REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID DE TLEMCEN
INSTITUT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Option : Analyse Non Linéaire ; Equations Différentielles

Par

Naïma DAOUDI-MERZAGUI

Méthodes topologiques et variationnelles Pour L'étude de problèmes aux limites périodiques

Soutenue le 21 juillet 1999 devant le jury :

Président :	
Noureddine **GHOUALI**	Professeur (Univ. Tlemcen)
Rapporteur:	
Abdelkader **BOUCHERIF**	Professeur (Univ. Tlemcen)
Examinateurs :	
Anna **CAPIETTO**	Professeur (Univ. Torino-Italy)
Hacene **DIB**	Maître de Conférence (Univ. Tlemcen)
Hocine **MOKHTAR-KHARROUBI**	Maître de Conférence (Univ. Oran)

A la mémoire de mes parents

Qui, un jour, m'ont inscrite à l'école.

REMERCIEMENTS

Ce résultat, qui est modeste, ne retrace pas fidèlement tout le bien que j'ai reçu de ceux qui m'ont enseigné une part de leur savoir.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur Abdelkader Boucherif, pour son aide et ses conseils précieux qu'il n'a eu cesse de prodiguer tout au long de ce travail ; au Professeur Anna Capietto, de l'Université de Torino-Italy, pour m'avoir accueillie dans son département de mathématiques et pour avoir accepté d'évaluer cette thèse.

Je remercie le Professeur Noureddine Ghouali pour avoir honoré la présidence du jury et Messieurs Hacène Dib, Maître de conférence à l'Université de Tlemcen, et Hocine Mokhtar-Kharroubi, Maître de conférence à l'Université d'Oran Es Senia pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour leurs discussions et conseils.

Table des Matières

Introduction

Les équations différentielles représentent l'une des parties les plus importantes des mathématiques. Elles ont des applications dans l'étude d'un grand nombre de systèmes physiques et biologiques.

Un des problèmes fondamentaux dans l'étude des équations différentielles est la recherche de solutions périodiques. Ceci se justifie par le fait que l'on observe les mouvements périodiques, les vibrations périodiques dans presque chaque branche des sciences et dans la vie courante. Nous pouvons citer, par exemple, la rotation de la Terre autour de son axe, le mouvement d'un pendule d'une horloge, etc... En fait de plus en plus de phénomènes physiques et biologiques sont modélisés par des équations différentielles périodiques. Un autre aspect important de l'étude des équations différentielles est la recherche de trajectoires ou orbites fermées dans le plan de phase, qui correspondent à des solutions périodiques.

Cette thèse est consacrée à l'étude du problème aux limites périodiques associé à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$u"(t) + f(t, u(t)) = e(t) \qquad 0 < t < T \tag{0.1}$$

dans le cas où le terme forçant $e(t)$ est seulement mesurable et borné.

Notre objectif est de déterminer des conditions suffisantes naturelles sur les non linéarités f qui permettent d'obtenir des résultats d'existence. Notre approche est basée sur différentes techniques de l'analyse non linéaire, et en particulier, les méthodes topologiques et variationnelles.

Ainsi nous essayons de faire fonctionner des mécanismes de démonstration connus dans le cas autonome pour obtenir des résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour une classe plus large de non linéarités, non linéarités non autonomes (chapîtres 2, 3, 4, 6, 7), ou encore dépendants d'un paramètres s (non autonome en s, (chapître 5)).

Nous combinons des techniques de démonstration utilisées séparément par différents auteurs (cf.[37], [38], [40], [48], [50], [52], [53], [54], [55], [60], [87], [88], [113], [114], [115]).

Dans le premier chapître nous introduisons les définitions de ces méthodes. Nous donnons également un aperçu succint sur l'historique de leurs applications dans un domaine particulier: la recherche des solutions périodiques des équations différentielles ordinaires du second ordre . Dans le second chapitre, nous montrons l'existence de solutions périodiques dans le cas où la non linéarité f est discontinue par rapport à u en appliquant une combinaison entre *la théorie des sur et sous-solutions* et *la transversalité topologique* .Dans les troisième et quatrième chapitres , nous combinons la *théorie des sur et sous-solutions* et *le degré topologique* pour analyser le problème périodique considéré, d'abord dans le cas où f présente une singularité par rapport à u, ensuite dans le cas où la non linéarité f est continue. Dans le cinquième chapitre , nous appliquons *le théorème généralisé* de Poincaré-Birkhoff pour obtenir la multiplicité de solutions périodiques dans le cas où la non linéarité dépend d'un paramètre s. Enfin, les sixième et septième chapîtres sont consacrés à l'analyse de notre problème par une approche variationnelle dans le cas où f est continue. Nous commençons par montrer l'existence de solutions périodiques au voisinage de solutions constantes, puis l'existence de solutions sous-harmoniques dans le cas d'une non linéarité dont le potentiel est à croissance sous-quadratique.

Chapitre 1

Méthodes topologiques et variationnelles dans l'étude des équations différentielles non linéaires du second ordre

1.1 Méthode topologique globale

Poincaré fut le premier à introduire les méthodes topologiques (qualitatives) dans l'étude de problèmes non-linéaires. Son travail dans ce sens commença en 1879 par sa thèse et se développa par la suite dans son ouvrage en trois volumes : *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* en 1890. Il y étudia les solutions périodiques d'équations différentielles.

" Bien que Poincaré se borne à des cas très particuliers, les méthodes dont il se sert permettent des applications beaucoup plus générales et peuvent encore conduire à beaucoup de nouveaux résultats" écrit Liapounoff en 1907.

Les idées introduites par Poincaré englobent l'utilisation de *théorèmes de point-fixe* et les méthodes de continuation. Son premier résultat apparait dans " *Compte rendu*" en 1883 [106].

L'application des méthodes topologiques dans l'étude des problèmes aux limites pour équations différentielles ordinaires est souvent basée sur une formulation abstraite et l'utilisation de *la théorie du degré.*

1.1.1 Procédé d'étude d'une équation différentielle du second ordre

Considérons l'équation abstraite

$$F(x) = y \tag{1.1}$$

où $F : X \to Y$ est une application régulière et X, Y sont deux espaces de Banach.

Une méthode standard, mais encore très utilisée, est d'essayer de montrer que:

(i) ImF est ouvert, ou bien

(ii) ImF est fermé.

Dans le cas (i), on utilise le *théorème des fonctions implicites* pour obtenir l'existence de solutions. En effet si $y_0 = F(u_0)$, pour montrer qu'un voisinage de y_0 est contenu dans l'image d'un voisinage de u_0, on essaie de montrer que l'opérateur linéaire continu $A = F'(u_0) : X \to Y$ est bijectif (il suffit en fait qu'il soit surjectif) pour que l'existence de solution découle de l'application du *théorème des fonctions implicites.*

Dans le cas (ii) on montre que F est une application propre, i.e. que la préimage de tout compact est compact. Ce qui revient à faire une estimation à priori des solutions possibles.

Dans son article intitulé *Les problèmes non linéaires* [80] Leray résumait comme suit la méthode qu'il développa avec Schauder [82] pour étudier une importante classe d'équations non linéaires dans des espaces de Banach:

"Pour affirmer que l'équation $x + \mathcal{F}(x) = 0$ est solvable, il est suffisant de prouver qu'il n'existe pas de solution arbitrairement grande quand on réduit l'équation continûment à une équation comme $x = 0$".

Le succès de cette méthode dans l'étude de types variés d'équations différentielles non linéaires, intégrales ou fonctionnelles fut incontestable.

En 1952 Stopelli [119] utilise le *théorème de Schauder (de point fixe)* pour montrer l'existence d'au-moins une solution T-périodique de l'équation différentielle ordinaire

$$y" + y' |y'| + q(t)y' + y - p^2(t)y^3 = f(t)$$

où p, q et f sont continues et T-périodiques et p positive.

Il déforma l'équation en une autre plus simple

$$y'' + y' |y'| + y' + y + y^3 = 0$$

qui a seulement trois solutions T-périodiques (isolées)

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = -1$$

et fit une estimation à priori pour les solutions T-périodiques possibles (cf[116], [73] pour plus d'informations bibliographiques).

Remarque 1.1. Une variante de cette approche est "*la Méthode de continuation*" *(transversalité)* où l'opérateur F est continûment connecté par une famille f_t dépendant d'un paramètre t, $0 \leq t \leq 1$ telle que , $f_1 = F$, à un opérateur f_0 pour lequel il y a existence de solution pour (1.1).

Alors on essaie de montrer:

(i) l'ensemble $\{ t :$ une solution existe $\}$ est ouvert;

(ii) l'ensemble $\{ t :$ une solution existe $\}$ est fermé.

Là encore on s'appuie sur le *théorème des fonctions implicites* et l'estimation à priori.

Dans le paragraphe suivant, nous considérons un autre moyen d'étude de problèmes non linéaires: le *degré topologique* .

1.1.2 Degré topologique

Une application degré D_0 a été construite en premier par Kronecker [75] en 1869 dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}^n$, F de classe C^1et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ admettant une frontière régulière telle que $0 \notin F(\partial\Omega)$ noté $D_0(F, \Omega, 0)$ et par la suite par Brouwer [23] en 1912 quand X et Y sont des espaces vectoriels orientés de dimensions finies , F continue et Ω un ouvert de X telle que $0 \notin F(\partial\Omega)$ (il est appelé degré de Brouwer et noté: $\deg(F, \Omega, 0)$).

En 1934 Leray et Schauder [82] construisirent une application degré D_I quand $X = Y$, X est un espace de Banach et $F = I+N$ où I est l'application identité sur X et $N : \overline{\Omega} \to X$ compact et $0 \notin F(\partial\Omega)$ (il est appelé degré de Leray-Schauder et noté: $\deg(F, \Omega, 0)$ et il se réduit à celui de Brouwer quand X est de dimension finie).

Pour une présentation récente de ces degrés, le lecteur intéressé peut se séférer à la liste non exhaustive: [27],[39],[74],[83],[87],[88],[96],[103].

La formulation abstraite d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire mène en général à un opérateur abstrait qui est la somme d'une application linéaire de Fredholm d'indice zéro et d'une autre non linéaire ayant des propriétés de compacité relativement à l'application linéaire. Ces problèmes peuvent être réduits à des équations équivalentes de type Leray-Schauder.

Pour éviter cette réduction une *théorie de degré* fut développé [90] en utilisant des techniques de Liapounoff-Schmidt (cf.[103]).

Définition du degré dans le cas classique

• Degré d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin F(\partial\Omega)$.

1) Si pour tout x, solution de $F(x) = y$ dans Ω, $F'(x)$ n'est pas singulière, alors le nombre m de ces x est fini (conséquence du *théorème d'inversion locale*). Au triplet (F, Ω, y) on peut associer un nombre entier relatif appelé degré de F au point y par rapport à l'ouvert Ω, noté $\deg(F, \Omega, y)$ et donné par

$$\deg(F, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{m} sgn \det F'(x_i)$$

2) Si l'équation $F(x) = y$ admet des solutions x telles que $F'(x)$ est singulière, ce degré est donné par une intégrale.

Soit α^* un nombre réel strictement positif défini par

$$\alpha^* := \min \{\|F(x) - y\|_2 ;\ x \in \partial\Omega\}$$

où $\|.\|_2$ désigne la norme l_2 de $\mathbf{R}^n$. Le degré de F au point y par raport à l'ouvert Ω et la fonction poids ψ est donné par

$$\deg(F, \Omega, y) = d_\psi(F, \Omega, y) = \int_{\mathbf{R}^n} \Psi(x) dx$$

où $\Psi(x) = \begin{cases} \psi\left(\|F(x) - y\|_2\right) \det F'(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$

avec ψ une fonction poids d'indice α, $0 < \alpha < \alpha^*$ (i.e. $\psi : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$, continue, telle que il existe $\delta \in]0, \alpha[$ Supp $\psi = [\delta, \alpha]$ et $\int_{\mathbf{R}^n} \psi(\|x\|_2) dx = 1$).

Le degré intégral de F est indépendant du choix de ψ (cf. 6.1.4[104]). De plus si $F'(x)$ n'est pas singulière pour tout $x \in \Gamma := \{x \in \Omega; F(x) = y\}$ alors

$$d_\psi(F, \Omega, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} sgn \det F'(x_i) & si\ \Gamma = \{x_1, ..., x_m\} \\ 0 & si\ \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Cette définition est prolongée dans le cas d'une fonction continue sur Ω en se basant sur le *théorème d'approximation de Weierstrass* et $\deg(F, \Omega, y) = \lim_{k \to \infty} (F, \Omega, y)$ où (F_k) est une suite de fonctions continûment différentiables sur Ω convergent vers F (i.e. $\lim_{k \to \infty} \|F_k - F\|_\Omega := \lim_{k \to \infty} (\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|F_k(x) - F(x)\|_2) = 0$)

• Degré d'une fonction définie sur un Banach.

Dans un espace de Banach X le degré topologique a été appliqué aux opérateurs de la forme

$$F = I - K \tag{1.2}$$

où I est l'opérateur identité et K un opérateur compact et continu.

Considérons l'équation (1.1) avec F de la forme (1.2) définie dans la fermeture d'un domaine borné Ω de X à valeurs dans X.

Soit :

$$y \notin F(\partial\Omega) \tag{1.3}$$

le degré de l'application F dans $\overline{\Omega}$ au point y est noté $\deg(F, \Omega, y) = \nu$, un entier obtenu à partir du degré défini sur des espaces de dimension finie, par approximation de K

par $K\varepsilon$ défini sur $X\varepsilon$ de dimension finie et contenant y; alors $\deg(F,\Omega,y)$ est défini par $\deg(I-K\varepsilon,\ \Omega\cap X_\varepsilon,\ y)$.

Pour vérifier que ceci est indépendant de ε, ε assez petit, on utilise le fait que le degré ne change pas par extension de l'application à un produit d'espaces en prenant le produit de F par l'application identité de l'autre espace.

Les principales propriétés du degré sont:

a) Si $\nu = \deg(F,\Omega,y) \neq 0$, alors $F(x) = y$ admet une solution dans Ω. Dans le cas où $F = I,\ \nu = \deg(F,\Omega,y) = 1$

b) Si $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\Omega}_i$,Ω_i ouverts disjoints et $y \notin F(\partial\Omega_i)$, $\forall i$, alors

$$\deg(F,\Omega,y) = \sum_i \deg(F,\Omega_i,y)$$

et $\deg(F,\Omega_i,y)$ n'est pas nul pour au plus un nombre fini de valeurs de i

Remarque : La compacité de $F^{-1}\{y\}\cap\overline{\Omega}$ implique que $F^{-1}\{y\}\cap\Omega_i$ n'est pas vide pour un nombre fini de valeurs de i.

c) Le degré ν est invariant par l'homotopie $F_t = I - K_t, 0 \leq t \leq 1$, pourvu que $\left\{K_t(x); x\in\overline{\Omega}, 0\leq t\leq 1\right\}$ est à fermeture compacte et $y \notin F_t(\partial\Omega)\ \forall t$.

d) Supposons qu'une solution x de $F(x) = x - K(x) = y$ est un point régulier de F (i.e. F est Frechet différentiable en x et $F'(x) \neq 0$). (Par application du *théorème des fonctions implicites*, c'est une solution isolée). Alors le degré local (indice) de F au point x est défini par

$$ind(x) = loc.\deg F \text{ en } x = \deg(F, B(x,\varepsilon), y).$$

Il est indépendant de ε, pour ε petit, et égal à $+1$ ou -1 selon que la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres négatives de $F'(x)$ est paire ou impaire.

L'utilisation du degré topologique

1) *La théorie du degré* est souvent utilisée comme suit: pour montrer que (1.1) admet une solution où F est de la forme(1.2), on montre que toutes les solutions possibles de (1.1) sont dans un domaine borné Ω obtenu par estimation à priori des solutions possibles et que $\nu = deg(F,\Omega,y) \neq 0$. Pour cela on construit une déformation de F, $F_t = I - K_t$, telle

que $y \notin F_t(\partial\Omega)$, déformant $F = F_1$ en F_0 , tel que $deg(F_0, \Omega, y) \neq 0$ où F_0 est en général plus simple que F_1.

2) La propriété (**d**) est parfois utilisée pour déterminer le nombre de solutions de (1.1). Si par exemple on peut montrer que $F^{-1}\{y\}$ est formé d'un nombre fini de points réguliers dans Ω, ayant tous le même degré local, soit ± 1. Si $\deg(F, \Omega, y) = k \in \mathbf{Z}$, alors il y a exactement $|k|$ solutions dans Ω.

On peut aussi rattacher à (**d**) le résultat suivant:

• Soit Ω^r l'ensemble des points réguliers de F, $\Omega^r \subset \Omega$ est ouvert. Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de Ω^r. Pour tout $u \in \mathcal{C}$ et pour ε petit on définit

$$ind(u) = (\deg F, B(u, \varepsilon), F(u)) = \pm 1$$

ceci est une constante sur $\mathcal{C}$ et donc peut-être considérée comme $ind(\mathcal{C})$.

Dans [3] Ambrosetti et Mancini montrent (dans un espace de Hilbert) que cet indice change nécessairement quand on passe d'une composante de Ω^r à une autre. Ils utilisèrent ceci pour prouver que certaines équations dans les espaces de Hilbert admettent exactement trois solutions.

3) *La théorie du degré* fut aussi appliquée pour les fonctions multivoques de la forme(1.2). Pour $u \in \overline{\Omega}$, $K(u)$ est supposé un ensemble compact convexe et semi-continu supérieurement en u.

De plus $\bigcup\limits_{u \in \overline{\Omega}} K(u)$ est à fermeture compacte.

Si pour tout $u \in \partial\Omega$ $u - y \notin K(u)$ alors $\deg(F, \Omega, y)$ peut-être défini avec des propriétés similaires aux précédentes et l'inclusion différentielle $y \in u - K(u)$ peut être résolue (cf. [83] pour plus de détails).

Ceci a été utilisé par Chang [26] pour résoudre des problèmes:

• problème de plasma

• problème d'obstacle où on cherche des solutions d'e.d.p. elliptique vérifiant une condition d'un côté.

1.1.3. Application de Poincaré

L'opérateur de translation de Poincaré associé au système différentiel suivant

$$x' = f(t,x) \tag{1.4}$$

où x est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction assez régulière pour que tout problème de Cauchy associé à (1.4) admette une solution unique, globalement définie sur $\mathbb{R}$, est défini par:

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ z \quad &\rightsquigarrow \quad \Phi(z) = x(T,0,z) \end{aligned}$$

avec $x(t,0,z) = x(t)$ comme unique solution de (1.4) vérifiant $x(0) = z$.

Les solutions périodiques de (1.4) deviennent alors les points fixes de l'opérateur Φ et les *théorèmes de continuation* peuvent alors être utilisés pour montrer l'existence de ces points fixes.

Nous devons mentionner que l'existence globale et l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy associé à (1.4) exige une certaine régularité supplémentaire sur f , ce qui réduit le champ d'application de cette méthode. Néanmoins elle est constamment utilisée avec les mêmes succès dans de nombreux travaux anciens comme récents, [73] , [7] et [113].

Le théorème de point-fixe de Poincaré-Birkhoff, connu aussi sous le nom de *dernier théorème géométrique de Poincaré* affirme l'existence de deux points fixes pour Φ défini d'une région annulaire A sur A , $A = \overline{D_b} \backslash D_a$ (D_r est le disque centré en $(0,0)$ et de rayon r) avec $0 < a < b$.

Φ est un homéomorphisme qui préserve les surfaces et laisse les frontières intérieures et extérieures de A invariantes mais les déplace dans des directions opposées. Cette dernière propriété de Ω est dite *twist condition.* Cette condition peut être mieux exprimée si l'on considère une formulation du théorème en coordonnées polaires (ρ,θ).

Soit $H = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ le demi-plan supérieur en coordonnées polaires et soit $P : H \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ la projection définie par $P(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$pour une application continue $F : D \subset \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, une application $\widetilde{F} : P^{-1}(D) \to H$ est appelée un relèvement de F à H si la relation suivante est vérifiée

$$P \circ \widetilde{F} = F \circ P$$

Considérons $\widetilde{\Phi}$ le relèvement de Φ à H

$$\widetilde{\Phi} : \widetilde{A} = \{(\rho, \theta); a \leq \rho \leq b\} \to H$$

défini par

$$\widetilde{\Phi}((\rho, \theta)) = (h(\rho, \theta),\ \theta + \gamma(\rho, \theta))$$

où γ et h sont deux fonctions continues et 2π périodiques en θ et

$$h(a, \theta) = a,\ h(b, \theta) = b$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (ceci exprime l'invariance de C_a et C_b), $\gamma(\theta, a).\gamma(\theta, b) < 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (ceci exprime la *twist-condition*).

Le théorème affirme l'existence d'au moins deux points fixes (ρ_i, θ_i), $i = 1, 2$ pour $\widetilde{\Phi}$ à l'intérieur de $\widetilde{A}$. Ces deux points sont géométriquement distincts, c'est-à-dire $(\rho_2 - \rho_1, \theta_2 - \theta_1) \neq (0, 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Ce résultat fut en premier lieu formulé et prouvé dans un cas particulier par Poincaré [107]. En 1913 Birkhoff [11] donna une preuve de ce résultat en se basant sur une remarque de Poincaré lui-même (Φ est d'indice 0 sur A) dans le cas où le premier point fixe n'est pas dégénéré.

Birkhoff en 1925 [12] prouva l'existence de deux points fixes pour un homéomorphisme du plan $\Phi : A \to \Phi(A)$ où A et $\Phi(A)$ sont des régions annulaires de mêmes frontières intérieures C_a. Quand aux frontières extérieures elles sont supposées strictement étoilées par rapport à 0.

Dans [71] Jacobowitz présenta une version du *théorème de Poincaré-Birkhoff* pour un homéomorphisme préservant les surfaces, défini sur un disque pointé $D\backslash\{0\}$. Dans ce cas aucune condition n'est supposée ni sur la frontière extérieure du disque ni sur son image. La frontière intérieure du disque est invariante car $\Phi(0) = 0$.

Dans [44] Ding a obtenu une généralisation de Poincaré-Birkhoff pour un homéomorphisme Φ préservant les surfaces, $\Phi : A \subset R^2\backslash\{0\} \to \Phi(A) \subset R^2\backslash\{0\}$, A est une région annulaire (couronne) avec une frontière strictement étoilée par rapport à l'origine, et tel que si D_0 est une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \backslash A$, contenant 0, alors Φ peut être prolongé à un homéomorphisme Φ_0 préservant les surfaces, défini sur $D_0 \cup A$ et tel que $\Phi_0^{-1}(0) \in D_0$. La preuve de Ding est basée sur une réduction au *théorème de Jacobowitz* par modification de Φ par rapport à A.

Des applications du résultat de W.Y. Ding ont été données dans [43] et [40].

Des résultats de multiplicité de solutions pour l'équation $x" + g(x) = p(t)$ ont été obtenus par G.R. Morris [98] et Hartman [65].

1.2 Méthodes variationnelles

Les solutions sont cherchées comme points critiques de fonctionnelles réelles définies sur un espace de Banach X.

Dans le cas où f est minorée ou majorée, il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum ou le maximum est atteint.

Pour les fonctions convexes, un résultat classique est donné par le théorème suivant:

Théorème 1.2. *Soit f une fonctionnelle définie sur un espace de Banach reflexif. Supposons que f est faiblement semi-continue inférieurement, convexe, minorée et coercive. Alors f atteint son minimum.*

Preuve: elle est basée sur le fait que les ensembles fermés, bornés et convexes d'un espace de Banach réflexif sont compacts par rapport à la topologie faible (cf. [47] pour les problèmes variationnels de fonctions convexes). □

Si f n'est pas convexe il n'est pas nécessaire qu'elle atteigne son infimum; le résultat suivant de Ekeland [47] montre l'existence de points qui sont *presque* des minima.

Théorème 1.3. *Soit X un espace métrique complet et f semi-continue inférieurement sur X et minorée. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que*

$$f(x) > f(x_0) - dist(x, x_0)\ \forall x \in X,\ x \neq x_0$$

Notons, par analogie, qu'à la majoration à priori des solutions, utilisée dans les méthodes topologiques, correspond une condition de compacité dans l'approche variationnelle: c'est la *condition* de Palais–Smale noté (P–S.).

(P–S.): "Toute suite $(x_n) \in X$ telle que $|f(x_n)|$ est bornée et $f'(x_n)$ converge vers zéro en norme dans X^* (espace dual de X) admet une sous-suite fortement convergente".

Proposition. Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur un espace de Banach vérifiant (P-S.) et minorée. Alors f atteint un minimum local.

Pour une fonction f qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points "selle". Ces points sont déterminés par des arguments de type minimax. Ce qui nous ramène à l'utilisation du *théorème de Passe-Montagne* et ses variantes.

Les méthodes variationnelles ont été utilisées pour prouver l'existence de solutions périodiques pour des systèmes Hamiltoniens par A. Bahri et H. Berestycki [6], P.H. Rabinowitz [108] et Y. Long [84].

Partie I

Méthodes topologiques

Dans cette partie nous nous intéressons à l'existence de solution du problème

$$(P) \begin{cases} u"(t) + f(t, u(t)) = e(t) & 0 < t < T \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Notre objectif est de fournir des conditions suffisantes sur la non linéarité f pour garantir l'existence d'au moins une solution de (P). Nous utiliserons des méthodes topologiques pour démontrer nos résultats principaux.

Différentes classes de non linéarités seront considérées. En particulier, dans le chapître 2, nous considérons le cas de non linéarités présentant des discontinuités par rapport à la variable dépendante u. Nous réduisons le problème posé à un problème multivoque et nous appliquons la *théorie de la transversalité topologique* de Granas. Le chapître 3 est consacré à l'étude du problème (P) lorsque f admet une singularité en un point u_0. Nous utiliserons une combinaison du *degré topologique* avec l'existence de sur et sous-solutions constantes. Le chapître 4 est réservé au cas non résonnant avec des non linéarités continues. Encore une fois , le *degré topologique* et la *méthode des sur et sous-solutions* sont utilisés pour démontrer le résultat principal. Enfin, le chapître 5 est consacré au cas de non linéarité lipschitzienne dépendant d'un paramètre réel. L'outil principal utilisé est une version généralisée du *théorème* de Poincaré-Birkhoff. Nous obtenons un résultat de multiplicité des solutions.

Chapitre 2

Non linéarité discontinue

Les équations différentielles avec non linéarités discontinues ont été étudiées par plusieurs auteurs (cf.[69], [26], [18]).

Nous nous intéressons en particulier à l'existence de solutions pour le problème (P)

$$(P)\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = e(t) & t \in [0, T] \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

dans le cas où $T > 0$ et f présente des discontinuités de première espèce par rapport à u. Nous ramenons l'étude de (P) à l'étude d'un problème multivoque que nous analysons par la *transversalité topologique* combinée avec la *méthode des sur et sous-solutions.* Nous soulignons le fait qu'une combinaison entre le *degré topologique* et la *théorie des sous et sur-solutions* a été utilisée par Gossez dans [60] ainsi que par De Coster et Habets [37] pour étudier l'existence de solutions d'un problème autonome similaire au notre avec en plus f continue.

Nous généralisons alors un résultat d'existence [37] au cas de non linéarité presque partout L^∞ de Caratheodory.

2.1 Préliminaires

Commençons tout d'abord par donner quelques définitions et résultats connus nécessaires à l'étude de notre problème.

2.1.1 Fonctions multivoques et transversalité topologique

Nous énonçons quelques définitions et résultats sur les fonctions multivoques et la *transversalité topologique*. Pour plus de détails, se référer à[9], [46], [5] et [61].

Fonctions multivoques

Soient X, Y des espaces normés. Nous dirons qu'une fonction multivoque $F : X \to 2^Y$ est compacte si $F(X) = \overline{\bigcup_{x\in X} F(x)}$ est compacte. F est à valeurs convexes (compactes) (fermées) si $F(x)$ est convexe (compact) (fermé) pour tout $x \in X$. F est bornée sur les bornés si $F(B) = \bigcup_{x\in B} F(x)$ est borné dans Y pour tout sous-ensemble B borné dans X.

F est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ contenant $F(x_0)$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que $F(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point de X.

F a un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.

Transversalité topologique

Soit E un espace de Banach, C un convexe de E et $\mathcal{U}$ un ouvert de C tel que $\overline{\mathcal{U}} \subset C \subset E$. Nous notons par $K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$ l'ensemble de toutes les multi-applications $F : \overline{\mathcal{U}} \to 2^C$ compactes, s.c.s., à valeurs convexes et fermées, qui sont sans point fixe sur $\partial\mathcal{U}$ (i.e. $u \notin Fu$ pour tout $u \in \partial\mathcal{U}$).

Une homotopie compacte est une multi-application $H : [0,1] \times \overline{\mathcal{U}} \to 2^C$ telle que H est compacte, s.c.s. et à valeurs convexes fermées.

Si $u \notin H(\lambda, u)$ pour tout $\lambda \in [0,1], u \in \partial\mathcal{U}$ alors H est sans point fixe sur $\partial\mathcal{U}$

Définition 2.1.

(i) Deux multi-applications $F, G \in K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$ sont dites homotopes dans $K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$ s'il existe une homotopie compacte $H : [0,1] \times \overline{\mathcal{U}} \to 2^C$ sans point fixe sur $\partial\mathcal{U}$ et tel que $H_0 = H(0,.) = F$ et $H_1 = H(1,.) = G$.

(ii) Une multi-application $G \in K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$ est dite essentielle si pour tout $F \in K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$ telle que $F_{|\partial\mathcal{U}} = G_{|\partial\mathcal{U}}, F$ a un point fixe. Une multi-application qui n'est pas essentielle est dite inessentielle.

Théorème 2.2. (Transversalité topologique). *Soient $F, G \in K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$ deux multi-applications homotopes dans $K_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^C)$. Alors F est essentielle si et seulement si G est essentielle.*

Théorème 2.3. (Alternative non linéaire). *Soit $\mathcal{U} \subset C$ tel que $0 \in \mathcal{U}$. Alors pour toute multi-application compacte, s.c.s., à valeurs convexes fermées $F : \overline{\mathcal{U}} \to 2^C$, au moins l'un des deux énoncés suivants est vérifié:*

(i) F a un point fixe,

(ii) Il existe $u \in \partial\mathcal{U}$ tel que $u \in \lambda F(u)$ pour un certain $\lambda \in (0,1)$.

Théorème 2.4. *Soit $F : \overline{\mathcal{U}} \to 2^C$, la multi-application $F(u) \equiv \{u_0\}$. Si $u_0 \in \mathcal{U}$, alors F est essentielle.*

Théorème 2.5. (Alternative non linéaire générale). *Soit $\mathcal{U} \subset C$ tel que $0 \in \mathcal{U}$. Alors pour toute homotopie compacte H telle que $H_0 \equiv 0$, au moins l'un des deux énoncés suivants est vérifié*

(i) Il existe $u \in \overline{\mathcal{U}}$ tel que $u \in H(1,u)$.

(ii) Il exite $u \in \partial\mathcal{U}$ tel que $u \in H(\lambda, u)$ pour un certain $\lambda \in (0,1)$

2.1.2 Principe d'anti-maximum

Soit $I = [0,T]$. Notons par $C^1(I)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles continûment différentiable. $C^1(I)$ est muni de la norme

$$\|u\|_1 = \max\left(\|u\|_0, \|u'\|_0\right) \text{ avec } \|u\|_0 = \sup\left\{|u(t)|\,; t \in I\right\}$$

Par $C_c^k(I)$, nous notons l'espace des fonctions k fois continûment différentiables et à support compact dans I, $\quad k = 1, 2$.

Nous définissons l'espace de Sobolev $W^{2,p}(I)$ pour $1 < p \leq \infty$, par

$$W^{2,p}(I) = \left\{u \in W^{1,p}(I); u' \in W^{1,p}(I)\right\}$$

où

$$W^{1,p}(I) := \left\{u \in L^p(I); \exists\, g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)\right\}$$

Par $W_T^{2,p}(I)$, nous notons l'espace des fonctions de $W^{2,p}(I)$ qui satisfont à une condition de T-périodicité. $W^{2,p}$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,\infty}} &= \sum_{i=0}^{2} \left\|u^{(i)}\right\|_{L^\infty} \\ \|u\|_{W^{2,p}} &= \left(\sum_{i=0}^{2} \int_I \left|u^{(i)}(t)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$W^{2,p}(I)$ est un espace de Banach.

L'inclusion $W^{2,p}(I) \subset C^1(I)$ est complètement continue [22].

Soit

$$H_T^2(I) = \left\{u \in W^{2,2}(I); u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0\right\}$$

Nous définissons l'opérateur différentiel $L : H_T^2(I) \to L^2(I)$ par $(Lu)(t) = u"(t) - u(t)$ pour tout $t \in I$. L est bijectif et L vérifie le principe d'anti-maximum suivant

Lemme 2.6. Si $(Lu)(t) \geq 0$ pour presque tout $t \in I$, alors $u(t) \leq 0$ pour presque tout $t \in I$

Preuve: Nous adaptons la preuve du théorème 2. 1 dans [17] à notre cas.

Posons

$$u''(t) - u(t) = \sigma(t) \tag{2.1}$$

Alors $\sigma \in L^2(I)$ et $\sigma(t) \geq 0$ pour presque tout $t \in I$.

Ce qui implique

$$\int_0^{2\pi} u(t)\, dt = -\int_0^{2\pi} \sigma(t)\, dt < 0 \tag{2.2}$$

L'inégalité (2.2) montre que le minimum de u est négatif, i.e. si $u(t_m) = \min\{u(t);\ \ t \in I\}$ pour un certain $t_m \in I$, alors $u(t_m) \leq 0$.

Nous prouvons que le maximum de u est négatif.

Soit $t_M \in I$ tel que $u(t_M) = \max\{u(t);\ \ t \in I\}$.

Supposons, au contraire, que $u(t_M) > 0$.

(i) Si $t_M \in]0, 2\pi[$ et $t_M < t_m$, alors il existe $t_1 \in [t_M, t_m[$ tel que $u(t) > 0$ pour toutl $t \in [t_M, t_1[$ et $u(t_1) = 0$.

