

MS 043 - 4 - 04  
République Algérienne Démocratique et Populaire

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID  
TLEMCEM

FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

2<sup>e</sup> année Master

Spécialité : Analyse Numérique

# MEMOIRE

*L'Algorithme d'Uzawa  
pour la résolution des problèmes  
de contrôle optimal des EDP*

Présenté par

☞ Sarra BENZERDJEB



Soutenu le 13 octobre 2009, devant le jury composé de :

M<sup>r</sup> S. M. Bouguima ..... Président du jury  
M<sup>r</sup> A. Moussaoui ..... Examineur  
M<sup>r</sup> F. Abi Ayad ..... Encadreur

Année Universitaire 2008-2009

## *Résumé*

L'objet de ce mémoire est de décrire les problèmes de contrôle optimal, et la manière de les résoudre en se limitant aux équations aux dérivées partielles elliptiques pour simplifier la présentation. On considère deux problèmes de contrôle optimal, le premier est un contrôle distribué qui porte des contraintes sur le contrôle et le second est de type frontière sans contraintes.

Dans le présent document, l'étude théorique établie montrera que l'idée principale pour une telle résolution d'un problème de contrôle optimal d'une E.D.P est d'introduire un Lagrangien permettant de ramener ce problème à une recherche de point-selle qui est le principe de la méthode d'Uzawa.

Cette résolution numérique des deux problèmes de contrôle optimal provenant de la discrétisation par éléments finis de degré 1 est faite par l'algorithme d'Uzawa qui est une méthode utilisant la dualité afin de trouver ce point-selle.

**Mots clés :** méthode d'Uzawa, lagrangien, contrôle optimal des EDP elliptiques, contrôle frontière, contrôle distribué.

## *Abstract*

The purpose of this memory is to describe the optimal control problems and the manner to solve them. We specially study the elliptic case of partial derivatives equations to simplify the representation.

Two problems of optimal control are considered, the first is a distributed control with constraints on the control and the second kind is the border control.

In the present document, the established theory survey will show that the principal idea for such resolution of a P.D.E optimal control problem is to introduce a lagrangian which brings this problem back to a research of a saddle point which is the principle Uzawa's method.

This numerical resolution of the finite element systems of equations is performed using Uzawa's algorithm which is the iterative method used a duality in order to find this saddle point.

**Keys words:** Uzawa's method, lagrangian, optimal control of elliptic P.D.E, border control, distributed control.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	
<b>Dédicace</b>	
<b>Résumé</b>	
<b>Abstract</b>	
<b>Table des matières</b>	
<b>Introduction</b>	02
<b>Chapitre 01 : Méthode d'Uzawa</b>	
I. Motivation.....	05
II. Conditions nécessaires et suffisantes en programmation non linéaire.....	05
III. Lagrangien et point selle.....	08
IV. Dualité (Description de la méthode).....	10
V. Algorithme d'Uzawa.....	12
1. Description de l'algorithme.....	12
2. Résultat de convergence.....	14
<b>Chapitre 02 : Résultats Théoriques</b>	
I. Motivation.....	17
II. Contrôle distribué.....	17
1. Position du problème.....	17
2. l'existence et l'unicité des solutions.....	18
3. Interprétation Lagrangienne.....	22
III. Contrôle frontière.....	26
1. Position du problème.....	26
2. l'existence et l'unicité des solutions.....	27
3. Interprétation Lagrangienne.....	30
<b>Chapitre 03 : Résultats Numériques</b>	
I. Cadre général de la résolution .....	37
1. Approximation par éléments finis.....	37
2. Choix de du paramètre de convergence $\rho$ .....	39

3. Convergence de la solution discrétisée : .....	40
II. Contrôle distribué (1D).....	41
1. Choix du $\rho$ .....	44
2. Construction de l'algorithme.....	45
III. Contrôle Frontière en 2D.....	48
1. Choix du $\rho$ .....	49
2. Construction de l'algorithme.....	50

**Conclusion**

**Annexe**

**Références bibliographiques.**

# *Introduction*

Un problème de contrôle est l'étude de la minimisation d'un critère par rapport à une variable appelée contrôle le critère dépendant d'une fonction du contrôle appelée état, il s'agit le plus souvent de déterminer son meilleur fonctionnement possible (optimisation). Donc, un contrôle optimal c'est bien la recherche d'un meilleur contrôle agissant sur le système. La méthode classique pour résoudre un tel problème consiste à introduire un état adjoint qui permet la résolution par l'intermédiaire d'une fonction Lagrangienne.

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande, ou contrôle. Elle se fait sur la base des données suivantes :

- ❖ Un contrôle  $u$  dans un ensemble  $U_{ad}$  (l'ensemble des contrôles admissibles).
- ❖ L'état  $y(u)$  du système à contrôler, qui est donnée pour  $u$  choisi par la résolution d'une équation.
- ❖ La fonction coût  $J(u)$  qui est définie à partir d'une fonction.

La résolution d'un problème de contrôle fait appel à de nombreuses techniques d'analyse numérique. Dans le présent document, on présente l'algorithme d'Uzawa pour une telle résolution qui est amenée à la recherche d'un point-selle associé au Lagrangien. La méthode présentée ici est un outil très fort pour la résolution, le fait qu'elle repose sur la résolution de deux problèmes duaux l'un de l'autre. En effet, on minimise le couple donné par le contrôle et l'état et puis on maximise le troisième par une projection sur  $\mathbb{R}_+^m$ . Cette méthode itérative est très importante par le fait qu'elle construit un tel opérateur de projection facile à déterminer et ce n'est pas le cas avec d'autres méthodes.

Ce travail est consacré à l'étude numérique de problèmes de contrôle optimal gouverné par des équations aux dérivées partielles (E.D.P) elliptique. Évidemment, on passe par l'étude théorique pour montrer l'existence et l'unicité de la solution qui sera cherchée par une méthode itérative d'Uzawa.

On commence ce projet par le premier chapitre qui a pour but de présenter une méthode itérative nommée *Méthode d'Uzawa* utilisant la dualité pour la recherche d'un point selle associé à un Lagrangien formé par la fonctionnelle à minimiser du problème initial et un

multiplicateur de Lagrange multiplié par les contraintes posées. On montre également que le point-selle trouvé n'est que la solution unique recherchée du problème de minimisation initial donné et on terminera par un théorème qui établira la convergence de l'algorithme d'Uzawa.

A la suite, on trouvera dans le second chapitre, l'étude de deux problèmes de contrôle optimal l'un est un contrôle distribué avec conditions aux limites de Dirichlet et l'autre est de type frontière avec conditions aux bords de Neumann. Cette étude sera effectuée d'un point de vue théorique où on montre l'existence et l'unicité non seulement de la solution  $u$  du problème de contrôle optimal mais aussi de la solution  $y(u)$  du système d'état. Et puis on ramène la résolution de chacun des deux à un problème de recherche d'un point -selle.

Le troisième chapitre et le dernier, sera consacré à la résolution numérique des problèmes abordés dans le chapitre précédent, pour ce faire, il faut introduire la discrétisation spatiale à l'aide de la méthode des éléments finis pour se ramener à la dimension finie et puis on applique l'algorithme décrit au premier chapitre au deux cas étudiés .

# *Chapitre I*

## *Méthode d'Uzawa*

## Méthode d'Uzawa

## I. Motivation :

Dans ce qui suit on suppose que  $V$  est un espace de Hilbert,  $\mathcal{O}$  est un ouvert convexe de  $V$ . On définit l'ensemble  $K$  comme une partie de  $\mathcal{O}$  tel que :

$$K = \{ v \in \mathcal{O}; \quad \varphi_i(v) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m \}$$

Où les fonctions  $\varphi_i: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$  représentent les contraintes d'égalités ou d'inégalités.

