

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Thèse

*de Magister en Mathématiques*

*Option: Analyse Mathématique*

**Thème**

***IDENTIFIABILITE ET IDENTIFICATION  
EN DYNAMIQUE DES POPULATIONS  
STRUCTUREES EN AGE***

**Présentée par: Mme BOUAYAD AGHA née SARI Zakya**

**Soutenue le:**

**Devant la commission d'examen:**

**Président:** M<sup>f</sup> S. M Bouguima.....M.C., Université de Tlemcen

**Examineurs:** M<sup>f</sup> M. Yebdri.....M.C., Université de Tlemcen

M<sup>f</sup> B Cherki.....M.C , Université de Tlemcen

**Rapporteur:** M<sup>f</sup> N.Ghouali.....Prof., Université de Tlemcen

**Corapporteur:** Melle F.Bekkal Brikci

Année Universitaire  
1999-2000

A mes parents  
A mon mari  
A ma sœur  
A mes doux petits frères  
A mes beaux parents

A tous ceux qui travaillent pour la science

## **REMERCIEMENTS**

Cette thèse est le fruit d'un travail réalisé sous la direction de Monsieur N.Ghouali, professeur à l'université de Tlemcen.

Que Monsieur N. Ghouali veuille bien trouver ici , l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude pour la clarté et la pédagogie dans les enseignements qu'il m'a dispensés, l'esprit de la recherche qu'il a su me donner, et pour la compréhension et la confiance qu'il me les a accordées.

Je remercie également M<sup>elle</sup> F. Bekkal Brikci pour ses conseils durant mon travail.

Monsieur S. M. Bouguima, m'honore en acceptant de présider le jury de soutenance, et à qui j'adresse mes remerciements.

Mes remerciements s'adressent aussi à Messieurs B. Cherki, et M.Yebdri pour avoir accepté de juger mon travail.

Enfin, j'adresse mes vifs et sincères remerciements de reconnaissance à mes parents qui m'ont toujours soutenus, à mon mari, à ma sœur Zahéra, à mes frères, à mes beaux parents pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté tout le long de ce travail, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'épanouissement de ce travail, en particulier, mes collègues du laboratoire de l'automatique.

Merci à tous.

# TABLE DES MATIERES

|                          |          |
|--------------------------|----------|
| <b>INTRODUCTION.....</b> | <b>2</b> |
|--------------------------|----------|

## **CHAPITRE I**

### **PRELIMINAIRES**

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| I. Introduction.....               | 6 |
| II. Vocabulaire et Motivation..... | 6 |
| III. Récapitulatif.....            | 9 |

## **CHAPITRE II**

### **MODELES MATHEMATIQUES STRUCTURES EN AGE**

|   |    |
|---|----|
| I. Introduction.....                            | 12 |
| II. Modèles Mathématiques Structurés En Age     |    |
| II-1. Modèle linéaire.....                      | 12 |
| II-1-1. Analyse Mathématique du Modèle.....     | 14 |
| II-2. Modèle non linéaire.....                  | 27 |
| II-2-1. Analyse Mathématique du modèle.....     | 27 |
| II-2-2. Comparaison entre les deux modèles..... | 30 |
| III. Conclusion.....                            | 30 |

## **CHAPITRE III**

### **ETUDE NUMERIQUE D'UN PROBLEME D'E.D.P MODELISANT LES DYNAMIQUES DE POPULATION STRUCTUREE EN AGE.**

|   |    |
|---|----|
| I. Discrétisation du modèle linéaire..... | 32 |
| II. Etude de la stabilité du schéma.....  | 36 |
| III. Conclusion.....                      | 41 |

## **CHAPITRE IV**

### **IDENTIFIABILITE ET IDENTIFICATION DES PARAMETRES**

|  |    |
|--|----|
| I. Introduction.....                                       | 43 |
| II. Identifiabilité des modèles.....                       | 45 |
| II-1. Identifiabilité du modèle de Lotka Mc Kendrick ..... | 46 |
| II-2. Conclusion.....                                      | 49 |
| III. Identification des paramètres.....                    | 49 |
| IV. Conclusion.....  | 57 |
| Conclusion générale et perspectives .....                  | 59 |

Bibliographie

## INTRODUCTION

La population animale , et en particulier celle des poissons peut être l'objet d'une étude dynamique.

Toutefois celle- ci est particulièrement intéressante lorsque biomasse et structure démographique varient largement en fonction de facteurs communs et mesurables, ce qui est précisément le cas des populations exploitées par l'homme surtout si cette exploitation est la source principale de sa vie, et souvent même unique.

L'importance économique de la pêche aux poissons ou autres organismes aquatiques pousse les pêcheurs à tirer le rendement le plus élevé des ressources naturelles.

D'autre part, l'avenir de la population est menacé, il est à craindre qu'en maintenant l'intensité de la pêche à un tonnage très élevé par an, le stock ne décline dangereusement d'où la nécessité pour les autorités responsables d'assurer la sauvegarde des stocks par des mesures de préservation de l'espèce animale.

Et avant de se rendre sur les bancs de la pêche, encore faut- il- savoir que chaque structure d'âge d'une telle population possède sa propre dynamique.

Toutes ces raisons constituent de puissants motifs pour lancer en priorité les recherches de Dynamique sur les populations exploitées dans les pêcheries . En outre l'existence de résultats dans ce sens (sur les tonnages par exemple), facilite le travail des biologistes en leur fournissant une masse d'information précises sur l'évolution de la pêche.

Les modèles mathématiques établis par les dynamiciens en collaboration avec les biologistes permettent de mieux connaître le comportement des populations de poissons.

L'objet de l'étude de ces modèles (plus ou moins proches de la réalité), consiste à préciser les méthodes à appliquer et à définir le but à atteindre: maintenir le rendement d'une pêcherie au niveau le plus élevé possible, tout en préservant l'espèce animale.

Plusieurs types de modèles mathématiques existent pour interpréter le phénomène écologique celui de la dynamique des populations. Les modèles où la fonction densité de population dépend uniquement du temps sont parmi les premiers utilisés.

Des modèles dépendant aussi de l'âge ont fait leur apparition avec :

**LOTKA MC KENDRICK (1929)**: qui a considéré dans son modèle les taux vitaux de la croissance de sa population, des paramètres qui dépendent uniquement de l'âge.

**VON- FOERSTER (1959)**: s'est basé essentiellement sur le modèle de Lotka Mc Kendrick , dans lequel les taux de fertilité et de mortalité dépendent du temps  $t$  et de l'âge  $a$ .

**M. E. GURTIN et R. C. MAC-CAMY (1974)** ont étudié le problème où les taux précédents tiennent compte de l'âge et de la population totale.

Dans ce genre de modèles (dépendant de l'âge), interviennent plusieurs paramètres (paramètres démographiques en général) du stock considéré, inconnus a priori et qu'il va falloir les estimer numériquement à partir de données expérimentales recueillies sur la population structurée en âge.

Bien d'autres chercheurs se sont investis dans la modélisation avec dépendance en âge mais le problème d'identifiabilité et d'identification reste un sujet encore d'actualité.

Notre exposé se présente de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, un bref aperçu est présenté sur le domaine de la dynamique de populations, une sorte de motivation qui fait le point de départ de notre travail.

Dans le deuxième chapitre, on présente quelques modèles mathématiques structurés en âge tel que le modèle linéaire de Lotka Mc Kendrick, et le modèle non linéaire de Gurtin et Mac- Camy.

Le chapitre trois est consacré à une étude numérique d'un problème d'équations aux dérivées partielles, étude faite en particulier pour un modèle linéaire celui de Lotka Mc Kendrick avec présentation du schéma de discrétisation total et de l'étude de la stabilité.

Enfin dans le chapitre quatre, l'identifiabilité du modèle de Lotka Mc Kendrick est établie. On propose ensuite une méthode d'identification des paramètres basée sur la méthode des moindres carrés du type Levenberg- Marquardt.



**CHAPITRE I**  
**PRELIMINAIRES**

## PRELIMINAIRES

### I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on exposera certaines terminologies classiques employées pour décrire un genre de phénomène écologique, celui de la dynamique des populations.

### II. VOCABULAIRE ET DEFINITIONS

- Le mot **population** signifie un ensemble d'organismes ou d'individus, souvent d'une même espèce, vivant à un moment donné dans un écosystème déterminé et possédant des caractères communs transmissibles par hérédité, et sont capables de se reproduire entre eux.

- La **densité** de population est le nombre des individus par unité d'espace.

- L'espace est supposé **homogène** c'est à dire que la population est uniformément répartie dans l'environnement qu'elle occupe.

- La surface est réduite ou **isolée** c'est à dire il n'y a pas d'échange avec l'extérieur.

- Un **écosystème** est un système possédant certaines propriétés intrinsèques et assurant la stabilité biologique de l'espèce, un système dont les composantes sont:

1. La **biocénose**: c'est le groupement d'êtres vivants liés par une dépendance réciproque, elle est constituée par des populations animales et végétales, qui occupent un espace dit le biotope.

2. Le **biotope**: là où repose la biocénose et trouve des conditions physiques et chimiques adéquates.

- La **biomasse** : c'est le poids total de la matière vivante de la population.

La biomasse peut varier selon les facteurs suivants:

- La **natalité** qui fait croître le nombre des individus dans une population.
- La **mortalité** qui le fait décroître.
- L'**âge**: chaque classe d'âge de la population possède sa propre dynamique.

D'autres facteurs importants peuvent intervenir dans la variation de la biomasse tels que: La migration, la prédation, la pollution des eaux, maladies, conditions climatiques, l'exploitation par l'homme...

Pour simplifier l'étude , on écartera toutes ces interactions qui ont leurs effets sur l'espèce et sur l'environnement qu'elle occupe.

#### **Phase exploitable- Phase exploitée- stock:**

Notons que dans une pêcherie géographiquement limitée l'ensemble d'une population exploitable de poissons se compose de deux parties l'une qui est **vulnérable** aux engins de captures autorisés: c'est le **stock** exploité, et l'autre qui échappe aux engins de captures et qui comprend éventuellement la classe des jeunes poissons.

En réalité, chaque classe d'âge de la population possède sa propre dynamique, cependant on ne s'intéresse qu'à celles qui concernent le stock exploité.

#### **Remarques:**

- Un stock peut couvrir plusieurs espèces difficiles à distinguer.
- Dans notre travail ne sera traitée que la dynamique des stocks exploités par l'homme.

Sachant que le cycle vital d'un poisson est divisé en plusieurs phases très importantes pour la gestion des pêcheries . On définit alors:

• **Phase exploitable:**

Elle est limitée par deux étapes:

**I. Recrutement**

C'est le processus qui permet aux jeunes poissons le passage pour la première fois à l'ensemble des poissons **accessibles**. En exemple, le recrutement par migration des jeunes saumons de l'endroit de naissance (rivières, fleuves) vers les lieux de pêche et ceci dès qu'ils atteignent l'âge de recrutement (deviennent des recrues).

**II. Réforme**

C'est le phénomène inverse du recrutement: un animal est dit réformé, soit il est mort soit il a quitté les lieux de pêche pour se reproduire. Exemple les saumons.

On pourra aussi définir les notions suivantes :

**Accessibilité:** Composante géographique: c'est la présence sur les lieux de pêche.

**Vulnérabilité:** Dépend du comportement engin- poisson, en d'autres termes dépend de la probabilité pour que le poisson ne s'échappe pas et n'évite pas le chalut, ceci est lié à la taille et à l'âge du poisson .

