, \theta). \end{aligned}$$

On pose $C_m = C(S^2, T^2)$; notons que C_m dépend de m , alors

$$\frac{1}{m} [R(\delta, \theta) - R(\delta^c, \theta)] = r_1 + r_2 \quad (2.19)$$

où

$$r_1 = \frac{1}{m} E \left[\sum_{j=1}^m (\delta_j - \delta_j^c)^2 \right] = E \left\{ (c - C_m)^2 \frac{(S^2)^2}{n m T^2} \right\}, \quad (2.20)$$

et

$$r_2 = \frac{2}{m} E \left[\sum_{j=1}^m (\delta_j - \delta_j^c) (\delta_j^c - \theta_j) \right]. \quad (2.21)$$

D'après les Lemmes 2.6 et 2.9, on trouve

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{(S^2)^2}{m T^2} \right\} = \lim_{m \rightarrow +\infty} E \left[\frac{\tau^2 N (N + 2)}{m (2K + m - 3)} \right] = \frac{(n - 1)^2 \tau^4}{nq + \tau^2}.$$

Soit $M_0 = \sup_{m \geq 1} E \left[\frac{(S^2)^2}{m T^2} \right]$, et comme $C(S^2, T^2)$ est bornée par $a(S^2)$ p.s, alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} r_1 &= E \left\{ (c - C_m)^2 \frac{n (S^2)^2}{m T^2} (I_{|c - C_m|^2 \leq \varepsilon} + I_{|c - C_m|^2 > \varepsilon}) \right\} \\ &\leq \varepsilon \frac{M_0}{n} + \frac{2}{n} E \left[\frac{[c^2 + a^2(S^2)] (S^2)^2}{m T^2} I_{|c - C_m|^2 > \varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Soit M_1 une constante telle que

$$M_1^{1+\gamma} = \sup_{m \geq 1} E \left\{ \frac{(a(S^2) S^2)^2}{m T^2} \right\},$$

γ étant la constante donnée dans la condition b. D'après l'inégalité de Holder, on obtient

$$E \left\{ \frac{(a(S^2) S^2)^2}{m T^2} I_{|c - C_m|^2 > \varepsilon} \right\} \leq M_1 [P(|c - C_m|^2 > \varepsilon)]^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}.$$

Maintenant supposons que $m > 7$. Comme

$$E \left[\frac{(S^2)^4}{m^4} \right] = (\tau^2)^4 E \left[\frac{(\chi_N^2)^4}{m^4} \right] \leq (\tau^2)^4 n^4$$

et

$$\begin{aligned} E\left(\frac{m}{T^2}\right)^2 &= E\left[\frac{m^2}{(2K+m-3)(2K+m-5)}\right] \\ &= \frac{m^2}{2} E\left[\frac{1}{(2K+m-5)} - \frac{1}{(2K+m-3)}\right], \end{aligned}$$

et d'après le Lemme 2.9 on trouve

$$\begin{aligned} E\left(\frac{m}{T^2}\right)^2 &\leq \frac{m^2}{2} \left[\frac{1}{(2\lambda+m-7)} - \frac{1}{(2\lambda+m-3)}\right] \\ &= \frac{2m^2}{(2\lambda+m-7)(2\lambda+m-3)} \rightarrow 2 \left[\frac{\frac{\tau^2}{n}}{q + \frac{\tau^2}{n}}\right], \end{aligned}$$

ainsi $\sup_{m \geq 1} E\left(\frac{m}{T^2}\right)^2 < \infty$. Et du fait que S^2 et T^2 sont indépendantes, on a alors

$$M'_1 = \left\{ \sup_{m \geq 1} E\left[\frac{(S^2)^2}{mT^2}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \sup_{m \geq 1} E\left[\frac{(S^2)^4}{m^4}\right] \sup_{m \geq 1} E\left[\frac{m}{T^2}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

et

$$E\left[\frac{(S^2)^2}{mT^2} I_{|c-C_m|^2 > \varepsilon}\right] \leq M'_1 [P(|c-C_m|^2 > \varepsilon)]^{1/2}.$$

Et d'après la formule (2.22) on trouve

$$r_1 < \varepsilon \frac{M_0}{n} + \frac{2c^2 M'_1}{n} [P(|c-C_m|^2 > \varepsilon)]^{1/2} + \frac{M_1}{n} [P(|c-C_m|^2 > \varepsilon)]^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

ainsi $r_1 \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$, car C_m converge en probabilité vers c . Et d'après la formule (2.21) on a

$$|r_2| \leq 2 \left\{ r_1 \frac{R(\delta^c, \theta)}{m} \right\}^{1/2} \rightarrow 0, \text{ quand } m \rightarrow \infty,$$

d'où

$$\frac{1}{m} [R(\delta, \theta) - R(\delta^c, \theta)] = r_1 + r_2 \rightarrow 0, \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

■

Remarque 2.12 (i) Comme $\frac{S^2}{m} \rightarrow (n-1)\tau^2$ et $\frac{T^2}{m} \rightarrow nq + \tau^2$ en probabilité quand

$m \rightarrow \infty$, la condition $C(S^2, T^2) \rightarrow (n-1)^{-1}$ est équivalente à $\rho(S^2, T^2) \rightarrow \frac{\tau^2}{n} \left(q + \frac{\tau^2}{n} \right)$.

(ii) La condition (b) est satisfaite en particulier quand $a(S^2)$ est constante ou

$a(S^2) = A(S^2 + B)/S^2$, où A et B sont des constantes positives. Dans les deux cas on peut choisir $\gamma = 1$.

• Minimaxité

Dans cette section nous étudions la minimaxité des estimateurs définis précédemment dans le cas où m est modéré c'est-à-dire m entier naturel pas forcément grand.

On considère l'estimateur

$$\delta^{(i)} = \left[1 - C^{(i)}(S^2, T^2) \frac{S^2}{T^2} \right] (\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y} \quad ; \quad i = 1, 2.$$

d'après la formule (2.9), on a

$$R(\delta^{(1)}, \theta) \leq R(\delta^{(2)}, \theta) \text{ si et seulement si}$$

$$E \left\{ \chi_N^2 \left[c_K^{(1)} - c_K^{(2)} \right] \left\{ \frac{(c_K^{(1)} + c_K^{(2)}) \chi_N^2 + 4K}{\chi_{2K+m-1}^2} - 2 \right\} \right\} \leq 0 \quad (2.23)$$

où $C_K^{(i)} = C^{(i)}(\tau^2 \chi_N^2, \tau^2 \chi_{2K+m-1}^2)$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $R(\delta, \theta) \leq R(\delta^0, \theta)$, est

$$E \left\{ \chi_N^2 c_K \left[\frac{c_K \chi_N^2 + 4K}{\chi_{2K+m-1}^2} - 2 \right] \right\} \leq 0 \quad (2.24)$$

avec une stricte inégalité correspondant à $R(\delta, \theta) < R(\delta^0, \theta)$.

Comme l'estimateur δ^0 est minimax; alors tout estimateur δ vérifiant l'inégalité (2.24) est minimax.

Le théorème suivant fournit des conditions sur $C(S^2, T^2)$ pour que l'inégalité (2.24) soit vérifiée. (notons que nous l'avons démontré plus simplement dans notre papier 2).

Théorème 2.13 (Li Sun [27]). Si a) $C(S^2, T^2)$ est non-croissante en S^2 , et non-décroissante en T^2 . b) $0 \leq C(S^2, T^2) \leq \frac{2(m-3)}{N+2}$, $N = (n-1)m$. Alors; δ est minimax.

on trouve d'après *ii*) de la remarque 2.12, que l'estimateur modale vérifie les conditions du Théorème 2.11. Ainsi le rapport de risque $\frac{R(\delta^M, \theta)}{R(\delta^0, \theta)}$ est proche de $\frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}}$ qui est la limite de la borne inférieure $b_m(\theta)$, pour chaque ν_0 et λ_0 fixés.

Pour m finie, il est clair que $C^M(S^2, T^2)$ est non décroissante en T^2 , et non croissante en S^2 quand $\nu_0 \lambda_0 \geq 0$. Alors d'après le Théorème 2.13, δ^M est minimax quand $\lambda_0 = 0$ et $\nu_0 > -\frac{(m-6)(N+2)}{2(m-3)}$.

Cette inégalité signifie que ν_0 peut prendre des valeurs négatives quand $m > 6$.

On remarque que si $\lambda_0 = 0$ la densité à priori de τ^2 est proportionnelle à $(\tau^2)^{-(\nu_0+2)/2}$.

Il est intéressant aussi de remarquer que si $\lambda_0 = 0$ et $\nu_0 = 3(N+2)/(m-3)$, on trouve que $C^M = C^+$ qui est donné en (2.26), ainsi δ^M se réduit à δ^+ .

Quand $\lambda_0 \neq 0$, les conditions de minimaxité de l'estimateur δ^M dépend de la valeur inconnue de τ^2 .

La comparaison entre l'estimateur modale et la partie positive de l'estimateur de Stein est basée sur la quantité suivante

$$D_\theta = E \left\{ \chi_N^2 [C_K^M - C_K^+] \left\{ \frac{(C_K^M + C_K^+) \chi_N^2 + 4K}{\chi_{2K+m-1}^2} - 2 \right\} \right\}$$

où $C_K^* = C^*(\tau^2 \chi_N^2, \tau^2 \chi_{2K+m-1}^2)$ avec $*$ est M ou $+$. C'est-à-dire

$$R(\delta^M, \theta) < R(\delta^+, \theta) \quad \text{si et seulement si } D_\theta < 0. \quad (2.31)$$

Comme $\max(C_K^M, C_K^+) \leq \chi_{2K+m-1}^2 / \chi_N^2$, alors $D_\theta < 0$ si $C^M \geq C^+$ *p.s.*

• **Estimateur de Bayes :** On sait que l'estimateur de Bayes de θ , est, par définition, la moyenne à postérieure $E(\theta / y)$, on le note par δ^B . A partir de la formule (2.27) on trouve que

$$\delta_j^B = E(\theta_j / y) = (1 - \rho^B)(\bar{y}_j - \bar{y}) + \bar{y}. \quad \text{avec } \rho^B = E\left(\frac{\tau^2}{\tau^2 + n\sigma^2} / y\right) \quad (2.32)$$

où ρ^B est obtenu à partir de loi à postérieure $\mathcal{L}(\tau^2, \sigma^2 / y)$.

En utilisant la formule (2.28) on trouve que

$$\mathcal{L}(\tau^2, \sigma^2 / y) \propto (\tau^2)^{-\{(n-1)m + \nu_0 + 2\}/2} (\tau^2 + n \sigma^2)^{-m/2} \exp \left\{ -\frac{S^2 + \nu_0 \lambda_0}{2\tau^2} - \frac{T^2}{2(\tau^2 + n \sigma^2)} \right\} \quad (2.33)$$

Il est évident que ρ^B est une fonction de S^2 et T^2 .

En utilisant l'intégrale qui apparaît dans Box et Tiao [9], pour $a, b, c, p, q > 0$,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{-(p+1)} (x + cy)^{-(q+1)} \exp \left\{ -\frac{a}{x} - \frac{b}{x + cy} \right\} dx dy = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{ca^p b^q} I_{\frac{b}{a+b}}(q, p) \quad (2.34)$$

où $I_x(p_1, p_2)$ est la fonction bêta non complet, i.e

$$I_x(p_1, p_2) = \frac{\Gamma(p_1 + p_2)}{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2)} \int_0^x t^{p_1-1} (1-t)^{p_2-1} dt \quad (2.35)$$

Théorème 2.14 (Li Sun [27]). Supposons que

$$p = [(n-1)m + \nu_0] / 2, \quad q = (m-3) / 2, \quad \tilde{x} = \frac{T^2}{(T^2 + S^2 + \nu_0 \lambda_0)}$$

et soit

$$C^B(S^2, T^2) = \frac{m-3}{(n-1)m + \nu_0 - 2} \frac{S^2 + \nu_0 \lambda_0}{S^2} \frac{I_{\tilde{x}}(q+1, p-1)}{I_{\tilde{x}}(q, p)}, \quad (2.36)$$

alors l'estimateur de Bayes est δ^B définie en (2.32), correspondant à

$$\rho^B = C^B(S^2, T^2) \frac{S^2}{T^2}$$

Démonstration. D'après la formule (2.33) on a

$$\rho^B = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty (\tau^2)^{-p} (\tau^2 + n \sigma^2)^{-q-2} \exp \left\{ -\frac{S^2 + \nu_0 \lambda_0}{2\tau^2} - \frac{T^2}{2(\tau^2 + n \sigma^2)} \right\} d\sigma^2 d\tau^2}{\int_0^\infty \int_0^\infty (\tau^2)^{-p-1} (\tau^2 + n \sigma^2)^{-q-1} \exp \left\{ -\frac{S^2 + \nu_0 \lambda_0}{2\tau^2} - \frac{T^2}{2(\tau^2 + n \sigma^2)} \right\} d\sigma^2 d\tau^2}$$

le reste de la démonstration est simple, en utilisant l'égalité (2.34). ■

Quelques propriétés de C^B sont données dans le lemme suivant

Lemme 2.15 (Li Sun [27]). (a) C^B est croissante en T^2 et décroissante en S^2 quand

$\nu_0 \lambda_0 \geq 0$.

