République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr Belkaid - Tlemcen

- Département de Mathématique -

MEMOIRE
Pour l'Obtention du Diplôme de
MASTER

Option : Analyse numérique

Intitulé:

Convergence à deux échelles

Soutenu le : 01/07/2009

Présenté par :

HAMZAOUI YAMINA

Devant le jury :

Président :	**Mr. M. YEBDRI**	**Professeur**	**U.A.B.B.T**
Encadreur :	**Mr. G. SENOUCI BEREKSI**	**Maître de conférences**	**U.A.B.B.T**
Examinateur :	**Mr. B. ABDELLAOUI**	**Maître de conférences**	**U.A.B.B.T**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2008 - 2009

Dédicaces

A ma très chère famille.

Remerciements

Ce travail n'aurait pas pu aboutir sans les conseils et l'aide permanents que m'a apportés mon encadreur Monsieur le professeur G. SENOUCI BEREKSI, qu'il trouve ici mes meilleurs remerciements.

Je souhaite remercier Monsieur le Professeur M.YEBDRI pour avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à Monsieur le Professeur B. ABDELLAOUI qui a accepté d'être membre du jury.

Il m'est enfin agréable de citer ici tous les professeurs et l'administration du Master (Analyse numérique) qui tout au long de cette formation nous ont apporté science et réconfort.

Merci à tous.

Table des Matières

Notations

Géomètrie

Ω: Ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$.

$\Gamma = \partial\Omega$ frontiére de Ω.

$|\Omega|$: La mesure de Ω.

E': L'espace dual de E.

$y = \dfrac{x}{\varepsilon}$: Variable microscopique.

ε: Petit paramétre déstiné a tendre vers 0.

x: Variable macroscopique.

Y: La période de réference définit par: $Y = \prod\limits_{i=1}^{n}]0, l_i[$ avec $l_i > 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

q: Le conjugué de p $(1 \leq p \leq +\infty)$, c'est à dire: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

n: la normale sortante de Ω.

e_i: Le *iéme* vecteur de la base canonique.

Espaces

$D(\Omega)$: L'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f \text{ mesurable et } \displaystyle\int_\Omega \|f(x)\|^p_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}$ pour: $1 \leq p < +\infty$.

$L^\infty(\Omega) =$

$\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } c > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}$.

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)\}$.

$W^{1,p}_0(\Omega)$: La fermeture de $D(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v|_\Gamma = 0\}$, où γ_0 est l'application trace.

$H^{-1}(\Omega)$: L'espace dual de $H^1_0(\Omega)$.

$H^1_{per}(Y) = \{f \text{ t.q. } f \in H^1(Y) \text{ et } f \text{ est } Y\text{-périodique}\}$.

$C_{per}(Y)$: L'ensemble des fonctions Y-périodiques, continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$C_{per}^{\infty}(Y)$: Ensemble de fonctions infiniment dérivables dans Y et Y-périodiques.

$D\left(\Omega; C_{per}^{\infty}(Y)\right)$: L'espace des fonctions régulières sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ telles que pour tout $x \in \Omega$, $u(x,.) \in C_{per}^{\infty}(Y)$ et pour tout $y \in Y$, $u(.,y) \in D(\Omega)$.

$L_{per}^{q}\left(Y; C\left(\bar{\Omega}\right)\right)$: L'espace des fonctions mesurables $u : y \in Y \to u(y) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ tel que $\|u(x)\|_{C(\bar{\Omega})} \in L_{per}^{q}(Y)$.

$C\left(\bar{\Omega}; C_{per}(Y)\right)$: L'espace des fonctions mesurables dans $\Omega \times \mathbb{R}^N$ t.q. $u(x,.) \in C_{per}(Y)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$, et pour tout $y \in Y$, $u(.,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$.

Formules et fonctions

$(.,.)$: Le produit scalaire.

$\langle .,. \rangle$: Le produit de dualité.

(u^t): La transposée du vecteur u.

$\nabla u(x) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{i=1..n}$.

∇: Le vecteur gradient définit par $(\nabla_1, ..., \nabla_n)^t$.

$\operatorname{div}(u)$: la divergence d'un vecteur u est: $\operatorname{div}(u) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left[\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p\right]^{1/p}$.

$\|f(x)\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c\colon\ |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}$.

$M_Y(f)$: La moyenne de la fonction f donnée par $M_Y(f) = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y f(y)\,dy$.

$\chi(A)$: Fonction caractéristique.

Chapitre 0

Introduction

Aujourd'hui nous assistons à la fabrication de nouveaux matériaux tels que les matériaux composites, les nano structures, matériaux qui possèdent des propriétés nouvelles, fort intéressantes. Ces matériaux possèdent une double périodicité l'une à l'échelle atomique et l'autre à l'échelle de la nanostructure. La connaissance de leurs propriétés passe par l'homogénéisation qui utilise entre autres la méthode de convergence à deux échelles.

La convergence à deux échelles a été introduite pour la première fois par Nguetseng en 1989, et continué par d'autre. Le but de notre travail est de résoudre une équation à coefficients oscillants dans un domaine caractéristique par deux échelles d'espace: macroscopique x et microscopique $\dfrac{x}{\varepsilon}$.

Le problème à homogénéiser est définit comme suit

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}u^{\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega \\ u^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P^{\varepsilon})$$

Homogénéisé ce problème (P^{ε}) revient à déterminer le problème limite (P^0).

Ce mémoire est composé de 3 chapitres.

Dans le chapitre 1, nous rappelons brièvement des définitions et théorèmes utiles et nécessaires pour la démonstration des théorèmes et résultat concernant ce sujet.

Pour plus de détails voir [1, 4, 5].

Le chapitre 2 est consacré à la convergence à deux échelles. On introduit tout d'abord 4 théorèmes importants et leurs preuves qu'on utilisera par la suite, puis on définira la notion de convergence à deux échelles et on donnera les théorèmes concernant cette convergence dans les espaces $L^p(\Omega)$, et ensuite dans les espaces de Sobolev.

Pour plus de détails voir [1, 2, 3, 4].

Au dernier chapitre on traite un exemple pour les équations aux dérivées partielles elliptiques.

Pour plus de détails voir [2, 3, 4].

Chapître 1

Préliminaires

On rappelle quelques définitions et théorèmes qu'on utilisera plus tard.

1.1 La convergence faible dans un espace de Banach

Définition 1.1.1 *Soit E un espace de Banach, E' son dual et $\langle .,. \rangle$ le produit de dualité sur $E' \times E$.*

1– *une suite $(x_n)_n$ dans E est dite convergente faiblement vers x si et seulement si*

$$\langle x', x_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle x', x \rangle_{E',E}, \forall x' \in E',$$

cette convergence faible est notée par

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E.$$

2– *Une suite $(x_n)_n$ dans E' est dite convergente faiblement * vers x si et seulement si*

$$\langle x_n, x' \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle x, x' \rangle_{E',E}, \forall \in x' \in E,$$

*cette convergence faible * est notée par*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement * dans } E'.$$

Définition 1.1.2 (Espace réflexif) *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Définition 1.1.3 (Espace séparable) *On dit qu'un espace de Banach est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Théorème 1.1.1 *Supposons que E est réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors*

i) il existe une sous suite (x_{n_k}) de (x_n) telle que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ faib. dans } E \text{ quand } k \to \infty.$$

ii) Si chaque sous suite de $(x_n)_n$ faiblement convergente à la même limite x dans E, alors toute la suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x i.e.

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faib. dans } E.$$

Définition 1.1.4 *Soit (S, B, m) espace mesurable et $\varphi(s)$ une application définie sur S à valeur dans un espace de Banach X. $\varphi(s)$ est appelée faiblement B-mesurable si pour tout $f \in X'$, la valeur numérique de la fonction $f(\varphi(s)) = \langle \varphi(s), f \rangle$ de S est B-mesurable, $\varphi(s)$ est dite à valeur finie si il existe un nombre fini d'ensemble B_j disjoint B-mesurable, et elle est constante $\neq 0$ avec $m(B_j) < \infty$ et $\varphi(s) = 0$ dans $S \backslash \cup_j B_j$.*

$\varphi(s)$ appelée fortement B-mesurable si il existe une suites de fonctions à valeur fini qui converge fortement vers $\varphi(s)$ p.p. dans S.

Définition 1.1.5 *$\varphi(s)$ est dite à valeurs séparable si $\operatorname{Im}\{\varphi(s)\,;\ s \in S\}$ est séparable. Elle est m-presque à valeur séparable si il existe un ensemble B_0*

B-mesurable de 0 m-mesure tel que $\{\varphi(s)\,;\, s \in S \backslash B_0\}$ est séparable.

Théorème 1.1.2 (Pettis) *Equivalence entre la mesure faible et forte: $\varphi(s)$ est fortement B-mesurable si et seulement si elle est faiblement B-mesurable et m-presque à valeurs séparable.*

1.2 Fonction Périodique

Etant donné un intervalle de $\mathbb{R}^N$ défini par:

$$Y =]0, l_1[\times]0, l_2[\times \ldots \times]0, l_N[, \tag{1.1}$$

l_1,l_2,..,l_N sont des nombres positifs donnés.

Définition 1.2.1 *Soit Y définie par (1.1) et f une fonction définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$. La fonction est appelée Y-périodique si et seulement si:*

$$f(x + kl_i e_i) = f(x) \ \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N,$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall i \in \{1, 2, ..., N\}$, où $\{e_1, e_2, ..., e_N\}$ base canonique dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 1.2.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et f une fonction $Y-$périodique dans $L^p(Y)$. Soit $f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$. Alors*

$1-$Si $p < \infty$ quand $\varepsilon \to 0$, alors

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)\,dy \text{ faiblement dans } L^p(\omega),$$

pour tout sous ensemble ouvert borné ω de $\mathbb{R}^N$.