**Capturabilité:** (notée  $q$ ) C'est la probabilité pour qu'un poisson soit capturé. La vulnérabilité et l'accessibilité sont deux conditions nécessaires pour la capturabilité.

**Effort de pêche:** C'est la mesure de l'ensemble des moyens de capture appliqués par des pêcheurs sur un stock en un temps déterminé.

L'effort de pêche ne dépend que de la technique de pêche, il quantifie "l'effort nominal" déployé par les pêcheurs d'une même flottille pour réaliser leur captures. Sa mesure est assez délicate, car elle diffère d'un engin à l'autre (pour les bateaux de fort tonnage par exemple, il leur faut un effort de pêche considérable).

• **Phase exploitée:**

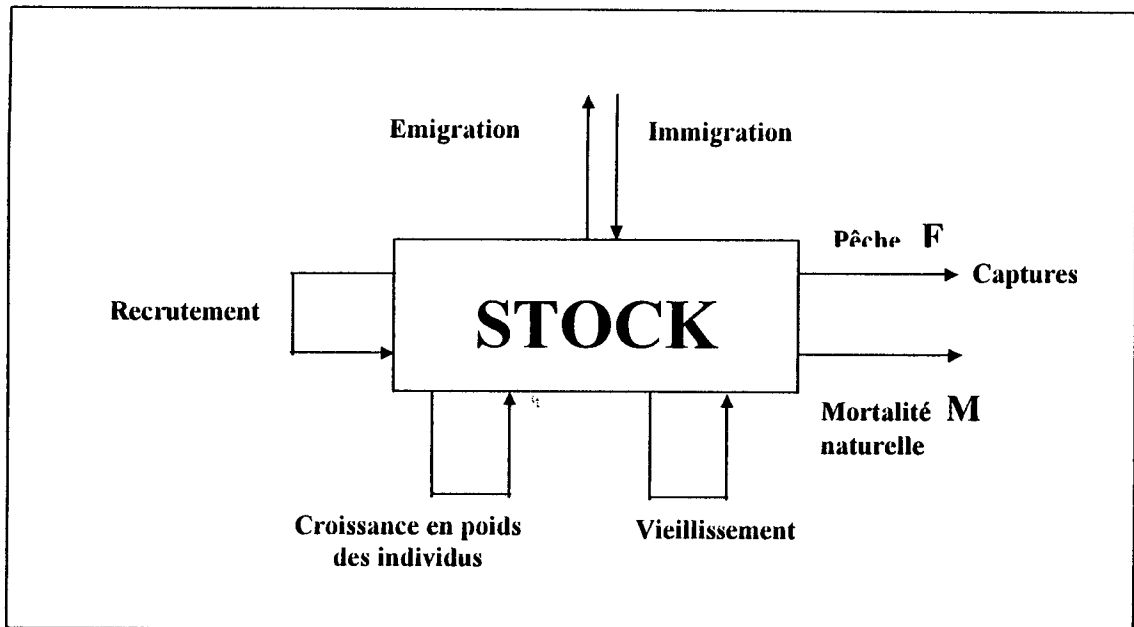
La capture d'un poisson dépend non seulement de l'âge de recrutement  $t_r$ , mais aussi de sa taille, et de la maille du chalut. Si le poisson est capturé on dit qu'il a l'âge de la première capture noté  $t_c$ . Il se peut qu'un poisson échappe ou évite les engins, dans le cas de l'évitement l'âge maximum des captures est noté  $t_m$ .

Ainsi la phase exploitée sera la phase comprise entre  $t_c$  et  $t_m$ .

### III. RECAPITULATIF

Chaque population exploitée est considérée indépendamment des autres, les systèmes sont essentiellement multispécifiques, et du fait de la compétition spatiale, des relations trophiques interviennent souvent, comme la prédation, etc... le stock constitue la fraction exploitée de la population (figure I.1). Son effectif s'accroît en **nombre** par le recrutement et l'immigration; il diminue du fait de l'émigration, de la mortalité naturelle et de la pêche. La croissance individuelle des poissons n'a d'effet que sur la biomasse du stock et non sur les effectifs en nombre.

Bien que la mortalité naturelle est susceptible de varier d'une année à l'autre, notamment en liaison avec les variations climatiques; mais personne n'est à l'heure actuelle capable de déceler les changements de mortalité naturelle.



**Figure I.1:** Description d'un processus formé par une population marine exploitée.

## REMARQUES

Dans tout ce qui va suivre, et pour simplifier la modélisation mathématique, on laissera de côté les mouvements des individus au sein d'une zone bien délimitée (et donc pas de dimension spatiale). Dans le même ordre d'idées, on négligera les phénomènes de migration, d'émigration dans l'étude des modèles mathématiques. En effet, les interactions ainsi que les échanges sont très souvent difficiles à quantifier. On écartera aussi bien d'autres phénomènes comme le phénomène de prédation, etc...

Et par conséquent, on ne tiendra compte que de la natalité, de la mortalité et le phénomène de l'exploitation par l'homme pour une population structurée en âge.

# **CHAPITRE II**

## **MODELES MATHÉMATIQUES STRUCTURES EN AGE**

---

### **STRUCTURES EN AGE**

#### **I. INTRODUCTION**

Afin de bien gérer la situation d'un stock et ceci pour des raisons écologiques , économiques , ou autres... plusieurs types de modèles mathématiques ont été proposés pour interpréter le phénomène de la dynamique d'un stock.

*la densité*

Notons par  $u(a, t)$  le nombre d'individus d'âge  $a$  à l'instant  $t$ , si on se donne deux âges  $a_1$  et  $a_2$ , avec  $a_1 < a_2$ , alors  $\int_{a_1}^{a_2} u(a, t) da$  désignera le nombre d'individus qui à l'instant  $t$  ont un âge compris entre  $a_1$  et  $a_2$ .

$P(t) = \int_0^{A_{\max}} u(a, t) da$  sera alors la population totale à l'instant  $t$ .

$A_{\max}$  : l'âge maximal de survie d'un poisson.

On note par :

\*  $b = b(a, t)$ : le coefficient de fertilité à l'âge  $a$  et à l'instant  $t$ , c'est le nombre moyen de naissances provenant d'un individu d'âge  $a$  à l'instant  $t$ .

\*  $m = m(a, t)$ : le coefficient de mortalité, nombre moyen de décès à l'âge  $a$  par unité de population d'âge  $a$  à l'instant  $t$  ( $m(a, t) = m_0(a) + q(a)f(t)$ ,  $m_0(a)$  mortalité naturelle à l'âge  $a$ ,  $q(a)$  étant la capturabilité à l'âge  $a$  et  $f(t)$  l'effort de pêche à l'instant  $t$ ).

$u(0, t) = \int_0^{A_{\max}} b(a, t) u(a, t) da$   $t > 0$  est le nombre de naissance à l'instant  $t$ .

La variation du nombre d'individus d'âge  $a$  à l'instant  $t$ , après un intervalle de temps de longueur  $h$ , avec  $\Delta a = \Delta t = h$ , ( $h$  petit), est due à la disparition de ces individus entre les deux instants  $t$  et  $t + h$ .

$$\underline{u(a+h, t+h) - u(a, t) = -m(a, t) u(a, t) h}$$

En divisant par  $h$ , et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient:

$$D_u(a, t) = -m(a, t) u(a, t)$$

*Est-ce que  
cette limite  
existe ?*

Cette équation exprime la diminution d'effectif due à la conjonction de la pêche et de la mortalité naturelle. les effets des deux mortalités sont supposés indépendants et additifs.



A cette équation, on associe la distribution d'âge initiale (appelée aussi stock initial) c'est une fonction dépendant de l'âge  $u(a,0)=p(a)$ ,  $a \geq 0$ ; ainsi que la condition aux limites:  $u(0,t)=B(t)$  qui est le nombre d'œufs pondus à chaque instant  $t$ .

Lorsque  $b(a,t)=b(a)$ ,  $m(a,t)=m(a)$ , le système suivant :

$$(S_0) \begin{cases} Du(a,t) = -m(a)u(a,t) & a \geq 0; t \geq 0 \\ u(0,t) = \int_0^{A_{\max}} b(a)u(a,t)da & t > 0 \\ u(a,0) = p(a) & a \geq 0 \end{cases}$$

est appelé le modèle de Lotka Mc Kendrick.

Dans la suite on fera la résolution générale du système :

$$(S_1) \begin{cases} Du(a,t) = -m(a,t)u(a,t) & a \geq 0; t \geq 0 \\ u(0,t) = \int_0^{A_{\max}} b(a,t)u(a,t)da & t > 0 \\ u(a,0) = p(a) & a \geq 0 \end{cases}$$

### II.1.1 ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE

Lorsque  $u$  est différentiable, la quantité  $Du(a,t)$  n'est autre que la somme:

$$\frac{\partial u}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(a,t)$$

Soit  $(a_0, t_0) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  avec  $a_0 = 0$  ou  $t_0 = 0$

Posons le changement de fonctions suivant:

$$\begin{cases} \bar{u}(h) = u(a_0 + h, t_0 + h) \\ \bar{m}(h) = m(a_0 + h, t_0 + h) \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}^+$$

Alors l'équation aux dérivées partielles se transforme en une équation différentielle ordinaire (D):  $\frac{d\bar{u}}{dh}(h) = -\bar{m}(h)\bar{u}(h)$

et dont la solution est donnée par:  $\bar{u}(h) = \bar{u}(0) \exp - \int_0^h \bar{m}(x) dx$

c'est à dire:  $u(a_0 + h, t_0 + h) = u(a_0, t_0) \exp - \int_0^h m(a_0 + x, t_0 + x) dx$

Soit  $(a, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Si  $a \geq t$ , en posant  $a_0 = a - t$ ,  $t_0 = 0$  et  $h = t$ , on obtient:

$$u(a, t) = p(a - t) \exp - \int_0^t m(a - t + x, x) dx \quad (i)$$

Si  $a < t$ , on pose  $a_0 = 0$ ,  $t_0 = t - a$  et  $h = a$  et donc:

$$u(a, t) = B(t - a) \exp - \int_0^a m(x, t - a + x) dx \quad (ii) \quad \text{où } B(t) = u(0, t)$$

Connaissant  $B(t)$ ,  $u(a, t)$  sera bien déterminée. Or,

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^{+\infty} b(a, t) u(a, t) da \\ &= \int_0^t b(a, t) B(t - a) \left[ \exp - \int_0^a m(x, t - a + x) dx \right] da + \int_t^{+\infty} b(a, t) p(t - a) \left[ \exp - \int_0^t m(a - t + x, x) dx \right] da \end{aligned}$$

En posant :

$$N(a, t) = b(a, t) \cdot \exp \left[ - \int_0^a m(x, t - a + x) dx \right]$$

$$G(t) = \int_t^{+\infty} b(a, t) p(t - a) \left[ \exp - \int_0^t m(a - t + x, x) dx \right] da$$

On obtient:  $B(t) = \int_0^t B(t - a) N(a, t) da + G(t)$

*Notation*

L'équation précédente est appelée l'équation de renouvellement ( $N(a, t)$  c'est la fonction maternité chez une femelle ayant l'âge  $a$  à l'instant  $t$ , et  $G(t)$  ce sont les naissances produites à l'instant  $t$  par la population initiale).

Dans ce qui suit, on considère plus précisément le modèle de Lotka- McKendrick, dont la solution est donnée par:

$$u(a, t) = \begin{cases} B(t-a)\pi(a), & a < t \\ p(a-t) \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}, & a \geq t \end{cases}$$

Avec:  $\pi(a) = \exp\left[-\int_0^a m(x) dx\right]$ , est définie comme étant la probabilité de survie d'un individu de la naissance jusqu'à l'âge  $a$ .

