

Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Pour l'obtention du

Diplôme de Doctorat

Option : Analyse mathématique

Contribution à l'étude des contractions d'algèbres de Lie. Application à la théorie des représentations de groupes.

Présentée par

Mohammed Brahim ZAHAF

Soutenue le 13 janvier 2009 devant la commission d'examen :

Président : Prof. Mohammed BENALILI (Univ. de Tlemcen)
Rapporteur : Prof. Hacen DIB (Univ. de Tlemcen)
Examineurs : Prof. Dominique MANCHON (Univ. de Clermont-Ferrand)
Prof. Boucif ADESSELAM (Univ. de Mascara)
Prof. Salah MEHDI (Univ. de Metz)



ALL OF MY WILL IN THIS WORK AND MY SUCCESS
EVERYWHERE, ARE ANYTIME INDEBTED TO OUR
GOD.

To My Parents for their generosity,

*to my Brothers and Sisters at Bab el Assa,
Harnes (France) and Djelfa,*

to my nieces,

and to My Friends for their hospitality to sharing live

I dedicate this work.

ACKNOWLEDGEMENTS

FIRST AND FOREMOST, I wish to thank my adviser thesis and my teacher, Professor Hacem DIB to introduce me in this area of Lie group representations and special functions.

I reserve special recognition and gratitude for Professor Mohammed Benalili, first to teach me during the undergraduate years and second to accept to be the jury president for my thesis.

Special thanks to the jury members of this work ; Prof. Dominique Manchon, Prof. Boucif Abdesselam and Prof. Salah Mehdi all receive my sincere thanks to accept, to read this manuscript and to comment it with their precious remarks and observations.

I keep in mind special recognition to Profs. Paul Sorba, Luc Frappat and Patrick Aurenche for their warm hospitality and scientific helps during my visit⁽¹⁾ to the LAPTH⁽²⁾ d'Annecy-le-Vieux and I must thank my friend Prof. Dominique Manchon for his generosity during my several visits to *Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées*⁽³⁾ at Clermont-Ferrand.

There are many others who I must thank for many reasons ; among my friends Abdelkader Yanallah, Rachid Khelouat, Madani Ghelamallah, Senouci Bouregaa and Mohamed Belkhelfa with whom I share live in deep sense. I would like to express my thanks to Abdallah Boulouiz, Abdennasser Bourouba and Mohammed Hammouti for their encouragements. And surely in this context I don't forget Mohammed Boulouiz, Lahbib and my PARENTS. All my big family receive my respects without exception.

¹⁾Financial supported by algerian-french cooperation CMEP Programm : TASSILI 04 MDU 615.

²⁾Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique. UMR 5108 CNRS Annecy, Haute Savoie, France.

³⁾Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, CNRS-UMR 6620 Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand. 24 avenue des Landais 63177 Aubière Cedex, France

Table des matières

Introduction	1
1 Contractions d'algèbres de Lie	5
1.1 Algèbres de Lie	5
1.2 Contractions d'algèbres de Lie	12
1.2.1 Types simples de contractions	14
1.3 Dégénérescences	18
2 Contraction de groupes et de leurs représentations	27
2.1 Quelques notions élémentaires de la théorie des groupes	27
2.2 Contractions de groupes	34
2.3 Représentations de groupes de Lie	37
2.4 Contractions de représentations de groupes	47
3 Application des contractions de représentations à l'étude de la confluence des singularités des E.D.O	53
3.1 Confluence des singularités	53
3.1.1 Singularités régulières et irrégulières	53
3.1.2 Confluence	59
3.2 Confluence de l'équation de Mathieu et contraction de $M(2)$ vers H_3	61
3.2.1 L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique et le groupe de Heisenberg H_3	61
3.2.2 L'équation différentielle de Mathieu et le groupe des déplacements du plan $M(2)$	63
3.2.3 Contraction de $M(2)$ vers H_3 et confluence	67
3.3 Confluence de l'équation de Lamé et contraction de $SO_0(2,1)$ vers H_3	73

Introduction

E. Inönü et E. P. Wigner dans leur article [30], ont défini *la contraction* d'un groupe de Lie comme étant l'opération d'obtenir un nouveau groupe de Lie par transformation singulière, qui est une limite d'une famille de transformations linéaires non-singulières, sur les éléments infinitésimaux d'un ancien groupe. Plus tard, dans les années 1960 l'intérêt pour les contractions de groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie réapparaît dans les travaux de M. Levy-Nahas [37] et de E. J. Saletan [54]. Saletan a entamé une étude plus générale sur une classe de contractions à un seul paramètre ε pour lesquelles les éléments de la matrice de contraction correspondante sont des polynômes du premier degré en ε . Dans cette classe, les contractions introduites par E. Inönü et E. P. Wigner représentent un cas particulier très simple. Dans une autre direction les contractions d'Inönü-Wigner généralisées dites aussi contractions de Doebner-Melsheimer [17] représentent l'extension non linéaire en ε des contractions d'Inönü-Wigner normales. Des contractions de type plus général ont été envisagées par d'autres auteurs, en particulier, sous le nom de transitions [49] ou sous le nom de dégénérescences [5, 6, 7, 8, 46].

Au niveau des représentations de groupes de Lie c'est J. Mickelsson et J. Niederle qui ont donné, dans [45], l'une des premières définitions précises de la notion de contraction de représentations de groupes de Lie. En outre ils ont montré dans [45] que les représentations, dites de masse non nulle, du groupe de déplacements $\mathbb{R}^{n+1} \times SO(n+1)$ ainsi que les représentations, dites de masse à carré positif, du groupe de Poincaré généralisé $\mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n, 1)$ peuvent être obtenues par contraction de représentations de la *série principale* de $SO_0(n+1, 1)$. Dans un contexte d'étude plus générale, A. H. Dooley et J. W. Rice ont confirmé dans [23] que les représentations de la série principale d'un groupe de Lie connexe semi-simple non compact G se contractent vers les représentations génériques de son groupe de déplacements de Cartan. L'analogie de ce résultat dans le cas où G est compact a été également établi dans

d'application l'obtention des formules de type Mehler-Heine pour les fonctions spéciales. Par exemple les polynômes de Laguerre, qui expriment les coefficients de représentations du groupe d'Heisenberg, s'obtiennent comme limite des polynômes de Jacobi constituant les coefficients de représentation de $SU(2)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_k^{(p,m)} \left(\cos \frac{2x}{\sqrt{m}} \right) = L_k^p(x^2).$$

Et cette limite a été interprétée par F. Ricci dans [51] en terme de contraction des représentations unitaires et irréductibles du groupe $SU(2)$ vers celles du groupe de Heisenberg de dimension 3.

Une deuxième application des contractions est le transport des résultats sur les multiplicateurs de Fourier d'un groupe de Lie à un autre, notamment l'obtention des versions non-commutatives du théorème de De Leeuw, citons par exemple les articles [53, 52, 19, 21].

Une autre application est celle que nous proposons dans le cadre de ce travail et qui consiste à appliquer les contractions pour l'étude de la confluence des singularités des équations différentielles homogènes du second ordre. Le phénomène de la confluence des singularités pour une équation différentielle donnée est défini par le passage à la limite " $\varepsilon \rightarrow 0$ " de la quantité ε introduite dans les paramètres de l'équation différentielle. Ce passage à la limite s'accompagne par la fusion de deux singularités en une seule et l'obtention d'une nouvelle équation différentielle (la confluyente). Notre contribution dans ce travail a fait l'objet d'une publication [65]. Le plan de cette thèse est le suivant :

Dans le chapitre 1, nous présentons dans une première section quelques définitions de base sur les algèbres de Lie. Dans la seconde section nous donnons la définition des contractions d'algèbres de Lie puis nous citons quelques types simples de contractions notamment les contractions d'Inönü-Wigner, de Saletan et d'Inönü-Wigner généralisées. Dans la troisième section nous donnons la définition de la dégénérescence qui généralise la notion de contraction [5, 6, 7, 8, 46]. Ainsi nous terminons la section par deux exemples concernant la classification des orbites de la variétés des algèbres de Lie $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ de dimension n sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ pour $n = 2$ et $n = 3$. Pour ces deux cas, nous déterminons toutes les dégénérescences possibles.

Dans le chapitre 2, nous présentons quelques définitions sur la théorie des groupes de Lie et de leurs représentations. En suite nous donnons la définition des contractions de groupes et de leurs représentations inspirée de celles de

Chapitre 1

Contractions d'algèbres de Lie

1.1 Algèbres de Lie

Définition 1.1.1. Une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ (de dimension finie) est un espace vectoriel V (de dimension finie) sur un corps \mathbb{K} (de caractéristique différente de 2), muni d'un produit bilinéaire antisymétrique $[\cdot, \cdot]$, appelé *crochet de Lie*, tel que :

$$[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in V. \quad (\text{l'antisymétrie})$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in V. \quad (\text{identité de Jacobi})$$

Exemple 1.1.1. 1. Tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} muni du crochet $[x, y] = 0$, $x, y \in V$, est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} .

2. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{K} . L'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V munie du crochet $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, est une algèbre de Lie de dimension $\dim(V)^2$ sur \mathbb{K} . Par exemple si $V = \mathbb{C}^n$ (resp. $V = \mathbb{R}^n$), alors $\mathfrak{gl}(V)$ s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$) des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes (réels). Le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$) est alors défini par le produit matriciel : $[A, B] = A.B - B.A$.

Preuve. Ces relations ne sont rien d'autre que l'écriture en terme de $C_{i,j}^k$ des axiomes de la définition d'une algèbre de Lie. En effet,

1. pour k fixé et $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ le nombre de conditions (1.1.2) est égal à $\binom{n}{2}$ si $i \neq j$ et il est égal à $\binom{n}{1}$ si $i = j$. Alors pour k fixé le nombre de conditions (1.1.2) est égal à $\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$.

En revanche si k varie dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ alors le nombre de conditions (1.1.2) est égal à $n[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}] = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

2. Pour m fixé et $i, j, k = 1, 2, 3, \dots, n$ le nombre de conditions (1.1.3) est $\binom{n}{3}$. Si m varie dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ alors le nombre de conditions (1.1.3) est égal à $n\binom{n}{3}$. ■

L'ensemble des constantes $\{C_{i,j}^k\}$ satisfaisant (1.1.2), (1.1.3) peut être considéré comme une sous variété $W^n \subset \mathbb{K}^{n^3}$ de dimension

$$\dim W^n \leq n^3 - \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2}. \quad (1.1.4)$$

En effet, notons par E^n l'espace de tous les ensembles $\{C_{i,j}^k\}$ satisfaisant (1.1.2), comme $E^n \subset \mathbb{K}^{n^3}$ il est claire que

$$\begin{aligned} \dim E^n &= n^3 \text{ moins le nombre d'équations " } C_{[i,j]}^k = 0 \text{ "} \\ &= n^3 - \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $W^n \subset E^n$ alors

$$\dim W^n \leq \dim E^n = \frac{n^2(n-1)}{2}.$$

Remarque 1.1.1. On a $\dim W^2 = 2$, $\dim W^3 = 6$ et pour $n \geq 3$ l'inégalité (1.1.4) est stricte.

Définition 1.1.4. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . Le *centre* de \mathfrak{g} est $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

Exemple 1.1.3. 1. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie abélienne, alors $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

2. Le centre de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires, i.e., $Z(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}$.

3. Le centre de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ est trivial.

Il est clair que le noyau (resp. l'image) d'un homomorphisme $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ d'algèbres de Lie est un idéal (resp. une sous-algèbre de Lie) de \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{h}).

Définition 1.1.9. Une *représentation* de \mathfrak{g} dans un espace vectoriel complexe H est un homomorphisme d'algèbres de Lie $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(H)$. La dimension de cette représentation est la dimension de H sur \mathbb{K} . La représentation (T, H) est fidèle si T est injective. De plus la représentation (T, H) est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels de H qui sont invariants par \mathfrak{g} sont $\{0\}$ et H lui-même, i.e., (T, H) est irréductible si $T(\mathfrak{g})W \subseteq W$ alors $W = \{0\}$ ou $W = H$.

Exemple 1.1.7. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ agit naturellement sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (action d'une matrice réelle carrée d'ordre n sur un vecteur de \mathbb{R}^n).

□

Définition 1.1.10. L'homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ défini par $x \mapsto [x, \cdot]$ est appelé la *représentation adjointe* de \mathfrak{g} et est noté ad .

Définition 1.1.11. Soient $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ une application bilinéaire et U un sous-espace vectoriel de V .