Soit la fonction  $J$  définie par  $J: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$

Il s'agit donc de trouver le ou les  $u$  vérifiant :

$$u \in K, \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \quad (P)$$

C'est ce qu'on appellera dorénavant, le problème (P).

Pour cela, on devra chercher des conditions qui assurent l'existence de la solution du problème (P).

## II. Conditions nécessaires et suffisantes en programmation non linéaire :

Définition (1.1.1):

Soit  $u \in K$ . L'ensemble  $I(u) = \{i \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \varphi_i(u) = 0\}$  est appelé l'ensemble des contraintes actives en  $u$  ou ensemble des indices.

Définition (1.1.2):

On dit que les contraintes de  $K$  sont qualifiées en  $u \in K$  si et seulement si, il existe  $\tilde{w} \in V$  telle que l'on ait pour tout  $i \in I(u)$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ ou bien } & \quad \langle \varphi'_i(u), \tilde{w} \rangle < 0 \\ \diamond \text{ ou bien } & \quad \langle \varphi'_i(u), \tilde{w} \rangle = 0 \quad \text{et } \varphi_i \text{ est affine} \end{aligned}$$

Cela veut dire, que ce sont des conditions supplémentaires imposées sur les contraintes pour garantir la possibilité de faire des variations autour d'un point  $v \in K$  afin de tester son optimalité.

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires d'optimalité

Théorème (1.1.3) (conditions nécessaires) :

Soit  $u \in K$  au quel on associe l'ensemble d'indices  $I(u)$ .

On suppose que pour  $i \in I(u)$ , les fonctions  $\varphi_i$  sont dérivables en  $u$ , et continues en  $u$  si  $i \notin I(u)$ . En fin soit une fonction  $J: \mathcal{O} \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable en  $u$ .

Si la fonction  $J$  admet en  $u$  un minimum relatif par rapport à  $K$ , et si les contraintes sont qualifiées au point  $u$ , alors :

Il existe des nombres  $\lambda_i(u)$ ,  $i \in I(u)$  tel que :

$$J'(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i'(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i(u) \geq 0 \quad i \in I(u)$$

**Remarque (1.1.4) :**

Si les fonctions  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  étaient convexes, alors ces contraintes sont dites qualifiées s'il existe  $\tilde{v} \in V$  tel que l'on ait pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$

- ❖ ou bien  $\langle \varphi_i(u), \tilde{v} \rangle < 0$
- ❖ ou bien  $\langle \varphi_i(u), \tilde{v} \rangle = 0$  et  $\varphi_i$  est affine

L'avantage de cette nouvelle définition est de ne pas nécessiter de connaître le point de minimum  $u$  ni de calculer les dérivées des fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  ce qui donne des conditions de qualification plus simples donc plus faciles à vérifier en pratique.

Attention, le résultat du théorème précédent n'est pas une équivalence au sens où ce n'est pas une condition nécessaire et suffisante de caractérisation de minimum. Elle le devient par contre lorsqu'on considère une fonction convexe  $J$ . En effet, on a le théorème suivant :

**Théorème (1.1.5) (Kuhn Tucker) :**

Soit  $J: O \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et dérivable en un point  $u \in K$ .

On suppose également que les contraintes  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  sont convexes, dérivables en  $u \in K$  et qu'elles sont des contraintes qualifiées.

Alors :

La fonction  $J$  admet en  $u$  un minimum relatif par rapport à l'ensemble  $K$  si et seulement si il existe des nombres  $\lambda_i$   $1 \leq i \leq m$  tel que les relations de Kuhn Tucker soient satisfaites :

$$\begin{cases} J'(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i'(u) = 0 \\ \lambda_i(u) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \end{cases} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i(u) = 0$$

**Démonstration**

Si  $u$  est un minimum de  $J$  sur  $K$  on peut appliquer le théorème (1.1.3), qui donne exactement la condition d'optimalité mais seulement il faut vérifier que la condition de qualification dans

le cas convexe entraîne la qualification des contraintes au sens de la définition (1.1.2). En effet :

Si  $i \in I(u)$  et si  $\varphi_i(\tilde{v}) < 0$  alors d'après la convexité de  $\varphi_i$  (voir annexe proposition 4), on a

$$\langle \varphi'_i(u), \tilde{v} - u \rangle = \langle \varphi'_i(u), \tilde{v} - u \rangle + \varphi_i(u) \leq \varphi_i(\tilde{v}) < 0$$

D'autre part, si  $i \in I(u)$  et si  $\varphi_i(\tilde{v}) = 0$ ,  $\varphi_i$  est alors affine.

En calculant la dérivée de  $\varphi_i$  au point  $u$  dans la direction de  $\tilde{v} - u$ , on obtient :

$$\langle \varphi'_i(u), \tilde{v} - u \rangle = \varphi_i(\tilde{v}) - \varphi_i(u) = 0$$

Donc, la définition (1.2.1) de qualification des contraintes est satisfaite avec  $\tilde{w} = \tilde{v} - u$ , même si  $\tilde{w} = 0$ , les fonctions  $\varphi_i$  étant affines convexes pour tout  $i \in I(u)$ .

Réciproquement, on montre que  $u$  est un minimum pour  $J$

Pour  $v \in K$ ,  $\varphi_i(v) \leq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$

De plus pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on a  $\lambda_i \geq 0$

Donc

$$-\lambda_i \varphi_i(v) \geq 0 \Rightarrow -\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v) \geq 0$$

On ajoute aux deux membres de l'inégalité  $J(u)$

$$J(u) \leq J(u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v)$$

Si  $i \in I(u)$ , alors  $\varphi_i(u) = 0$ , sinon on prend  $\lambda_i = 0$ . Ce qui implique que :

$$J(u) \leq J(u) - \sum_{i \in I(u)} \lambda_i (\varphi_i(v) - \varphi_i(u))$$

Comme  $\varphi_i$  est convexe alors on a

$$J(u) \leq J(u) - \sum_{i \in I(u)} \lambda_i \langle \varphi'_i(u), v - u \rangle$$

D'après les relations de Kuhn Tucker on a

$$J(u) \leq J(u) + \langle J'(u), v - u \rangle$$

La convexité de  $J$  implique que  $J(u) \leq J(u) + J(v) - J(u) = J(v)$

C'est-à-dire :

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K$$

D'où le résultat

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$

**Remarque (1.1.6):**

1. D'une part, la convexité des contraintes  $\varphi_i$  permet d'établir la nécessité des relations de Kuhn Tucker avec des hypothèses de qualification sur les contraintes. L'hypothèse supplémentaire de la convexité de la fonction  $J$  permet, d'autre part, de montrer que ces deux relations sont également suffisantes. Cela veut dire que si  $J$  n'était pas convexe alors la condition suffisante n'a pas lieu.
2. L'idée qui garantit ce théorème est très importante car il exprime l'existence d'une fonction dont la dérivée première au point  $u$  est nulle ce qui permet de dire qu'elle admet le même point de minimisation que la fonction coût  $J$ . Cette fonction sera dite fonction Lagrangienne, et on la note  $\mathcal{L}$ .

### III. Lagrangien et point selle :

**Définition (1.3.1) :**

On appelle Lagrangien du problème (P) la fonction  $\mathcal{L}(v, \mu)$  définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{L}(v, \mu) = J(v) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(v) = J(v) + \langle \mu, \varphi(v) \rangle \quad \forall (v, \mu) \in V \times \mathbb{R}_+^m$$

**Remarque (1.3.2) :**

1. La fonction  $\mathcal{L}$  est définie en général sur un ensemble quelconque  $E \times F$ , mais dans ce contexte on a préféré donner cette définition.
2. On constate que la fonction Lagrangienne englobe à la fois la fonctionnelle  $J$  et les contraintes  $\varphi_i \leq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Elle représente donc bien le problème (P).