Dans ce cas, l'équation de renouvellement prend la forme:

$$B(t) = \int_0^t B(t-a)N(a)da + G(t)$$

### Analyse de l'équation de renouvellement

Avant d'analyser cette équation on introduit les hypothèses suivantes nécessaires pour la suite de l'étude:

(H<sub>1</sub>)  $m(\cdot) \geq 0$  est continue sur  $[0, A_{\max}[$  et on a  $\int_0^{A_{\max}} m(a) da = +\infty$ .

(H<sub>2</sub>)  $b(\cdot) \geq 0$  est continue sur  $[0, A_{\max}[$ , et  $b$  non identiquement nul.

(H<sub>3</sub>)  $p \geq 0$  est au moins continue par morceaux sur  $[0, A_{\max}[$  (sinon continue à support compact).

(H<sub>4</sub>)  $p(a) > 0$  pour  $a < \omega$  où  $\omega = \sup\{a \in [0, A_{\max}[ \mid b(a) \neq 0 \}$ .

## Interprétation des hypothèses

L'hypothèse (H<sub>1</sub>) exprime le fait que  $A_{\max}$  est l'âge accessible maximal. En fait, une conséquence de cette hypothèse est:

$$\lim_{a \rightarrow A_{\max}} \pi(a) = 0$$

Dans l'hypothèse (H<sub>1</sub>), il est supposé que le stock initial ne contient que les individus d'âge inférieur à l'âge maximal de fertilité  $\omega$ . /4

## Théorème 1 [5]

Sous les hypothèses précédentes, l'équation de renouvellement admet une unique solution continue.

## Preuve

Pour  $T > 0$  fixé, considérons l'espace de Banach  $C[0, T]$  muni de sa norme définie par:  $\|B\| = \sup_{t \in [0, T]} |B(t)| e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  R

Soit donc l'opérateur  $S: C[0, T] \rightarrow C[0, T]$  défini par:

$$S(B)(t) = \int_0^t B(t-a)N(a)da + G(t)$$

On montre, à présent que l'opérateur  $S$  est une contraction stricte, en effet:

Soient  $B_1$  et  $B_2 \in C[0, T]$

$$|S(B_1)(t) - S(B_2)(t)| e^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda t} \int_0^t N(a) |B_1(t-a) - B_2(t-a)| da$$

En posant  $s = t - a$ , on aura:

$$\begin{aligned} 0 < a < t \\ -t < -a < 0 \\ 0 < t-a < t \\ \parallel \\ s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |S(B_1)(t) - S(B_2)(t)| e^{-\lambda t} &\leq e^{-\lambda t} \int_0^t |B_1(s) - B_2(s)| N(t-s) ds \\
 &\leq \int_0^t e^{-\lambda s} |B_1(s) - B_2(s)| e^{-\lambda(t-s)} N(t-s) ds \\
 &\leq \|B_1 - B_2\| \int_0^t e^{-\lambda a} N(a) da
 \end{aligned}$$

*Ce n'est pas bon les bornes*

Si  $\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{-\lambda a} N(a) da = k$ , alors  $\|S B_1 - S B_2\| \leq k \|B_1 - B_2\|$  et  $k < 1$  (on peut

*2.4.10*

toujours choisir  $\lambda$  de telle sorte que  $k < 1$ , ceci grâce au théorème des valeurs intermédiaires), alors  $S$  est une contraction stricte et donc admet un point fixe unique.

**Conclusion**

La solution de l'équation de renouvellement existe et est unique, par conséquent le modèle de Lotka Mc - Kendrick admet une solution unique.

**Comportement asymptotique des solutions [1]**

**Proposition 1:**

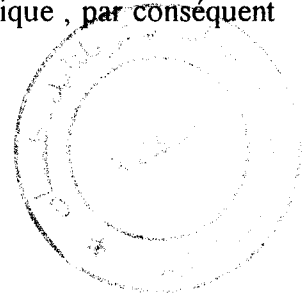
La solution de l'équation de renouvellement est donnée par:

$$B(t) = \sum_0^{+\infty} C_j \exp(r_j t)$$

Où:

$$C_j = \frac{\int_0^\beta \exp(-r_j t) G(t) dt}{\int_a^\beta \exp(-r_j a) N(a) da}$$

*problème se résoudre en une fois mesurable d'axe he mesurable*



**Preuve**

Le calcul formel (passage à la transformée de Laplace et utilisation de ses propriétés) appliqué à l'équation de renouvellement conduit à:

$$L(B(t))(r) = \frac{L(G(t))(r)}{1 - L(N(t))(r)}, \text{ pour: } \text{Re } r > \sigma, \sigma = \inf \{ \sigma \in \mathbb{C} / L(G(t))(\sigma), \text{ et } L(N(t))(\sigma) \exists \}$$

*Que signifie la L.?*

*ou*  
 $L(B(t))(r)$  : désigne la transformée de Laplace de  $B(t)$   
 avec  $r$ .

Si  $1 - L(N(t))(r) \neq 0$ , passage à la transformée inverse.

Si  $1 = L(N(t))(r)$  : C'est l'équation caractéristique de Lotka admettant une solution réelle unique  $r_0$  et simple.

*pourquoi ?*

En effet:  $L(N(t))(r) = \int_0^{+\infty} e^{-ra} N(a) da$

$L(N(t))(r) \rightarrow +\infty$  quand  $r \rightarrow -\infty$  et  $L(N(t))(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ , de plus  $L(N(t))(r)$  est continue, strictement décroissante.

$$\frac{d}{dr} [L(N(t))(r)] = - \int_0^{+\infty} a \exp(-ra) N(a) da < 0$$

La dérivée non nulle d'où la racine est simple.

Les autres solutions notées  $r_j$  sont complexes deux à deux conjuguées avec  $\text{Re}(r_j) < r$ .

En effet, en posant  $f(r) = L(N(t))(r)$  on a:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp(-ra) N(a) da &= 1 \\ &= \text{Re} \left( \int_0^{+\infty} \exp(-r_j a) N(a) da \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\text{Re}(r_j) a) \cos(\text{Im}(r_j) a) N(a) da \\ &< \int_0^{+\infty} \exp(-\text{Re}(r_j) a) N(a) da \end{aligned}$$

Ainsi  $f(r) < f(\operatorname{Re}(r_j))$  avec  $f$  décroissante, par conséquent on a:  $\operatorname{Re}(r_j) < r$

D'autre part:

$$1 - L(N(t))(r) = f(r_j) \prod_0^{+\infty} (r - r_j), \quad f(r_j) \neq 0$$

Et si toutes les racines sont distinctes deux à deux, on a:

$$L(B(t))(r) = \frac{L(G(t))(r)}{1 - L(N(t))(r)} = \sum_0^{\infty} \frac{c_j}{r - r_j}$$

(Les fonctions  $L(G(t))(r)$  et  $L(N(t))(r)$  sont analytiques en  $r$  car continûment dérivables et développables en série entière en  $r$ , d'où l'équation précédente n'a que des pôles comme singularités)

$$B(t) = \sum_0^{\infty} c_j \exp(r_j t)$$

pourvu que la série converge par exemple sous la condition  $\sum |c_j| < \infty$

avec :

$$c_j = \lim_{r \rightarrow r_j} (r - r_j) \frac{L(G(t))(r)}{1 - L(N(t))(r)}$$

$$c_j = \frac{L(G(t))(r_j)}{- \left[ \frac{d}{dr} (L(N(t))(r)) \right]_{r=r_j}}$$

$$= \frac{\int_0^{\beta} \exp(-r_j t) G(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} a \exp(-r_j a) N(a) da}$$

et  $[\alpha, \beta]$  l'intervalle de fécondité.

Par ailleurs, on a le rapport:

$$\sum_0^{\infty} \frac{c_j \exp(r_j t)}{c_0 \exp(r_0 t)} \rightarrow 1 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \text{ car } \operatorname{Re} r_j < r_0$$

On en déduit que:

$$B(t) \approx c_0 \exp(r_0 t)$$

avec  $r_0$  la solution réelle de l'équation caractéristique.

### Remarque

Le comportement asymptotique de  $B(t)$  influence celui de la solution non triviale  $u(a, t)$  quand  $t$  devient assez grand, et ceci grâce à la forme intégrée de la solution de Lotka -Mc- Kendrick.

Par conséquent la solution du modèle de Lotka évolue de la manière suivante:

$$u(a, t) \approx C_0 \pi(a) \exp(-r_0 a) \exp(r_0 t) \text{ et } C_0 \text{ une constante réelle.}$$

On voit que le comportement de la solution est réglé par le paramètre  $r_0$ .

#### Interprétation du paramètre $r_0$ :

$r_0$  étant l'unique solution réelle (strictement positive) de l'équation suivante:

$$\int_0^{A \max} \pi(a) b(a) \exp(-ra) da = 1 \text{ appelée équation caractéristique de Lotka}$$

Définissons le profil d'âge :  $\omega(a, t) = \frac{u(a, t)}{P(t)}$

Sachant que  $P(t) = \int_0^{A \max} u(a, t) da$ , et appliquons le modèle de Lotka Mc Kendrick à

$$u(a, t) = P(t) \omega(a, t)$$



On aura:

$$\begin{cases} \frac{d}{da} \omega(a,t) + \frac{d}{dt} \omega(a,t) + \frac{1}{p(t)} \frac{d}{dt} p(t) \omega(a,t) = -m(a) \omega(a,t) \\ \int_0^{A_{\max}} \omega(a,t) da = 1 \\ \omega(a,0) = \omega_0(a) \end{cases} \quad \text{équation compl.} \\ a \geq 0, t \geq 0.$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} P'(t) &= \int_0^{A_{\max}} \frac{d}{dt} [u(a,t)] da \\ P'(t) &= - \int_0^{A_{\max}} \frac{d}{da} [u(a,t)] da - \int_0^{A_{\max}} m(a) u(a,t) da \\ P'(t) &= P(t) \int_0^{A_{\max}} [b(a) - m(a)] \omega(a,t) da \end{aligned}$$

Où l'on a pris :

$$u(A_{\max}, t) = 0$$

ainsi:

$$P'(t) = r(t) P(t)$$

avec:

$$r(t) = \int_0^{A_{\max}} [b(a) - m(a)] \omega(a,t) da \rightarrow r \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

$r$  représente le taux de croissance naturel donnant un profil d'âge d'équilibre  $\omega(a)$ , il est dit paramètre Malthusien intrinsèque à la population.

Considérons le système stationnaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{d}{da} \omega(a) + m(a)\omega(a) + \omega(a) \int_0^{A_{\max}} [b(a) - m(a)] \omega(a) da = 0 \\ \omega(0) = \int_0^{A_{\max}} b(a)\omega(a) da \\ \int_0^{A_{\max}} \omega(a) da = 1 \end{cases}$$

en posant:

$$r = \int_0^{A_{\max}} [b(a) - m(a)] \omega(a) da$$

Le profil d'âge d'équilibre est donnée par:

$$\omega(a) = \frac{e^{-ra} \pi(a)}{\int_0^{A_{\max}} e^{-ra} \pi(a) da}$$

Cette solution doit satisfaire la deuxième équation du système précédent; d'où la condition sur r

$$1 = \int_0^{A_{\max}} e^{-ra} b(a) \pi(a) da$$

C'est exactement l'équation caractéristique de Lotka, ainsi on doit avoir:  $r=r_0$  et  $\omega(a)$  est le profil d'âge asymptotique des  $\omega(a,t)$ .