Par suite, sur $[t_M, t_1[$ nous avons $0 \leq \sigma = u'' - u < u''$.

Ce qui implique que u' est croissante sur $[t_M, t_1[$.

Puisque $u'(t_M) = 0$ nous avons donc $u'(t) > 0$ pour tout $t \in [t_M, t_1[$, ce qui montre que u est croissante sur $[t_M, t_1[$; mais ceci contredit le fait que $u(t_M)$ est la valeur maximale de u.

(ii) Si $t_M = 0$, alors $u'(0) \leq 0$. Puisque $u(2\pi) = u(0)$ il s'en suit que $u'(2\pi) > 0$. Mais $u'(0) = u'(2\pi)$ et alors nous avons $u'(0) = 0$. Maintenant, nous procédons comme dans le premier cas.

(iii) Si $t_M > t_m$ nous procédons comme dans le cas (i).

Remarque: Pour une autre preuve, nous référons le lecteur à [56], page 60. □

2.1.3 Sur et sous-solutions

Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; de cette fonction deux applications sont induites $\underline{f}$ et $\overline{f}$ définies par

$$\underline{f}(t,u) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t, u - \varepsilon)$$
$$\overline{f}(t,u) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t, u + \varepsilon)$$

Définition 2.7. Soient $\varphi_1,\ \varphi_2 \in W^{2,\infty}(I)$

(i) nous dirons que φ_1 est une sous-solution pour (P) si et seulement si

$$\begin{cases} \varphi"_1(t) + \overline{f}(t, \varphi_1(t)) \geq e(t) \text{ pour presque tout } t \in I \\ \varphi_1(0) \leq \varphi_1(T) \\ \varphi_1'(0) \leq \varphi_1'(T) \end{cases}$$

(ii) φ_2 est dite sur solution pour (P) si et seulement si

$$\begin{cases} \varphi"_2(t) + \underline{f}(t, \varphi_2(t)) \leq e(t) \text{ pour presque tout } t \in I \\ \varphi_2(0) \geq \varphi_2(T) \\ \varphi_2'(0) \geq \varphi_2'(T) \end{cases}$$

si les inégalités sont strictes, φ_1, φ_2 sont dites strictes sur et sous-solutions.

2.2 Formulation du problème et énoncé du résultat principal

Le problème (P) est considéré avec $e \in L^\infty(I, \mathbb{R})$ et la non linéarité f vérifiant

(H1) (i) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f(., u)$ est mesurable sur I,

(ii) Pour presque tout $t \in I$, $f(t, .)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{u_1\}$

(iii) $\underline{f}(t, u_1) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t, u_1 - \varepsilon)$ et $\overline{f}(t, u_1) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t, u_1 + \varepsilon)$

existent, sont finies pour presque tout $t \in I$

et $\underline{f}(t, u_1) < \overline{f}(t, u_1)$ et $f(t, u_1) \in \left[\underline{f}(t, u_1), \overline{f}(t, u_1)\right]$.

De plus, $\underline{f}(., u_1) et \overline{f}(., u_1)$ sont des fonctions de $L^\infty(I, \mathbb{R})$,

(iv) Pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\gamma_r \in L^\infty(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$|f(t, u)| < \gamma_r(t)$ pour tout $u \in [-r, +r]$ et pour presque tout $t \in I$

(H2) $\mu(t) := \limsup_{u \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u}$ et $\nu(t) := \limsup_{u \to -\infty} \frac{f(t,u)}{u}$ existent, presque partout sur I et vérifient :$\mathcal{E}\text{ss} \inf_t \mu(t) > 0$, $\mathcal{E}\text{ss} \inf_t \nu(t) > 0$ et $\|\mu\|_\infty^{-\frac{1}{2}} + \|\nu\|_\infty^{-\frac{1}{2}} > \frac{T}{\pi}$.

(H3) $\liminf_{|u| \to \infty} \frac{f(t,u)}{u} > 0$ uniformément en t pour presque tout $t \in I$.

Définition de la notion de solution pour le problème (P).

Une solution pour (P) est une fonction $u \in H_T^2(I)$ vérifiant

$$u"(t) \in G(t, u(t)) \text{ pour presque tout } t \in I \tag{2.3}$$

où $G(t, u(t))$ est une fonction multivoque définie par

$$G(t, u(t) = \begin{cases} \{e(t) - f(t, u(t))\} & \text{si } u(t) \neq u_1 \\ \left[e(t) - \overline{f}(t, u_1), e(t) - \underline{f}(t, u_1)\right] & \text{si } u(t) = u_1 \end{cases}$$

avec u_1 point de discontinuité de $f(t, .)$.

Commentaire sur les hypothèses.

Les conditions que nous considérons relient le comportement asymptotique de $f(t, s)$ au spectre de Dancer-Fučik du problème positivement homogène

$$(*) \begin{cases} u" + \alpha u^+ - \beta u^- = 0 \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) \end{cases}$$

Rappelons que le spectre de Dancer-Fučik noté S (cf:[31]et [57]) est constitué par l'ensemble des paires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(*)$ admet des solutions non triviales. Précisément S peut-être exprimée par

$$S = \bigcup_{m \in N} C_m, \text{ où } C_0 = \{(\alpha, \beta); \alpha\beta = 0\}$$

et pour $m \geq 1$

$$C_m = \left\{(\alpha, \beta); \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \frac{T}{m}\right\}$$

Cette notion de spectre a motivé certaines études récentes dans *la théorie de suspension de ponts* impliquant la considération de non linéarités asymétriques [78]

Dans la littérature, différentes conditions ont été introduites pour garantir la non-résonance, c'est à dire garantir l'existence de solutions de (P) pour tout e donné (cf. [76], [93], [94], [45], [48], [62]et [54]). En général, les conditions de non-résonance imposent que $\frac{f(t,s)}{s}$ n'interfère pas asymptotiquement avec les branches C_m i.e.

$$q_{\pm} < \liminf_{s \to \pm\infty} \frac{f(t,s)}{s} \leq \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(t,s)}{s} < Q_{\pm}$$

tels que

$$(q_-, q_+) \in C_m \text{ et } (Q_-, Q_+) \in C_{m+1} \text{ pour un certain } m \in \mathbb{N}$$

Notons que dans le cas $q_- = q_+ = m^2$ et $Q_- = Q_+ = (m+1)^2$, nous avons des conditions de non-résonance classique par rapport au spectre $\{m^2, m \in \mathbb{N}\}$ de l'opérateur différentiel $\frac{d^2}{dt^2}$ avec les conditions aux limites périodiques, considérées par Mawhin [89] pour la solvabilité du problème (P) dans le cas autonome avec f continue.

Les hypothèses **(H2)**,**(H3)** sont des hypothèses de non-résonance classiques. Elles impliquent que f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$ ni minorée sur $\mathbb{R}^-$ par rapport à u uniformément en t pour presque tout $t \in I$.

En effet, si nous supposons, par exemple, que f est majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors il existe une fonction $k(t)$ mesurable en t telle que $f(t, u(t)) \leq k(t)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$ et pour presque tout $t \in I$, ce qui implique alors que $\limsup_{u \to +\infty} \frac{f(t,u)}{u} = 0$ pour presque tout $t \in I$, ce qui contredit $\mathcal{E}ss \inf_t \mu(t) > 0$.

Ceci permet d'affirmer l'existence d'au moins deux constantes A et B telles que pour presque tout $t \in I$

$$e(t) - \underline{f}(t, A) > 0 \text{ et } e(t) - \overline{f}(t, B) < 0$$

ce qui fait de A une stricte sur-solution et de B une stricte sous-solution pour (2.3) avec des conditions périodiques.

En posant $g(t, u(t)) = e(t) - f(t, u(t))$, nous avons

$$G(t, u(t)) = \left[\underline{g}(t, u(t)), \overline{g}(t, u(t))\right]$$

où $\overline{g}(t, u(t)) = e(t) - \underline{f}(t, u(t))$ et $\underline{g}(t, u(t)) = e(t) - \overline{f}(t, u(t))$.

Résultat principal

Théorème 2.8. *Si en plus des hypothèses (H1), (H2), (H3),* $e(t) \notin \left[\underline{f}(t, u_1), \overline{f}(t, u_1)\right]$ *pour presque tout* $t \in I$*, l'équation (2.3) admet au moins une solution* $u \in H_T^2(I)$.

Preuve: La preuve du théorème 2.8. se fait en plusieurs étapes

Première étape

Soit $\mathcal{N} : C^1(I) \to L^2(I)$, l'opérateur défini par

$$\mathcal{N}u = \{w : I \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } w(t) \in G(t, u(t))\}$$

Nous caractérisons $\mathcal{N}$ par le lemme suivant.

Lemme 2.9. $\mathcal{N}$ est bien défini, s.c.s., à valeurs convexes. Il est borné sur les sous ensembles bornés de $C^1(I)$.

Preuve: La démonstration de ce lemme utilise des arguments de [56], (en particulier nous adaptons la preuve de la proposition V.1, p. 30, à notre cas).

Soient $u_0 \in C^1(I)$ et $w \in \mathcal{N}u_0$

$$|w(t)| \leq \max\left(\left|\underline{g}(t, u_0(t))\right|, |\overline{g}(t, u_0(t))|\right)$$

u_0 est borné, par l'hypothèse (**H1**), $\underline{g}(t, u_0(t))$ et $\overline{g}(t, u_0(t))$ sont bornées. Ce qui permet de dire que par définition de G et l'hypothèse (**H1**), $G(t, u(t))$ est bornée si $(t, u(t))$ appartient à un borné de $I \times \mathbb{R}$. Et les valeurs de $\mathcal{N}$ sont convexes par définition de G.

Montrons maintenant que $\mathcal{N}$ est s.c.s., i.e. pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|u - u_0\|_1 < \delta$, nous avons $\mathcal{N}u \subset \mathcal{N}u_0 + B_{L^2}(\varepsilon)$ où $B_{L^2}(\varepsilon)$ est la boule de $L^2(I, \mathbb{R})$ centrée en 0 et de rayon ε.

Considérons l'ensemble $I_{v,m}$ défini, pour $m \in \mathbb{N}^*$, par

$$I_{v,m} := \left\{ t \in I; |v - u_0(t)| < \frac{1}{m} \Rightarrow G(t,v) \subset \left] \underline{g}(t,u_0(t)) - \frac{\varepsilon}{R}, \overline{g}(t,u_0(t)) + \frac{\varepsilon}{R} \right[\right\}$$

où $v \in \mathbb{R}$ et R une constante qui sera déterminée au cours de la démonstration.

$I_{v,m}$ est mesurable car $\underline{f}$, $\overline{f}$ et e sont mesurables en t.

Posons

$$E_{m,\varepsilon} := \bigcap_{v \in R} I_{v,m}.$$

$E_{m,\varepsilon}$ est mesurable et nous avons les inclusions: $E_{1,\varepsilon} \subset E_{2,\varepsilon} \subset E_{3,\varepsilon}.....$ et $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,\varepsilon} = I$. En effet, soit $t \in I$, considérons

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 \ &: \ = \left\{ v \in \mathbb{R} ; \quad \overline{g}(t,v) < \overline{g}(t,u_0(t)) + \frac{\varepsilon}{R} \right\} \text{ et} \\
\mathcal{O}_2 \ &: \ = \left\{ v \in \mathbb{R} ; \quad \underline{g}(t,v) > \underline{g}(t,u_0(t)) - \frac{\varepsilon}{R} \right\}
\end{aligned}$$

$\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont ouverts car les fonctions $\overline{g}$ et $\underline{g}$ sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement. (Voir [56]).

Il existe alors un m tel que

$$\left] u_0(t) - \frac{1}{m}, u_0(t) + \frac{1}{m} \right[\subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$$

ce qui implique que $t \in E_{m,\varepsilon}$ et donc nous avons $I \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,\varepsilon}$. Et par définition $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,\varepsilon} \subset I$. D'où l'égalité. Par conséquent nous avons $mes\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,\varepsilon}\right) = T$ et il existe un $m_0 \in \mathbb{N}$, $mes(E_{m_0,\varepsilon}) > T - \frac{\varepsilon}{R}$.

$\mathcal{N}$ étant borné sur tout ensemble borné de $I \times \mathbb{R}$, alors il existe C, une constante positive telle que

$$\text{pout tout } \omega \in \mathcal{N}u \quad \|\omega\|_\infty < C \quad \text{si } |u| < 1 + \sup_{t \in I} |u_0(t)|. \tag{2.4}$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous considérons R, une constante positive telle que

$$R > \max\left(\frac{8C^2}{\varepsilon}, \sqrt{2T}\right)$$

Soit $0 < \delta < \frac{1}{m_0}$ pour u tel que $\|u - u_0\|_1 < \delta$, nous montrons que $\mathcal{N}u \subset \mathcal{N}u_0 + B_{L^2}(\varepsilon)$, i.e. pour $w \in \mathcal{N}u$, nous montrons qu'il existe $v \in \mathcal{N}u_0$ tel que $\|v - w\|_{L^2} < \varepsilon$.

Soit donc $w \in \mathcal{N}u$, nous définissons v par

$$v(t) := \begin{cases} \overline{g}(t, u_0(t)) & \text{si } w(t) \geq \overline{g}(t, u_0(t)) \\ w(t) & \text{si } \underline{g}(t, u_0(t)) < w(t) < \overline{g}(t, u_0(t)) \\ \underline{g}(t, u_0(t)) & \text{si } w(t) \leq \underline{g}(t, u_0(t)) \end{cases}$$

alors ainsi définie $v \in \mathcal{N}u_0$ car $v(t) \in G(t, u_0(t))$ pour $t \in I$.

Maintenant si $t \in E_{m_0,\varepsilon}$, alors par définition de $E_{m_0,\varepsilon}$ et $\|u - u_0\|_1 < \delta < \frac{1}{m_0}$, nous avons

$$w(t) \in G(t, u(t)) \subset \left]\underline{g}(t, u_0(t)) - \frac{\varepsilon}{R}, \overline{g}(t, u_0(t)) + \frac{\varepsilon}{R}\right[$$

et par conséquent : $|v(t) - w(t)| \leq \frac{\varepsilon}{R}$. Ce qui entraine

$$\int_{E_{m_0,\varepsilon}} |v(t) - w(t)|^2 \, dt < \frac{\varepsilon^2}{R^2} T < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{(par le choix de } R\text{)}$$

D'autre part, en utilisant (2.4), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{I \setminus E_{m_0,\varepsilon}} |v(t) - w(t)|^2 \, dt &\leq 2 \int_{I \setminus E_{m_0\varepsilon}} \left(|w(t)|^2 + |v(t)|^2\right) dt \\ &\leq 4C^2 mes(I \setminus E_{m_0\varepsilon}) < 4C^2 \frac{\varepsilon}{R} < 4C^2 \frac{\varepsilon^2}{8C^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{I \setminus E_{m_0,\varepsilon}} |v(t) - w(t)|^2 \, dt \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

et alors

$$\|v - w\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Par suite $\mathcal{N}$ est s.c.s. □

Nous allons distinguer deux cas: le cas où $A > B$, i.e. le cas où les sur et sous solutions sont bien ordonnées et le cas où $A < B$.

Dans le premier, et par analogie au cas univoque (cf. [63]), la démonstration se base essentiellement sur une modification de la non linéarité et la construction d'une homotopie qui permet de conclure en appliquant la transversalité topologique.

Dans le second cas nous adaptons la technique de démonstration du cas univoque au cas multivoque avec les transformations nécessaires pour le fonctionnement.

Cas1: $A > B$

Posons $K(t, u(t)) := G(t, u(t)) - u(t)$, la fonction multivoque associée à $k(t, u(t)) = g(t, u(t)) - u(t)$ pour $t \in I$.

Ainsi, la recherche de solution $u \in H_T^2(I)$ de (2.3) se ramène à la résolution du problème équivalent

$$\begin{cases} u"(t) - u(t) \in K(t, u(t)) \text{ pour presque tout } t \in I \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Nous considérons (2.5) car l'opérateur $L : H_T^2(I) \to L^2(I)$ défini par $Lu = u" - u$ est inversible.

Construction d'une homotopie.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, posons

$$\widetilde{k}(t, u, \lambda) := \begin{cases} \max\{-A, \lambda k(t, A)\} & u \geq A \\ \lambda k(t, u) & B < u < A \\ \min\{-B, \lambda k(t, B)\} & u \leq B \end{cases}$$

La multi-application associée est alors

$$\widetilde{K}(t, u, \lambda) := \begin{cases} \left[\max\{-A, \lambda \underline{k}(t, A)\}, \max\left\{-A, \lambda \overline{k}(t, A)\right\}\right] & \text{si } u > A \\ \left[\lambda \underline{k}(t, A), \max\left\{-A, \lambda \overline{k}(t, A)\right\}\right] & \text{si } u = A \\ \left[\lambda \underline{k}(t, u), \lambda \overline{k}(t, u)\right] & \text{si } B < u < A \\ \left[\min\left\{-B, \lambda \underline{k}(t, B), \lambda \overline{k}(t, B)\right\}\right] & \text{si } u = B \\ \left[\min\{-B, \lambda \underline{k}(t, B)\}, \min\left\{-B, \lambda \overline{k}(t, B)\right\}\right] & \text{si } u < B \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, $\widetilde{K}$ ainsi définie vérifie les propriétés suivantes

1. Si $u : I \to \mathbf{R}$ est une fonction mesurable alors $\widetilde{K}(t, u(t))$ est mesurable par l'hypothèse **(H1)**.

2. $\widetilde{K}$ est bornée sur tout sous-ensemble borné de $I \times \mathbf{R}$ par application du lemme 2.9 et la définition de A et B.

Maintenant, considérons la famille de problèmes

$$(P_\lambda)\begin{cases} u\text{''} - u(t) \in \widetilde{K}(t, u(t), \lambda) \text{ pour presque tout } t \in I \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Lemme 2.10. *Les solutions $u \in H^2_T(I)$ d'un problème (P_λ) pour un certain $\lambda \in [0,1]$ satisfont $B \leq u(t) \leq A$ pour presque tout $t \in I$.*

La **Preuve** se base sur le principe de l'Anti-maximum (lemme 2.6). Soit

$$I^+ \ : \ = \{t \in I; \quad u(t) > A\}, \text{ et}$$
$$I^- \ : \ = \{t \in I; \quad u(t) < B\}$$

Si $u \in H^2_T(I)$ est une solution de (P_λ) pour $\lambda \in [0,1]$, alors $u\text{''}(t) - u(t) \in \widetilde{K}(t, u(t), \lambda)$ et par (2.6), nous avons pour presque tout $t \in I^+$

$$u\text{''}(t) - u(t) \geq \max\{-A, \lambda \underline{k}(t, A)\} \geq -A$$

i.e. $L(u - A) \geq 0$ pour presque tout $t \in I^+$.

Nous pouvons donc appliquer le lemme 2.6 et alors $u - A \leq 0$ sur I^+, d'où $u(t) \leq A$, pour presque tout $t \in I$.

Toujours en utilisant (2.6), nous montrons que $L(B - u) \geq 0$ sur I^-; ce qui entraine, par application du lemme 2.6, que $B - u \leq 0$ i.e. $u(t) \geq B$ pour tout $t \in I^-$. Et alors $u(t) \geq B$ pour presque tout $t \in I$. $\square$

Lemme 2.11. *Soit $u \in H^2_T(I)$, une solution de (P_λ) pour un certain $\lambda \in [0,1]$. Alors il existe une constante positive M_1 telle que*

$$|u'(t)| < M_1 \text{ pour presque tout } t \in I.$$

Preuve: Soit $u \in H^2_T(I)$ une solution de (P_λ). Il découle du lemme 2.10 que

$$|u(t)| < \sup(|A|, |B|) + 1 =: M_0$$

Puisque u est bornée par M_0, alors par application du lemme 2.9, $K(t,u)$ est borné par une constante dépendant de M_0,ce qui entraine par (2.6) l'existence d'une constante positive C_{M_0}, dépendant de M_0, telle que

$$|u\text{''}(t)| \leq C_{M_0} \tag{2.7}$$

D'après les conditions de périodicité, nous avons

$$\left|\int_0^T \left|u'^2(t)\right| dt\right| = \left|\int_0^T u"(t).u(t)dt\right|$$

ce qui entraine

$$\int_0^T \left|u'^2(t)\right| dt \leq \int_0^T |u"(t)| . |u(t)| dt < M_0.C_{M_0}.T$$

et par suite

$$\|u\|_{H^2} \leq \left(M_0^2 T + M_0.C_{M_0}.T\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et puisque l'injection de $H_T^2(I)$ dans $C^1(I)$ est continue, il existe alors une constante positive $M_1 = M_1(M_0, C_{M_0})$ telle que

$$|u'(t)| < M_1 \text{ pour presque tout } t \in I$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.11. □

Lemme 2.12. Si les conditions du théorème 2.8 sont satisfaites, alors le problème (P) admet au moins une solution $u \in H_T^2(I)$ telle que $B \leq u(t) \leq A$.

Preuve: Pour $\lambda \in [0,1]$ soit l'opérateur $N_\lambda : C^1(I) \to L^2(I)$ défini par

$$(N_\lambda u)(t) := \widetilde{K}(t, u(t), \lambda).$$

De (2.6) et du lemme 2.9, nous avons N_λ s.c.s. et borné sur tout sous-ensemble borné de $C^1(I)$.

Pour M_0 et M_1, les constantes du lemme 2.11, prenons $M > \max(M_0, M_1)$ et définissons $B_{C^1}(M)$ la boule ouverte de $C_T^1(I)$ de centre 0 et de rayon M .

Considérons la fonction multivoque

$$H : [0,1] \times B_{C^1}(M) \to C_T^1(I)$$
$$H(\lambda, u) = joL^{-1}oN_\lambda u$$

où $j : H_T^2(I) \to C_T^1(I)$ est définie par $j(u) = u$.

L'injection j est complètement continue (voir [22]) et l'opérateur $L : H_T^2(I) \to L^2(I)$ est bijectif et continu, donc L^{-1} existe et il est continu.

Les propriétés de j, L^{-1} et N_λ font de H une homotopie compacte.

Notons $H(\lambda, .)$ par H_λ. Il est clair que les points fixes de H_λ sont solutions de (P_λ) dans l'ensemble $\{u \in C^1(I); B \leq u(t) \leq A\}$ et satisfont à $\|u\|_1 < M$. Les lemmes 2.9, 2.10, 2.11 et le choix de M impliquent que H_λ est sans point fixe sur $\partial B_{C^1}(M)$. H est une homotopie compacte entre H_1 et H_0. Le théorème 2.2 implique que H_1 est esentielle si H_0 l'est.

Montrons que H_0 est essentielle. $H_0(u) = H(0,u) = joL^{-1}N_0u$

$$N_0u(t) = \widetilde{K}(t, u(t), 0) = \begin{cases} \{\max\{-A, 0\}\} & \text{si } u > A \\ [0, \max\{-A, 0\}] & \text{si } u = A \\ \{0\} & \text{si } B < u < A \\ [\min\{-B, 0\}, 0] & \text{si } u = B \\ \{\min\{-B, 0\}\} & \text{si } u < B \end{cases}$$

Si nous considérons la famille de problèmes $(P_0)^\delta$ définie par

$$(P_0)^\delta \begin{cases} u"(t) - u(t) \in \delta\widetilde{K}(t, u(t), 0) \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{H}_0 : [0,1] \times B_{C^1}(r) \to C^1_T(I)$$
$$\mathcal{H}_0(\delta, u) := joL^{-1}o\delta N_0u$$

$\mathcal{H}_0$ est s.c.s., compacte et à valeurs convexes. Les points fixes de $\mathcal{H}_0(\delta, .)$ sont les solutions de $(P_0)^\delta$. Or, pour r assez grand, $\mathcal{H}_0$ est sans point fixe sur $\partial B_{C^1}(r)$. $\mathcal{H}_0$ est une homotopie entre $H_0 = \mathcal{H}_0(1, .)$ et $\mathcal{H}_0(0, .)$, avec $\mathcal{H}_0(0, u) \equiv 0$. L'unique solution de $(P_0)^0$ est la solution triviale $0 \in B_{C^1}(r)$. Ce qui entraine H_0 est essentielle.

Le théorème 2.5 implique que H_1 est aussi essentielle et admet alors un point fixe u qui est solution de (P_1).

Remarque 2.13. Une solution de (P_1) est solution de (P).

En effet, si $u"(t) - u(t) \in \widetilde{K}(t, u(t), 1)$ et $B \leq u(t) \leq A$ alors si $u(t) = A$, nous avons $u"(t) - u(t) \leq \max\left\{-A, \overline{k}(t, A)\right\}$. Par définition de A, nous avons $-A \leq \overline{g}(t, A) - A = \overline{k}(t, A)$ ce qui entraine $u"(t) - u(t) \leq \overline{k}(t, A) = \overline{k}(t, u(t))$. De même si $u(t) = B$, $u"(t) \geq$

$\underline{k}(t,u(t))$. Aussi si $B < u(t) < A$, $\widetilde{K}(t,u(t),1) = K(t,u(t))$. Ainsi $u"(t) - u(t) \in K(t,u(t)$ pour presque tout $t \in I$ d'où u est solution de (P).

Maintenant si $Lu(t) \in K(t,u(t))$ et $I_1 = \{t \in I; u(t) = u_1\}$, alors $mes(I_1) = 0$. Car sinon, nous obtenons $e(t) \in \left[\underline{f}(t,u_i), \overline{f}(t,u_i)\right]$, ce qui est impossible. Et alors nous obtenons

$$Lu(t) = k(t,u(t)) \text{ pour presque tout } t \in I$$

et par conséquent

$$u"(t) + f(t,u(t)) = e(t) \text{ pour presque tout } t \in I$$

Et alors u est solution de (P). □

Remarque 2.14. Nous avons ajouté la condition

$$e(t) \notin \left[\underline{f}(t,u_1), \overline{f}(t,u_1)\right] \text{ pour presque tout} t \in I,$$

pour écarter la solution triviale $u(t) = u_1$ pour presque tout $t \in I$. En effet si la condition n'est pas vérifiée, la solution que pourrait déterminer le théorème 2.8 ne serait que le point u_1 ou encore égale à u_1 sur un ensemble de mesure strictement positive.

Cas 2 $A < B$

Notons que ce cas peut se produire par exemple si $\limsup_{s\to+\infty} f(t,s) = +\infty$ et $\liminf_{s\to+\infty} f(t,s) > -\infty$ ou $\limsup_{s\to-\infty} f(t,s) < +\infty$ et $\liminf_{s\to-\infty} f(t,s) = -\infty$.

Sans restriction, nous pouvons supposer que $A < 0 < B$. Au besoin, nous pouvons remplacer u par $u - \frac{A+B}{2}$. De plus, nous pouvons supposer l'existence d'une constante positive c_1 telle que $sgn(s)f(t,s) > -c_1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $t \in I$. Car, sinon f n'est pas bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^+$ ce qui implique l'existence d'un $A' > B$ tel que $e(t) - f(t,A') \geq 0$. Ou encore f n'est pas bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^-$, ce qui implique l'existence d'un $B' < A$ tel que $e(t) - f(t,B') \leq 0$.

Fixons θ tel que $0 < \theta < \mu(t)$ et $0 < \theta < \nu(t)$ pour presque tout $t \in I$. L'hypothèse **(H2)** implique alors que le problème périodique

$$\begin{cases} u"(t) + \theta u(t) = \sigma(t) \text{ pour presque tout } t \in I \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

admet pour chaque $\sigma \in L^2(I)$ une solution unique. Ce qui définit d'une manière unique l'opérateur inverse de L_1

$$L_1 : H_T^2(I) \to L^2(I)$$
$$L_1 u = u" + \theta u$$

Première étape: construction d'une homotopie

Pour $\lambda \in [0,1]$, considérons la famille de problèmes

$$(P_\lambda^1) \begin{cases} u"(t) + \theta u(t) = \lambda \left(e(t) - f(t, u(t)) + \theta u(t) \right) \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

pour $\lambda = 1$, (P_λ^1) se réduit au problème initial (P), et

pour $\lambda = 0$, (P_λ^1) se réduit au problème (2.8) avec $\sigma(t) \equiv 0$, pour tout $t \in I$.

Posons $r(t, u, \lambda) := \lambda \left[e(t) - f(t, u) + \theta u \right]$ et définissons $\underline{r}(t, u, \lambda)$ et $\overline{r}(t, u, \lambda)$ par

$$\begin{aligned} \underline{r}(t, u, \lambda) \ &: = \lim_{\varepsilon \to 0^+} r(t, u - \varepsilon, \lambda) \\ \overline{r}(t, u, \lambda) \ &: = \lim_{\varepsilon \to 0^+} r(t, u + \varepsilon, \lambda) \end{aligned}$$

Considérons $R(t, u, \lambda) := \begin{cases} \{ r(t, u, \lambda) \} & \text{si } u \neq u_1 \\ [\overline{r}(t, u, \lambda),\ \underline{r}(t, u\lambda)] & \text{si } u = u_1 \end{cases}$

En posant $(R_\lambda u)(t) := R(t, u, \lambda)$, nous obtenons un opérateur $R_\lambda : C^1(I) \to L^2(I)$ qui est s.c.s. et à valeurs convexes et borné sur les sous-ensembles bornés de $C^1(I)$ (par application du lemme 2.9)

Considérons le problème multivoque suivant

$$(P_\lambda^2) \begin{cases} u"(t) + \theta u(t) \in (R_\lambda u)(t) \text{ pour presque tout } t \in I \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

pour $\lambda = 0$, (P_0^2) se réduit à (2.8) avec $\sigma \equiv 0$, sur I

Soit $H : [0,1] \times C_T^1(I) \to C_T^1(I)$, définie par

$$H(\lambda, u) = joL_1^{-1} o R_\lambda u$$

Les (P_λ^2) sont alors équivalents à $u \in H(\lambda, u)$; les points fixes de H sont donc les solutions de (P_λ^2).

Remarque 2.15. $H(0,u) = 0$, l'application nulle, pour tout $u \in C_T^1(I)$ et alors $H(0,.)$ est essentielle.

Deuxième étape: majoration à priori des solutions de (P_λ^2)

Lemme 2.16. Il existe une constante m, indépendante de λ, telle que pour toute solution u de(P_λ^2), telle que $A < u(t_u) < B$ pour un certain $t_u \in I$, nous avons $\|u\|_1 < m$.

Preuve: Supposons au contraire qu'il existe des suites $(u_k)_k$ dans $H_T^2(I)$, $(\lambda_k)_k$ dans $[0,1]$ et $(t_k)_k$ dans I telles que

$$\begin{cases} (i) & (\lambda_k, u_k) \text{ vérifient } (P_\lambda^2) \text{ pour } \lambda = \lambda_k \text{ et } u = u_k \\ (ii) & A < u_k(t_k) < B \\ (iii) & \|u_k\|_1 \geq k \end{cases} \tag{2.9}$$

Soit $R_0 > \max(|A|, B, |u_1|) + 1$. Définissons $P(t,u)$ et $Q(t,u)$ par

$$\begin{aligned} P(t,u) &:= \begin{cases} \max\left\{0, \min\left(\frac{f(t,u)}{u}, \mu(t)\right)\right\} & \text{si } u \geq R_0 \\ P(t,R_0) & \text{si } u < R_0 \end{cases} \\ Q(t,u) &:= \begin{cases} \max\left\{0, \min\left(\frac{f(t,u)}{u}, \nu(t)\right)\right\} & \text{si } u \leq -R_0 \\ Q(t,-R_0) & \text{si } u > -R_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ainsi définies P et Q sont mesurables en t et continues en u et

$$P(t,u) \in [0, \mu(t)], \qquad Q(t,u) \in [0, \nu(t)]$$

Notons par u^+ et u^- les nombres réels

$$u^+ := \max(u,0) \qquad \text{et} \qquad u^- := \max(-u,0).$$

Nous définissons l'application $\widetilde{f}$ par

$$\widetilde{f}(t,u) := f(t,u) - P(t,u)u^+ + Q(t,u)u^-$$

Ainsi définie $\widetilde{f}(t,u)$ vérifie

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{\widetilde{f}(t,u)}{u} = 0$$

de là et de l'hypothèse **(H1)**(iv) nous pouvons alors écrire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_\varepsilon \in L^\infty(I, \mathbb{R}^+)$, tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $t \in I$, nous avons

$$\left|\widetilde{f}(t,u)\right| \leq \varepsilon |u| + \gamma_\varepsilon(t) \tag{2.11}$$

et si nous posons

$$v_k := \frac{u_k(t)}{\|u_k\|_1}$$

nous avons $\|v_k\|_1 = 1$ et v_k vérifie l'équation

$$v"_k(t) + \theta v_k(t) \in \frac{1}{\|u_k\|_1}(R_{\lambda_k} u_k)(t) \tag{2.12}$$

Il est clair que les fonctions p_k , q_k définies par

$$\begin{aligned} p_k(t) &:= \lambda_k P(t, u_k(t)) + (1 - \lambda_k)\theta \\ q_k(t) &:= \lambda_k Q(t, u_k(t)) + (1 - \lambda_k)\theta \end{aligned} \tag{2.13}$$

sont mesurables en t et vérifient

$$p_k(t) \in [0, \mu(t)] \qquad \text{et} \qquad q_k(t) \in [0, \nu(t)]$$

De plus si s_k est définie, pour $t \in I$, par

$$s_k(t) := \frac{\lambda_k}{\|u_k\|_1}\left[e(t) - \widetilde{f}(t, u_k(t))\right]$$

alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_\varepsilon^1 \in L^\infty(I, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$|s_k(t)| \leq \varepsilon + \frac{\gamma_\varepsilon^1(t)}{\|u_k\|_1}$$

pour presque tout $t \in I$. Pour k assez grand, nous avons $\|s_k(t)\|_\infty \leq 2\varepsilon$; i.e. s_k converge uniformément presque partout sur I vers 0.