**Définition (1.3.3) :**

On appelle point selle de  $\mathcal{L}$  sur  $V \times \mathbb{R}_+^m$ , tout couple  $(u, \lambda)$  vérifiant :

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \forall (v, \mu) \in V \times \mathbb{R}_+^m$$

Autrement dit :

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(u, \mu) = \mathcal{L}(u, \lambda) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda)$$

Il est souvent appelé également min-max ou col.

$\lambda$  est appelé multiplicateur de Kuhn Tucker.

L'intérêt fondamental de la notion de point selle se situe dans le prochain théorème, en effet : sous certaines conditions, toute solution  $u$  du problème (P) est également premier argument d'un point -selle  $(u, \lambda)$  du Lagrangien associé au problème considéré.

Réciproquement, si  $(u, \lambda)$  est un point-selle de ce Lagrangien alors  $u$  est solution du problème (P).

**Théorème (1.3.4) :**

1. Si  $(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}_+^m$  est un point-selle du Lagrangien  $\mathcal{L}$  le point  $u \in K$  est solution du problème (P) .
2. On suppose que les fonctions  $J, \varphi_i, 1 \leq i \leq m$  sont convexes, dérivables en  $u \in K$  et les contraintes qualifiées.

Alors : si  $u$  est une solution du problème (P) il existe au moins un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  tel que le couple  $(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}_+^m$  soit point-selle du Lagrangien  $\mathcal{L}$  .

**Démonstration :**

1. Il suffit donc de montrer que  $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V$  , on a

Pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_+^m$  ,

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^m (\mu_i - \lambda_i) \varphi_i(u) \leq 0$$

Ce qui entraîne que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) \geq 0 \quad \text{lorsque } \mu = (0, \dots, 0)$$

Or, pour  $1 \leq i \leq m$  ,

$$\varphi_i(u) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) \leq 0$$

D'où

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) = 0$$

pour tout  $v \in V$   $\mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda)$

$$J(u) \leq J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v) \quad \text{pour tout } v \in V$$

En particulier, pour les  $v \in K$ ,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v) \leq 0$$

Et donc  $J(u) \leq J(v)$  pour tout  $v \in K$

2. En appliquant le théorème de Kuhn Tucker et puisque  $u$  est solution de (P) on obtient l'existence de  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ , tel que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i(u) = 0, \quad J'(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i'(u) = 0$$

La première égalité entraîne que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_+^m$

$$\mathcal{L}(u, \mu) = J(u) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(u) \leq J(u) = J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) = \mathcal{L}(u, \lambda)$$

Par contre la seconde est une condition suffisante pour l'existence d'un minimum pour la fonction convexe  $\mathcal{L}$ . Donc on trouve pour tout  $v \in V$

$$\mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda)$$

Il en résulte que  $(u, \lambda)$  est un point-selle du Lagrangien  $\mathcal{L}$ .

#### IV. Dualité (Description de la méthode):

Un bref aperçu de la théorie de la dualité pour les problèmes d'optimisation va affirmer qu'à l'existence d'un point-selle  $(u, \lambda)$  du Lagrangien, on peut associer non pas un mais deux problèmes d'optimisation (plus précisément, un problème de minimisation et un problème de maximisation), qui seront dits duaux l'un de l'autre.

##### Théorème (1.4.1) (de la dualité).

Si le couple  $(u, \lambda)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  sur  $V \times \mathbb{R}_+^m$ , alors

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu) = \mathcal{L}(u, \lambda) = \inf_{v \in V} \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(v, \mu)$$

##### Démonstration :

Pour tout  $(v, \mu) \in V \times \mathbb{R}_+^m$ , on a évidemment

$$\inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu) \leq \mathcal{L}(v, \mu)$$

Et donc

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu) \leq \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(v, \mu) \quad \forall v \in V$$

Et finalement

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu) \leq \inf_{v \in V} \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(v, \mu) \quad (1.1)$$

En utilisant maintenant l'égalité du point selle  $(u, \lambda)$

$$\inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda) = \mathcal{L}(u, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(u, \mu)$$

D'une part, on obtient

$$\inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \Leftrightarrow \inf_{v \in V} \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(v, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda)$$

D'autre part

$$\mathcal{L}(u, \lambda) \leq \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(u, \mu) \Leftrightarrow \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu)$$

Ce qui entraîne

$$\inf_{v \in V} \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{L}(v, \mu) \leq \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu) \quad (1.2)$$

En rapprochant (1.1) et (1.2) on obtient les égalités annoncées.

On voit alors que ce théorème traduit la possibilité d'échanger l'ordre de l'*Inf* et du *Sup* appliqués aux Lagrangien  $\mathcal{L}$ . Ce fait qui est faux si  $\mathcal{L}$  n'admet pas de point-selle, explique le nom de min-max qui est souvent donné à un point-selle s'il est atteint.

C'est grâce à ce théorème et celui de (1.3.4) qu'on peut associer au problème  $(P)$  son dual. En effet :

Si on suppose connaître  $\lambda$  solution du second argument du point-selle alors la résolution du problème  $(P)$  sera ramené à résoudre :

$$(P_\lambda) \quad u_\lambda \in V \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}(u_\lambda, \lambda) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu)$$

Car l'unicité du point-selle est assurée que si le second argument  $\lambda$  est unique.

A l'aide du théorème précédent on peut trouver ce  $\lambda$

$$\mathcal{L}(u_\lambda, \lambda) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu)$$

A ce stade, on définit l'application

$$\mathcal{G}: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \mathcal{G}(\mu) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \mu)$$

qui construit le problème dual  $(Q)$  associé au problème primal  $(P)$  tel que

$$(Q) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m \quad \mathcal{G}(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{G}(\mu)$$

$\mu$  est nommée la variable duale, de la variable primale  $v \in K \subset V$  qui définit un problème de maximisation avec contrainte facile à résoudre.

Une fois le problème dual résolu, donc  $\lambda$  obtenu, on obtient  $u$  comme solution du problème de minimisation sans contraintes. C'est une procédure très utile si le Lagrangien provient d'un problème de minimisation sous contraintes. En effet, on remplace ainsi une difficile minimisation sous contraintes par la combinaison de la résolution du problème dual et la minimisation sans contraintes du Lagrangien.

Maintenant, on explique en quoi l'introduction du problème dual peut être utile pour la résolution du problème d'origine (ou problème primal).

**Théorème (1.4.2) :**

*On suppose que le problème (P) a au moins une solution  $u$ , que les fonctions  $J, \varphi_i, 1 \leq i \leq m$  sont convexes, dérivables en  $u$  et que les contraintes sont qualifiées. Alors : Le problème (Q) admet au moins une solution.*

**Démonstration**

En appliquant le théorème (1.3.4) -2, on conclut qu'il existe au moins un point-selle  $(u, \lambda)$  du Lagrangien vérifiant d'après le théorème précédent les égalités suivantes :

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{u \in V} \mathcal{L}(v, \mu)$$

Il en résulte que

$$\mathcal{G}(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{G}(\mu)$$

**V. Algorithme d'Uzawa :**

La méthode qu'on va présenter est issue de la théorie de la dualité convexe introduite ci-dessus. L'idée générale est de considérer le Lagrangien  $\mathcal{L}$  au lieu de la fonction  $J$ , ce choix est motivé par deux raisons:

- ❖ la fonction Lagrangienne englobe à la fois la fonction  $J$  et les contraintes  $\varphi_i$  et représente bien le problème.
- ❖ De plus, pour que  $u$  soit un minimum de  $J$ , il faut qu'il soit un point critique de  $\mathcal{L}$  (i.e.  $\nabla \mathcal{L}(u, y, p) = 0 = \nabla J(u)$ ) (conditions de Kuhn Tucker).