1. Le *radical* de b est le sous-espace vectoriel $\text{rad}(b) = \{v \in V \mid b(v, v') = 0, \forall v' \in V\}$ de V .

2. On dit que b est *non-dégénérée* (resp. *dégénérée*) si le radical de b est trivial (resp. non trivial).

3. L'*orthogonal* de U dans V est le sous-espace vectoriel $U^\perp = \{v \in V \mid b(v, v') = 0, \forall v' \in U\}$ de V .

Définition 1.1.12. On appelle *forme de Killing* de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} l'application κ définie par

$$\begin{aligned} \kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)) \end{aligned}$$

Exemple 1.1.10. Soit n un entier naturel non-nul. L'algèbre de Heisenberg \mathfrak{h}_{2n+1} est l'algèbre de Lie réelle de dimension $2n + 1$ engendrée par $2n + 1$ éléments X_i, Y_i et $Z, i = 1, \dots, n$, soumis aux seuls crochets non-nuls $[X_i, Y_i] = Z$. Cette algèbre est nilpotente de rang 2 et son centre est engendré par Z .

□

Exemple 1.1.11. Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

□

Exemple 1.1.12. L'algèbre de Lie réelle de dimension 3 engendrée par trois éléments A, X et Y soumis aux seuls crochets non-nuls $[A, X] = X - Y$ et $[A, Y] = X + Y$ est résoluble mais pas nilpotente.

□

Définition 1.1.15. On appelle *radical* d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , noté $Rad(\mathfrak{g})$ l'idéal résoluble qui contient tout idéal résoluble de \mathfrak{g} (il existe toujours et il est unique).

Exemple 1.1.13. Le radical de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est trivial.

□

Définition 1.1.16. Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite *semisimple* si elle n'a aucun idéal résoluble $\neq \{0\}$ i.e., $Rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Si \mathfrak{g} n'est pas abélienne et n'a aucun idéal propre (autre que $\{0\}$ et \mathfrak{g}) alors \mathfrak{g} est dite *simple*.

Remarque 1.1.2. Toute algèbre de Lie simple est semisimple.

Exemple 1.1.14. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est simple et donc semisimple pour tout $n \geq 2$.

□

Cette définition peut être reformulée en terme des constantes de structure :

Définition 1.2.2. Soient $C_{i,j}^k$ les constantes de structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et $(U_\varepsilon)_i^j$ les coefficients de la matrice de l'opérateur U_ε dans la base fixée $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Si la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{i,j,k=1}^n (U_\varepsilon)_{i'}^i (U_\varepsilon)_{j'}^j (U_\varepsilon^{-1})_k^{k'} C_{i,j}^k := \tilde{C}_{i',j'}^{k'}$$

existe pour tout i', j' et k' alors les $\tilde{C}_{i',j'}^{k'}$ sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 . Dans ce cas l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 est appelée contraction de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Le paramètre ε est appelé *paramètre de contraction* et la fonction matricielle $U = U(\varepsilon)$ est appelée *matrice de contraction*.

Le procédé d'obtenir l'algèbre \mathfrak{g}_0 à partir de l'algèbre \mathfrak{g} est aussi appelée *contraction*.

Définition 1.2.3. On dit qu'une contraction de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} vers l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 est *triviale* si \mathfrak{g}_0 est abélienne, et *impropre* si \mathfrak{g}_0 est isomorphe à \mathfrak{g} .

Si on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (U_\varepsilon) := U_0$ et $U_0 \in GL(V)$ alors il est évident que la contraction est impropre. De plus, pour engendrer une contraction *propre*, la fonction matricielle doit satisfaire à une des deux conditions :

1. La limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (U_\varepsilon)$ n'existe pas, i.e. au moins un des éléments de la matrice U est singulier quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. La limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (U_\varepsilon) := U_0$ existe mais la matrice U_0 est singulière, i.e., $\det(U_0) = 0$.

Ces deux conditions ne sont pas suffisantes pour avoir une contraction propre.

Les contractions triviale et impropre existent pour n'importe quelle algèbre de Lie. La contraction triviale est facile à obtenir, e.g., par la matrice $U_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$.

La matrice identité $U_\varepsilon = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ peut être toujours utilisée comme matrice de contraction pour la contraction impropre.

1. Chaque sous algèbre \mathfrak{h} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} peut être utilisée pour obtenir une IW-contraction de \mathfrak{g} . Les sous algèbres triviales correspondent aux IW-contractions impropres ($\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$) ou triviales ($\mathfrak{h} = \{0\}$).

2. Différents choix de la base complémentaire de la base de \mathfrak{h} ou le remplacement de \mathfrak{h} par une sous algèbre équivalente de \mathfrak{g} donnent la même algèbre contractée à un isomorphisme près.

3. L'algèbre contractée \mathfrak{g}_0 a la structure de somme semi-directe $\mathfrak{h} \oplus_s \mathfrak{a}$, où \mathfrak{a} est un idéal abélien engendré par la base complémentaire choisie de \mathfrak{h} . La sous algèbre \mathfrak{h} est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{a}$.

4. La répétition de la IW-contraction suivant la même sous algèbre \mathfrak{h} donne aussi l'algèbre \mathfrak{g}_0 .

Exemple 1.2.1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est l'algèbre du groupe des rotations de dimension 3 engendrée par les 3 générateurs e_1 , e_2 et e_3 avec les relations de commutation $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$ et $[e_3, e_1] = e_2$.

Si on pose

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (1.2.6)$$

alors on trouve $[e_1, e_2]_0 = e_3$, $[e_3, e_1]_0 = e_2$ et $[e_2, e_3]_0 = 0$ les relations de commutation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(2)$ des déplacements euclidiens du plan.

□

Il est connu que les IW-contractions n'épuisent pas toutes les contractions possibles même dans le cas des algèbres de Lie de dimension 3.

Les IW-contractions de l'algèbre de Lie de dimension 3 des rotations $\mathfrak{so}(3)$ donnent seulement une contraction propre et non triviale vers l'algèbre $\mathfrak{m}(2)$. En même temps, il existe une contraction propre de $\mathfrak{so}(3)$ vers l'algèbre de Heisenberg \mathfrak{h}_3 et elle n'est pas obtenue par une IW-contraction.

Contractions selon Saletan

Saletan [54] a étudié la classe de toutes les contractions linéaires par rapport au paramètre de contraction, i.e. les contractions engendrées par les

Remarque 1.2.1. Après itérations des S-contractions par la même matrice de contraction on obtient une chaîne finie d'algèbres de Lie non isomorphes. La contraction répétée de la première algèbre jusqu'à la dernière de la chaîne est une IW-contraction [54]. Toute IW-contraction est évidemment une S-contraction et il existe des S-contractions qui ne sont pas équivalentes aux IW-contractions, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.2.2. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \oplus u(1)$ où $\mathfrak{so}(3)$ est engendrée par les 3 générateurs e_1, e_2, e_3 et $u(1)$ est l'algèbre de dimension 1 engendrée par le générateur e_0 avec les relations de commutation

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_0] &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Soit la matrice de contraction $U(\varepsilon) = \varepsilon I + (1 - \varepsilon)u$ où u est telle que

$$ue_1 = ue_2 = 0, \quad ue_3 = f := e_0 + e_3, \quad uf = 0.$$

Remarquons que $u^2\xi = 0 \forall \xi \in \mathfrak{g}$, donc on peut prendre $V_R = \{0\}$ et $V_N = \mathfrak{g}$ et on a $u^2[x, y]_N = 0$. Maintenant $u\mathfrak{g}$ est un espace de dimension 1 donc $[ux, uy]_N = 0$. De plus, $u\mathfrak{g}$ est engendré par f , et $[f, \xi]$ s'écrit comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. Puisque $ue_1 = ue_2 = 0$ alors $u([ux, y]_N + [x, uy]_N) = 0$ et par suite la condition (1.2.8) est bien vérifiée. Puisque $V_R = \{0\}$ alors l'équation (1.2.7) devient

$$[x, y]_0 = [ux, y]_N + [x, uy]_N - [ux, uy]_N, \quad (1.2.12)$$

donc en utilisant les relations en (1.2.11) on trouve le crochet de Lie

$$\begin{aligned} [e_1, e_2]_0 &= -f, [e_2, e_3]_0 = e_1, [e_3, e_1]_0 = e_2, \\ [e_i, f]_0 &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

qui définit une algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 . De plus, E. J. Saletan a montré dans [54] que cette algèbre de Lie ne peut jamais être obtenue par une IW-contraction de $\mathfrak{so}(3) \oplus u(1)$.

avec l'algèbre de Lie correspondante $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. L'ensemble \mathcal{L}_n est un sous-ensemble de la variété $V^* \otimes V^* \otimes V$ des applications linéaires de $V \wedge V$ dans V . De plus, il y a une correspondance bijective entre \mathcal{L}_n et W_n définie pour tout $\mu \in \mathcal{L}_n$ et tout tenseur de constantes de structure $(C_{i,j}^k) \in W_n$ par la formule $\mu(e_i, e_j) = \sum_k C_{i,j}^k e_k$. \mathcal{L}_n est appelée la variété des algèbres de Lie de dimension n sur le corps \mathbb{K} , ou plus précisément la variété de tout les crochets de Lie possibles sur V . Le groupe $GL(V)$ agit sur \mathcal{L}_n par l'action

$$(U.\mu)(x, y) = U(\mu(U^{-1}x, U^{-1}y)) \quad \forall U \in GL(V), \forall \mu \in \mathcal{L}_n, \forall x, y \in V \quad (1.3.14)$$

(C'est l'action à gauche sous $GL(V)$; l'action à droite, qui est très utilisée en pratique, est définie par $(\mu.U)(x, y) = U^{-1}(\mu(Ux, Uy))$, cette différence n'est pas d'importance fondamentale.)

Notons par $\mathcal{O}(\mu)$ l'orbite de $\mu \in \mathcal{L}_n$ sous l'action de $GL(V)$ et par $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$ son adhérence au sens de la topologie de Zariski² sur \mathcal{L}_n .

Définition 1.3.1. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ est dite *rigide* si son orbite $\mathcal{O}(\mu)$ est ouverte dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.3.1. (Due à Carles et Diakité [13])

Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Si $r(n)$ est le nombre de composantes irréductibles³ de $\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$ et $s(n)$ le nombre d'orbites ouvertes, on a

$$(r(1), r(2), r(3), r(4), r(5), r(6), r(7)) = (1, 1, 2, 4, 7, 17, 49)$$

$$(s(1), s(2), s(3), s(4), s(5), s(6), s(7)) = (1, 1, 1, 2, 3, 6, 14).$$

On a l'encadrement suivant [34] $e^{n/4} < s(n) < r(n) < 2^{n^4/6}$ pour n assez grand.

²La topologie de Zariski sur un espace affine, par exemple l'espace \mathbb{K}^n , est définie en spécifiant ses fermés $V(S) = \{p \in \mathbb{K}^n \mid f(p) = 0, \forall f \in S\}$ plutôt que ses ouverts, où S parcourt toutes les familles finies de polynômes à n variables sur \mathbb{K} .

³Toute variété algébrique X peut s'écrire d'une manière unique comme réunion de sous-variétés irréductibles X_i avec $X_i \not\subseteq X_j$ pour $i \neq j$. Les sous-variétés X_i sont appelées composantes irréductibles de X .

On entend par l'irréductibilité d'une variété X qu'on ne peut pas avoir autre décomposition $X = X_1 \cup X_2$ que le cas trivial, i.e. $X = X_1$ ou bien $X = X_2$.

plan affine \mathbb{C}^2 . Relativement à l'action de $GL(V)$, ce plan se divise en deux orbites : Θ_1 et Θ_2 :

L'orbite Θ_1 est représentée par l'algèbre abélienne \mathbb{C}^2 .

L'orbite Θ_2 est représentée par l'algèbre de Lie $\text{aff}(1)$ du groupe des transformations affines de l'espace à une dimension.

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{C}) = \overline{\mathcal{O}(\text{aff}(1))} = \mathcal{O}(\mathbb{C}^2) \cup \mathcal{O}(\text{aff}(1)).$$

La seule dégénérescence est $\text{aff}(1) \rightarrow \mathbb{C}^2$. L'orbite de $\text{aff}(1)$ est ouverte. Il n'y a pas de dégénérescence vers $\text{aff}(1)$ dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{C})$.