Soit S_k la multi-application associée à s_k

$$S_k(t) := [\overline{s}_k(t),\ \underline{s}_k(t)]$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{s}_k(t) &:= \lim_{\eta \to 0^+} \frac{\lambda_k}{\|u_k\|_1}\left(e(t) - \widetilde{f}(t, u_k(t) - \eta)\right) \\ \overline{s}_k(t) &:= \lim_{\eta \to 0^+} \frac{\lambda_k}{\|u_k\|_1}\left(e(t) - \widetilde{f}(t, u_k(t) + \eta)\right) \end{aligned}$$

Donc $\underline{s}_k(t) = \overline{s}_k(t)$ si $u_k(t) \neq u_1$. De (**H1**), $\underline{s}_k(.)$ et $\overline{s}_k(.)$ sont mesurables et bornées presque partout sur I, et $\|\overline{s}_k\|_\infty$, $\|\underline{s}_k\|_\infty$ tendent vers 0 quand k tend vers ∞.

De (2.12), nous déduisons

$$v_k"(t) \in S_k(t) + \left\{q_k(t)v_k^- - p_k(t)v_k^+\right\} \text{ pour presque tout } t \in I \qquad (2.14)$$

La définition de v_k et les propriétés de S_k impliquent que les fonctions $v"_k$ sont uniformément, presque partout sur I,bornées par une fonction de $L^\infty(I, \mathbb{R}^+)$. Alors, en passant, si nécessaire, à une sous-suite que nous appelons toujours $(v_k)_k$, nous avons $(v_k)_k$ converge vers v uniformément presque partout sur I.

Supposons que $\lambda_k \to \lambda$ dans $[0,1]$. Nous commençons par observer que $v(t) = 0$ pour au moins un t_0. En fait, soit $t_0 = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$, alors $v(t) = \frac{u_k(t_k)}{\|u_k\|_1}$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$ d'après (2.9) et puisque v_k converge uniformément vers v, nous obtenons $\lim\limits_{k\to\infty} v_k(t_k) = 0 = v(t_0)$.

De plus, les suites p_k et q_k étant bornées dans $L^\infty(I, \mathbb{R})$, il existe alors p, q telles que $p(t) := \lim\limits_{k\to+\infty} p_k(t)$ et $q(t) := \lim\limits_{k\to+\infty} q_k(t)$ dans L^∞ par rapport à la topologie faible*, $p(t) \in [0, \mu(t)]\,, q(t) \in [0, \nu(t)]$ pour presque tout $t \in I$.

De la discussion précédente, nous déduisons alors que $v \in H^2(I)$ et vérifie

$$\begin{cases} v"(t) \in \{-p(t)v^+(t) + q(t)v^-(t)\} \text{ pour presque tout } t \in I \\ v(0) - v(T) = v'(0) - v'(T) = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Et puisque P et Q sont continues en u, alors à partir de (2.13), nous pouvons écrire (2.15) comme suit

$$\begin{cases} v"(t) = -p(t)v^+(t) + q(t)v^-(t) \text{ pour presque tout } t \in I \\ v(0) - v(T) = v'(0) - v'(T) = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Supposons que $v(t) \geq 0$ sur I. Alors $v^-(t) \equiv 0$ et $\int\limits_0^T p(t)v^+(t)dt = 0$. Ce qui implique que $p(t)v^+(t) = 0$ pour presque tout $t \in I$. De (2.16), nous obtenons ainsi $\int\limits_0^T |v'(t)^2|\, dt = 0$. Donc v doit être constante. Puisque $v(t_0) = 0$, alors $v \equiv 0$. Ce qui contredit le fait que v est la limite uniforme de la suite v_k et $\|v_k\|_1 = 1$.

De manière analogue, nous arrivons à une contradiction si nous supposons que $v(t) \leq 0$ pour tout $t \in I$.

Donc v doit changer de signe sur I.

Soient alors $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq T$ tels que

1) $v(t) \geq 0$ sur $[a, b]$

2) $v(t) \leq 0$ sur $[c, d]$

3) $v(a) = v(b) = v(c) = v(d)$ et $d - a \leq T$

Montrons maintenant que

$$b - a \geq \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_0}} \text{ et } d - c \geq \frac{\pi}{2\sqrt{\nu_0}}$$

où $\mu_0 = \|\mu\|_\infty$ et $\nu_0 = \|\nu\|_\infty$.

Considérons la première inégalité. Multiplions l'équation de (2.16) par $v(t)$ et intégrons sur $[a, b]$.

$$\int_a^b v'^2(t)dt = \int_a^b p(t)v^+(t)^2dt \leq \int_a^b \mu(t)v^+(t)^2dt \leq \mu_0 \int_a^b v^+(t)^2dt$$

Puisque $v \in H^2_T(I) \cap W^{1,2}_0 [a, b]$, alors en utilisant l'inégalité de Poincaré [22], nous obtenons

$$\int_a^b v'^2(t)dt \leq \mu_0 \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b v'(t)^2dt$$

ce qui implique

$$\sqrt{\mu_0}\frac{b-a}{\pi} \geq 1 \Rightarrow b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{\mu_0}}$$

D'une manière analogue, nous montrons que $d-c \geq \frac{\pi}{\sqrt{\nu_0}}$. Et puisque $(b-a)+(d-c) \leq T$, alors $\frac{\pi}{\sqrt{\nu_0}} + \frac{\pi}{\sqrt{\mu_0}} \leq T$, ce qui contredit l'hypoyhèse (**H2**).

Ceci achève la démonstration du lemme 2.16. □

Troisième étape

Soit Ω l'ouvert de $C^1_T(I)$ défini par

$$\Omega := \left\{u \in C^1_T(I); \exists\, t_u \in I, A < u(t_u) < B \text{ et } \|u\|_1 < m\right\}.$$

Lemme 2.17: Les solutions de (P^2_λ) pour $\lambda \in [0, 1]$, ne sont pas sur $\partial\Omega$.

Preuve: Pour montrer ce lemme, nous prouvons que toute solution de (P^2_λ) pour $\lambda \in [0, 1]$, telle que $u \in \overline{\Omega}$ vérifie $A < u(\tau) < B$ pour un certain $\tau \in I$.

Soit alors $u \in \overline{\Omega}$, une solution de (P^2_λ) pour $\lambda \in [0, 1]$. Supposons qu'au contraire $u(t) \geq B$, pour tout $t \in I$, alors $u \in \partial\Omega$ et il existe $t_0 \in I$ tel que $u(t_0) = B = \min u(t)$.

Par définition de stricte sous solutions dans $W^{2,\infty}(I)$, nous pouvons trouver un voisinage $J \subset I$ de t_0 et $t_1 \in J$ tels que

(i) $B \in W^{2,\infty}(J)$

(ii) $u'(t_1)\, sgn(t_1 - t_0) > 0$

(iii) $u'(t_0) = 0$ et $u"(t_0) > 0$

(iv) $u"(t) + \theta u(t) \in (R_\lambda u)(t)$ pour presque tout $t \in J$

ce qui implique, pour presque tout $t \in J$

$$u"(t) + \theta u(t) \leq \lambda \left[e(t) - \overline{f}(t, u(t)) + \theta u(t)\right]$$

i.e.

$$\begin{aligned} u"(t) &\leq \lambda \left[e(t) - \overline{f}(t, u(t))\right] - (1-\lambda)\theta u(t) \\ &\leq \lambda \left[e(t) - \overline{f}(t, u(t))\right] - (1-\lambda)\theta B < 0 \end{aligned}$$

car $B < 0$ et $-\overline{f}(t, B) + e(t) < 0$ (et $u(t)$ est dans un petit voisinage de B car u est continue). Ce qui contredit $B = \min u(t)$.

Et par suite $u(\tau) < B$ pour un certain $\tau \in I$.

De même, nous pouvons prouver que $u(\tau) > A$. □

Comme conséquence des lemmes précédents, nous voyons que l'homotopie compacte $H(\lambda, .)$ est sans point fixe sur $\partial\Omega$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Puisque $H(0, .)$ est essentielle, $H(1, .)$ est essentielle par application du théorème 2.2. Et alors $H(1, .)$ admet un point fixe dans Ω, qui est solution du problème (P_1^2) et, par suite, du problème (P_1^1) (car $mes\,(I_1)$ est nulle comme dans le **cas 1**). Nous obtenons alors une solution pour le problème (P).

Ceci complète la preuve du théorème 2.8. □

Chapitre 3

Non linéarités avec singularité

3.1 Introduction

Les équations différentielles du second ordre avec singularité apparaissent dans la description des particules sous l'action de forces de type newtonienne ou encore dans la compression de gaz.

Ce genre d'équations a été étudié dès les années 60 par de nombreux mathématiciens. Faure [51] fut le premier à considérer la méthode de Leray-Schauder pour étudier les équations

$$x" + cx' + \frac{x}{x+k} = e(t) \tag{3.1}$$

k étant négatif.

Lazer et Solimini [79] utilisèrent les méthodes topologiques pour étudier les équations

$$x" + \frac{1}{x^{\alpha}} = h(t) \tag{3.2}$$

et

$$x" - \frac{1}{x^{\alpha}} = h(t) \tag{3.3}$$

qui sont soumises à des conditions aux limites périodiques. Le résultat principal obtenu est: une condition nécessaire pour l'existence de solutions T-périodiques de (3.2) (respectivement (3.3)) est que $\int_0^T h(t)dt > 0$ (respectivement $\int_0^T h(t)dt < 0$). Ces conditions sont aussi suffisantes si $\alpha \geq 1$.

Fonda [52] utilisa les mêmes techniques pour étudier l'existence de solutions T-périodiques pour le problème autonome

$$x" + g(x) = e(t) \tag{3.4}$$

Nous généralisons (dans un sens) le résultat de Fonda au cas non autonome en considérant l'équation

$$u"(t) + f(t, u(t)) = e(t) \qquad 0 < t < T \tag{3.5}$$

en supposant que f admet une singularité en un point u_0. Nous imposons une condition de croissance en t qui est suffisante pour faire fonctionner le même procédé de démonstration utilisé par Fonda [52].

3.2 Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous introduisons les définitions nécessaires à la suite de notre travail (cf. [67] et [88]).

3.2.1 Opérateur L-compact

Soient X, Y deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $L : D(L) \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro (pour la définition et les propriétés des opérateurs de Fredholm voir [10] et [103]). Nous notons par $\mathcal{F}(L)$ l'ensemble des applications linéaires continues de rang fini $\psi : X \to Y$ qui sont telles que $L + \psi : D(L) \to Y$ est une bijection.

Définition 3.1. Soit E un espace métrique. $G : E \to Y$ est un opérateur L-compact sur E s'il existe $\psi \in \mathcal{F}(L)$ telle que $(L+\psi)^{-1}G : E \to X$ est compact sur E.

Remarque 3.2. Pour $E \subset X$, $X = Y$ et $L = I$, ce concept se réduit au concept classique d'opérateur compact, introduit par Schauder [117].

Si $\psi : X \to Y$ est linéaire, L complètement continue sur X et si $\ker\{L+\psi\} = \{0\}$, alors $L + \psi : D(L) \to Y$ est bijective et pour toute application L-compact $G : E \to Y$, l'application $(L+\psi)^{-1}G : E \to X$ est L-compact sur E.

Caractérisation d'opérateur L-compact

L étant un opérateur de Fredholm d'indice 0, il existe des projections continues $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ telles que $\operatorname{Im}(P) = \ker L$ et $\ker Q = \operatorname{Im}(L)$ et une bijection $j : \ker L \to \operatorname{Im}(Q)$ qui fait de $L + jP : D(L) \to Y$ une bijection.

Posons

$$K_{PQ} = \left(L_{|D(L)\cap \ker P}\right)^{-1}(I - Q)$$

K_{PQ} est l'inverse à droite de L associé à P et Q.

Il est facile de vérifier que $G : E \to Y$ est L-compact sur E si et seulement si $QG : E \to Y$ est continue, $QG(E)$ est borné et $K_{PQ}G : E \to X$ est compact.

3.2.2 Théorie du degré pour des perturbations L-compact d'opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Soit Ω un ouvert borné de X.

Notons par C_L l'ensemble des couples (G, Ω) où $G : D(L) \cap \overline{\Omega} \to Y$ s'écrit sous la forme $G = L + N$ avec $N : \overline{\Omega} \to Y$ L-compact, et vérifie $0 \notin G(D(L) \cap \partial\Omega)$.

Une application D_L de C_L vers Z est appelé degré relatif à L si D_L n'est pas identiquement nul et vérifie les trois axiomes suivants (similaires à ceux du *degré classique* de Leray-Schauder):

a) *axiome d'addition-excision* : Si $(G, \Omega) \in C_L$ et Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles de Ω ouverts, disjoints tels que

$$0 \notin G\left[D(L) \cap \left(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cap \Omega_2)\right)\right],$$

alors (G, Ω_1) et $(G, \Omega_2) \in C_L$ et

$$D_L(G, \Omega) = D_L(G, \Omega_1) + D_L(G, \Omega_2)$$

b) *axiome d'invariance par homotopie* : Si Γ est un ouvert borné dans $X \times [0,1]$, $\mathcal{H} : (D(L) \times [0,1]) \cap \overline{\Gamma} \to Y$ a la forme

$$\mathcal{H}(x, \lambda) = Lx + \mathcal{N}(x, \lambda),$$

où $\mathcal{N} : \overline{\Gamma} \to Y$ est L-compact sur $\overline{\Gamma}$ et si

$$\mathcal{H}(x, \lambda) \notin 0$$

pour tout $(x, \lambda) \in (D(L) \times [0,1]) \cap (\partial\Gamma)$ alors l'application

$$\lambda \to D_L\left(\mathcal{H}(.,\lambda), \Gamma_\lambda\right)$$

est constante sur $[0,1]$ où Γ_λ dénote l'ensemble

$$\{x \in X : (x, \lambda) \in \partial\Gamma\}$$

c) *axiome de normalisation* : Si $(G, \Omega) \in C_L$ avec G la restriction à $\overline{\Omega}$ d'une application linéaire bijective de $D(L)$ dans Y, alors

$$|D_L\left(F, \Omega\right)| = 1$$

si $0 \in G\left(D(L) \cap \Omega\right)$.

Soit $C(L)$ l'ensemble des applications ψ linéaires complètement continu de X dans Y tel que $\ker(L+\psi) = \{0\}$.

Si nous fixons une orientation [96] sur $\ker L$ et sur $co\ker L = Y/\operatorname{Im}(L)$ nous pouvons par exemple définir $C_+(L)$ une classe contenant les applications ψ de la forme $\pi_Q^{-1}\Lambda P$ où $\Lambda : \ker L \to co\ker L$ est un opérateur préservant les isomorphismes et π_Q est la restriction à $\operatorname{Im}(Q)$ de la projection canonique

$$\pi : Y \to co\ker L$$

Posons

$$\mathcal{J} = \pi_Q^{-1}\Lambda : \ker L \to \operatorname{Im}(Q)$$

il est facile de calculer

$$(L + \mathcal{J}P)^{-1} = \mathcal{J}^{-1}Q + K_{P,Q}$$

et alors

$$I + (L+\mathcal{J}P)^{-1}(N - \mathcal{J}P) = I - P + \mathcal{J}^{-1}QN + K_{PQ}N$$

et la définition suivante est alors justifiée.

Définition 3.3. Si $(G, \Omega) \in C_L$, le degré de G dans Ω par rapport à L (ou relatif à L) est défini par

$$\begin{aligned} D_L(G,\Omega) &= D_I(I + (L+\psi)^{-1}(N-\psi), \Omega) \\ &= \deg(I + (L+\psi)^{-1}(N-\psi), \Omega, 0) \end{aligned}$$

pour tout $\psi \in C_+(L)$.

Proposition 1 (*propriété d'existence*) . Si $(G,\Omega) \in C_L$ est tel que $D_L(G,\Omega) \neq 0$, alors G admet au moins un zéro dans Ω.

Théorème 3.4. *Soit $(H,\Omega) \in C_L$ et $F = L + N$ avec $N : \overline{\Omega} \to Y$ L-compact et Ω un ouvert borné de X. Si les conditions suivantes sont vérifiées*

1) $\lambda Fx + (1-\lambda)Hx \neq 0$ pour tout $(x,\lambda) \in (D(L) \cap \partial\Omega) \times]0,1[$

2) $D_L(H,\Omega) \neq 0$.

alors l'équation $Lx + Nx = 0$ admet au moins une solution dans $D(L) \cap \overline{\Omega}$.

3.2.3 Degré associé à une équation autonome

Soit $T > 0$ et $C_T = \{x \in C(R,R^2); x(t+T) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$.

C_T est muni de la norme $\|x\| = \max\left(\sup_t |x_1(t)|, \sup_t |x_2(t)|\right)$.

Nous définissons l'opérateur linéaire L dans C_T par

$$D(L) = \left\{x \in C_T; x \text{ est de classe } C^1\right\}$$

et

$$(Lx)(t) = x'(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continue.

Considérons les solutions T-périodiques de l'équation autonome

$$x'(t) = g(x(t)) \tag{3.6}$$

si $\mathcal{G} : C_T \to C_T$ est l'application continue définie par

$$(\mathcal{G}x)(t) = g(x(t))$$

alors trouver les solutions T-périodiques de (3.6) est équivalent à résoudre l'équation abstraite

$$Lx = \mathcal{G}x$$

dans $D(L) \cap C_T$.

Maintenant, $x \in \ker L$ si et seulement si $x \in D(L)$ et

$$x(t) = c$$

pour $c \in \mathbb{R}^2$, alors $\ker L = \mathbb{R}^2$.

Si $y \in \operatorname{Im} L$, i.e. $y \in C_T$ et

$$x'(t) = y(t)$$

pour un certain $x \in D(L)$, nous obtenons par intégration

$$P(y) := \frac{1}{T} \int_0^T y(t)dt = 0 \tag{3.7}$$

alors $\operatorname{Im}(L) \subset \ker P$, avec P continue, une projection sur un espace de dimension finie.

De même si (3.7) est vérifié, alors les solutions de l'équation

$$x'(t) = y(t)$$

sont T-périodiques et donc

$$\ker L = \operatorname{Im}(P)$$

Proposition 2. Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue, alors le problème de recherche de solutions T-périodiques de (3.6) est équivalent à la recherche d'un point fixe de l'équation

$$x = \mathcal{M}x$$

dans C_T où $\mathcal{M}$ est complètement continue et définie par

$$\mathcal{M}x = Px + [P + K(I - P)]\, \mathcal{G}x$$

et $K : \operatorname{Im} L \to \operatorname{Im} L$ compact

$$K := \left(L_{|D(L) \cap \ker P}\right)^{-1}$$

Théorème 3.5. *Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue et s'il existe un ouvert borné $\Omega \subset C_T$, tel que (3.6) n'a aucune solution sur $\partial\Omega$, alors*

$$D_L(L - \mathcal{G}, \Omega) := \deg(I - \mathcal{M}, \Omega, 0) = (-1)^2 \deg\left(g_{|R^2}, \Omega \cap \mathbb{R}^2, 0\right)$$

$\mathbb{R}^2$ étant identifié avec le sous-espace des fonctions constantes de C_T.

3.2.4 Théorème de continuation

Nous énonçons un *théorème fondamental* pour la solvabilité du problème

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(0) &= x(T) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soit h une homotopie entre g et f telle que

$$h(t,x,0) = g(x), \qquad h(t,x,1) = f(t,x)$$

Théorème 3.6. *Soit $\Omega \subset C_T$ un ouvert borné tel que*

1) Il n'existe aucune solution $x \in \partial\Omega$ de

$$x' = h(t,x,\lambda), \qquad \lambda \in [0,1[$$

2) $\deg(g, \Omega \cap \mathbb{R}^2, 0) \neq 0$.

Alors (3.8) admet au moins une solution $x \in \overline{\Omega}$.

3.3 Formulation du problème

Considérons donc le problème (P) du chapître précédent.

Définissons les applications F, D_1F et $\mu(t)$ respectivement par

. $F(t,u) := \int\limits_{1+u_0}^{u} f(t,s)ds$ une primitive de f définie par tout $u \in]u_0, +\infty[$ et pour tout $t \in I$.

. D_1F la dérivée partielle de F par rapport à t

$$D_1F := \frac{\partial F}{\partial t}(t,u)$$

. $\mu(t) := \liminf\limits_{u \to +\infty} \frac{2F(t,u)}{u^2}$.

Le problème (P) est étudié quand e est une fonction mesurable bornée; et f vérifie les trois hypothèses suivantes

(H4) (i) $f : I \times]u_0, +\infty[\to \mathbb{R}$, est continue en t et u,

(ii) $\lim\limits_{u \to u_0} f(t, u) = -\infty$

(H5) $D_1 F$ existe et est non négative sur I

(H6) (i) $\mu(t)$ existe, est finie, positive et continue en t.

(ii) $\mu_0 = \sup\limits_{t \in I} \mu(t) < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$

Remarque 3.7.

• L'hypothèse (**H6**) constitue une hypothèse de non-résonance, permettant de garantir l'existence de solutions pour (P) pour tout e mesurable et bornée.

Ce genre d'hypothèse est en général imposé dans le cas non autonome.

• Le fait que μ soit positive implique que f n'est pas majorée en u uniformément en t. Car si nous supposons que f est majorée, alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(I)$ telle que $f(t, u) \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in I$ et pour tout $u > u_0$, u assez grand, ce qui implique alors que $F(t, u) \leq \varphi(t)(u - u_0 - 1)$ pour u assez grand, ce qui implique $\mu \equiv 0$ et ceci contredit l'hypothèse (**H6**).

Résultat principal

Théorème 3.8. *Si f vérifie (**H4**),(**H5**),(**H6**) alors le problème (P) admet au moins une solution.*

Preuve: La preuve de ce résultat est basée essentiellement sur la *théorie des sur et sous-solutions* et la *théorie du degré topologique.* Nous utilisons des techniques introduites dans[79] et[52]

Détermination de sur et sous-solutions

- D'après la remarque 3.7, f n'est pas majorée uniformément en t sur $]u_0, +\infty[$ et puisque e est bornée, il est alors possible de trouver une constante $B > u_0$ telle que

$$\sup_{t \in I} e(t) < f(t, B) \qquad \text{pour tout } t \in I \tag{3.9}$$

B est alors sous-solution de (P).

- e étant bornée et $\lim\limits_{u \to u_0^+} f(t, u) = -\infty$ uniformément en t, il existe alors $A_0 > u_0$ une constante telle que

$$f(t, A_0) \leq \min_t e(t) \qquad \text{pour tout } t \in I \tag{3.10}$$

Posons alors $A := \max\{A_0 > u_0;\ (3.10) \text{ est vérifiée}\}$

A est alors une sur-solution de (P)

Nous considérons comme dans le chapître précédent deux cas. Le cas où $A > B$ et celui où $A < B$.

Cas1. $A > B$

La théorie classique de sur et sous-solutions implique l'existence de solutions. Dans ce cas, le problème est tout d'abord modifié en un problème (P') équivalent à (P)

$$(P')\begin{cases} u"(t) + g(t,u) = e(t) \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

où $g(t,u) = f(t,\gamma(u))$ avec $\gamma(u) = \begin{cases} A & u > A \\ u & B \leq u \leq A \\ B & u < B \end{cases}$

et par la suite (P') est relié par homotopie à un problème qui admet une solution unique. Ce qui permet d'appliquer le *degré topologique* pour conclure. $\square$

Remarque 3.9. Sans restriction, nous pouvons supposer que $\overline{e} := \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt$ est nulle. Car au besoin, nous pouvons retrancher $\overline{e}$ aux deux membres de l'équation $u" + f(t,u) = e(t)$ et poser alors $f_1(t,u) = f(t,u) - \overline{e}$, ce qui n'affecte en rien les hypothèses imposées à f car e est bornée

Cas2. $A < B$

Dans ce cas nous choisissons C vérifiant

$$A < C < B \tag{3.11}$$

De plus, nous pouvons supposer l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que, pour tout u dans $]u_0, +\infty[$, nous avons

$$sgn(u - C)f(t,u) > -c_1 \qquad \text{uniformément en } t \tag{3.12}$$

car sinon, f serait non minorée sur $]C, +\infty[$ uniformément en t, et alors nous pouvons trouver A' telle que $A' \geq B$ et $f(t,A') \leq e(t) \leq f(t,B)$ et nous obtenons alors des sur et sous-solutions bien ordonnées nous ramenant au **cas1.** De même, si f n'est pas majorée sur $]u_0, C[$, nous arrivons aux mêmes conclusions.

Considérons maintenant la famille de problèmes (P_λ), $\lambda \in [0,1]$

$$(P_\lambda)\begin{cases} u"(t) + (1-\lambda)\frac{u(t)-C}{u(t)-u_0} + \lambda\left[f(t,u(t)) - e(t)\right] = 0 & t \in I \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda = 0$, (P_0) est le problème autonome considéré par Lazer et Solimini [79]. En effet si nous considérons l'équation différentielle de (P_0)

$$u"(t) + \frac{u(t) - C}{u(t) - u_0} = 0$$

elle peut s'écrite

$$u"(t) - \frac{C - u_0}{u(t) - u_0} = -1$$

et en posant $w(t) := u(t) - u_0$ et $k := C - u_0$, nous obtenons

$$w"(t) - \frac{k}{w(t)} = -1$$

Pour cette équation, l'existence de solution est assurée par [79]car l'intégrale sur I du second membre est strictement négative.

Pour $\lambda = 1$, (P_1) est notre problème (P).

Soit E la primitive de e définie par

$$E(t) := \int_0^t e(s)ds$$

E est périodique car nous supposons que $\overline{e} = 0$.

Les problèmes (P_λ) sont équivalents au système (S_λ)

$$(S_\lambda)\begin{cases} u'(t) = v(t) + \lambda E(t) \\ v'(t) = -\left[(1-\lambda)\frac{u(t)-C}{u(t)-u_0} + \lambda f(t,u(t))\right] \\ u(0) - u(T) = 0 \\ v(0) - v(T) = 0 \end{cases}$$

Formulation abstraite du problème

Posons

$$x(t) = (u(t), v(t)) \text{ et } h(t, x(t), \lambda) = \left(v(t) + \lambda E(t), (\lambda - 1)\frac{u(t) - C}{u(t) - u_0} - \lambda f(t, u(t))\right)$$

et

$$C_T(I) := \left\{x \in C(I, \mathbb{R}^2); x(0) = x(T)\right\}.$$

Définissons l'opérateur $H : C_T(I) \times [0, 1] \to C_T(I)$

$$H(x, \lambda)(t) = h(t, x(t), \lambda)$$

et l'opérateur différentiel linéaire

$$L : D(L) := \left\{x \in C_T(I); x \in C^1(I, R^2)\right\} \to C_T(I)$$

par

$$(Lx)(t) = x'(t) \tag{3.13}$$

L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

u est solution de (P_λ) si et seulement si $x = (u, v)$ est solution de l'équation abstraite

$$Lx = H(x, \lambda) \tag{3.14}$$

Pour utiliser l'invariance par homotopie du degré associé à L, D_L , nous construisons un ouvert borné Ω de $C_T(I)$ tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $Lx \neq H(x, \lambda)$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$.

La preuve du théorème 3.8, dans le cas $A < B$ devient alors la construction d'un tel ensemble Ω.

Les solutions de (P_λ) sont à priori bornées

Lemme 3.10. Si u est solution de (P_λ), pour $\lambda \in [0, 1]$, alors $\min u \neq B$ et $\max u \neq A$ (i.e. si u est solution de (P_λ), pour $\lambda \in [0, 1]$, u ne peut pas être complètement dans l'intervalle $]-\infty, A]$ ou bien dans $[B, +\infty[$).

Preuve: Montrons d'abord que $\min u \neq B$. Supposons, qu'au contraire, il existe une solution de (P_λ) pour un certain $\lambda \in [0, 1]$, telle que $\min u = u(t_0) = B > C > u_0$, ce qui implique $u'(t_0) = 0$. De la relation (3.9), nous avons $f(t_0, B) \geq e(t)$. Alors par continuité de f en u, il existe des nombres positifs ξ, δ dépendant de u et λ tels que

$$(1-\lambda)\frac{u(t)-C}{u(t)} + \lambda\left[f(t,u(t)) - e(t)\right] \geq \xi > 0 \text{ et } u(t) > C \text{ pour } |t-t_0| \leq \delta$$

Ce qui entraine que pour $|t - t_0| \leq \delta \quad -u"(t) > 0$

Soit $t_1 \in [t_0 - \delta, t_0[$, nous obtenons

$$u(t_1) = u(t_0) + \int_{t_1}^{t_0} u"(s)(s-t_1)ds < B$$

ce qui contredit la définition de t_0.

D'une manière analogue, nous montrons que $\max u \neq A$. □

Maintenant, comme conséquence du lemme 3.10, dans la suite une solution u de (P_λ) pour $\lambda \in [0,1]$ vérifie:

$$\exists t_u \in I \text{ tel que } A < u(t_u) < B \tag{3.15}$$

Nous définissons la fonction $\widetilde{f}$ par

$$\widetilde{f}(t,u) = f(t,u) + c_1 + 1$$

la constante c_1 provient de (3.12), la primitive correspondant à $\widetilde{f}$ est donnée par

$$\widetilde{F}(t,u) = F(t,u) + (c_1+1)(u\_u_0\_1)$$

Par l'hypothèse **(H6)**, nous avons

$$0 < \mu_0(t) = \sup_t \left[\liminf_{u \to +\infty} \frac{2F(t,u)}{u^2}\right] < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$$

Alors, il existe $\mu_1$positive $\mu_0 < \mu_1 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ telle que

$$\limsup_{u \to +\infty} \left[\mu_1 u^2 - 2\widetilde{F}(t,u)\right] = +\infty$$

uniformément en t.

Il existe alors une suite $(D_n)_n$ telle que $D_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et

$$\mu_1 s^2 - 2\widetilde{F}(t,s) < \mu_1 D_n^2 - 2\widetilde{F}(t,D_n) \tag{3.16}$$

pour tout s dans $]C, D_n[$ et uniformément en t.

Utilisant (3.15) et (3.16), nous allons montrer que les solutions sont à priori bornées.

Lemme 3.11. Pour tout $n_0 \geq 0$,il existe $n \geq n_0$ tel que pour tout $\lambda \in [0,1[$, (P_λ) n'admet pas de solution vérifiant (3.15) et

$$\max u = D_n \tag{3.17}$$

Preuve: Supposons, qu'au contraire, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, nous pouvons trouver une solution u_n de (P_{λ_n}) pour un certain $\lambda_n \in [0,1]$ vérifiant (3.15) et (3.17). Dans ce cas, il existe une sous-suite de $(D_n)_n$, que nous appelons toujours (D_n) telle que $\max u_n = D_n$.

Pour n assez grand, $D_n > B$. Prolongeant u_n par T-périodicité, il existe $a_n \leq b_n \leq c_n \leq d_n$ tels que

$$\begin{aligned} &d_n - a_n \leq T \\ &u_n(a_n) = B = u_n(d_n) \\ &u_n(b_n) = D_n = u_n(c_n) \end{aligned}$$

et $B < u_n(t) < D_n$ pour tout $t \in]a_n, b_n[\cup]c_n, d_n[$.

Considérons, en premier l'intervalle $[a_n, b_n]$. Tout d'abord de la formule (3.12) et de la deuxième équation de S_λ, nous obtenons

$$v'(t) - \lambda c_1 < 0 \text{ pour tout } \lambda \in [0,1] \tag{3.18}$$

ce qui implique alors que $v(t) - c_1 t$ est une fonction décroissante. En intégrant la première équation dans (S_λ), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{b_n} u_n'(t)dt &= D_n - B = \int_{a_n}^{b_n} \left[(v_1(t) - c_1 t) + (c_1 t + \lambda_n E(t))\right] dt \\ &\leq T\left[v_n(a_n) - c_1 a_n\right] + c_1 \frac{T^2}{2} + T\,\|E\| \\ &\leq T\left[v(a_n) + \|E\|\right] + 2T^2 c_1 \end{aligned}$$

Nous rappelons que $D_n \to \infty$.

Alors, puisque e est borné, pour n assez grand, nous avons

$$v(a_n) > \|E\| \tag{3.19}$$

D'autre part, puisque $\max u_n = D_n = u_n(b_n)$, nous avons alors $u_n'(b_n) = 0$.

De la première équation de (S_λ), nous obtenons

$$u_n'(b_n) = 0 = v_n(b_n) + \lambda_n E(b_n)$$

Ce qui implique que

$$|v_n(b_n)| = \lambda_n |E(b_n)|$$

et donc

$$|v_n(b_n)| < \|E\| \tag{3.20}$$

De (3.19), (3.20) et de la continuité de v sur I, nous déduisons que pour n assez grand, il existe $\tau_n \in [a_n, b_n]$ tel que

$$v_n(\tau_n) = \|E\| \tag{3.21}$$

Soit τ_n^* le premier $\tau_n \in [a_n, b_n]$ vérifiant (3.21). Alors pour tout $t \in (a_n, \tau_n^*)$, nous avons

$$v_n(t) - \|E\| \geq 0 \tag{3.22}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\widetilde{F}(t, u_n(t)) + \frac{1}{2}\left(v_n(t) - \|E\|\right)^2\right] \\ = \;& D_1\widetilde{F}(t, u_n(t)) + D_2\widetilde{F}(t, u_n(t)u_n'(t) + \left(v_n(t) - \|E\|\right) v_n'(t) \end{aligned}$$

Par définition de $\widetilde{F}$, nous avons

$$D_1\widetilde{F}(t,s) = D_1\left[F(t,s) + (c_1+1)(s - u_0 - 1)\right] = D_1 F(t,s) \geq 0$$

cette dernière inégalité étant due à l'hypothèse (**H5**).