### Stabilité du système

Un aspect important à étudier est la recherche de solutions stationnaires des systèmes et leur stabilité. Ces solutions ne dépendent pas du temps ( $u(a, t) = u(a)$ )

**Proposition 2**

Le modèle  $(S_0)$  admet deux solutions stationnaires: une solution stationnaire triviale notée  $u_1=0$  et une solution stationnaire non triviale notée  $u_2(a)$  donnée par :

$$u_2(a) = u(0)\pi(a) = \frac{P\pi(a)}{\int_0^{+\infty} \pi(a)da}$$

**Preuve**

$u(a)$  est une solution stationnaire de  $(S_0)$  si et seulement si  $u(a)$  est solution du système suivant:

$$(S_0) \begin{cases} u'(a) = -m(a)u(a), & a \geq 0, \\ u(0) = \int_0^{+\infty} b(a)u(a)da, \\ P = \int_0^{+\infty} u(a)da. \end{cases}$$

Supposons que:

$$b(\cdot)\pi(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+),$$

*definez cette notation*

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème  $(S_0)$  admette une solution  $u(a)$  est que le taux de reproduction net soit égal à 1, c'est à dire:

$$R = \int_0^{+\infty} b(a)\pi(a)da = 1$$

Dans ce cas la solution stationnaire correspondante à  $P$  est donnée par:

$$u(a) = u(0)\pi(a) = \frac{P\pi(a)}{\int_0^{+\infty} \pi(a)da}$$

(et si  $u(0)=0$ , on aura la solution triviale  $u_1$ )

A présent, on s'intéresse au comportement asymptotique des  $u(a, t)$  solutions du système  $(S_0)$ , vis à vis de l'état d'équilibre.

**Définition**

Une solution stationnaire  $u(a)$  est asymptotiquement stable si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que si  $|p(a) - u(a)| < \delta$ , on a:

$$|u(a, t) - u(a)| \leq \varepsilon \quad (\text{stabilité})$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{a \in [0, A_{\max}]} |u(a, t) - u(a)| = 0$$

**Proposition 3**

Soit  $B: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  solution de l'équation de renouvellement, alors on a:

$$B(t) \leq b_\infty M \exp(b_\infty t)$$

où  $b_\infty = \sup_{[0, A_{\max}]} b, M = \sup_{t \in [0, t]} \int_0^\infty p(a) da$

**Preuve**

Revenons à l'opérateur  $S$ ;

$$\begin{aligned} S(B) &= \int_0^t B(s) N(t-s) ds + G(t) \\ &\leq \int_0^t b_\infty M \exp(b_\infty s) ds + b_\infty M \\ &\leq b_\infty M \exp(b_\infty t) \end{aligned}$$

$S(B(t)) = \int_0^t B(s) N(t-s) ds + G(t)$   
 Je ne comprends pas les inégalités.

**Théorème 2 [5]**

Les solutions stationnaires:

$$(i) \quad u_2(a) = \frac{P}{\int_0^{+\infty} \pi(a) da} \pi(a) \text{ est asymptotiquement stable. De plus si } p(\cdot)$$

satisfait (H<sub>4</sub>) alors la solution correspondante vérifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{[0, A_{\max}]} |u(a, t) - u_2(a)| = 0$$

(ii) la solution triviale est instable.

**Idée de la démonstration <sup>1</sup>**

Commençons par étudier le comportement de B(t):

• En un premier temps on décrit comment la distribution d'âge initial influence le comportement asymptotique de B(t):

Soient B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub> <sup>aux sol</sup> solutions de l'équation de renouvellement avec les conditions initiales p<sub>1</sub> et p<sub>2</sub> respectivement. Alors, d'après la proposition 3 et utilisant l'inégalité de Granwall, on trouve qu'il existe une constante dépendant de T, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> et en  
le

$$M_i = \int_0^{\omega} p_i(a) da, \quad i = 1, 2.$$

telle que:  $\forall t \in [0, T]$ : on a la propriété suivante:

$$|B_1(t) - B_2(t)| \leq C(T, M_1, M_2) \int_0^{\omega} |p_1(a) - p_2(a)| da.$$

Cette propriété exprime le fait que les solutions u(a, t) dépendent continûment de la distribution d'âge initial.

<sup>1</sup> La démonstration de ce théorème étant longue et assez laborieuse, nous renvoyons à l'article de Di Blasio, Lanneli et Sinestrari [5], où elle est développée en totalité.

• Ensuite, nous donnons à  $B(t)$  des estimations constantes soit égales à une constante  $c$  sur des intervalles  $I$  fermés de longueur  $\omega$  : l'âge maximal de fertilité.

Il s'avère que soit  $c = 0$ , soit  $c = B_2 = \frac{P}{\int_0^{+\infty} \pi(a) da}$ , et si  $B(t) > 0$  sur  $I$  alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = B_2.$$

*Comment*

• Ainsi les solutions  $u(a, t) = B(t-a) \pi(a)$  tendent asymptotiquement vers  $u_2(a) = B_2 \pi(a)$  la solution stationnaire non triviale.

## II.2. MODELE NON LINEAIRE

Dans la formulation du modèle précédent une partie des phénomènes de population totale-dépendance est ignorée puisque les paramètres de natalité et de mortalité ne dépendent pas de la population totale  $P$ .

Gurtin et Mac Camy [1] proposent le premier modèle avec dépendance par rapport à la population totale  $P$  en prenant  $b = b(a, P)$ ,  $m = m(a, P)$ .

Ceci conduit à un système d'équations non linéaires:

$$(S_2) \begin{cases} Du(a,t) = -m(a,P(t))u(a,t), & a \geq 0, t \geq 0, \\ u(0,t) = \int_0^{\infty} b(a,P(t))u(a,t) da, & t > 0, \\ u(a,0) = P_0(a), & a \geq 0, \\ P(t) = \int_0^{\infty} u(a,t) da. \end{cases}$$

### II-2-1. ANALYSE MATHEMATIQUE DU MODELE

On procède de la même manière que dans le cas linéaire (utilisation de la technique des caractéristiques), on arrive à:

$$u(a, t) = \begin{cases} B(t-a) \exp\left(-\int_0^a m(x, P(t-a+x)) dx\right), & t > a, \\ P_0(a-t) \exp\left(-\int_0^t m(a-t+x, P(x)) dx\right), & t \leq a \end{cases}$$

*notation*

Pour connaître la solution  $u$  du système  $(S_2)$  sur  $\mathcal{R}^+ \times [0, T]$ , il est nécessaire et suffisant de connaître  $B(t)$  et  $P(t)$  sur  $[0, T]$ .

Plus précisément, après avoir remplacé dans la deuxième équation du système  $(S_2)$  par l'expression des  $u(a, t)$ , la recherche de la solution devient équivalente à la résolution du système des deux équations intégrales suivantes:

(E<sub>1</sub>):

$$B(t) = \int_0^t b(t-a, P(t)) \exp\left[-\int_a^t m(x-a, P(x)) dx\right] B(a) da + \int_0^{+\infty} b(a+t, P(t)) \exp\left[-\int_0^t m(x+a, P(x))\right] p(a) da$$

Et (E<sub>2</sub>):

$$P(t) = \int_0^t \exp\left[-\int_a^t m(x-a, P(x)) dx\right] B(a) da + \int_0^{+\infty} \exp\left[-\int_0^t m(x+a, P(a)) dx\right] P(a) da$$

Pour chaque  $P$  fixé, l'équation (E<sub>1</sub>) est une intégrale linéaire de Volterra, donc admet une solution unique  $B$  notée  $K_T(P)$ .

Si dans (E<sub>2</sub>) on remplace  $B$  par  $K_T(P)$ , on définit un opérateur  $H_T$  qui a un point fixe unique  $P$  pour  $T$  suffisamment petit, ainsi on obtient l'existence et l'unicité locale. Sous l'hypothèse:

$$b = \sup_{a, p} b(a, P) < \infty$$

(avec  $T > 0$  quelconque) comme point Fixe d'un opérateur obtenu à l'aide du membre de droite de l'expression de la solution (voir [1] pour plus de détails).

**Remarque:**

Ce résultat est global car il établit l'existence et l'unicité sur tout ensemble de la forme  $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$  avec  $T > 0$  quelconque.

*R*

**Solutions stationnaires**

On procède de la même manière pour la recherche de solutions stationnaires, on aura un système semblable à celui donné par (S<sub>i</sub>), soit

$$(E_i) \begin{cases} u'(a) = -m(a, P)u(a), & a \geq 0, \\ u(0) = \int_0^{+\infty} b(a, P)u(a)da, \\ P = \int_0^{+\infty} u(a)da \end{cases}$$

L'existence de ce type de solution est assuré dès que le taux de reproduction

net=1

*est égale*

$$R(P) = \int_0^{\infty} b(a, P)\pi(a, P)da = 1$$

Dans ce cas les solutions stationnaires correspondantes à P sont données par:

$$u(a) = u(0)\pi(a, P) = \frac{P\pi(a, P)}{\int_0^{\infty} \pi(a, P)da}$$



## II-2-2. COMPARAISON ENTRE LES DEUX MODELES

En prenant en considération la population totale, le modèle de Gurtin Mac Camy représente mieux la réalité que celui de Lotka Mc Kendrick car par exemple: plus la population croit moins il y a de la nourriture et donc le taux de croissance diminue.

La solution du modèle de Gurtin MC Camy est donnée sous des conditions plus faibles que celle donnée par Lotka Mc Kendrick.

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution est global.

## III. CONCLUSION

En réalité, la forme structurale est très importante dans les modèles mathématiques établis par les dynamiciens, en effet; dans une population donnée les différentes classes d'âge ne contribuent pas de façon identique à la reproduction de nouveaux individus, et la mortalité n'atteint pas ces différentes classes avec un taux égal.

Les modèles ici exposés sont établis pour représenter l'évolution d'une population structurée en âge, par conséquent, des paramètres inconnus à priori interviennent dans l'évolution de plusieurs phénomènes, paramètres qui dépendent eux aussi de l'âge, et dont l'estimation numérique est nécessaire pour bien comprendre le comportement d'une telle population.

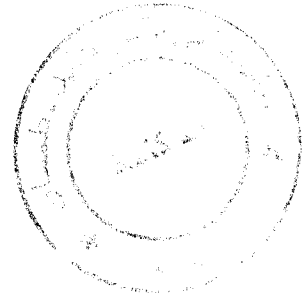
**CHAPITRE III**

**ETUDE NUMERIQUE**  
**D'UN PROBLEME D'E.D.P**  
**MODELISANT LES DYNAMIQUES**  
**DE POPULATION**  
**STRUCTUREE EN AGE.**

## ETUDE NUMERIQUE D'UN PROBLEME D'E.D.P MODELISANT LES DYNAMIQUES DE POPULATION STRUCTUREE EN AGE.

On considère le modèle suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -m u(a,t) & m > 0 \\ u(0,t) = B(t), \quad u(a,0) = u_0(a) \end{cases}$$



avec:

$u_0(\cdot)$  est la distribution d'âge initiale.

$B(t)$  est la fonction naissance.

$m$  est la mortalité totale (supposée constante, et ceci pour faciliter l'étude numérique du modèle).

$u(a, t)$  est la fonction d'âge  $a$  à l'instant  $t$ , recherchée.