□

Exemple 1.3.3. Pour $n = 3$, la variété $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$ est l'union de deux composantes irréductibles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

La composante \mathcal{C}_1 est formée par les algèbres de Lie à trace nulle, i.e., la forme linéaire $\text{tr ad}(x)$ est nulle, et la composante \mathcal{C}_2 est formée par les algèbres de Lie résolubles. En effet, [34]

considérons l'espace des vecteurs $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, avec $a_m = \sum_{k=1}^3 C_{m,k}^k$, $m = 1, 2, 3$ et l'espace des tenseurs symétriques

$$s^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon^{ijk} C_{i,j}^l + \varepsilon^{ijl} C_{i,j}^k)$$

où $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ est le tenseur standard antisymétrique de rang 3, avec $\varepsilon_{123} = 1$.

Les constantes $C_{i,j}^k$ peuvent être reconstituées à partir de a_m et s^{kl} par

$$C_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left(\delta_j^k a_i - \delta_i^k a_j + \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ijl} s^{kl} \right)$$

La condition (1.1.3) prend la forme simple

$$\sum_{m=1}^3 s^{km} a_m = 0 \tag{1.3.15}$$

où $c = \frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$. La surface $J = \frac{1}{2}$ se divise en deux $GL(V)$ -orbites : en l'occurrence l'orbite de $\mathfrak{r}_{3,1}$ et l'orbite de l'algèbre de Lie \mathfrak{r}_3 donnée par les relations $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_1 + e_3$, ce qui conduit à

$$\mathcal{C}_2 = \cup_{\alpha} \mathcal{O}(\mathfrak{r}_{3,\alpha}) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{r}_3) \cup \mathcal{O}(\text{aff}(1) \oplus \mathbb{C}) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{h}_3) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3).$$

La classification de toutes les orbites dans $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$ est donnée par le tableau suivant (cf. [2, 5])

\mathfrak{g}	Crochets de Lie	Dimension de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$
\mathbb{C}^3	-	0
\mathfrak{h}_3	$[e_1, e_2] = e_3$	3
$\text{aff}(1) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_2$	5
\mathfrak{r}_3	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3$	5
$\mathfrak{r}_{3,\alpha}$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \alpha e_3, 0 < \alpha < 1$	5
$\mathfrak{r}_{3,-1} \cong \mathfrak{m}(2)$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = -e_3$	5
$\mathfrak{r}_{3,1}$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_3$	3
$\mathfrak{sl}(2)$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_1, [e_2, e_3] = 2e_2$	6

□

Pour déterminer l'adhérence des orbites dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ on utilise le théorème suivant [46]

Théorème 1.3.1. *Si $\mu \rightarrow \mu_0$ est une dégénérescence propre, alors on a*

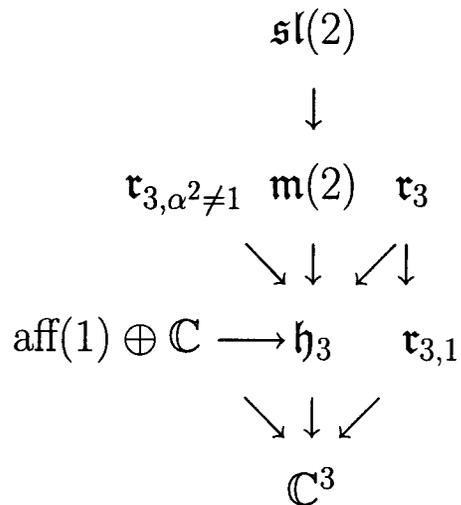
- 1) $\dim \mathcal{O}(\mu_0) < \dim \mathcal{O}(\mu)$
 $\dim \text{Der} \mu_0 > \dim \text{Der} \mu$;
- 2) $n_A(\mu_0) \geq n_A(\mu)$;
- 3) $\dim Z(\mu_0) \geq \dim Z(\mu)$; de plus $\dim \mu_{0(l)} \geq \dim \mu_{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$;
- 4) $\dim \mu_0^{(l)} \leq \dim \mu^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$;
- 5) $\dim \mu_0^l \leq \dim \mu^l$, $l \in \mathbb{N}$;
- 6) $\dim \text{Rad}(\mu_0) \geq \dim \text{Rad}(\mu)$;
- 7) $\dim N(\mu_0) \geq \dim N(\mu)$;
- 8) $n_{A_i}(\mu_0) \geq n_{A_i}(\mu)$;

est indépendante de u et v . Alors \mathfrak{C}_{pq} définit l'invariant caractéristique de l'algèbre μ , i.e., \mathfrak{C}_{pq} est constante sur l'orbite $\mathcal{O}(\mu)$.

L'adhérence au sens de Zariski des $GL(V)$ -orbites dans $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$ est donnée par le tableau suivant

\mathfrak{g}	$\overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g})}$
\mathbb{C}^3	\mathbb{C}^3
\mathfrak{h}_3	$\mathcal{O}(\mathfrak{h}_3) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$
$\text{aff}(1) \oplus \mathbb{C}$	$\mathcal{O}(\text{aff}(1) \oplus \mathbb{C}) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{h}_3) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$
\mathfrak{r}_3	$\mathcal{O}(\mathfrak{r}_3) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{r}_{3,1}) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{h}_3) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$
$\mathfrak{r}_{3,\alpha}$	$\mathcal{O}(\mathfrak{r}_{3,\alpha}) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{h}_3) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$
$\mathfrak{r}_{3,-1} \cong \mathfrak{m}(2)$	$\mathcal{O}(\mathfrak{m}(2)) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{h}(3)) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$
$\mathfrak{r}_{3,1}$	$\mathcal{O}(\mathfrak{r}_{3,1}) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$
$\mathfrak{sl}(2)$	$\mathcal{O}(\mathfrak{sl}(2)) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{m}(2)) \cup \mathcal{O}(\mathfrak{h}_3) \cup \mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$

Le diagramme ci-dessous montre toutes les dégénérescences essentielles (les autres peuvent être obtenues par transitivité de ces dégénérescences), voir [6]



Chapitre 2

Contraction de groupes et de leurs représentations

Dans ce chapitre nous présentons quelques notions élémentaires de la théorie des groupes et de leurs représentations ; et nous donnons aussi la définition de contraction de groupes et de leurs représentations en nous inspirant des travaux de Mickelsson-Niederle [45] et Cishahayo-De Bièvre [14].

2.1 Quelques notions élémentaires de la théorie des groupes

Définition 2.1.1. Un groupe G muni d'une topologie τ est appelé *groupe topologique* si l'application

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2^{-1} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

est continue.

Définition 2.1.2. Si un groupe G est une variété différentiable tel que l'application (2.1.1) est C^∞ alors G est appelé *groupe de Lie*.

suivante :

$$g = \begin{pmatrix} k & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k \in SO(n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$.

□

Définition 2.1.3. La translation à gauche (resp. à droite) par un élément $g \in G$ est un difféomorphisme $l_g : G \rightarrow G$ (resp. $r_g : G \rightarrow G$) donné par $l_g x = gx$ (resp. $r_g x = xg^{-1}$).

Un champs de vecteur X sur G est dite *invariant à gauche* si pour tout $g \in G$ on a $dl_g \circ X = X \circ l_g$. (dl_g est la différentielle de l_g en un point de G).

Proposition 2.1.1. [62] Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} l'ensemble de tous les champs de vecteurs invariant à gauche sur G .

1. \mathfrak{g} est un espace vectoriel, et l'application

$$\begin{aligned} \beta &: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G \\ X &\mapsto \beta(X) = X(e) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

est un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $T_e G$ l'espace tangent de G en l'élément neutre e . Par conséquence, $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G$.

2. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariant à gauche est un champs de vecteurs invariant à gauche.

3. \mathfrak{g} est une algèbre de Lie muni du crochet de Lie sur les champs de vecteurs.

Définition 2.1.4. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'algèbre de Lie \mathfrak{g} des champs de vecteurs invariants à gauche sur G .

On peut aussi définir l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie par l'espace tangent en l'élément neutre $T_e G$ de G muni de la structure d'algèbre de Lie induite par l'isomorphisme (2.1.2).

Définition 2.1.6. Soient G et H deux groupes de Lie.

1. Un *homomorphisme de groupes de Lie* est une application $\phi : G \rightarrow H$ de classe C^∞ qui est un homomorphisme de groupes abstraits.
2. Un *isomorphisme de groupes de Lie* est un homomorphisme de groupes de Lie $\phi : G \rightarrow H$ bijectif.
3. Un *automorphisme* de G est un isomorphisme de G dans lui même.

Définition 2.1.7. Un *groupe de transformations* est un triplet (G, \mathcal{X}, \cdot) , où G est un groupe, \mathcal{X} est un espace et " \cdot " est une action de G sur \mathcal{X} , i.e. une application $G \times \mathcal{X} \ni (g, x) \mapsto g.x \in \mathcal{X}$ satisfaisant :

1. A l'élément neutre e du groupe G correspond la transformation identique $e.x = x$.
2. Pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$.

Exemple 2.1.2. 1. Soient l et r les translations à gauche et à droite par un élément de G , on peut vérifier que (G, G, l) , (G, G, r) sont des groupes de transformations.

2. Soit l'automorphisme intérieur α_g qui est une transformation $\alpha_g : G \rightarrow G$ définie par $\alpha_g(x) = gxg^{-1}$ (l'action adjointe), alors (G, G, α) est aussi un groupe de transformations.

□

Soit (G, \mathcal{X}, \cdot) un groupe de transformations et $x \in \mathcal{X}$, l'ensemble G_x de tout les éléments $g \in G$ tel que $g.x = x$ est appelé (*sous*) *groupe stabilisateur* de x . L'ensemble $O_x := \{g.x, g \in G\}$ est appelé *orbite* de x sous l'action de G . Fixons un ensemble $A \subset \mathcal{X}$. L'ensemble $O_A := \cup_{x \in A} O_x$ est appelé orbite de A sous l'action de G .

Définition 2.1.8. Si pour tout $x, y \in \mathcal{X}$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$, alors on dit que G est un *groupe transitif de transformations* de \mathcal{X} .

Autrement dit, si l'orbite de chaque point de \mathcal{X} coïncide avec \mathcal{X} . Dans ce cas \mathcal{X} est appelé *espace homogène*.

□

Nous avons vu dans l'exemple 2.1.2 qu'un groupe de Lie agit sur lui-même par l'action définie par l'automorphisme intérieur $\alpha_g : G \rightarrow G$ donné par $\alpha_g(x) = gxg^{-1}$ (l'action adjointe). L'élément neutre est un point fixe par cette action.

Définition 2.1.9 (Représentation adjointe). La différentielle de α_g , notée $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, définit un automorphisme d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . L'application

$$\begin{aligned} \text{Ad} &: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}(g) = \text{Ad}_g \end{aligned}$$

est appelée *la représentation adjointe de G* .

Le noyau de la représentation adjointe, $\text{Ker}(\text{Ad})$, contient le centre Z_G de G et coïncide avec Z_G si G est connexe.

La différentielle de la représentation adjointe $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ est la représentation adjointe $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , donnée par $X \mapsto [X, \cdot]$.

Remarque 2.1.2. Si $G \subset GL(V)$ est un groupe linéaire agissant sur un espace vectoriel V , alors la représentation adjointe peut s'écrire :

$$\text{Ad}_g Y = gYg^{-1}, \quad \text{ad}_X Y = [X, Y] = XY - YX, \quad g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}$$

Définition 2.1.10 (Représentation coadjointe). Soit \mathfrak{g}^* l'espace vectoriel dual de \mathfrak{g} . La représentation contragrédiante $\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ de la représentation $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ est appelée la représentation coadjointe de G . i.e.,

$$\langle \text{Ad}^*(g)F, Z \rangle = \langle F, \text{Ad}(g^{-1})Z \rangle, \quad \forall F \in \mathfrak{g}^*, g \in G, Z \in \mathfrak{g}.$$

Exemple 2.1.4. Soit l'algèbre de Lie des déplacements euclidiens du plan $\mathfrak{m}(2)$ engendrée par les trois générateurs P, Q, E tels que $[P, Q] = E, [P, E] =$

Remarque 2.2.1. La contraction d'algèbres de Lie associée à la contraction du groupe de Lie est :

$$U_\varepsilon = (df_\varepsilon)_{e_G} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_0$$

U_ε est une application linéaire et inversible pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon[U_\varepsilon^{-1}x, U_\varepsilon^{-1}y] = [x, y]_0$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}_0$.

Exemple 2.2.1. Le groupe de Heisenberg $G^0 = H_3$ est une contraction du groupe des déplacements euclidiens du plan $G = M(2)$.

En effet,

Considérons le groupe $\tilde{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ muni de la loi

$$(\theta, v).(\theta', v') = (\theta + \theta', v + k(\theta)v') \quad (2.2.3)$$

où

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ce groupe est le revêtement simplement connexe du groupe $M(2) = SO(2) \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ muni de la loi ($\dot{\theta}$ désigne la classe de θ) :

$$(\dot{\theta}, v).(\dot{\theta}', v') = (\dot{\theta} + \dot{\theta}', v + k(\theta)v')$$

où $k(\dot{\theta}) = k(\theta)$.