Alors pour tout $t \in [a_n, \tau_n^*]$

$$\widetilde{F}(t,s) + \frac{1}{2}\left(v_n(t) - \|E\|\right)^2 \leq \widetilde{F}(\tau_n^*, s) + \frac{1}{2}\left(v_n(t) - \|E\|\right)^2 \tag{3.23}$$

Considérons

$$\alpha := D_2\widetilde{F}(t, u_n(t)u_n'(t) + \left(v_n(t) - \|E\|\right) v_n'(t)$$

La définition de $\widetilde{F}$ et le système (S_λ) impliquent

$$\alpha = \widetilde{f}(t, u_n(t))(\lambda_n E(t) + v_n(t)) - \left(\lambda_n f(t, u_n(t)) + (1 - \lambda_n)\frac{u_n(t) - C}{u_n(t) - u_0}\right)(v_n(t) - \|E\|)$$

qui peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\widetilde{f}(t, u_n(t)) - \lambda_n f(t, u_n(t)) - (1 - \lambda_n)\frac{u_n(t) - C}{u_n(t) - u_0}\right](v_n(t) - \|E\|) \\ &\quad + \widetilde{f}(t, u_n(t))(\lambda_n E(t) + \|E\|) \end{aligned}$$

Sur (α_n, τ_n^*) nous avons $C < B < u_n(t)$, ce qui implique que $u_0 < \frac{u_n(t)-C}{u_n(t)-u_0} < 1$. Nous déduisons de (3.12) que $f(t, u_n(t)) > -c_1$. Comme $\widetilde{f}(t, u_n(t)) > 1$, il s'en suit de la relation (3.22)

$$\alpha > c_1(v_n(t) - \|E\|) + (\lambda_n E(t) + \|E\|) \geq 0$$

Ce qui implique en posant $(s = u_n(t))$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\tau_n^*, s) + \frac{1}{2}(v_n(t) - \|E\|)^2 &\leq \widetilde{F}(\tau_n^*, u_n(\tau_n^*)) + \frac{1}{2}(v_n(\tau_n^*) - \|E\|)^2 \\ &= \widetilde{F}(\tau_n^*, u_n(\tau_n^*)) \leq \widetilde{F}(\tau_n^*, D_n). \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant due à la définition de $\widetilde{F}$, à la formule (3.12) et au fait que $u_n(\tau_n^*) < D_n$.

De là, nous obtenons

$$\sqrt{2}\left[\widetilde{F}(\tau_n^*, D_n) - \widetilde{F}(\tau_n^*, s)\right]^{\frac{1}{2}} \geq v_n(t) - \|E\|$$

Et par (3.16), il s'ensuit

$$v_n(t) - \|E\| \leq \sqrt{\mu_1}\left[D_n^2 - u_n^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } t \in [a_n, \tau_n^*]$$

utilisant la première équation de (S_λ), nous avons

$$u_n'(t) = v_n(t) + \lambda_n E(t) \leq v_n(t) + \|E\| \leq \sqrt{\mu_1}\left[D_n^2 - u_n^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} + 2\|E\|$$

pour tout $t \in [a_n, \tau_n^*]$, ce qui implique que

$$\frac{u_n'(t)}{2\|E\| + \sqrt{\mu_1(D_n^2 - u_n^2(t))}} \leq 1 \tag{3.24}$$

pour tout $t \in [a_n, \tau_n^*]$.

Intégrons (3.24) sur $[a_n, \tau_n^*]$, nous obtenons

$$\tau_n^* - a_n \geq \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \int_{a_n}^{\tau_n^*} \frac{u_n'(t)}{\frac{2\|E\|}{\sqrt{\mu_1}} + \sqrt{D_n^2 - u_n^2(t)}} dt$$

En posant $u_n(t) = s$, l'inégalité devient

$$\tau_n^* - a_n \geq \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \int_B^{u_n(\tau_n^*)} \frac{ds}{2\mu_1^{\frac{1}{2}} \|E\| + \sqrt{D_n^2 - s^2}} := \rho_n$$

Maintenant si nous posons $\eta := 2\mu_1^{\frac{1}{2}} \|E\|$, alors pour n assez grand $D_n > \eta$ et la primitive de $\frac{1}{\eta + \sqrt{D_n^2 - s^2}}$ est donnée par

$$\arcsin \frac{s}{D_n} + \frac{\eta}{\eta + D_n} \log \frac{\sqrt{D_n + \eta} - \sqrt{D_n - \eta} \tan(\frac{1}{2} \arcsin \frac{s}{D_n})}{\sqrt{D_n + \eta} + \sqrt{D_n - \eta} \tan(\frac{1}{2} \arcsin \frac{s}{D_n})} \tag{3.25}$$

Maintenant nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \int_B^{u_n(\tau_n^*)} \frac{ds}{\eta + \sqrt{D_n^2 - s^2}}$$

Pour calculer cette limite, connaissant la primitive (3.25), il suffit d'évaluer $u_n(\tau_n^*)$ et pour cela nous revenons au système (S_λ) et nous intégrons la première équation sur $[\tau_n^*, b_n]$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n^*}^{b_n} u_n'(t) dt &= D_n - u_n(\tau_n^*) = \int_{\tau_n^*}^{b_n} (v_n(t) - c_1 t) dt + (c_1 t + \lambda E(t)) dt \\ &\leq T(v(\tau_n^*) - c_1) + c_1 \frac{T^2}{2} + T \|E\| < 2T \|E\| + 2c_1 T^2 =: K \end{aligned}$$

D'où

$$u_n(\tau_n^*) \geq D_n - K$$

et alors

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n \geq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \int_B^{D_n - K} \frac{ds}{\eta + \sqrt{D_n^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}}$$

car $D_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et K est fini.

Par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geq \lim_{n\to\infty} (\tau_n^* - a_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_n \geq \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}} > \frac{\pi}{2\sqrt{\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}} = \frac{T}{2}$$

puisque $\mu_1 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$

D'une manière similaire, nous montrons que

$$\liminf_{n\to\infty} (d_n - c_n) > \frac{T}{2}$$

ce qui contredit le fait que $d_n - a_n \leq T$.

Cette contradiction entraine que notre supposition est fausse, i.e.: il existe un entier assez grand n_0 tel que pour $n \geq n_0$, pour toute solution u_n de (P_λ) vérifiant (3.15), nous avons $\max u_n < D_{n_0}$. □

Posons $D = D_{n_0}$. Nous avons alors montré que: il existe $D > B$ tel que $\max u < D$ pour toute solution u de (P_λ), $\lambda \in [0,1]$ vérifiant (3.15).

Lemme 3.12 Il existe une constante $E_0 \in]u_0, A[$ telle que pour toute solution u de (P_λ) vérifiant (3.15) et $\max u < D$, nous avons $\min u > E_0$.

Preuve: Supposons au contraire qu'il existe une solution u de (P_λ) pour un certain $\lambda \in [0,1]$ telle que

$$\min u \leq E_0 \text{ pour tout } E_0 \in]u_0, A[\text{ et } \max u < D \text{ et (3.15) est vérifiée.}$$

Alors il existe une suite $(u_n)_n$ de solutions de (P_{λ_n}) pour un $\lambda_n \in [0,1]$ telle que

$$\begin{gathered} \min u_n < \tfrac{1}{n} + u_0; \quad \max u_n < D \\ \text{et} \quad \{u_n(t); t \in I\} \cap]A, B[\neq \emptyset \end{gathered}$$

Vu l'équivalence qu'il y a entre (P_{λ_n}) et (S_{λ_n}), nous avons

$$\int_0^T v_n'(t)dt = -\int_0^T \left[\lambda_n f(t, u_n(t)) + (1-\lambda_n)\frac{u_n(t) - C}{u_n(t) - u_0}\right] dt = 0$$

Si nous posons

$$h_2(t, u_n(t), \lambda) = \lambda_n f(t, u_n(t)) + (1-\lambda_n)\frac{u_n(t) - C}{u_n(t) - u_0}$$

et

$$\begin{aligned} I_C &= \{t \in I; \qquad u_n(t) < C\} \\ I_{C,D} &= \{t \in I; \qquad C \le u_n(t) < D\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Sur I_{CD}, h_2 est bornée car f est continue. La relation (3.13) entraine alors

$$\begin{aligned} & \int_{I_C} |h_2(t, u_n(t), \lambda_n)| \, dt \\ \le \; & \int_{I_C} [|h_2(t, u_n(t), \lambda_n) - c_1| + c_1] \, dt = \int_{I_C} (2c_1 - h_2(t, u_n(t), \lambda_n)) \, dt \\ \le \; & 2Tc_1 + \int_{I_{C,D}} |h_2(t, u_n(t), \lambda_n)| \, dt \\ \le \; & T \left\{2c_1 + \max\left\{|h_2(t, u_n(t), \lambda_n)| \, ; \; C \le u_n(t) < D, \; 0 \le \lambda_n \le 1\right\}\right\} \end{aligned}$$

ce qui fait que $\|h_2(., u_1(.), \lambda_n)\|_{L^1}$ est bornée.

D'après (P_λ)

$$u"_n(t) = -h_2(t, u_n(t), \lambda_n) + \lambda_n e(t)$$

ce qui entraine

$$\|u'_n\| = \sup_t |u'_n(t)|$$

est bornée.

Maintenant en prenant t_n^1, t_n^2 tels que $t_n^1 < t_n^2$ et

$$u_n(t_n^1) = \frac{1}{n} < A = u_n(t_n^2)$$

en multipliant l'équation de (P_λ) par u'_n et en intégrant sur $[t_n^1, t_n^2]$, nous obtenons

$$\beta := \int_{t_n^1}^{t_n^2} u"_n(t) u'_n(t) dt + \int_{t_n^1}^{t_n^2} h_2(t, u_n(t), \lambda_n) u'_n(t) dt = \lambda_n \int_{t_n^1}^{t_n^2} e(t) u'_n(t) dt$$

Tout d'abord nous considérons

$$\beta_1 := \int_{t_n^1}^{t_n^2} h_2(t, u_n(t), \lambda_n) u'_n(t) dt$$

alors

$$\beta = \frac{1}{2}\left\{\left[u_n(t_n^2)\right]^2 - \left[u'_n(t_n^1)\right]^2\right\} + \beta_1 = \lambda_n \int_{t_n^1}^{t_n^2} e(t) u'_n(t) dt$$

Puisque $\|u'_n\| = \sup_t |u'_n(t)|$ est bornée et e est bornée sur I, alors β est par conséquent borné. Ceci d'une part.

D'autre part

$$\beta_1 = \int_{t_n^1}^{t_n^2} \left\{ (1-\lambda_n) \frac{u_n(t) - C}{u_n(t) - u_0} u'_n(t) + \lambda_n f(t, u_n(t)) u'_n(t) \right\} dt$$

Comme

$$f(t, u_n(t)) = D_2 F(t, u_n(t)) \qquad \text{pour tout } t \in I \quad (\text{cf.}(\mathbf{H5}))$$

alors

$$f(t, u_n(t)) u'_n(t) = \frac{d}{dt} \left[F(t, u_n(t)) \right] - D_1 F(t, u_n(t))$$

ce qui implique

$$f(t, u_n(t)) u'_n(t) \leq \frac{d}{dt} \left[F(t, u_n(t)) \right] \qquad \text{car } D_1 F \geq 0$$

Alors

$$\begin{aligned} \beta_1 \ \leq \ & (1-\lambda_n) \left[A + \log |A - u_0|^{u_0 - C} \right] + \lambda_n F(t_n^2, A) \\ & -(1-\lambda_n) \left[u_0 + \frac{1}{n} - (u_0 - C) \log \frac{1}{n} \right] - \lambda_n F(t_n^1, u_0 + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Maintenant d'après (**H4**), nous avons $\lim_{u \to u_0^+} f(t, u) = -\infty$ et f est continue en u, ce qui implique que

$$\lim_{u \to u_0^+} F(t, u) = \lim_{u \to u_0^+} \int_{1+u_0}^{u} f(t, s) ds = +\infty$$

et par suite β n'est pas bornée. Ce qui est une contradiction. □

Remarque 3.13. Toute solution de (P_λ) telle que $\min u \in [E_0, B]$, $\max u \in [A, D]$ est telle que (u, v) est solution de (S_λ) et $\|v\| = \sup_t |v(t)|$ est bornée, i.e. il existe $M > 0$ tel que $\|v\| < M$.

Soit

$$\Omega := \{ x = (u, v) \in C_T(I); E_0 < \min u < B,\ A < \max u < D,\ \|v\| \leq M \}$$

Ω est un ouvert borné de $C_T(I)$ et aucune solution de (S_λ) ne peut appartenir à $\partial\Omega$ pour $\lambda \in [0, 1[$. D'après[87] chapître VI, H est L-compact sur $\overline{\Omega} \times [0, 1]$.

Par application du *théorème de continuation*, en prenant pour g l'application définie par

$$g(x(t)) = H(x,0)(t) = \left(v(t), -\frac{u(t)-C}{u(t)u_0}\right)$$

et $\mathbf{R}^2$ est identifiée avec l'espace des fonctions constantes de $C_T(I)$

$$\deg\left(g_{|_{R^2}}, \Omega \cap \mathbf{R}^2, 0\right) = \deg\left(g_{|_{R^2}},]E_0, D[\times]-M, M[, 0\right) = -1$$

Alors par la proposition d'existence : il existe un $\widetilde{x} \in D(L) \cap \Omega$ tel que

$$L\widetilde{x} = H(\widetilde{x}, 1).$$

Alors $\widetilde{x}$ est solution de (P_λ) pour $\lambda = 1$ puisque $\widetilde{x} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ et

$$h(t, x(t), 1) = (\widetilde{v}(t) + E(t), -f(t, \widetilde{u}(t))$$

et alors $\widetilde{u}$ est solution de (P).

Chapitre 4

Non linéarité continue

Notre objectif, dans ce chapître, est d'étudier toujours l'existence de solutions pour le problème (P), en considérant une condition de non-résonance définie par le potentiel de f, $F(t,u) := \int_0^u f(t,s)ds$ et ceci dans le cas où f est continue. Tout particulièrement, nous généralisons un résultat dû à Ding et Zanolin, obtenu dans le cas autonome (cf.[41])

Ce genre de problème a suscité de nombreux travaux dans le cas autonome, c'est à dire dans le cas où f ne dépend pas explicitement de t (cf[53] et [60]).

La preuve du résultat que nous présentons est basée sur la *théorie des sur et sous-solutions* (cf:[72] et[102]) et *la théorie du degré topologique* [88]. Cette technique a été utilisée dans le cas autonome par A. Fonda dans [53] qui fait appel à l'utilisation de l'application temps.Un travail de Ding et Zanolin (cf.[41]) se base également sur l'application temps. Les démonstrations dans notre cas sont une combinaison des techniques utilisées par Gossez et Omari dans [60] et par Habets, Omari et Zanolin dans [63].

4.1 Formulation du problème

(P) est considéré avec les hypothèses suivantes:

(H7) e est une fonction de $L^\infty(I, \mathbb{R})$

(H8) $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue

(H9) $\mu(t) := \lim\limits_{u\to\infty} \frac{2F(t,u)}{u^2}$ et $\gamma(t) := \lim\limits_{u\to-\infty} \frac{2F(t,u)}{u^2}$

existent, sont finies, positives et continues sur I

De plus $\frac{\pi}{\|\mu\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\pi}{\|\gamma\|^{\frac{1}{2}}} > T$

(H10) $\liminf\limits_{|u|\to\infty} \frac{f(t,u)}{u} > 0$

Remarque 4.1. Notons que μ et γ étant positives et continues en t, f n'est ni minorée, ni majorée en u uniformément en t. Ce qui permet d'affirmer l'existence de 2 constantes A et B telles que

$$ess \sup_t e(t) \leq f(t, B) \quad \text{et} \quad \operatorname{ess\,inf}_t e(t) \geq f(t, A)$$

ce qui fait de A et B respectivement une sur et sous-solution.

4.2 Résultat principal

Théorème 4.2. *Si les hypothèses énoncées auparavant sont remplies, le problème (P) admet au moins une solution.*

Preuve: Nous distinguons deux cas.

Cas1. $A > B$

L'existence de solution u pour (P) telle que $B \leq u \leq A$ découle de l'application d'un résultat dû à Kannan-Lakshmikantham dans [72]. □

Cas2. $A < B$

Suivant une argumentation similaire à celle faite précédemment, nous pouvons supposer $A < 0 < B$ et affirmer l'existence d'une constante c_1 telle que

$$sgn(u) f(t, u) > -c_1 \tag{4.1}$$

uniformément en t et pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Fixons θ tel que

$$0 < \theta < \min(\mu(t), \nu(t)) \quad \text{pour tout } t \in I$$

Soit l'opérateur K tel que $u = Kh$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} u''(t) + \theta u(t) = h(t) \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

et N l'opérateur défini par $(Nu)(t) := e(t) - f(t, u(t)) + \theta u(t)$.

Alors (P) peut être transformé en l'équation de point fixe

$$u = KNu \tag{4.2}$$

dans l'espace de Sobolev $H^1(I)$.

Par la *théorie du degré* de Leray-Schauder, l'équation (4.2) admet une solution si nous pouvons borner dans $H^1(I)$ l'ensemble des solutions possibles de la famille d'équations

$$u = \lambda KNu, \quad \lambda \in (0, 1) \tag{4.3}$$

L'équation (4.3) est équivalente au problème

$$(P_\lambda) \begin{cases} u''(t) + (1-\lambda)\theta u(t) + \lambda f(t, u(t)) - \lambda e(t) = 0 \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Donc pour appliquer la théorie de Leray-Schauder [82], nous devons définir un ouvert Ω dans $H^1(I)$ tel que $0 \in \Omega$ et tel qu'aucune solution de (P_λ) n'appartient à $\partial\Omega$ pour $\lambda \in (0, 1)$.

Donc la preuve du théorème 4.2 se réduit à la construction d'un tel ouvert.

Lemme 4.3. Si u est une solution de (P_λ) pour $\lambda \in (0, 1)$, alors

$$\min u \neq B \quad \text{et} \quad \max u \neq A$$

Preuve: Elle est similaire à celle du lemme 3.10 du chapître 3.

Comme conséquence du lemme 4.3, toute solution de (P_λ) pour $\lambda \in (0, 1)$ vérifie

$$\text{il existe } t_u \in I \quad \text{tel que} \quad A < u(t_u) < B \tag{4.4}$$

□

Lemme 4.4. Il existe $D > B$ tel que $\max u < D$ pour toute solution u de $(P_\lambda), \lambda \in (0,1)$ vérifiant (4.4).

Preuve: Soient μ_1, γ_1 telles que $\mu_1 > \|\mu\|$, $\gamma_1 > \|\gamma\|$et $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{\gamma_1}} > T$.

Posons $\widetilde{f}(t,u) = f(t,u) + c_1, c_1$ étant la constante de (4.1) et $\widetilde{F}(t,u) = F(t,u) + c_1 u$.

Alors

$$\limsup_{u \to +\infty} \left[\mu_1 \frac{u}{2} - \frac{\widetilde{F}(t,u)}{u} \right] = +\infty$$

uniformément en t et nous pouvons trouver une suite $(D_n)_n \subset \mathbb{R}$ telle que $D_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et pour tout $u \in \left]0, D_n\right]$, nous avons

$$\mu_1 \frac{u}{2} - \frac{\widetilde{F}(t,u)}{u} < \mu_1 \frac{D_n}{2} - \frac{\widetilde{F}(t,u)}{u} \tag{4.5}$$

Nous montrons que nous pouvons prendre $D = D_n$ pour n assez grand. En fait, pour tout $n_0 \geq 0$, il existe un $n > n_0$ tel que pour $\lambda \in [0,1[$, (P_λ) admet une solution u vérifiant (4.4) et

$$\max u = D_n \tag{4.6}$$

Pour cela , nous faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'au contraire il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, nous pouvons trouver une solution u_n de (P_{λ_n}) pour un certain $\lambda_n \in [0,1[$ et vérifiant (4.4) et (4.6).

Alors, il y a deux suites (u_n) et $(\lambda_n), \lambda_n \in [0,1]$ et u_n solution de (P_{λ_n}) avec $\max u_n = D_n$ et $u_n(t_n) \in [A,B]$ pour un certain $t_n \in I$.

Assertion 1. Soit $m_n := \min u_n, \quad m_n$ tend vers $-\infty$ quand $n \to \infty$.

Supposons au contraire l'existence d'une sous-suite minorée de (m_n) que nous noterons toujours pae (m_n). De (4.1), nous déduisons l'existence d'un $c_2 > 0$ tel que

$$(1 - \lambda_n)\theta u_n(t) + \lambda_n f(t, u_n(t)) > -c_2 \text{ pour tout } t \in I$$

De plus

$$\int_0^T \left[(1 - \lambda_n)\theta u_n(t) + \lambda_n f(t, u_n(t)) - \lambda_n e(t)\right] dt = 0$$

En multipliant l'équation de (P_{λ_n}) par $\widetilde{u}_n$ où

$$\widetilde{u}_n(t) := u_n(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u_n(\tau) d\tau = u_n(t) - \overline{u}_n$$

et intégrant sur I l'équation obtenue, nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_0^T |\widetilde{u}_n'(t)|^2\,dt &= \int_0^T [(1-\lambda_n)\theta u_n(t)+\lambda_n f(t,u_n(t))-\lambda_n e(t)]\,\widetilde{u}_n(t)dt \\ &= \int_0^T [(1-\lambda_n)\theta u_n(t)+\lambda_n f(t,u_n(t))-\lambda_n e(t)+c_2]\,\widetilde{u}_n(t)-\int_0^T c_2\widetilde{u}_n(t)dt \\ &\leq 2T\,\|\widetilde{u}_n\|_\infty c_2 \leq 2Tc_2\sqrt{\frac{T}{12}}\,\|\widetilde{u}_n'\|_{L^2}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité de Sobolev.

Alors $(\widetilde{u}_n)_n$ est bornée et $u_n=\overline{u}_n+\widetilde{u}_n$. Donc u_n est bornée, ce qui contredit $\max u_n = D_n$ et $D_n\to+\infty$ quand $n\to+\infty$.

Remarque 4.5. La suite $(u_n)_n$ est telle que $D_n=\max u_n\to+\infty$ quand $n\to+\infty$ et $m_n=\min u_n\to-\infty$ quand $n\to+\infty$.

Alors $\|u_n\|\to+\infty$, où $\|.\|$ dénote la norme de $H^1(I)$.

Maintenant, si nous posons $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$, et, si c'est nécessaire, nous passons à une sous-suite, nous avons $v_n\to v$ faiblement dans $H^1(I)$. Ce qui implique que v_n converge uniformément sur I (voir:[95],pp 13-14).

Nous pouvons aussi supposer que $\lambda_n\to\lambda\in[0,1]$.

Nous remarquons tout d'abord, d'après (4.4), que v s'annule au moins en un point et n'est pas identiquement nulle. En effet, si nous supposons que $v\equiv0$, en multipliant l'équation de (P_{λ_n}) par $\frac{u_n}{\|u_n\|^2}$ et intégrant sur I, nous obtenons

$$\int_0^T |v_n(t)|^2\,dt=\int_0^T(1-\lambda_n)\theta\,|v_n(t)|^2+\frac{\lambda_n}{\|u_n\|}\int_0^T(f(t,u_n(t))-e(t))\,v_n(t)dt$$

En passant à la limite, nous obtenons

$$\int_0^T |v_n(t)|^2\,dt\to0 \text{ quand } n\to+\infty$$

Ceci est impossible car $v_n\to v$ et $\|v\|=1$.

Maintenant, prolongeant u_n par T-périodicité, nous pouvons trouver deux intervales $[a_n,b_n]\,,[c_n,d_n]$ contenant respectivement un point de minimum et un point de maximum de u_n tel que

$$\begin{aligned}
&u_n(a_n) = u_n(b_n) = u_n(c_n) = u_n(d_n) = 0 \\
&u_n(t) > 0 \quad \text{sur} \quad]a_n, b_n[\\
&u_n(t) < 0 \quad \text{sur} \quad]c_n, d_n[\\
&\max_{[a_n,b_n]} u_n = D_n \quad \text{et} \quad \min_{[c_n,d_n]} u_n = m_n \\
&(d_n - c_n) + (b_n - a_n) \leq T
\end{aligned}$$

Passant à une sous-suite si nécessaire, nous avons

$$a_n \longrightarrow a, \quad b_n \longrightarrow b, \quad c_n \longrightarrow c, \quad d_n \longrightarrow d$$

De plus

$$\begin{aligned}
&v \geq 0 \quad \text{sur} \quad [a, b]\,, \\
&v \leq 0 \quad \text{sur} \quad [c, d]\,, \\
&v(a) = v(b) = v(c) = v(d) = 0
\end{aligned}$$

et $[a, b]\,, [c, d]$ sont à intérieurs disjoints.

1) Par définition de F, nous avons

$$f(t, u) = \frac{\partial}{\partial u}\left[F(t, u)\right], \quad \text{pour tout } t \in I$$

et alors

$$\frac{f(t,u)}{u} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F(t,u)}{u}\right] + \frac{F(t,u)}{u^2} \qquad \text{pour tout } t \in I$$

De plus

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F(t,u)}{u}\right] \leq \frac{\mu_1}{2} \quad \text{pour } u \text{ assez grand } (u \text{ au voisinage de } +\infty)$$

Car sinon

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F(t,u)}{u}\right] > \frac{\mu_1}{2}$$

et par suite si $u = D_n, n$ assez grand et $0 < u_0 < D_n$, alors

$$\int_{u_0}^{D_n} \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F(t,u)}{u}\right] du > \frac{\mu_1}{2}(D_n - u_0) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } I$$

Cette inégalité peut-être écrite

$$\mu_1 \frac{D_n}{2} - \frac{F(t, D_n)}{D_n} < \mu_1 \frac{u_0}{2} - \frac{F(t, u_0)}{u_0}$$

ce qui contredit la définition de D_n.

2) La condition

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{2F(t,u)}{u^2} < \mu_1, \quad \text{uniformément en } t,$$

signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $g_\varepsilon \in C(I)$ tel que

$$\frac{2F(t,u)}{u^2} \leq \mu_1 + \varepsilon + \frac{g_\varepsilon(t)}{u^2}$$

pour tout t et tout $u \geq u_\varepsilon$.

Assertion 2. $b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}}$ et $d - c \geq \frac{\pi}{\sqrt{\nu_1}}$

Remarque: L'estimation de la longueur des intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ se fait dans le cas autonome en se basant sur l'application temps. (cf.[53]). Une démonstration se basant sur l'évaluation de l'intégrale $\int_{a_n}^{b_n} u_n'^2(t)dt$ dans le cas de non linéarité autonome $f(u)$, de la forme

$$f(u) = p(u)u^+ - q(u)u^- + r(u)$$

est considérée par Habets, Omari et Zanolin (cf.[63])

Preuve: Soit la première inégalité. En multipliant l'équation différentielle de (P_{λ_n}) par u_n et intégrant l'équation résultante sur $[a_n, b_n]$, nous obtenons

$$\int_{a_n}^{b_n} u_n'^2(t)dt = \int_{a_n}^{b_n} (1-\lambda_n)\theta u_n^2(t)dt + \lambda_n \int_{a_n}^{b_n} (f(t,u_n(t)) - e(t))\, u_n(t)dt$$

Par le choix de θ, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{a_n}^{b_n} u_n'^2(t)dt \\
\leq\ & (1-\lambda_n)\mu_1 \int_{a_n}^{b_n} u_n^2(t)dt + \lambda_n \int_{a_n}^{b_n} \frac{f(t,u_n(t))}{u_n(t)} u_n^2(t)dt + \sup_t |e(t)| \int_{a_n}^{b_n} u_n(t)dt \\
\leq\ & (1-\lambda_n)\mu_1 \int_{a_n}^{b_n} u_n^2(t)dt + \lambda_n \int_{a_n}^{b_n} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F(t,u)}{u}\right]_{|u=u_n(t)} + \frac{F(t,u_n(t)}{u_n^2(t)} \right) u_n^2(t)dt \\
& + \sup_t |e(t)| \int_{a_n}^{b_n} u_n(t)dt \\
\leq\ & \int_{a_n}^{b_n} (1-\lambda_n)\mu_1 + \lambda_n \left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{g_\varepsilon(t)}{2u_n^2(t)} \right) u_n^2(t) + \sup_t |e(t)| \int_{a_n}^{b_n} u_n(t)dt
\end{aligned}$$

$$\leq \mu_1 \int_{a_n}^{b_n} u_n^2(t)dt + \frac{\lambda_n \varepsilon}{2} \int_{a_n}^{b_n} u_n^2(t)dt + C_\varepsilon D_n$$

pour $u_n(t) > u_\varepsilon$ et ε constante positive. La constante C_ε dépendant seulement de ε et pas de n.

D'autre part, nous avons

$$D_n = \max_{[a_n,b_n]} u_n(t) \leq (b_n - a_n)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui implique que

$$\lim_{u \to +\infty} \int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt = +\infty$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, nous déduisons

$$\int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt \leq (\mu_1 + \varepsilon) \left(\frac{b_n - a_n}{\pi} \right)^2 \int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt + C_\varepsilon (b_n - a_n)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

en divisant cette inégalité par $\int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt$, nous obtenons

$$1 \leq (\mu_1 + \varepsilon) \left(\frac{b_n - a_n}{\pi} \right)^2 + C_\varepsilon \frac{(b_n - a_n)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Faisant tendre n vers $+\infty$ et ε vers 0, nous obtenons

$$\liminf_{n \to +\infty} \left(\frac{b_n - a_n}{\pi} \right)^2 \geq \frac{1}{\mu_1}$$

car $\int_{a_n}^{b_n} |u_n'(t)|^2 \, dt \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Et par suite

$$b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}}.$$

De manière analogue, nous montrons que

$$d - c \geq \frac{\pi}{\sqrt{\nu_1}}.$$

Par suite, nous obtenons

$$(b-a)+(d-c) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}}+\frac{\pi}{\sqrt{\nu_1}} > T.$$

Ce qui contredit

$$(b-a)+(d-c) \leq T.$$

Conclusion

Nous pouvons choisir $D = D_{\overline{n}}$, avec $\overline{n}$ assez grand, tel que $\max u < D$ pour toute solution u de (P_λ) $\lambda \in [0,1]$, vérifiant (4.4). □

Lemme 4.6. Il existe $C < A$, tel que si u est solution de (P_λ), $\lambda \in [0,1]$ vérifiant (4.4) et $\max u < D$, alors $\min u > C$.

Preuve: Soit u une solution de (P_λ) pour $\lambda \in [0,1[$ avec $\max u < D$ et vérifiant (4.4). Puisque $\max u < D$, il découle de (4.1) qu'il existe une constante positive c_3 telle que

$$(1-\lambda)\theta u(t) + \lambda f(t,u(t)) < c_3$$

En multipliant l'équation de (P_λ) par $\widetilde{u}(t) = u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$ et en intégrant l'équation résultante, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \widetilde{u}'^2(t)dt &= \int_0^T [(1-\lambda)\theta u(t) + \lambda f(t,u(t)) - \lambda e(t)]\, \widetilde{u}(t)dt \\
&\leq \sup_{t\in I} |\widetilde{u}(t)| \left(Tc_3 + \int_0^T |e(t)|\, dt \right) \\
&\leq \sqrt{\frac{T}{12}} \left(\int_0^T |u'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} (Tc_3 + \|e\|_{L^1})
\end{aligned}$$

Ce qui implique alors que $\sup_{t\in I} |\widetilde{u}(t)|$ est borné par une constante dépendant de D.

Puisque u vérifie (4.4), il existe donc un $C < A$ tel que $\min u > C$. □

Lemme 4.7. Il existe une constante M telle que si u est une solution de (P_λ) pour $\lambda \in [0,1[$ alors $\int_0^T |u'(t)|^2 dt < M$.

Preuve: Soit u une solution de (P_λ) pour un certain $\lambda \in [0,1[$. Il existe alors une constante c_4 indépendante de λ et u telle que

$$\int_0^T |(1-\lambda)\theta u(t) + \lambda f(t,u(t))|\, dt \leq c_4 := T\sup(c_2,c_3)$$

c_2 et c_3 étant les constantes provenant des lemmes 4.4 et 4.6.

Puisque $\widetilde{u} = u - \overline{u}$

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\widetilde{u}'(t)|^2\,dt &= \int_0^T |u'(t)|^2\,dt \\
&= \int_0^T [(1-\lambda)\theta u(t) + \lambda f(t,u(t))]\,\widetilde{u}(t)dt - \lambda \int_0^T e(t)\widetilde{u}(t)dt \\
&\le \sup_t |\widetilde{u}(t)| \left(c_4 + \int_0^T |e(t)|\,dt \right) \\
&\le \max(|C|, D)\,(c_4 + \|e\|_{L^1}) =: c_5
\end{aligned}$$

Posons $M := c_5 + 1$, nous avons alors

$$\int_0^T |u'(t)|^2\,dt < M.$$

□

Pour terminer la démonstration du *théorème d'existence de solutions*, nous considérons l'ouvert Ω défini par:

$$\Omega := \left\{ u \in H^1(I);\ A < \max u < D,\ C < \min u < B,\ \|u'\|_{L^2} < M \right\}$$

Alors $0 \in \Omega$, Ω est un ouvert borné de $H^1(I)$ et (P_λ) n'admet aucune solution dans $\partial\Omega$ (conséquence des quatre lemmes précédents).

Ce qui implique

$$\deg(I - \lambda KN, \Omega, 0)$$

est bien défini pour $\lambda \in [0,1]$. Comme (P_0) admet pour seule solution la solution triviale, nous avons

$$\deg(I, \Omega, 0) = 1$$

(car $0 \in \Omega$) et par suite

$$\deg(I - KN, \Omega, 0) = 1$$

Donc (P_1) admet une solution u qui est alors solution de (P).

Ce qui achève la démonstration du résultat principal de ce chapître.

Chapitre 5

Non linéarité Lipschitzienne

5.1 Introduction

Dans ce chapître nous nous intéressons à une classe de *non linéarités à saut* ou encore asymétriques.

Nous considérons donc l'équation

$$u" + g(u) = s + p(t, u, s) \tag{5.1}$$

où s est un paramètre et g et p sont deux fonctions continues.

Nous présentons quelques résultats soulignant la relation entre le paramètre s et le nombre des solutions de l'équation (5.1). Ceci en considérant des conditions sur g impliquant un comportement asymptotique différent en $+\infty$ et $-\infty$.