(b) C^B peut s'écrire aussi sous la forme

$$C^B(S^2, T^2) = \frac{m-3}{(n-1)m + \nu_0 - 2} \frac{S^2 + \nu_0 \lambda_0}{S^2} \left(1 - \frac{\tilde{x}^q (1 - \tilde{x})^{p-1}}{q \int_0^{\tilde{x}} t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt} \right) \quad (2.37)$$

de plus $C^B \leq \frac{m-3}{(n-1)m + \nu_0 - 2}$ quand $\lambda_0 = 0$.

(c) $C^B \rightarrow (n-1)^{-1}$ en probabilité quand $m \rightarrow \infty$, à condition que

$$q = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_j (\theta_j - \bar{\theta})^2 / m \text{ existe.}$$

D'après le Lemme 2.15, le Théorème 2.11 et le Théorème 2.13 on a le résultat suivant

Théorème 2.16 (Li Sun [27]). 1) L'estimateur de Bayes δ^B est minimax quand:

(a) $n > 1$, $m > 3$, $\lambda_0 = 0$ et $\nu_0 \geq 0$, où (b) $n > 1$, $m > 5$, $\lambda_0 = 0$ et $\nu_0 \geq -2$.

2) Si $q = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_j (\theta_j - \bar{\theta})^2 / m$ existe, alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{R(\delta^B, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = \frac{q}{q + \frac{\tau^2}{n}} \text{ pour tous } \lambda_0, \nu_0. \quad (2.38)$$

Démonstration. La minimaxité de l'estimateur δ^B découle de Théorème 2.13. D'après la formule (2.37) et de *ii*) de la Remarque 2.12, C^B vérifie la condition (b) du Théorème 2.11. Ainsi on obtient l'égalité (2.38), en utilisant (c) du Lemme 2.15 et le Théorème 2.11.

■

Chapitre 3

Rapport de risques d'estimateurs de type James-Stein

3.1 Limite du rapport de risques d'estimateurs de James-Stein à variance inconnue

3.1.1 Introduction

Nous présentons dans ce qui suit l'essentiel de notre article publié dans le journal " **Far East Journal of Theoretical Statistics**", en juillet 2011, intitulé " **Limit of the ratio of risks of James-Stein estimators with unknown variance**" [4].

Dans ce travail nous étudions l'estimation de la moyenne θ d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p , σ^2 étant inconnu et estimé par la statistique : $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$.

Notons que Hansen [21] donne une extension de l'estimateur la partie-positive de l'estimateur de James-Stein introduit par Baranchik [1], $\hat{\theta}_n^* = \left(1 - \left(\frac{k-2}{\hat{\theta}' V^{-1} \hat{\theta}_n}\right)\right)^+ \hat{\theta}_n$

pour θ_n avec ($\hat{\theta}_n \sim N(\theta_n, V)$); $\theta_n \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ et V est une matrice régulière), pour les estimateurs à rétrécisseurs généralisés satisfaisant le théorème central limite. Il a montré aussi d'après les résultats de Casella et Hwang [14] que sous certaines conditions asymptotiques, le gain de ces estimateurs par rapport à celui de l'estimateur empirique est substantiel. Cette classe d'estimateurs n'est pas pour l'instant introduite dans notre

étude.

Nous étudions particulièrement les bornes et limites des rapports des risques, de l'estimateur de James-Stein δ_{JS} et de sa partie positive δ_{JS}^+ , à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance X quand $p \rightarrow \infty$.

Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$, nous montrons alors que les rapports des risques des estimateurs de James-Stein δ_{JS} , et de sa partie positive δ_{JS}^+ , à celui de l'estimateur des moindres carrés X tendent vers la même valeur $\frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c}$ quand p tend vers l'infini. Si n et p tendent vers l'infini nous montrons que les rapports des risques tendent vers $\frac{c}{1+c}$.

Nous rappelons un lemme de Casella et Hwang [14] que nous généralisons au cas où σ^2 est inconnu et un lemme technique pour calculer une borne inférieure pour le rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$. Nous donnons, en effet, une autre démonstration de la limite du rapport $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ quand $p \rightarrow +\infty$, car cela nous a permis de déduire plus facilement la limite du rapport $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ quand n et p tendent simultanément vers l'infini.

Nous généralisons ensuite les résultats de Casella et Hwang [14] (cas où σ^2 est inconnu), en donnant des bornes inférieure et supérieure du rapport $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$, et sa limite quand p tend vers l'infini et n fixe d'une part, et d'autre part, quand n et p tendent simultanément vers l'infini et ce en supposant que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$.

Finalement, nous donnons des bornes inférieure et supérieure du rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$ et sa limite quand p tend vers l'infini et n fixe d'une part, et d'autre part, quand n et p tendent simultanément vers l'infini, et ce dans tous les cas où σ^2 est inconnu.

Nous prenons comme estimateur de σ^2 la statistique S^2 indépendante de X et de loi $\sigma^2 \chi_n^2$ dans \mathbb{R}^+ .

Dans ce cas, l'estimateur de James-Stein et sa partie positive s'écrivent respectivement

$$\delta_{JS} = \left(1 - \frac{(p-2)S^2}{(n+2)\|X\|^2}\right) X \quad (3.1)$$

$$\delta_{JS}^+ = \max\left(0, 1 - \frac{(p-2)S^2}{(n+2)\|X\|^2}\right) X \quad (3.2)$$

Enfin, nous donnons une illustration graphique des différents rapports de risques et des bornes inférieure et supérieure associées pour diverses valeurs de n et p .

3.1.2 Préliminaires

Rappelons que le risque de l'estimateur de maximum de vraisemblance $\delta_0 = X$ est $p \sigma^2$.

Le risque de l'estimateur de James-Stein (donné en (3.1)) de θ est

$$R(\delta_{JS}, \theta) = \sigma^2 \left\{ p - \frac{n}{n+2} (p-2)^2 E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \right\}$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$ étant la loi de Poisson de paramètre $\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$.

Quand $X \sim N_p(\theta, I_p)$ Casella et Hwang [14] ont donné le Lemme 1 qui exprime les inégalités suivantes:

$$\frac{1}{(p-2+\|\theta\|^2)} \leq E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \leq \frac{p}{(p-2)(p+\|\theta\|^2)}, \quad p \geq 3$$

que nous généralisons dans le lemme suivant, quand $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans le cas où σ^2 est inconnu.

Lemme 3.1 Soit $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$; Si $p \geq 3$ alors

$$\frac{1}{\sigma^2 \left(p-2 + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)} \leq E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \leq \frac{p}{\sigma^2 (p-2) \left(p + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)} \quad (3.3)$$

Démonstration. On a

$$X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p) \Rightarrow \frac{X}{\sigma} \sim N_p\left(\frac{\theta}{\sigma}, I_p\right) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \|X\|^2 \sim \chi_p^2\left(\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) &= \frac{1}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega} \chi_{p+2k}^2(d\omega) P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \end{aligned}$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$ et l'avant dernière égalité étant la définition de la loi du Khi-deux décentré. D'après l'inégalité de Jensen on a

$$E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \geq \frac{1}{\sigma^2\left(p-2+\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)}.$$

D'autre part d'après le Lemme 4.5 de l'Appendice, pour $q = p - 2$, $h(\omega) = \frac{1}{\omega}$ et $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \chi_{p-2}^2(\lambda, d\omega) = (p-2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega} \chi_p^2(\lambda, d\omega) + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega} \chi_{p+2}^2(\lambda, d\omega),$$

donc

$$1 = (p-2) E\left(\frac{1}{\frac{\|X\|^2}{\sigma^2}}\right) + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{p+2K}\right) \text{ avec } K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.4)$$

ainsi

$$E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \leq \frac{1}{\sigma^2(p-2)} \left[\frac{p}{p + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}} \right]. \quad (3.5)$$

L'égalité (3.4) découle du Lemme 4.4 de l'Appendice et l'inégalité (3.5) découle de l'inégalité de Jensen. D'où le résultat. ■

Rappelons que si X est une variable aléatoire de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p , alors $U = \|X\|^2 \sim \chi_p^2(\lambda)$ où $\chi_p^2(\lambda)$ désigne la loi du khi-deux décentrée à p degrés de liberté de paramètre de décentrage, $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}$.

Lemme 3.2 Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} et X une variable aléatoire de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p . Si pour $p \geq 1$, $E[(f(U)\chi_p^2(\lambda))]$ existe, alors;

a) Si f est non-croissante on a:

$$E[(f(U)\chi_{p+2}^2(\lambda))] \leq E[(f(U)\chi_p^2(\lambda))] \quad (3.6)$$

b) Si f est non-décroissante on a:

$$E[(f(U)\chi_{p+2}^2(\lambda))] \geq E[(f(U)\chi_p^2(\lambda))] \quad (3.7)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & E[(f(U)\chi_{p+2}^2(\lambda)) - E[(f(U)\chi_p^2(\lambda))] \\ &= E \left[f(U) \left(\frac{u}{(p+2K)} - 1 \right) \chi_p^2(\lambda) \right] \leq E[f(U)\chi_p^2(\lambda)] E \left[\left(\frac{u}{(p+2K)} - 1 \right) \chi_p^2(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Car la covariance de deux fonctions l'une croissante et l'autre décroissante est négative ou nulle, avec $K \sim P \left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2} \right)$, or

$$E \left[\left(\frac{u}{(p+2K)} - 1 \right) \chi_p^2(\lambda) \right] = 0$$

alors

$$E[(f(U)\chi_{p+2}^2(\lambda))] \leq E[(f(U)\chi_p^2(\lambda))]$$

donc on a le résultat a) (idem pour b)). Ainsi le résultat. ■

3.1.3 Bornes et limite du rapport des risques de l'estimateur de James-Stein

Théorème 3.3 Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$, alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c} \quad (3.8)$$

Démonstration. On a

$$R(\delta_{JS}, \theta) = \sigma^2 \left\{ p - \frac{n}{n+2} (p-2)^2 E \left(\frac{1}{p-2+2K} \right) \right\}$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} &= 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{p} E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \\ &= 1 - \frac{n}{n+2} \frac{\sigma^2 (p-2)^2}{p} E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \\ &\leq 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{p} \frac{1}{\left(p-2 + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

l'inégalité (3.9) est obtenue à partir du Lemme 3.1. Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} &\leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{p^2} \frac{1}{\frac{p-2}{p} + \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}} \right\} \\ &\leq 1 - \frac{n}{(n+2)(1+c)} \\ &\leq \frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

car $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$. D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} &= 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{p} E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \\ &= 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{p} \sigma^2 E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right). \end{aligned}$$

Et d'après le Lemme 3.1 on a

$$\begin{aligned} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} &\geq 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{(p-2)p} \frac{p}{\left(p + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)} \\ &\geq 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ainsi nous obtenons des bornes inférieures et supérieures du rapport $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ déduites

de (3.9) et (3.11),

$$\begin{aligned}
1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}\right)} &\leq \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} \\
&\leq 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)^2}{p} \frac{1}{\left(p-2 + \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Le passage à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ donne

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} &\geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ 1 - \frac{n}{n+2} \frac{(p-2)}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}\right)} \right\} \\
&\geq 1 - \frac{n}{(n+2)(1+c)} \\
&\geq \frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

car $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$. Combinant (3.10) et (3.13) on obtient

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(\delta_0, \theta)} = \frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c},$$

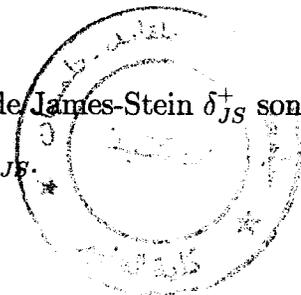
d'où le résultat. ■

Corollaire 3.4 Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$, on a alors $\lim_{n, p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(\delta_0, \theta)} = \frac{c}{1+c}$.