$2-$ Si $p = \infty$ on a

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)\,dy \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

1.3 Problèmes variationnels elliptique

Définition 1.3.1 (Forme linéaire) *Soit la forme* $L : E \to \mathbb{R}$. *On dit qu'elle est linéaire sur* E *si et seulement si*

$$\begin{aligned} L(x+y) &= L(x) + L(y)\,, \forall x, y \in E \\ &\textit{et} \\ L(\lambda x) &= \lambda L(x)\,, \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2 (Forme bilinéaire) *Soit* a *une application de* $V \times V \to \mathbb{R}$, V *espace de Banach,* a *est appelée forme bilinéaire sur* V *ssi pour tout* u *fixé dans* V *on a les applications suivantes:*

$$\begin{aligned} a(u,.) &: \quad v \in V \longmapsto a(u,v) \in \mathbb{R} \\ a(.,u) &: \quad v \in V \longmapsto a(v,u) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sont linéaires.

Définition 1.3.3 (Continuité) *Une forme bilinéaire* $a : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ *est continue sur* $V \times V$ *si et seulement si*

$$\exists M > 0 / \left|a(u,v)\right| \leq M \left\|u\right\|_V \left\|v\right\|_V, \forall u, v \in V.$$

Définition 1.3.4 (Coercivité) *La forme bilinéaire* a *est dite* $V-$*elliptique ou coercive sur* E *si* $\exists \alpha > 0$ *t.q.*

$$\forall v \in V,\ a(v,v) \geq \alpha \left\|v\right\|_V^2$$

Soit a une forme bilinéaire sur un espace de hilbert V et soit $F \in V$, considérons le problème suivant

$$\text{Trouver } u \in V /\ a(u,v) = \langle F, v \rangle_{V',V}\,, \forall v \in V.$$

Ce type d'équation est appelé equation variationnelle ou forme variationnelle et $v \in V$ est appelée fonction test.

Théorème 1.3.1 (Représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert et $F \in H'$, alors il existe un unique*

$$\tau F \in H \ \textit{tel que} \ \langle F, v \rangle_{H',H} = (\tau F, v)_H .$$

De plus l'application $\tau : F \in H' \to \tau F \in H$ est une isométrie (appelée isométrie de Riesz) i.e. elle satisfait$\|\tau F\|_H = \|F\|_{H'}$.

Théorème 1.3.2 (Lax-Milgram) *Soit a une forme bilinéaire continue sur V et $F \in V'$. On suppose que a est $V-$elliptique avec constante α alors la forme variationnelle*

$$\begin{cases} a(u,v) = \langle F, v \rangle_{V',V} \\ \qquad v \in V \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in V$.

Le théorème de Lax-Milgram est une conséquence du théorème de Représentation de Riesz.

Définition 1.3.5 *Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, tel que $0 < \alpha < \beta$. On note par $M(\alpha,\ \beta,\ O)$ l'ensemble de $N \times N$ matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,\ j \le N} \in (L^\infty(O))^{N \times N}$ tel que*

$$\begin{cases} i) \quad (A(x)\lambda,\ \lambda) \ge \alpha |\lambda|^2 \\ ii) \quad |A(x)\lambda| \le \beta |\lambda|, \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et p.p. dans O.

Théorème 1.3.3 (Formule de Green) *Supposons que $\partial\Omega$ est lipschitz continue. Soient $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v)\eta_i ds.$$

Inégalité de Clarkson: Soit $2 \leq p < \infty$; on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p} \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^{p} + \|g\|_{L^p}^{p}\right), \forall f, g \in L^p(\Omega),$$

cette inégalié s'appelle première inégalité de Clarkson.

Soit $1 < p \leq 2$; on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leq \frac{1}{2}\left[\|f\|_{L^p}^{p} + \|g\|_{L^p}^{p}\right]^{1/(p-1)}, \forall f, g \in L^p(\Omega),$$

cette inégalié s'appelle deuxième inégalité de Clarkson.

Chapître 2

Convergence à deux échelles

2.1 Quelques théorèmes Fondamentaux

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $Y = [0;1]^N$ est le cube unité de $\mathbb{R}^N$. Par définiton, $L^1(\Omega; C_{per}(Y))$ est l'espace des fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach $C_{per}(Y)$ de fonctions continues, Y- périodiques dans Y et vérifiant

$$\int_{\Omega} \|f(x)\|_{C_{per}(Y)}\, dx < +\infty.$$

Théorème 2.1.1 *Une fonction $f \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$ si est seulement si il existe un sous ensemble $E \subset \Omega$ de mesure nulle tel que*

a) $-\forall x \in \Omega \setminus E$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue et est Y-périodique.

b) $-\forall y \in Y$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable.

c)$-$La fonction $x \mapsto \sup_{y\in Y} |f(x,y)|$ a une norme finie dans $L^1(\Omega)$.

Preuve. Les conditions $a)$, $b)$ et $c)$ sont nécessaires. En effet, $a)$ et $c)$ découlent du fait que $f \in L^1(\Omega, C_{per}(Y))$ (par définition). Pour $b)$: Soit Γ une fonction définie sur $C_{per}(Y)$. Du théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure μ de Radon qui est Y-périodique tel que

$$\langle \Gamma, g\rangle = \int_{Y} g\ d\ \mu(y), \forall g \in C_{per}(Y).$$

Du théorème de Pettis, on sait que

$$\langle \Gamma, f(x) \rangle = \int_Y f(x,y) \; d\,\mu(y),$$

est mesurable pour tout μ. Remplaçons μ par la mesure de Dirac au point y_0, on obtient

$$\int_Y f(x,y) \; d\,\delta_{y_0}(y) = f(x,y_0),$$

qui est mesurable pour tout y_0, d'où le résultat.

Supposons que a), b) et c) sont vérifiées, et montrons que $f \in L^1(\Omega, C_{per}(Y))$. De a), on a $f \in C_{per}(Y)$, et de c), on a $\int_\Omega \sup_{y\in Y} |f(x,y)| \, dx$ finie. Reste à prouver que $f : \Omega \longrightarrow C_{per}(Y)$ est mesurable. Du théorème de Pettis, on va montrer que pour tout $\Gamma \in C'_{per}(Y)$ $\langle \Gamma, f(x) \rangle$ est mesurable. Construisons une suite de fonctions Γ_n telle que $\langle \Gamma_n, f(x) \rangle$ est mesurable, et on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Gamma_n, f(x) \rangle = \langle \Gamma, f(x) \rangle .$$

Il s'en suit que $\langle \Gamma, f(x) \rangle$ est mesurable à partir d'une limite de fonction mesurable.

Soit Γ une fonction dans $C'_{per}(Y)$ choisie arbitrairement. Alors il existe deux fonctions positives Γ^+ et Γ^- telles que $\Gamma = \Gamma^+ - \Gamma^-$, par le théorème de représentation de Riesz Γ^+ et Γ^- peuvent s'identifier à une mesure positive unique μ^+ et μ^- respectivement . Soit $\{Y_i\}$ une partition de Y en cubes disjoints de longueur $\frac{1}{n}$, on note par μ_i^+ et μ_i^-, $\mu^+(Y_i)$ et $\mu^-(Y_i)$ respectivement. De plus, soit $\delta_i(y) = \delta(y - y_i)$, où $y_i \in Y_i$ et δ la mesure de Dirac. Maintenant, on définit Γ_n comme $\Gamma_n = \Gamma_n^+ - \Gamma_n^-$, où

$$\left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle = \int_Y f(x,y)\, d\left(\mu_1^+\delta_1(y) + ... + \mu_{n^N}^+\delta_{n^N}(y)\right) = \sum_{i=1}^{n^N} f(x,y_i)\,\mu_i^+,$$

$$\left\langle \Gamma_n^-, f(x) \right\rangle = \int_Y f(x,y)\, d\left(\mu_1^-\delta_1(y) + ... + \mu_{n^N}^-\delta_{n^N}(y)\right) = \sum_{i=1}^{n^N} f(x,y_i)\,\mu_i^- .$$

De $b)$ il est claire que $\langle \Gamma_n, f(x) \rangle$ est mesurable car c'est une somme de fonctions mesurables. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Gamma_n, f(x) \rangle = \langle \Gamma, f(x) \rangle .$$

Prouvons tout d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle = \left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle .$$

Commençons par montrer la première inégalité

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle \leq \left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle .$$

Soit A un ensemble de fonctions $s(x,y)$ qui sont simples en y et de de la forme $s(x,y) = \sum_{i=1}^{n^N} \alpha_i(x) \varkappa_{Y^i}(y)$ tel que $s(x,y) \leq f(x,y)$. De plus, soit S un ensemble de toutes les fonctions $s(x,y)$ qui sont simples en y tel que $s(x,y) \leq f(x,y)$. On suppose que la fonction $y \longrightarrow f(x,y)$ est positive. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_Y f(x,y)\, d\left(\mu_1^+ \delta_1(y) + \ldots + \mu_{n^N}^+ \delta_{n^N}(y)\right) \\
&= \sup_{s\in A} \int_Y s(x,y)\, d\mu^+(y) \\
&\leq \sup_{s\in S} \int_Y s(x,y)\, d\mu^+(y) \\
&= \int_Y f(x,y)\, d\mu^+(y) \\
&= \left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle \leq \left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle . \tag{2.1}$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle \geq \left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle .$$

Grâce à la linéarité de Γ_n^+ et Γ^+, on a

$$\lim_{n\to\infty} - \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, -f(x) \right\rangle \leq \left\langle \Gamma^+, -f(x) \right\rangle = -\left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle .$$

En multipliant par $(-)$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle \geq \left\langle \Gamma^+, f(x) \right\rangle . \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2) on a le résultat. Avec les mêmes étapes on a

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^-, f(x) \right\rangle = \left\langle \Gamma^-, f(x) \right\rangle .$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+, f(x) \right\rangle - \lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^-, f(x) \right\rangle &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n^+ - \Gamma_n^-, f(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \Gamma^+ - \Gamma^-, f(x) \right\rangle , \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \Gamma_n, f(x) \right\rangle = \left\langle \Gamma, f(x) \right\rangle .$$

$\square$

Soit (ε_h) une suite fixée, de nombres réels, positive qui converge vers 0. Alors nous avons le résultat de convergence des fonctions dans $L^1(\Omega; C_{per}(Y))$.