### I. Discrétisation du modèle linéaire

Consacrons nous d'abord à l'étude de l'E. D. P. sans se soucier, en premier lieu, de la condition aux limites ni d'ailleurs de la condition initiale. On suppose que :

$$u \in C^3(\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+)$$

La discrétisation temporelle nécessite l'utilisation d'un développement limité: formule de Taylor d'ordre 1 avec reste de Lagrange d'ordre 2, soit:

$$u(a, t + \Delta t) = u(a, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a, t + \theta \Delta t), \quad \text{Où } 0 < \theta < 1$$

10

$$u(M_j) = u(j\Delta a, (n+1)\Delta t) = u(M_j) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(M_j) + o((\Delta t)^2).$$

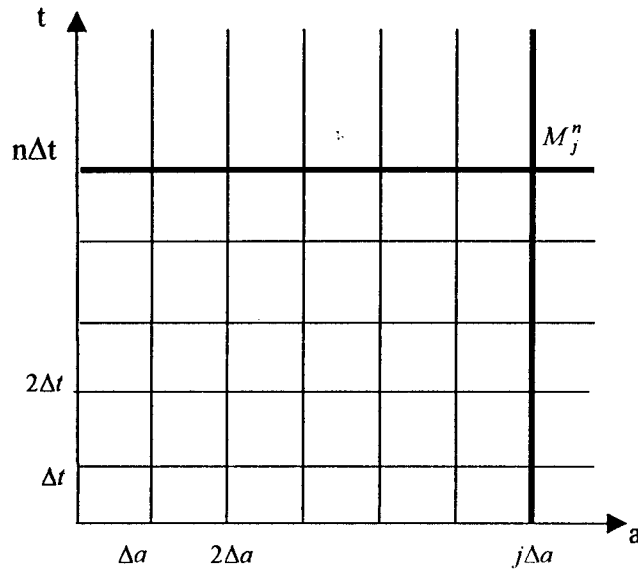


Schéma de la grille des maillages selon l'âge et le temps

Si on utilise un maillage (voir la figure ci-dessus), (de pas  $\Delta t$ ) de la demi droite temporelle ( $t \geq 0$ ), on notera par  $M_j^n = (j.\Delta a, n.\Delta t)$  un nœud de la grille du maillage dont l'ordonnée est:  $n.\Delta t, n \in \mathbb{N}$   $j$  constitue en outre un compteur sur le maillage (de pas  $\Delta a$ ) de la droite réelle des âges ( $a \in \mathbb{R}^+$ ),  $j \in \mathbb{N}$ .

Une formule de Taylor au voisinage du nœud s'écrit donc:

$o((\Delta t)^2)$  exprime le fait que le reste d'ordre 2 tend vers 0 lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Ceci dit, nous pouvons écrire:

$$\frac{u(M_j^{n+1}) - u(M_j^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(M_j^n) + o(\Delta t)$$

*ce n'est pas  
suffisamment  
correct*

Où  $o(\Delta t) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a, t + \theta \Delta t) \rightarrow 0$  quand  $\Delta t \rightarrow 0$ .

On dit que la discrétisation en temps est d'ordre 1.

Si on note par  $u_j^n$  une valeur approximative de  $u(M_j^n)$  alors le schéma aux différences d'approximation de:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(M_j^n) \text{ s'écrit: } \frac{\partial u}{\partial t}(M_j^n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

De même, pour discrétiser la dérivée partielle par rapport à  $a$  on utilise deux fois la formule de Taylor d'ordre 2 avec reste de Lagrange d'ordre 3:

$$u(a + \Delta a, t) = u(a, t) + \Delta a \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{(\Delta a)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}(a, t) + \frac{(\Delta a)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta'_1 \Delta a, t)$$

Où  $\theta'_1 \in ]0, 1[$ .

$$u(a - \Delta a, t) = u(a, t) - \Delta a \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{(\Delta a)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}(a, t) - \frac{(\Delta a)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta'_2 \Delta a, t)$$

Où  $\theta'_2 \in ]-1, 0[$ .

Faisons la différence entre les deux formules, on obtient:

$$u(a + \Delta a, t) - u(a - \Delta a, t) = 2 \Delta a \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{(\Delta a)^3}{3!} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta'_1 \Delta a, t) + \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta'_2 \Delta a, t) \right]$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe  $\theta' \in ]-1, 1[$  t. q:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta'_1 \Delta a, t) + \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta'_2 \Delta a, t) = 2 \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta' \Delta a, t) \quad \text{où } |\theta'| \leq \max(\theta'_1, -\theta'_2)$$

$\theta'_1 + \theta'_2$

De ce fait on peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{u(a+\Delta a, t) - u(a-\Delta a, t)}{2\Delta a} &= \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{(\Delta a)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial a^3}(a + \theta \cdot \Delta a, t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + O(\Delta a)^2 \end{aligned}$$

Si maintenant on écrit cette formule au voisinage de  $M_j^n = (j \cdot \Delta a, n \cdot \Delta t)$  on obtient:

$$\frac{u(M_{j+1}^n) - u(M_{j-1}^n)}{2\Delta a} = \frac{\partial u}{\partial a}(M_j^n) + O(\Delta a)^2$$

Où  $M_{j+1}^n = ((j+1)\Delta a, n\Delta t) = (j\Delta a + \Delta a, n\Delta t)$

Et  $M_{j-1}^n = ((j-1)\Delta a, n\Delta t) = (j\Delta a - \Delta a, n\Delta t)$

Si l'on approche, cette fois-ci,  $u(M_j^n)$  par  $u_j^n$ , le schéma aux différences correspondant à la discrétisation de  $\frac{\partial u}{\partial a}$  s'écrit finalement:

$\frac{\partial u}{\partial a}(M_j^n) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta a}$  et le schéma est d'ordre 2 car le reste l'est aussi.

le schéma aux différences total de discrétisation de l'E. D. P :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -m \cdot u, (m > 0)$$

$$\text{est: } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta a} = -m \cdot u_j^n$$

$$\text{Où: } u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta a} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - m \cdot \Delta t \cdot u_j^n$$

$$\text{et } u_j^{n+1} = (1 - m \cdot \Delta t) \cdot u_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta a} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Ce schéma est dit explicite car les valeurs de la solution discrète  $u$  au niveau temporel  $n+1$  sont déterminées explicitement en fonction des valeurs de  $u$  sur le maillage au niveau  $n$ .

Ce schéma est aussi centré (en âge) à cause de la discrétisation centrée en âge de la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $a$ :

$$\frac{\partial u}{\partial a} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta a} \text{ et } M_j^n = \frac{M_{j+1}^n + M_{j-1}^n}{2}$$

Ce schéma est d'ordre 1 car l'on prend toujours le minimum des ordres de discrétisation des dérivées partielles: dans notre cas la discrétisation en temps est d'ordre 1 et celle en âge est d'ordre 2 donc le schéma global de l'E. D. P. est d'ordre 1.

## II. Etude de la stabilité du schéma

### Proposition

Le schéma aux différences:  $u_j^{n+1} = (1 - m \cdot \Delta t) \cdot u_j^n + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta a} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$  est stable si:

$$\Delta t < \frac{2}{m} \text{ et } \frac{\Delta t}{\Delta a} = t_a \leq (m \Delta t (2 - m \cdot \Delta t))^{\frac{1}{2}}$$

### Preuve

Pour étudier la stabilité du schéma aux différences ainsi construit on impose comme condition initiale une perturbation de nature périodique et on voit la réponse du schéma à partir du comportement de la solution discrète:

$$u_0(a) = \alpha \exp(ipa), \quad \alpha, p \in \mathcal{R} \text{ et } i = \sqrt{-1} \in \mathcal{C} \text{ : le corps des nombres complexes.} \quad / \mathcal{R} / \mathcal{C}$$

Sur le maillage des âges au niveau temporel  $n=0$ :

$$u_0(M_j^0) \text{ s'écrit: } u_0(j\Delta a) = u_j^0 = \alpha \exp(ipj\Delta a)$$

A ce niveau temporel, essayons d'établir une relation simple reliant  $u_j^1$  à  $u_j^0$ , moyennant un facteur indépendant des compteurs  $j$  et  $n$ :

$u_j^1 = \delta u_j^0$ ,  $j \in N$  (ou  $j \in N \cap [\alpha, \beta]$ ), où  $\delta$  est dit facteur d'amplification qu'il faudra déterminer.

$$\begin{aligned} u_j^1 &= (1 - m \Delta t) u_j^0 - \frac{\Delta t}{2 \Delta a} (u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0) \\ &= (1 - m \Delta t) \alpha \exp(i p j \Delta a) - \frac{\Delta t}{2 \Delta a} [\exp(i p (j+1) \Delta a) - \exp(i p (j-1) \Delta a)] \\ &= (1 - m \Delta t) \alpha \exp(i p j \Delta a) - \frac{\Delta t}{2 \Delta a} [\alpha \exp(i p j \Delta a)] [\exp(i p \Delta a) - \exp(-i p \Delta a)] \\ &= \left[ 1 - m \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta a} i \frac{\exp(i p \Delta a) - \exp(-i p \Delta a)}{2i} \right] (\alpha \exp(i p j \Delta a)) \\ &= \left( 1 - m \Delta t - i \frac{\Delta t}{\Delta a} \sin(p \Delta a) \right) u_j^0 \\ &= \delta u_j^0 \end{aligned}$$

Où  $\delta = 1 - m \Delta t - i \frac{\Delta t}{\Delta a} \sin(p \Delta a)$

c'est le facteur d'amplification que l'on cherchait  $\delta \in \mathbb{C}$ .

Montrons, à présent, par récurrence que:

$$u_j^n = \delta^n \cdot u_j^0$$

Nous savons déjà que:

$$u_j^1 = \delta u_j^0$$

Supposons alors que:

$$u_j^n = \delta^n u_j^0$$

*replacer les indices*



et montrons que:

$$u_j^{n+1} = \delta^{n+1} u_j^0$$

Mais:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= (1 - m \Delta t) u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta a} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &= (1 - m \Delta t) \delta^n u_j^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta a} (\delta^n u_{j+1}^0 - \delta^n u_{j-1}^0) \\ &= (1 - m \Delta t) \delta^n \alpha \exp(ipj\Delta a) - \frac{\Delta t}{2\Delta a} \delta^n (\alpha \exp(ip(j+1)\Delta a) - \alpha \exp(ip(j-1)\Delta a)) \\ &= (1 - m \Delta t) \delta^n \alpha \exp(ipj\Delta a) - i \frac{\Delta t}{\Delta a} \delta^n \alpha \exp(ipj\Delta a) \left[ \frac{\exp(ip\Delta a) - \exp(-ip\Delta a)}{2i} \right] \\ &= \delta^n \alpha \exp(ipj\Delta a) \left[ 1 - m \Delta t - i \frac{\Delta t}{\Delta a} \sin(p\Delta a) \right] \\ &= \delta^{n+1} \alpha \exp(ipj\Delta a) \\ &= \delta^{n+1} u_j^0 \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

A présent, nous avons montré que si on imprime au schéma aux différences une perturbation périodique du type :

$$u_j^0 = \alpha \exp(ipj\Delta a) = \alpha [\cos(pj\Delta a) + i \sin(pj\Delta a)]$$

alors la solution discrète du schéma répond à l'application de la condition initiale à travers la formule:

$$u_j^n = \delta^n u_j^0 \quad n \in N, j \in Z$$

La suite  $\{u_j^n\}_{n \in N}$  est donc convergente si et seulement si la suite géométrique  $\{\delta^n\}_{n \in N}$  est convergente car :

$$|u_j^n| = |\delta^n u_j^0| \leq |\delta|^n |u_j^0| \leq |\alpha| |\delta|^n$$

puisque:

$$|u_j^0| = |\alpha \exp(i p j \Delta a)| = |\alpha|$$

La suite  $(\delta^n)_{n \geq 1}$  est convergente  $\Leftrightarrow |\delta| \leq 1$