Démonstration. Découle immédiatement de (3.9) et (3.11). ■

3.1.4 Bornes et limite du rapport de risque de la partie positive de l'estimateur de James-Stein

Les résultats de l'estimateur de la partie positive de l'estimateur de James-Stein δ_{JS}^+ sont similaires aux résultats obtenus sur l'estimateur de James-Stein δ_{JS} .



En effet, on note $\alpha = \frac{p-2}{n+2}$, et rappelons que :

$$\begin{aligned}\delta_{JS}^+ &= \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right)^+ X = \phi_{JS}^+(X, S^2)X = \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right) X I_{\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \leq 1\right)}, \\ \delta_{JS}^- &= \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right)^- X = \phi_{JS}^-(X, S^2)X = \left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1\right) X I_{\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1\right)},\end{aligned}$$

$I_{\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1\right)}$ indiquant la fonction indicatrice de l'ensemble $\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1\right)$.

Nous noterons pour les besoins de démonstration et chaque fois qu'il sera nécessaire, pour la suite, par: $Y = \frac{X}{\sigma}$, $\beta = \frac{\theta}{\sigma}$, $T^2 = \frac{S^2}{\sigma^2}$ et $U = \|Y\|^2$.

On a alors $Y \sim N(\beta, I_p)$, $T^2 \sim \chi_n^2$ et $U \sim \chi_p^2(\lambda)$ où χ_n^2 désigne la loi du khi-deux centrée à n degrés de liberté et $\chi_p^2(\lambda)$ désigne la loi du khi deux décentrée à p degrés de liberté de paramètre de décentrage $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}$.

Le lemme suivant est un rappel de l'expression du risque de l'estimateur δ_{JS}^+ .

Lemme 3.5

$$\begin{aligned}R(\delta_{JS}^+, \theta) &= R(\delta_{JS}, \theta) \\ &+ E \left\{ \left[\|X\|^2 + 2(p-2)\sigma^2\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - \alpha^2 \frac{(S^2)^2}{\|X\|^2} - 2p\sigma^2 \right] I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right\}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}R(\delta_{JS}, \theta) &= E(\|\delta_{JS} - \theta\|^2) \\ &= E(\|\phi_{JS}^+(X, S^2)X - \theta - \phi_{JS}^-(X, S^2)X\|^2) \\ &= E(\|\phi_{JS}^+(X, S^2)X - \theta\|^2) + E([\phi_{JS}^-(X, S^2)]^2 \|X\|^2) \\ &\quad - 2E\{\langle \phi_{JS}^+(X, S^2)X - \theta, \phi_{JS}^-(X, S^2)X \rangle\} \\ &= R(\delta_{JS}^+, \theta) + E([\phi_{JS}^-(X, S^2)]^2 \|X\|^2) \\ &\quad - 2E\{\langle X - \theta, \phi_{JS}^-(X, S^2)X \rangle\} + 2E\{\langle X, \phi_{JS}^-(X, S^2)X \rangle\},\end{aligned}$$

alors

$$R(\delta_{JS}, \theta) = R(\delta_{JS}^+, \theta) + E \left\{ \left(\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right)^2 \|X\|^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -2E \left\{ {}^t(X - \theta)X \left(\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) \right\} \\
& + 2E \left\{ \left(\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) \|X\|^2 \right\},
\end{aligned}$$

d'après le Lemme de Shao et Strawderman ([35] Lemme 1) on a

$$\begin{aligned}
& E \left\{ {}^t(X - \theta)X \left(\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) \right\} \\
& = \sigma^2 E \left\{ \left(-2\alpha \frac{S^2}{\sigma^2 \|Y\|^2} + p \left(\alpha \frac{S^2}{\sigma^2 \|Y\|^2} - 1 \right) \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\sigma^2 \|Y\|^2} \geq 1} \right\} \\
& = \sigma^2 E \left\{ \left((p-2)\alpha \frac{S^2}{\sigma^2 \|Y\|^2} - p \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\sigma^2 \|Y\|^2} \geq 1} \right\} \\
& = \sigma^2 E \left\{ \left((p-2)\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - p \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
R(\delta_{JS}, \theta) & = R(\delta_{JS}^+, \theta) + E \left\{ \left[\alpha^2 \frac{(S^2)^2}{\|X\|^2} - 2\alpha S^2 + \|X\|^2 \right] I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right\} \\
& \quad - 2\sigma^2 E \left\{ \left((p-2)\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - p \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right\} \\
& \quad + 2E \left\{ \left(\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) \|X\|^2 \right\},
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$R(\delta_{JS}^+, \theta) = R(\delta_{JS}, \theta) + E \left\{ \left[\|X\|^2 + 2\sigma^2 (p-2) \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - \alpha^2 \frac{(S^2)^2}{\|X\|^2} - 2p\sigma^2 \right] I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right\}$$

d'où le résultat. ■

Du fait que $R(\delta_{JS}^+, \theta) \leq R(\delta_{JS}, \theta)$ (Baranchick [1]), une borne supérieure du rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$ serait par exemple la borne supérieure du rapport $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ dont nous connaissons le caractère asymptotique. Ainsi nous nous intéresserons dans ce qui suit à une borne inférieure du rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.6 *Pour tout $p \geq 3$, nous avons la minoration suivante du rapport des*

risques $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$:

$$\begin{aligned} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} &\geq \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{p\sigma^2} \geq \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \frac{(p+2\lambda)}{p} \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) \\ &\quad - \frac{(\alpha n + 4)}{p} \int_0^{+\infty} P\left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p-2}^2(\lambda, du) \\ &= \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \frac{(p+2\lambda)}{p} F_{(p+4, n, \lambda)}(\alpha) - \frac{(\alpha n + 4)}{p} F_{(p-2, n+4, \lambda)}(\alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $F_{(p, n, \lambda)}(\alpha)$ est la fonction de répartition de Fisher à p et n degrés de libertés et de paramètre de décentrage $\lambda \left(= \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2} \right)$.

Démonstration. Reprenant l'égalité (3.14) on a

$$\begin{aligned} R(\delta_{JS}^+, \theta) &= R(\delta_{JS}, \theta) \\ &+ E \left\{ \left[\frac{\|X\|^2 + 2(p-2)\sigma^2 \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - \alpha^2 \frac{(S^2)^2}{\|X\|^2} - 2p\sigma^2}{\|X\|^2} \right] I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} I_1 &= E \left(\frac{\|X\|^2}{\sigma^2} I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) \\ &= \sigma^2 E \left(\frac{\|X\|^2}{\sigma^2} I_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) \\ &= \sigma^2 \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0, ds) \right) u \chi_p^2(\lambda, du) \end{aligned} \quad (3.16)$$

En prenant $h(u) = \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0, ds)$ et $q = p$, et appliquant le Lemme 4.5 de l'Appendice, on obtient.

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma^2 p \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+2}^2(\lambda, du) + \sigma^2 \lambda \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) \\ &\geq \sigma^2 (p + \lambda) \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du), \end{aligned} \quad (3.17)$$

l'inégalité (3.17) découlant de l'inégalité (3.7) du Lemme 3.2. D'autre part

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sigma^2 E \left(\left[2(p-2) \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 2p \right] I_{(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1)} \right) \\
&\geq -4\sigma^2 E \left(I_{(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1)} \right) \\
&\geq -4\sigma^2 \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0, ds) \right) \chi_p^2(\lambda, du) \\
&\geq -4\sigma^2 \int_0^{+\infty} P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_p^2(\lambda, du) \\
&\geq -4\sigma^2 \int_0^{+\infty} P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p-2}^2(\lambda, du), \tag{3.18}
\end{aligned}$$

l'inégalité (3.18) découlant de l'inégalité (3.7) du Lemme 3.2, et en observant que $P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \geq P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right)$ pour tout $n \geq 1$. D'autre part

$$\begin{aligned}
I_3 &= -E \left(\alpha^2 \frac{(S^2)^2}{\|X\|^2} I_{(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1)} \right) \\
&= -\alpha^2 \sigma^2 E \left(\frac{(T^2)^2}{U} I_{(T^2 \geq \frac{u}{\alpha})} \right) \\
&= -\alpha^2 \sigma^2 \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} (t^2)^2 \chi_n^2(0, dt^2) \right) \frac{1}{u} \chi_p^2(\lambda, du) \\
&\geq -\frac{\sigma^2 \alpha}{(n+2)} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} (t^2)^2 \chi_n^2(0, dt^2) \right) \chi_{p-2}^2(\lambda, du),
\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du Lemme 4.5 de l'Appendice, en prenant

$$h(u) = \frac{1}{u} \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} (t^2)^2 \chi_n^2(0, ds), \quad q = p-2 \text{ et du fait que } \alpha = \frac{p-2}{n+2}. \text{ Et comme}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} (t^2)^2 \chi_n^2(0, dt^2) &= n \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} t^2 \chi_{n+2}^2(0, dt^2) \\
&= n(n+2) \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_{n+4}^2(0, dt^2) \\
&= n(n+2) P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

On a alors

$$I_3 \geq -\sigma^2 \alpha n \int_0^{+\infty} P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p-2}^2 (\lambda, du) \quad (3.20)$$

et d'après (3.16), (3.17), (3.18) et (3.20) on a

$$\begin{aligned} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{p\sigma^2} &= \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \frac{I_1}{p\sigma^2} + \frac{I_2}{p\sigma^2} + \frac{I_3}{p\sigma^2} \\ &\geq \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \frac{\sigma^2(p+\lambda)}{p\sigma^2} \int_0^{+\infty} \left(P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \right) \chi_{p+4}^2 (\lambda, du) \\ &\quad - \frac{4\sigma^2}{p\sigma^2} \int_0^{+\infty} \left(P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \right) \chi_{p-2}^2 (\lambda, du) \\ &\quad - \frac{\sigma^2 \alpha n}{p\sigma^2} \int_0^{+\infty} P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p-2}^2 (\lambda, du) \\ &\geq \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \frac{(p+\lambda)}{p} \int_0^{+\infty} P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p+4}^2 (\lambda, du) \\ &\quad - \frac{(\alpha n + 4)}{p} \int_0^{+\infty} P \left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p-2}^2 (\lambda, du) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Remarque 3.7 La borne inférieure donnée par l'inégalité (3.15) est une borne assez "fine" et proche du rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$ dès que λ s'éloigne de zéro. Les simulations dans les figures 1 et 2 l'illustrent assez bien. Par contre pour le passage à limite du rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$ quand p tend vers l'infini, ou quand p et n tendent simultanément vers l'infini, une borne Min moins fine suffirait.

Nous avons alors le résultat suivant sur la limite du rapport des risques $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$.