Théorème 2.1.2 *Soit $f(x,y) \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une fonction mesurable sur Ω telle que*

$$\left\| f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1(\Omega)} \le \| f(x,y) \|_{L^1(\Omega; C_{per}(Y))} := \int_\Omega \sup_{y \in Y} |f(x,y)|\, dx \tag{2.3}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega \int_Y f(x,y)\, dy dx. \tag{2.4}$$

Preuve. 1. Du théorème 2.1.1, de *a*) et *b*), on a $f(x,y)$ est une fonction de type Caratheodory, qui assure la mesurabilité de $f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ (car tout élement de Y peut s'écrire sous la forme $\frac{x}{\varepsilon}$, $x \in \Omega$).

2. L'inégalité (2.3) est une conséquence de la définition de la norme dans $L^1(\Omega)$ i.e. On a

$$\left\| f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx$$

On sait que

$$f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \le \sup_{y \in Y} |f(x,y)|$$

donc

$$\int_\Omega f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \le \int_\Omega \sup_{y \in Y} |f(x,y)|\, dx$$

i.e.

$$\left\| f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1(\Omega)} \le \| f(x,y) \|_{L^1(\Omega; C_{per}(Y))}$$

3. Montrons que $f(x,y)$ satisfait (2.4). Fixons $f \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. Soit n un entier positif, on introduit le pavé d'unité Y formé par n^N petits cubes Y_i de longueur n^{-1}. Ce pavé a la propriété suivante:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n^N} Y_i, \quad |Y_i| = \frac{1}{n^N}, \quad |Y_i \cap Y_j| = 0 \ si \ i \neq j$$

Soit $\chi_i(y)$ la fonction caractéristique qui prolonge Y_i à $\mathbb{R}^N$ par $Y-$périodicité et soit y_i un élément quelconque de Y_i. On approxime toute fonction $f(x,y)$ dans

$L^1(\Omega; C_{per}(Y))$ par une fonction en escaliers en y définie par

$$f_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n^N} f(x,y_i)\,\chi_i(y)$$

3.1- Montrons que f_n satisfait (2.4). D'après le théorème 2.1.1 *c)* la fonction $x \mapsto f(x,y_i) \in L^1(\Omega)$ et $\chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(\Omega)$ alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \chi_i(y)\,dy = |Y_i|,$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f(x,y_i)\,\chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega f(x,y_i)\,dx\,|Y_i|. \tag{2.5}$$

En additionnant l'égalité (2.5) pour $i = 1..n^N$, on aura

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \sum_{i=1}^{n^N} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f(x,y_i)\,dx\,|Y_i| \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n^N} f(x,y_i)\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant la convergence faible $*$ dans $L^\infty(\Omega)$, on aura

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n^N} f(x,y_i)\left(\int_Y \chi_i(y)\,dy\right) dx \\ &= \int_\Omega \int_Y f_n(x,y)\,dydx \end{aligned}$$

3.2- Montrons que $f_n \to f$, quand $n \to +\infty$ fortement dans $L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. On définie

$$\delta_n(x) = \sup_{y\in Y} |f_n(x,y) - f(x,y)|$$

de plus

$$0 \leq \delta_n(x) \leq 2\sup_{y\in Y} |f(x,y)| \in L^1(\Omega).$$

On a

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx-\int_\Omega\int_Y f(x,y)\,dydx\right|\\
\leq\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx-\int_\Omega f_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right|+\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega f_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx-\int_\Omega\int_Y f_n(x,y)\,dydx\right|\\
&+\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega\int_Y f_n(x,y)\,dx-\int_\Omega\int_Y f(x,y)\,dydx\right|\\
\leq\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|(f-f_n)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1(\Omega)}+0+\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-f_n\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}
\end{aligned}$$

D'après (2.3), on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|(f-f_n)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1(\Omega)}+\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-f_n\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}\\
\leq\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|(f-f_n)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}+\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-f_n\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}\\
\leq\ &2\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-f_n\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue de convergence dominé, la suite δ_n converge fortement vers 0 dans $L^1(\Omega)$. Donc $f_n \longrightarrow f$, quand $n\to+\infty$ dans $L^1(\Omega;C_{per}(Y))$. D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f-f_n\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}\leq 0.$$

□

Théorème 2.1.3 *Soit $B_p(\Omega,Y)$, $1\leq p<\infty$, l'un des espaces $L^p(\Omega;C_{per}(Y))$, $L^p_{per}\left(Y;C\left(\bar{\Omega}\right)\right)$, $C\left(\bar{\Omega};C_{per}(Y)\right)$. Alors $B_p(\Omega,Y)$ a les propriétés suivantes:*

1. $B_p(\Omega,Y)$ est un espace de Banach séparable.

2. $B_p(\Omega,Y)$ est dense dans $L^p(\Omega\times Y)$.

3. Si $f(x,y)\in B_p(\Omega,Y)$. Alors $f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une fonction mesurable dans Ω telle que

$$\left\|f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^p(\Omega)}\leq\|f(x,y)\|_{B_p(\Omega,Y)}.$$

4. $\forall f \in B_p(\Omega, Y)$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \left|f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx = \int_\Omega\int_Y |f(x,y)|^p\, dydx.$$

On a aussi le résultat suivant concernant la convergence faible:

Théorème 2.1.4 *On suppose que* $\psi(x,y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$, $\psi_1 \in L^{sp}(\Omega)$, $\psi_2 \in L^{tp}_{per}(Y)$ *avec* $1 \le s,t \le \infty$, $1 \le p < \infty$ *et tel que*

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1.$$

Alors $\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \in L^p(\Omega)$ *et*

$$\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \psi_1(x)\int_Y \psi_2(y)\, dy$$

faiblement dans $L^p(\Omega)$.

2.2 Convergence à deux échelles dans les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.2.1 *Soit* $(\varepsilon_h)_h$ *une suite fixée de nombres réels positifs qui convergent vers* 0. *Une suite* $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ *de fonctions dans* $L^p(\Omega)$ *est dite convergente à deux échelles vers la limite* $u \in L^p(\Omega\times Y)$ *si*

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \longrightarrow \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\phi(x,y)\, dydx \tag{2.6}$$

pour tout $\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$, *avec* $q = p'$.

Dans tout ce qui suit on prend q comme étant le conjugué de p, i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Remarque 2.2.1 *On remarque que si au lieu du cube unité on avait un parallélépipède* $Y = \prod_{i=1}^{n}(0,a_i)$ *où* $a_i \in \mathbb{R}^+_*$, *alors on doit multiplié* (2.6) *par* $\frac{1}{|Y|}$.

Théorème 2.2.1 *Si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$, alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge à deux échelles vers $u_1(x,y) = u(x)$.*

Preuve. Soit ϕ une fonction dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. On a par hypothèse

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \ dans\ L^p(\Omega)$$

Montrons que u_ε converge vers u à deux échelles. On a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx\right| \\
\leq\ &\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - \int_\Omega u(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right| \\
&+\left|\int_\Omega u(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx\right| \\
\leq\ &\int_\Omega |u_\varepsilon(x) - u(x)|\left|\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|dx + \left|\int_\Omega u(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - \int_\Omega\int_Y u(x)\,\phi(x,y)\,dydx\right|.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder

$$\leq \|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{L^p(\Omega)}\left\|\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)} + \left|\int_\Omega u(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - \int_\Omega\int_Y u(x)\,\phi(x,y)\,dydx\right|.$$

D'après le théorème 2.1.3, on a

$$\left\|\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)} \text{ est finie,}$$

et puisque

$$u_\varepsilon(x) \longrightarrow u(x) \ \text{ dans } L^p(\Omega),$$

alors

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{L^p(\Omega)}\left\|\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Or

$$u(x)\,\phi(x,y) \in L^1(\Omega; C_{per}(Y)),$$

alors en utilisant le théorème 2.1.2 on aura

$$\left|\int_\Omega u(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - \int_\Omega\int_Y u(x)\,\phi(x,y)\,dydx\right| \longrightarrow 0.$$

D'où

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ à deux échelles.}$$

□

Théorème 2.2.2 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$, alors*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v(x) = \int_Y u(x,y)\,dy$$

faiblement dans $L^p(\Omega)$. De plus $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée.

Preuve. Soit

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ à deux échelles,}$$

i.e.