On peut écrire le produit (2.2.3) sous la forme

$$(\theta, v_1, v_2).(\theta', v'_1, v'_2) = (\theta + \theta', v_1 + v'_1 \cos(\theta) - v'_2 \sin(\theta), v_2 + v'_1 \sin(\theta) + v'_2 \cos(\theta))$$

Soit $V = V^2 = \tilde{G}$ et $f_\varepsilon((\theta, v)) = f_\varepsilon((\theta, v_1, v_2)) = (\frac{1}{\varepsilon} \theta, \frac{1}{\varepsilon} v_1, \frac{1}{\varepsilon^2} v_2)$

Les conditions i., ii. et iii. de la définition sont évidemment vérifiées.

or

$$(k^{(2)})^{-1}M_{j,n+1}k^{(2)} = \sum_{i=1}^n k_{ji}M_{i,n+1}$$

et par suite

$$(k^{(2)})^{-1}p(\varepsilon t^{(1)}) \cdot k^{(2)} = p(\varepsilon(k^{(2)})^\top t^{(1)}).$$

De plus, l'approximation à l'ordre 1 en ε donne

$$p(\varepsilon(k^{(2)})^\top t^{(1)}) \cdot p(\varepsilon t^{(2)}) \simeq p(\varepsilon(k^{(2)})^\top t^{(1)} + \varepsilon t^{(2)})$$

on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(k^{(1)} \cdot r(t^{(1)})) \cdot f_\varepsilon^{-1}(k^{(2)} \cdot r(t^{(2)}))) = k^{(1)}k^{(2)} \cdot r((k^{(2)})^\top t^{(1)} + t^{(2)})$$

qui est égal à $k^{(1)} \cdot r(t^{(1)}) \cdot k^{(2)} \cdot r(t^{(2)})$. Ce qui confirme la condition iv. et donc $M(n)$ est une contraction de $SO_0(n, 1)$.

□

2.3 Représentations de groupes de Lie

Pour plus de détails voir [60, 61]

Définition 2.3.1. Une *représentation* d'un groupe de Lie G dans un espace de Hilbert \mathcal{H} est un homomorphisme de groupes fortement continu ² $T : G \rightarrow GL(\mathcal{H})$ et tel que $T(e) = Id_{\mathcal{H}}$, où $GL(\mathcal{H})$ désigne le groupe linéaire de \mathcal{H} , et e est l'élément neutre de G .

La propriété d'homomorphisme s'exprime par

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2). \quad (2.3.4)$$

De cette relation il vient : $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$ et on a bien $T(e) = Id_{\mathcal{H}}$.

L'espace \mathcal{H} s'appelle espace de la représentation T . On appelle dimension de la représentation la dimension de l'espace \mathcal{H} .

²i.e. pour tout $v \in \mathcal{H}$, $g \mapsto T(g)v$ est continue sur G à valeurs dans \mathcal{H} .

Cela signifie que $T(g)e_j = \sum_i t_{ij}(g)e_i$. On peut vérifier sans peine que l'équation (2.3.4) peut s'écrire

$$t_{ij}(g_1g_2) = \sum_k t_{ik}(g_1)t_{kj}(g_2).$$

Définition 2.3.3. Deux représentations T_1 et T_2 du même groupe G dans les espaces \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 respectivement sont dites *équivalentes* s'il existe un opérateur linéaire $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, possédant un inverse continu A^{-1} , qui les entrelace i.e. $AT_1 = T_2A$.

Ceci définit bien une relation d'équivalence.

Proposition 2.3.1. Soit G un groupe de Lie, a un élément de l'algèbre de Lie de G et T une représentation de G dans \mathcal{H} de dimension finie. Soit $A = \frac{d}{dt}T(\exp ta)|_{t=0}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $T(\exp ta) = \exp tA$.

Preuve. Nous avons d'une part

$$\frac{d}{dt}T(\exp ta)|_{t=s} = \frac{d}{dh}(T(\exp ha)T(\exp sa))|_{h=0} = AT(\exp sa)$$

et d'autre part

$$\frac{d}{dt}(\exp tA)|_{t=s} = A \exp sA.$$

Ainsi $T(\exp ta)$ et $\exp tA$ sont solutions de l'équation $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$, de plus $T(\exp 0) = Id_{\mathcal{H}} = \exp 0_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, ce qui donne l'égalité par unicité des solutions. ■

Définition 2.3.4. Une représentation T dans un espace de Hilbert \mathcal{H} est dite *unitaire* si T préserve le produit scalaire, i.e. :

$$\forall g \in G, \forall u, v \in \mathcal{H}, \langle T(g)u, T(g)v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Dans ce cas $T^*(g)T(g) = Id_{\mathcal{H}}$ et par conséquent $T^*(g) = T^{-1}(g) = T(g^{-1})$. On a aussi $(t_{ij}(g))^{-1} = \overline{(t_{ji}(g))}$. D'où, il vient facilement

$$\sum_j t_{ij}(g)\overline{t_{kj}(g)} = \sum_j t_{ji}(g)\overline{t_{jk}(g)} = \delta_{ik}$$

□

Définition 2.3.5. Le *caractère* d'une représentation T de dimension finie d'un groupe de Lie G est défini par

$$\chi_T(g) = \text{Tr}(T(g)).$$

Où Tr désigne la trace d'opérateur.

Remarque 2.3.1. 1. Le caractère d'une représentation T de dimension finie est une fonction sur G , identique sur les classes d'éléments conjugués.

$$\chi_T(g_0^{-1} \cdot g \cdot g_0) = \chi_T(g)$$

2. Le caractère de la somme de deux représentations de dimension finie est égal à la somme des caractères, et le caractère du produit tensoriel de deux représentations est égal au produit de leurs caractères.

$$\chi_{T_1+T_2}(g) = \chi_{T_1}(g) + \chi_{T_2}(g), \quad \chi_{T_1 \otimes T_2}(g) = \chi_{T_1}(g) \cdot \chi_{T_2}(g)$$

3. Le caractère ne dépend que de la classe d'équivalence de représentations.

En effet,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \quad \text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B).$$

Remarque 2.3.2. Pour une représentation de dimension infinie le caractère n'est pas une fonction, car $\chi_T(e) = \dim T$. Toutefois, il est souvent possible de définir le caractère d'une représentation de dimension infinie comme une distribution sur le groupe G . Pour les groupes de Lie semi-simples, Harish-Chandra a établi dans [27] que si T est une représentation unitaire continue de G , alors le caractère de T est défini sur $C_0^\infty(G)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, et a la forme suivante

$$\langle \chi, f \rangle = \int_G \chi_T(g) f(g) dg,$$

où χ_T est une fonction mesurable et localement intégrable sur G .

Considérons les trois sous-groupes à un paramètre suivants du groupe $M(2)$:

$$W_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$L_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T^\rho(W_i(t)) \quad i = 1, 2, 3$$

alors

$$\begin{aligned} (L_1 \tilde{f})(\psi) &= \rho \cos \psi \tilde{f}(\psi) \\ (L_2 \tilde{f})(\psi) &= \rho \sin \psi \tilde{f}(\psi) \\ (L_3 \tilde{f})(\psi) &= -\frac{d}{d\psi} \tilde{f}(\psi). \end{aligned}$$

Définissons pour le moment les opérateurs L_+ et L_- par :

$$L_+ = L_1 + iL_2, \quad L_- = L_1 - iL_2.$$

Soit $\rho \neq 0$, et H un sous-espace de $L^2(S^1)$ invariant par T^ρ i.e.

$$T^\rho(g).H \subset H \quad \forall g \in M(2).$$

En particulier pour $g = W_3(t)$ on a :

$$T^\rho(W_3(t)).H \subset H \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$T^\rho(W_3(\cdot))$ est une représentation de $SO(2)$ dans H . $SO(2)$ est commutatif et donc les représentations irréductibles sont de dimension 1 (ceci découle du lemme de Schur que nous verrons plus loin). Chaque sous espace irréductible est de la forme $\mathbb{C}.e_n$ avec $e_n = e^{in\psi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\left. \begin{aligned} H = \bigoplus_n \mathbb{C}.e_n &\Rightarrow \exists n_0 \text{ tel que } e_{n_0} \in H \\ L_+ e_{n_0}(\psi) &= \rho e^{i(n_0+1)\psi} \in H \text{ i.e. } e_{n_0+1} \in H \\ L_- e_{n_0}(\psi) &= \rho e^{i(n_0-1)\psi} \in H \text{ i.e. } e_{n_0-1} \in H \end{aligned} \right\} \Rightarrow e_n \in H, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Lemme 2.3.1. (Lemme de Schur).[60] Soient T_1 et T_2 deux représentations d'un groupe G , irréductibles et de dimension finie, dans les espaces \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 respectivement. Soit A un opérateur de \mathcal{L}_1 dans \mathcal{L}_2 entreliant T_1 et T_2 (i.e. $AT_1 = T_2A$). Alors : ou bien A est l'opérateur nul, ou bien A est inversible auquel cas T_1 et T_2 sont donc équivalentes et de plus A est unique à constante multiplicative près.

Preuve. Notons $M_1 = \ker(A) \subset \mathcal{L}_1$ et $M_2 = \text{Im}(A) \subset \mathcal{L}_2$. Puisque A entrelace T_1 et T_2 , ces deux sous-espaces sont invariants (par T_1 et T_2 respectivement) :

$$\forall x \in M_1, \forall g \in G, AT_1(g)x = T_2(g)Ax = 0 \quad \text{donc} \quad T_1(g)x \in M_1$$

$$\forall y = Ax \in M_2, \forall g \in G, T_2(g)y = T_2(g)Ax = AT_1(g)x \quad \text{donc} \quad T_2(g)y \in M_2$$

Or T_1 et T_2 sont irréductibles, donc M_1 et M_2 sont soit nuls, soit coincident avec l'espace entier. Distinguons 3 cas :

- a. Si $M_2 = 0$, $\text{Im}(A) = 0$ donc $A = 0$.
- b. Si $M_1 = \mathcal{L}_1$, $\ker(A) = \mathcal{L}_1$ donc $A = 0$.
- c. Si $M_1 = 0$ et $M_2 = \mathcal{L}_2$, alors A est une application linéaire injective et surjective, entre deux espaces vectoriels de dimension finie : A est donc inversible. Montrons l'unicité de A dans ce dernier cas : Supposons l'existence d'un autre opérateur B entreliant T_1 et T_2 . Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $B - \lambda A$ entrelace également T_1 et T_2 . Choisissons λ dans le spectre de BA^{-1} : on sait alors que $\det(BA^{-1} - \lambda I) = 0$, ce qui signifie que $B - \lambda A$ est non inversible : on est donc dans le cas $B - \lambda A = 0$, d'où $B = \lambda A$.

■

Conséquences du lemme de Schur

1. Si la représentation $T(g)$ est irréductible et si l'on a $AT(g) = T(g)A$ alors $A = \lambda Id_{\mathcal{H}}$.

2. Les représentations de dimension finie d'un groupe commutatif sont de dimension un. En effet, si G est un groupe commutatif, pour tout $g, h \in G$, on a $gh = hg$ et $T(g)T(h) = T(h)T(g)$.

Pour un h fixé, l'opérateur $T(h)$ commute avec tous les opérateurs $T(g)$ et en vertu de l'irréductibilité de $T(g)$, on a $T(h) = \lambda Id_{\mathcal{H}}$, mais une représentation de cette forme ne peut être irréductible que si elle est de dimension un.

3. le lemme de Schur permet aussi d'énoncer

2.4 Contractions de représentations de groupes

(Selon Mickelsson-Niederle [45] et Cishahayo-De Bièvre [14].)