**1. Description de l'algorithme :**

Cette méthode qui repose sur la recherche d'un point-selle suggère la résolution du problème dual (Q) tel que

$$\mathcal{G}(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} \mathcal{G}(\mu)$$

dont les contraintes correspondent à un opérateur de projection  $P_+ : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$  défini par :

$$P_+(\lambda_i) = \max \{ \lambda_i, 0 \}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Etant donné un paramètre  $\rho$ , on a

$$G(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} G(\mu) \quad \Leftrightarrow \langle \nabla G(\lambda), \mu - \lambda \rangle \leq 0$$

Où  $\nabla G(\lambda)$  est la dérivée de Gâteaux de  $G$  en  $\lambda$ .

$$\text{Pour } \lambda \in \mathbb{R}_+^m \quad \langle \lambda - (\lambda + \rho \nabla G(\lambda)), \mu - \lambda \rangle \geq 0 \quad \text{avec } \rho > 0$$

D'après le théorème de projection

$$\lambda = P_+(\lambda + \rho \nabla G(\lambda))$$

Il est donc naturel de définir comme méthode d'approximation de la solution du problème dual la méthode des approximations successives appliquée à l'application :

$$g : \lambda \in \mathbb{R}^m \rightarrow g(\lambda) = P_+(\lambda + \rho \nabla G(\lambda)) \in \mathbb{R}_+^m$$

Soient  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^m$  arbitraire, et une suite de couples  $(\lambda^k, u_k) \in V \times \mathbb{R}_+^m \quad k \geq 0$  tel que

$$\lambda^{k+1} = g(\lambda^k) = P_+(\lambda^k + \rho \nabla G(\lambda^k))$$

Puisque  $\langle \nabla G(\lambda), \mu - \lambda \rangle = \langle \varphi(u), \mu - \lambda \rangle$ , on a

$$\begin{cases} \text{calcul } u_k : & \mathcal{L}(u_k, \lambda^k) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda^k) \\ \text{calcul } \lambda^{k+1} : & \lambda^{k+1} = \max \{ \lambda_i^k + \rho \varphi_i(u_k), 0 \}_{i=1}^m \end{cases}$$

Il découle de toute cette théorie un algorithme itératif permettant de trouver un point-selle :

### 1. Initialisation

$$k = 0, \quad \lambda^0 \text{ donnée}, \quad \rho > 0 \text{ reel fixé}$$

### 2. Itération $k$ :

$\lambda^k$  est connue,

$$\text{calcul } u_k : \quad \mathcal{L}(u_k, \lambda^k) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda^k) \quad (P^k)$$

$$\text{calcul } \lambda_i^{k+1} : \quad \lambda_i^{k+1} = \max \{ \lambda_i^k + \rho \varphi_i(u_k), 0 \}, \quad 1 \leq i \leq m$$

### 3. Critère d'arrêt :

Si  $\|u_{k+1} - u_k\| < \varepsilon$  sinon on pose  $k = k + 1$  et on remonte à 2

Dans ce qui suit on note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  et  $\|\cdot\|_p$  le produit scalaire et la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^p$

**Définition : (1.5.1)**

On dit que la fonctionnelle  $J$  est  $V$ -elliptique (Dans certains ouvrages, elle est dite « fortement convexe » ou « coercive » ou bien «  $\alpha$ -convexe ») s'il existe une constante  $\alpha > 0$  tel que

$$\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle_n \geq \alpha \|u - v\|_n^2$$

**2. Résultat de convergence :**

**Théorème (1.5.2) (convergence de la méthode d'Uzawa) :**

On suppose que  $V = \mathbb{R}^n$  et que  $J$  est elliptique. Soit l'ensemble  $K$  non vide donné sous la forme suivante

$$K = \{v \in \mathbb{R}^n; Cv \leq d\} \quad C \in \mathcal{A}_{m,n}(\mathbb{R}), d \in \mathbb{R}^m$$

Alors: Si  $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|C\|^2}$ , la suite  $(u_k)$  converge vers la solution unique du problème primal (P).

**Démonstration :**

La démonstration se fait en 2 étapes :

• **1<sup>ère</sup> étape : l'existence des solutions**

L'ensemble  $K$  est un ensemble convexe non vide et fermé et de plus  $J$  est elliptique ce qui entraîne que le problème (P) admet une unique solution  $u$  ainsi que les problèmes  $(P^k)$  de minimisation successifs de solution  $u_k$ .

Il résulte du théorème (1.3.4), (2) que le problème dual admet au moins une solution.

La fonction  $\varphi$  rencontrée ici est une application affine telle que  $\varphi(v) = Cv - d$  de sorte que son Lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \mu) &= J(v) + \langle \mu, \varphi(v) \rangle_m = J(v) + \langle \mu, Cv \rangle_m - \langle \mu, d \rangle_m \\ &= J(v) + \langle C^T \mu, v \rangle_n - \langle \mu, d \rangle_m \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.3.4), on en conclut qu'il existe au moins un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  tel que le couple  $(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}_+^m$  soit point-selle du Lagrangien  $\mathcal{L}$ .

Pour que  $u$  soit un minimum on a

$$\begin{aligned} \text{D'une part} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, \mu) \Big|_{(u, \lambda)} &= 0 && \text{(équation d'Euler)} \\ \Leftrightarrow \nabla J(u) + C^T \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Et d'autre part, le problème de maximisation implique

$$\langle \nabla G(\lambda), \mu - \lambda \rangle \leq 0 \quad (\text{inéquation d'Euler})$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{cases} \nabla J(u) + C^T \lambda = 0 \\ \lambda = P_+(\lambda + \rho \varphi(u)) \quad 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Ces relations sont vérifiées, également pour les problèmes de minimisation successifs donc elles le sont pour  $u_k - u$  et  $\lambda^{k+1} - \lambda$ , de plus l'application du théorème de projection permet d'avoir :

$$\begin{cases} \nabla J(u_k) - \nabla J(u) + C^T(\lambda^{k+1} - \lambda) = 0 \\ \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m \leq \|\lambda^k - \lambda + \rho C(u_k - u)\|_m \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

Car l'opérateur de projection n'augmente pas les distances.

• **2eme étape : convergence de la suite  $(u_k)_{k \geq 0}$**

On élève au carré les membres de l'inégalité (1.4)

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 \leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 + 2\rho \langle C^T(\lambda^k - \lambda), u_k - u \rangle_n + \rho^2 \|C(u_k - u)\|_m^2$$

L'égalité des deux relations écrites auparavant entraîne que

$$\begin{aligned} \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 &\leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 - 2\rho \langle \nabla J(u_k) - \nabla J(u), u_k - u \rangle_n + \rho^2 \|C(u_k - u)\|_m^2 \\ &\leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 - \rho(2\alpha - \rho \|C\|^2) \|u_k - u\|_n^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 - \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 \leq -\rho(2\alpha - \rho \|C\|^2) \|u_k - u\|_n^2$$

Puisque  $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|C\|^2}$  alors  $-\rho(2\alpha - \rho \|C\|^2)$  est de signe négatif, ce qui donne

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m - \|\lambda^k - \lambda\|_m \leq 0 \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

La suite  $(\|\lambda^k - \lambda\|_m)_{k \geq 0}$  étant décroissante et minorée par 0, donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 - \|\lambda^k - \lambda\|_m^2) = 0$$

Alors on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_n^2 = 0$$

D'où la convergence de la suite  $(u_k)_{k \geq 0}$  vers  $u$ .

# *Chapitre II*

## *Résultats Théoriques*

## Résultats Théoriques

### I. Motivation

Dans le présent chapitre, on s'intéresse à l'étude des problèmes de contrôle optimal régis par des équations aux dérivées partielles elliptiques dont la théorie est présentée par J.-L. Lions.