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \longrightarrow \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx,\ \forall\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y)).$$

Alors pour une fonction ϕ indépendante de y on a

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi(x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\phi(x)\,dydx = \int_\Omega\left[\int_Y u(x,y)\,dy\right]\phi(x)\,dx = \int_\Omega v(x)\,\phi(x)\,dx$$

$$i.e.$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v(x) = \int_Y u(x,y)\,dy.$$

Puisque toute fonction dans $L^q(\Omega)$ peut être identifiée avec une fonction $\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ indépendante de y, alors

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v(x) = \int_Y u(x,y)\,dy \text{ faib.}$$

On sait que toute suite qui converge faiblement est bornée, donc $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée. $\square$

Proposition 2.2.1 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \longrightarrow \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\psi(x,y)\,dydx,\ \forall\psi \in D\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right).$$

Alors u_ε converge à deux échelles vers u dans $L^p(\Omega, C_{per}(Y))$.

Preuve. Soit ϕ une fonction arbitraire dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. De plus, soit (ψ_m) une suite de fonctions dans $D\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)$ qui converge vers ϕ dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ quand $m \to \infty$. On a

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,(\phi-\psi_m)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx + \int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right].\end{aligned}$$

Par hypothèse on a

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right] = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\psi_m(x,y)\,dydx, \tag{2.7}$$

utilisons le fait que $\psi_m \longrightarrow \phi$ dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$, on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right] = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx. \tag{2.8}$$

Montrons que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x)(\phi-\psi_m)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = 0.$$

De (2.7) et (2.8), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)(\psi_m(x,y)-\phi(x,y))\,dydx\right| &\leq c\left\|\psi_m-\phi\right\|_{L^q(\Omega\times Y)}\\ &\leq c\left\|\psi_m-\phi\right\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))},\end{aligned}$$

et

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\psi_m-\phi\right\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))} = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ est bornée, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x)(\phi-\psi_m)\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx &\leq \lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} c\left\|(\phi-\psi_m)\left(.,\frac{.}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} c\left\|\psi_m-\phi\right\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))}\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.3 *Pour toute suite bornée $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ dans $L^p(\Omega)$, il existe une sous suite et $u\in L^p(\Omega\times Y)$ telle que la sous suite converge à deux échelles vers u.*

Preuve. Soit $\phi\in L^q(\Omega;C_{per}(Y))$. De l'inégalité de Hölder et du théorème 2.1.3, on a

$$\left|\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right| \leq \left\|u_{\varepsilon}\right\|_{L^p(\Omega)}\left\|\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)} \leq c\left\|\phi(x,y)\right\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))}, \quad (2.9)$$

avec c indépendante de ε. Ce qui signifie qu'on peut regarder u_ε comme un élèment U_ε de l'espace dual $[L^q(\Omega; C_{per}(Y))]'$ de $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. i.e.

$$\langle U_\varepsilon, \phi\rangle_{[L^q(\Omega;C_{per}(Y))]', L^q(\Omega;C_{per}(Y))} = \int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx,\ \forall\phi \in L^q_{per}\left(Y; C\left(\bar{\Omega}\right)\right). \tag{2.10}$$

La suite $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $[L^q(\Omega; C_{per}(Y))]'$, donc (2.9) implique que

$$\|U_\varepsilon\| = \sup_{\|\phi\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))}=1} |\langle U_\varepsilon, \phi\rangle| = \sup_{\|\phi\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))}=1} \left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx\right| \leq c.$$

Par conséquence, rappelons que $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ est un espace de Banach séparable, on peut donc extraire une sous suite qui converge faiblement * vers U, i.e.

$$U_\varepsilon \rightharpoonup U \qquad \text{faiblement * dans } [L^q(\Omega; C_{per}(Y))]'. \tag{2.11}$$

La preuve est vérifiée si on montre que U est de la forme

$$\langle U, \phi\rangle = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx.$$

De (2.9) et (2.10) on a

$$|\langle U_\varepsilon, \phi\rangle| \leq c\left\|\phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Tenant compte de (2.11) et utilisons le théorème 2.1.3 et passons à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\langle U_\varepsilon, \phi\rangle| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} c\left\|\phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)} = c\,\|\phi\|_{L^q(\Omega\times Y)},$$

i.e.

$$|\langle U, \phi\rangle| \leq c\,\|\phi\|_{L^q(\Omega\times Y)},$$

pour tout $\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. Puisque $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ est dense dans $L^q(\Omega \times Y)$ on peut, pour tout $\phi \in L^q(\Omega \times Y)$, trouver une suite $(\phi_{\varepsilon(h)})$ dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ tel que $\phi_{\varepsilon(h)} \to \phi$ dans $L^q(\Omega \times Y)$, ce qui signifie qu'on peut définir un prolongement $\tilde{U}$ de U dans $L^q(\Omega \times Y)$ tel que

$$\left\langle \tilde{U}, \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon(h)\to 0} \left\langle U, \phi_{\varepsilon(h)} \right\rangle .$$

D'après le théorème de Représentation de Riesz, il existe un unique $u \in L^q(\Omega \times Y)$ tel que

$$\left\langle \tilde{U}, \phi \right\rangle = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\, \phi(x,y)\, dydx,$$

pour tout ϕ dans $L^q(\Omega \times Y)$. Spécialement, pour ϕ dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ on a

$$\langle U, \phi \rangle = \left\langle \tilde{U}, \phi \right\rangle = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\, \phi(x,y)\, dydx.$$

$\square$

Théorème 2.2.4 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers u. Alors*

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \longrightarrow \int_\Omega \int_Y u(x,y)\, \psi(x,y)\, dydx,$$

pour tout ψ dans $L^q_{per}(Y; C(\bar{\Omega}))$.

Preuve. Fixons $\psi \in L^q_{per}(Y; C(\bar{\Omega}))$. Soit (ψ_m) une suite dans $D(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$ telle que $\psi_m \to \psi$ dans $L^q(\Omega \times Y)$, car $L^q_{per}(Y; C(\bar{\Omega}))$ est dense dans $L^q(\Omega \times Y)$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \lim_{m\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \left[\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \psi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] dx \\
&\quad + \lim_{m\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx.
\end{aligned}$$

Puisque u_ε converge à deux échelles vers u et ψ_m converge vers ψ dans $L^q(\Omega \times Y)$, alors on a

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx &= \lim_{m\to\infty}\int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\psi_m(x,y)\,dydx \\ &= \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\psi(x,y)\,dydx.\end{aligned}$$

Reste à vérifier que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]dx = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et puisque u_ε converge à deux échelles vers u, alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, d'après la proposition 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]dx \\ \le\ &\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} c\left(\int_\Omega\left|\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

On a $\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ dans $L^q_{per}\left(Y;C\left(\bar{\Omega}\right)\right)$, alors $(\psi-\psi_m)$ est dans $L^q_{per}\left(Y;C\left(\bar{\Omega}\right)\right)$. En appliquant le théorème 2.1.3 et en utilisant l'hypothèse que $\psi_m \to \psi$ dans $L^q(\Omega\times Y)$ on aura

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} c\left(\int_\Omega\left|\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\psi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ \le\ &\lim_{m\to\infty} c\left(\int_\Omega\int_Y|\psi(x,y)-\psi_m(x,y)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ \le\ &\lim_{m\to\infty} c\,\|\psi-\psi_m\|_{L^q(\Omega\times Y)} = 0,\end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de ε et de m. $\square$

Théorème 2.2.5 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers u. Alors*

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \longrightarrow \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\psi(x,y)\,dydx,$$

pour tout ψ de la forme

$$\psi(x,y)=\psi_1(x)\,\psi_2(y)\,,\psi_1\in L^{sq}(\Omega)\,,\psi_2\in L^{tq}_{per}(Y)\ \ \textit{avec}\ 1\le s,t\le+\infty\ \textit{et t.q.}\ \frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1.$$

Preuve. Fixons ψ_1, ψ_2. Soient $(\alpha_m)_m$ une suite dans $D(\Omega)$ qui converge vers ψ_1 dans $L^{sq}(\Omega)$ et $(\beta_m)_m$ une suite dans $C^\infty_{per}(Y)$ qui converge vers ψ_2 dans $L^{tq}(Y)$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx &= \lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\alpha_m(x)\,\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]dx\\ &\quad+\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\alpha_m(x)\,\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Puisque u_ε converge à deux échelles vers u et $\alpha_m\beta_m$ converge vers ψ dans $L^q(\Omega\times Y)$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\alpha_m(x)\,\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx &= \lim_{m\to\infty}\int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\alpha_m(x)\,\beta_m(y)\,dydx\\ &= \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\psi(x,y)\,dydx.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que le premier terme dans (2.12) est égale à 0. En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\alpha_m(x)\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]dx\right| \\
\leq\ &\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} c\left(\int_\Omega\left|\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\alpha_m(x)\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx\right)^{1/q} \\
\leq\ &\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} c\left(\int_\Omega|\psi_1(x)-\alpha_m(x)|^q\left|\psi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q+|\alpha_m(x)|^q\left|\psi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

où c est une constante. Appliquons le théorème 2.1.4, on aura

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} c\left(\int_\Omega|\psi_1(x)-\alpha_m(x)|^q\left|\psi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q+|\alpha_m(x)|^q\left|\psi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx\right)^{1/q} \\
&\leq c\left(\int_\Omega\int_Y|\psi_1(x)-\alpha_m(x)|^q|\psi_2(y)|^q+|\alpha_m(x)|^q|\psi_2(y)-\beta_m(y)|^q\,dydx\right)^{1/q}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans (2.13) et le fait que $\alpha_m\longrightarrow\psi_1$ dans $L^{sq}(\Omega)$ et $\beta_m\longrightarrow\psi_2$ dans $L^{tq}(Y)$, on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\alpha_m(x)\beta_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]dx=0.$$

□

Théorème 2.2.6 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$. Alors*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega\times Y)} \geq \|v\|_{L^p(\Omega)},$$

où $v(x) = \int\limits_Y u(x,y)\,dy$.