Or,

$$|\delta| = \left[ (1 - m \Delta t)^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta a^2} \sin^2(p \Delta a) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Et enfin

$$\begin{aligned} |\delta| \leq 1 &\Leftrightarrow (1 - m \Delta t)^2 + \left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 \sin^2(p \Delta a) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + m^2 \cdot \Delta t^2 - 2m \cdot \Delta t + \left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 \sin^2(p \Delta a) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 \sin^2(p \Delta a) \leq 2m \cdot \Delta t - m^2 \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

A ce niveau, si l'on se rappelle que  $p \in \mathfrak{R}$  quelconque alors par passage au suprêmmum sur  $p$  on peut écrire que la dernière inégalité est équivalente à:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 &\leq 2m \cdot \Delta t - m^2 \cdot \Delta t^2 \text{ car } \sup_{p \in \mathfrak{R}} (\sin^2(p \cdot \Delta a)) = 1 \\ \text{et } \left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 \sin^2(p \Delta a) &\leq \left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 \leq 2m \cdot \Delta t - m^2 \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

De ce fait, et pour l'étude de la stabilité on ne considérera que l'inégalité:

$$\left( \frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 + m^2 \cdot (\Delta t)^2 - 2m \cdot \Delta t \leq 0$$

Posant alors  $m_t := m \cdot \Delta t > 0$  et  $t_a := \frac{\Delta t}{\Delta a}$  la condition de stabilité s'écrit alors:

$$t_a^2 + m_t^2 - 2m_t \leq 0$$

Considérons alors le polynôme en  $t_a$  :  $P_{t,a} = t_a^2 + m_t^2 - 2m_t$

La condition de stabilité devient :

$$P_{t,a} \leq 0$$

et une étude suivie d'une discussion suivant les valeurs de  $m_t$  nous donnent le signe de

$P_{t,a}$  :

- Si  $m_t > 2$ , alors  $2 - m_t < 0$  et  $m_t > 0$  nous donnent :  $t_a^2 < 0$  impossible.

Et dans ce cas  $P_{t,a}$  n'a pas de racines et son signe est du signe du coefficient de  $t_a^2$  qui est

1

$$\text{sgn}(p_{t,a}) = 1 \quad \forall t_a$$

Or la condition de stabilité s'écrit :

$$P_{t,a} \leq 0$$

Mais :

$$P_{t,a} > 0 \quad \forall t_a$$

Contradiction et on dit que lorsque :

$$m_t \Delta t > 2 \text{ c'est à dire } \Delta t > \frac{2}{m}$$

- Si  $m_t < 2$  c'est à dire si  $\Delta t < \frac{2}{m}$  alors  $2 - m_t > 0$ , et dans ce cas  $P_{t,a}$  admet deux racines :

$$t_{a,1,2} = \pm \sqrt{m_t(2 - m_t)}$$

$t_a$  étant positif on ne prend que la racine positive  $t_{a,2}$ , d'où l'on déduit que  $P_{t,a}$  est négatif ou nul si :

$$t_a \in ]0, t_{a,2}] = ]0, \sqrt{m_t(2 - m_t)}]$$

- Si  $m_t = 2$ , on trouve :  $\frac{\Delta t}{\Delta a} = 0 \Rightarrow \Delta t = 0 \Rightarrow m_t = m_t \Delta t = 0$  ? évident

*Qu'est ce que  
ca veut dire  
évident  
ici*

### III. Conclusion

Le schéma aux différences  $u_j^{n+1} = (1 - m \cdot \Delta t) \cdot u_j^n + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta a} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$  est stable si:

$$\Delta t < \frac{2}{m} \text{ et } \frac{\Delta t}{\Delta a} = t_a \leq (m \Delta t (2 - m \cdot \Delta t))^{\frac{1}{2}}$$

## **CHAPITRE IV**

# **IDENTIFIABILITE ET IDENTIFICATION DES PARAMETRES**

# IDENTIFIABILITE ET IDENTIFICATION DES PARAMETRES

## I. INTRODUCTION

Soit un processus réel, et son modèle mathématique, deux propriétés présentent une importance particulière dans le contexte de la construction de modèles qui sont: **l'identifiabilité** et **l'identification** des paramètres de ces modèles.

Avant de détailler l'étude de ces deux notions, il va falloir rappeler quelques définitions concernant certains outils utilisés en automatique.

### I.1. SYSTEME

Un système ou un processus est une partie de l'univers qui nous entoure. En halieutique par exemple, un système évolue en fonction de la natalité, du vieillissement, et des mortalités naturelles et par pêche. Dans le système on observe certaines grandeurs caractéristiques et le résultat de ces observations forme le vecteur des **sorties** noté  $y$ , par ailleurs, pour avoir une certaine performance dynamique, nous agissons sur ce système par le biais de grandeurs que nous connaissons c'est le vecteur des **entrées** noté  $U$ .

En halieutique, le système c'est **le stock exploité**, l'entrée c'est **l'effort de pêche**, la sortie ce sont **les captures**.

### I.2. MODELE

Le modèle  $M$  est une règle qui permet de calculer à partir des variables mesurées sur le système d'autres variables dont on espère qu'elles ressemblent à celles du système

en question. En général le modèle calcule à partir de l'entrée  $U$  du processus réel, une sortie  $y_M$  devant ressembler le plus possible à  $y$  sa valeur réelle.

Dans le processus réel, interviennent souvent des inconnues (constantes ou variables), qu'on estime à partir des données expérimentales, c'est l'ensemble des paramètres notés  $P$ , et le modèle est dit paramétrique.

La structure du modèle étant choisie, l'estimation de ses paramètres est liée à un critère de précision.

### I.3. CRITERE

On suppose que le modèle paramétrique  $M(P)$  et le processus réel ont les mêmes entrées, sachant que l'erreur de sortie est la différence entre la sortie réelle et celle du modèle.

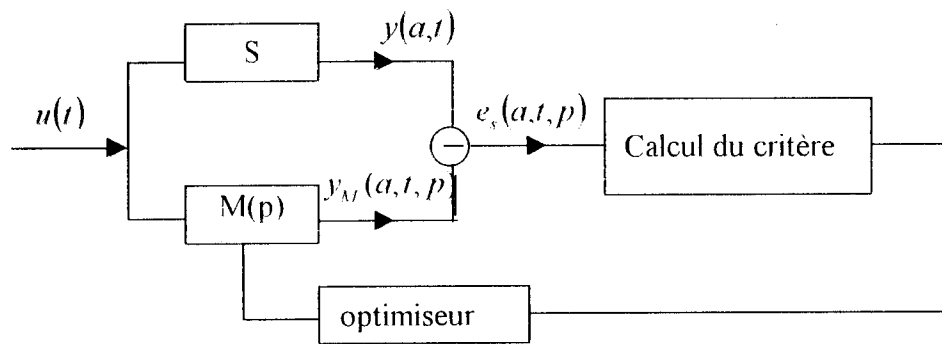
On espère que l'erreur de sortie tende vers 0, pour cela on définit un critère  $j$  dépendant des paramètres et de la structure à minimiser et ceci pour obtenir la meilleure valeur  $P^*$  des paramètres au sens de ce critère avec une erreur de sortie négligeable.

### I.4. OPTIMISEUR

Procédé itératif : partant de  $p^k$  l'estimée de  $p^*$  à la  $k^{\text{ème}}$  itération associé à la valeur du critère  $j(p^k)$ , l'algorithme d'optimisation cherche un  $p^{k+1}$  de sorte que:

$$j(p^{k+1}) < j(p^k).$$

Ceci nécessite un choix crucial de la valeur initial  $p^0$  qui peut avoir un effet sur la convergence de la méthode itérative.

Structure d'identification

## II. IDENTIFIABILITE DES MODELES

### Définition 1

Soit un système, représenté par un modèle mathématique.

Un modèle est dit identifiable si à partir de l'observation de la sortie  $y$  et en supposant l'entrée  $u$  connue, on peut déduire d'une manière unique la valeur des paramètres.

En halieutique la question qui se pose est la suivante:

Peut-on estimer les paramètres d'un modèle donné représentant l'évolution de la population marine à partir des captures (sorties) et l'effort de pêche (entrée)?

L'identifiabilité consiste donc à régler les paramètres du modèle d'une manière unique pour qu'il y ait un comportement entrée/sortie identique à celui du processus réel, pour toute entrée et à tout instant.



**Définition 2**

On dit qu'une propriété est structurelle si elle est vraie pour presque toute valeur des paramètres et fautive sur un sous espace de mesure nulle de l'espace paramétrique.

**Remarque 1 :**

L'identifiabilité des modèles paramétriques est une propriété structurelle .

**Définition 3** *est vraie pour l'ensemble des paramètres*

On dit que le modèle  $M(p)$  est structurellement globalement identifiable (s. g. i) si pour presque tout paramètre le comportement entrée/sortie du modèle vérifie :

$$M(p) = M(p^*) \Rightarrow p = p^*$$

**Remarque 2:**

Le modèle  $M(p)$  est structurellement globalement identifiable si pour presque tout  $p \in P$  le système(s) :  $M(p) = M(p^*)$  admet une solution unique  $p^* = p$ .

**II.1. IDENTIFIABILITE DU MODELE DE LOTKA MC KENDRICK** *I*

Avant de mettre en œuvre les procédures de collecte des données et d'estimation, il est naturel de se poser les questions suivantes:

Quelles sont les paramètres du modèle de LOTKA MC-KENDRICK ?

Ces paramètres, ont ils une signification biologique?

Les mesures envisagées contiendront-elles assez d'information pour l'estimation de l'ensemble de ces paramètres noté  $P$  ?

*Est-ce possible ?*

Peut on donner à chacun de ces paramètres une valeur unique?

Rappelons d'abord le modèle:

$$(S_0) \begin{cases} Du(a,t) = m(a)u(a,t) & a \geq 0, t \geq 0 \\ u(0,t) = \int_0^{A_{\max}} b(a)u(a,t)da & t > 0 \\ u(a,0) = p(a) & a \geq 0 \\ y(a,t) = q(a)f(t)u(a,t) \end{cases}$$

Utilisons la définition de l'identifiabilité pour un modèle paramétrique  $M(P)$  associé à un vecteur des paramètres  $P$ .

#### Définition 4

Un modèle paramétrique  $M(P)$  est identifiable si et seulement si:

$$y(a,t, p_1) = y(a,t, p_2), \forall a \geq 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

Avec  $P_i$  est le vecteur des paramètres relatif à la sortie  $y_i$  ( $i=1, 2$ )

Notons  $y_i(a, t)$  au lieu de  $y(a, t, P_i)$  la sortie du modèle relative au vecteur des paramètres  $P_i$ .

#### Remarque 3 :

On supposera par la suite que les taux de fécondité, de mortalité naturelle et éventuellement le taux de capturabilité sont pratiquement constants, d'ailleurs les taux vitaux (ceux de la fertilité et de la mortalité naturelle) sont même supposés connus par les biologistes.

Retrouvons d'abord les dynamiques de la sortie  $y(a, t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t} &= -qfmu(a,t) + q'fu(a,t) + qf'u(a,t) \\ &= [-(m' + qf) + \frac{q'}{q} + \frac{f'}{f}]y(a,t) \end{aligned}$$

Avec  $q'(\cdot)$ ,  $f'(\cdot)$  sont les dérivées respectives de  $q$  et de  $f$  par rapport à leurs variables (ici elles sont nulles car la capturabilité et l'effort de pêche sont supposés constants).