Une manière de formuler un tel problème de contrôle optimal est la suivante :

*Etant donnée une observation  $y_d$  peut-on trouver un contrôle admissible  $u$  tel que  $y(u) = y_d$  où  $y(u)$  est la solution de l'équation d'état du problème dépendant du contrôle?*

La formulation du problème de contrôle optimal repose sur une fonctionnelle  $J$  à valeurs réelles dite fonction coût ou critère qui minimise l'écart entre  $y(u)$  et  $y_d$  au sens de la norme  $L^2$ , à laquelle on ajoute un terme qui assure la régularité du contrôle et l'unicité de la solution. Concrètement, le problème est donné par :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in U_{ad} \text{ tel que} \\ J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \end{cases}$$

En premier temps, on considère le cas le plus simple, dont le contrôle est une fonction d'action sur l'état du système et ceci à l'intérieur même du domaine d'étude qui est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  noté par  $\Omega$ . Ce type de contrôle est nommé « *contrôle distribué* ».

Dans la deuxième partie, on étudiera un contrôle de type frontière cela veut dire que le contrôle agit sur la frontière du domaine  $\Gamma$  et que l'on l'appelle « *contrôle frontière* ».

Dans la suite on désigne par  $V$  l'espace de Hilbert munis du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ .

### II. Contrôle distribué :

#### 1. Position du problème :

On considère ici le problème de contrôle d'une membrane élastique déformée par une force extérieure  $f$  et fixée sur son contour. Le comportement de la membrane est modélisé par

$$\begin{cases} -\Delta y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad [1]$$

où

- ❖  $y$  est l'état du système, elle représente le déplacement vertical de la membrane,  $y \in H_0^1(\Omega)$  qui est un espace de Hilbert de dimension infinie.

- ❖  $v$  est une force de contrôle qui sera la variable d'optimisation. On se donne une fonction limitative  $\beta$  dans  $L^2(\Omega)$ . on définit, alors l'ensemble des contrôles admissibles

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Omega), \quad \text{tel que } 0 \leq v(x) \leq \beta(x) \}$$

qui est un ensemble convexe fermé et non vide de  $L^2(\Omega)$ . Pour montrer que  $U_{ad}$  est fermé on peut se contenter de montrer que  $U_+$  est un fermé

$$U_+ = \{v \in L^2(\Omega), \quad \text{tel que } 0 \leq v(x)\}$$

En effet,

Soit  $(u_n)_n$  une suite dans  $U_+$  avec  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} u_n g dx \geq 0 \quad \forall g \in U_+$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on a

$$\int_{\Omega} u g dx \geq 0 \quad \forall g \in U_+$$

Il s'en déduit que  $u \in U_+$  et puisque  $U_{ad} \subset U_+$ , alors  $U_{ad}$  est un fermé.

- ❖  $f \in L^2(\Omega)$ .

On cherche à contrôler la membrane pour qu'elle adopte un déplacement  $y_d \in L^2(\Omega)$ . On définit donc un critère

$$J(v) = \int_{\Omega} (y(v) - y_d)^2 d\sigma + N \int_{\Omega} v^2 dx = \|y(v) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + N \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

où  $y$  solution de [1] et dépend de  $v$  et  $N > 0$ . Le problème de contrôle s'écrit

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \quad (P_1)$$

## 2. l'existence et l'unicité des solutions :

L'équation une du système [1] peut être écrite sous sa forme variationnelle (formulation faible. donc on la multiplie par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  et puis on l'intègre tout en utilisant la formule de Green et en tenant compte du fait

que  $\varphi|_{\Gamma} = 0$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.1)$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} a(y, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi dx \\ L(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\Omega} v \varphi dx \end{cases}$$

Les deux formes,  $a$  qui est bilinéaire et  $L$  qui est linéaire sur  $H_0^1(\Omega)$ , sont reliées par le problème [2] :

$$\begin{cases} \text{trouver } y \in H_0^1(\Omega) & \text{tel que} \\ a(y, \varphi) = L(\varphi) \end{cases} \quad [2]$$

**Proposition (2.2.1) :**

Le système [1] admet une unique solution  $y(v)$ . De plus l'application  $v \mapsto y(v)$  est affine continue de  $L^2(\Omega)$  sur  $H_0^1(\Omega)$ .

**Démonstration :**

1) De ce qui précède, le système [1] était équivalent à [2]. Donc pour s'assurer de l'existence et l'unicité de la solution de [1], il suffit seulement de montrer que :

**a) la forme  $a$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ :**

On doit vérifier donc qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

$$a(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow a(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{avec } \alpha = 1$$

**b) la forme  $a$  est continue sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ :**

Cela veut dire qu'il existe  $\beta > 0$  tel que

$$\text{pour tout } \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega), \quad |a(\varphi, \psi)| \leq \beta \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

On a

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi \nabla \psi| dx$$

Par application de l'inégalité de Hölder, il vient que :

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^n}$$

D'où le résultat :

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec } \beta = 1$$

**c) la forme  $L$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ :**

$\exists M > 0$  tel que  $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad |L(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$|L(\varphi)| \leq \int_{\Omega} |f\varphi| dx + \int_{\Omega} |v\varphi| dx$$

L'inégalité de Holder entraine que

$$|L(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow |L(\varphi)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists C(\Omega) > 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Il en résulte

$$|L(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec } M = C(\Omega)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)})$$

On est bien placé dans les conditions de l'application du théorème de Lax Milgram, donc il existe une unique solution  $y(v) \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant [2] et c'est bien la solution unique du système [1].

2) L'application  $v \mapsto y(v)$  est affine continue, en effet,

❖ [1] est équivalente à

$$-\Delta y = f + v \Rightarrow y = -\Delta^{-1}v - \Delta^{-1}f$$

On obtient, alors le système suivant :

$$\begin{cases} y = -\Delta^{-1}v + B & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{avec } B = \begin{cases} -\Delta^{-1}f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

D'où  $y$  est une application affine de la forme

$$y = Av + B$$

avec  $A$  un opérateur défini par  $A = \begin{cases} -\Delta^{-1}v & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$

❖ On vérifie que cette application est continue.

En effet, on se donne  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de [1] tel que :

$$y_1(v_1) = Av_1 + B \quad \text{et} \quad y_2(v_2) = Av_2 + B$$

$$\|y_2(v_2) - y_1(v_1)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|A(v_2 - v_1)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Il suffit donc de montrer que  $A$  est continu par rapport à  $v$ , or  $A$  correspond au système d'état homogène de [1] (quand  $f \equiv 0$ )

Donc d'après la formulation variationnelle (2.1) on peut avoir :

$$a(y, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi \, dx = L(\varphi) = \int_{\Omega} v \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Pour  $\varphi = y$  on a

$$a(y, y) = \|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v \varphi \, dx$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz entraîne que :

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\xrightarrow{\text{Poincaré}} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\implies \|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Cela veut dire que l'opérateur  $A$  est continu

En particulier si  $v = v_2 - v_1$  et  $y(v) = y_2(v_2) - y_1(v_1)$

$$\text{Alors } \|y_2(v_2) - y_1(v_1)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \|v_2 - v_1\|_{L^2(\Omega)}$$

On conclut que  $v \mapsto y(v)$  est une application affine et continue de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

**Théorème (2.2.2) :**

*Il existe  $u \in U_{ad}$  tel que le problème  $(P_1)$  admet en  $u$  une unique solution.*

**Démonstration :**

On sait que si  $J$  est une fonctionnelle convexe, semi continue inférieurement et infinie à l'infini sur un convexe fermé alors  $(P_1)$  admet au moins une solution, et si de plus elle est strictement convexe, le problème  $(P_1)$  a au plus une solution d'où l'unicité de la solution optimale, pour se faire il suffit de montrer que :

**a)  $J$  est continue :**

La proposition précédente a confirmé que l'application  $v \mapsto y(v)$  est continue, donc  $\|y(v) - y_d\|_{L^2(\Omega)}$  est aussi continue, de plus  $v \mapsto \|v\|_{L^2(\Omega)}$  est une application continue.

Par la suite  $J$  est continue car la somme de deux intégrales continues est toujours continue.