Preuve. Soit $(\phi_m)_m$ une suite dans $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ tel que ϕ_m converge vers $|u|^{p-2}u$ fortement dans $L^q(\Omega \times Y)$. En utilisant l'inégalité de Young pour les nombres réels a et b tel que

$$ab \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \left|u_\varepsilon(x)\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx &\leq \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int\limits_\Omega \left|\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx.\\
\frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p dx &\geq \int\limits_\Omega \left|u_\varepsilon(x)\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx - \frac{1}{q}\int\limits_\Omega \left|\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx\\
\int\limits_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p dx &\geq p\int\limits_\Omega \left|u_\varepsilon(x)\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx - \frac{p}{q}\int\limits_\Omega \left|\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}+\frac{1}{q} &= 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}\\
&\Rightarrow p-1 = \frac{p}{q},
\end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p dx \geq p\int\limits_\Omega \left|u_\varepsilon(x)\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx - (p-1)\int\limits_\Omega \left|\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx.$$

Passons à la limite en ε, on obtient

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} \\ \geq \; & p\int_\Omega\int_Y u(x,y)\,\phi_m(x,y)\,dydx - (p-1)\int_\Omega\int_Y |\phi_m(x,y)|^q\,dydx. \end{aligned}$$

Passons maintenant à la limite en m, on trouve

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} & \geq p\int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p\,dydx - (p-1)\int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^{(p-1)q}\,dydx \\ & = p\int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p\,dydx - (p-1)\int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p\,dydx = \|u\|^p_{L^p(\Omega\times Y)}. \end{aligned}$$

Puis, on utilise l'inégalité de Jensen, on aura

$$\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \left|\int_Y u(x,y)\right|^p dydx \leq \int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p\,dydx = \|u\|^p_{L^p(\Omega\times Y)}.$$

□

Théorème 2.2.7 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers $u \in L^p(\Omega\times Y)$ et vérifie que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega\times Y)}. \tag{2.14}$$

Alors, pour toute suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $L^q(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers $v \in L^q(\Omega\times Y)$, on a

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,v(x,y)\,\tau(x)\,dydx, \tag{2.15}$$

pour tout τ dans $C_0^\infty(\Omega)$. De plus, si le prolongement Y-périodique de u appartient *à $L^p(\Omega; C_{per}(Y))$, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|u_\varepsilon(x) - u\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{2.16}$$

Preuve. Soit $(\phi_m)_m$ une suite dans $L^p(\Omega; C_{per}(Y))$ tel que ϕ_m converge vers u fortement dans $L^p(\Omega\times Y)$ et τ une fonction dans $C_0^\infty(\Omega)$. Pour montrer (2.15), on passe à la limite à deux échelles, on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,v(x,y)\,\tau(x)\,dydx. \tag{2.17}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,v(x,y)\,\tau(x)\,dydx\right| \qquad (2.18)\\
\leq\ &\left|\int_\Omega \left[u_\varepsilon(x) - \phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx\right|\\
&+\left|\int_\Omega \phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,v(x,y)\,\tau(x)\,dydx\right|.
\end{aligned}$$

De (2.17) et (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\,v(x,y)\,\tau(x)\,dydx\right| \qquad (2.19)\\
\leq\ &\limsup_{m\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega \left[u_\varepsilon(x) - \phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx\right|.
\end{aligned}$$

Il est claire que (2.15) découle de (2.19) si on montre que

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega \left[u_\varepsilon(x) - \phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx\right| = 0. \tag{2.20}$$

De l'inégalité de Hölder et le fait que la suite bornée $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ converge à deux échelles, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left[u_\varepsilon(x) - \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] v_\varepsilon(x)\,\tau(x)\,dx\right| \qquad (2.21)\\
\leq\ & \max_{x\in\Omega} \tau(x) \left(\int_\Omega \left|u_\varepsilon(x) - \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v_\varepsilon(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\\
\leq\ & c\left\|u_\varepsilon(x) - \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Pour $p \geq 2$ et $q \leq 2$ respectivement, l'inégalité de Clarkson donne

$$\begin{aligned}
&\left\|u_\varepsilon - \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\\
\leq\ & 2^p\left[\frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^p_{L^p(\Omega)} - \left\|\frac{u_\varepsilon + \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\|u_\varepsilon - \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^q_{L^p(\Omega)}\\
\leq\ & 2^{p-1}\left[\left(\frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left\|\frac{u_\varepsilon + \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{2}\right\|^q_{L^p(\Omega)}\right].
\end{aligned}$$

En utilisant (2.14) et le théorème 2.2.6 pour la suite $u_\varepsilon(x) + \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ (qui converge à deux échelles vers $u + \phi_m \in L^p(\Omega \times Y)$), on aura

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\left\|u_\varepsilon - \phi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^p_{L^p(\Omega)} \qquad (2.22)\\
\leq\ & 2^p\left[\frac{1}{2}\|u\|^p_{L^p(\Omega\times Y)} + \frac{1}{2}\|\phi_m\|^p_{L^p(\Omega\times Y)} - \left\|\frac{u+\phi_m}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega\times Y)}\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\left\|u_\varepsilon-\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^p(\Omega)}^q &(2.23)\\
\leq\ & 2^{p-1}\left[\left(\frac{1}{2}\|u\|_{L^p(\Omega\times Y)}^p+\frac{1}{2}\|\phi_m\|_{L^p(\Omega\times Y)}^p\right)^{\frac{1}{p-1}}-\left\|\frac{u+\phi_m}{2}\right\|_{L^p(\Omega\times Y)}^q\right].
\end{aligned}$$

On a $(u+\phi_m)/2$ converge vers u dans $L^p(\Omega\times Y)$. Appliquant lim sup quand $m\to\infty$ dans (2.22) et (2.23) on obtient

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\left\|u_\varepsilon-\phi_m\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^p(\Omega)}=0 \tag{2.24}$$

Maintenant (2.20) découle de (2.21) et (2.24). D'où (2.16) (il suffit de remplaçer ϕ_m par u).

□

Théorème 2.2.8 *Toute fonction $u\in L^p(\Omega\times Y)$ est atteignable comme limite à deux échelles.*

Preuve. Fixons $u(x,y)$ dans $L^p(\Omega\times Y)$. Soit (u_n) une suite de fonctions dans $L^p(\Omega;C_{per}(Y))$ qui converge vers u dans $L^p(\Omega\times Y)$. $L^q(\Omega;C_{per}(Y))$ est un espace de Banach séparable (voir théorème 2.1.3), i.e. on peut trouver une famille (ψ_k) qui est dense dans $L^q(\Omega;C_{per}(Y))$. De plus, $L^q(\Omega;C_{per}(Y))$ est dense dans $L^q(\Omega\times Y)$, voir théorème 2.1.3. Ce qui signifie que pour tout $\psi\in L^q(\Omega\times Y)$ et $\forall\delta>0$ il est possible de trouver un seul $\eta\in L^q(\Omega;C_{per}(Y))$ et une sous suite ψ_k tel que

$$\begin{aligned}
\|\psi_k-\psi\|_{L^q(\Omega\times Y)} &\leq \|\psi_k-\eta\|_{L^q(\Omega\times Y)}+\|\eta-\psi\|_{L^q(\Omega\times Y)}\\
&\leq \|\psi_k-\eta\|_{L^q(\Omega;C_{per}(Y))}+\delta\leq 2\delta.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que (ψ_k) dense dans $L^q(\Omega\times Y)$. Pour un n fixe, la suite $\left(u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon_h}\right)\right)$ converge à deux échelles vers $u_n(x,y)$. i.e. pour tout $\delta>0$ il existe $\varepsilon(n)\in(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon > \varepsilon(n)$ implique que

$$\left| \int_{\Omega} u_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \int_{\Omega}\int_{Y} u_n(x,y)\, \psi(x,y)\, dydx \right| \leq \delta.$$

Extrayons maintenant une suite diagonale

$$\delta_n = \|u_n - u\|_{L^p(\Omega\times Y)}.$$

Alors il existe une sous suite $(\varepsilon(n))_n$ de (ε) tel que $\varepsilon(n) \to 0$ et

$$\left| \int_{\Omega} \left| u_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\right|^p dx - \int_{\Omega}\int_{Y} |u_n(x,y)|^p\, dydx \right| \leq \delta_n, \tag{2.25}$$

$$\left| \int_{\Omega} u_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)}\right) \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)}\right) dx - \int_{\Omega}\int_{Y} u_n(x,y)\, \psi_k(x,y)\, dydx \right| \leq \delta_n, \tag{2.26}$$

pour $k = 1, ..., n$. Soit $v_{\varepsilon(n)}$ définie comme $v_{\varepsilon(n)}(x) = u_n(x, x/\varepsilon(n))$. On a maintenant construit une suite $(\varepsilon(n))_n$ tel que $\varepsilon(n) \to 0$ quand $n \to \infty$ et la suite de fonctions $v_{\varepsilon(n)}$ converges à deux échelles vers u. De plus, pour tout $\delta > 0$ et $\forall \phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ on peut trouver k tel que

$$\|\psi_k - \phi\|_{L^q(\Omega\times Y)} < \delta$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega} v_{\varepsilon(n)}(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx-\int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx\right| \qquad (2.27)\\
=&\left|\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx-\int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx\right|\\
\leq&\left|\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx-\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\psi_k\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx\right|\\
&+\left|\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\psi_k\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx-\int_{\Omega}\int_{Y} u_n(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx\right|\\
&+\left|\int_{\Omega}\int_{Y} u_n(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx-\int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx\right|\\
&+\left|\int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx-\int_{\Omega}\int_{Y} u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx\right|.
\end{aligned}$$

Etudions maintenant les quatres termes de (2.27).