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert d'une représentation unitaire T du groupe G^0 . Soit J un sous-ensemble de $]0, 1]$ ayant un point d'accumulation en 0 et soit $(\mathcal{H}_\varepsilon, T_\varepsilon)$, $\varepsilon \in J$, une famille de représentations unitaires du groupe G . Soit $\{\mathcal{D}_\varepsilon, \varepsilon \in J\}$, une famille de sous-ensembles denses dans \mathcal{H} et $(f_\varepsilon), \varepsilon \in J$, la famille d'applications donnée dans la définition 2.2.1. On a alors la définition suivante :

Définition 2.4.1. La représentation (\mathcal{H}, T, G^0) est une *contraction* de la famille $(\mathcal{H}_\varepsilon, T_\varepsilon, G)$ s'il existe un sous-ensemble \mathcal{D} dense dans \mathcal{H} et une famille $\{\mathcal{I}_\varepsilon, \varepsilon \in J\}$ d'applications linéaires injectives

$$\mathcal{I}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{D}_\varepsilon \subset \mathcal{H}, \varepsilon \in J$$

tels que $\forall \phi \in \mathcal{D}$ et $\forall g \in G^0$

- i. $\forall \varepsilon \in J$ suffisamment petit, $\phi \in \mathcal{D}_\varepsilon$ et $T_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(g))\mathcal{I}_\varepsilon^{-1}\phi \in \mathcal{I}_\varepsilon^{-1}(\mathcal{D}_\varepsilon)$;
- ii. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{I}_\varepsilon T_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(g))\mathcal{I}_\varepsilon^{-1}\phi - T(g)\phi\|_{\mathcal{H}} = 0$.

Exemple 2.4.1. La représentation (de masse positive) du groupe $G^0 = M(n)$ est une contraction de la représentation de la série principale continue du groupe $G = SO_0(n, 1)$.

En effet,

Pour décrire la série principale de $G = SO_0(n, 1)$, on considère la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ de G où K est le groupe des matrices du type

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0^\top & 1 \end{pmatrix}$$

où $k \in SO(n)$, A le groupe abélien des matrices

$$\begin{pmatrix} \cosh t & 0^\top & \sinh t \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \sinh t & 0^\top & \cosh t \end{pmatrix}$$

irréductible si $s = \frac{n-1}{2} + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}^*$ [36] et elle agit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S^{n-1})$ des fonctions de carré sommable sur S^{n-1} . Le produit scalaire est donné par

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{S^{n-1}} \phi(x) \overline{\psi(x)} d\mu(x).$$

L'action de $T^{(l,s)}$ est donnée par

$$(T^{(l,s)}(g)\phi)(x) = e^{st(g,x)} D^l(m(k_{g,x}^{-1} g k_x)) \phi(g.x),$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in S^{n-1}$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$,

$k_x \in SO(n)$ tel que $k_x.(1, 0, \dots, 0) = x$,

$t(g, x) = t(g k_x)$; $g k_x = ka(t)n$

et $m(k_{g,x}^{-1} g k_x)$ signifie le premier facteur dans la décomposition $k_{g,x}^{-1} g k_x = man$, $m \in M$, $a \in A$ et $n \in N$.

Notons par $T^{(l,\tau)}$ la représentation de $G^0 = M(n)$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S^{n-1})$, caractérisée par la représentation D^l du "petit groupe" $SO(n-1)$ et par "la masse carrée" $= \tau^2$, définie par

$$T^{(l,\tau)}(g)\phi(x) = e^{i\tau x.t} D^l(m(k_{k_x}^{-1}.k.k_x))\phi(k.x)$$

pour tout $g = k.p(t) \in G^0$ et $\phi \in \mathcal{H}$.

Nous avons déjà vu dans l'exemple 2.2.2 que le groupe G^0 est une contraction du groupe G . Prenons maintenant \mathcal{I}_ε égal à l'application identité pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, f_ε est comme celle de l'exemple 2.2.2 et posons $s = \frac{n-1}{2} + i\frac{\tau}{\varepsilon}$. Considérons la limite

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_\varepsilon T^{(l,s)}(f_\varepsilon^{-1}(g)) \mathcal{I}_\varepsilon^{-1} \phi(x) & (2.4.9) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left[\left(\frac{n-1}{2} + i\frac{\tau}{\varepsilon} \right) .t(f_\varepsilon^{-1}(g), x) \right] D^l(m(k_{f_\varepsilon^{-1}(g).x}^{-1} .f_\varepsilon^{-1}(g).k_x)) .\phi(f_\varepsilon^{-1}(g).x), \end{aligned}$$

où $\phi \in \mathcal{H}$ et $g \in G^0$.

Si $g = k \in SO(n)$ alors la limite (2.4.9) est égale à

$$T^{(l,\tau)}(k)\phi(x) = D^l(m(k_{k.x}^{-1}.k.k_x)) .\phi(k.x) \quad (2.4.10)$$

Posons

$$F_\varepsilon(x) = |\mathcal{I}_\varepsilon T^{(l,s)}(f_\varepsilon^{-1}(g))\mathcal{I}_\varepsilon^{-1}\phi(x) - T^{(l,\tau)}(g)\phi(x)|^2$$

D'après (2.4.14) on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) = 0$.

En utilisant (2.4.13) on peut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\exp\left[\left(\frac{n-1}{2} + i\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \cdot t(f_\varepsilon^{-1}(g), x)\right]$$

est borné pour tout $x \in S^{n-1}$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$ et par suite $\exists M' > 0$ tel que $F_\varepsilon(x) < M' \forall x \in S^{n-1}$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$. De plus

$$\int_{S^{n-1}} M' d\mu(x) < \infty$$

car S^{n-1} a une mesure finie. Donc l'intégrale $\int_{S^{n-1}} F_\varepsilon(x) d\mu(x)$ converge uniformément $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ ce qui nous permet de dire

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{I}_\varepsilon T^{(l,s)}(f_\varepsilon^{-1}(g))\mathcal{I}_\varepsilon^{-1}\phi - T^{(l,\tau)}(g)\phi\|_{\mathcal{H}}, \quad \phi \in \mathcal{D} \quad (2.4.15) \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S^{n-1}} F_\varepsilon(x) d\mu(x) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{S^{n-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) d\mu(x) \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.1. On peut prendre $\mathcal{D} = \mathcal{H}$ tout entier et puisque les représentations de G et G^0 sont unitaires, alors (2.4.14) est toujours vérifiée.

Chapitre 3

Application des contractions de représentations à l'étude de la confluence des singularités des E.D.O

Dans ce chapitre nous étudierons la confluence des singularités de l'équation différentielle de Mathieu (resp. Lamé) en terme de contraction du groupe de Lie des déplacements euclidiens du plan $M(2)$ vers le groupe de Heisenberg H_3 (resp. $SO_0(2, 1)$ vers chacun des groupes de Lie H_3 et $M(2)$) [65].

3.1 Confluence des singularités

3.1.1 Singularités régulières et irrégulières

On considère l'équation différentielle homogène du second ordre

$$P_0(z)y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0 \quad (3.1.1)$$

où $P_0(z)$, $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des polynômes en $z \in \mathbb{C}$, qui n'ont pas de facteur commun.

où

$$p_\infty = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{P_1(z)}{P_0(z)} \quad q_\infty = \operatorname{Res}_{z=\infty} z \frac{P_2(z)}{P_0(z)}.$$

Proposition 3.1.1 (Solutions de Frobenius). [29] *Au voisinage d'une singularité régulière finie z_k , deux solutions particulières linéairement indépendantes dites solutions de Frobenius peuvent être calculées.*

1. *Si la différence entre les deux exposants de Frobenius associés à cette singularité satisfait*

$$\rho_{k1} - \rho_{k2} \neq l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.5)$$

alors les solutions de Frobenius sont de la forme

$$y_m(z_k, z) = (z - z_k)^{\rho_{km}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^m(z_k) (z - z_k)^j \quad m = 1, 2.$$

Si la singularité est à l'infini, les solutions de Frobenius sont de la forme

$$y_m(\infty, z) = z^{-\rho_{\infty m}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^m(\infty) z^{-j} \quad m = 1, 2.$$

2. *Si*

$$\rho_{k1} - \rho_{k2} = l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.6)$$

alors les solutions de Frobenius peuvent prendre la forme suivante

$$\begin{aligned} y_1(z_k, z) &= (z - z_k)^{\rho_{k1}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^1(z_k) (z - z_k)^j \\ y_2(z_k, z) &= (z - z_k)^{\rho_{k2}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2(z_k) (z - z_k)^j + A_k y_1(z_k, z) \log(z - z_k). \end{aligned}$$

Au voisinage de la singularité à l'infini les solutions prennent la forme

$$\begin{aligned} y_1(\infty, z) &= z^{-\rho_{\infty 1}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^1(\infty) z^{-j} \\ y_2(\infty, z) &= z^{-\rho_{\infty 2}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2(\infty) z^{-j} + A_\infty y_1(\infty, z) \log z. \end{aligned}$$

où $K_1(\infty) = k_1 - k_0 + 2$ et $K_2(\infty) = k_2 - k_0 + 4$, où k_0, k_1 et k_2 sont respectivement les degrés des polynômes $P_0(z), P_1(z)$ et $P_2(z)$.

Définition 3.1.6 ([57]). Pour une singularité régulière élémentaire le s-rang R_{z_k} est égal à $\frac{1}{2}$, et 1 pour une singularité régulière non élémentaire.

Remarque 3.1.1. 1. Le s-rang est un entier ou un demi-entier $\geq \frac{1}{2}$.

2. L'ensemble $\{R_{z_1}, R_{z_2}, \dots, R_{z_\infty}\}$ des s-rangs des points singuliers de l'équation (3.1.1) constitue son s-multisymbole.

Définition 3.1.7. Une singularité irrégulière ayant un s-rang demi-entier (resp. entier) est dite *ramifiée* (resp. *non ramifiée*).

Exemple 3.1.1 (L'équation hypergéométrique de Gauß). L'équation hypergéométrique de Gauß est donnée par

$$z(1-z)y''(z) + [c - (a+b+1)z]y'(z) - aby(z) = 0. \quad (3.1.11)$$

Cette équation a trois singularités régulières en 0, 1 et à ∞ .

Au point singulier régulier 0 l'équation indiciale est

$$\rho(\rho - 1) + c\rho = 0 \quad (3.1.12)$$

alors les exposants de Frobenius sont

$$\rho_{01} = 0 \quad \text{and} \quad \rho_{02} = 1 - c.$$

De même les exposants de Frobenius pour les singularités en 1 et à l'infini sont respectivement :

$$\rho_{11} = 0 \quad \text{and} \quad \rho_{12} = c - a - b.$$

$$\rho_{\infty 1} = a \quad \text{and} \quad \rho_{\infty 2} = b.$$

Si $c = \frac{1}{2}$, la singularité régulière en 0 devient élémentaire alors l'équation (3.1.11) correspond au s-multisymbole $\{\frac{1}{2}; 1; 1\}$ ($a + b \neq 0, |a - b| \neq \frac{1}{2}$).

Les exposants de Frobenius sont respectivement

$$\rho_{01} = 0 \text{ and } \rho_{02} = 1 - c.$$

$$\rho_{11} = 0 \text{ and } \rho_{12} = 1 - d.$$

$$\rho_{t1} = 0 \text{ and } \rho_{t2} = c + d - a - b.$$

$$\rho_{\infty 1} = a \text{ and } \rho_{\infty 2} = b.$$

Posons, par exemple, $c = d = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}(l + 1)$ et $b = -\frac{1}{2}l$, les trois singularités régulières en 0, 1 et t deviennent élémentaires et on trouve l'équation différentielle algébrique de Lamé qui correspond au s-multisymbole $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

□

3.1.2 Confluence

Définition 3.1.8. La notion de *confluence* pour une équation différentielle homogène est définie par le passage à la limite sur les paramètres de l'équation (qui dépendent d'une quantité ε , $\varepsilon \rightarrow 0$). Ce passage à la limite est accompagné par la fusion de deux points singuliers z_1 et z_2 en un point singulier z^* avec la condition

$$R_{z^*} > \max(R_{z_1}, R_{z_2}).$$

Si de plus la condition

$$R_{z^*} = R_{z_1} + R_{z_2}$$

est satisfaite, alors on dit que la confluence est *forte*. Sinon elle est *faible*.

Remarque 3.1.2. Dans le cas de la confluence de deux points singuliers, le nombre d'éléments du s-multisymbole $\{R_{z_1}, R_{z_2}, \dots, R_{\infty}\}$ de l'équation (3.1.1) décroît d'une unité.