**b)  $J$  est strictement convexe :**

On établit cette propriété en calculant la valeur de la dérivée directionnelle au point  $u$  dans la direction de  $v - u$

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{J(u + \theta v) - J(u)}{\theta} \right) \\ &= 2 \int_{\Omega} (y(u) - y_d) \langle y'(u), v \rangle dx + 2N \int_{\Omega} uv dx \end{aligned}$$

Comme  $\langle y'(u), v \rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} (Au + \theta Av + B - Au - B) = Av$ , alors on trouve :

$$\langle J'(u), v \rangle = 2 \int_{\Omega} (y(u) - y_d) Av dx + 2N \int_{\Omega} uv dx$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v - u \rangle &= 2 \int_{\Omega} (y(u) - y_d) A(v - u) dx + 2N \int_{\Omega} u(v - u) dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (y(u) - y_d) (y(v) - y(u)) dx + 2N \int_{\Omega} u(v - u) dx \end{aligned}$$

Car, on a  $y(v) - y(u) = Av + B - Au - B = A(v - u)$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle &= \int_{\Omega} (y(u) - y(v))^2 dx + N \int_{\Omega} (u - v)^2 dx \\ &= \|y(u) - y(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + N \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Puisque  $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq 0$ , on peut dire que la fonctionnelle  $J$  est convexe, car  $J'$  est monotone, de plus :

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle = 0 \Leftrightarrow u = v$$

On conclut qu'elle est strictement convexe.

**c)  $J$  est infinie à l'infini :**

On a :

$$J(v) = \|y(v) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + N \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq N \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Ce qui implique

$$J(v) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$$

Par l'application du théorème de l'existence d'un minimum (consulter l'annexe), il en résulte que le problème  $(P_1)$  admet au moins une solution  $u$  dans  $U_{ad}$  d'une part, et d'autre part  $J$  étant strictement convexe,  $(P_1)$  a au plus une solution  $u$  dans  $U_{ad}$ . Enfin le problème  $(P_1)$  admet une unique solution  $u$  dans  $U_{ad}$ .

### 3. Interprétation Lagrangienne:

Pour tester l'optimalité de  $u$  il est nécessaire, pour chaque fonction teste  $v$ , de calculer l'état correspondant  $y(v)$ . Pour contourner cette difficulté on a recours à la notion *d'état adjoint* qui est une idée très utilisée dans la théorie du contrôle optimal. Elle sera appliquée quand on introduit un Lagrangien associé au problème de minimisation  $(P_1)$  qui considère l'équation du système [1] comme des contraintes entre deux variables indépendantes  $v$  et  $z$  et on définit le Lagrangien comme la somme de  $J(v, z)$  et l'équation d'état multipliée par  $p$  qui représente le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de [1] avec  $p \in H_0^1(\Omega)$ . C'est-à-dire

$$\mathcal{L}(v, z, p) = J(v, z) - \int_{\Omega} p(-\Delta z - f - v) dx$$

$$\text{avec} \quad J(v, z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z - y_d)^2 dx + N \int_{\Omega} v^2 dx$$

Donc le problème  $(P_1)$  devient :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J(v, z) \\ v \in U_{ad}, z \in H_0^1(\Omega) \\ \text{sous la contrainte d'égalité [1]} \end{cases}$$

**Définition (2.2.4) :**

Soit  $p \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$a^*(p, \psi) = \int_{\Omega} (y(u) - y_d) \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

(2.2) est appelée équation faible adjointe

**Remarque (2.2.5) :**

Si  $a$  est symétrique. alors  $a^*(p, \psi) = a(\psi, p)$

**Lemme (2.2.6) :**

$p$  est définie de façon unique par (2.2).

**Démonstration :**

On a l'équation faible adjointe

$$a(\psi, p) = a(p, \psi) = \int_{\Omega} \nabla p \nabla \psi \, dx$$

De ce qui précède on sait que  $a$  est une forme bilinéaire continue, sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ .

De plus la forme linéaire  $L$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ , en effet

$$|L(\psi)| = \left| \int_{\Omega} (y - y_d) \psi \, dx \right| \leq \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\xrightarrow{\text{inégalité de Poincaré}} |L(\psi)| \leq M \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec } M = C(\Omega) \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc  $L$  est continue dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

Par l'application du théorème de Lax Milgram, on peut affirmer que (2.2) admet une solution unique  $p$ .

**Définition (2.2.7) :**

On dit que le triplet  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  sur  $U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  si

$$\sup_{q \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(u, y, q) = \mathcal{L}(u, y, p) = \inf_{(v, z) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall (v, z, q) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

**Théorème (2.2.8) :**

Si  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  dans  $U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , alors  $u$  est solution de  $(P_1)$ .

**Démonstration :**

Puisque  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  dans  $U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  on a donc

$$\mathcal{L}(u, y, q) \leq \mathcal{L}(u, y, p) \leq \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall (v, z, q) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

a) De l'inégalité de gauche il vient que

$$\mathcal{L}(u, y, q) \leq \mathcal{L}(u, y, p) \quad \text{pour tout } q \in H_0^1(\Omega)$$

Ce qui entraîne

$$-\int_{\Omega} (q - p)(-\Delta y - u - f) \, dx \leq 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (q - p)(-\Delta y - u - f) dx \geq 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega)$$

Pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\exists q \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\varphi = q - p$

- Si  $\varphi \geq 0$  alors

$$\int_{\Omega} \varphi(-\Delta y - u - f) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow -\Delta y - u - f \geq 0$$

- Si  $\varphi \leq 0$  alors

$$\int_{\Omega} \varphi(-\Delta y + y - f) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow -\Delta y - u - f \leq 0$$

$$\text{On a donc} \quad -\Delta y - u - f = 0 \quad (2.3)$$

b) De l'inégalité de droite, il vient que

$$\mathcal{L}(u, y, p) \leq \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall (v, z) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega)$$

D'après (2.3) on obtient

$$J(u, y) \leq J(v, z) - \int_{\Omega} p(-\Delta z - v - f) dx \quad \forall (v, z) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega)$$

Comme l'équation  $-\Delta z(v) = f + v \quad \forall z(v) \in H_0^1(\Omega)$  admet une unique solution pour chaque contrôle  $v \in U_{ad}$ , et que cette équation représente la contrainte d'égalité pour la minimisation effectuée, alors pour tout  $(v, z) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega)$ , il découle que  $-\Delta z = f + v$ .

Par la suite, on a  $J(u, y) \leq J(v, z) \quad \forall (v, z) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega)$ .

Il en résulte que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in U_{ad}$$

A la fin on a aboutit à

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$$

**Remarque (2.2.9) :**

Le résultat que présente ce théorème est très important, en fait la résolution d'un problème de minimisation  $(P_1)$  est ramenée à la recherche d'un point selle dont le 1<sup>er</sup> argument coïncide avec la solution recherchée dans  $(P_1)$ .

**Théorème (2.2.10) :**

Si  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$ , alors  $(u, y, p)$  vérifie le système d'optimalité [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'état direct} \\ \text{L'état adjoint} \\ \text{Condition d'optimalité} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} -\Delta y = f + u & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \begin{cases} -\Delta p = y(u) - z_d & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \int_{\Omega} (p + Nu)(v - u) dx \geq 0 \end{array} \right. \quad [3]$$

**Démonstration :**

De la démonstration du théorème précédent (a) on a abouti à l'équation (2.3)

$$-\Delta y + y - f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

De temps plus  $y$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ , donc  $y \equiv 0$  sur  $\Gamma$ . Alors on abouti au premier système de l'état direct.