Terme1: De (2.25) $u_n(x,x/\varepsilon(n))$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. L'inégalité de Hölder donne

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx-\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\psi_k\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx\right|^q$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{n\to\infty} c\int_{\Omega}\left|\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)-\psi_k\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\right|^q dx \qquad (2.28)\\
&= c\int_{\Omega}\int_{Y}\left|\phi(x,y)-\psi_k(x,y)\right|^q dydx\leq c\delta.
\end{aligned}$$

Terme2: De (2.26) on a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega} u_n\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)\psi_k\left(x,\frac{x}{\varepsilon(n)}\right)dx-\int_{\Omega}\int_{Y} u_n(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx\right|=0. \quad (2.29)$$

Terme3: De l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega}\int_{Y}u_n(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx-\int_{\Omega}\int_{Y}u(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx\right| \\ s &< \lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{L^p(\Omega\times Y)}\|\psi_k\|_{L^p(\Omega\times Y)}=0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Terme4: De l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\Omega}\int_{Y}u(x,y)\,\psi_k(x,y)\,dydx-\int_{\Omega}\int_{Y}u(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx\right| \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega\times Y)}\|\psi_k-\phi\|_{L^p(\Omega\times Y)}\leq c\delta. \end{aligned} \tag{2.31}$$

De 2.27 et (2.31) et le fait que δ est choisit arbitrairement la preuve est finie. □

2.3 Convergence à deux échelles dans un espace de Sobolev

Le théorème suivant nous permet d'exprimer la notion de convergence à deux échelles pour une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.3.1 *Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite dans $W^{1,p}(\Omega)$ tel que*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \qquad \textit{faiblement dans } W^{1,p}(\Omega)$$

Alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge à deux échelles vers u et il existe une sous suite ε' et $u_1\in L^p\left(\Omega;W^{1,p}_{per}(Y)\right)$ tel que

$$\nabla u_{\varepsilon'} \longrightarrow \nabla u+\nabla_y u_1 \ \textit{ à deux échelles.}$$

Preuve. Toute suite convergente faiblement est bornée, on conclut que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\nabla u_\varepsilon)_\varepsilon$ sont bornées dans $L^p(\Omega)$ et $[L^p(\Omega)]^n$, respectivement. En utilisant le théorème 2.2.3, on déduit qu'il existe une sous suite notée $u_\varepsilon$et $u_0(x,y)\in L^p(\Omega\times Y)$,

$U(x,y) \in [L^p(\Omega \times Y)]^n$, tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} u_\varepsilon(x)\,\phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{\Omega}\int_{Y} u_0(x,y)\,\phi(x,y)\,dydx,\ \forall\phi \in D\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\left(\nabla u_\varepsilon(x),\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx = \int_{\Omega}\int_{Y}\left(U(x,y),\Phi(x,y)\right)dydx,\ \forall\Phi \in \left[D\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)\right]^n. \tag{2.32}$$

Du théorème 2.2.2, on sait que

$$u(x) = \int_{Y} u_0(x,y)\,dy.$$

Si on voit que u_0 ne dépend pas de y on peut, par l'unicité de la limite faible, dire que la suite converge à deux échelles vers u. De plus, en utilisant l'intégration par parties, on aura

$$\int_{\Omega}\left(\nabla u_\varepsilon(x),\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx = -\int_{\Omega} u_\varepsilon(x)\left[\operatorname{div}_x\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_y\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]dx.$$

Multiplions par ε, on obtient

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon(x)\operatorname{div}_y\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = -\varepsilon\left[\int_{\Omega}\left(\nabla u_\varepsilon(x),\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx + \int_{\Omega} u_\varepsilon(x)\operatorname{div}_x\Phi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right].$$

Passons à la limite quand $\varepsilon \to 0$, par (2.32) et la convergence à deux échelles de (u_ε), on trouve

$$\int_{\Omega}\int_{Y} u_0(x,y)\operatorname{div}_y\Phi(x,y)\,dydx = 0.$$

En utilisant la Formule de Green et pour tout $\Phi \in D(\Omega \times Y)$, on aura

$$\int_{\Omega}\int_{Y}\operatorname{div}_y u_0(x,y)\,\Phi(x,y)\,dydx = 0,$$

i.e.

$$\operatorname{div}_y u_0(x,y) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \times Y$$

Ceci implique que u_0 ne dépend pas de y. On va voir que $U(x,y)$ est égale à $\nabla u(x)+\nabla_y u_1(x,y)$. Soit Φ une fonction telle que $\operatorname{div}_y \Phi(x,y) = 0$. Alors l'intégration par parties dans (2.32) donne

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_Y (U(x,y), \Phi(x,y))\, dydx \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left(\nabla u_\varepsilon(x), \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \\
= & -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \left[\operatorname{div}_x \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \operatorname{div}_y \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right] dx \\
= & -\int_\Omega \int_Y u(x) \operatorname{div}_x \Phi(x,y)\, dydx \\
= & \int_\Omega \int_Y (\nabla u(x), \Phi(x,y))\, dydx.
\end{aligned}$$

Alors, pour toute fonction $\Phi(x,y) \in \left[D\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)\right]^n$ tel que $\operatorname{div}_y \Phi(x,y) = 0$, on a

$$\int_\Omega \int_Y (U(x,y) - \nabla u(x), \Phi(x,y))\, dydx = 0.$$

Ce qui signifie que $U(x,y) - \nabla u(x)$ est un gradient, i.e. il existe $u_1(x,y) \in L^p\left(\Omega; W^{1,p}_{per}(Y)\right)$ tel que

$$\nabla_y u_1(x,y) = U(x,y) - \nabla u(x).$$

□

Chapître 3

Application

3.1 Homogénéisation d'un problème d'équation elliptique

Cette partie, nous fera découvrire comment la méthode de convergence à deux échelles peut être utilisée pour l'homogénéisation d'un problème elliptique avec des coefficients d'oscillation périodique.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et soit f une fonction dans $L^2(\Omega)$, on considère maintenant l'équation aux dérivées partielles donnée par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $A(x,y)$ est une matrice définie dans $\Omega \times Y$,et elle est Y-périodique en y, tel qu'il existe deux constantes positive $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ satisfait

$$|A\xi| \leq \beta\,|\xi| \tag{3.1}$$

et

$$(A\xi, \xi) \geq \alpha\,|\xi|^2 . \tag{3.2}$$

La formulation variationnelle faible est

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon, \nabla w\right)dx = \int\limits_{\Omega} fwdx \quad \text{pour tout } w \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

Théorème 3.1.1 *La suite de solution de (3.3) converge faiblement vers u_0 dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et la suite ∇u_ε converge à deux échelles vers $\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)$, où (u_0, u_1) est la solution unique dans $W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2\left(\Omega; W_{per}^{1,2}(Y)\right)$ de l'équation homogénéisée:*

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{Y} \left(A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\right)dydx = \int\limits_{\Omega} fv_0 dx,$$

pour tout $v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $v_1 \in L^2\left(\Omega; W_{per}^{1,2}(Y)\right)$.

Preuve. 1-Estimation a priori. Ecrivons la formulation variationnelle (3.3) et en choisissant pour fonction test u_ε, on trouve

$$\int\limits_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx = \int\limits_{\Omega} fu_\varepsilon dx$$

comme $A \in M(\alpha, \beta, Y)$, alors

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx &\geq \alpha\int\limits_{\Omega} (\nabla u_\varepsilon)^2 dx \\ \alpha\int\limits_{\Omega} (\nabla u_\varepsilon)^2 dx &\leq \int\limits_{\Omega} fu_\varepsilon dx \\ \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Omega} fu_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on obtient

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

$\Longrightarrow$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.4}$$

On sait que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

Remplaçons cette égalité dans (3.4), on aura

$$\|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.5}$$

2-D'après 1-, on sait que u_ε est bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, i.e.

$$\|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le c,$$

puisque $W_0^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif, on a alors toute sous suite extraite de cet espace converge faiblement . Alors, il existe une sous suite notée u_ε, telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Du théorème 2.3.1, on conclut qu'il existe deux fonctions u_0 de $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $u_1 \in L^2\left(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y)\right)$ telles que, à une sous suite près, ∇u_ε converge à deux échelles

$$\nabla u_\varepsilon \longrightarrow \nabla u_0 + \nabla_y u_1, \;\text{ à deux échelles.}$$

Soit w_ε de la forme $w_\varepsilon(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x,y)$, tel que $v_0 \in D(\Omega)$ et

$v_1 \in D\left(\Omega; C^{\infty}_{per}(Y)\right)$, en utilisant w_ε comme fonction test dans (3.3), on obtient:

$$\int_\Omega \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon, \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx + \varepsilon \int_\Omega \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon, \nabla v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx$$
$$= \int_\Omega f v_0(x)\,dx + \varepsilon \int_\Omega f v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)dx.$$

Or, on a

$$\int_\Omega \left(\nabla u_\varepsilon, A^t\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right)dx + \varepsilon \int_\Omega \left(\nabla u_\varepsilon, A^t\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx$$
$$= \int_\Omega f v_0(x)\,dx + \varepsilon \int_\Omega f v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)dx.$$

Maintenant passons à la limite quand $\varepsilon \to 0$, et appliquons le théorème 2.2.4 et le théorème 2.1.3. on obtient

$$\int_\Omega \int_Y \left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y), A^t(y)\left(\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\right)\right)dydx = \int_\Omega f v_0 dx.$$

Donc

$$\int_\Omega \int_Y \left(A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\right)dydx = \int_\Omega f v_0 dx. \quad (3.6)$$

On note par H l'espace $W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2\left(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y)\right)$ et on le munit de la norme

$$\|u\|_H^2 = \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_y u_1\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}.$$

Vu la densité de $D(\Omega) \times D\left(\Omega; C^{\infty}_{per}(Y)\right)$ dans H la relation (3.6) reste vraie pour tout $(v_0, v_1) \in W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2\left(\Omega; W^{1,2}_{per}(Y)\right)$.