3.2 Confluence de l'équation de Mathieu et contraction de $M(2)$ vers H_3

3.2.1 L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique et le groupe de Heisenberg H_3

On définit le groupe de Heisenberg H_3 par l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de loi de composition interne

$$(a, b, t)(a', b', t') = (a + a', b + b', t + t' + \frac{1}{2}(a'b - b'a)). \quad (3.2.16)$$

On peut munir aussi $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la loi de composition

$$(a, b, t)(a', b', t') = (a + a', b + b', t + t' + a.b'). \quad (3.2.17)$$

Ce groupe est appelé le groupe de Heisenberg polarisé, noté H_3^{Pol} . Les groupes H_3 et H_3^{Pol} peuvent être réalisés comme groupes de matrices triangulaires. Pour tout $(a, b, t) \in H_3^{Pol}$ on a associé la matrice de la forme

$$\mathbf{h}(a, b, t) = \begin{pmatrix} 1 & a & t \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

où a, b et $t \in \mathbb{R}$. Il est facile de voir que

$$\mathbf{h}(a, b, t)\mathbf{h}(a', b', t') = \mathbf{h}(a + a', b + b', t + t' + a.b'). \quad (3.2.19)$$

et donc l'ensemble $\{\mathbf{h}(a, b, t), a, b, t \in \mathbb{R}\}$ est bien un groupe. Le groupe de Heisenberg polarisé H_3^{Pol} est isomorphe à ce groupe par l'isomorphisme $(a, b, t) \rightarrow \mathbf{h}(a, b, t)$. Similairement, on peut identifier le groupe de Heisenberg H_3 avec le groupe des matrices $\mathbf{h}(a, b, t + \frac{1}{2}ab)$.

L'algèbre de Lie de Heisenberg, notée \mathfrak{h}_3 , est un espace vectoriel V de dimension 3 isomorphe à l'algèbre de Lie de dimension 3 engendrée par les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

Soit l'opérateur hamiltonien de l'algèbre de l'oscillateur harmonique donné par

$$H^h = \{P^h\}^2 + \{Q^h\}^2. \quad (3.2.28)$$

Les fonctions propres $e_n^h(x)$ de l'opérateur (3.2.28) associées aux valeurs propres $-\mu = -(2n+1)h$ sont

$$e_n^h(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} (\pi/h)^{-\frac{1}{4}} e^{-hx^2/2} H_n(\sqrt{h}x), \quad h > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.29)$$

et qui forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$; $\{H_n(\zeta)\}$ étant les polynômes de Hermite. En terme des relations (3.2.27) l'équation $H^h y = -\mu y$ n'est autre que l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\mu - h^2 x^2)y = 0 \quad (3.2.30)$$

En effectuant la transformation quadratique $t = x^2$, l'équation (3.2.30) devient

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{4} (\mu - h^2 t)y = 0. \quad (3.2.31)$$

cette équation a deux singularités : 0 qui est régulier et ∞ qui est irrégulier. Au point singulier régulier 0, les exposants de Frobenius sont

$$\rho_{01} = 0 \quad \text{and} \quad \rho_{02} = \frac{1}{2}.$$

Donc 0 est élémentaire alors son s-rang est égal à $\frac{1}{2}$.

Au point singulier irrégulier ∞ on a $K_1(\infty) = 1$ et $K_2(\infty) = 4$ donc le s-rang de ∞ est égal à 2.

Et par suite le s-multisymbole de l'équation (3.2.31) est $\{\frac{1}{2}; 2\}$.

3.2.2 L'équation différentielle de Mathieu et le groupe des déplacements du plan $M(2)$

L'équation différentielle de Mathieu, dans sa forme canonique, est donnée par

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + (a - 2q \cos 2s)y = 0 \quad (3.2.32)$$

est donc $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$.

On considère maintenant l'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{m}_\varepsilon(2)$ engendrée par les trois générateurs $P_\varepsilon, Q_\varepsilon, E_\varepsilon$ avec les relations

$$[P_\varepsilon, Q_\varepsilon] = E_\varepsilon, \quad [P_\varepsilon, E_\varepsilon] = -\varepsilon^2 Q_\varepsilon, \quad [E_\varepsilon, Q_\varepsilon] = 0 \quad (3.2.39)$$

Pour $\varepsilon \neq 0$, cette algèbre de Lie est celle du groupe $\tilde{G}_\varepsilon = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ avec le produit semi-direct

$$(\theta, v) \cdot (\theta', v') = (\theta + \theta', v + k_\varepsilon(\theta) \cdot v') \quad (3.2.40)$$

où

$$k_\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon\theta) & -\varepsilon \sin(\varepsilon\theta) \\ \varepsilon^{-1} \sin(\varepsilon\theta) & \cos(\varepsilon\theta) \end{pmatrix} \quad (3.2.41)$$

Notons par $SO_\varepsilon(2)$ l'ensemble des $k_\varepsilon(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Le groupe \tilde{G}_ε est le revêtement simplement connexe du groupe $M_\varepsilon(2) = SO_\varepsilon(2) \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}/2\pi\varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ muni de la loi ($\dot{\theta}$ désigne la classe de θ)

$$(\dot{\theta}, v) \cdot (\dot{\theta}', v') = (\dot{\theta} + \dot{\theta}', v + k_\varepsilon(\theta) \cdot v') \quad (3.2.42)$$

où $k_\varepsilon(\dot{\theta}) = k_\varepsilon(\theta)$. Pour $\varepsilon = 1$, $M_\varepsilon(2)$ est le groupe des déplacements euclidiens du plan $M(2)$. Pour ε quelconque, $M_\varepsilon(2)$ est le groupe des déplacements associés à la structure euclidienne définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\| (v_1, v_2) \|_\varepsilon^2 = v_1^2 + \varepsilon^2 v_2^2. \quad (3.2.43)$$

C'est pourquoi on l'appelle groupe des déplacements elliptiques du plan.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\varepsilon, \lambda}$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}/2\pi\varepsilon^{-1}\mathbb{Z}$ et vérifiant $f(\psi + 2\pi k\varepsilon^{-1}) = e^{2i\pi k\lambda} f(\psi)$.

Soit h un réel non nul, on définit sur $\mathcal{H}^{\varepsilon, \lambda}$ une représentation unitaire et irréductible de \tilde{G}_ε par

$$\left(R_h^{\varepsilon, \lambda}(g_\varepsilon) f \right) (\psi) = e^{ih(v_2 \cos(\varepsilon\psi) + \varepsilon^{-1} v_1 \sin(\varepsilon\psi))} f(\psi + \theta). \quad (3.2.44)$$

pour $g_\varepsilon(\theta, v) = g_\varepsilon(\theta, v_1, v_2) \in \tilde{G}_\varepsilon$ et $f \in \mathcal{H}^{\varepsilon, \lambda}$. Cette représentation se factorise en une représentation de $M_\varepsilon(2)$ si et seulement si f est $2\pi\varepsilon^{-1}$ -périodique i.e.

après le changement de variable $s = \varepsilon\psi + \frac{\pi}{2}$, n'est rien d'autre que l'équation de Mathieu avec

$$a = \varepsilon^{-2}\mu - 2q \quad \text{et} \quad q = \frac{h^2\varepsilon^{-4}}{4}. \quad (3.2.48)$$

Posons $t = \varepsilon^{-2} \sin^2(\varepsilon\psi)$ dans (3.2.47), on trouve la forme algébrique *déformée* de l'équation de Mathieu

$$t(1 - \varepsilon^2 t) \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{2} \{1 - 2\varepsilon^2 t\} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{4} (\mu - h^2 t) y = 0. \quad (3.2.49)$$

Cette équation admet trois points singuliers : 0 , ε^{-2} qui sont réguliers élémentaires et ∞ qui est irrégulier ramifié de s-rang égal à $\frac{3}{2}$. Formellement quand $\varepsilon \rightarrow 0$ cette équation tend vers l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (3.2.31). C'est exactement cette forte confluence que nous allons interpréter en terme de contraction d'algèbres de Lie dans la section suivante.

3.2.3 Contraction de $M(2)$ vers H_3 et confluence

Contraction $M(2) \longrightarrow H_3$

On considère l'espace vectoriel V sous-jacent à l'algèbre de Heisenberg \mathfrak{h}_3 . Il est muni de la base P, Q, E . On note par $[\cdot, \cdot]_0$ le crochet de Lie

$$[P, Q]_0 = E, \quad [P, E]_0 = [E, Q]_0 = 0. \quad (3.2.50)$$

Muni du crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_0$, V est isomorphe à \mathfrak{h}_3 .

On note par $[\cdot, \cdot]_1$ le crochet de Lie défini par

$$[P, Q]_1 = E, \quad [P, E]_1 = -Q, \quad [E, Q]_1 = 0 \quad (3.2.51)$$

V muni du crochet $[\cdot, \cdot]_1$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(2)$.

Considérons maintenant l'automorphisme Φ_ε de V

$$\Phi_\varepsilon(P) = \varepsilon P, \quad \Phi_\varepsilon(Q) = \varepsilon Q, \quad \Phi_\varepsilon(E) = \varepsilon^2 E \quad (3.2.52)$$

et le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_\varepsilon$ définit par

$$[X, Y]_\varepsilon = \Phi_\varepsilon^{-1}([\Phi_\varepsilon(X), \Phi_\varepsilon(Y)]_1). \quad (3.2.53)$$

où $m \in \mathcal{H}^{\varepsilon, \lambda}$.

Grâce aux propriétés de la fonction ϕ , remarquons que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi^2(\xi + 2k\pi) = 1 \quad (3.2.59)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_1(\xi) \overline{m_2(\xi)} \phi^2(\varepsilon\xi) d\xi = \int_0^{2\pi\varepsilon^{-1}} m_1(\xi) \overline{m_2(\xi)} d\xi. \quad (3.2.60)$$

Donc les fonctions

$$\phi_k^\lambda(\xi) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{i(k+\lambda)\varepsilon\xi} \phi(\varepsilon\xi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.2.61)$$

forment une base orthonormale de la transformée de Fourier $\mathcal{F}V^{\varepsilon, \lambda}$ de l'espace $V^{\varepsilon, \lambda}$. Ainsi les fonctions $\hat{\phi}_k^\lambda(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \hat{\phi}(\varepsilon^{-1}(x - k - \lambda))$ forment une base orthonormée de $V^{\varepsilon, \lambda}$, ce qui nous donne une famille d'injections isométriques

$$I_{\varepsilon, \lambda} : \mathcal{V}^{\varepsilon, \lambda} \xrightarrow{\sim} V^{\varepsilon, \lambda} \subset L^2(\mathbb{R}). \quad (3.2.62)$$

La proposition de Meyer [43] stipule que pour tout $\varepsilon > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on a

1. $V^{\varepsilon, \lambda} \subset V^{\varepsilon', \lambda'}$ dès que $\varepsilon(\mathbb{Z} + \lambda) \subset \varepsilon'(\mathbb{Z} + \lambda')$.
2. $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V^{2^n \varepsilon, 2^{-n} \lambda} = \{0\}$, et $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V^{2^n \varepsilon, 2^{-n} \lambda} = L^2(\mathbb{R})$,
3. Pour tout $a > 0$, $f(x) \in V^{\varepsilon, \lambda} \Leftrightarrow a^{-1/2} f(a^{-1}x) \in V^{a\varepsilon, \lambda}$ et pour tout $b \in \varepsilon\mathbb{Z}$, si $f(x) \in V^{\varepsilon, \lambda}$ alors $f(x - b) \in V^{\varepsilon, \lambda + b/\varepsilon}$. (i.e. les injections $I_{\varepsilon, \lambda}$ commutent aux dilatations et translations.)

La famille d'injections isométriques $I_{\varepsilon, \lambda}$ est appelée alors *analyse multirésolutions* de $L^2(\mathbb{R})$ et elle est ∞ -régulière.² Elle nous a fourni un sens précis au fait intuitif que $\mathcal{H}^{\varepsilon, \lambda}$ "tend" vers $L^2(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers 0.

Pour tout $f \in \mathcal{H}^{\varepsilon, \lambda}$ on définit $\mathcal{I}_{\varepsilon, \lambda}$ par :

$$\mathcal{I}_{\varepsilon, \lambda}(f)(\psi) := \mathcal{F}^{-1} \circ I_{\varepsilon, \lambda} \circ \mathcal{F}(f)(\psi) = \phi(\varepsilon\psi) f(\psi) \quad (3.2.63)$$

Si on pose, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{A}_{\varepsilon, \lambda} u(\psi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\varepsilon\psi + 2k\pi) e^{-2ik\pi\lambda} u(\psi + 2k\pi\varepsilon^{-1}) \quad (3.2.64)$$

²Une analyse multirésolutions est dite ∞ -régulière, si toute masse de Dirac est envoyée par $I_{\varepsilon, \lambda}$ sur une fonction de l'espace de schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

base elliptique qui tendent vers la réunion des deux plans de cotés $\pm h$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. quand le grand axe de l'ellipse s'allonge vers l'infini. Ces deux derniers forment une orbite coadjointe pour G_0 .