Pour avoir l'équation variée par l'état adjoint  $p$  on considère la condition d'optimalité

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p) \right|_{(u, y, p)} = 0 \quad (2.4)$$

En appliquant deux fois la formule de Green au Lagrangien, on obtient

$$\mathcal{L}(v, z, p) = J(v, z) - \int_{\Omega} z(-\Delta p) dx + \int_{\Omega} p(f + v) dx \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [\mathcal{L}(v, z + \theta \varphi, p) - \mathcal{L}(v, z, p)]$$

Les termes du Lagrangien qui ne contiennent pas l'argument  $z$  ont des dérivées nulles, donc on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z + \theta \varphi - y_d)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z - y_d)^2 dx \right] \\ &\quad - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\Omega} (z + \theta \varphi)(-\Delta p) dx - \int_{\Omega} z(-\Delta p) dx \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2\theta \varphi (z - y_d) + \theta^2 \varphi^2 dx \right] - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \theta \varphi (-\Delta p) dx$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \varphi(z - y_d) dx - \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

L'équation d'Euler (2.4) entraîne que

$$\int_{\Omega} \varphi(y - y_d) d\sigma = \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Puisque  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  donc on peut avoir le système de l'état adjoint au sens des distributions.

Enfin, on montre l'inégalité restée tout en posant la condition d'optimalité et c'est bien l'inéquation d'Euler donné par

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, y, p), v - u \right\rangle \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.6)$$

On considère la formule de  $\mathcal{L}$  donnée par (2.5), puis on calcule sa dérivée de Gâteaux par rapport à  $v$ .

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, z, p), \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [\mathcal{L}(v + \theta\psi, z, p) - \mathcal{L}(v, z, p)] \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{N}{2\theta} \left[ \int_{\Omega} (v + \theta\psi)^2 dx - \int_{\Omega} v^2 dx \right] + \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\Omega} p (v + \theta\psi) dx - \int_{\Omega} p v dx \right] \\ &= N \int_{\Omega} v\psi dx + \int_{\Omega} p\psi dx \quad \forall \psi \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

En utilisant (2.6) avec  $\psi = v - u \quad \forall v \in U_{ad}$ , on obtiendra

$$\int_{\Omega} (Nv + p)(v - u) d\sigma \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

D'où le résultat.

### III. Contrôle frontière :

#### 1. Position du problème :

Cette partie concerne l'étude d'un problème de contrôle optimal frontière régi par une équation aux dérivées partielles elliptique et donné par

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \quad (P_2)$$

Avec  $J$  définie par

$$J(v) = \int_{\Gamma} (y(v) - z_d)^2 d\sigma + N \int_{\Gamma} v^2 d\sigma$$

Où

- ❖  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma = \partial\Omega$  sa frontière.
- ❖  $z_d$  est l'état désiré pris dans  $L^2(\Gamma)$
- ❖  $N$  est un réel strictement positif.

( $P_2$ ) est associé à un système gouverné par un problème de Neumann. Il s'agit donc de contrôler ou commander le système d'état associé suivant :

$$\begin{cases} -\Delta y(v) + y(v) = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y(v)}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad [4]$$

L'étude sera faite sous les hypothèses suivantes :

- ❖  $f \in L^2(\Omega)$ .
- ❖ Le contrôle  $v \in L^2(\Gamma)$
- ❖ L'état du système  $y(v)$  est pris dans  $H^1(\Omega)$  qui est un espace de Hilbert de dimension infinie.

## 2. L'existence et l'unicité des solutions :

On suit les mêmes étapes décrites dans la section (II-2) pour déterminer la forme

variationnelle associée à [4] et compte tenu de la condition aux limites  $\frac{\partial y(v)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = v$ , on

trouve pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial n} \varphi \, d\sigma + \int_{\Omega} y \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \\ \implies & \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} y \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\Gamma} v \varphi \, d\sigma \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(y, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} y \varphi \, dx \\ L(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\Gamma} v \varphi \, d\sigma \end{cases}$$

La proposition suivante donnera une propriété importante pour l'unique solution  $y(v)$  de [4].

### **Proposition (2.3.1) :**

Il existe une fonction  $y(v) \in H^1(\Omega)$  et une seule telle que

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad a(y, \varphi) = L(\varphi) \quad [5]$$

De plus l'application  $v \mapsto y(v)$  est affine continue de  $L^2(\Gamma)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

**Démonstration :**

1. Comme dans la démonstration de la proposition (2.2.1)  $a$  est une forme bilinéaire et  $L$  est une forme linéaire. Il suffit donc, de montrer que

a)  $a$  est une forme coercive sur  $H^1(\Omega)$ :

$$a(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dx + \int_{\Omega} (\varphi)^2 dx$$

$$a(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{avec } \alpha = 1$$

b)  $a$  est une forme continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ :

On a

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi \nabla \psi| dx + \int_{\Omega} |\varphi \psi| dx$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz entraîne que :

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow |a(\varphi, \psi)| \leq (\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}) \cdot (\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)})$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \sqrt{2(\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2)} \cdot \sqrt{2(\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}^2)}$$

Il en découle

$$|a(\varphi, \psi)| \leq 2\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de  $a$ .

c)  $L$  est une forme continue sur  $H^1(\Omega)$ :

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz à  $L$ , on obtient

$$|L(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma)} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}$$

Et puisque l'application trace  $\gamma_0: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  est continue

$$i.e., \quad \exists c_{\gamma_0} > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0 \varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_{\gamma_0} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Alors, on trouve

$$|L(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + c_{\gamma_0} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où

$$|L(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{avec } M = \|f\|_{L^2(\Omega)} + c_{\gamma_0} \|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

Donc  $L$  est bien continue sur  $H^1(\Omega)$

D'après le théorème de Lax Milgram, on déduit qu'il existe une unique solution  $y \in H^1(\Omega)$  vérifiant [5] et [4].

2. L'application  $v \mapsto y(v)$  est affine continue, en effet,

❖ La première équation dans [1] est équivalente à

$$(I_d - \Delta)y = f \Rightarrow y = (I_d - \Delta)^{-1} f$$

Et de même pour la seconde qui est une condition de Neumann, on peut avoir

$$\frac{\partial y}{\partial n} = v \Rightarrow y = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} v$$

On obtient, alors le système suivant :

$$\begin{cases} y = (I_d - \Delta)^{-1} f & \text{dans } \Omega \\ y = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} v & \text{sur } \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0v + (I_d - \Delta)^{-1} f & \text{dans } \Omega \\ y = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} v & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

De cette écriture on peut conclure que  $y$  est une application affine de la forme :

$$y(v) = Av + B$$

Avec  $A = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$  et  $B = (I_d - \Delta)^{-1} f$

❖ Cette application est continue, en effet :

Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de [1] tel que

$$\begin{cases} y_1(v_1) = Av_1 + B \\ y_2(v_2) = Av_2 + B \end{cases}$$

Alors  $\|y_2(v_2) - y_1(v_1)\|_{H^1(\Omega)} = \|A(v_2 - v_1)\|_{H^1(\Omega)}$

Donc, on montre que  $A$  est continu par rapport à  $v$ , et puisque  $A$  correspond au système d'état homogène de [1] (quand  $f \equiv 0$ )

$$\begin{cases} -\Delta y(v) + y(v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y(v)}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad [1']$$

Alors la formulation faible de [1'] est :

$$a(y, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} y \varphi \, dx = L(\varphi) = \int_{\Gamma} v \varphi \, d\sigma \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

$$\implies a(y, y) = \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Gamma} v y \, d\sigma$$

inégalité de Cauchy Schwartz

$$\implies \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{L^2(\Gamma)} \|y\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_{\gamma_0} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \|y\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\implies \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{\gamma_0} \|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

Cette inégalité est vraie pour tout  $y \in H^1(\Omega)$ , en particulier si  $v = v_2 - v_1$  et si  $y(v) = y_2(v_2) - y_1(v_1)$

D'où  $\|y_2(v_2) - y_1(v_1)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{\gamma_0} \|v\|_{L^2(\Gamma)}$

Donc l'application  $v \mapsto y(v)$  est affine continue.