Proposition 3.8 Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$, on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{\frac{2}{n+2} + c}{1 + c} \quad (3.21)$$

Démonstration. Baranchick [1] a montré que $R(\delta_{JS}^+, \theta) \leq R(\delta_{JS}, \theta)$ pour $p \geq 3$ et tout $\theta, \sigma \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+$. Ainsi la borne supérieure dans (3.9) joue le rôle de la borne supérieure de $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$. Il suffit de montrer que la limite de la borne inférieure est supérieure ou

égale à $\frac{2}{n+2} + c$. En effet, d'après le Théorème 3.6, on a

$$\begin{aligned} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} &\geq \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \frac{(p+\lambda)}{p} \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) \\ &\quad - \frac{(\alpha n + 4)}{p} \int_0^{+\infty} P\left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p-2}^2(\lambda, du) \\ \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} &\geq \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{p\sigma^2} + \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) - \frac{4}{p} - 1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

car

$$\begin{aligned} \frac{(p+\lambda)}{p} \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) &\geq \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) \\ &\quad - \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \geq -1 \text{ et } -\frac{n(p-2)}{p(n+2)} \geq -1. \end{aligned}$$

Notons que comme $\alpha = \frac{p-2}{n+2}$ et donc tend vers $+\infty$ quand $p \rightarrow +\infty$, on a d'après le

Théorème de Lebesgue en prenant par exemple, la suite croissante $(f_p(u))_p$ avec

$$\left(f_p(u) = \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0, ds) = P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \right)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) = P(\chi_n^2 \geq 0) = 1, \quad \forall n \geq 1 \quad (3.23)$$

ainsi

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} P\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) = 1$$

où $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}$, on obtient finalement

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{2}{n+2} + c$$

d'où le résultat. ■

Le cas où n et p tendent simultanément vers $+\infty$ est donné par le théorème suivant:

Théorème 3.9 Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$, on a

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}.$$

Démonstration. D'une part, on a

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} \leq \lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c} \quad (3.24)$$

car $R(\delta_{JS}^+, \theta) \leq R(\delta_{JS}, \theta)$ pour $p \geq 3$ et tout $\theta, \sigma \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+$. D'autre part, en reprenant (3.22) on a

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{c}{1+c} + \lim_{n,p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) - 1 \quad (3.25)$$

mais

$$\begin{aligned} P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) &= P \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \geq \frac{u(n+2)}{(p-2)} \right) \\ &= P \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} \geq \frac{u}{(p-2)} + \frac{2u}{n(p-2)} \right) \end{aligned}$$

où y_1, y_2, \dots, y_n sont des variables aléatoires indépendantes, gaussiennes centrées réduites.

Ainsi par la loi forte des grands nombres on a:

$$\begin{aligned} \lim_{n,p \rightarrow +\infty} P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) &= \lim_{n,p \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} \geq \frac{u}{(p-2)} + \frac{2u}{n(p-2)} \right) \\ &= \lim_{n,p \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} \geq 0 \right) \\ &= P(1 \geq 0) = 1 \end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(P \left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) = 1 \quad (3.26)$$

combinant (3.24), (3.25) et (3.26), on a finalement le résultat. ■

3.1.5 Simulations

Nous illustrons graphiquement dans ce qui suit les rapports des risques $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$ ainsi que l'évolution des bornes min et max associées, données respectivement par les expressions (3.12) et (3.15), pour diverses valeurs de n et p .

Fig. 1 Graphe des risques relatifs ainsi que leur minima et maxima pour $n = 50$ et $p = 4$, en fonction de $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}$.

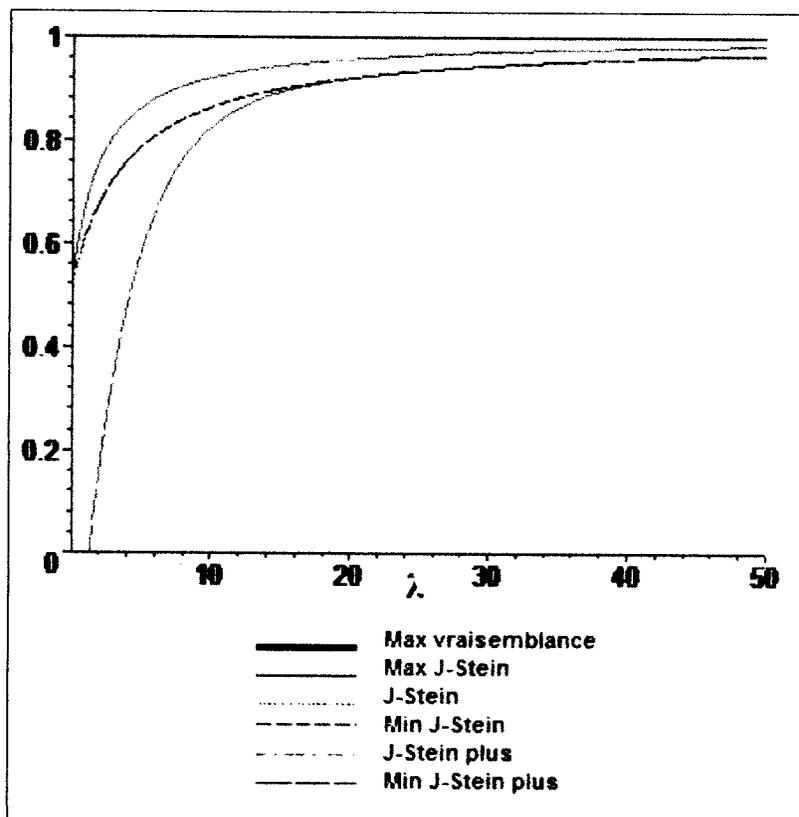
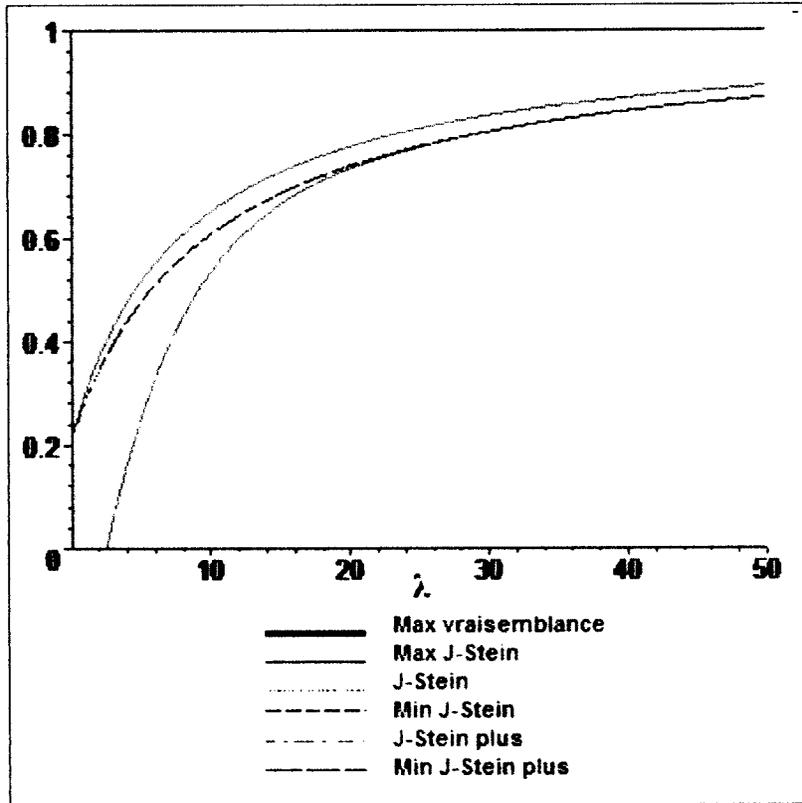


Fig. 2 Graphe des risques relatifs ainsi que leur minima et maxima pour $n = 100$ et $p = 10$, en fonction de $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}$.



3.2 Propriétés asymptotiques des rapports de risques d'estimateurs à rétrécisseurs

3.2.1 Introduction

Nous présentons dans ce qui suit l'essentiel de notre article publié dans le journal " **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics** Doi: 10,15672 / HJMS.2014377624, ISSN : 1303-5010, intitulé " **Asymptotic properties of risks ratios of shrinkage estimators** " [20] .

Nous étudions l'estimation de la moyenne θ d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p , σ^2 étant inconnu et estimé par la statistique $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$. Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude des bornes et des limites des rapports de risques des estimateurs à rétrécisseur à celui du maximum de vraisemblance (appelé risque ratio) quand n et p tendent vers l'infini, sous la condition: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$.

Le risque ratio pour cette classe d'estimateur a une borne *Min* : $B_m = \frac{c}{1+c}$ quand n et p tendent vers l'infini sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$.

Nous donnons des conditions simples pour des estimateurs à rétrécisseurs, minimax, afin que leur risque ratio atteigne la borne *Min*, B_m . Nous montrons aussi que l'estimateur de James-Stein ainsi que ceux qui le dominent, atteignent cette borne *Min*, B_m (en particuliers sa partie positive).

Pour la suite nous noterons la forme générale d'un estimateur à rétrécisseur comme suit :

$$\delta = (1 - \psi(S^2, \|X\|^2)) X. \quad (3.27)$$

En adoptant le modèle $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ et indépendamment des observations X , on observe $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$ un estimateur de σ^2 . Notant $R(X, \theta) = \sigma^2 p$, le risque de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Nous rappelons deux résultats obtenus dans le papier de Benmansour et Hamdaoui [4]. Les auteurs ont montré que, sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c (> 0)$, le risque ratio de l'estimateur de James-Stein δ_{JS} à l'estimateur du maximum de vraisemblance X , tend vers la valeur $\frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c}$ quand p tend vers l'infini, et n est fixe. Le deuxième résultat

3.2.2 Préliminaires

Rappelons que si X est une variable aléatoire de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p , alors $U = \frac{\|X\|^2}{\sigma^2} \sim \chi_p^2(\lambda)$ où $\chi_p^2(\lambda)$ désigne la loi du khi-deux décentrée à p degrés de liberté de paramètre de décentrage $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$.

Dans ce cas là, pour $\sigma^2 = 1$, Casella et Hwang [14], ont montré les inégalités suivantes

Casella et Hwang [14], ont montré dans le cas $\sigma^2 = 1$ que si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c (c > 0)$ alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}(X), \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}$.

Li Sun [27] dans son cas a montré que si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^p (\theta_j - \bar{\theta})^2}{p} = c (c > 0)$ alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} \geq \frac{c}{\frac{\sigma^2}{n} + c} \text{ et } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = \frac{c}{\frac{\sigma^2}{n} + c}$$

et donc $\lim_{n, p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(\delta^0, \theta)} = 1$.

Nous montrons dans notre travail que

$$\text{si } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c, \text{ alors } \lim_{n, p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{c}{1+c} \text{ d'une part}$$

et pour certaines formes de δ , on montre que $\lim_{n, p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}$. Ainsi nous améliorons le résultat de Li Sun [27] en ayant une limite strictement inférieure à 1.

Proposition 3.12 Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$, alors

$$\lim_{n, p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{c}{1+c}, \quad (3.31)$$

$$\lim_{n, p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}. \quad (3.32)$$

Démonstration. La formule (3.31) découle immédiatement du Théorème 3.11 et la formule (3.28). La formule (3.32) découle aussi du Théorème 3.11. En effet, le Théorème 3.11 implique que $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{B_p(\theta)}{R(X, \theta)} = b_p(\theta)$, et d'après la formule (3.30), le Lemme 3.1 et la formule (3.28) on a

$$\frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c} \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{c}{1+c}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n+2} + c}{1+c} \geq \lim_{n, p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} \geq \frac{c}{1+c}$$

et donc

$$\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c} \quad (3.33)$$

Ainsi nous retrouvons exactement le même rapport limite que Casella et Hwang [14], dans le cas où σ^2 est inconnu. ■

Pour la suite nous étudions les familles d'estimateurs s'écrivant sous la forme

$$\delta_\psi (S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS}(X) + l\psi (S^2, \|X\|^2) \frac{S^2}{\|X\|^2} X \quad l > 0 \quad (3.34)$$

et nous donnons des conditions simples sur ψ afin que le rapport $\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_\psi, \theta)}{R(X, \theta)}$ soit égal à $\frac{c}{1+c}$, quand $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$, où ψ est une fonction mesurable, telle que $E[\psi^2(\sigma^2\chi_n^2, \sigma^2\chi_p^2(\lambda))] < \infty$.

Dans ce cas là, la différence de risque notée par $\Delta_{\psi_{JS}} = R(\delta_\psi, \theta) - R(\delta_{JS}, \theta)$ est :

$$\Delta_{\psi_{JS}} = E \left\{ l^2 \frac{(\sigma^2\chi_n^2)^2 \psi^2(\sigma^2\chi_n^2, \sigma^2\chi_p^2(\lambda))}{\sigma^2\chi_p^2(\lambda)} + 2lS^2\psi(\sigma^2\chi_n^2, \sigma^2\chi_p^2(\lambda)) - \frac{2ld(\sigma^2\chi_n^2)^2 \psi(\sigma^2\chi_n^2, \sigma^2\chi_p^2(\lambda))}{\sigma^2\chi_p^2(\lambda)} \right\} - 4l\lambda E \left[\frac{\sigma^2\chi_n^2(\psi(\sigma^2\chi_n^2, \sigma^2\chi_{p+2}^2(\lambda)))}{\chi_{p+2}^2(\lambda)} \right]. \quad (3.35)$$

Où $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$ et $d = \frac{p-2}{n+2}$

Voir (Benmansour et Mourid [5]).