Les problèmes de cette forme sont connus dans la littérature sous le nom de *type de Ambrosetti-Prodi*, en raison de l'article séminal de A. Ambrosetti et G. Prodi [4]. En effet dans [4] pour g de classe C^2 et telle que $g'' > 0$ et $g\prime(-\infty) < \lambda_1 < g'(+\infty) < \lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2$ les deux premières valeurs propres de l'opérateur différentiel $\frac{d^2}{dt^2}$ avec les conditions de Dirichlet).Ils montrent que pour l'équation

$$u'' + g(u) = sh(t)$$

avec $h(t) = \sin \frac{\pi}{T} t$ (ou encore en général pour une e.d.p. elliptique), il existe un s_0 tel que cette équation admet une solution si $s = s_0$, deux solutions si $s > s_0$ ou aucune solution si $s < s_0$ (solutions vérifiant les conditions de Dirichlet $u(0) = u(T) = 0$).

Dès l'apparition de [4], un grand nombre de résultats d'existence et de multiplicité a été obtenu dans la même direction et beaucoup d'interêt a été porté au cas où l'intervalle $]g'(-\infty), g'(+\infty)[$ contient une ou plusieurs valeurs propres.

Fabry, Mawhin et Nkashama [50] ont été les premiers à considérer ce genre de problèmes avec conditions périodiques. Dans ce cas la fonction propre associée à la première valeur propre $\lambda_0 = 0$ est $h(t) \equiv 1$, et alors l'équation analysée est de la forme

$$u" + f(t, u, u') = s$$

Dans [105] Ortega étudia le même problème pour une équation de Duffing d'un point de vue de stabilité des solutions. Del Pino, Manasevitch et Murua [38], et Rebelo et Zanolin [113] considèrent l'équation

$$u" + g(u) = s(1 + q(t))$$

avec $|q|_\infty << 1$, et obtiennent un résultat de multiplicité.

Dans [77], Lazer et Mc Kenna proposent l'étude de solutions périodiques d'une équation de la forme

$$u" + g(u) = s + \omega(t) \text{ avec } g'(-\infty) \neq g'(+\infty)$$

dans le but d'analyser les oscillations de la suspension des ponts.

Rebelo et Zanolin [114] considèrent cette équation dans le cas où g est à potentiel convexe et $g(0) = 0$.

Dans notre travail l'équation (5.1) peut être regardée comme une perturbation de l'équation autonome $u'' + g(u) = s$. Nous supposons que p est au plus linéaire en s. Nous distinguons deux cas, les hypothèses considérées sur g et p étant différentes dans les deux cas.. Le premier, cas où la perturbation dépend de s en étant borné, se veut une généralisation d'un résultat dû à Rebelo et Zanolin dans [115]. Il est abordé par une variante du *théorème généralisé du point fixe* de Poincaré-Birkhoff en suivant les mêmes étapes de démonstration présentées dans [115]. Le second cas (p au plus linéaire) est traité par la *méthode des sur et sous-solutions* et le *théorème de point fixe* de Banach qui permettent de montrer l'existence d'au moins deux solutions, l'une positive et l'autre négative. L'application du *théorème de Poincaré-Birkhoff* permet par la suite d'obtenir la multiplicité des solutions.

5.2 Premier cas

5.2.1 Formulation du problème et préliminaires.

Dans cette section, nous formulons le problème considéré et nous présentons les définitions et les outils nécessaires pour établir notre résultat.

Formulation du problème

Nous nous intéressons donc à l'existence et la multiplicité des solutions du problème (P_s)

$$(P_s) \quad \begin{cases} u"(t) + g(u(t)) = s + p(t, u(t), s) \\ u(t) = u(t+T) \\ u'(0) - u'(t+T) \end{cases}$$

T étant une constante strictement positive.

Nous devons souligner qu'un problème similaire à (P_s) a été considéré par Rebelo et Zanolin (cf.[115]) dans le cas où p est indépendant de s. Il y montrent l'existence de solutions sous-harmoniques par application du théorème de Poincaré-Birkhoff. En appliiquant la même technique de démonstration, nous prouvons la multiplicité des solutions pour le problème (P_s)

Les non-linéarités g et p vérifient les hypothèses suivantes

(H11) (i) $g$est localement lipschitzienne.

(ii) g est de classe C^1au voisinage de $+\infty$et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \left(\frac{n2\pi}{T}\right)^2 < \gamma \leq \liminf_{u\to+\infty} g'(u) \leq \limsup_{u\to+\infty} g'(u) \leq \beta \leq \left((n+1)\frac{2\pi}{T}\right)^2$

(iii) $\lim_{u\to-\infty} g(u) = +\infty$

(H12) (i) p est continue en t et T-périodique.

(ii) p est localement lipschitzienne en u.

(iii) il existe une fonction positive, continue et T-périodique h telle que $|p(t,u,s)| \leq h(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}, u$ dans $\mathbb{R}$ et $s > 0$

Remarque 5.1. Les hypothèses **(H11)** et **(H12)** impliquent l'existence d'au moins une solution pour (P_0) si $p(t,u,0)$ est bornée pour tout (t,u) dans $\mathbb{R}^2$ (cf.[89]).

Pour $s > 0$ l'existence d'au-moins une solution est assurée par **(H11), (H12).** Dans cette dernière situation, nous étudions la multiplicité des solutions.

Préliminaires

Problèmes à valeur initiale et problèmes périodiques

Soit $T > 0$ fixé, considérons la fonction Z définie par

$$Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(t,z) \rightsquigarrow Z(t,z)$$

Supposons Z localement lipschitzienne en z et continue.

Nous savons que pour tout $(t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique, $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = Z(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

qui est définie sur un intervalle maximal

$$]\tau_-(t_0,z_0), \tau_+(t_0,z_0)[\,, \text{ tel que } -\infty \leq \tau_-(t_0,z_0) < t < \tau_+ < (t_0,z_0) \leq +\infty.$$

De plus z est continue sur l'ensemble $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = \Big\{(t,t_0,z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; \tau_-(t_0,z_0) < t < \tau_+(t_0,z_0)\Big\}$$

sur lequel elle est définie et $\mathcal{I}$ est ouvert (Voir [29]).

Une solution périodique de $z'(t) = Z(t,z(t))$ est une solution de cette équation, définie sur $[0,T]$ et telle que $z(0) = z(T)$.

Si nous supposons que Z est T-périodique en t, alors une solution T-périodique de $z'(t) = Z(t,z(t))$ peut être prolongée comme une solution définie sur tout $\mathbb{R}$ et $z(t) = z(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme cela fut observé par Poincaré à la fin du XIX^{ème} siècle, $z(t) = z(t,0,z_0)$ est une solution T-périodique de $z'(t) = Z(t,z(t))$, si et seulement si

$z_0 \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\tau_+(0, z_0) > T$ et $z_0 = z(T, 0, z_0)$. Ce qui permet de définir l'application de Poincaré (opérateur de translation)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\Phi(z_0) = z(T, z_0)$$

qui est continue.

Fonctions admissibles et nombre de rotations

Définition 5.2. Soient A et B tels que $-\infty \le A \le B \le +\infty$, et

$\psi :]A, B[\to \mathbb{R}$ un homéomorphisme croissant.

Nous dirons que ψ est admissible par rapport à $c \in]A, B[$ si ψ est de classe C^1 dans $]A, B[\setminus \{c\}$ avec $\psi(c) = 0$.

Remarque 5.3. Quand $]A, B[= \mathbb{R}$, une fonction type, admissible par rapport à c, est donnée par: $\psi(u) = u - c$.

Soit $P = (c, 0)$ et $D :=]A, B[\times \mathbb{R}$.

Définition 5.4. Pour toute fonction admissible $\psi :]A, B[\to \mathbb{R}$, par rapport à c, $c \in]A, B[$, on note $\mathcal{P}_\psi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to D \setminus \{P\} =]A, B[\times \mathbb{R} \setminus \{P\}$, l'application

$$\mathcal{P}_\psi(r, \theta) = (\psi^{-1}(r \cos\theta), r \sin\theta).$$

$\mathrm{E}_\psi = \left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathcal{P}_\psi\right)$ est un recouvrement de l'ensemble $D \setminus \{P\}$ (Voir [86]).

Remarque 5.5. Dans le cas où $\psi(u) = u - c$, nous avons $\mathcal{P}_\psi(r, \theta) = (c + r\cos\theta, r\sin\theta)$ et alors pour un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$, (r, θ) correspondent aux coordonnées polaires de centre P.

Définition 5.6. Pour s_1, $s_2 \in [0, T]$, le nombre de rotations de $z(.)$ de s_1 à s_2 est défini par

$$rot(s_2, s_1, z) := \frac{\theta(s_1) - \theta(s_2)}{2\pi},$$

Nous exprimons la dépendance de ψ en notant

$$rot_\psi(s_2, s_1, z) := \frac{\theta_\psi(s_1) - \theta_\psi(s_2)}{2\pi}$$

De plus, si $z(t) = (u(t), v(t)) = z(t, z_0)$ est solution du système

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -Y(t, u) \end{cases} \tag{5.2}$$

où Y est une fonction continue en t, lipschitzienne en u telle que $z(0) = z_0$, définie sur $[0, T]$. Nous posons

$$rot_\psi(T, z_0) = rot_\psi(T, z(., z_0)) = rot_\psi(T, 0, z(., z_0))$$

Soit $P := (c, 0)$. Supposons que $z(t) \neq P$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors, l'ensemble $\mathcal{N}$ défini par

$$\mathcal{N} := \{t \in [0, T]; \quad u(t) = c\}$$

est fini, car $u'(t) = v(t) \neq 0$ si $u(t) = c$ (conséquence du *théorème d'inversion locale*). Tout zéro de $u(.) - c$ est simple.

Notons que $(r(.), \theta_\psi(.))$ sont de classe C^1 dans $[0, T] \setminus \mathcal{N}$ et nous avons

$$-\theta'_\psi(t) = \frac{\psi'(u(t))v^2(t) + Y(t, u(t))\psi(u(t))}{\psi^2(u(t)) + v^2(t)}$$

Caractérisation du nombre de rotations

Théorème 5.7. *Pour toute solution $z = (u, v)$ du système (5.2) avec $z(.) \neq P$ sur $[s_1, s_2]$, nous avons*

$$rot_\psi(s_2, s_1, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi'(u(t))v^2(t) + Y(t, u(t))\psi(u(t))}{\psi^2(u(t)) + v^2(t)} dt \tag{5.3}$$

et si $rot_\psi(s_2, s_1, z) \in \mathbf{Z}$, alors

$$\begin{aligned} rot_\psi(s_2, s_1, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\{t \in [s_1, s_2]; u(t) > c\}} \frac{\psi'(u(t))v^2(t) + Y(t, u(t))\psi(u(t))}{\psi^2(u(t)) + v^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\{t \in [s_1, s_2]; u(t) < c\}} \frac{\psi'(u(t))v^2(t) + Y(t, u(t))\psi(u(t))}{\psi^2(u(t)) + v^2(t)} dt \end{aligned} \tag{5.4}$$

Preuve: Posons $t_0 = s_1$ et $t_{N+1} = s_2$. Si $\mathcal{N} \cap [s_1, s_2[= \{t_i; i = 1, ..., N\}$,alors

$$\theta_\psi(t_i) - \theta_\psi(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\theta'_\psi(t) dt \quad \forall i = 0, ..., N$$

d'où

$$\int_{s_1}^{s_2} -\theta'_\psi(t)dt = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\theta'_\psi(t)dt = \sum_{i=0}^{N} (\theta_\psi(t_i) - \theta_\psi(t_{i+1}))$$

ce qui prouve la formule (5.3).

Supposons maintenant que $rot_\psi(s_2, s_1, z) = k \in \mathbf{Z}$. Comme les zéros de $u(.) - c$ sont simples, nous avons $N = |2k|$. et $s_1 = t_0 \leq t_1 < .... < t_{2k+1} = s_2$.

Supposons, par exemple, que $\theta_\psi(t_1) = \frac{\pi}{2} + 2j\pi$, $j \in \mathbf{Z}$, ce qui signifie que $u(t_1) = c$ avec $u'(t_1) = v(t_1) > 0$. Et $u(t) > c$ pour $t \in]t_1, t_2[$, $u'(t_2) < 0$. En fait nous avons $u(t) < c$ pour $t \in]t_i, t_{i+1}[$ avec i pair et $u(t) > c$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$ avec i impair. Ce qui nous permet d'obtenir

$$\frac{1}{\pi} \int_{\{t \in [s_1, s_2]; u(t) > c\}} -\theta'_\psi(t)dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i \text{ impair}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\theta'_\psi(t)dt = \frac{1}{\pi}(k\pi) = rot_\psi(s_2, s_1, z)$$

D'autre part

$$k = rot_\psi(s_2, s_1, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} -\theta'_\psi(t)dt = \frac{1}{2\pi} \left(k\pi + \int_{\{t \in [s_1, s_2]; u(t) < c\}} -\theta'_\psi(t)dt \right)$$

d'où le résultat. □

Cas particulier de fonctions admissibles

Soit $\psi_i :]A_i, B_i[\to \mathbb{R} \quad i = 1, 2$ définie par

$$\psi_i(u) = \mu_i(u - c)^+ - \nu_i(u - c)^-$$

avec μ_i, ν_i des constantes positives.

Notons par E_{ψ_i} le recouvrement de $(]A_i, B_i[\times \mathbb{R}) \setminus \{P\}$.

Remarque 5.8. Etant donné θ_{ψ_1} telle que $\theta_{\psi_1}(t_0) = \frac{k\pi}{2}$ pour $t_0 \in [0, T]$, nous pouvons toujours choisir θ_{ψ_2} tel que $\theta_{\psi_2}(t_0) = \theta_{\psi_1}(t_0)$. Ceci est une conséquence immédiate de la définition.

Supposons que $z(.) = (u(.), v(.))$ est une fonction continue définie sur $[0, T]$ telle que $z(t) \in (\bigcap_{i=1}^{2}]A_i, B_i[\times \mathbb{R}) \setminus \{P\}$ et considérons les systèmes de coordonnées $(r_{\psi_i}(.), \theta_{\psi_i}(.))$ définissant $z(.)$ dans E_{ψ_i} avec $i = 1, 2$. Nous avons le résultat suivant:

Lemme 5.9. Pour tous t_1, t_2 dans $[0, T]$, nous avons

$$rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) > k \Rightarrow rot_{\psi_2}(t_2, t_1, z) > k$$

et

$$rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) < k \Rightarrow rot_{\psi_2}(t_2, t_1, z) < k$$

k étant un entier naturel.

Preuve: Par définition de ψ_i et $(r_{\psi_i}, \theta_{\psi_i})$, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned} \theta_{\psi_1}(t) &< \theta_{\psi_1}(\tau) \Longleftrightarrow \theta_{\psi_2}(t) < \theta_{\psi_2}(\tau) \quad \text{pour } |t-\tau| \quad \text{assez petit} \\ \theta_{\psi_1}(t) &\equiv \theta_{\psi_1}(\tau) \text{ (mod. } 2\pi) \Longleftrightarrow \theta_{\psi_2}(t) \equiv \theta_{\psi_2}(\tau) \text{ (mod. } 2\pi) \end{aligned}$$

cette dernière équivalence implique

$$rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) = j_1 \in \mathbf{Z} \Longleftrightarrow rot_{\psi_2}(t_2, t_1, z) = j_2 \in \mathbf{Z}$$

Soit $rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) > k$. Posons

$$\begin{aligned} a &:= \frac{2\theta_{\psi_1}(t_2)}{\pi} \\ b &:= \frac{2\theta_{\psi_1}(t_1)}{\pi} \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$b - a > 4(rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z)) > 4k$$

Nous nous mettons dans le cas où $a < b$, le nombre n des éléments de $[a, b] \cap \mathbf{Z}$ vérifie $n \geq 4k$

Soit $i \in \mathbf{Z}$, $\;i$: le plus petit entier plus grand ou égal à a et $\tau_2 \in [t_1, t_2]$ tel que $\theta_{\psi_1}(\tau_2) = i\frac{\pi}{2}$. Nous pouvons choisir $(r_{\psi_2}, \theta_{\psi_2})$ tel que $\theta_{\psi_2}(\tau_2) = i\frac{\pi}{2}$. Ce qui permet donc d'avoir pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et pour $t \in \mathbf{R}$,

$$\theta_{\psi_1}(t) = \frac{m\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta_{\psi_2}(t) = \frac{m\pi}{2}.$$

Soit $j \in \mathbf{Z}$, $\;j$: le plus grand entier plus petit ou égal à b et $\tau_1 \in [t_1, t_2]$ tel que $\theta_{\psi_1}(\tau_1) = j\frac{\pi}{2}$

Par définition de i et j,$[a, b] \cap \mathbf{Z} = [i, j] \cap \mathbf{Z}$, ce qui implique $j = i + n - 1 \geq i + 4k - 1$.

Puisque $\frac{2}{\pi}\theta_{\psi_1}(\tau_1) = \frac{2}{\pi}\theta_{\psi_2}(\tau_1) = j$. Il s'en suit alors

$$\begin{aligned} rot_{\psi_2}(\tau_2, \tau_1, z) &= \frac{j-i}{4} = \frac{n-1}{4} \geq k - \frac{1}{4} \\ rot_{\psi_2}(t_2, t_1, z) &= rot_{\psi_2}(t_2, \tau_2, z) + rot_{\psi_2}(\tau_2, \tau_1, z) + rot_{\psi_2}(\tau_1, t_1, z) \\ &= \frac{n-1}{4} + rot_{\psi_2}(t_2, \tau_2, z) + rot_{\psi_2}(\tau_1, t_1, z) \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \theta_{\psi_1}(\tau) &< i\frac{\pi}{2} \quad \text{pour } \tau \in]\tau_2, t_2] \Longrightarrow \theta_{\psi_2}(\tau) < i\frac{\pi}{2} = \theta_{\psi_2}(\tau_2) \\ \theta_{\psi_1}(\tau) &> j\frac{\pi}{2} \quad \text{pour } \tau \in [t_1, \tau_2[\Longrightarrow \theta_{\psi_1}(\tau) > j\frac{\pi}{2} = \theta_{\psi_2}(\tau_1) \end{aligned}$$

donc $rot_{\psi_2}(t_2, \tau_2, z)$ et $rot_{\psi_2}(\tau_1, t_1, z)$ sont positifs.

En conclusion, nous avons

$$rot_{\psi_2}(t_2, \tau_2, z) \;>\; \frac{n-1}{4} \geq k - \frac{1}{4}$$

Si nous supposons maintenant: que $rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) = k_1 \in \mathbf{Z}$, alors ceci est équivalent à $rot_{\psi_2}(t_2, t_1, z) = k_2 \in \mathbf{Z}$ et d'après ce qui précède $|k_2 - k_1| < \frac{1}{4}$, k_2 et k_1 sont des entiers, ce qui implique qu'ils sont égaux.

Pour montrer le deuxième point du lemme, supposons que pour certains t_1, t_2, nous avons

$$rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) < k \text{ et } rot_{\psi_2}(t_2, t_1, z) \geq k \text{ pour } k \in \mathbf{Z}.$$

Prenons un τ maximal dans $[t_1, t_2]$ tel que

$$rot_{\psi_2}(\tau, t_1, z) = k$$

et alors $rot_{\psi_1}(\tau, t_1, z) = k$.

Nous avons $\theta_{\psi_2}(t) > \theta_{\psi_2}(\tau)$, $\tau < t \leq t_2$, pour $|t - \tau|$ assez petit et, par suite, $\theta_{\psi_1}(t) > \theta_{\psi_1}(\tau)$.

Pour un tel t, $rot_{\psi_1}(t, t_1, z) > k > rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z)$. Alors il existe τ^+ tel que $\tau < \tau^+ < t_2$ et

$$rot_{\psi_1}(\tau^+, t_1, z) = k$$

et par suite

$$rot_{\psi_2}(\tau^+, t_1, z) = k$$

ce qui contredit la maximalité de τ.

Dans le cas où $\tau = t_2$, nous avons $rot_{\psi_1}(\tau, t_1, z) = k = rot_{\psi_1}(t_2, t_1, z) < k$.

Contradiction !

Ceci achève la démonstration du lemme 5.9. $\square$

Remarque 5.10. Une courbe $\mathcal{C}$ est dite strictement étoilée par rapport à P si chaque rayon issu de P touche $\mathcal{C}$ en un point et un seul sans être tangent.

La version suivante du *théorème généralisé du point fixe* de Poincaré-Birkhoff, obtenu par W.Y. Ding (cf.[44]), est l'outil de base utilisé dans cette partie du travail.

Théorème 5.11. *Soient $S := [a_0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ une couronne (ou région annulaire fermée) autour du point $P = (c, 0)$ telle que sa frontière intérieure C_1 et sa frontière extérieure C_2 sont des courbes simples et fermées. De plus C_1 est étoilé par rapport à P.*

Supposons que $z(t, t_0, z_0) = (u(t, t_0, u_0), v(t, t_0, v_0)) \neq P$ pour tout $z_0 \in C_1$ et $0 \leq t_0 \leq t \leq T$.

Soient ψ_1, ψ_2 deux fonctions admissibles par rapport à c telles que $rot_{\psi_1}(T, z_0) > j_1$ pour tout $z_0 \in C_1$ et $rot_{\psi_2}(T, z_0) < j_2$ pour tout $z_0 \in C_2$ avec $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2$. Alors pour tout entier k, $j_2 \leq k \leq j_1$, l'équation $u" + Y(t, u) = 0$ admet au moins deux solutions T-périodiques distinctes avec $u(t) - c$ ayant exactement $2k$ zéros dans $[0, T]$. En particulier il y a existence d'au moins $2(j_1 - j_2 + 1)$ solutions T-périodiques.

Preuve: Soit Φ l'application de Poincaré donnée par $\Phi(z_0) = z(T, z_0)$.

Fixons k tel que $j_2 \leq k \leq j_1$. Soit D_i la région ouverte délimitée par C_i, $i = 1, 2$. Φ est un homéomorphisme, bijectif sur $\overline{D_2}$. De plus Φ préserve l'élément de surface; ceci découle du fait que l'équation $u" + Y(t, u) = 0$ peut être écrite sous la forme d'un système Hamiltonien

$$u' = W_v(t, u, v); \; v' = -W_u(t, u, v)$$

où $W := \frac{1}{2}v^2 + \int_0^u Y(t, s)ds$ (cf.[100], chapître I, théorème 3.1).

D'une part, pour tout point $z_0 = (u_0, v_0) \in S := [a_0, +\infty[\times \mathbb{R}$, par unicité de la solution pour le problème de Cauchy et la T-périodicité de Y en t, nous obtenons

$$z(t, z(-T, z_0)) = z(t - T, z_0)$$

et par suite

$$\Phi^{-1}(z_0) = z(-T, z_0)$$

D'autre part $\Phi^{-1}(P) \in D_1$ i.e. il existe $P' \in D_1$ tel que $z(T, P') = P$. En effet, D_1 est par définition l'intérieur de C_1, c'est un ouvert borné, simplement connexe, contenant P; c'est une composante bornée de $\mathbb{R}^2 \backslash C_1$ (selon la terminologie utilisée pour les courbes de Jordan).

Supposons que $\tilde{z} = z(-T, P) \notin D_1$ i.e. $z(T, \tilde{z}) = P$ et $\tilde{z} \notin D_1$. Puisque $P \in D_1$, nous pouvons trouver un $t_1 \in [0, T]$ tel que: $z_1 := z(t_1, \tilde{z}) \in C_1$.

Considérons la solution $z(., t_1, z_1)$, nous avons

$$z(t - T, t_1, z_1) = z(t, t_1 - T, z_1)$$

par T-périodicité de Y et unicité de la solution pour le problème de Cauchy. Donc pour $t = T$ nous obtenons

$$z(0, t_1, z_1) = z(T, z(t_1 - T, \tilde{z})) = z(T, \tilde{z}) = P.$$

Ce qui contredit la première assertion du théorème 5.11.

Maintenant, considérons la restriction de Φ à $\mathcal{A}$. Nous avons $\Phi(z) \neq P$ pour $z \in \mathcal{A}$. (Là encore suivant une argumentation similaire à la précédente, utilisant le fait que $C_1 \subset \partial\mathcal{A}$, nous vérifions qu'effectivement $\Phi(z) \neq P$ pour tout $z \in \mathcal{A}$).

Soit $\tilde{\Phi}$ le relèvement de Φ au recouvrement $E_\psi = (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathcal{P}_\psi)$ de la région annulaire $\mathcal{A}$ par rapport à la projection $\mathcal{P}_\psi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash P$ donnée par $\mathcal{P}_\psi(r, \theta) = \psi^{-1}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ (le ψ considéré dans ce cas est de la forme $\psi(u) = \text{cste.}(u - c)$, la constante étant positive) tel que

$$\tilde{\Phi}(r, \theta) = (\Gamma(r, \theta), \Theta(r, \theta))$$

où $\Gamma(r, \theta) := \|z\,(T, \mathcal{P}_\psi(r, \theta)) - P\|$ et $\Theta(r, \theta) := 2\pi\,(k - rot_\psi(T, \mathcal{P}_\psi(r, \theta))$.

D'après les hypothèses du théorème 5.11, et par application du lemme 5.9, nous avons

$$\begin{array}{lcll} rot_\psi\left(T, \mathcal{P}_\psi(r,\theta)\right) & > & j_1 & \text{pour tout } (r,\theta) \in \mathcal{P}_\psi^{-1}(C_1) \\ rot_\psi\left(T, \mathcal{P}_\psi(r,\theta)\right) & < & j_2 & \text{pour tout } (r,\theta) \in \mathcal{P}_\psi^{-1}(C_2) \end{array}$$

Nous obtenons alors

$$\Theta(r,\theta) < 0 \text{ sur } \mathcal{P}_\psi^{-1}(C_1) \text{ et } \Theta(r,\theta) > 0 \text{ sur } \mathcal{P}_\psi^{-1}(C_2)$$

ce qui exprime la condition de *"twist"*. Le *théorème généralisé* de W.Y.Ding peut donc s'appliquer, ce qui permet d'obtenir deux points fixes pour $\widetilde{\Phi}$, géométriquement distincts, $(r_{k,i}, \theta_{k,i}) \quad i = 1, 2$.

Les $z_{k,i} := \mathcal{P}_\psi(r_{k,i}, \theta_{k,i})$ sont des points fixes pour Φ tels que $z_{k,i} \in \mathcal{A}$ pour $i = 1, 2$. Pour chacun de ces points correspond une solution T-périodique de (5.2).

De plus, puisque $\Theta(r_{k,i}, \theta_{k,i}) = 0$, nous avons donc $rot_\psi(T, \mathcal{P}_\psi(r_{k,i}, \theta_{k,i})) = k$. Et vu que toute solution $(u(.), v(.))$ de (5.2) avec une condition initiale dans $\mathcal{A}$ vérifie $u'(t) \neq 0$ pour tout t tel que $u(t) = c$, nous concluons donc que pour $i = 1, 2 \quad z(., z_{k,i}) = (u_{k,i}(.), v_{k,i}(.))$ satisfait à: $u_{k,i}(t) - c$ s'annule $2k$ fois dans $[0, T]$, k étant quelconque entre j_1 et j_2. Nous obtenons alors $2(j_1 - j_2 + 1)$ solutions T-périodique pour le système (5.2). □

5.2.2 Résultat principal

Considérons le système suivant associé à (5.1)

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -g(u) + s + p(t, u, s) = Y(t, u, s) \end{cases} \tag{5.5}$$

Y est une fonction continue, T-périodique en t et tel que pour tout $z_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique $z(.) = z(., t_0, z_0)$ de (5.5) vérifiant $z(t_0) = z_0$.

Théorème 5.12. *Si (***H11***) et (***H12***) sont satisfaites, alors (5.1) admet au moins* $2n$ *solutions T-périodiques pour s suffisamment grand.*

Preuve: Pour démontrer le théorème 5.12, nous nous basons sur le théorème 5.11 (la version du *théorème* de Poincaré-Birkhoff) et nous procédons en cinq étapes. Dans chacune de ces étapes nous énonçons et prouvons un lemme.

Considérons le système (5.5).

D'après (**H11**), nous avons $\gamma > \left(\frac{2\pi}{T}n\right)^2$. Soit ε_0 tel que $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ et $\gamma \geq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (n + 2\varepsilon_0)^2$, et soit α_0 défini par

$$0 < \frac{2\pi}{T}(n + \varepsilon_0) \leq \sqrt{\gamma} - \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0 < \alpha_0 < \sqrt{\gamma} \tag{5.6}$$

Il existe alors $a_0 > 0$, a_0 suffisamment grand tel que pour $x \geq a_0$ nous avons

$$0 < \alpha_0^2 \leq g'(u) \leq \left(\sqrt{\beta} + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0\right)^2 \tag{5.7}$$

Choisissons d, une constante positive, vérifiant

$$d > \int_0^T h(t)dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi d}\int_0^T h(t)dt \leq \varepsilon_0^2 \tag{5.8}$$

Pour

$$c_0 > a_0 + \frac{3d}{\alpha_0} \tag{5.9}$$

nous posons $s(h) = g(c_0)$. Alors $g : [c_0, +\infty[\to [s(h), +\infty[$ est strictement croissante et continue, donc bijective et alors pour tout $s > s(h)$ il existe un unique $c > c_0$ tel que $g(c) = s$.

Dans ce qui suit, pour tout $c > c_0$, nous écrirons $c = g^{-1}(s)$ et alors $g(c) = s$.

Considérons maintenant

$$f(u) := g(u) - g(c)$$

et

$$F(u) := \int_c^u f(\xi)d\xi \quad \text{pour } u \neq c,\ u \geq a_0$$

Nous avons $F(u) > 0$ pour $u \neq c$ et $u \geq a_0$. Puisque $\liminf_{u\to+\infty} g'(u) \geq \gamma > 0$, nous avons $\lim_{u\to+\infty} F(u) = +\infty$.

De plus

$$F(a_0) = \int_c^{a_0} f(\xi)d\xi = \int_c^{a_0} \frac{g(\xi) - g(c)}{\xi - c}(\xi - c)d\xi \geq \alpha_0^2 \int_c^{a_0} (\xi - c)d\xi$$

De (5.9), nous avons alors

$$F(a_0) \geq \alpha_0^2 \left(\frac{\xi - c}{2}\right)^2 \Bigg|_c^{a_0} = \alpha_0^2 \frac{(a_0 - c)^2}{2} > \frac{9}{2}d^2 \tag{5.10}$$

Définissons la fonction W par

$$W(u,v)=\sqrt{2F(u)+v^2} \quad \text{pour } u \geq a_0 \text{ et } v \in \mathbf{R}.$$

Lemme 5.13. Soit $z_0=(u_0,v_0) \in]a_0,+\infty[\times \mathbf{R}$ et soit $z(.)=z(.,0,z_0)$ la solution de (5.5) vérifiant $z(0)=z_0$.

Pour r un nombre positif, il existe $\rho(r)$ tel que si $u_0^2+v_0^2 \geq \rho^2(r)$ alors $u^2(t,u_0,v_0)+v^2(t,u_0,v_0) \geq r^2$.

Preuve: Définissons une fonction V par

$$V(t):=W^2(u(t),v(t))$$

Nous avons $F(u)>0$ pour tout $u \geq a_0$, $u \neq c$, ce qui permet d'avoir

$$\lim_{u^2(t)+v^2(t)\to+\infty} V(t)=+\infty \tag{5.11}$$

Puisque $V'(t)=2v(t)p(t,u(t),s) \geq -2h(t)\sqrt{V(t)}$, alors

$$\sqrt{V(t)} \geq \sqrt{V(0)}-\int_0^t h(\tau)d\tau \text{ pour tout } t \geq 0$$

Soit

$$m(r)=\max\left\{W(u,v); u^2+v^2<r^2\right\} \tag{5.12}$$

D'après (5.11), il existe $\rho(r)$ assez grand tel que si $u^2+v^2 \geq \rho^2(r)$, alors $W(u,v) > m(r)+\int_0^T h(t)dt$.

Supposons que $u_0^2+v_0^2 \geq \rho^2(r)$; alors pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\sqrt{V(t)}=W\left(u(t),v(t)\right) \geq W(u_0,v_0)-\int_0^t h(\tau)d\tau > m(r)+\int_t^T h(t)dt > m(r)$$

d'où

$$u^2(t,u_0,v_0)+v^2(t,u_0,v_0) \geq r^2$$

□

Remarque 5.14. Nous pouvons montrer le même résultat en considérant τ_+ à la place de T. $\rho(r)$ ne dépend que de r,g,s et h et non de l'expression de p.

Lemme 5.15. Soit $z_0 = (u_0, v_0) \in]a_0, +\infty[\times \mathbf{R}$ tel que $W(u_0, v_0) = 2d$. Alors pour tout $t_0 \in [0, T]$, la solution $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ est définie sur $[t_0, T]$ avec $z(t) \neq P = (c, 0)$ et $u(t) > a_0$ pour tout $t \in [t_0, T]$.

De plus

$$|W(u(t), v(t)) - 2d| \leq \int_0^T h(t)dt.$$

Preuve: Soit $z(t)$ une solution de (5.5) vérifiant $z(t_0) = z_0$, définie sur son intervalle maximal droit d'existence $[t_0, \tau_+[$.

Supposons au contraire qu'il existe $t_1 \in [t_0, \tau_+[$ avec $t_1 \leq T$ tel que

$$u(t_1) \leq a_0 \text{ ou } z(t_1) = P$$

puisque l'ensemble $S_0 := (]-\infty, a_0] \times \mathbf{R}) \cup \{P\}$ est fermé et $z_0 = (u(t_0), v(t_0)) \notin S_0$, il existe alors un premier temps t_2, $t_2 \in [t_0, t_1]$ tel que $z(t_2) \in S_0$ et $z(t) \notin S_0$ pour tout $t \in [t_0, t_2[$.

Pour $t_0 < t < t_2$, nous avons

$$\left| \frac{dW}{dt}(u(t), v(t)) \right| \leq \frac{|u'(t)|\, h(t)}{\sqrt{2F(u(t)) + u'^2(t)}}$$

d'où

$$|W(u(t), v(t)) - W(u(t_0), v(t_0))| \leq \int_0^T h(\tau)d\tau$$

avec $W(u(t_0), v(t_0)) = 2d$.