Essayons d'exploiter la définition 4

Supposant que:  $X_1(a,t) = y_2(a,t) \quad \forall a \geq 0, \forall t \geq 0, \forall f$  c'est à dire:

$-y_1$

$$\begin{cases} y_1(a,t) = y_2(a,t) & \forall a \geq 0, \forall t \geq 0 & (d1) \\ y_1(0,t) = y_2(0,t) & \forall t > 0 & (d2) \\ y_1(a,0) = y_2(a,0) & \forall a > 0 & (d3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (d1) &\Rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial y_2}{\partial a} + \frac{\partial y_2}{\partial t} \\ &= [-(m_{0,1}) + q_1]f + \frac{f'}{f}y_1 = [-(m_{0,2}) + q_2]f + \frac{f'}{f}y_2 \text{ car } q' = 0 \\ &\Rightarrow -(m_{0,1} + q_1f)y_1 = -(m_{0,2} + q_2f)y_2, \text{ ceci } \forall f \\ &\Rightarrow m_{0,1} = m_{0,2} \text{ et } q_1 = q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(0,t) = y_2(0,t) &\Rightarrow q_1 f u_1(0,t) = q_2 f u_2(0,t) \\ \text{et:} &\Rightarrow q_1 f \int_0^{A_{\max}} b_1 u_1(a,t) da = q_2 f \int_0^{A_{\max}} b_2 u_2(a,t) da \end{aligned}$$

Or,  $y_1(a,t) = y_2(a,t)$  d'où  $b_1 = b_2$ .

$$\begin{aligned} \text{et:} & y_1(a,0) = y_2(a,0) \Rightarrow q_1 f(0)u_1(a,0) = q_2 f(0)u_2(a,0), \text{ ceci } \forall f \\ & \Rightarrow u_1(a,0) = u_2(a,0) \quad \text{car } q_1 = q_2 \end{aligned}$$

## Conclusion

Connaissant les sorties (captures) du modèle de Lotka Mc Kendrick et l'entrée (l'effort de pêche), les paramètres de ce modèle sont identifiables.

### III. IDENTIFICATION DES PARAMETRES

Dans ce qui précède, on a examiné un aspect qualitatif, celui de l'identifiabilité des paramètres, ceci conduit naturellement à une préoccupation quantitative. Il s'agit d'évaluer le mieux possible au sens d'un critère de précision ces paramètres. Cette phase nécessite la collecte de données expérimentales concernant éventuellement l'entrée et/ou la sortie du modèle paramétrique.

Ces données ne sont en général pas précises car liées aux caractéristiques de la pêche exercée: par exemple l'effort de pêche appliqué au stock n'est pas exprimé en une unité universelle mais en une unité spécifique à la technique de pêche utilisée.

Pour un système aquatique représentant l'évolution d'une population marine structurée en âge, des données sur les captures ayant l'âge  $a$  à l'instant  $t$ , sur l'effort de pêche à tout instant  $t$ , (et peut être sur le nombre d'œufs pondus à tout moment) peuvent fournir les estimations nécessaires pour l'identification des paramètres, car ils contiennent assez d'informations sur le stock.

Toute flottille ou emmenée de pêche est caractérisée par son profil d'exploitation: vecteur de capturabilité par âge  $q(a)$  et par conséquent le nombre de captures  $y(a, t)$  ayant l'âge  $a$  à tout instant  $t$ , et par l'effort de pêche qu'elle a imprimé au stock.

Une fois la collecte des données faite, on essaie à partir de ces dernières d'identifier les paramètres du modèle de Lotka Mc Kendrick.

L'estimation de ces paramètres peut se faire de manières diverses, une méthode classique se basant sur l'optimisation d'un critère explicite est la technique des moindres carrés.

Le critère à optimiser est quadratique et est donné par:

$$J(\theta) = 1/2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^J [y_{i,j} - y(i,j,\theta)]^2$$

Avec:

$X_{i,j}$ : le nombre des captures réelles ayant l'âge  $a_i$ , à l'instant  $t_j$ . y

$X(i, j, \theta)$ : le nombre de captures associées aux  $u(i, j)$ , simulées à partir du système discrétisé (voir chapitre 3) et relatives au vecteur des paramètres  $\theta$ . y

On se propose donc de minimiser le critère quadratique pour récupérer les paramètres  $\theta$ , pour cela :

Connaissant une estimation initiale  $\theta_0$  du vecteur des paramètres  $\theta$ , on génère une suite  $(\theta_k)_k$  utilisant la méthode d'optimisation de Levenberg- Marquardt [10] sous **Matlab-toolbox**.

L'algorithme de cette méthode est représenté par la relation itérative suivante:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - [g^T(\theta_k)g(\theta_k) + \lambda_k I]^{-1} g^T(\theta_k) y'(\theta_k).$$
 y

Où:  $g(\theta)$ : le gradient du vecteur  $(y(i, j, \theta) - y_{i,j})_{i=1, N, j=1, J}$

$$y(\theta) = (y(i, j, \theta) - y_{i,j})_{i=1, N, j=1, J}$$

#### Remarque 1 :

Cette méthode est convergente, et pour un bon choix de  $\theta_0$ , la convergence est quadratique (elle combine l'algorithme du gradient et celui de Newton, et, donc conjugue leurs avantages).

On s'arrête dès que:  $|\theta_{k+1} - \theta_k| < \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est choisi très petit, et on prendra comme point optimal  $\theta^* = \theta_{k+1} \approx \theta_k$ .

Revenons au modèle paramétrique de Lotka Mc-Kendrick:

Rappelons encore une fois que:

- Pour un groupe d'âge donné, le taux de mortalité naturelle est supposé inchangé quelles que soient les modalités de l'exploitation, et notamment en l'absence de l'exploitation.
- Celle-ci ne modifiant guère les estimations des effectifs, elle est identifiable indépendamment du modèle. C'est pourquoi seuls les résultats avec:  $m_0 = 0.2$  sont reportées.
- Sur une courte période de temps, on suppose généralement que la capturabilité ne dépend pas du temps, et souvent on préfère limiter la phase d'estimation de ce paramètre à la période sur laquelle on est plus ou moins sûr que la capturabilité ne varie qu'autour d'une valeur pratiquement constante.

Du fait de la rareté des poissons âgés dans la population, il y a la faible capturabilité qu'on suppose négligeable après un certain âge, et de même avant un âge minimal de capturabilité.

Le taux de fécondité étant connu par les biologistes, on pourra s'en servir comme une donnée expérimentale pour lancer un programme de simulation numérique.

Finalement, on se propose de diagnostiquer la situation du stock initial, pour cela on a lancé des procédures numériques permettant d'évaluer ces stocks qui sont fonction de l'âge.

### III.1. RESULTATS DE LA SIMULATION NUMERIQUE

Le programme de simulation numérique pour l'identification des paramètres (surtout le stock, et éventuellement la capturabilité), est élaboré sous Matlab 4.2., dans lequel on a utilisé comme données expérimentales:

- les captures prises par classe d'âge et ceci à l'instant  $t$ : puisque les captures constituent la principale fraction observable du stock, (estimations obtenues de la thèse de D.Pelletier).
- l'effort de pêche qui dépend seulement du temps: On suppose que la période sur laquelle on pêche est une année, et on suppose que pour certains poissons qu'on peut pêcher durant toute l'année (les sardines par exemple), l'effort de pêche est connu pendant toute l'année, et pour notre cas on le prend pratiquement constant.

En utilisant ces données, l'algorithme de minimisation utilisé est basé sur la méthode de Levenberg- Marquardt [10], il minimise au mieux l'écart entre les captures expérimentales et simulées pour fournir les valeurs optimales des paramètres, les résultats sont les suivants:

1<sup>0</sup>) La distribution d'âge initial devra suivre une allure qu'on pourra approcher par une loi gaussienne centrée en l'âge moyen de fécondité, en effet, en supposant que cette distribution est le vecteur des paramètres à estimer de la meilleure manière, après simulation numérique, la représentation graphique de cette paramétrisation est donnée par les figures IV.1 et IV. 2.

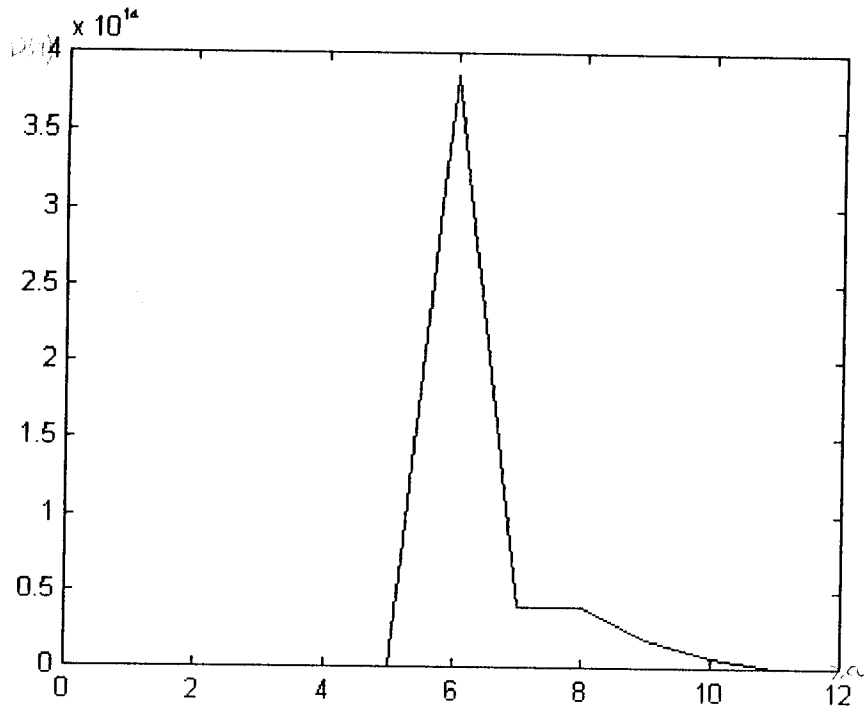


Figure IV.1: Représentation du stock initial (en utilisant la méthode de Levenberg- Marquardt).

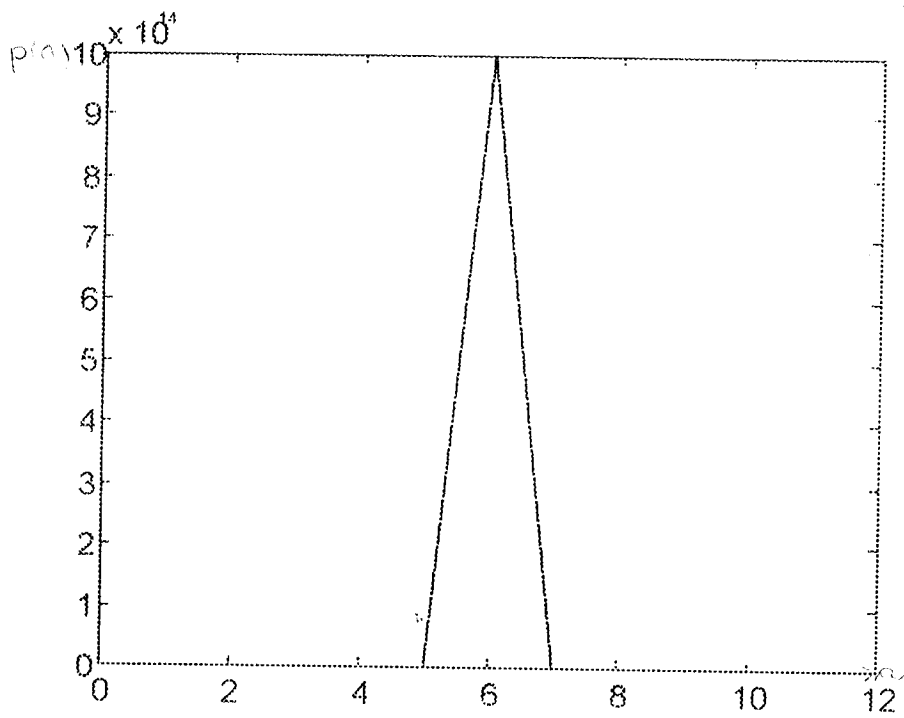


Figure IV.2: Représentation du stock initial (en utilisant la méthode de la fonction minimisante).