On définie la forme bilinéaire a par

$$a(U,V) = \int_\Omega \int_Y \left(A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\right)dydx,$$

et la fonctionnelle $\tilde{f}$ sur H est

$$\left\langle \tilde{f}, V \right\rangle = \int_{\Omega} f v_0 dx,$$

le problème homogénéisé (3.6) est de trouver U dans H tel que

$$b(U, V) = \left\langle \tilde{f}, V \right\rangle, \forall V \in H.$$

Le lemme de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité de la solution U si a est continue, $H-$elliptique et L est continue, i.e.

$$|b(U, V)| \leq c_2 \|U\|_H \|V\|_H,$$

et

$$\exists 0 < c_1, c_2 < \infty / \quad b(U, U) \geq c_1 \|U\|_H^2.$$

2.1-Montrons que a est continue

$$\begin{aligned} |b(U, V)| &= \left| \int_{\Omega} \int_{Y} (A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)) dydx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{Y} |(A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y))| dydx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{Y} |A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))| . |\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)| dydx, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'hypothèse sur A, on obtient

$$|b(U, V)| \leq \beta \left(\int_{\Omega} \int_{Y} |(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))|^2 dydx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \int_{Y} |\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)|^2 dydx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a

$$\int_\Omega\int_Y |(\nabla u_0(x)+\nabla_y u_1(x,y))|^2\,dydx = \int_\Omega\int_Y |\nabla u_0(x)|^2\,dydx+\int_\Omega\int_Y |\nabla_y u_1(x,y)|^2\,dydx$$
$$+2\int_\Omega\int_Y (\nabla u_0(x)\,\nabla_y u_1(x,y))\,dydx.$$

Or, on a

$$\int_\Omega\int_Y (\nabla u_0(x)\,\nabla_y u_1(x,y))\,dydx=\int_\Omega\int_Y 1.\,\mathrm{div}_y(\nabla u_0(x)\,u_1(x,y))\,dydx.$$

Appliquons la Formule de Green et utilisons le fait que u_1 est $Y-$périodique au bord, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_Y (\nabla u_0(x)\,\nabla_y u_1(x,y))\,dydx &= -\int_\Omega\int_Y \nabla_y(1).(\nabla u_0(x)\,u_1(x,y))\,dydx \quad (3.7)\\ &+\int_\Omega\left[\int_{\partial Y} 1.(\nabla u_0(x)\,u_1(x,y))\,n(y)\,ds_y\right]dx\\ &= 0+0.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_Y |(\nabla u_0(x)+\nabla_y u_1(x,y))|^2\,dydx &= \|\nabla u_0(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_y u_1(x,y)\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}\\ &= \|U\|^2_H\end{aligned}$$

D'où

$$|b(U,V)|\leq\beta\,\|U\|_H\,\|V\|_H\,.$$

Donc a est continue.

2.2-Montrons que a est coercive

$$b(U,U)=\int_\Omega\int_Y (A(y)(\nabla u_0(x)+\nabla_y u_1(x,y)),\nabla u_0(x)+\nabla_y u_1(x,y))\,dydx$$

comme A vérifie

$$(A\xi,\xi) \geq \alpha |\xi|^2,$$

Alors

$$\begin{aligned}
b(U,U) &\geq \alpha \int_\Omega \int_Y (\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y))^2 \, dydx \\
&= \alpha \int_\Omega \int_Y (\nabla u_0(x))^2 \, dydx + \alpha \int_\Omega \int_Y (\nabla_y u_1(x,y))^2 \, dydx \\
&\quad +2\alpha \int_\Omega \int_Y \nabla u_0(x) . \nabla_y u_1(x,y) \, dydx.
\end{aligned}$$

D'après (3.7), nous avons vu que

$$\int_\Omega \int_Y \nabla u_0(x) . \nabla_y u_1(x,y) \, dydx = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
b(U,U) &\geq \alpha \int_\Omega \int_Y (\nabla u_0(x))^2 \, dydx + \alpha \int_\Omega \int_Y (\nabla_y u_1(x,y))^2 \, dydx \\
&= \alpha \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_y u_1\|^2_{L^2(\Omega\times Y)} \right) \\
&= \alpha \|U\|^2_H .
\end{aligned}$$

D'où a est coercive.

2.3-Montrons que L est continue.

$$\begin{aligned}
|L(V)| &= \left| \int_\Omega f(x) v_0(x) \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x) v_0(x)| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x) v_0(x)| \, dx + \int_\Omega |f(x) v_1(x,y)| \, dx.
\end{aligned}$$

En appliquant Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
|L(V)| &\leq c\left(\int_{\Omega} |v_0(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + c\left(\int_{\Omega} |v_1(x,y)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq c\left(\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}\right)^{1/2} \\
&= c\,\|V\|_H\,.
\end{aligned}$$

Donc Le théorème de Lax-Milgram, nous garantit l'existence et l'unicité de la solution.

Dans (3.6), si on choisit $v_0 = 0$ puis $v_1 = 0$, on trouve

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_{\Omega}\int_{Y} \left(A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right), \nabla_y v_1(x,y)\right) dydx = 0 \\
\displaystyle\int_{\Omega}\int_{Y} \left(A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right), \nabla v_0(x)\right) dydx = \int_{\Omega} f v_0 dx.
\end{cases}$$

Ces deux formules sont la formulation variationnelle du problème suivant

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}_y\left(A(y)\left(\nabla_y u_1(x,y) + \nabla u_0(x)\right)\right) = 0 & \text{dans } Y \\
y \longmapsto u_1(x,y) \text{ est } Y\text{-périodique} & \\
-\operatorname{div}_x\left[\int_Y A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right) dy\right] = f & \text{dans } \Omega \\
u_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega
\end{cases}$$

Ce problème peut être découplé en un problème macroscopique et un problème microscopique de la manière suivante

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}_x\left[\int_Y A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right) dy\right] = f & \text{dans } \Omega \\
u_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega
\end{cases} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{cases}
\operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_1(x,y)\right) = -\operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla u_0(x)\right) & \text{dans } Y \\
y \longmapsto u_1(x,y) \text{ est } Y\text{-périodique.} &
\end{cases} \tag{3.9}$$

Pour terminer la preuve de cette application. Essayons de trouver la solution du problème (3.9).

La Formulation faible du problème (3.9) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1(x,.) \in H^1_{per}(Y) \text{ t.q.} \\ \int_Y (A(y)\nabla_y u_1, \nabla\psi)\,dy = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy,\ \forall \psi \in H^1_{per}(Y). \end{cases} \tag{3.10}$$

Pour $k = 1, ..., N$, on considére le p.b. suivant

$$\begin{cases} \int_Y \left(A(y)\nabla_y w^k(y), \nabla\psi\right) dy = -\int_Y (A(y)e_k, \nabla\psi)\,dy,\ \forall \psi \in H^1_{per}(Y) \\ w^k \in H^1_{per}(Y). \end{cases} \tag{3.11}$$

Calculons le second membre de (3.11)

$$(A(y)e_k, \nabla\psi) = \sum_{i=1}^{N} a_{ik}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i}. \tag{3.12}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_Y (A(y)\nabla u_1, \nabla\psi)\,dy &= -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy \\ &= -\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \int_Y a_{ik}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy \\ &= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \int_Y \sum_{i=1}^{N} a_{ik}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy, \end{aligned}$$

en utilisant (3.12), on obtient

$$\int_Y (A(y)\nabla u_1, \nabla\psi)\,dy = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \int_Y (A(y)e_k, \nabla\psi)\,dy. \tag{3.13}$$

De (3.12) et (3.10), on aura

$$\int_Y \left(A(y)\nabla u_1, \nabla\psi\right) dy = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \int_Y \left(A(y)\nabla_y w^k(y), \nabla\psi\right) dy,$$

donc

$$\begin{aligned}\int_Y \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \int_Y \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(y) \frac{\partial w^k}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy \\ &= \int_Y \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(y) \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial w^k}{\partial y_i}\right] \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy,\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial y_i} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial w^k}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} w^k\right).\end{aligned}$$

Donc

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} w^k + \tilde{u}_1(x).$$

Remplaçons la formule de u_1 dans (3.8), on trouve

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}_x\left[\int_Y A(y)\left(\nabla u_0(x) + \nabla_y\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} w^k + \tilde{u}_1(x)\right)\right) dy\right] &= f(x) \\ -\operatorname{div}_x\left[\int_Y A(y)\left(\nabla u_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \nabla_y w^k\right) dy\right] &= f(x) \\ -\operatorname{div}_x\left[\int_Y A(y) \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_k}\left(e_k + \nabla_y w^k\right) dy\right] &= f(x).\end{aligned}$$

A ce stade, on remarque que

$$\begin{aligned}\int_Y A(y)\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\left(e_k+\nabla_y w^k\right)dy &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\int_Y A(y)\left(e_k+\nabla_y w^k\right)dy\\ &= \nabla u_0\int_Y A(y)\left(e_k+\nabla_y w^k\right)dy.\\ &= A_{\text{hom}}\nabla u_0,\end{aligned}$$

avec

$$A_{\text{hom}}=\int_Y A(y)\left(e_k+\nabla_y w^k\right)dy.$$

Et l'équation (3.8) devient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x\left(A_{\text{hom}}(y)\nabla u_0(x)\right)=f & \text{dans } \Omega\\ u_0(x)=0 & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

□

3.2 Exemple d'homogénéisation d'un problème elliptique monodimensionnel

Dans cette partie, on va faire une comparaison entre l'homogénéisation d'un problème à une dimension par la méthode de convergence à deux échelles et par la méthode classique (c'est à dire à une échelle).