En passant à la limite $t \to t_2^-$, nous avons

$$d < 2d - \int_0^T h(t)dt \leq W(u(t_1), v(t_1)) \leq 2d + \int_0^T h(t)dt < 3d \tag{5.13}$$

Par définition de t_2 nous avons $u(t_2) \leq a_0$ ou $z(t_2) = P = (c, 0)$

Remarque 5.16. Notons que si z est solution de (5.5), alors z est continue sur $[t_0, t_2]$ et par suite u est continue. De plus nous avons $u(t) > a_0$ pour tout $t \in [t_0, t_2]$ et $u(t_2) \leq a_0$, ce qui implique $u(t_2) = a_0$.

Maintenant si $u(t_2) = a_0$, nous obtenons

$$\sqrt{2F(a_0)} \leq \sqrt{2F(a_0) + v^2(t_2)} = W(u(t_2), v(t_2)) < 3d$$

ce qui entraine $F(a_0) < \frac{9}{2}d^2$, ce qui contredit (5.10).

D'autre part si $z(t_2) = P = (c, 0)$, nous avons

$$W(c,0) = 0 = W\left(u(_2), v(t_2)\right) \geq 2d - \int_0^T h(t)dt > d$$

ce qui contredit la définition de d.

Conclusion

Un tel t_1 n'existe pas ou encore, s'il existe, il doit être en dehors de $[t_0, T]$; ce qui est suffisant. $\square$

Définissons C_1^s par

$$C_1^s := \{(u,v) \in [a_0, +\infty[\times \mathbb{R}; W(u,v) = 2d\}$$

Lemme 5.17. C_1^s est une courbe simple, fermée et strictement étoilée par rapport à $P = (c, 0)$ et contenue dans $S =]a_0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Preuve: Nous allons donner une nouvelle paramétrisation de C_1^s pour prouver ce lemme.

Notons que $W(c, 0) = 0$, ce qui implique que $P \notin C_1^s$ et $W(a_0, v) \geq 3d$, ce qui implique que $(a_0, v) \notin C_1^s$.

Pour θ fixé dans $[0, 2\pi]$, nous posons

$$\begin{cases} u = c + r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

et nous considérons l'intervalle ouvert

$$]0, R_\theta[:= \{r > 0; (c + r\cos\theta, r\sin\theta) \in]a_0, +\infty[\times \mathbb{R}\}$$

avec $0 < R_\theta \leq +\infty$

Pour chaque $\theta \in [0, 2\pi]$, il existe un unique $r_\theta \in]0, R_\theta[$ tel que $(c + r_\theta \cos\theta, r_\theta \sin\theta) \in C_1^s$

En effet, pour θ fixé dans $[0, 2\pi]$, nous définissons la fonction $\omega_\theta :]0, R_\theta[\to \mathbb{R}$ par

$$\omega_\theta(r) = W\left(c + r\cos\theta, r\sin\theta\right)$$

ω_θ est différentiable et

$$\omega'_\theta(r) = \frac{f(c + r\cos\theta).\cos\theta + r\sin\theta}{\sqrt{2F(c + r\cos\theta) + r^2\sin^2\theta}}$$

puisque $f(u)(u - c) > 0$ pour tout $u \geq a_0, u \neq c$, nous avons $\omega'_\theta(r) > 0$ pour tout $r > 0$; et puisque $W(u,v) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$, uniformément par rapport à v, nous avons $\lim\limits_{r\to R_\theta^-} \omega_\theta(r) > 2d$. De plus $\lim\limits_{r\to 0^-} \omega_\theta(r) = 0$, ω_θ étant continue et strictement croissant; il existe alors un r_θ unique tel que $\omega(c + r_\theta\cos\theta, r_\theta\sin\theta) = 2d$, ce qui entraine que $(c + r_\theta\cos\theta, r_\theta\sin\theta) \in C_1^s$. □

Lemme 5.18. Il existe une fonction ψ_1 admissible par rapport à c telle que pour tout $z_0 \in C_1^s$, $rot_{\psi_1}(T, 0, z_0) > n$.

Preuve: Soit $z_0 \in C_1^s$. Par application du lemme 5.15, la solution $z(t) = (u(t), v(t)) = z(t, 0, z_0)$, est définie sur $[0, T]$ et vérifie $z(t) \neq (c, 0)$, $u(t) > a_0$ pour tout $t \in [0, T]$ et $|W(u(t), v(t)) - 2d| \leq \int\limits_0^T h(t)dt$.

Nous définissons la fonction ψ_1 admissible par rapport à c par $\psi_1(u) = \alpha_0(u - c)$ pour $u \in]a_0, +\infty[$, ce qui permet de définir le système de coordonnées

$$\begin{cases} \psi_1(u(t)) = r(t)\cos\theta(t) \\ v(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

Par ailleurs, nous avons pour tout $t \in [0, T] \setminus \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} -\theta'(t) &= \frac{\psi'_1(u(t))v^2(t) + (f(u(t)) - p(t, u, s))\,\psi_1(u(t))}{\psi_1^2(u(t)) + v^2(t)} \\ &= \alpha_0\sin^2\theta(t) + \frac{\cos\theta(t)\left(f\left(\psi_1^{-1}(r(t)\cos\theta(t)) - p(t, \psi_1^{-1}(r(t)\cos\theta(t)), s\right)\right)}{r(t)}. \end{aligned}$$

D'après (**H12**), nous avons

$$-\theta'(t) \geq \alpha_0\sin^2\theta(t) + \frac{f\left(\frac{r(t)\cos\theta(t)}{\alpha_0} + c\right) - h(t)}{r(t)}\cos\theta(t) \tag{5.14}$$

Par définition de f et la formule (5.7), nous avons

$$\frac{f\left(\frac{r(t)\sin\theta(t)}{\alpha_0} + c\right)\sin\theta}{r(t)} \geq \alpha_0\sin^2\theta(t)$$

(5.14) devient alors

$$-\theta'(t) \geq \alpha_0 - \frac{h(t)}{r(t)} \cos\theta(t) \geq \alpha_0 - \frac{h(t)}{r(t)}.$$

Par définition du nombre de rotation

$$rot_{\psi_1}(z_0) = \frac{\theta(0) - \theta(T)}{2\pi} \geq \frac{T}{2\pi}\alpha_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{h(t)}{r(t)}dt.$$

D'autre part, du lemme 5.17. et de la formule (5.7), nous avons

$$\begin{aligned} d &< 2d - \int_0^T h(t)dt \leq W(u(t), v(t)) = \sqrt{2F(u(t)) + v^2(t)} \\ &\leq \sqrt{\left(\sqrt{\beta} + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0\right)^2 (u(t) - c)^2 + v^2(t)} \\ &\leq \frac{\sqrt{\beta} + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0}{\alpha_0}\sqrt{\alpha_0^2(u(t) - c)^2 + v^2(t)} = \frac{\sqrt{\beta} + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0}{\alpha_0} r(t) \end{aligned}$$

car $\frac{\sqrt{\beta}+\frac{2\pi}{T}\varepsilon_0}{\alpha_0} > 1$, et alors $r(t) \geq \frac{\alpha_0 d}{\frac{2\pi}{T}\varepsilon_0 + \sqrt{\beta}}$

Maintenant, le choix de $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ et $\alpha_0 > \sqrt{\alpha} - \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0 \geq \frac{2\pi}{T}(n + \varepsilon_0)$. Ce qui implique

$$\begin{aligned} rot_{\psi_1}(T, z_0) &\geq \frac{T}{2\pi}\alpha_0 - \frac{\sqrt{\beta} + \frac{2\pi}{T}\epsilon_0}{\alpha_0}\frac{1}{2\pi d}\int_0^T h(t)dt \\ &\geq \frac{T}{2\pi}\alpha_0 - \frac{\sqrt{\beta} + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0}{\alpha_0}\varepsilon_0^2 \geq \frac{T}{2\pi}\alpha_0 - \frac{n + 1 + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0}{n + \frac{2\pi}{T}\varepsilon_0}\varepsilon_0^2 \\ &\geq \frac{T}{2\pi}\alpha_0 - 2\varepsilon_0^2 > n + \varepsilon_0 - 2\varepsilon_0^2 > n \end{aligned}$$

□

Lemme 5.19. Il existe une courbe simple C_2^s avec $C_1^s \subset intC_2^s$, telle que pour toute solution $z(.,0,z_0)$ de (5.5) avec $z_0 \in C_2^s$, nous avons $rot_{\psi_2}(T, z_0) < 1$.

Preuve: Soit s suffisamment grand pour que C_1^s soit définie, c'est-à-dire $s > s(h)$ et $c = g^{-1}(s)$.

Notons par $M := \max\{f(a_0), \|h\|_\infty\}$.

D'après l'hypothèse **(H11)**(iii) $\lim_{u \to -\infty} f(u) = \lim_{u \to -\infty}(g(u) - g(c)) = +\infty$.

Notons alors par u_M le plus grand $u \leq a_0$ tel que $f(u) = M + 1$. Considérons la fonction modifiée

$$\tilde{f}(u) = \begin{cases} f(u) & u \geq u_M \\ M + 1 & u < u_M \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est de classe C^1 au voisinage de $-\infty$ et $\widetilde{f}'(-\infty) = 0$.

Le problème modifié correspondant est alors

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\widetilde{f}(u) + p(t, u, s) \end{cases} \tag{5.15}$$

Assertion 1. Toute solution de (5.15) est solution de (5.5).

En effet , soit $(u(.), v(.))$ une solution de (5.15). Montrons que $u(t) > u_M$ pour tout t.

Supposons au contraire qu'il existe un t_1 tel que $u(t_1) < u_M$. Donc $u(t^*) = \min u < u_M$ et alors

$$0 \leq u"(t^*) = -\widetilde{f}(u(t^*)) + p(t, u(t^*), s) \leq -(M+1) + h(t) < 0$$

ce qui est une contradiction.

Assertion 2. Toute solution non prolongeable $z(t) = (u(t), v(t))$ de (5.15) vérifiant $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ est définie par tout $t \in (-\infty, +\infty)$.

Si nous considérons $\widetilde{F}(u) = \int\limits_{a_0}^{u} f(\xi) d\xi$, une primitive de $\widetilde{f}$, nous avons

$$\widetilde{F}(u) = \begin{cases} F(u) - F(a_0) & \text{si } u \geq u_M \\ (M+1)(u - a_0) & \text{si } u < u_M \end{cases}$$

alors il existe une constante $\mu > 0$, telle que $\widetilde{F}(u) + \mu u^2 \to +\infty$ quand $u \to \pm\infty$ et il existe un $\nu > 0$ tel que $\widetilde{F}(u) + \mu u^2 + \nu \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant $(u(t), v(t))$, une solution maximale de (5.15) définie sur son intervalle maximal d'existence $]\tau_-, \tau_+[$ contenant le point initial t_0 et considérons la fonction auxilliaire

$$\widetilde{V}(t) = 2\widetilde{F}(u(t)) + (2\mu + 1)u^2(t) + 2\nu + v^2(t) + 1$$

Par dérivation de $\widetilde{V}$, nous avons

$$\widetilde{V}'(t) = 2\widetilde{f}(u(t))v(t) + (4\mu + 2)u(t)v(t) + 2v(t)\left(-\widetilde{f}(u(t)) + p(t, u(t), s)\right)$$

d'où

$$\left|\widetilde{V}'(t)\right| \leq 2\left|((2\mu + 1)u(t) + h(t))\, v(t)\right| \leq 2\left(2\mu + 1 + h(t)\right)\widetilde{V}(t)$$

de là

$$\widetilde{V}(t) \leq \widetilde{V}(t_0) \exp 2 \left| \int_{t_0}^{t} (2\mu + 1 + h(\xi))\, d\xi \right|$$

et par suite il existe une fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue, telle que $|u(t)| + |v(t)| \leq q(t)$ ce qui rend impossible

$$\lim_{t \to \tau_+} (|u(t)| + |u'(t)|) = +\infty \text{ avec } \tau_+ < +\infty$$

ou encore

$$\lim_{t \to \tau_-} |u(t)| + |u'(t)| = +\infty \text{ avec } \tau_- > -\infty$$

Par la *théorie fondamentale des Equations Différentielles Ordinaires* (cf.[29]), nous obtenons $]\tau_-, \tau_+[=]-\infty, +\infty[$.

Soient maintenant $\alpha_1 > 0$ et $\beta' \geq \beta$, tels que

$$\frac{2\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta'}} < \frac{\pi}{T}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}(u)}{u-c} &\leq \alpha_1 \qquad \text{si } u < c \\ \frac{\tilde{f}(u)}{u-c} &\leq \beta' \qquad \text{si } u > c \end{aligned}$$

Soit ψ_2 : une fonction admissible définie par

$$\psi_2(u) = \sqrt{\beta'}(u-c)^+ - \sqrt{\alpha_1}(u-c)^-$$

par suite

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u)\psi_2(u) &\leq \sqrt{\alpha_1}(\psi_2(u))^2 \qquad \text{si } u < c \\ \tilde{f}(u)\psi_2(u) &\leq \sqrt{\beta'}(\psi_2(u))^2 \qquad \text{si } u \geq c \end{aligned}$$

Nous pouvons donc considérer le système de coordonnées

$$\begin{cases} \psi_2(u(t)) = r(t) \sin\theta(t) \\ v(t) = r(t) \cos\theta(t) \end{cases} \tag{5.16}$$

Soit R_0 un nombre positif vérifiant

$$\frac{1}{\pi R_0}\int_0^T h(t)dt < 1 - \frac{T\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta'}}{\pi\left(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\beta'}\right)}.$$

En appliquant le lemme 5.13, il existe $\rho = \rho(R_0)$ suffisamment grand tel que si

$$(u_0-c)^2+v_0^2 \geq \rho^2 \quad \text{alors} \quad (u(t)-c)^2+v^2(t) \geq \left(\frac{R_0}{\min(\sqrt{\alpha_1},1)}\right)^2$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Nous choisissons $\rho = \rho(R_0)$ assez grand pour que

$$\max\left\{(u-c)^2+v^2;(u,v)\in C_1^s\right\} < \rho^2$$

Par définition de ρ nous avons donc $C_1^s \subset intC_2^s$

Montrons que pour toute solution de (5.15) à valeur initiale $z_0 \in C_2^s$, $rot_{\psi_2}(T,z_0) < 1$. Pour cela, supposons qu'au contraire il existe $z_0=(u_0,v_0)\in C_2^s$, tel que $rot_{\psi_2}(T,z_0)\geq 1$. Alors pour un certain τ_0, $0<\tau_0<T$,

$$rot_{\psi_2}(\tau_0,0,z_0) = \frac{\theta(0)-\theta(\tau_0)}{2\pi} = 1$$

En appliquant le lemme 5.7 et le système (5.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} rot_{\psi_2}(\tau_0,0,z_0) &= 1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\{t\in[0,\tau_0];u(t)>c\}} -\theta'(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\{t\in[0,\tau_0];u(t)>c\}} \frac{\psi_2'(u(t))v^2(t)+\left(\widetilde{f}(u(t))-p(t,u(t),s)\right)\psi_2(u(t))}{\psi_2^2(u(t))+v^2(t)}dt \\ &< \frac{1}{\pi}\sqrt{\beta'}mes\,\{t;u(t)>c\}+\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{h(t)}{r(t)}dt \end{aligned}$$

D'autre part pour tout t tel que $u(t)>c$, nous avons

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{\psi_2(u(t))^2+v^2(t)} = \sqrt{\left(\sqrt{\beta'}(u(t))-c\right)^2+v^2(t)} \\ &\geq \sqrt{(u(t)-c)^2+v^2(t)} \geq R_0 \end{aligned}$$

et par suite

$$rot_{\psi_2}(\tau_0,0,z_0) = 1 < \frac{1}{\pi}\sqrt{\beta'}mes.\,\{t\in[0,\tau_0];u(t)>c\}+\frac{1}{\pi R_0}\int_0^T h(t)dt \tag{5.17}$$

Par ailleurs, en appliquant toujours le théorème 5.7, nous avons

$$\begin{aligned} rot_{\psi_2}(\tau_0, 0, z_0) &= 1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\{t\in[0,\tau_0];u(t)<c\}} -\theta'(t) \\ &< \frac{1}{\pi}\sqrt{\alpha_1} mes.\, \{t \in [0,\tau_0]\,; u(t) < c\} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{h(t)}{r(t)}dt \end{aligned}$$

Pour t tel que $u(t) < c$, $r(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{\psi_2(u(t))^2 + v^2(t)} \\ &= \sqrt{\alpha_1(u(t)-c)^2 + v^2} \\ &\geq \min(\sqrt{\alpha_1}, 1)\sqrt{(u(t)-c)^2 + v^2(t)} \\ &\geq \min(\sqrt{\alpha_1}, 1)\frac{R_0}{\min(\sqrt{\alpha_1}, 1)} = R_0 \end{aligned}$$

Par suite

$$rot_{\psi_2}(\tau_0, 0, z_0) < \frac{1}{\pi}\sqrt{\alpha_1} mes.\, \{t \in [0,\tau_0]\,; u(t) < c\} + \frac{1}{\pi R_0}\int\limits_0^T h(t)dt \qquad (5.18)$$

Maintenant de (5.17) et (5.18) nous tirons l'inégalité suivante

$$\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta'} < \frac{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta'}}{\pi} \cdot T + \frac{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta'}}{\pi R_0}\int\limits_0^T h(t)dt$$

ce qui entraine

$$1 < \frac{T}{\pi}\frac{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta'}} + 1 - \frac{T(\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\beta'})}{\pi(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta'})} = 1$$

qui est une contradiction.

Donc toute solution z du système (5.15), qui est alors une solution du système (5.5), à valeur initiale appartenant à C_2^s vérifie

$$rot_{\psi_2}(T, 0, \tau_0) < 1.$$

□

Conclusion

Toutes les conditions du théorème 5.11 sont remplies et alors toutes ses conclusions sont valables pour le système (5.5). Les solutions $(u(.), v(.))$ du système (5.5) avec une valeur initiale dans $\mathcal{A}$ (couronne délimitée par C_1^s et C_2^s) vérifient $u'(t) \neq 0$ pour tout t tel que $u(t) = c$. Nous concluons alors que pour tout j, $n \geq j \geq 1$, $u_j(.)$ et $v_j(.)$ sont deux solutions de (5.1), T-périodiques avec $u_j(.) - g^{-1}(s)$ et $v_j(.) - g^{-1}(s)$ ayant exactement $2j$ zéros simples dans $[0, T]$. $u_j(.)$ et $v_j(.)$ sont distincts, ce qui entraine l'existence de $2n$ solutions T-périodiques pour l'équation (5.1).

Ceci achève la démonstration de notre résultat principal.

5.3 Deuxième cas

5.3.1 Formulation du problème

Dans cette partie nous considérons le problème (P_s) avec les hypothèses suivantes sur g et p :

(H13) (i) g est continue sur $\mathbf{R}$.

(ii) $\lim\limits_{u \to -\infty} g(u) = +\infty$

(iii) il existe un entier n tel que

$0 < (\frac{2\pi}{T} n)^2 < \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u} < (\frac{2\pi}{T}(n+1))^2$

(H14) (i) p est continue par rapport à tous ses arguments et T-périodique en t

(ii) il existe une fonction positive h, continue telle que

$\left|\frac{p(t,u,s)}{s}\right| \leq h(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}, u \in \mathbf{R}$ et $s > 0$

5.3.2 Résultat principal

Théorème 5.20. *Sous les hypothèses (**H13**),(**H14**), il existe un h_0, $0 < h_0 < 1$ et $s_0 = s(h_0) > 0$, tel que pour tout $s \geq s_0$ et pour toute fonction h continue et T-périodique vérifiant $||h|| \leq h_0$, le problème (P_s) admet au moins deux solutions T-périodiques.*

Preuve: La preuve de ce théorème se fait en deux étapes.

Première étape: existence d'une solution strictement négative.

L'hypothèse **(H13)**(ii) ($g(u) \to +\infty$ quand $u \to -\infty$), permet d'affirmer l'existence d'un $s_1 > 0$ tel que pour chaque $s \geq s_1$ il existe une constante $A_s < 0$, avec $|A_s|$ assez grande, vérifiant $g(A_s) > 2s$. Si $h(t) < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$g(A_s) > s(1+h(t)) > s(1+\frac{p(t,A_s,s)}{s}) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

(La deuxième inégalité est due à l'hypothèse **(H14)**(ii)). Ce qui implique

$$g(A_s) - s\left(1+\frac{p(t,A_s,s)}{s}\right) > g(A_s) - s\,(1+h(t)) > 0$$

pour tout t dans $\mathbb{R}$ et $s \geq s_1$.

D'autre part, il existe $s_2 > 0$, tel que pour $s \geq s_2$ nous pouvons trouver une constante B_s, $B_s < 0$, vérifiant

$$g(B_s) < s(1-h(t)) < s\left(1+\frac{p(t,A_s,s)}{s}\right)$$

ce qui implique

$$g(B_s) - s\left(1+\frac{p(t,B_s,s)}{s}\right) < 0$$

pour tout $s \geq s_2$ et tout t dans $\mathbb{R}$.

Considérons A_s et B_s définies pour $s \geq \max(s_1, s_2)$, vérifiant $A_s < B_s < 0$ (l'inégalité $A_s < B_s$ étant justifiée par **(H13)**(ii)).

Par définition A_s est une stricte sous-solution de (P_s) et B_s est une stricte sur-solution de (P_s) pour $s \geq \max(s_1, s_2)$.

La théorie de sur et sous-solution (cf. [72]) implique l'existence d'une solution u_1 de (P_s) telle que

$$A_s \leq u_1(t) \leq B_s \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Donc u_1 est une solution de (P_s) strictement négative.

Deuxième étape: existence d'une solution positive pour (P_s)

Formulation abstraite du problème.

Soit $C_T := \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f(t+T) = f(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$. C_T est muni de sa norme usuelle.

Posons $\delta := \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{g(u)}{u}$. Alors, d'après **(H13)**(iii), nous avons: $\left(\frac{2\pi}{T}n\right)^2 < \delta < \left(\frac{2\pi}{T}(n+1)\right)^2$.

Considérons l'opérateur différentiel $L : C_T \to C_T$ défini par

$$Lu = u" + \delta u$$

$\mathrm{Dom}L = \{u \text{ de classe } C^2;\ u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T)\}$. L est inversible, conséquence de la définition de δ $\left(\left(\frac{n2\pi}{T}\right)^2 < \delta < \left(\frac{(n+1)2\pi}{T}\right)^2\right)$ et son inverse K est un opérateur compact tel que

$$\delta \|K\| \geq 1$$

(K est en fait l'opérateur intégral de noyau la fonction de Green associée au problème homogène $Lu = 0$).

Donc, pour $f \in C_T$, l'équation $u" + \delta u = -f$ admet une solution unique T-périodique notée $K(f)$ et le problème (P_s) devient alors équivalent à l'équation abstraite

$$u = K\left(g(u) - \delta u - s\left(1 + \frac{p(t,u,s)}{s}\right)\right) \tag{5.19}$$

Notons par z_s la solution de

$$u" + \delta u = 1 + \frac{p(t,u,s)}{s}$$

$$z_s = K\left(-1 - \frac{p(t,z_s,s)}{s}\right) \tag{5.20}$$

z_s est donc un point fixe de (5.20) qui existe d'après l'hypothèse **(H14)** et la compacité de K.

Soit h_0 un nombre réel positif tel que

$$0 < h_0 < \frac{1}{\delta \|K\|}$$

Il s'en suit de la relation (5.20)

$$z_s(t) \geq \|K\| (1 - \|h\|) \geq \frac{1}{\delta} - \|K\| \|h\| \geq \frac{1}{\delta} - \|K\| h_0 > 0$$

Posons

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\delta} - h_0 \|K\|$$

Lemme 5.21. Pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, il existe un $s_0 > 0$, $s_0 = s(h_0)$ tel que pour tout $s \geq s_0$ le problème $(\mathbf{P}_s)$ admet une solution positive u_2 telle que $\|u_2 - sz_s\| \leq s\varepsilon$.

Preuve: Posons $\mathsf{v} = \frac{u}{s}$; en utilisant (5.20) et la linéarité de K, la formule (5.19) peut-être écrite sous la forme

$$\Phi_s(\mathsf{v}) = K\left(\frac{g(s\mathsf{v}) - \delta s\mathsf{v}}{s}\right) + z_s = \mathsf{v} \tag{5.21}$$

Nous avons alors

$$\|\Phi_s(\mathsf{v}) - z_s\| \leq \|K\| \left\| \frac{g(s.\mathsf{v}) - \delta s\mathsf{v}}{s} \right\| \tag{5.22}$$

Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Si $\mathsf{v} \in \overline{B(z_s, \varepsilon)}$ alors $\mathsf{v}(t) > 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}$ et ce par définition de ε_0.

Considérons z_0 un nombre réel positif assez grand tel que pour $u > z_0$ nous ayons

$$\left| \frac{g(u)}{u} - \delta \right| < \frac{1}{3\|K\|} \tag{5.23}$$

et soit $s_3 > 0$ vérifiant les conditions

$$s_3 \geq \max(s_1, s_2) \text{ et } s_3 \geq \frac{z_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon}.$$

De (5.22) et (5.23) nous avons pour $s > s_3$,

$$\|\Phi_s(\mathsf{v}) - \Phi_s(\mathsf{v}')\| \leq \frac{1}{3} \|\mathsf{v} - \mathsf{v}'\|$$

pour tout v, v' dans $\overline{B(z_s, \varepsilon)}$ et alors Φ_s est une contraction sur $\overline{B(z_s, \varepsilon).}$

Montrons que pour s suffisamment grand, Φ_s applique $\overline{B(z_s, \varepsilon)}$ dans elle-même.

Soit $s_0 > s_3$, s_0 suffisamment grand pour que si $s > s_0$, alors

$$\left| \frac{g(sz_s)}{sz_s} - \delta \right| \leq \frac{\varepsilon}{3\|K\|^2}$$

Nous avons donc

$$\left| \frac{g(sz_s) - \delta sz_s}{s} \right| \leq \frac{\|z_s\| \varepsilon}{3\|K\|^2} \leq \frac{2\varepsilon}{3\|K\|}$$

Soit $\mathsf{v} \in B(z_s, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(s\mathsf{v}) - \delta s\mathsf{v}}{s} \right| &\leq \left| \frac{g(s\mathsf{v}) - g(sz_s) + g(sz_s) - \delta sz_s + \delta sz_s - \delta s\mathsf{v}}{s} \right| \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3\|K\|} + \left| \frac{g(s\mathsf{v}) - \delta s\mathsf{v}}{s} - \frac{g(sz_s) - \delta sz_s}{s} \right| \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3\|K\|} + \left| \frac{1}{3\|K\|} (\mathsf{v} - z_s) \right| \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3\|K\|} + \frac{1}{3\|K\|} |\mathsf{v} - z_s| \leq \frac{\varepsilon}{\|K\|}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\Phi_s(\mathsf{v}) - z_s\| \leq \varepsilon$$

Maintenant en appliquant le *théorème du point fixe* de Banach à Φ_s, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution v_s (point fixe pour Φ_s).

Soit $u_2^s = s\mathsf{v}_s$, u_2^s est positive et u_2^s est solution de (P_s). u_2^s est donc solution unique car v_s est unique. $\square$

Remarque 5.22. Si de plus g est localement lipschitzienne et de classe C^1 au voisinage de $+\infty$, nous pouvons montrer la multiplicité des solutions en appliquant le *théorème de point fixe* de Poincaré-Birkhoff.

Dans ce cas, nous pouvons obtenir l'existence d'au moins $2n$ solutions pour (P_s) différentes de u_2^s, pour cela il suffit de chercher les solutions non triviales du problème $x" + l(t,x) = 0$ où $l(t,x) = g(u_2^s + x) - g(u_2^s)$ avec $x(t) = u(t) - u_2^s(t)$ où $u(t)$ est solution de (P_s).

Supposons que les hypothèses **(H11)**,**(H12)** avec **(H12)**(iii) remplacées par **(H14)**(ii) sont satisfaites. Faisons croître s suffisamment pour que u_2^s soit définie et vérifie une relation similaire à (5.7) avec α_0 définie par (5.6).

Soit u une solution T-périodique de (5.1), nous définissons $x(t) = u(t) - u_2^s(t)$, x est solution donc de l'équation

$$x" + l(t,x) = 0 \tag{5.24}$$

l vérifie les propriétés suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{l(t,x)}{x} = g'(u_2^s(t)) \geq \alpha_0^2 > 0$ uniformément en t

2) $\limsup\limits_{x\to+\infty} \frac{l(t,x)}{x} < \beta$ et $\liminf\limits_{x\to+\infty} \frac{l(t,x)}{x} > \gamma$ uniformément en t

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} l(t,x) = +\infty$

Remarque 5.23. $x = 0$ est une solution triviale de (5.24). C'est le cas limite pour le premier cas, c'est à dire que c'est le cas où $s = 0$ et $p(t,u,0) = 0$.

Nous associons à (5.24) le système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -l(t,x) \end{cases} \tag{5.25}$$

Le problème de Cauchy associé à (5.25) admet une solution unique. De plus toute solution maximale est globalement définie sur $\mathbf{R}$; et si x est une solution non triviale de

(5.25), alors $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi le lemme 5.13 et la deuxième assertion du lemme 5.19 se trouvent vérifiés.

Considérons le point $P_0 := (0,0)$. Montrons la validité du théorème 5.11 pour le système (5.25).

Nous rappelons que l'unique solution de (5.25) passant par P_0 est la solution triviale. Le lemme 5.15 se trouve donc vérifié pour tout $z_0 := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.

De la continuité par rapport à la valeur initiale, nous déduisons que pour $\varepsilon > 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que $x_0^2 + y_0^2 < R \leq R_0$. Alors $|x(t, x_0, y_0)| \leq \varepsilon$. Ce qui permet d'énoncer le lemme suivant.

Lemme 5.24. Il existe un $R_0 > 0$ tel que $C_1^s = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R_0^2\right\}$ $(s > s_0)$. Toute solution de (5.25) $z(t) = z(t, 0, z_0)$ telle que $z_0 \in C_1^s$ vérifie $rot_{\psi_1}(T, 0, z_0) > n$ où ψ_1 est une fonction admissible par rapport à zéro.

Preuve: Soit $\psi_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\psi_1(x) = \alpha_0 x$.

Considérons le système de coordonnées

$$\begin{cases} \psi_1\left(x(t,0,z_0)\right) = r_1(t)\cos\theta_1(t) \\ y(t,0,z_0) = r_1(t)\sin\theta_1(t) \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{aligned} -\theta'(t) &= \frac{\alpha_0 r_1^2(t)\sin^2\theta_1(t) + l(t, \frac{r_1(t)\cos\theta_1(t)}{\alpha_0})r_1(t)\cos\theta_1(t)}{r_1^2(t)} \\ &= \alpha_0 \sin^2\theta_1(t) + \frac{l\left(t, \frac{r_1(t)\cos\theta_1(t)}{\alpha_0}\right)}{\frac{r_1(t)\cos\theta_1(t)}{\alpha_0}} \frac{\cos^2\theta_1(t)}{\alpha_0} \\ &> \alpha_0 \sin^2\theta_1(t) + \alpha_0\cos^2\theta_1(t) = \alpha_0 \end{aligned}$$

d'où, de la formule (5.6),

$$rot_{\psi_1}(T, 0, z_0) > n$$

$\square$

Lemme 5.25. Il existe $R_1 > R_0$ tel que $C_2^s = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R_1^2\right\}$ et pour tout $z_0 \in C_2^s$, $rot\psi_2(T, 0, z_0) < 1$.

Preuve:Là encore, nous procédons de la même manière que dans la démonstration du lemme 5.19. Nous définissons donc la fonction admissible par rapport à zéro ψ_2 par

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\beta'}x \text{ si } x > 0 \\ -\sqrt{\alpha_1}x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

□

Conclusion

Nous obtenons alors par application du théorème 5.11, l'existence d'au moins $2n$ solutions non triviales T-périodiques pour l'équation (5.24). Ce qui permet de conclure que l'équation (5.1) dans le deuxième cas admet au-moins $2n + 1$ solutions T-périodiques. □

Les solutions obtenus dans ce chapître peuvent être généralisées pour obtenir l'existence de solutions sous-harmoniques, i.e. des solutions de période mT, $m \geq 1$. Pour cela, nous considérons Φ^m la m-ième itération de l'application de Poincaré Φ.

Partie II

Méthodes Variationnelles

Chapitre 6

Existence de solutions non constantes au voisinage de solutions constantes

L'équation du pendule soumise à des conditions aux limites périodiques a été étudiée par plusieurs auteurs depuis 1922. Dans [64], Hamel considère le problème

$$\begin{cases} u"(t) + a\sin u(t) = \beta \sin t \\ u(t+2\pi) = u(t) \end{cases}$$

et prouve l'existence de solutions en minimisant la fonctionnelle

$$\varphi(u) := \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}u'(t)^2 + a\cos u(t) + u(t)\beta\sin t\right) dt$$

Ce résultat a été généralisé à l'équation

$$u" + a\sin u = h(t) \tag{6.1}$$

où h est une fonction intégrable de valeur moyenne nulle (cf [32],[91] pour la preuve de ce résultat et [92] pour de plus amples informations).

Si $h(t) \equiv 0$, les fonctions constantes, $u = m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$ sont toujours des solutions périodiques de (6.1). Si $a \leq 1$, il n'y a pas d'autres solutions et si $a > 1$, il existe des solutions non constantes pour (6.1). Ceci est bien connu et découle d'une analyse dans le plan de phase utilisant le fait que l'application temps correspondant à l'équation (6.1) est croissante.

Notre objectif, dans ce chapître, est d'étudier l'existence de solutions non constantes T-périodiques, pour des non linéarités $f(t,u)$ plus générales que $a\sin u$, au voisinage de solutions constantes données. Considérons le problème (P) avec $e(t) \equiv 0$ pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} u"(t) + f(t,u(t)) = 0 \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

où f vérifie les hypothèses suivantes:

(H15) il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que$f(t,a) \equiv 0$ pour tout $t \in I$
$\frac{\partial f}{\partial u}(.,a)$ existe, est continue et positive sur I.

(H16) il existe une constante $c \in \mathbb{R},\ c > a$ telle que $f(t,c) = 0$ pour tout $t \in I$
$\frac{\partial f}{\partial u}(.,c)$ existe, est continue et négative sur I.