Nous donnons dans ce qui suit, pour des estimateurs de la forme (3.34), deux résultats analogues au Théorème 3.2 de Li Sun [27], avec des conditions différentes sur ψ et dont le risque ratio atteint la borne **Min**, sans être forcément minimax.

Théorème 3.13 Soit δ_ψ donné en (3.34) et $\psi(S^2, \|X\|^2)$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $|\psi(S^2, \|X\|^2)| \leq g(S^2)$ p.s; où $g(S^2)$ vérifie; $E\{(g^2(S^2))^{1+\gamma}\} \leq (M(n))^{1+\gamma}$ pour un réel $\gamma > 0$.

Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c (> 0)$; alors

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_\psi, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}, \quad (3.36)$$

quelque soit l tel que $l(M(n))^{1/2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Notons que l peut dépendre de n .

Démonstration. L'égalité (3.35) et la condition a) donnent

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi_{JS}} &\leq E \left[l^2 \frac{(S^2)^2 g^2(S^2)}{\|X\|^2} + 2lS^2 g(S^2) + \frac{2ld(S^2)^2 g(S^2)}{\|X\|^2} \right] + 4l\lambda E(S^2 g(S^2)) E \left(\frac{1}{\chi_{p+2}^2(\lambda)} \right) \\ &\leq \frac{l^2 E \left[(\sigma^2 \chi_n^2)^{2(1+\gamma)/\gamma} \right]^{\gamma/(1+\gamma)} M(n)}{\sigma^2 (p-2)} + 2l \left[E \left((\sigma^2 \chi_n^2)^2 \right) \right]^{1/2} (M(n))^{1/2} \\ &\quad + \frac{2l}{\sigma^2(n+2)} \left[E \left((\sigma^2 \chi_n^2)^4 \right) \right]^{1/2} (M(n))^{1/2} + 4l\lambda \frac{\left[E \left((\sigma^2 \chi_n^2)^2 \right) \right]^{1/2} (M(n))^{1/2}}{p}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle de l'inégalité de Holder, l'inégalité de Schwarz, de l'indépendance entre les deux variables $\|X\|^2$ et S^2 et du fait que $E \left(\frac{1}{\chi^2(p, \lambda)} \right) \leq \frac{1}{p-2}$. Ainsi, pour n voisin de l'infini on a

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi_{JS}} &\leq \frac{4\sigma^2 l^2 M(n)}{p-2} \left(\frac{\Gamma \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{\gamma} + 2 \right)}{\Gamma \left(\frac{n}{2} \right)} \right)^{\gamma/(1+\gamma)} + 2l\sigma^2 (M(n))^{1/2} [n(n+2)]^{1/2} + \\ &\quad \frac{2\sigma^2 l (M(n))^{1/2} [(n+6)(n+4)(n+2)n]^{1/2}}{(n+2)} + \frac{4l\lambda\sigma^2 (M(n))^{1/2} [n(n+2)]^{1/2}}{p}. \end{aligned}$$

Et d'après la formule de Stirling qui exprime qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\Gamma(y+1) \simeq \sqrt{2\pi} y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y} \text{ et du fait que } e^y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n, \text{ On a}$$

$$\left(\frac{\Gamma \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{\gamma} + 2 \right)}{\Gamma \left(\frac{n}{2} \right)} \right)^{\gamma/(1+\gamma)} \simeq \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{\gamma} + 1 \right)^2. \quad (3.37)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_{\psi_{JS}}}{R(X, \theta)} &\leq \frac{4l^2 M(n)}{p(p-2)} \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{\gamma} + 1 \right)^2 + \frac{2l(M(n))^{1/2} [n(n+2)]^{1/2}}{p} \\ &\quad + \frac{2l(M(n))^{1/2} [(n+6)(n+4)(n+2)n]^{1/2}}{p(n+2)} + \frac{4l\lambda(M(n))^{1/2} [n(n+2)]^{1/2}}{p^2}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{p} = c$ et $l(M(n))^{1/2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on obtient finalement ,

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_{\psi_{JS}}}{R(X, \theta)} = \lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{\psi}, \theta)}{R(X, \theta)} - \lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} \leq 0$$

et donc d'après (3.31) et (3.32)

$$\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{\psi}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}$$

d'où le résultat. ■

Exemple 3.14 Soit $\psi_1(S^2, \|X\|^2) = \frac{\|X\|^2}{S^2(\|X\|^2 + 1)}$. Dans ce cas, il suffit de prendre $g(S^2) = \frac{1}{S^2}$ et de choisir $l = 1$.

La proposition suivante donne le même résultat que le Théorème 3.13 pour une classe particulière de rétrécisseurs $\psi(S^2, \|X\|^2)$. En effet on choisira g dans L^2 et non dans $L^{2(1+\gamma)}$ mais avec la contrainte que $g(S^2)$ soit monotone non-croissante.

Proposition 3.15 Soit δ_{ψ} donné en (3.34) et $\psi(S^2, \|X\|^2)$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $|\psi(S^2, \|X\|^2)| \leq g(S^2)$ p.s où $g(S^2)$ est monotone non-croissante et vérifie : $E[g^2(S^2)] \leq M(n)$.

Si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c$, alors

$$\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{\psi}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}, \quad (3.38)$$

quelque soit l tel que $l(M(n))^{1/2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$. (l peut dépendre de n).

Démonstration. Analogue au Théorème 2.13 dont nous donnons une brève idée. L'égalité (3.35) et la condition a) donnent

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi_{JS}} &\leq \frac{l^2 E[(\sigma^2 \chi_n^2)^2] E[g^2(\sigma^2 \chi_n^2)]}{\sigma^2 (p-2)} + 2l E[\sigma^2 \chi_n^2] E[g(\sigma^2 \chi_n^2)] \\ &+ \frac{2l}{\sigma^2 (n+2)} E[(\sigma^2 \chi_n^2)^2] E[g(\sigma^2 \chi_n^2)] + 4l \lambda \frac{E(\sigma^2 \chi_n^2) E[g(\sigma^2 \chi_n^2)]}{p}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant due au fait que $E\left(\frac{1}{\chi^2(p, \lambda)}\right) \leq \frac{1}{p-2}$ et en utilisant le fait que la covariance de deux fonctions l'une croissante et l'autre décroissante est négative. Ainsi

$$\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\psi_{JS}}}{R(X, \theta)} \leq \lim_{n,p \rightarrow \infty} \left(l^2 \frac{n(n+2)M(n)}{p(p-2)} + 4l \frac{n(M(n))^{1/2}}{p} + 4l\lambda \frac{n(M(n))^{1/2}}{p^2} \right) \leq 0$$

Car $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{p} = c$, et $l(M(n))^{1/2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, on obtient finalement

$$\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\psi_{JS}}}{R(X, \theta)} = \lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{\psi}, \theta)}{R(X, \theta)} - \lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)} \leq 0,$$

et donc d'après (3.31) et (3.32)

$$\lim_{n,p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{\psi}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c}$$

d'où le résultat. ■

Exemple 3.16 *Idem à l'exemple 3.14, à savoir : $\psi_1(S^2, \|X\|^2) = \frac{\|X\|^2}{S^2(\|X\|^2 + 1)}$, et donc*

$$\delta_{\psi_1}(S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS} + \frac{1}{\|X\|^2 + 1} X \quad (3.39)$$

Dans ce cas il suffit de prendre $g(S^2) = \frac{1}{S^2}$ et de choisir $l = 1$.

3.2.4 Minimaxité

Nous rappelons ici un résultat de Strawderman [41] sur la minimaxité de la classe d'estimateurs suivante. Soit:

$$\delta_{\phi}(S^2, \|X\|^2) = \left(1 - l\phi(S^2, \|X\|^2) \frac{S^2}{\|X\|^2} \right) X \quad l > 0 \quad (3.40)$$

Théorème 3.17 *Si a) $\phi(S^2, \|X\|^2)$ est monotone non-croissante en S^2 et non-décroissante en $\|X\|^2$.*

b) $0 \leq \phi(S^2, \|X\|^2) \leq \frac{2(p-2)}{l(n+2)}$. Alors δ_{ϕ} est minimax.

Démonstration. Une démonstration simple de ce résultat est comme suit:

Pour $U = \frac{\|X\|^2}{\sigma^2}$, on a

$$R(\delta_\phi, \theta) = p\sigma^2 + \sigma^2 l E \left[l \frac{S^4 \phi^2(S^2, \sigma^2 U)}{U} - 2(p-2) \frac{S^2 \phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} \right] \\ - \sigma^2 E \left[4l \frac{S^2 \partial \phi(S^2, \sigma^2 U)}{\partial U} \right]$$

Cette dernière égalité étant obtenue à l'aide de l'égalité de Stein [38]. Comme $\phi(S^2, \|X\|^2)$ est non-décroissante en U il suffit d'avoir

$$E \left[l \frac{S^4 \phi^2(S^2, \sigma^2 U)}{U} - 2(p-2) \frac{S^2 \phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} \right] \leq 0$$

Notant $C_0 = \frac{2(p-2)}{l(n+2)}$, on a

$$E \left[l \frac{S^4 \phi^2(S^2, \sigma^2 U)}{U} - 2(p-2) \frac{S^2 \phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} \right] \\ = E \left[\frac{\phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} S^2 [l S^2 \phi(S^2, \sigma^2 U) - 2(p-2)] \right] \\ \leq E \left[\frac{\phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} S^2 [l S^2 C_0 - 2(p-2)] \right].$$

Du fait que $\phi(S^2, \|X\|^2)$ est non-croissante en S^2 , on a dans les deux cas où :

$$\phi(S^2, \|X\|^2) > C_0 \text{ et } \phi(S^2, \|X\|^2) \leq C_0$$

$$E \left[l \frac{S^4 \phi^2(S^2, \sigma^2 U)}{U} - 2(p-2) \frac{S^2 \phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} \right] \leq E \left[\frac{\phi(C_0, \sigma^2 U)}{U} S^2 [l S^2 C_0 - 2(p-2)] \right].$$

Et comme S^2 et U sont indépendantes on obtient

$$E \left[l \frac{S^4 \phi^2(S^2, \sigma^2 U)}{U} - 2(p-2) \frac{S^2 \phi(S^2, \sigma^2 U)}{U} \right] \leq E \left[\frac{\phi(C_0, \sigma^2 U)}{U} \right] E [l S^4 C_0 - 2(p-2) S^2] \\ \leq 0$$

d'où le résultat. ■

Notons que cette classe minimax d'estimateurs admet comme borne $\mathbf{Min} = \frac{c}{1+c}$ (proposition 3.12) mais ne l'atteint pas.

Nous avons alors la proposition suivante qui donne une classe d'estimateur minimax dont la borne **Min** est atteinte.

Proposition 3.18 Soit la classe d'estimateurs proposée en (3.34) on a alors;

$$\begin{aligned} \delta_{\psi}(S^2, \|X\|^2) &= \delta_{JS} + l\psi(S^2, \|X\|^2) \frac{S^2}{\|X\|^2} X \quad l > 0 \\ &= \left(1 - \left[\frac{S^2}{\|X\|^2} \left(\frac{p-2}{n+2} - l\psi(S^2, \|X\|^2) \right) \right] \right) X, \quad l > 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Si ψ vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\psi(S^2, \|X\|^2)$ est monotone non-décroissante en S^2 et non-croissante en $\|X\|^2$.
- 2) $|l\psi(S^2, \|X\|^2)| \leq \frac{p-2}{n+2}$. Alors si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c$ on a

$$\lim_{n, p \rightarrow \infty} \frac{R(\delta_{\psi}, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c},$$

quelque soit l positif tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} l(p-2) = 0$. (l depend de n).

Démonstration. Découle immédiatement des Théorèmes 3.13 et 3.17. ■

Exemple 3.19 Soit l'estimateur

$$\delta_{\psi_2}(S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS} + l\psi_2(S^2, \|X\|^2) \frac{S^2}{\|X\|^2} X \quad (3.42)$$

tel que $l\psi_2(S^2, \|X\|^2) = \frac{p-2}{n+2} \frac{S^2}{S^2+1} \exp(-\|X\|^2)$.

On remarque que la fonction ψ_2 vérifie les conditions de la proposition 3.18.

Notons ici que la classe d'estimateurs de la forme (3.40) est minimax et ne domine pas forcément l'estimateur de James-Stein au sens du risque quadratique usuel.