Pour construire les injections isométriques sur deux copies de $L^2(\mathbb{R})$ il suffit d'identifier de manière naturelle l'espace $\mathcal{H}^{\varepsilon,\lambda}$ à deux copies de $\mathcal{H}^{2\varepsilon,\lambda/2}$: En effet, on considère les opérateurs

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda} : \mathcal{H}^{\varepsilon,\lambda} \rightarrow \mathcal{H}^{\varepsilon,\lambda}, \quad \mathcal{J} : \mathcal{H}^{2\varepsilon,\lambda/2} \rightarrow \mathcal{H}^{\varepsilon,\lambda}$$

définis par

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}.f(\psi) = e^{-i\pi\lambda} f(\psi + \pi\varepsilon^{-1}), \quad \mathcal{J}.f(\psi) = (1 + e^{i\varepsilon\psi}) f(\psi). \quad (3.2.66)$$

L'application

$$(\mathcal{J}, \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda} \circ \mathcal{J}) : \mathcal{H}^{2\varepsilon,\lambda/2} \oplus \mathcal{H}^{2\varepsilon,\lambda/2} \rightarrow \mathcal{H}^{\varepsilon,\lambda} \quad (3.2.67)$$

est un isomorphisme isométrique, dont l'inverse est donné par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{R} \circ \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.2.68)$$

où \mathcal{R} est l'adjoint de l'injection \mathcal{J} et est donné par :

$$\mathcal{R}.f(\psi) = \frac{1}{4} (1 + e^{-i\varepsilon\psi}) f(\psi) + \frac{1}{4} (1 - e^{-i\varepsilon\psi}) f(\psi + \pi\varepsilon^{-1}). \quad (3.2.69)$$

Proposition 3.2.2. [3] Soit $I_{\varepsilon,\lambda}$ une analyse multirésolutions de Littlewood-Paley-Meyer de $L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $X \in V$ l'expression suivante

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{2\varepsilon,\lambda/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{2\varepsilon,\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{R} \circ \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda} \end{pmatrix} \circ R_h^{\varepsilon,\lambda}(\exp_\varepsilon X) \circ (\mathcal{J}, \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda} \circ \mathcal{J}) \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{2\varepsilon,\lambda/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{2\varepsilon,\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

tend vers

$$\begin{pmatrix} R^h(\exp_0 X) & 0 \\ 0 & R^{-h}(\exp_0 X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.2.70)$$

lorsque ε tend vers 0. Cette convergence a lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})$ au sens de Fréchet pour tout X appartenant à un compact quelconque de V .

3.3 Confluence de l'équation de Lamé et contraction de $SO_0(2, 1)$ vers H_3

3.3.1 L'équation différentielle de Lamé et le groupe $SO_0(2, 1)$

L'équation de Lamé dans sa forme jacobienne est

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - r^2 \{l(l+1)sn^2(z, r) - \mu\} y = 0 \quad (3.3.73)$$

où r est généralement un nombre réel compris entre 0 et 1, l est un nombre complexe supposé ici de partie réelle égale à $-\frac{1}{2}$, μ est un réel dite *valeur caractéristique* de l'équation de Lamé (3.3.73) et $sn(z, r)$ est la fonction elliptique de Jacobi.

Rappelons la définition et quelques propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi.

Définition 3.3.1. Soit l'intégrale

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - r^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3.74)$$

alors l'angle ϕ est appelé l'*amplitude* de u et notée par $\phi = \text{am } u$.

On définit alors les trois fonctions elliptiques de Jacobi par

$$sn(u, r) = \sin \phi, \quad cn(u, r) = \cos \phi, \quad dn(u, r) = (1 - r^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.75)$$

Pour d'autres propriétés des fonctions elliptiques voir [1, 24].

Si on pose $a = r^{-2}$ et $x = sn^2(z, r)$ alors l'équation (3.3.73) devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-a} \right] \frac{dy}{dx} + \frac{\mu - l(l+1)x}{4x(x-1)(x-a)} y = 0 \quad (3.3.76)$$

cette équation est appelée la forme algébrique de l'équation de Lamé. C'est un cas particulier de l'équation de Heun (voir l'exemple 3.1.3), elle a quatre points singuliers réguliers 0, 1 et a (qui sont élémentaires) et l'infini, elle est donc associée au s-multisymbole $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

Considérons maintenant le groupe $G = SO_0(2, 1)$, qui est la composante connexe de l'identité du groupe $SO(2, 1)$ des matrices g de $GL(3, \mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 et qui préservent la forme bilinéaire $\langle x, y \rangle_{2,1} = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$ (i.e. tel que $\langle gx, gy \rangle_{2,1} = \langle x, y \rangle_{2,1}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{2+1}$). Son algèbre de Lie, notée $\mathfrak{so}(2, 1)$, est un espace vectoriel V de dimension 3 formée des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Donc cette algèbre est engendrée par les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les crochets de Lie sont

$$[P, Q] = E, \quad [P, E] = -Q, \quad \text{et} \quad [E, Q] = P. \quad (3.3.77)$$

La décomposition d'Iwasawa de $G = SO_0(2, 1)$ est $G = KAN$ (voir l'exemple 2.4.1) où K , A et N sont les trois sous-groupes à un paramètre donnés par

$$\begin{aligned} K &= \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\theta P), \theta \in \mathbb{R} \right\}, \\ A &= \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} = \exp(tE), t \in \mathbb{R} \right\}, \\ N &= \left\{ n(\xi) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\xi^2 & \xi & \frac{1}{2}\xi^2 \\ -\xi & 1 & \xi \\ -\frac{1}{2}\xi^2 & \xi & 1 + \frac{1}{2}\xi^2 \end{pmatrix} = \exp(\xi(P + Q)), \xi \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

avec [55]

$$\begin{aligned} K &= \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \exp(\theta P), \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}, \\ A &= \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{t}{2} & \sinh \frac{t}{2} \\ \sinh \frac{t}{2} & \cosh \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \exp(tE), t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}, \\ N &= \left\{ n(\xi) = \begin{pmatrix} 1 + i\frac{\xi}{2} & -i\frac{\xi}{2} \\ i\frac{\xi}{2} & 1 - i\frac{\xi}{2} \end{pmatrix} = \exp(\xi(P + Q)), \xi \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où P , Q et E sont les éléments de $\mathfrak{su}(1, 1)$, l'algèbre de Lie de $SU(1, 1)$, donnés par

$$P = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et qui vérifient les mêmes relations de commutations que (3.3.77).

Une autre décomposition de $SU(1, 1)$ appelée la factorisation "espace-temps" [25], elle est définie par l'involution

$$i : g \rightarrow g^\top.$$

Explicitement, chaque $g \in SU(1, 1)$ peut s'écrire sous la forme

$$g = jr \quad \text{avec} \quad rr^\top = e \quad (3.3.78)$$

Le sous-groupe R de $SU(1, 1)$ d'éléments r tels que $r^\top = r^{-1}$ est isomorphe à $SO(1, 1)$:

$$R = \left\{ r = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\phi}{2} & -i \sinh \frac{\phi}{2} \\ i \sinh \frac{\phi}{2} & \cosh \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = \exp(\phi Q), \phi \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'élément j dans (3.3.78) est déterminé (non-uniquement) par

$$jj^\top = gg^\top = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) \\ 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) & \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \cosh te^{i\theta} & \sinh t \\ \sinh t & \cosh te^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (3.3.79)$$

avec $0 \leq \theta < 2\pi$ et $t \in \mathbb{R}$. Notamment

$$\theta = \arg(\alpha^2 + \beta^2), \quad t = \sinh^{-1}(2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})). \quad (3.3.80)$$

laplacien qui égal à $E^2 + Q^2 - P^2$ et $E = -x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}$, $Q = x_3\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3}$ et $P = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}$. Dans [63], les auteurs ont montré que la résolution de cette équation par la méthode de séparation de variables peut être réalisée dans neuf systèmes orthogonaux de coordonnées : sphérique, equidistant, horocyclique, elliptique, hyperbolique, semihyperbolique, elliptique-parabolique, hyperbolique-parabolique et semicirculaire-parabolique associés respectivement à neuf opérateurs quadratiques symétriques dans l'algèbre enveloppante du groupe $SO_0(2, 1)$

$$\begin{aligned} L_1 &= P, \\ L_2 &= Q, \\ L_3 &= P + E, \\ L_4 &= P^2 + k^2Q^2, \\ L_5 &= Q^2 - r^2P^2, \quad 0 < r < 1, \\ L_6 &= PE + EP + rQ^2, \quad 0 < r < \infty, \\ L_7 &= \gamma Q^2 + E^2 + P^2 + EP + PE, \quad \gamma > 0, \\ L_8 &= -\gamma Q^2 + E^2 + P^2 + EP + PE, \quad \gamma > 0, \\ L_9 &= EQ + QE + QP + PQ. \end{aligned}$$

Relativement aux représentations de la série principale de $SO_0(2, 1)$, chacun de ces derniers opérateurs L_i correspond à un opérateur symétrique sur un domaine D des C^∞ -fonctions dans $L^2(S^1)$ et chacun peut être prolonger à un ou plusieurs opérateurs auto-adjoints sur $L^2(S^1)$ (cf. [31]).

Considérons en particulier l'opérateur elliptique $L_4 = P^2 + k^2Q^2$ ($k \in \mathbb{R}$) associé au système de coordonnées elliptiques. Relativement à la série principale ($l = -\frac{1}{2} + i\rho, \rho \in \mathbb{R}^*$), il correspond dans l'espace de Hilbert $L^2(S^1)$ à

$$L_4^l = (1 + k^2 \cos^2 \psi) \frac{d^2}{d\psi^2} + k^2(2l - 1) \sin \psi \cos \psi \frac{d}{d\psi} + k^2(l^2 \sin^2 \psi + l \cos^2 \psi).$$

Finalement, pour retrouver l'équation différentielle de Lamé (3.3.76) il suffit de faire le changement de variable

$$f(\psi) = (1 + k^2 \cos^2 \psi)^{1/2} y(x), \quad (3.3.86)$$

et $x = \frac{\sin^2 \psi}{1 + k^2 \cos^2 \psi}$, $a = -\frac{1}{k^2}$ dans l'équation $L_4^l f = \mu k^2 f$.

Si $(a, b, t) = \exp_{H_3}(aP + bQ + tE)$ un élément de H_3 alors

$$\varphi_\varepsilon(a, b, t) = \exp_{SU(1,1)}(\varepsilon aP + \varepsilon^2 bQ + \varepsilon^3 tE) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_\varepsilon & \beta_\varepsilon \\ \beta_\varepsilon & \bar{\alpha}_\varepsilon \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon &= \cos(\gamma_\varepsilon) + i \frac{\varepsilon a \sin(\gamma_\varepsilon)}{2 \gamma_\varepsilon} \\ \beta_\varepsilon &= \frac{1}{2}(\varepsilon^3 t - i \varepsilon^2 b) \frac{\sin(\gamma_\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon} \\ \gamma_\varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 b^2 - \varepsilon^4 t^2} \end{aligned} \quad (3.3.89)$$

Maintenant considérons l'espace de Hilbert \mathcal{H}^ε des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}/2\pi\varepsilon^{-1}\mathbb{Z}$ et vérifiant $\tilde{f}(\psi + 2\pi k\varepsilon^{-1}) = \tilde{f}(\psi)$. Notons que $\mathcal{H}^\varepsilon \sim L^2(S^1)$.

Posons pour $f \in L^2(S^1)$, $\tilde{f}(\psi) = f(e^{i\varepsilon\psi})$ et

$$(T^{l,\varepsilon}(\varphi_\varepsilon(a, b, t))\tilde{f})(\psi) = (T^l(\varphi_\varepsilon(a, b, t)f)(e^{i\varepsilon\psi}) \quad (3.3.90)$$

Les opérateurs infinitésimaux sont

$$\begin{aligned} (P^{l,\varepsilon}\tilde{f})(\psi) &:= \frac{d}{dt}(T^{l,\varepsilon}(\varphi_\varepsilon(a, 0, 0))\tilde{f})(\psi)|_{a=0} = \frac{d}{d\psi}\tilde{f}(\psi), \\ (Q^{l,\varepsilon}\tilde{f})(\psi) &:= \frac{d}{dt}(T^{l,\varepsilon}(\varphi_\varepsilon(0, b, 0))\tilde{f})(\psi)|_{b=0} = \left[\varepsilon^2 l \sin \varepsilon\psi + \varepsilon \cos \varepsilon\psi \frac{d}{d\psi} \right] \tilde{f}(\psi), \\ (E^{l,\varepsilon}\tilde{f})(\psi) &:= \frac{d}{dt}(T^{l,\varepsilon}(\varphi_\varepsilon(0, 0, t))\tilde{f})(\psi)|_{t=0} = \left[\varepsilon^3 l \cos \varepsilon\psi - \varepsilon^2 \sin \varepsilon\psi \frac{d}{d\psi} \right] \tilde{f}(\psi). \end{aligned} \quad (3.3.91)$$

Ces opérateurs vérifient les mêmes relations de commutations en (3.3.88). De plus pour $\rho = \varepsilon^{-3}h$ et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ils tendent formellement vers les opérateurs en (3.2.27).