(H17) f est continue en (t,u), localement lipschitzienne en u,
uniformément par rapport à t, pour tout $(t,u) \in I \times [a,c]$.

(H18) il existe $b \in]a,c[$ tel que $F(t,b) > F(t,c)$ où $F(t,s) = \int\limits_a^s f(t,u)du.$

Pour analyser ce problème, nous utiliserons une approche variationnelle.

6.1 Préliminaires

Dans ce paragraphe nous présentons les définitions et les résultats utiles pour la suite. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [91] et [92].

Soit H_T^1 l'espace de Sobolev des fonctions $u \in W^{1,2}$ vérifiant une condition de périodicité $u(0) = u(T)$. Nous définissons la norme sur H_T^1 par

$$\|u\| = \left(\int\limits_0^T |u(t)|^2\,dt + \int\limits_0^T |u'(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc $\|u\| = (\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2})^{\frac{1}{2}}$

$(H_T^1, \|.\|)$ est un espace de Banach réflexif.

De plus H_T^1 se décompose en la somme directe: $H_T^1 = H^+ \bigoplus H^-$ où H^+ dénote le sous-espace de fonctions à valeur moyenne nulle dans H_T^1 et H^- le sous-espace de fonctions constantes dans H_T^1.

Pour $u \in H_T^1$, nous écrirons $u = \overline{u} + \widetilde{u}$ avec $\overline{u} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)dt$

Proposition 6.1. Si $u \in H^+$ alors

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{T}{2\pi}\|u'\|_{L^2} \qquad \text{(inégalité de Wirtinger)}$$

$$\|u\|_\infty := \max_{t\in I} u(t) \leq \sqrt{\frac{T}{12}}\|u'\|_{L^2} \qquad \text{(inégalité de Sobolev)}$$

Définition 6.2. Une fonctionnelle φ sur H_T^1 est dite faiblement semi-continue inférieurement en u si pour toute suite $(u_n)_{n\in N}$ convergeant faiblement vers u, nous avons $\varphi(u) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n)$

Théorème 6.3. *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si tout borné fermé de E est faiblement compact.*

Théorème 6.4. *Soit Ω un ensemble faiblement compact de H_T^1 et $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ faiblement semi-continue inférieurement. Alors: $\inf\limits_{u\in\Omega} \varphi(u) > -\infty$ et il existe au moins un $v \in \Omega$ tel que $\varphi(v) = \inf\limits_{u\in\Omega} \varphi(u)$.*

Définition 6.5. Une suite minimisante pour φ est une suite (u_k) telle que

$$\varphi(u_k) \to \inf \varphi$$

Proposition 6.6. L'existence de suite minimisante bornée pour φ est assurée si φ est coercive, i.e.

$$\varphi(u) \to +\infty \text{ si } \|u\| \to +\infty$$

Théorème 6.7. *Si φ est faiblement semi-continue inférieurement sur l'espace de Banach réflexif H_T^1 et φ a une suite minimisante bornée, alors φ admet un minimum sur H_T^1.*

Théorème 6.8. (Théorème de passe-montagne). *Soit φ une fonctionnelle continûment différentiable sur H_T^1. Supposons qu'il existe $u_0 \in H_T^1$, $u_1 \in H_T^1$ et un voisinage borné Ω de u_0 tel que $u_1 \in H_T^1 \backslash \overline{\Omega}$ et $\inf\limits_{\partial\Omega} \varphi > \max(\varphi(u_0), \varphi(u_1))$.*

Soit $\Gamma := \{\psi \in C([0,1]; H_T^1); \psi(0) = u_0, \psi(1) = u_1\}$ et $\beta = \inf\limits_{\psi\in\Gamma} \max\limits_{s\in[0,1]}(\psi(s))$.

Si φ vérifie la condition de Palais-Smale au point β, alors β est une valeur critique de φ et $\beta > \max\left(\varphi(u_0), \varphi(u_1)\right)$.

6.2 Existence de solutions pour (6.2)

Dans ce paragraphe, nous énonçons et prouvons un résultat d'existence de solutions pour le problème (6.2).

Théorème 6.9. *Si les hypothèses (**H15**),(**H16**),(**H17**) et (**H18**) sont vérifiées, alors le problème (6.2) admet au moins une solution u_0 telle que*

$$\begin{array}{l} a \le u_0(t) \le c \quad \textit{pour tout } t \in I \\ u_0(.) \neq a \qquad \textit{et} \qquad u_0(.) \neq c \end{array}$$

Preuve

Première étape: modification du problème.

Soit g la modifiée de f définie, pour tout $t \in I$, par

$$g(t,u(t)) := \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(t,a)\frac{a-u(t)}{1+u(t)^2} & \text{si } u(t) < a \\ f(t,u(t)) & \text{si } a \le u(t) \le c \\ \frac{\partial f}{\partial u}(t,c)\frac{u(t)-c}{1+u(t)^2} & \text{si } u(t) > c \end{cases} \tag{6.3}$$

$g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est alors continue en (t,u), localement lipschitzienne en u, uniformément par rapport à t pour tout $(t,u) \in I \times \mathbb{R}$.

Considérons le problème modifié

$$\begin{cases} u"(t) + g(t,u(t)) = 0 \qquad 0 < t < T \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Lemme 6.10. Toute solution de (6.4) est solution de (6.2)

Preuve: La preuve est basée sur le *principe du maximum* (cf.[61], chapître I, § 3). Soit u une solution de (6.4). Nous définissons les ensembles I_c et I_a par

$$\begin{array}{l} I_c := \{t \in I; \qquad u(t) > c\} \\ I_a := \{t \in I; \qquad u(t) < a\} \end{array}$$

et nous montrons que I_c et I_a sont vides.

Supposons au contraire que $I_c \neq \emptyset$.

Soit $M := \sup\limits_{t\in I} u(t)$.

Si $u \equiv M$, alors $g(t,M) \equiv 0$. De plus $M > c$. La formule (6.3) entraine $\frac{\partial f}{\partial u}(t,c) \equiv 0$.

Ce qui contredit l'hypothèse (**H16**).

Donc $u \neq M$.

Montrons que $u < M$ sur $]0,T[$. Dans le cas contraire, il existe t_0, t_1, t_2 avec $0 < t_1 < t_0 < t_2 < T$ tels que $[t_1,t_2] \subset I_c$, $u \neq M$ sur $[t_1,t_2]$ et $u(t_0) = M$. D'après (6.3), nous avons $u"(t) \geq 0$ sur I_c et le *principe du maximum* mène à une contradiction.

Alors $u < M$ sur $]0,T[$ et par conséquent $u(0) = u(T) = M$.

Maintenant, pour t proche de 0 ou T, nous avons $t \in I_c$ et $u'(0) < 0$ et $u'(T) > 0$ ce qui contredit la condition de périodicité vérifiée par u, solution de (6.4).

De manière analogue, nous montrons que $u \geq a$ sur I. □

Deuxième étape: formulation variationnelle.

Soit la fonctionnelle $\varphi : H^1_T \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(u) := \frac{1}{2}\int_0^T u'(t)^2 dt - \int_0^T \int_a^u g(t,s)ds\, dt$$

Assertion 1. φ est faiblement semi-continue inférieurement sur H^1_T.

Preuve: Soit $(u_k)_k$ une suite de H^1_T qui converge faiblement vers u, alors $(u_k)_k$ converge uniformément vers u sur I (cf[58],pp. 13-14) et par suite $(u_k)_k$ converge vers u dans $L^1(I,R)$.

Posons $G(t,u) := \int_a^u g(t,s)ds$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^T |G(t,u_k(t)) - G(t,u(t))|\, dt &= \int_0^T \left| \int_a^{u_k(t)} g(t,s)ds - \int_a^{u(t)} g(t,s)ds \right| dt \\ &= \int_0^T \left| \int_{u(t)}^{u_k(t)} g(t,s)ds \right| dt\end{aligned}$$

Il s'en suit de (6.3) que g est uniformément bornée par une constante K_g. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^T |G(t,u_k(t))-G(t,u(t))|\,dt &\leq \int_0^T \left|\int_{u(t)}^{u_k(t)} |g(t,s)|\,ds\right| dt \\ &\leq K_g\int_0^T |u_k(t)-u(t)|\,dt\end{aligned}$$

Donc $G(.,u_k(.))$ converge vers $G(.,u(.))$ dans $L^1(I,R)$ et par suite

$$\varphi(u) \leq \liminf_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T |u_k'(t)|^2\,dt - \int_0^T G(t,u_k(t))dt\right\} = \liminf_{k\to\infty}\varphi(u)$$

□

Assertion 2. Soit

$$\varphi_1(u) := \int_0^T G(t,u(t))dt$$

la fonctionnelle φ_1 applique les bornées de H_T^1 sur les bornées de $\mathbb{R}$.

Preuve: En fait, nous avons $|\varphi_1(u)| \leq TK_g\,\|u-a\|_\infty$ où $\|u\|_\infty = \sup_t |u(t)|$.

Puisque l'injection de H_T^1 dans $C(I,\mathbb{R})$ est continue, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $\|u\|_\infty \leq \gamma\,\|u\|$. Alors

$$|\varphi_1(u)| \leq TK_g\gamma\,\|u-a\|$$

□

Assertion 3. φ est Gateaux-différentiable.

Soit $v \in H_T^1$ et $h > 0$; nous avons

$$\varphi(u+hv)-\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u'+hv)^2(t)dt - \varphi_1(u+hv) - \frac{1}{2}\int_0^T u'^2(t)dt + \varphi_1(u)$$

et donc

$$\varphi(u+hv)-\varphi(u) = \frac{h^2}{2}\int_0^T (v'^2(t)dt + h\int_0^T u'v'(t)dt - (\varphi_1(u+hv)-\varphi_1(u))$$

Nous avons

$$\varphi_1(u+hv)-\varphi_1(u) = \int_0^T\left(\int_u^{u+hv} g(t,s)ds\right)dt$$

Un résultat classique d'analyse montre que

$$\frac{1}{h}\int_{u}^{u+hv} g(t,s)ds \to g(t,u)v \quad \text{quand } h \to 0$$

De là, pour tout $v \in H_T^1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\varphi(u+hv)-\varphi(u)\right] = \int_0^T u'(t)v'(t)dt - \int_0^T g(t,u(t))v(t)dt$$

D'où

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \int_0^T u'(t)v'(t)dt - \int_0^T g(t,u(t))v(t)dt$$

□

Remarque 6.11. Si u réalise, le minimum de φ, alors u est une solution faible du problème (6.4).

En effet, si u est un point de minimum, nous avons

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \int_0^T \left[u'(t)v'(t) - g(t,u(t))v(t)\right]dt = 0 \quad \text{pour tout } v \in H_T^1$$

et alors pour tout $v \in C_T^\infty$, (C_T^∞ est l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables, T-périodiques).

Par conséquent u' admet une dérivée faible et $u"(t) = -g(t,u(t))$ presque partout sur I.

De plus l'existence de dérivée faible pour u et u' implique que $u(0)-u(T) = u'(0)-u'(T) = 0$. Ceci étant une conséquence du *lemme fondamental de calcul des variations* (cf.[95], p. 10).

Par définition de g nous avons

$$G(t,x) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(t,a)\int_a^x \frac{a-s}{1+s^2}ds & x < a \\ F(t,x) & a \le x \le c \\ \frac{\partial f}{\partial u}(t,c)\int_a^x \frac{s-c}{1+s^2}ds & x > c \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^T G(t,x)dt \to -\infty \qquad \text{quand} \quad |x| \to +\infty \tag{6.5}$$

Pour $u \in H^1_T$, $u = \overline{u} + \tilde{u}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} dt - \int_0^T G(t,\overline{u})dt - \int_0^T [G(t,u(t)) - G(t,\overline{u})]\, dt \qquad (6.6)\\
&= \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} dt - \int_0^T G(t,\overline{u})dt - \int_0^T \left(\int_0^1 < g(t,\overline{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t) > ds \right) dt\\
&\geq \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} dt - \int_0^T G(t,\overline{u})dt - \int_0^T K_g \|\tilde{u}\|_\infty dt\\
&\geq \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} - TK_g\sqrt{\frac{T}{12}} \left(\int_0^T |u'(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \int_0^T G(t,\overline{u})dt
\end{aligned}$$

Puisque $\|u\| \to +\infty$ si et seulement si

$$\left(|\overline{u}|^2 + \int_0^T |u'(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to +\infty$$

Alors (6.5) et (6.6) impliquent

$$\varphi(u) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\| \to +\infty$$

Puisque $\varphi(u) \to +\infty$ quand $|u| \to +\infty$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que $\varphi(u) > \varphi(b)$ pour $\|u - b\| > R_0$.

• Evaluation de R_0

Soit $u = b + v$ avec $\overline{v} = 0$

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \frac{1}{2}\int_0^T |v'(t)|^2 dt - \int_0^T G(t, b + v(t))dt\\
&\geq \varphi(b) + \frac{1}{2}\int_0^T |v'(t)|^2 dt - TK_g\sqrt{\frac{T}{12}} \left(\int_0^T v'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Wirtinger, nous avons

$$\|v\|^2 \leq \left(1 + \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right) \int_0^T |v'(t)|^2 dt$$

De là

$$\varphi(u) \geq \varphi(b) + \frac{2\pi^2}{T^2 + 4\pi^2} \|v\|^2 - K_g \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{12}} \|v\|$$

alors pour $\|v\| \geq \sqrt{\frac{T}{3}} K_g T^2 \left(1 + \frac{T^2}{4\pi^2}\right)$, nous avons $\varphi(u) \geq \varphi(b)$.

Posons $R_0 = 1 + .\sqrt{\frac{T}{3}} K_g T^2 \left(1 + \frac{T^2}{4\pi^2}\right)$.

Nous définissons l'ensemble Ω_0 par $\Omega_0 := \left\{u \in H^1_T; \|u - b\| \leq R_0\right\}$.

Assertion 4. φ atteint son minimum en un point u_0 de l'intérieur de Ω_0. En effet, Ω_0 est fermé et convexe; alors il est faiblement fermé et puisque H^1_T est réflexif, il est faiblement compact et par application du théorème 6.3,φ atteint son minimum en un point $u_0 \in \Omega_0$. Le choix de R_0 implique que $u_0 \in int.\Omega_0$.

Nous déduisons de la remarque 6.11 que u_0 est une solution de (6.4) et, par application du lemme 6.10, u_0 est une solution de (6.2) et alors $a \leq u_0(t) \leq c$ pour tout $t \in I$. De plus $u_0(.)$ n'est identiquement égale ni à a ni à c. En effet, u_0 est un point de minimum pour φ dans Ω_0 et $b \in \Omega_0$, donc $\varphi(u_0) \leq \varphi(b)$. De l'hypothèse (**H18**), nous déduisons que $\varphi(b) < \varphi(c)$. Ce qui implique alors que $u_0 \neq c$.

D'autre part, d'après l'hypothèse (**H15**), il existe a_0 voisin de a ($a_0 > a$) tel que $f(t, s) > 0 = f(t, a)$, pour tout s tel que $a < s \leq a_0$. Ce qui implique que $\varphi(a_0) < 0 = \varphi(a)$. Donc u_0 n'est pas identiquement égal à a même si $a \in \Omega_0$. □

Remarque 6.12. La solution u_0 déterminée est au voisinage de b. Nous pouvons supposer alors que $\overline{u}_0 = b$.

Si, en plus des hypothèses considérées, nous supposons qu'entre a et c, il n'y a pas d'autres solutions constantes, la solution u_0 est alors non constante et donc différente de b.

Théorème 6.13. *S'il existe un $d_0 < c$ tel que $\max_{t \in I} u_0(t) < d_0$, alors sous les hypothèses du théorème 6.9, il existe une autre solution u_1 de (6.2) différente de u_0 avec $u_0(t) \leq u_1(t) \leq c$ pour tout $t \in I$.*

Preuve: La preuve de ce théorème est basée sur le "*théorème de passe-montagne*" (cf. [109]).

1) Modification du problème

$$h(t, u(t)) = \begin{cases} f(t, u_0(t)) + 2\frac{(u_0(t) - u(t))^2}{1 + u^2(t)} \left|f(t, u_0(t))\right| & u(t) < u_0(t) \\ f(t, u(t)) & u_0(t) \leq u(t) \leq c; \\ \frac{\partial f}{\partial u}(t, c)\frac{u(t) - c}{1 + u(t)^2} & u(t) > c \end{cases} \tag{6.7}$$

Nous remarquons que $h(t,u)$ coincide avec $g(t,u)$ sur $[u_0(t), +\infty[$, elle est continue et lipschitzienne en u; h est bornée, i.e. $|h(t,u)| \leq M_h$ pour tout $(t,u) \in I \times \mathbb{R}$.

Soit le problème modifié associé à (6.7)

$$\begin{cases} u"(t) + h(t,u(t)) = 0 \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Lemme 6.14. Toute solution de (6.8) est solution de (6.2). Cette solution est entre u_0 et c

Preuve: Soit

$$I_{u_0} := \{t \in I; \quad u(t) < u_0(t)\}.$$

Pour $t \in I_{u_0}$, posons

$$\omega(t) := u(t) - u_0(t).$$

Alors ω vérifie:

$$\omega"(t) = u"(t) - u"_0(t) = \frac{2(u_0(t) - u(t))^2}{1 + u(t)^2} |f(t, u_0(t)| > 0$$

le principe du maximum implique que $\omega(t) \geq 0$, i.e. $u(t) \geq u_0(t)$ pour $t \in I_{u_0}$. Ce qui est impossible. Donc $I_{u_0} = \emptyset$.

De même, nous montrons que l'ensemble

$$I_c := \{t \in I; \quad u(t) > c\} \text{ est vide,}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 6.14. □

2) Minimisation de fonctionnelle

Soit Φ la fonctionnelle définie par

$$\Phi(u) = \int_0^T \frac{u'^2(t)}{2} dt - \int_0^T \int_c^u h(t,s) ds\, dt$$

Φ est bien définie et vérifie:

- Φ est faiblement semi-continue inférieurement;
- Φ est continûment différentiable et $\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_0^T u'(t)v'(t)dt - \int_0^T h(t,u(t))v(t)dt$;
- les points critiques de Φ sont solutions du problème (6.8).

Pour prouver le théorème 6.13, nous montrons que Φ admet un extremum local car tout extremum local de Φ vérifie l'équation d'Euler $\Phi'(u) = 0$.

En effet, soit $u \in H_T^1$, un point de minimum de Φ et $r > 0$ tel que $\Phi(u) \leq \Phi(u+v)$ pour $|v| \leq r$. Alors si $v \in H_T^1 \backslash \{0\}$ et $0 < \lambda < \frac{r}{\|v\|}$, nous avons

$$0 \leq \frac{\Phi(u+\lambda v) - \Phi(u)}{\lambda}$$

et alors $0 \leq < \Phi'(u), v >$. Puisque v est arbitraire, alors $\Phi'(u) = 0$.

Le cas de maximum local est similaire.

Lemme 6.15. Φ vérifie la *condition* de Palais-Smale.

Preuve: Nous devons montrer que si (u_n) est une suite de H_T^1 telle que $\Phi(u_n)$ est bornée et $\Phi'(\mathrm{u}_n)$ tend vers zéro, alors (u_n) est telle que $\|u_n\|$ est bornée dans H_T^1 (cf. [109]).

Soit $(u_n)_n$ une suite de H_T^1 vérifiant:

• il existe une constante positive c_1 telle que

$$|\Phi(u_n)| \leq c_1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{6.9}$$

• et pour tout $v \in H_T^1$

$$\left| \int_0^T [u_n'(t)v'(t) - h(t, u_n(t))v(t)]\, dt \right| \leq \varepsilon_n \|v\| \tag{6.10}$$

où $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

En prenant $v \equiv 1$ dans (6.10), nous obtenons

$$\left| \int_0^T h(t, u_n(t))dt \right| \leq \varepsilon_n \sqrt{T}$$

Maintenant si nous posons

$$\begin{aligned} I_1 &= \{t \in I;\ h(t, u_n(t)) > 0\} \\ I_2 &= \{t \in I;\ h(t, u_n(t)) \leq 0\} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left| \int_{I_2} h(t, u_n(t))dt \right| \leq \varepsilon_n \sqrt{T} + \int_{I_1} h(t, u_n(t))dt \leq \varepsilon_n \sqrt{T} + TM_h =: c_2$$

En suite, en prenant $v \equiv \omega_n := u_n - \overline{u}_n$ dans (6.10), nous obtenons

$$\left|\int_0^T \left[\omega_n'(t)^2 - h(t, u_n(t))\omega_n(t)\right] dt\right| \leq \varepsilon_n \|\omega\| < c_3 \|\omega_n\| \tag{6.11}$$

où $c_3 := \sup \varepsilon_n$.($c_3$ existe car $(\varepsilon_n)_n$ est convergente).

D'autre part

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \left[\left|\omega_n'(t)^2\right| - h(t, u_n(t))\omega_n(t)\right] dt\right| &\geq \|\omega_n'\|_{L^2} - c_2 \|\omega_n\|_\infty \\ &\geq \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + T^2} \|\omega_n\|^2 - c_2\sqrt{\frac{T}{12}} \|\omega_n\|\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant dûe aux inégalités de Wirtinger et Sobolev.

Posons

$$c_4 := \sqrt{\frac{T}{12}} c_2.$$

Nous avons

$$\left|\int_0^T \left[\left|\omega_n'(t)^2\right| - h(t, u_n(t))\omega_n(t)\right] dt\right| \leq \|\omega_n\|^2 + c_2 \|\omega_n\|_\infty \tag{6.12}$$

Les inégalités (6.11) et (6.12) impliquent alors

$$\|u_n'\|_{L^2} \leq \|\omega_n\| \leq (c_3 + c_4)\left(1 + \frac{4\pi^2}{T^2}\right) \tag{6.13}$$

Posons

$$c_5 := (c_3 + c_4)\left(1 + \frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

Pour achever la démonstration du lemme, nous prouvons que $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée. Supposons au contraire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n\|_{L^2} = +\infty$. Alors il existe une sous-suite de (u_n), notée toujours $(u_n)_n$, pour laquelle $m_n := \min u_n \to \infty$ et $M_n := \max u_n \to \infty$ quand $n \to +\infty$.

Nous avons

$$u_n(t) = u_n(\tau) + \int_\tau^t u_n'(s) ds$$

pour tout $t, \tau \in I$.

Considérons τ_0 tel que $u_n(\tau_0) = \min\limits_{t \in I} u_n(t) = \min u_n$.

En appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons alors pour tout $t \in I$

$$|u_n(t) - m_n| = \left| \int_{\tau_0}^{t} u_n'(s)ds \right| \leq \left| \int_{\tau_0}^{t} |u_n'(s)|\, ds \right| \leq \left(\int_{\tau_0}^{t} u_n'(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{T}$$

ce qui implique alors que

$$\|u_n - m_n\|_\infty \leq \sqrt{T}\, \|u'\|_{L^2} \tag{6.14}$$

Posons, maintenant

$$H(t,u) := \int_0^u h(t,s)ds$$

Alors de (6.14), nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T H(t,m_n)dt &= \int_0^T H(t,u_n(t))dt - \int_0^T \left[\int_{m_n}^{u_n} h(t,s)ds \right] dt \\
&\geq \int_0^T H(t,u_n(t))dt - T.M_h \|u_n - m_n\|_\infty \\
&\geq \int_0^T H(t,u_n(t))dt - T^{\frac{1}{3}} M_h \|u_n'\|_{L^2}
\end{aligned}$$

En utilisant (6.9), nous pouvons écrire

$$\int_0^T H(t,u_n(t))dt \geq \frac{1}{2} \|u_n'\|_{L^2}^2 - c_1$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\int_0^T H(t,m_n)dt &\geq \frac{1}{2} \|u_n'\|_{L^2}^2 - c_1 - T^{\frac{3}{2}} M_h \|u_n'\|_{L^2} \\
&\geq -c_1 - T^{\frac{3}{2}} M_h c_5 =: c_6
\end{aligned} \tag{6.15}$$

cette inégalité est dûe à (6.13) et elle implique que $\int_0^T H(t,m_n)dt$ est minorée.

D'autre part, d'après (6.7), pour tout $u < u_0(t)$, la primitive $H(t,.)$ de $h(t,.)$ est donnée par

$$[f(t,u_0(t)) + 2\,|f(t,u_0(t))|]\, u + u_0^2(t) \arctan u - u_0(t) \log(1+u^2)$$

et par suite

$$\int_0^T H(t,m_n)dt \to -\infty \text{ quand } n \to +\infty$$

et donc $\int_0^T H(t, m_n)dt$ n'est pas minorée. Ce qui est une contradiction avec (6.15).

Il s'en suit alors que $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée et, par suite, $\|u_n\|$ est bornée.

Maintenant, puisque la suite $(u_n)_n$ est bornée, elle contient alors une sous-suite convergente. □

Lemme 6.16. La fonctionnelle Φ a *une géométrie de passe-montagne.*

Preuve: Nous montrons que Φ vérifie les conditions du *théorème de passe-montagne* (cf.[109]).

Par définition de Φ nous avons $\Phi(c) = 0$.

De plus d'après **(H16)**, il existe $d_1,\ d_1 < c$ tel que $f(t,s) > f(t,c) = 0$ pour tout $s \in [d_1, c[$.

Puisque $\max\limits_{t\in I} u_0(t) < d_0 < c$, nous choisissons $d_2 \in]\max(d_0, d_1), c[$ avec d_2 très proche de c tel que

$$|\max u_0(t) - d_2| > d_2 - d_1 > c - d_2$$

Si nous posons $\alpha := \Phi(d_2)$ et $\rho = \sqrt{\frac{d_2-d_1}{T}}$, en utilisant (6.7), nous avons

$$\Phi_{|_{\partial B_\rho}} \geq \alpha \quad \text{avec } B_\rho := \left\{u \in H_T^1; \|u - d_2\| \leq \rho\right\}$$

Ainsi définie, B_ρ est telle que $c \in intB_\rho$ et $\max u_0(t) \notin B_\rho$, et donc $u_0 \notin B_\rho$.

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\Phi(u_0) &= \frac{1}{2}\int_0^T u_0'^2(t)dt - \int_0^T \left(\int_c^{u_0(t)} h(t,s)ds\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T u_0'^2(t)dt - \int_0^T \left(\int_c^{u_0(t)} f(t,s)ds\right) dt \\
&= \varphi(u_0) + \int_0^T \left(\int_a^c f(t,s)ds\right) dt \\
&< \varphi(u_0) + \int_0^T \left(\int_a^b f(t,s)ds\right) dt = \varphi(u_0) - \varphi(b) \leq 0
\end{aligned}$$

car φ atteint son minimum en u_0.

Par application du *théorème de passe-montagne,* Φ possède donc une valeur critique $\beta \geq \alpha$ caractérisée par

$$\beta := \inf_{\psi \in \Gamma} \max_{u \in \psi[0,1]} \Phi(u)$$

où

$$\Gamma := \left\{ \psi \in C\left([0,1], H_T^1 \right), \psi(0) = c, \psi(1) = u_0 \right\}.$$

□

Chapitre 7

Non linéarité avec potentiel à croissance sous-quadratique

Dans le chapître précédent, nous avons considéré le problème (6.2), qui correspond au problème (P) avec $e \equiv 0$ et $f(t,.)$, définie entre deux valeurs a et c, est bornée. Dans celui-ci, nous nous intéressons à la solvabilité de (P) quand $e \neq 0$ (système soumis à une force extérieure) et la non linéarité f n'est pas nécessairement bornée.

Notons que si f n'est bornée ni supérieuremnt ni inférieurement, alors l'existence de solutions pour (P) découle soit de l'existence de sur et sous-solutions bien ordonnées (cf. [1] ou [72]), ou encore de l'hypothèse $\liminf_{u\to\pm\infty} \frac{f(t,u)}{u} \geq 0$ et de l'existence de sur et sous-solutions pas nécessairement bien ordonnées. En effet, si f n'est pas bornée (ni inférieurement, ni supérieurement), nous avons alors uniformément en t, un des quatre cas suivants:

i) $\limsup_{u\to+\infty} f(t,u) = +\infty, \quad \liminf_{u\to+\infty} f(t,u) = -\infty,$

ii) $\limsup_{u\to-\infty} f(t,u) = +\infty, \quad \liminf_{u\to-\infty} f(t,u) = -\infty,$

iii) $\limsup_{u\to-\infty} f(t,u) = +\infty, \quad \liminf_{u\to+\infty} f(t,u) = -\infty,$

iv) $\limsup_{u\to+\infty} f(t,u) = +\infty, \quad \liminf_{u\to-\infty} f(t,u) = -\infty$

Dans les trois premiers cas, nous pouvons déterminer des sur et sous-solutions bien ordonnées. Si aucun de ces trois cas n'est vérifié, nous avons $\liminf_{u\to+\infty} f(t,u) > -\infty$, $\limsup f(t,u) < +\infty$. Alors si $\liminf_{u\to\pm\infty} \frac{f(t,u)}{u} \geq 0$, de (iv) découle l'existence d'une sur-solution A et d'une sous-solution B telles que $A < 0 < B$. L'application du *degré topologique* implique l'existence de solutions pour (P) (voir ci-dessus, chapître 3).

7.1 Solvabilité d'un problème aux limites périodiques

Le problème (P) est considéré avec une non linéarité f continue, vérifiant les hypothèses suivantes:

(H19) $\liminf\limits_{|s|\to+\infty} \frac{f(t,s)}{s} \geq 0$ uniformément en t

(H20) $\liminf\limits_{s\to+\infty} \frac{2F(t,s)}{s^2} = 0$ $\left(\text{ou bien } \liminf\limits_{s\to-\infty} \frac{2F(t,s)}{s^2} = 0\right)$

(H21) $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \int_0^T [F(t,s) - \bar{e}s]\, dt = +\infty.$

L'hypothèse **(H21)** est connue sous le nom de *condition de Ahmad-Lazer-Paul* [2].

Nous nous limiterons au cas où le $\sup\limits_u f(t,u)$ est fini ou bien $\inf\limits_u f(t,u)$ est fini car, sinon, nous nous ramenons à l'un des cas cités auparavant, où l'existence des solutions découle de l'application de la *théorie des sur et sous-solutions* et de la *théorie du degré topologique.*

Théorème 7.1. *Si les hypothèses (***H19***),(***H20***),(***H21***) sont vérifiées, le problème (P) admet au moins une solution.*

Preuve: Considérons par exemple le cas où

$$M_f(t) := \sup_{u\in\mathbf{R}} f(t,u) < +\infty, \text{ uniformément en } t$$

(le cas $m_f(t) = \inf\limits_{u\in\mathbf{R}} f(t,u) > -\infty$ peut être traité de manière similaire).

$M_f(.)$ est supposé au moins mesurable sur I.

Soit $J : H_T^1 \to \mathbf{R}$, définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[|u'(t)|^2 - F(t,u(t)) + e(t)u(t)\right] dt$$

J est alors bien définie sur H_T^1.

J est faiblement semi-continue inférieurement;

J est continûment différentiable et

$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^T [u'(t)v'(t) - f(t,u(t))v(t) + e(t)v(t)]\, dt$ pour tout $u, v \in H_T^1$.

Les points critiques de J sont précisément des solutions de (P).

Pour prouver le théorème 7.1, nous appliquons le *théorème de passe-montagne.* Pour cela il faut vérifier la *condition* de Palais-Smale.

Lemme 7.2. La fonctionnelle φ vérifie la condition de Palais-Smale.

Preuve: Soit $(u_n)_n$ une suite dans H^1_T telle que

$$|J(u_n)| \leq k_1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{7.1}$$

et pour tout $v \in H^1_T$

$$\left| \int_0^T [u_n'(t)v'(t) - f(t, u_n(t))v(t) + e(t)v(t)]\, dt \right| \leq \varepsilon_n \|v\| \tag{7.2}$$

où $\varepsilon_n \to 0^+$ quand $n \to +\infty$ et $\varepsilon_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En prenant $v \equiv -1$ dans (7.2), nous obtenons

$$\left| \int_0^T (f(t, u_n(t)) - e(t))\, dt \right| \leq \varepsilon_n \sqrt{T}$$

ce qui implique alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^T f(t, u_n(t))dt \right| \leq \left| \int_0^T [f(t, u_n(t)) - e(t)]\, dt \right| + \left| \int_0^T e(t)dt \right| \leq \varepsilon_n \sqrt{T} + T\,|\bar{e}|$$

Si

$$I_1 := \{t \in I; f(t, u_n(t)) > 0\} \quad \text{et} \quad I_2 := \{t \in I; f(t, u_n(t)) \leq 0\}$$

alors

$$\left| \int_{I_2} f(t, u_n(t))dt \right| \leq \varepsilon_n \sqrt{T} + T\,|\bar{e}| + \int_{I_1} f(t, u_n(t))dt$$

Il existe une constante $k_2 := \varepsilon_n \sqrt{T} + T\,|\bar{e}| + \|M_f\|_{L^1}$ telle que

$$\int_0^T |f(t, u_n(t))dt| \leq k_2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Si dans (7.2) nous prenons $v \equiv \omega_n := u_n - \overline{u}_n$, nous obtenons, en appliquant les inégalités de Wirtinger et Sobolev,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n \|\omega_n\| \;&\geq\; \left| \int_0^T \left[\omega_n'(t)^2 - f(t, u_n(t))\omega(t) + e(t)\omega_n(t)\right] dt \right| \geq \|\omega_n'\|^2_{L^2} - (k_2 + T\,|\bar{e}|)\, \|\omega_n\|_\infty \\
&\geq\; \frac{4\pi^2}{T^2 + 4\pi^2} \|\omega_n\|^2 - (k_2 + T\,|\bar{e}|) \sqrt{\frac{T}{12}}\, \|\omega_n\|
\end{aligned}$$

ce qui entraine alors

$$\|u_n'\| \leq \|\omega_n\| \leq \left(\frac{T^2}{4\pi^2}+1\right)\left(\varepsilon_n + (k_2 + T\,|\bar{e}|)\sqrt{\frac{T}{12}}\right) \leq k_3 \tag{7.3}$$

k_3 est une constante positive indépendante de n car $\varepsilon_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par suite $\|u_n'\|_{L^2} < k_3$.