Une classe d'estimateurs dominant l'estimateur de James-Stein est donnée comme suit:

Soit

$$\delta_{\phi}(S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS}(X) + m\phi(S^2, \|X\|^2) X \quad m > 0 \quad (3.43)$$

où ϕ est une fonction mesurable positive, telle que $E[\phi^2(S^2, \|X\|^2)] < \infty$.

Dans ce cas là, la différence de risque notée : $\Delta_{\phi_{JS}} = R(\delta_{\phi}, \theta) - R(\delta_{JS}, \theta)$ vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_{\phi_{JS}} &= E [m^2 (\|X\|^2) \phi^2 (S^2, \|X\|^2) + 2m (\|X\|^2) \phi (S^2, \|X\|^2) - 2mdS^2 \phi (S^2, \|X\|^2)] \\ &\quad - 4m\lambda E [(\phi(S^2, \sigma^2 \chi_{p+2}^2(\lambda)))] \\ &\leq E [m\phi (S^2, \|X\|^2) [m \|X\|^2 \phi (S^2, \|X\|^2) + 2 \|X\|^2 - 2dS^2]] \quad \text{où } d = \frac{p-2}{n+2} \quad (3.44) \end{aligned}$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3.20 *La classe d'estimateurs (3.41) domine l'estimateur de James-Stein si*

$$1) 0 \leq \phi (S^2, \|X\|^2) \leq \frac{2}{m} \left(d \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\left(\frac{p-2}{n+2} \frac{s^2}{\|X\|^2} - 1 \geq 0 \right)} .$$

$$2) \text{ Si } \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{p} = c \text{ alors } \lim_{n, p \rightarrow +\infty} \frac{R(\delta_\phi, \theta)}{R(X, \theta)} = \frac{c}{1+c} .$$

Démonstration. 1) Découle de l'inégalité (3.44). 2) immédiat d'après (3.31) et (3.32). ■

Remarquons que tout estimateur dominant l'estimateur de James-Stein vérifie la propriété 2 de la Proposition 3.20. Ainsi la classe d'estimateurs:

$$\begin{aligned} \delta_\phi (S^2, \|X\|^2) &= \delta_{JS} + m\phi (S^2, \|X\|^2) \\ &= \delta_{JS}(X) + m \left(\frac{p-2}{n+2} \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) I_{\left(\frac{p-2}{n+2} \frac{s^2}{\|X\|^2} - 1 \geq 0 \right)} \\ &= \delta_{JS}(X) + m\delta_{JS}^-(S^2, \|X\|^2)X \end{aligned}$$

domine l'estimateur primitif de James-Stein. Et pour $m = 1$ on a

$$\delta_\phi (S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS} + \delta_{JS}^-(S^2, \|X\|^2)X$$

Donc $\delta_\phi (S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS}^+ (S^2, \|X\|^2) X$ domine $\delta_{JS} (S^2, \|X\|^2)$ d'après la proposition 3.20.

De plus son risque est minimal en $\lambda = 0$, par rapport à toute la famille de la classe d'estimateurs :

$$\delta_\phi(S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS} + m\delta_{JS}^-(S^2, \|X\|^2)X.$$

3.2.5 Simulations

Nous rappelons la forme de l'estimateur introduit par Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [43].

Soit $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$, $Y = \frac{X}{\sigma} \sim N_p\left(\frac{\theta}{\sigma}, I_p\right)$; et pour tout r ($2 < r < \frac{p+2}{2}$), on considère la famille d'estimateurs polynomiale :

$$\delta_{TZ}(X) = \delta_{JS}(X) + \alpha(S^2)^{\frac{r}{2}} X \|X\|^{-r} \quad (3.45)$$

où

$$\alpha = \frac{(r-2)(n+p)}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)}{(n+2)\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-2r+2}{2}\right)}.$$

On sait que le risque de l'estimateur $\delta_{TZ}(X)$ est

$$\begin{aligned} R(\delta_{TZ}, \theta) = R(\delta_{JS}, \theta) + \sigma^2 \left\{ 2\alpha \left[2^{\frac{r}{2}} (p-r) \frac{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{p-2}{n+2} 2^{(r+2)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \right\} E(\|Y\|^{-r}) \\ + \sigma^2 \alpha^2 2^r \frac{\Gamma\left(\frac{n+2r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} E(\|Y\|^{-2r+2}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nous rappelons aussi les formes des estimateurs donnés dans l'exemple 3.16 (3.39), i.e :

$$\delta_{\psi_1}(S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS} + \frac{\|X\|^2}{S^2(\|X\|^2 + 1)} \frac{S^2}{\|X\|^2} X = \delta_{JS} + \frac{X}{\|X\|^2 + 1}$$

$$(3.42), \text{ à savoir : } \delta_{\psi_2}(S^2, \|X\|^2) = \delta_{JS} + \frac{p-2}{n+2} \frac{S^4}{(S^2+1)\|X\|^2} \exp(-\|X\|^2) X.$$

Dont nous illustrons graphiquement leur risque ratio ainsi que ceux de Tze Fen Li,

James-Stein et la partie positive de James-Stein notés respectivement :

$$\frac{R(\delta_{\psi_1}, \theta)}{R(X, \theta)}, \frac{R(\delta_{\psi_2}, \theta)}{R(X, \theta)}, \frac{R(\delta_{TZ}, \theta)}{R(X, \theta)}, \frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}, \frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}, \text{ pour diverses valeurs de } n \text{ et } p.$$

Fig. 3 Graphe des risques ratios $\frac{R(\delta_{\psi_1}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{\psi_2}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{TZ}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$
 en fonction de $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$ pour $n = 10$ et $p = 4$.

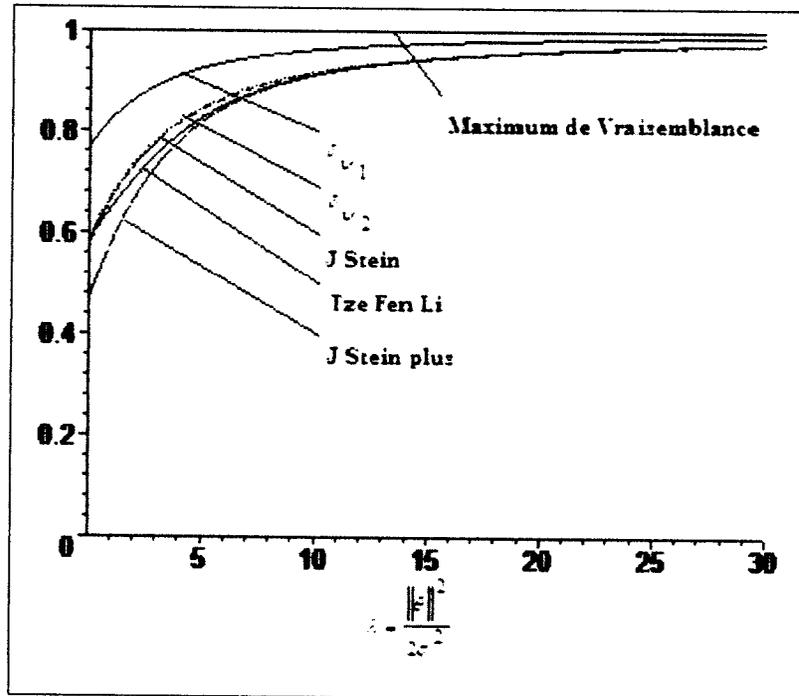
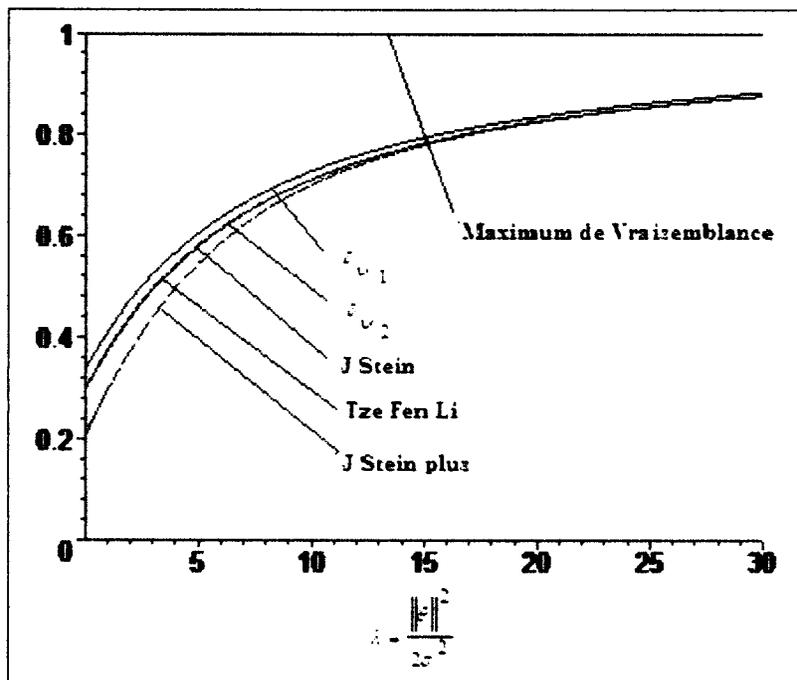
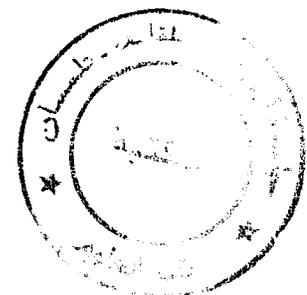


Fig. 4 Graphe des risques ratios $\frac{R(\delta_{\psi_1}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{\psi_2}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{TZ}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$
 en fonction de $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$ pour $n = 30$ et $p = 8$.



Nous remarquons que dans les deux cas de figures les risques ratios tendent vers une même limite strictement inférieure à 1 quand λ augmente ainsi que n et p .



Chapitre 4

Appendice

Théorème 4.1 (Théorème de Cochran). Soit E_1 et E_2 deux sous espaces orthogonaux supplémentaires de \mathbb{R}^k . $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vecteur gaussien centré de covariance I_k . On note Z_1 (respectivement Z_2) la projection orthogonale de X sur E_1 (respectivement sur E_2). Alors on a les propriétés suivantes sont vérifiées:

- a) Les variable aléatoire Z_1 et Z_2 sont indépendantes.
- b) $\|Z_1\|^2$ (resp. $\|Z_2\|^2$) suit une loi du χ_p^2 (resp. χ_q^2), avec $p + q = k$.

Démonstration. On note p (resp. q) la dimension de sous espace E_1 (resp. E_2) avec $p + q = k$. La matrice de projection orthogonale sur E_1 (resp. E_2) s'écrit

$$S_1 = P \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & 0_{q,q} \end{pmatrix} P' \quad (\text{resp. } S_2 = P \begin{pmatrix} 0_{p,p} & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix} P')$$

où P est une matrice orthogonale (i.e. $PP' = P'P = I_k$). Ainsi les matrices S_1 et S_2 vérifient les propriétés suivantes : i) elles sont symétriques. ii) $S_i^2 = S_i$ pour $i = 1, 2$. iii) $S_1 S_2 = S_2 S_1 = 0_{k,k}$. Posons

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 X \\ S_2 X \end{pmatrix} = S X \quad \text{avec } S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

Z est une transformation linéaire du vecteur gaussien X , alors Z est un vecteur gaussien; son espérance est

$$E(Z) = S E(X) = 0$$

et sa matrice de covariance est égale à

$$\text{Var}(Z) = S \text{Var}(X) S' = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1' & S_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 S_1' & 0 \\ 0 & S_2 S_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance étant diagonale par blocs, alors les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes de plus le vecteur Z_1 (resp Z_2) est un vecteur gaussien centré et ayant pour matrice de covariance S_1 (resp. S_2). D'où a). On définit le vecteur

$$W = P' Z_1 = P' S_1 X$$

le vecteur aléatoire W est un vecteur gaussien centré et sa matrice de covariance est

$$\text{Var}(W) = P' \text{Var}(Z_1) P = P' S_1 P = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & 0_{q,q} \end{pmatrix}$$

les variables W_{p+1}, \dots, W_k sont nulles presque sûrement. Le carré de la norme de W s'écrit donc

$$\|W\|^2 = \sum_{i=1}^p W_i^2$$

avec W_1, W_2, \dots, W_p sont des variable aléatoire indépendantes de même loi $N(0, 1)$. et par conséquent $\|W\|^2 \sim \chi_p^2$. D'autre part $\|W\|^2$ s'écrit aussi

$$\|W\|^2 = W'W = (P' S_1 X)' (P' S_1 X) = X' S_1' P P' S_1 X = X' S_1' S_1 X = \|S_1 X\|^2 = \|Z_1\|^2.$$

■

Proposition 4.2 Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et de même loi $N(0, 1)$. Les variables aléatoires $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (appelées moyennes empiriques) et $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ sont indépendantes. De plus la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ suit une loi du khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté.