Méthode de convergence à deux échelles

On considére $\Omega=]0,1[\subset\mathbb{R}$.

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a_\varepsilon(x)\dfrac{du^\varepsilon(x)}{dx}\right)=f & \text{dans } \Omega=]0,1[\\ u^\varepsilon(0)=u^\varepsilon(1)=0\end{cases}\tag{3.14}$$

$(a_\varepsilon(x))_\varepsilon$ une suite de fonction, avec $a_\varepsilon(x)=a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $\forall x\in]a,b[$. On a des hypothèses sur cette suite

$$\begin{cases} a\text{: une fonction positive dans } L^\infty(0, l_1) \\ a\text{: } l_1 - \text{périodique, } l_1 > 0 \\ 0 < \alpha \le a_\varepsilon(x) \le \beta < +\infty. \end{cases}, \tag{3.15}$$

Et $f \in L^2(\Omega)$.

La formulation variationnelle faible de (3.14) est

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q.} \\ \int\limits_\Omega a_\varepsilon(x) \dfrac{du^\varepsilon}{dx}\dfrac{dv}{dx}dx = \int\limits_\Omega f v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.16}$$

1- Estimation a priori: Comme $f \in L^2(\Omega)$ et $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, alors on a

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{c_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

i.e.

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{b-a}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et puisque $H_0^1(\Omega)$ est réflexif, alors on peut extraire une sous suite notée u^ε qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, i.e.

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

d'après le théorème 2.3.1, il existe deux fonctions $u_0(x)$ de $H_0^1(\Omega)$ et $u_1(x,y) \in L^2\left(\Omega; H_{per}^1(Y)\right)$ telles que, à une sous suite prés, $\dfrac{du^\varepsilon}{dx}$ converge à deux échelles vers $\dfrac{du_0(x)}{dx} + \dfrac{du_1(x,y)}{dy}$.

2- Existence et unicité: Soit $w_\varepsilon = v_0(x) + \varepsilon v_1(x,y)$ t.q. $v \in D(\Omega)$ et $v_1 \in D\left(\Omega; C_{per}^\infty(Y)\right)$. Utilisons w_ε comme fonction test dans (3.16), on obtient

$$\int\limits_\Omega a_\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx}\left(\frac{dv_0}{dx} + \varepsilon\frac{dv_1(x,y)}{dx} + \frac{dv_1(x,y)}{dy}\right)dx = \int\limits_\Omega f\left(v_0(x) + \varepsilon v_1(x,y)\right)dx$$

i.e.

$$\int_\Omega a_\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx}\left(\frac{dv_0}{dx}+\frac{dv_1(x,y)}{dy}\right)dx+\varepsilon\int_\Omega a_\varepsilon(x)\frac{dv_1(x,y)}{dx}dx=\int_\Omega fv_0(x)\,dx+\varepsilon\int_\Omega fv_1(x,y)\,dx.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon\to 0$, et utilisant le fait que $\frac{du^\varepsilon}{dx}$ converge à deux échelles, on aura

$$\int_\Omega\int_Y a(y)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1(x,y)}{dy}\right)\left(\frac{dv_0}{dx}+\frac{dv_1(x,y)}{dy}\right)dydx=\int_\Omega fv_0(x)\,dx. \tag{3.17}$$

On note par V l'espace $H_0^1(\Omega)\times L^2\left(\Omega;H^1_{per}(y)\right)$ et on le munit de la norme

$$\|u\|_V^2=\left\|\frac{du_0}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{du_1}{dy}\right\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}.$$

Vu la densité dans V, la relation (3.17) reste vraie pour (v_0,v_1) dans V.

$$a(U,V)=\int_\Omega\int_Y a(y)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1(x,y)}{dy}\right)\left(\frac{dv_0}{dx}+\frac{dv_1(x,y)}{dy}\right)dydx.$$

et

$$L(V)=\int_\Omega fv_0(x)\,dx,$$

On a vu précédemment que la forme bilinéaire a est continue, $V-$elliptique et la forme linéaire L est continue. Donc a vérifie les conditions du Lemme de Lax-milgram, i.e. il existe une unique solution $U\in V$.

On choisit $v_0=0$ puis $v_1=0$, on trouve

$$\int_\Omega\int_Y a(y)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1(x,y)}{dy}\right)\frac{dv_1(x,y)}{dy}dydx=0,$$

et

$$\int_\Omega\int_Y a(y)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1(x,y)}{dy}\right)\frac{dv_0}{dx}dydx=\int_\Omega fv_0(x)\,dx.$$

Donc le problème homogénéisé est le suivant

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} A_{\text{hom}}(y) \dfrac{du_0(x)}{dx} \dfrac{dv_0(x)}{dx} dx = \int\limits_{\Omega} f v_0(x)\, dx \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec A_{hom} est donnée par

$$A_{\text{hom}} = \int\limits_{Y} a(y) \left(1 + \frac{dw}{dy}\right) dy$$

où w solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dy} \left(a(y) \left(1 + \dfrac{dw(y)}{dy} \right) \right) = 0, \ \forall v_1 \in H_{per}^1(Y) \\ w \in H_{per}^1(Y). \end{cases}$$

Ce problème homogénéisé admet un unique solution.

Remarque 3.2.1 *L'homogénéisation du problème (3.14) par la méthode de convergence à deux échelles est un systéme à deux équations avec deux inconnues (u_0 et u_1).*

Autre Méthode (convergence à une échelle)

Théorème 3.2.1 *Soit $f \in L^2(]0,1[)$ et a^ε une fonction définie dans (3.15). Soit $u^\varepsilon \in H_0^1(]0,1[)$ la solution du probléme (3.14). Alors,*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(]0,1[),$$

avec u^0 est l'unique solution de dans $H_0^1(]0,1[)$ du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx} \left(\dfrac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)} \dfrac{du^0}{dx} \right) = f \text{ dans }]0,1[\\ u^0(0) = u^0(1) = 0. \end{cases}$$

On a vu par la méthode de convergence à deux échelles que le problème homogénéisé s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(A_{\text{hom}}\dfrac{du^0}{dx}\right) = f & \text{dans } \Omega =]0,1[\\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$A_{\text{hom}} = \int_0^1 a(y)\left(1+\frac{dw}{dy}\right)dy,$$

et w solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(a(y)\left(1+\dfrac{dw(y)}{dy}\right)\right) = 0, \ \forall v_1 \in H^1_{per}(Y) \\ w \in H^1_{per}(Y). \end{cases}$$

On déduit de cette équation que

$$a(y)\left(1+\frac{dw(y)}{dy}\right) = \text{constante},$$

on identifie la constante en imposant la condition périodique $w(0) = w(1)$,

$$a(y)\left(1+\frac{dw(y)}{dy}\right) = \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 1+\frac{dw(y)}{dy} &= \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{1}{a(y)} \\ \frac{dw(y)}{dy} &= -1+\frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{1}{a(y)}, \end{aligned}$$

d'où

$$w(y) = -y + \frac{1}{M_{(0,l_1)}\left(\frac{1}{a}\right)}\int_0^{l_1}\frac{1}{a(y)}dy.$$

Chapître 4

Conclusion

En suivant l'idée de Nguetseng, on a définie la notion de convergence à deux échelles, le but est de donner une meilleure description d'une suite de fonction qui oscille rapidement. Des suites bornées dans $L^p(\Omega)$ sont démontrées dans un domaine relativement compact tout en respectant le nouveau type de convergence.
Ces résultats sont souvent utilisés pour l'homogénéisation des équations aux dérivées partielles avec des coefficients oscillants périodiquement. La puissance et la simplicité de la méthode de convergence à deux échelles est démontrée en plusieurs exemples, notamment l'homogénéisation des équations elliptiques linéaires du second ordre.

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. Analyse fonctionnelle(Théorie et applications) Edition DUNOD-Paris, **1999**.

[2] D. Lukkassen, G. Nguetseng and P. Wall. Two-scale convergence. Int. J. of Pure and Appl. Math. 2, 1, 35-86, **2002**.

[3] G. Allaire. Homogenization and Two-scale convergence. Siam J. Math. Anal. vol23, No. 6, pp. 1482-1518. November **1992**.

[4] D. Cioranescu, P. Donato. An Introduction to Homogenization. OXFORD University Press Inc, New York, **1999**.

[5] K. Yosida. Functional Analysis, 6 edition, Springer-Verlag, Berlin Heidel-berg, **1995**.