Les deux techniques de minimisation, utilisées pour retrouver l'allure de la distribution d'âge initial montrent qu'on pourra se limiter à une certaine classe de fonctions pour représenter le stock initial (voir figure IV.1, figure IV. 2); plus précisément, le stock initial peut être représenté par une loi gaussienne centrée ainsi paramétrée:

$$P(a)=c. \exp [-r (a-a_0)^2].$$

Où  $a_0$  l'âge moyen de fertilité,  $c$ ,  $r$  sont des paramètres de pondération à identifier.

2<sup>o</sup>) Les valeurs des paramètres:

Pour les valeurs initiales suivantes:

$$q_0=0.08$$

$$C_0=1.e04$$

$$r_0=0.01$$

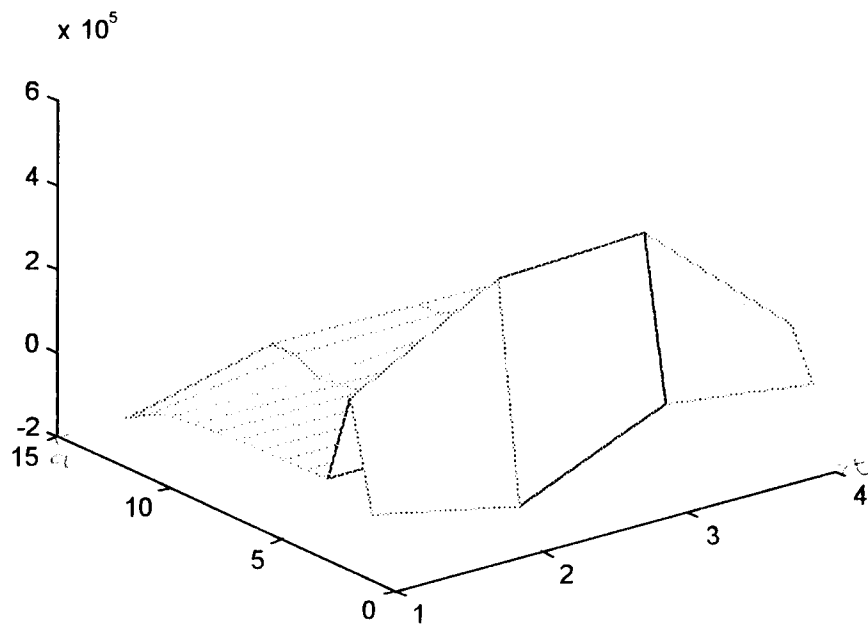
La minimisation de l'écart quadratique entre les captures expérimentales et les captures simulées par le procédé de Levenberg- Marquardt a fourni les valeurs suivantes:

$$q=0.0143$$

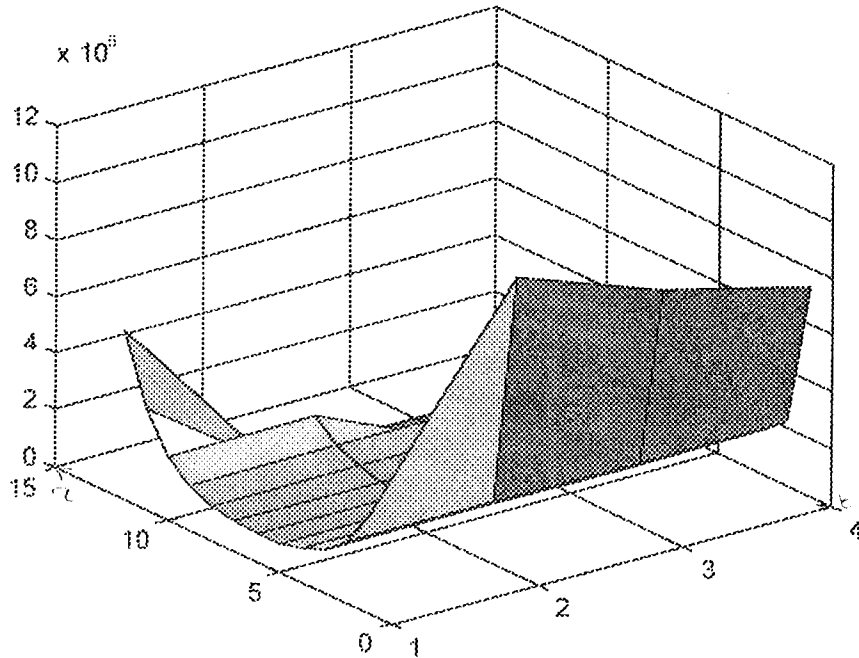
$$C=99999.9999$$

$$r=-0.0494$$

Et pour ces valeurs là, la figure IV.3 représente la surface de la différence quadratique entre les captures (expérimentales et simulées), minimisée par cette méthode.



**Figure IV.3:** Représentation de la surface "écart quadratique" minimisée par la méthode de Levenberg- Marquardt.



**Figure IV.4:** Evolution de la population marine (structurée en âge) exploitée, relative aux paramètres obtenus par la méthode de Levenberg- Marquardt.

### III.2. Remarque:

Le fait de ne pas avoir des mesures expérimentales fiables, se répercute sur les résultats obtenus par simulation numérique.

## IV. CONCLUSION

Les notions d'identifiabilité et d'identification des paramètres sont extrêmement importantes dans l'étude des modèles paramétriques, surtout en pratique, lorsqu'on espère une certaine performance dynamique, écologique, économique, ou autres....

L'étude du modèle de Lotka Mc- Kendrick dans ce sens nécessite:

- l'observation de la sortie du système qui sont les captures structurées en âge ainsi que leurs dynamiques et celle de l'entrée du système qui est l'effort de pêche ceci pour la phase d'identifiabilité qui demeure une phase d'étude théorique.
- les valeurs numériques de ces données expérimentales, pour la phase d'identification des paramètres, en particulier l'identification du stock initial composé de plusieurs classes d'âge; et qu'on l'a reconstitué à partir de la connaissance des captures.
- Pour ce modèle linéaire (par rapport à sa solution mais non par rapport à ses paramètres) et dépendant de l'âge, les méthodes d'optimisation sont applicables après une étude numérique complète du modèle.
- Les résultats numériques ainsi que les représentations graphiques relatives à ce modèle sont plus ou moins acceptables en tenant compte du fait que beaucoup de phénomènes écologiques ont été écartés et ceci pour simplifier l'étude, ainsi que l'inexactitude des données expérimentales (le cas de l'effort de pêche par exemple).

# CONCLUSION GENERALE

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES:

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux modèles structurés en âge, modèles gouvernés par des équations aux dérivées partielles, et représentant l'évolution d'une population animale en particulier une population de poissons.

Sur ces modèles, on a essayé d'appliquer un ensemble d'outils mathématiques ainsi que des outils issus de l'automatique pour l'évaluation et le contrôle d'une population marine exploitée.

On s'est penché particulièrement sur l'étude de l'identifiabilité et l'identification des paramètres des modèles, ceci permettra de connaître explicitement la solution du modèle paramétrique et par conséquent de mieux comprendre le processus d'évolution chez les poissons, ceci afin d'améliorer la gestion et le contrôle de la pêche.

Pour la phase d'identification, une étude numérique a été envisagée à part, ce qui a permis d'adapter une méthode d'optimisation classique: c'est la méthode des moindres carrés, avec ces différentes techniques de résolution (Levenberg Marquardt, technique de la fonction minimisante).

D'autres part, et d'après les spécialistes des dynamiques de population, l'étude de l'identifiabilité et l'identification des paramètres n'est pas évidente, surtout lorsqu'il s'agit de modèles mathématiques gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Par ailleurs, il faut signaler les problèmes rencontrés au cours de ce travail résumés en:

- 1) Manque ou inexactitude de données expérimentales, exemple: l'effort de pêche n'est jamais connu de manière exacte.
- 2) Le fait de supposer que le taux instantané de mortalité naturelle reste constant, égal à 0.2 quel que soit l'âge semble inexact; en effet, il est possible que ce taux s'élève pour les classes très âgées.

Pour la suite du travail, quelques questions peuvent être examinées:

- Etude du comportement des solutions pour le modèle linéaire dans le cas où les taux de fécondité et de mortalité dépendent de l'âge et du temps.
- Compléter l'étude de l'identifiabilité et de l'identification dans le cas de modèles non linéaires.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Iannelli (1955): *Mathematical theory of age- structured population dynamics*, Giardini Editori.
- [2] D. Pelletier (1991): *Les sources d'incertitudes en gestion des pêcheries*. Thèse de doctorat Paris- Grignon.
- [3] A. Benzineb (1983): *Modélisation dans les problèmes de dynamique de population à dépendance en âge- discontinuités de la fonction de naissance*. Thèse de doctorat université de Pau et des pays de l'Adour.
- [4] J. Daget (1971- 1972): *Lois de croissance linéaire et pondérale. Mortalités- structures démographiques*. Extrait du cours des populations D. E. A d'océanographie biologique université de Bretagne occidentale.
- [5] *Journal of Mathematical Biology*, Springer- Verlag 1982. Gabriella Diblasio, Mimo Iannelli, and Eugenio Sinestrari: *Approach to Equilibrium in Age Structured Populations with an Increasing Recruitment Process*.
- [6] E. Postel (1972): *théorie des pêches (dynamique des populations exploitées)*. Fascicule 4 (édition provisoire), université de Rennes- U. E. R. des sciences biologiques: biologie halieutique.
- [7] *Journal of Mathematical Biology*; volume 13 , Number 2, 1981: Giovanni Di Lena and Gabriella Serio: *The identification of the periodic behaviour in an epidemic model*.
- [8] *Journal of Mathematical Biology*; volume 21, number 2, 1984: Morton E. Gurtin and lea F. Murphy: *On the optimal harvesting of persistent Age- structured populations*.
- [9] F. Bekkal Brikci: (thèse de Magister soutenue en 1998 à l'université de Tlemcen) *Identifiabilité et Identification des Paramètres en Dynamiques des populations*.
- [10] E. Walter, L. Pronzato (1994): *Identification de modèle paramétrique à partir de données expérimentales*, Masson.



[11] Raymond J.H. Beverton and Sidney J. Holt (1993 ), On the Dynamics of Exploited Fish Populations.

[12] Brian Charlesworth: second edition (1994), Evolution in age- structured populations.

[13] J. Collignon (1991): Ecologie et biologie marines - Introduction à l'halieutique, Masson.

[14] Collin w.Clark (1989), Mathematical Bioeconomics -The Optimal Management of Renewable Ressources. *New York: Wiley.*