Démonstration. Soit E_1 le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, 1, \dots, 1)$. La



projection orthogonale de (X_1, X_2, \dots, X_n) sur E_1 est de la forme $\lambda\delta$, c'est-à-dire le vecteur $(X_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, X_2 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \dots, X_n - \frac{\lambda}{\sqrt{n}})$ est orthogonal à δ , ainsi $\lambda = \sqrt{n\bar{X}_n}$. La projection orthogonale du vecteur $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sur le sous-espace E_2 qui est orthogonal à E_1 est telle que E_1, E_2 soient supplémentaires. Elle s'écrit sous la forme : $v' = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$. Avec $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ (car v et δ sont orthogonaux), et $(X_1 - v_1, X_2 - v_2, \dots, X_n - v_n)' = \alpha\delta$ (car $X - v$ appartient à E_1).

D'où

$$\alpha = \sqrt{n\bar{X}_n}, \text{ ainsi } v' = (X_1 - \bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n).$$

Comme $(X_1, X_2, \dots, X_n)'$ est gaussien, le Théorème 1 de l'Appendice assure l'indépendance des deux variables $\sqrt{n\bar{X}_n}$ et $v' = (X_1 - \bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$. Par conséquent les variables \bar{X}_n et $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ sont indépendantes. De plus comme $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \|v\|^2$, d'où $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ suit une loi du khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté (car la dimension de l'espace engendré par δ égale à 1. ■

Théorème 4.3 (Chebyshev's association inequality). Soient f et g deux fonctions réelles non décroissantes (respectivement non croissantes) définies sur \mathbb{R} . Si X est une variable aléatoire réelle, alors; a) Si f et g sont non décroissantes (respectivement non croissantes)

$$E[f(X)g(X)] \geq E[f(X)]E[g(X)]$$

b) Si f est non croissante et g est non décroissante (respectivement non décroissante et non croissante)

$$E[f(X)g(X)] \leq E[f(X)]E[g(X)]$$

Démonstration. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Si f et g sont non décroissantes, on a

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

d'où

$$E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \geq 0$$

en développant cette dernière inégalité et en utilisant le fait que X, Y sont indépendantes et identiquement distribuées on a le résultat a) (idem pour b)) D'où le résultat. ■



Lemme 4.4 La probabilité du χ^2 décentrée, $\chi_n^2(\delta)$, est la composée de la probabilité de poisson K de paramètre $\frac{\delta}{2}$ et de la transition de probabilité de N vers \mathbb{R}^+ , qui à tout k associe la probabilité du χ^2 centrée χ_{n+2k}^2 .

Autres expressions de ce lemme: Si une variable aléatoire Y suit, conditionnellement à une variable aléatoire K , la loi χ_{n+2K}^2 et si K suit la loi de Poisson $P\left(\frac{\delta}{2}\right)$, alors Y suit la loi $\chi_n^2(\delta)$. Et pour toute application f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , $\chi_n^2(\delta)$ -intégrable, on a

$$i) \int_{\mathbb{R}^+} f(x) \chi_n^2(\delta; dx) = \int_N \left[\int_{\mathbb{R}^+} f(x) \chi_{n+2k}^2(dx) \right] P\left(\frac{\delta}{2}; dk\right)$$

Démonstration. Elle découle de la définition même de la loi du $\chi_n^2(\delta)$ décentré. D'où le résultat. ■

Lemme 4.5 Soit Y une variable aléatoire gaussienne multidimensionnelle $N_p(\eta, I_p)$, soit $h : [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$. Alors pour

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p) \quad \text{et} \quad Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$$

on a

$$E \{ h(\|Y\|^2) Y_i^2 \} = E \left\{ h \left(\chi_{p+2}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\} + \eta_i^2 E \left\{ h \left(\chi_{p+4}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\},$$

ainsi

$$E \{ h(\|Y\|^2) Y^2 \} = p E \left\{ h \left(\chi_{p+2}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\} + \|\eta\|^2 E \left\{ h \left(\chi_{p+4}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E \{ h(\|Y\|^2) Y_i^2 \} &= E \left\{ E \left[h \left(Y_i^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) Y_i^2 / \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right] \right\} \\ &= E \left\{ \exp \left(-\frac{\eta_i^2}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_i^2)^k}{k!} E \left[h \left(\chi_{1+2k}^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) \chi_{1+2k}^2 / \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left\{ \exp \left(-\frac{\eta_i^2}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_i^2)^k}{k!} (1+2k) E \left[h \left(\chi_{3+2k}^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) / \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right] \right\} \\
&= E \left\{ \exp \left(-\frac{\eta_i^2}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_i^2)^k}{k!} E \left[h \left(\chi_{3+2k}^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) / \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right] \right\} \\
&\quad + E \left\{ \exp \left(-\frac{\eta_i^2}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_i^2)^k}{k!} (2k) E \left[h \left(\chi_{3+2k}^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) / \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right] \right\} \\
&= E \left[h \left(\chi_3^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) \right] + \eta_i^2 \exp \left(-\frac{\eta_i^2}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_i^2)^{k-1}}{(k-1)!} E \left[h \left(\chi_{5+2(k-1)}^2 + \sum_{j \neq i} Y_j^2 \right) \right] \\
&= E \left\{ h \left(\chi_{p+2}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\} + \eta_i^2 E \left\{ h \left(\chi_{p+4}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

la dernière égalité découle du fait que $\sum_{j \neq i} Y_j^2 \sim \chi_{p-1}^2 \left(\sum_{j \neq i} \eta_j^2 \right)$ et de l'indépendance des deux variable aléatoires $\sum_{j \neq i} Y_j^2$ et Y_i^2 . D'où

$$E \{ h(\|Y\|^2) Y^2 \} = p E \left\{ h \left(\chi_{p+2}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\} + \|\eta\|^2 E \left\{ h \left(\chi_{p+4}^2 \left(\frac{\|\eta\|^2}{2} \right) \right) \right\}.$$

■

Une version plus générale du lemme 4.5 est fournie par le théorème suivant.

Théorème 4.6 Soit $z \sim N_m(\mu, I_m)$, et soit A une matrice non stochastique de type $m \times m$, symétrique définie positive. Si $\varphi(\cdot)$ est une fonction mesurable de \mathbb{R}^+ à valeur dans \mathbb{R} , alors

$$i) E \left[\varphi(z'z) z \right] = \mu E \left[\varphi(\chi_{m+2}^2(\lambda)) \right] \quad \text{où } \lambda = \mu' \mu / 2$$

$$ii) E \left[\varphi(z'Az) z'Az \right] = \text{tr}(A) E \left[\varphi(\chi_{m+2}^2(\lambda)) \right] + \mu' A \mu E \left[\varphi(\chi_{m+4}^2(\lambda)) \right]$$

Si $A = I_m$, alors ii) devient

$$iii) E \left[\varphi(z'z) z'z \right] = m E \left[\varphi(\chi_{m+2}^2(\lambda)) \right] + \mu' \mu E \left[\varphi(\chi_{m+4}^2(\lambda)) \right].$$



Chapitre 5

Conclusion

Dans le cas de l'estimation de la moyenne θ d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$ dans \mathbb{R}^p , Casella et Hwang [14] ont montré que si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c_1 > 0$ alors le rapport $\frac{R(\delta_{JS}^+(X), \theta)}{R(X, \theta)}$ tend $\frac{c_1}{1 + c_1}$. En prenant le même modèle, à savoir $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ avec cette fois-ci σ^2 inconnu, et estimé par la statistique S^2 indépendante de X et de loi $\sigma^2 \chi_n^2$ dans \mathbb{R}^+ , nous avons pour notre part, montré que nous obtenons un rapport similaire dépendant de la taille de n de l'échantillon, à celui trouvé par ces derniers, dès que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$. De plus nous obtenons un rapport constant et, quand n et p tendent simultanément vers $+\infty$ et ce sans tenir compte d'une quelconque relation d'ordre ou fonctionnelle entre n et p . Nous avons pour notre part, montré que pour des estimateurs à rétrécisseurs de la forme $\delta = (1 - \psi(S^2, \|X\|^2))X$, nous obtenons un rapport similaire dépendant de la taille n de l'échantillon, à celui trouvé par ces derniers, dès que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c > 0$. De plus nous obtenons un rapport constant inférieur à 1, quand n et p tendent simultanément vers $+\infty$ et ce, sans tenir compte d'une quelconque relation d'ordre ou fonctionnelle entre n et p . Nous avons obtenu le même résultat pour des formes particulières de δ , sans condition de minimaxité dessus et d'autres formes de δ qui sont plus précisément minimax. Enfin nous avons déduit que tout estimateur à rétrécisseur dominant l'estimateur primitif de James-Stein a un risque ratio qui tend vers $\frac{c}{1 + c}$ quand n et p tendent vers l'infini. Li Sun [27] s'est lui aussi intéressé au cas où σ^2 est inconnu, mais a étudié le comportement des rapports $\frac{R(\delta, \theta)}{R(X, \theta)}$, $\frac{R(\delta_{JS}, \theta)}{R(X, \theta)}$ et $\frac{R(\delta_{JS}^+, \theta)}{R(X, \theta)}$, quand seulement p tend vers l'infini. Les simulations montrent dans le cas des exemples

choisis, des comportements asymptotiques des risques ratios, identiques, et convergent tous vers la même limite strictement inférieure à 1. Une idée serait de voir si nous obtenons des rapports similaires dans le cas général des modèles sphériques symétriques. L'extension de nos travaux aux estimateurs minimax proposés par Maruyama [32] est aussi une idée que nous explorons actuellement.

Bibliographie

- [1] Baranchik, A. .J. (1964). *Multiple regression and estimation of the mean of a multivariate normal distribution*. Stanford Univ. Technical Report 51.
- [2] Baranchik, A. .J. (1970) .*A family of minimax estimatos of the mean of a multivariate normal distribution*. Ann. Math. Stat ,41,2,642-645.
- [3] Benmansour, D .*Problèmes d'estimation par rétrécisseurs de la moyenne d'une loi gaussienne en dimension supérieure*. Thèse Doctorat Décembre 2007 U.A.B Tlemcen.
- [4] Benmansour, D et Hamdaoui A. *Limit of the ratio of risks of James-Stein estimators with unknown variance"* Far East Journal of theoretical Statistics, Volume 36, Issue1, Pages 31-53 (July 2011)
- [5] Benmansour, D et Mourid, T, *Etude d'une classe d'estimateurs avec rétrécisseur de la moyenne d'une loi gaussienne"*). Annales de l'ISUP volume 51 - Fascicule 1-2 (octobre 2007).
- [6] Berger, J ,O (1976), *Admissible minimax estimation of a multivariate normal mean with arbitrary quadratic loss*, The Annals of Statistics, Vol. 4, No. 1, 223-226.
- [7] Berger, J ,O and Bock, M. E. (1976), *Estimating Singularities of Stein-type Estimators of Location Vectors* . J Roy Statist .soc. Ser .B..38 166-170 .
- [8] Bock, M. E. (1975), *Minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution*, The Annals of Statistics, Vol. 3, No. 1, 209-218.
- [9] Box, G. E. P and Tiao, G. C. (1973). *Bayesian inference in statistical analysis*. Addison-Wesley, Reading, MA.