Point de vue d'orbites coadjointes

On sait que l'algèbre $\mathfrak{g} = su(1, 1)$ est semi-simple alors la forme de Killing $B(X, Y) = Tr(\text{ad}X.\text{ad}Y)$ est non-dégénérée. On peut donc identifier \mathfrak{g} avec son dual \mathfrak{g}^* .

avec $\xi = \xi_1 E^* + \xi_2 Q^* + \xi_3 P^* \in \mathfrak{h}_3^*$.

Les orbites coadjointes du groupe de Heisenberg H_3 dans \mathfrak{h}_3^* sont de deux types :

- Orbites ponctuelles : $\Omega^{\lambda, \mu} = \{\lambda P^* + \mu Q^*\}$.
- Orbites régulières : $\Omega^h = \{hE^* + \xi_2 Q^* + \xi_3 P^*, \xi_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3\}$.

La représentation correspondante à l'orbite Ω^h est la représentation de Schrödinger R^h (3.2.23).

Soit $f_h = hE^*$, $h \neq 0$, considérons la famille de sous-variétés de \mathbb{R}^{3*} définie par

$$\begin{aligned} \Omega_h^\varepsilon &:= (\Phi_\varepsilon)^*(\text{Ad}_{SU(1,1)}^*)(\Phi_\varepsilon^{-1})^*(f_h) \\ &= (\Phi_\varepsilon)^*\Omega_{\varepsilon^{-3}h}. \end{aligned}$$

Elle est donnée par

$$\varepsilon^{-6}\xi_1^2 + \varepsilon^{-4}\xi_2^2 - \varepsilon^{-2}\xi_3^2 = \varepsilon^{-6}h^2$$

soit

$$\xi_1^2 + \varepsilon^2\xi_2^2 - \varepsilon^4\xi_3^2 = h^2.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation précédente, on trouve $\xi_1 = \pm h$. Cela signifie que les orbites coadjointes Ω_h de $SU(1, 1)$ (les hyperboloïdes) convergent en quelque sorte vers $\Omega^h \cup \Omega^{-h}$ (la réunion des deux plans).

Soit G^0 l'extension de H_3 par le groupe à deux éléments [3]

$$G^0 = \{(\varepsilon, g), \varepsilon \in \{-1, 1\}, g \in H_3\},$$

avec la loi

$$(\varepsilon, g)(\varepsilon', g') = (\varepsilon\varepsilon', g\varepsilon(g'))$$

où l'action de $\{-1, 1\}$ sur H_3 est donnée par

$$(-1)\exp(aP + bQ + tE) = \exp(aP - bQ - tE).$$

Les orbites coadjointes du groupe non-connexe G^0 sont :

- Orbites réduites à un point $\tilde{\Omega}^{\lambda, \lambda} = \{\lambda(P^* + Q^*)\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Orbites à deux points $\tilde{\Omega}^{\lambda, \mu} = \{\lambda P^* + \mu Q^*, \mu P^* + \lambda Q^*\}$, $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$.
- Orbites régulières $\tilde{\Omega}^h = \Omega^h \cup \Omega^{-h}$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.3.3 Confluence de l'équation de Lamé vers l'équation de l'oscillateur harmonique

Pour cela si on pose $f(\psi) = (1 + \varepsilon^2 k^2 \cos^2 \varepsilon \psi)^{l/2} y(x)$ et $x = \frac{\varepsilon^{-2} \sin^2 \varepsilon \psi}{1 + \varepsilon^2 k^2 \cos^2 \varepsilon \psi}$ dans l'équation $L_4^{l,\varepsilon} f = -\mu f$, où $L_4^{l,\varepsilon} = \{P^{l,\varepsilon}\}^2 + k^2 \{Q^{l,\varepsilon}\}^2$ ($k \in \mathbb{R}$) est l'opérateur elliptique déformé associé au système des coordonnées elliptiques relativement à la série principale (3.3.90) sur le domaine D des C^∞ -fonctions dans \mathcal{H}^ε , on obtient l'équation de Lamé déformée (pour $k = 1$)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 x - 1} + \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4 x + 1} \right] \frac{dy}{dx} + \frac{-\mu - \varepsilon^6 l(l+1)x}{4x(\varepsilon^2 x - 1)(\varepsilon^4 x + 1)} y = 0. \quad (3.3.93)$$

Cette équation admet quatre points singuliers réguliers 0 , ε^{-2} , $-\varepsilon^{-4}$ (qui sont élémentaires) et l'infini.

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$; l'opérateur elliptique $L_4^{l,\varepsilon}$, $l = -\frac{1}{2} + i\varepsilon^{-3}h$, tend formellement vers l'opérateur Hamiltonien H^h de l'algèbre de l'oscillateur harmonique, et l'équation de Lamé devient l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. En conclusion finale la contraction $SU(1,1) \rightarrow H_3$ nous a donné la possibilité d'interpréter la double confluence des singularités de l'équation différentielle de Lamé vers celles de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Conclusion

Dans ce travail nous avons appliqué les contractions des représentations de groupes pour interpréter le phénomène de la confluence des singularités des équations différentielles. Nous avons atteint notre objectif qui consiste à interpréter la confluence des singularités de l'équation différentielle de Mathieu (resp. Lamé) vers celles de l'équation de l'oscillateur harmonique en terme de contraction d'algèbres de Lie du groupe $M(2)$ (resp. $SO_0(2,1)$) vers le groupe de Heisenberg H_3 . Nous serons maintenant tentés de développer des interprétations similaires pour d'autres confluences des singularités d'équations différentielles.

Par exemple, la contraction de $SO_0(2,1)$ vers le groupe $M(2)$ (voir l'exemple 2.4.1) nous permet d'interpréter la confluence de l'équation différentielle de Lamé vers l'équation différentielle de Mathieu. Dans ce cas le point singulier régulier élémentaire au point a conflue vers ∞ . De plus le résultat que les solutions périodiques de l'équation de Lamé tendent vers les solutions périodiques de Mathieu déjà existait dans le papier de Kalnins *et al.* [32] exprimé en terme de la contraction de $SO(3)$ vers $M(2)$. Ici, la représentation irréductible de $SO(3)$ est indexée par l (entier) et les solutions périodiques de Lamé sont des polynômes qui vérifient les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^{2m} \left(1 - \frac{u}{\theta_j}\right) &= \frac{ce_{2m}(\theta, q)}{ce_{2m}(0, q)}, & \lim_{l \rightarrow +\infty} u^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{2m+1} \left(1 - \frac{u}{\theta_j}\right) &= \frac{se_{2m+1}(\theta, q)}{se'_{2m+1}(0, q)} \\ \lim_{l \rightarrow +\infty} (1-u)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{2m+1} \left(1 - \frac{u}{\theta_j}\right) &= \frac{ce_{2m+1}(\theta, q)}{ce_{2m+1}(0, q)}, & & (3.3.94) \\ \lim_{l \rightarrow +\infty} u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{2m+2} \left(1 - \frac{u}{\theta_j}\right) &= \frac{se_{2m+2}(\theta, q)}{se'_{2m+2}(0, q)} \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, (1964)
- [2] Y. Agaoka, On the variété of 3 dimensional Lie algebras, Lobachevskii J. Math. **3**, 5-17 (1999).
- [3] M. Andler et D. Manchon, *Opérateurs aux différences finies, calcul pseudo-différentiel et représentations des groupes de Lie*, Journal of geometry and Physics **27**, 1-29 (1998)
- [4] N. Bedjaoui-Tebbal, *Contractions d'algèbres de Lie et torsion de Nijenhuis*, Bull. Belg. Math. Soc. **7**, 303-310 (2000).
- [5] D. Burde, *Contractions of Lie algebras and algebraic groups*. Archivum Mathematicum **43**, No. 5, 321-332 (2007). arXiv :math/0703701v1 [math.AG] 23 Mar 2007
- [6] D. Burde and C. Steinhoff, *Classification of orbit closures of 4dimensional complex Lie algebras*. J. Algebra **214**, 729-739 (1999).
- [7] D. Burde, *Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie Algebras*. Commun. Algebra **33**, no. 4, 1259-1277 (2005).
- [8] D. Burde, *Degenerations of nilpotent Lie algebras*. Journal of Lie Theory **9**, No. 1, 193-202 (1999).
- [9] B. Cahen, *Contraction de $SU(2)$ vers le groupe de Heisenberg et calcul de Berezin*, Beitr. Algebra Geom. **44**, 2, 581-603 (2003).
- [10] B. Cahen, *Contraction de $SU(1, 1)$ vers le groupe de Heisenberg*, Travaux mathématiques Fascicule XV, 19-43 (2004).
- [11] B. Cahen, *Contractions of $SU(1, n)$ and $SU(n + 1)$ via Berezin quantization*, Journal d'Analyse Mathématique, **97** (2005).

- [28] G. C. Hegerfeldt, *Some properties of a class of generalized Inönü-Wigner contractions*, Nuovo Cimento A (10), **51**, 439-447, (1967).
- [29] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York (1957).
- [30] E. Inönü and E. P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39**, 510-524 (1953); *On a particular type of convergence to a singular matrix*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40**, 119-121 (1954).
- [31] E. G. Kalnins and Willard Miller Jr., *Lie Theory and Separation of Variables. 4. The Groupe $SO(2,1)$ and $SO(3)$* , J. Math. Phys. **15**, No. 8, 1263-1272 (1974).
- [32] E. G. Kalnins, Willard Miller Jr. and G. S. Pogosyan, *Contraction of Lie Algebras : Application to Special Functions and Separation of Variables*, J. Phys. A : Math. Gen., **32**, 4709-4732 (1999).
- [33] A. A. Kirillov, *Merits and demerits of orbit method*, Bulletin of the Amer. Math. Soc. **36**, N.4, 433-488 (1999).
- [34] A. A. Kirillov and Yu. A. Neretin, *The variety A_n of n -dimensional Lie algebra structures*, in Some problems in modern analysis Moskov. Gos. Univ., Mekh.-Mat. Fak., Moscow 42-56 (1984) (Russian); translated in Amer. Math. Soc. Transl. **137**, (Ser. 2) 21-30 (1987).
- [35] A. W. Knap, *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in Mathematics, Vol. 140. Birkhäuser, second edition (2002).
- [36] A. W. Knap and E. M. Stein, *Interwining Operators for Semisimple Groups*, The Annals of Mathematics, Second Series, **93**, No. 3 , 489-578 (1971).
- [37] M. Levy-Nahas, *Deformation and contraction of Lie algebras*, J. Math. Phys. **8**, 1211-1222 (1967)
- [38] Ja. H. Lõhmus, *Limit (contracted) Lie groups*, Proceedings of the Second Summer School on the Problems of the Theory of Elementary Particles (Otepää, 1967), Part IV, Inst. Fiz. i Astronom. Akad. Nauk Eston. SSR, Tartu 3-132 (Russian) (1969)
- [39] S. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., **315**, 69-87, (1989).
- [40] E. Mathieu, *Le mouvement vibratoire d'une membrane elliptique*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Tome 13 (2 ème série), (1868)

- [58] Michael. E. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1986).
- [59] S. Thangavelu, *Harmonic Analysis On the Heisenberg Group*, Progress in Mathematics, Birkhäuser V. 159 (1998).
- [60] N. Ja. Vilenkin, *Special Functions and Theory of Group Representations*. Amer. Math. Soc., Translations of Math. Mono., **22** (1968), traduction française, Dunod, Paris, (1969).
- [61] N. Ja. Vilenkin and A.U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, 3 volumes, Kluwer, (1991, 1993).
- [62] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.*, Springer (1983).
- [63] P. Winternitz, I. lukáč, and Y. Smorodinskii, *Quantum Numbers in the Little Groups of the Poincaré Group*, Sov. J. Nucl. Phys. **7**, 139 (1968).
- [64] M. Yamada and K. Ohkitani, *An Identification of Energy Cascade in Turbulence by Orthonormal Wavelet Analysis*, Progress of Theoretical Physics, **86**, No. 4, (1991).
- [65] M. B. Zahaf and D. Manchon, *Confluence of singularities of differential equation : A Lie algebras contraction approach*, Int. Journal of Math. Analysis, **3**, No. 1, 23-40, (2009).