Pour achever la démonstration, nous devons prouver que $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée. Pour cela nous faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'au contraire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2} = +\infty$, il existe alors une sous-suite de $(u_n)_n$, appelée toujours $(u_n)_n$, telle que

$$M_n := \max u_n \to +\infty \quad \text{ou} \quad m_n := \min u_n \to -\infty \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Supposons $M_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, alors, de (**H21**), nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T (F(t, M_n) - \bar{e}M_n)\,dt = +\infty \tag{7.4}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_0^T (F(t,M_n) - \bar{e}M_n)\,dt &= \int_0^T (F(t,u_n(t)) - e(t)u_n(t))\,dt + \int_0^T \left(\int_{u_n(t)}^{M_n} (f(t,s) - e(t))\,ds\right) dt \\
&\leq \int_0^T (F(t,u_n(t)) - e(t)u_n(t))\,dt + \int_0^T \left(\int_{u_n(t)}^{M_n} |M_f - e(t)|\,ds\right) dt \\
&\leq \int_0^T (F(t,u_n(t)) - e(t)u_n(t))\,dt + \|M_f - e\|_{L^1} \|M_n - u_n\|_\infty,
\end{aligned}$$

de (7.1) et (7.3), nous déduisons

$$\int_0^T (F(t,M_n) - \bar{e}M_n)\,dt \leq k_1 + \sqrt{T}k3\,\|M_f - e\|_{L^1} := k_4$$

donc $\int_0^T (F(t,M_n) - \bar{e}M_n)\,dt$ est majorée. Ce qui contredit (7.4).

Alors $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée et par suite $\|u_n\|$ est bornée.

Nous arrivons à la même conclusion si nous considérons m_n à la place de M_n, ou encore une sous-suite vérifiant $M_n \to -\infty$ ou $m_n \to +\infty$. □

Lemme 7.3. J a une *géométrie de passe-montagne.*

Preuve: Soit $\Omega := \{u \in H_T^1; \min u > 0\}$.

1) Nous montrons que

$$\inf_{u \in \partial\Omega} J(u) > -\infty \tag{7.5}$$

Si $u \in \partial\Omega$ i.e. $\min u = u(t_u) = 0$ pour un certain $t_u \in I$, alors en prolongeant la fonction e et u par T-périodicité sur $\mathbf{R}$, J peut s'écrire

$$J(u) = \int_{t_u}^{t_u+T} \left[\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - F(t, u(t) + e(t)u(t)\right] dt \geq \int_{t_u}^{t_u+T} \left[\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - |M_f(t) - e(t)|\, u(t)\right] dt$$

et par l'inégalité de Hölder

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2} - \|M_f - e\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

Et puisque $u(t_u + T) = u(t_u)$, l'inégalité de Poincaré entraine l'existence d'une constante positive $\gamma = \gamma([t_u, t_u + T])$ telle que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2} - \gamma\|M_f - e\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} \tag{7.6}$$

Notons que $\|u\| \to +\infty$ si et seulement si

$$\left(\|u'\|_{L^2}^2 + \left|\overline{u}^2\right|\right)^{\frac{1}{2}} \to +\infty$$

et comme $\min u = 0$, alors $\|u\| \to +\infty$ est équivalent à $\|u'\|_{L^2} \to +\infty$ et alors (7.6) implique que φ est coercive et alors elle admet une suite minimisante bornée. De plus J étant faiblement semi-continue inférieurement, alors $\inf_{\partial\Omega} \varphi > -\infty$.

2) De l'hypothèse (**H21**), nous déduisons que $-J$ est coercive, i.e. $J(r) \to -\infty$ quand $r \to +\infty$. Et alors il existe $R > 0$ tel que

$$\max(J(-R), J(R)) < \inf_{u \in \partial\Omega} J(u)$$

avec $R \in \Omega$ et $-R \in H_T^1 \backslash \Omega$. Ce qui achève la démonstration du lemme 7.3. □

Toutes les conditions du *théorème de passe-montagne* se trouvent vérifiées et donc J admet une valeur critique β, caractérisée par

$$\beta := \inf_{\psi \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(\psi(s))$$

où $\Gamma := \{\psi \in C([0,1], H_T^1); \psi(0) = R, \psi(1) = -R\}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 7.1. □

7.2 Existence de solutions sous-harmoniques.

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'existence et la multiplicité de solutions sous-harmoniques pour l'équation

$$u" + f(t,u) = e(t) \tag{7.7}$$

où f est une fonction continue et T-périodique en t et e une fonction mesurable bornée, T-périodique.

Par une solution sous-harmonique, nous entendons une solution kT-périodique où k est un entier quelconque. Quand la solution n'est pas T-périodique, nous dirons qu'elle est une vraie sous-harmonique.

Le problème de la recherche de solutions sous-harmoniques est classique et a été étudié avec différentes méthodes. Les premiers résultats sur l'existence d'orbites sous-harmoniques au voisinage d'une orbite donnée ont été obtenu par Birkhoff et Lewis (cf.[14],[99]) par des techniques de perturbation. Rabinowitz [110] a montré l'existence de solutions sous harmoniques pour des systèmes hamiltoniens en utilisant des méthodes variationnelles. Son approche n'est pas à caractère locale comme celle dans [14]. Elle a permis d'obtenir l'existence d'une suite de solutions dont la période minimale tend vers l'infini dans le cas où la fonction hamiltonienne est à croissance sous-quadratique ou superquadratique. Ces résultats ont été élargis dans différentes directions comme par exemple [28],[30]. Des résultats locaux pour l'équation du pendule peuvent être trouvés dans [121]. De même, des résultats pour l'équation (7.7) peuvent être trouvés dans [42], obtenus en utilisant l'application temps.

L'équation (7.7) a été étudiée dans [55] dans le cas de non linéarité L^1 Caratheodory avec l'hypothèse bien connue de Landesman-Lazer. Ils montrent l'existence d'une suite de solutions sous-harmoniques dont les périodes minimales et les amplitudes tendent vers l'infini (cf. théorème 2.1 [55]).

Nous procédons comme dans [110] et [55] pour montrer un résultat de multiplicité de solutions pour (7.7) en considérant le problème de la section 7.1, i.e. avec une condition de Ahmad-Lazer-Paul imposée sur f.

Formulation du problème et résultat principal

Nous considérons donc l'équation (7.7) avec les hypothèses suivantes:

(H22) e est mesurable, bornée et T-périodique

(H23) (i) f continue en t, u, T-périodique en t

(ii) $\sup_{u\in\mathbf{R}} f(t,u) =: M_f(t) < +\infty$ ou bien $m_f(t) := \inf_{u\in\mathbf{R}} f(t,u) > -\infty$

(iii) $sgn(u)\,[f(t,u) - \bar{e}] > 0$ pour $|u|$ assez grande

(iv) $\lim_{|u|\to+\infty} \int_0^T [F(t,u(t)) - \bar{e}u(t)]\,dt = +\infty$

Théorème 7.4. *Sous les hypothèses* (**H22**) *et* (**H23**), *l'équation (7.7) admet une suite* $(u_k)_{k\geq1}$ *de solutions* kT*-périodiques dont les amplitudes et les périodes minimales tendent vers l'infini.*

Preuve:

1^o Existence de solutions kT-périodiques pour (7.7).

L'existence de solutions kT-périodiques est obtenue d'une manière similaire à celle appliquée au théorème 7.1. Nous montrons l'existence de point critique pour la fonctionnelle J_k, définie pour tout $k \geq 1$ par

$$J_k(u) := \int_0^{kT} \left[\frac{1}{2}u'(t)^2 - F(t,u(t)) + e(t)u(t)\right] dt$$

où $u \in H^1_{kT} := \{u \in W^{1,2}([0,kT], \mathbf{R})\,;\, u(0) = u(kT).\}$

Par application du *théorème de passe-montagne*, nous obtenons un point critique u_k pour J_k caractérisé par

$$J_k(u_k) := \inf_{\psi\in\Gamma_k} \max_{s\in[0,1]} J_k(\psi(s))$$

où

$$\Gamma_k := \left\{\psi \in C\left([0,1], H^1_{kT}\right); \psi(0) = R_k \text{ et } \psi(1) = -R_k\right\}$$

u_k est alors une solution faible pour (7.5), kT-périodique et, si e est continue, cette solution est alors classique.

2^o Existence de solutions sous-harmoniques distinctes.

Remarque 7.5. Notons que $J_k \equiv J_m$ sur $H^1_{kT} \cap H^1_{mT}$ pour tout k et m, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 7.6. Le niveau de $u \in \bigcup_k H^1_{kT}$ est défini par $J_m(u)$ chaque fois que $u \in H^1_{mT}$.

Toute fonctionnelle J_k admet au moins un niveau critique noté $\beta_k := \min_{H^1_{kT}} J_k$.

Notons que des solutions sous harmoniques non distinctes ont même niveau. Alors, une approche naturelle pour trouver la multiplicité de solutions harmoniques distinctes consiste en la recherche de niveaux critiques multiples.

La suite β_k n'est pas croissante avec k à partir d'un certain ordre, i.e. il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que si $k \in m\mathbb{N}$, alors $\beta_k \leq \beta_m$.

Si $\beta_k < \beta_1$ pour un certain k, alors le niveau β_k est interdit pour les fonctions T-périodiques et tout minimum global de J_k est en fait une solution sous-harmonique de (7.7).

Dans notre notre cas $J_k(u_k)$ n'est pas nécessairement un minimum global pour J_k et par suite la condition précédente, même vérifiée reste insuffisante pour conclure à l'existence de solutions véritablement sous-harmoniques. C'est pour cela que nous montrons en plus que les amplitudes et les périodes minimales des (u_k) tendent vers l'infini.

Nous commençons tout d'abord par montrer que

$$\frac{1}{k} J_k(u_k) \to -\infty \text{ quand } k \to \infty$$

Nous choisissons $R_k \geq k$ et considérons $\psi_k \in \Gamma_k$ définie pour tout $s \in [0,1]$ et pour tout $t \in [0, kT]$ par

$$\begin{aligned} (\psi_k(s))(t) &= R_k[1-2s] + 2k\left(1 - \tfrac{R_k|1-2s|}{R_k}\right) \\ (\psi_k(s))(t) &= R_k[1-2s] + 2k(1-|1-2s|) \end{aligned}$$

ψ_k vérifie alors, pour tout $t \in [0, kT]$,

$$(\psi_k(0))(t) = R_k \text{ et } (\psi_k(1))(t) = -R_k$$

Notons que pour tout $s \in [0,1]$, $(\psi_k(s))(.)$ est constante en t et alors $\psi_k(s) \in H^1_{kT}$.

Soit $s_k \in [0,1]$ tel que

$$J_k(\psi_k(s_k)) = \max_{s\in[0,1]} J_k(\psi_k(s))$$

Pour $k \geq 2$, nous avons par définition de u_k

$$\frac{1}{k} J_k(u_k) \leq \frac{1}{k} J_k(\psi_k(s_k)) = -\frac{1}{k}\int_0^{kT} F(t, (\psi_k(s_k))(t))\, dt + \frac{1}{k}\int_0^{kT} e(t)\,(\psi_k(s_k))(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left[\int_0^T F\left(t+iT,\left(\psi_k(s_k)\right)(t+iT)\right)dt+\int_0^T e(t+iT)\left(\psi_k(s_k)\right)(t+iT)dt\right]\\
&\leq -\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left[\int_0^T F\left(t,\left(\psi_k(s_k)\right)(t)\right)dt+\int_0^T e(t)\left(\psi_k(s_k)\right)(t)dt\right]\\
&\leq -\left[\int_0^T \left[F\left(t,\left(\psi_k(s_k)\right)(t)\right)-\overline{e}\left(\psi_k(s_k)\right)(t)\right]dt\right]
\end{aligned}$$

Maintenant, quand $k \to +\infty$, nous avons $|\left(\psi_k(s_k)\right)(t)| \to +\infty$, uniformément en t.

Alors, d'après l'hypothèse (**H23**)(iv), nous obtenons

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}J_k(u_k) = -\infty$$

3^o Soit

$$A_k := \left(\max_{[0,kT]} u_k - \min_{[0,kT]} u_k\right) := \text{amplitude de } u_k$$

montrons que

$$A_k \to +\infty \text{ quand } k \to +\infty \tag{7.8}$$

Nous avons

$$\|u_k\|_\infty \to +\infty \text{ quand } k \to +\infty \tag{7.9}$$

Pour montrer (7.8), nous devons prouver que $\|\widetilde{u}_k\|_\infty \to +\infty$ quand $k \to +\infty$ où $u_k = \widetilde{u_k} + \overline{u}_k$.

Supposons qu'au contraire $\|\widetilde{u}_k\|_\infty$ est bornée par (7.9), il existe alors une sous suite, notée toujours u_k, telle que $|\overline{u}_k| \to +\infty$ quand $k \to +\infty$.

De l'identité $u_k(t) = \overline{u}_k\left(1+\frac{\widetilde{u}_k(t)}{\overline{u}_k}\right)$, nous obtenons $|u_k(t)| \to +\infty$ pour tout t, ce qui implique $\min|u_k| \to +\infty$ quand $k \to +\infty$.

Considérons le cas où $\min u_k \to +\infty$ (l'autre possibilité, i.e. $\max u_k \to -\infty$ peut être traitée de manière similaire). Par intégration de l'équation (7.7), nous obtenons

$$\int_0^{kT} e(t)dt = \int_0^{kT} f(t,u_k(t))dt$$

Par T-périodicité de e et f, l'égalité devient

$$\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^T f(t,u_k(t+iT))dt - k\int_0^T e(t)dt = 0$$

d'où

$$\frac{1}{k}\int_0^T \left(\sum_{i=0}^{k-1} f(t,u_k(t+iT)) - \overline{e}\right) dt = 0$$

Maintenant, vu l'hypothèse (**H23**)(iii) , le *lemme de Fatou* [68] s'applique et nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^T \liminf_{k\to\infty} \left[\frac{1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(f(t,u_k(t+iT)) - \overline{e})\right)\right] dt \\ &\geq \int_0^T \liminf_{x\to+\infty} \left[f(t,x) - \overline{e}\right] dt > 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est dûe à la définition de $\liminf$. Nous avons abouti à une contradiction: $0 > 0$. Notre supposition est alors fausse et donc

$$\|\widetilde{u}_k\|_\infty \to +\infty \quad \text{quand } k \to +\infty$$

ce qui implique que les amplitudes des solutions u_k tendent vers l'infini quand $k \to +\infty$.

Montrons maintenant que les périodes minimales des solutions u_k tendent vers l'infini.

Nous supposons pour cela qu'au contraire nous pouvons extraire de la suite (u_k) une sous suite dont les périodes minimales sont bornées. Alors, pour cette sous suite, nous pouvons trouver une période commune k_0T. La suite (u_n) des points critiques de J_{k_0} est telle que $J_{k_0}(u_n) = \frac{1}{n}J_n(u_n)$.

Supposons que $\|u_n\|_\infty \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Puisque les u_n sont solutions de (7.7), alors $J'_{k_0}(u_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, et suivant les mêmes pas de démonstration de la *condition* de Palais-Smale, nous obtenons $\|\widetilde{u}_n\|_\infty$ bornée et par suite $|\overline{u}_n| \to \infty$ quand n tend vers l'infini. De l'identité $u_n(t) = \overline{u}_n\left(1 + \frac{\widetilde{u}_n(t)}{\overline{u}_n}\right)$, nous concluons que $|u_n(t)| \to \infty$ pour tout t, ce qui entraine $\min|u_n| \to +\infty$.

Considérons le cas où $\min u_n \to +\infty$ (l'autre possibilité, i.e. $\max u_n \to -\infty$ peut être traitée de manière analogue). Par intégration de l'équation (7.7) sur $[0,k_0T]$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{k_0 T} (f(t, u_n(t)) - \overline{e})\, dt \\
&\geq \int_0^{k_0 T} \liminf_{n \to \infty} (f(t, u_n(t)) - \overline{e})\, dt \\
&\geq \int_0^{k_0 T} \liminf_{x \to \infty} (f(t, x) - \overline{e})\, dt
\end{aligned}
$$

ce qui contredit l'hypothèse (**H23**)(iii).

Nous concluons que $\|u_n\|_\infty$ doit être bornée et par suite $J_{k_0}(u_n)$ est bornée. D'autre part, $J_{k_0}(u_n) = \frac{1}{n} J_{nk_0}(u_n) \to -\infty$ quand $n \to \infty$. Contradiction!

Alors les périodes minimales des solutions (u_k) tendent vers l'infini. Ceci achève la démonstration du théorème 7.4. $\square$

Bibliographie

[1] Adje A., *Sur et sous-solutions généralisées et problèmes aux limités du second ordre*, Bull. Soc. Math. Belgique, Ser. **B 42** (1990), 347-368.

[2] Ahmad S., Lazer A.C. and Paul J.L., *Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boudary value problems at resonance*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 933-944.

[3] Ambrosetti A. and Mancini G., *Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems*, Nonlinear Anal. Theory Math. Appl. **3** (1979), 634-645.

[4] Ambrosetti A. and Prodi G., *On the inversion of some differentiable mapping with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. **93** (1972), 231-247.

[5] Aubin J.P. and Cellina A., *Differential Inclusions*, Springer Verlag (1984).

[6] Bahri A. and Berestycki H., *Forced vibration of superquadratic Hamiltonian System.* Acta. Math. **152** (1984), 143-197.

[7] Bebernes J.W. and Schmitt K., *Periodic boundary value problems for systems of second diff. eq.*, J. Diff. Eq. **13** (1973), 32-45.

[8] Berestycki H. and de Figueiredo D.G., *Double resonance in semilinear elliptic problems.* Comm. Partial Diff. Eq. **6** (1981), 91-120.

[9] Berge C., *Espaces Topologiques et Fonctions Multivoques*, Dunod, Paris, 1959.

[10] Berger M.S., *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, N.Y.,1977.

[11] Birkhoff G.D.,*Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **14** (1913), 14-22 (Collected Mathematical Papers, Vol.1, Dover, New York 1968; pp.673-681).

[12] Birkhoff G.D.,, *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta. Math., **47** (1925), 297-311 (Collected Mathematical Papers, Vol.1, Dover, New York 1968; pp.252-266).

[13] Birkhoff G.D., *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. vol. IX, New York, 1927.

[14] Birkhoff G.D. and Lewi D.C., *On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system*, Ann. Mat. Pur. Appl. **12** (1933), 117-133.

[15] Boucherif A., *Periodic boundary value problems with Caratheodory nonlinearities*, Proc. Dyn. Syst. Appl. Vol.1 (G.S.Ladde and M.Sambandham, Eds), Dynamic Publ. Atlanta (1994), 25-31.

[16] Boucherif A., *Periodic boundary value problems and a priori bounds on solutions*, Comm. Appl. Nonl. Anal. 3 (1996), 77-89.

[17] Boucherif A.,Garcia-Rio E. and Nieto J.J., *Periodic solutions of quasi-differential equations*, J. Applied Math. and Stoch. Anal. 9 (1996), 11-20.

[18] Boucherif A. and Bouguima S.M., *Periodic solutions of second order ordinary differential equations with a discontinuous nonlinearity, in: "Nonlinear Partial Differential Equations"*, (A. Benkirane and J. P. Gossez, Eds), Vol **343**, Long man 1996,pp.54-60.

[19] Boucherif A. and Daoudi-Merzagui N., *Periodic boundary value problems, a bifurcation analysis*, Proc. Equadiff. **91**, Vol. 1, pp 334-336, (C. Perello, C. Simo and J. Sola-Morales, Eds), World Sc. Publ. Singapore, 1993.

[20] Boucherif A. and Daoudi-Merzagui N., *Solvability of second order periodic boundary value problems*, Dynamic Syst. Appl., Vol. 8, No. 2, (1999), 235-242.

[21] Boucherif A. and Daoudi-Merzagui N., *Periodic boundary value problems with discontinuous nonlinearities,* Submitted.

[22] Brezis H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications,* Masson, Paris, 1983.

[23] Brouwer L.E.J. , *Ueber Abbildungen von Mannigfoltigkeiter*, Math. Ann. **71** (1912) , 97-115.

[24] Capietto A., Mawhin J. and Zanolin F., *A continuation theorem for periodic boundary value problems with oscillatory nonlinearities.* Nonlinear Differential Equations and Applications **2** (1995), 133-163.

[25] Cesari L.C., *Functional analysis and periodic sol. of nonlinear diff. eq.* in Contrib. Diff. Eq., Vol.1,149-187, Wiley, New-York, 1963.

[26] Chang K.C., *The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities.* Comm. Pure Appl. Math.**33** (1980), 117-146.

[27] Chow S.N. and Hale J.K., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer Verlag, New York (1982).

[28] Clarke F. and Ekeland I., *Nonlinear oscillations and boundary value problems for Hamiltonian systems*, Arch. Rational Mech. Anal. **78** (1982), 315-333.

[29] Coddington E.A. and Levinson N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, New-York, 1955.

[30] Conley C. and Zehnder E., *Subharmonic solutions and Morse theory*, Physica A **124** (1984), 649-658.

[31] Dancer E.N., *Boundary value problems for weakly non linear ordinary diff. eq.*, Bull. Austral. Math. Soc. **15** (1976), 321-328.

[32] Dancer E.N., *Reduction theorem for a class of semilinear boundary value problems*, Ann. Mat. Pur. Appl., **131** (1982), 167-185.

[33] Daoudi-Merzagui N., *Periodic solutions of nonautonomous second order differential equations*, Nonlinear Studies, Vol. 6, No. 1, (1999), 123-129.

[34] Daoudi-Merzagui N., *Periodic solutions of nonautonomous second order differential equations with a singularity*, Applicable Analysis, to appear.

[35] Daoudi-Merzagui N., *Poincaré-Birkhoff theorem and periodic boundary value problems*, submitted.

[36] Daoudi-Merzagui N., *A nonresonance condition for periodic boundary value problems*, submitted.

[37] De Coster C. et Habets P., *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results, in "Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Equations"*, CISM Courses and Lectures, Vol. **371**, Springer Verlag, Wien 1996, pp. 1-78.

[38] Del Pino M., Manasevitch R. and Murua A., *On the number of 2π-periodic solutions for $u" + g(u) = s(1 + h(t))$ using the Poincaré-Birkhoff Theorem,* J. Diff. Eq., (1992), 240-258.

[39] Deimling K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[40] Ding T., *An infinite class of periodic solutions of periodically perturbed Duffing equations at resonance*, Proc. Amer. Math. Soc., **86** (1982), 47-54.

[41] Ding T.R. and Zanolin F.,*Time-maps for the solvability of periodically perturbed nonlinear Duffing equations*, Nonlinear Anal. **17** , No 7 (1991), 635-653.

[42] Ding T.R. and Zanolin F., *Subharmonic solutions of second order nonlinear equations: a time-map approach*, Nonlinear Analysis, Vol. 20, No. 5, (1993), pp. 509-532.

[43] Ding W.Y., *Fixed points of twist mappings and periodic solutions of ordinary diff. eq.* Acta Math. Sinica, **25** (1982), 227-235.

[44] Ding W.Y., *A generalization of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **88** (1983), 341-346.

[45] Drabek P. and Invernizzi S., *On the periodic boundary value problem for forced Duffing equation with jumping nonlinearity.* Nonlinear Analysis, **10** (1986), 643-650.

[46] Dugundji J. and Granas A., *Fixed Point Theory,* Vol.**1**, PWN, Warszawa, 1982.

[47] Ekeland I. and Temam R., *Convex analysis and variational problems*, Studies in Math. and Appl., Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, American Elsevier, New-York, 1976.

[48] Fabry C, *Periodic solutions. of the equation* $x" + f(t,x) = 0$. Seminaire de Math.117,U.C.L., Louvain-La-Neuve (1987).

[49] Fabry C. and Habets P, *Periodic solutions. of second order differential. equations. with superlinear asymmetric nonlinearities.* Arch. Math., **60** (1993), 266-276.

[50] Fabry C., Mawhin J. and Nkashama M.N., *A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary equations*, Bull. London Math. Soc., **18** (1986), 173-180.

[51] Faure R., *Solutions périodiques d'équations admetant des pôles; étude par la méthode de Leray-Schauder et par un théorème de point fixe.* C.R. Acad. Sci. Paris. **283**, A (1975), 481-484.

[52] Fonda A., *Periodic solutions of scalar second order differential equations with a singularity,*Classe des Sciences, Acad. Royal. Belgique, Tome IV (1993), 5-39.

[53] Fonda A., *On the existence of periodic solutions for scalar second order differential equations when only the asymptotic behavior of the potential is known,* Proc. Amer. Math. Soc. **119**, No 2, (1993), 439-445.

[54] Fonda A. and Habets P., *Periodic solutions of asymptotically positively homogeneous diff. eq.* J. Diff. Eq. **81** (1989), 68-97.

[55] Fonda A. and Ramos M., *Large-amplitude subharmonic oscillations for scalar second order differential equations with asymetric nonlinearities*, J. Diffential Equations **109**, No 2, (1994), 354-372.

[56] Frigon M., *Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires,* Dissertationes Math. Vol. **296**, PWN, Warszawa 1990, pp. 1-75.

[57] Fučik S., *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems.* Reidel P. Campany. Dordrecht, Boston (1980).

[58] Fučik S. and Kufner A., *Nonlinear Differential Equations*, Studies in Applied Mech. **2** Elsevier; Holland, 1980

[59] Gaines R., *A priori bounds for solutions to nonlinear second order boudary value problems,* Appl. Anal. **3** (1973), 157-167.

[60] Gossez J.P. and Omari P., *Periodic solutions of second order ordinary differential equations: a necessary and sufficient condition for nonresonance,* J. Diff. Eq. **94** (1991), 67-82.

[61] Granas A., Guenther R. and Lee J., *Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations*, Dissertationes Math. Vol **244**, PWN, Warszawa 1985.

[62] Habets P. and Metzen G., *Existence of periodic solutions of Duffing equations.* J. Diff. Eq. **78** (1989),1-32.

[63] Habets P., Omari P. and Zanolin F.,*Nonresonance conditions on the potential with respect to the Fučik spectrum for the periodic boundary value problem*, Rocky Mountain J. Math. **25**, No 4 (1995), 1305-1340

[64] Hamel G., *Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden*, Math. Ann., **86** (1922), 1-13

[65] Hartman P.: *On boundary value problems for superlinear second order differential equations*, J. Diff. Eq. **26** (1977), 37-53.

[66] Harvey C.A., *Periodic solutions. of the differential. equation.* $x" + g(x) = p\,(t)$, Contrib. Diff. Eq., Vol.1, 425-451, Wiley,New-York, 1963.

[67] Henrard M., *Topological degree in boundary value problems: Existence and multiplicity results for second order differential equations*, Thesis, UCL Belgium, (1995).

[68] Hewitt E. and Stromberg K., *Real and Abstract Analysis*, (Graduate texts in mathematics 25), Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[69] Hu S.C., *Differential equations with discontinuous right-hand sides,* J. Math. Anal. Appl. **154** (1991), 377-390.

[70] Invernizzi S., *A note on nonuniform. nonresonance for jumping nonlinearities,* Comm. Math. Univ. Carolinae, **27** (1986), 285-291.

[71] Jacobowitz H.: *Periodic solutions of* $x" + f(t,x) = 0$ *via the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, J. Diff. Eq. **20** (1976), 37-52.

[72] Kannan R. and Lakshmikantham V., *Existence of periodic solutions of nonlinear boundary value problems and the method of upper and lower solutions*, Appl. Anal. **17** (1984), 108-113.

[73] Krasnoselskii M.A., *The operator of translation along the trajectories of differential equations.* Amer. Math. Soc. Providence R.I., 1968.

[74] Krasnoselskii M.A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations,* Macmillan, New York, (1965).

[75] Kronecker L., *Ueber system von Funktionen mehrerer Variabeln*, Monatsher, Berlin Akad. (1969) 159-193.

[76] Lasota A and Opial Z., *Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon. Math. **16** (1984), 69-94.

[77] Lazer A.C. and Mc Kenna P.J., *Large scale oscillatory behaviour in loaded asymmetric systems,* Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse. Non Linéaire, **4** (1987), 243-274.

[78] Lazer A.C.et Mac Kenna P.J., *Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis,* SIAM Review **32** (1990), 537-578.

[79] Lazer A.C. and Solimini S., *On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities.* Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 109-111.

[80] Leray J. , *les problèmes non linéaires.* L'enseignement math.**35** (1936), 139-151.

[81] Leray J., *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique,* J. Math. Pures . Appl. **12** (1933), 1-82.

[82] Leray J. and Schauder J., *Topologie et équations fonctionnelles* , Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (**3**) 51 (1934) , 45-78.

[83] Llyod N.G., *Degree Theory,* Cambridge Tracts in Math., No.73, Cambridge Univ. Press, London, 1978.

[84] Long Y., *Multiple Solutions. of perturbed superquadratic second order Hamiltonian Systems,* Trans. Amer, Math. Soc., **311** (1989), 749-780.

[85] Marsden J.E. and Mc Cracken M., *The Hopf Bifurcation and its Applications,* Appl. Math. Sciences, Vol. 19, Springer Verlag, New-York 1976.

[86] Marsey W., *Algebraic Topology: An Introduction,* Springer Verlag Berlin, 1984.

[87] Mawhin J., *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems,* CBMS **40**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[88] Mawhin J., *Topological degree and boundary value problems for nonlinear diferential equations.* (CIME lectures, june 1991). Recherche de Mathématiques No.**10**. October 1991.

[89] Mawhin J., *Recent trends in nonlinear boundary value problems,* in "Proc. VII Int. Conf. Nonlinear Oscillations" (G Schmidt, Ed.) Akademic-Verlag, Berlin (1977) **1** (2), pp. 51-70.

[90] Mawhin J., *Equivalence Theorems for nonlinear operator equation and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces.* J. Diff. Eq. **12** (1972), 610-636.

[91] Mawhin J., *Periodic oscillations of forced pendulum-like equations*, Lectures Notes in Math., Springer , **964** (1982), 458-476.

[92] Mawhin J., *The forced pendulum: A paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems,* Expo. Math.;**6** (1988), 271-287.

[93] Mawhin J. and Ward J.R., *Non uniform nonresonance conditions at the two first eigenvalues for periodic solution of forced Lienard and Duffing equations*, Rocky Mountain J. Math. **112** (1982), 643-654.

[94] Mawhin J. and Ward J.R., *Periodic Solutions of some forced Lienard differential equations at resonance*, Archiv. Math. **41** (1983), 337-351.

[95] Mawhin J. and Willem M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Applied Math. Sc. **74** Springer Verlag, New York, 1989.

[96] Milnor J.W., *Topology from the Differentiable viewpoint*, Based on note by Weaver D.W., The University Press of Virginia Charlottesville, (1969).

[97] Morris G.R., *An infinite class of periodic solutions of* $x" + 2x^3(t) = p(t)$, Proc. Cambridge. Phil. Soc.,**61** (1965), 157-164.

[98] Morris G.R., *A differential equ. for undamped forced nonlinear oscillations.* I. Proc. Cambridge. Phil. Soc., **54** (1955), 426-438.

[99] Moser J., *"Proof of a Generalized Fixed Point Theorem Due To G.D. Birkhoff"*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 597, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.

[100] Moser J. and Zehnder E., Notes on Dynamical Systems, Courant Institut NYU 1979/80.

[101] Nieto J.J., *Nonlinear second order periodic boundary value problems with Caratheodory functions,* Applicable Anal. **34** (1989), 111-128.

[102] Nieto J.J., *Nonlinear second order periodic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. **130** (1988), 22-25.

[103] Nirenberg L., *Topics in nonlinear functional analysis*, Lecture Notes, Courant Inst., NY,1974.

[104] Ortega J.M. and Rheinboldt W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables*, Academic Press, New York, (1970).

[105] Ortega R., *Stability of a periodic problem of Ambrosetti-Prodi type*, J. Differential and Integral Equations **3** (1990), 275-284.

[106] Poincaré H., *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps.* C. R. Acad Sci. Paris **97** (1883) 251-252.

[107] Poincaré H., *Sur un théorème de géométrie*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **33** (1912),375-407.

[108] Rabinowitz P.H., *Multiple critical points of perturbed symmetric functionals,* Trans. Amer. Math. Soc.,**272** (1982), 753-769.

[109] Rabinowitz P.H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations* , CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **65**, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1986.

[110] Rabinowitz P.H., *On subharmonic solutions of Hamiltonian systems,* Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 609-633.

[111] Rachunkova I., *Upper and lower solutions and topological degree*, Preprint 97-23, Dept. Math. Anal. Palacky Univ., Czech Republic, 1997.

[112] Rebelo C., *A note on the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem and periodic solutions of planar systems*, Nonlinear Anal. **29**, No 3 (1997), 291-311).

[113] Rebelo C. and Zanolin F., *Multiple periodic solutions for a second order equation with one-sided superlinear growth,* Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems **2,** No 1, (1996), 1-27.

[114] Rebelo C. and Zanolin F., *Twist conditions and periodic solutions of differential equations,* Proceedings of Dynamic Systems and Applications , Vol 2 (Atlanta, GA, 1995), 469-476,Dynamic, Atlanta, GA,1996.

[115] Rebelo C. and Zanolin F., *Multiplicity results for periodic solutions of second order ODEs with asymetric nonlinearities*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**, No 6, (1996), 2349-2389.

[116] Rouche N. and Mawhin J., *Ordinary Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

[117] Schauder J., *Der Fixpunktsatz* in Funktionalraümen Studia Math. **2** (1930), 171-180.

[118] Schmitt B.Y. and Mazzanti S., *Solutions périodiques symétriques de l'éq. de Duffing sans dissipation.* J. Diff. Eq. **42** (1981), 199-214.

[119] Stoppelli F. , *Su un'equazione differenziale della meccanica dei fili,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, **19** (1952), 109-114.

[120] Sylvester, Ph.D. Thesis, Courant Inst. Math. Sci., New York Univ., 1980.

[121] Willem M., *Perturbations of non degenerate periodic orbits of Hamiltonian sustems,* in "Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics" (P. Rabinowitz et al. (Eds.),pp. 261-266, 1987.