- [10] Brandwein, C and Strawderman, W (1990), *Stein estimation: The spherically symmetric case*, Statistical Science, Vol. 5, No. 3, 356-369.
- [11] Brandwein, C and Strawderman, W (1991), *Generalizations of Stein estimation under spherical symmetric*, Ann. Statist. 19. 1639-1650.
- [12] Brandwein, C and Strawderman, W (2012). *Stein estimation for Spherically Symmetric Distributions*. Statistical Science, Vol. 27, No. 1, 11-23.
- [13] Casella, G. (1990), *Estimators with nondecreasing risk: Application of a Chi-squared identity*, Statistics & Probability Letters 10, 107-109.
- [14] Casella, G and Hwang, J.T. (1982), *Limit expressions for the risk of James-Stein estimator*, Canad. J. Statist. 10(4) , 305-309.
- [15] Efron, B and Morris, C.(1976). *Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution*. Ann. Statist., 8, 372-379.
- [16] Fourdrinier, D. and Strawderman, W, E (1996), *A Paradox Concerning Shrinkage Estimators: Should a known Scale Parameter Be Replaced by an Estimated value in the Shrinkage Factor?* Journal of Multivariate Analysis, 59 , 109-140.
- [17] Fourdrinier, D. and Strawderman, W, E, Wells, M. T (1998), *On the construction of bayes minimax estimators*, Ann.Statist 26, 660-671.
- [18] Fourdrinier, D. and Strawderman, W, E (2008). *Generalized Bayes minimax estimators of location vectors for Spherically Symmetric distributions*. Journal of Multivariate Analysis, 99 , 735-750.
- [19] Gruber ,Marvin. H. G. (1998), *Improving efficiency by shrinkage* . Statistics :text-books and monographs volume 156.
- [20] Hamdaoui, A and Benmansour, D (2014), *Asymptotic properties of risks ratios of shrinkage estimators* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. Doi: 10,15672 / HJMS.2014377624.



- [21] Hansen Bruce E. (2008), *Generalized Shrinkage Estimators*, Research supported by the National Science Foundation. Department of Economics, 1180 Observatory Drive, University of Wisconsin, Madison, WI 53706
- [22] Hoffmann Kurt (2000), *Stein estimation - A review*. Statistical Papers 41, 127-158 .
- [23] James, W and Stein, C. (1961), *Estimation of quadratic loss* Proc 4th Berkeley Symp, Math. Statist. Prob., Vol.1, 361-379 , Univ of California Press , Berkeley.
- [24] Judge, G. G. and Bock M. E.(1978), *The statistical implications of pre-test and Stein rule Estimators in econometrics*. North - Holland , Amsterdam .
- [25] Kubokawa,T. (1991), *An approach to improving the James-Stein estimator*. J.Multivariate. Anal.,36 ,121-126.
- [26] Lindley, D. V and Smith A. F. M. (1972), *Bayes estimates for the linear model (with discussion)*. J. Roy. Statist. Soc. B 34, 1-41. M
- [27] Li Sun. (1995), *Risk ratio and minimaxity in estimating the multivariate normal mean with unknown variance*, Scand. J. Statist. 22 (1), 105-120.
- [28] Maruyama, Y. (1996), *Estimation of the mean vector and the variance of a multivariate normal distribution*. Master thesis of graduate school of economics, University of Tokyo.
- [29] Maruyama, Y. (2000), *Minimax admissible estimation of a multivariate normal mean and improvement upon the James -Stein estimator*. Doctor thesis , Faculty of Economics , University of Tokyo.
- [30] Maruyama, Y. (2003), *Admissible minimax estimator of a mean vector of scale mixtures of multivariate normal distribution*, J. Multivariate Anal. 21, 69-78.
- [31] Maruyama,Y. (2004), *Stein's Idea and Minimax Admissible Estimation of a Multivariate Normal Mean* ; J Multivariate Anal., 88 , 320 - 334.
- [32] Maruyama Y. (2014), *l_p -norm based James-Stein estimation with minimaxity and sparsity*, Statistics Theory (math.ST) arXiv: 1402.0302.

- [33] Maruyama, Y and Katsunori, I (2005), *Sensitivity of Minimarity and Admissibility in the Estimation of a Positive Normal Mean*. Ann. Inst. Statist. Math. Vol. 57, No. 1, 145-156.
- [34] Maruyama, Y and Strawderman, W. E (2005), *Necessary Conditions For Dominating The James-Stein Estimator*. Ann. inst. statist. Math 57 (2005), n°1, 157-165.
- [35] Shao, P. and Strawderman, W. E. (1994), *Improving on the James-Stein positive part*. Ann. Statist., 22, 1517-1539.
- [36] Robert Christian. (1988), *An explicit Formula for the Risk of the Positive-Part James-Stein Estimator*. The Canadian Journal of Statistics; Vol. 16, No. 2 Pages 161-168 .
- [37] Stein, C. (1956), *Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution*. Proc 3th Berkeley Symp, Math. Statist. Prob., Vol. 1, 197-206, Univ of California Press, Berkeley.
- [38] Stein, C. (1973), *Estimation of the mean of a multivariate normal distribution*. In Proc Prague Symp Asymptotic Statist , 345 - 381.
- [39] Stein, C. (1981), *Estimation of the mean of a multivariate normal distribution*, Ann. Statist. 9, 1135-1151.
- [40] Strawderman, W. E. (1971), *Proper Bayes minimax estimators of the multivariate normal mean*. Ann. Math. Stat., 42, 1, 385-388.
- [41] Strawderman, W. E. (1973), *Proper Bayes minimax estimators of the multivariate normal mean vector for the case of common unknown variances*. Ann. Stat., 1, 6, 1189-1194.
- [42] Strawderman, W. E. (1974), *Minimax estimation of location parameters for certain spherically symmetric distributions*. Journal of multivariate analysis 4, 255-264.
- [43] Tze Fen Li and Wen Hou Kuo (1982), *Generalized James-Stein Estimators* , Comm. Statist.-Theor. Math., 11 (20) , 2249-2257.



- [44] Zhou, H. H. and Hwang, J. T. G. (2005). *Minimax estimation with thresh-olding and its application to wavelet analysis*. Ann. Statist. 33 101-125.

Résumé : Nous présentons des travaux sur les problèmes d'estimations par rétrécisseurs de la moyenne de $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans \mathbb{R}^p . Et plus précisément le comportement des risques ratios des estimateurs $\delta = (1 - \varphi(S^2, \|X\|^2))X$ quand p tend vers l'infini, sous la condition $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c$ ($c > 0$). $(1 - \varphi)$ est le rétrécisseur, dont plusieurs formes sont étudiées. Des résultats de convergence vers le rapport $\frac{c}{1+c}$ sont établis en particulier pour des formes extraites de la forme générale. (Quand n et p tendent vers l'infini). Quand $\sigma^2 = 1$, Casella et Hwang ont montré que si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c > 0$, alors les risques ratios tendent vers $\frac{c}{1+c}$. En prenant le même modèle, à savoir $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ avec cette fois-ci σ^2 inconnu, et estimé par : $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$ indépendante de X , nous avons pour notre part, montré que pour des estimateurs à rétrécisseurs de la forme $\delta = (1 - \varphi(S^2, \|X\|^2))X$, nous obtenons un rapport similaire dépendant de la taille n de l'échantillon, à celui trouvé par ces derniers, dès que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p \sigma^2} = c > 0$. De plus nous obtenons un rapport constant inférieur à 1, quand n et p tendent simultanément vers $+\infty$ et ce, sans tenir compte d'une quelconque relation entre n et p . Nous avons obtenu le même résultat pour des formes particulières de δ , sans condition de minimaxité dessus et d'autres formes de δ qui sont plus précisément minimax. Enfin nous avons déduit que tout estimateur à rétrécisseur dominant l'estimateur primitif de James-Stein a un risque ratio qui tend vers $\frac{c}{1+c}$ quand n et p tendent vers l'infini. Li Sun s'est intéressé au cas où σ^2 est inconnu, et a étudié les limites des risques ratios quand p tend vers l'infini.

Mots-clés: Estimateurs de James-Stein, Partie positive de l'estimateur de James-Stein, Variable Gaussienne multidimensionnelle, Loi du Khi-2 décentrée, Rétrécisseurs, Coût quadratique, Minimaxité.

Abstract : We present a synthesis of the work on the problems of estimates by the mean of $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ in \mathbb{R}^p . And more specifically the behaviour of risk ratios of the estimators $\delta = (1 - \varphi(S^2, \|X\|^2))X$, when p tends to infinity, conditional $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c$ ($c > 0$). $(1 - \varphi)$ is the shrinkage factor, whose various forms are studied. Convergence report $\frac{c}{1+c}$ results are established especially for shapes extracted from the overall shape. (When n and p tends to infinity). In the case $\sigma^2 = 1$, Casella and Hwang showed that if $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c > 0$ then the ratio risk tend to $\frac{c}{1+c}$. In our work by taking the same model, namely $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ with σ^2 unknown, and estimated by : $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$ independent of X , we have showed that for the shrinkage estimators of the form $\delta = (1 - \varphi(S^2, \|X\|^2))X$, we obtain a similar ratio dependent of the sample size n , as soon as $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p \sigma^2} = c > 0$. Moreover, we obtain a ratio constant less than 1, when n and p tend simultaneously to $+\infty$, without assuming any relation between n and p . We obtained the same result for particular forms of δ , which are not necessarily minimax, and for other forms of δ which are minimax. Finally we concluded that any shrinkage estimator dominating the James-Stein estimator has a risk ratio tending to $\frac{c}{1+c}$ when n and p tend to infinity. Li Sun was also interested in the case where σ^2 is unknown, but he studied the behaviour of the ratio risk when only p tends to infinity.

Keywords : James-Stein estimator, positive part of James-Stein, multivariate gaussian random variable, non-central chi-square distribution, shrinkage estimator, quadratic risk, Minimaxity.

ملخص : نقوم بعرضاً شاملاً حول التقديرات بمعاملات الإنكماش المتوسطة نموذج غوس $N(\theta, \sigma^2 I_p) \sim X$ في \mathbb{R}^p وبالتحديد درس تصرفات نسب الخطر لتقديرات ذات معاملات الإنكماش من الشكل $\delta = (1 - \varphi(S^2, \|X\|^2))X$ في حالة بعد الفضاء p يتزايد إلى ما لا نهاية، تحت الشرط $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2 p} = c$ ($c > 0$). يمثل معامل الإنكماش $(1 - \varphi)$ بعض النتائج المتعلقة بتقارب نسب خطر التقديرات نحو $\frac{c}{1+c}$ ، استخرجت من التقديرات المستتجة من الشكل العام لما يكون n و p يتزايدان إلى ما لا نهاية. في حالة $\sigma^2 = 1$ ، كزلا و وونغ برهننا على أنه إذا كان $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p} = c$ ($c > 0$) فإن النسب المخاطر و تتوالى إلى $\frac{c}{1+c}$. بأخذ نفس النموذج أي $N(\theta, \sigma^2 I_p) \sim X$ بحيث نعتبر أن σ^2 غير معلوم، و يقدر ب $S^2 \sim \sigma^2 \chi_n^2$ مستقل عن X بأخذ تقديرات من الشكل $\delta = (1 - \varphi(S^2, \|X\|^2))X$ ، تصالفاً على نسب خطر $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p \sigma^2} = c$ ($c > 0$)، هذا لقد حصلنا على هذا نتج تصالفاً على نسب خطر ثابتة أصغر تماماً من 1 في حالة n و p يتزايدان إلى ما لا نهاية دون اعتبار أي علاقة ترتيب أو علاقة وظيفية بين n و p . لقد حصلنا كذلك على نفس النتائج من أشكال خاصة للتقدير δ دون أن يكون مينيمكسو من أجل أشكال أخرى لـ δ مينيمكس. وفي الأخير استنتجنا أن نسبة خطر كل تقدير بمعامل إنكماش أفضل من تقدير جيمس-ستين مع التقدير X تتوالى إلى $\frac{c}{1+c}$ لما n و p يتزايدان إلى ما لا نهاية. لي سونايم هو الآخر بالحالة لما يكون الوسط σ^2 مجهول، لكنه اقتصر برأسته لتصرفات النسب المخاطر، و لما n و p يتزايدان إلى ما لا نهاية. التمثيلات البيانية توحي أنه في حالة أمثلة مختارة، تصرفات نسب الخطر في جوار ما لا نهاية، تكون ثابتة و تتوالى إلى نفس القيمة الأصغر تماماً من 1.

الكلمات الرئيسية: مقدر جيمس-ستين شتاني، جزءاً إيجابياً من جيمس-ستين، مقدر عشوائي الصيغاتي متعدد المتغيرات، مقدر إنكماش التربيعية المخاطر، مينيمكس، توزيع χ^2 غير المركزي.