**Théorème (2.3.2) :**

Il existe  $u \in L^2(\Gamma)$  une solution unique de

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(\Gamma)} J(v) \quad (\mathbf{P}_2)$$

**Démonstration :**

Afin de montrer l'existence et l'unicité du contrôle optimal  $u$  pour le problème  $(\mathbf{P}_2)$  on devra montrer les points suivants :

**a)  $J$  est continue :**

On a déjà montré que l'application  $v \mapsto y(v)$  est continue (d'après la propriété (2.3.1)) et comme la trace de  $y$  sur  $\Gamma$  est continue sur  $L^2(\Gamma)$ . Alors le premier terme de la fonction coût est continu.

D'autre part, on a la norme qui est une application continue ce qui entraîne que  $v \mapsto \int_{\Gamma} v^2 d\sigma$  est continu.

Par la suite  $J$  est continue car la somme de deux intégrales continues est toujours continue.

**b)  $J$  est strictement convexe :**

En suivant les mêmes étapes faites dans la partie qui concerne le contrôle distribué, on trouve après calcul de la dérivée de Gâteaux de  $J$  au point  $u$  dans la direction de  $u - v$ .

$$\begin{aligned} \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle &= 2 \left[ \int_{\Gamma} (y(u) - y(v))^2 d\sigma + N \int_{\Gamma} (u - v)^2 d\sigma \right] \\ &= 2 \|y(u) - y(v)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2N \|u - v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

Cette quantité est positive donc  $J'$  est monotone par suite  $J$  est convexe

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle = 0 \Leftrightarrow u = v$$

D'où la stricte convexité de  $J$ .

**c)  $J$  est infinie à l'infini :**

On a :

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|_{L^2(\Gamma)}^2 + N \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq N \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

Ce qui implique

$$J(v) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_{L^2(\Gamma)} \rightarrow +\infty$$

Enfin le problème  $(\mathbf{P}_2)$  admet une unique solution  $u$  dans  $L^2(\Gamma)$

### 3. Interprétation Lagrangienne:

On remarque que la fonctionnelle  $J$  dépend explicitement de  $v$  par l'intermédiaire du terme de régularisation et implicitement par le premier terme " $y(v)$ ".

On peut donc considérer  $v$  et  $y$  comme indépendants en assimilant les équations liant  $v$  et  $y$  à des contraintes d'un type particulier. Ainsi, on peut poser

$$J(v, y) = \int_{\Gamma} (y - z_d)^2 d\sigma + N \int_{\Gamma} v^2 d\sigma$$

de telle sorte que  $J$  opère sur  $L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega)$ . Le problème  $(P_2)$  s'écrit autrement, soit

$$(\tilde{P}_2) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } J(v, z) \\ v \in L^2(\Gamma), y \in H^1(\Omega) \\ \text{sous les contraintes d'égalités de [4]} \end{cases}$$

**Définition (2.3.3) :**

Soit  $p \in H^1(\Omega)$ , on définit l'équation faible adjointe par [6]

$$a^*(p, \psi) = \int_{\Gamma} (y(u) - z_d) \psi d\sigma \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad [6]$$

**Lemme (2.3.5) :**

[6] admet une et une seule solution  $p \in H^1(\Omega)$ .

**Démonstration :**

La forme bilinéaire  $a$  qui est continue et coercive est aussi symétrique tel que

$$a^*(p, \psi) = a(\psi, p) = \int_{\Omega} \nabla p \nabla \psi dx + \int_{\Omega} \psi p dx \quad ,$$

Maintenant, on montre que  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ , en effet  $y(u) - z_d$  est continue d'après l'application trace qui est toujours continue sur  $L^2(\Gamma)$ , par suite

$$\left| \int_{\Gamma} (y - z_d) \psi d\sigma \right| \leq \|\psi\|_{L^2(\Gamma)} \|y - z_d\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\gamma_0} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \|y - z_d\|_{L^2(\Gamma)}$$

Donc  $L$  est continue dans  $H^1(\Omega)$ ,

Alors d'après le théorème de Lax Milgram,  $\exists! p \in H^1(\Omega)$ , tel que l'on ait [6]

**Définition (2.3.6) :**

On dit que le triplet  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  sur

$$L^2(\Gamma) \times V = \left\{ y \in H^1(\Omega), \frac{\partial y}{\partial n} = v \text{ sur } \Gamma \right\} \times H^1(\Omega) \text{ Si}$$

$$\sup_{q \in H^1(\Omega)} \mathcal{L}(u, y, q) = \mathcal{L}(u, y, p) = \inf_{(v, z) \in L^2(\Gamma) \times V} \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall (v, z, q) \in L^2(\Gamma) \times V \times H^1(\Omega)$$

**Remarque (2.3.7):**

On peut définir le point-selle  $(u, y, p)$  dans  $L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , tout en faisant apparaître la contrainte définie sur  $\Gamma$ ,  $\frac{\partial y}{\partial n} = v$  dans le Lagrangien comme étant

$$\mathcal{L}(v, y, p) = J(v, y) - \int_{\Omega} p(-\Delta y) dx - \int_{\Omega} p(y - f) dx$$

$$\xrightarrow{\text{la formule de Green}} \mathcal{L}(v, y, p) = J(v, y) - \int_{\Omega} \nabla p \nabla y dx + \int_{\Gamma} vp d\sigma - \int_{\Omega} p(y - f) dx$$

Encore une fois, on fait usage de la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, z, p) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (z - z_d)^2 d\sigma + \frac{N}{2} \int_{\Gamma} v^2 d\sigma - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} z d\sigma + \int_{\Gamma} vp d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} z(-\Delta p) dx - \int_{\Omega} pz dx - \int_{\Omega} p(-f) dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Théorème (2.3.8) :**

Si  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  dans  $L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , alors  $u$  est solution de  $(P_2)$ .

**Démonstration :**

On suit les mêmes démarches que la preuve du théorème (2.2.8), en effet

Pour  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$ , on a donc

$$\mathcal{L}(u, y, q) \leq \mathcal{L}(u, y, p) \leq \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall (v, z, q) \in L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$$

On tire de la première inégalité

$$-\Delta y + y - f = 0 \quad (2.8)$$

En utilisant l'équation (2.8), dans la seconde inégalité, on obtient

$$J(u, y) \leq J(v, z) \quad \forall (v, z) \in L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega).$$

Ce qui entraîne que

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(\Gamma)} J(v)$$

**Théorème (2.3.9) :**

Si  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$ , alors  $(u, y, p)$  vérifie le système d'optimalité [7]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'état direct} \\ \text{L'état adjoint} \\ \text{Condition d'optimalité} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} -\Delta y + y = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial n} = u & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \begin{cases} -\Delta p + p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = y(u) - z_d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \\ \int_{\Gamma} (p + Nu)(v - u) d\sigma = 0 \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \end{array} \right. \quad [7]$$

**Démonstration :**

Tout d'abord on montre que ce point-selle entraîne le système d'état

Déjà, de la démonstration précédente, on a (2.8)

$$-\Delta y + y - f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Cette contrainte d'égalité intervient dans le lagrangien mais sans oublier la seconde  $\frac{\partial y}{\partial n} = u$  définie sur la frontière qu'elle-même est utilisée comme contrainte pour effectuer la minimisation désiré sur le Lagrangien afin d'obtenir le meilleur contrôle agissant sur le système. Donc on aboutit au 1<sup>er</sup> système d'état :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y + y = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial n} = u & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

En deuxième position pour avoir l'état adjoint, on fait usage de l'équation d'Euler, car  $(u, y, p)$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$ , et donc le minimum en  $(v, z) \mapsto \mathcal{L}(v, z, p)$  est atteint en  $(u, y, p)$  alors on peut avoir

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(u, y, p), \varphi \right\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad (2.9)$$

On fait usage de (2.7) pour le calcul de la dérivée de Gâteaux de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $z$ , on a

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [\mathcal{L}(v, z + \theta \varphi, p) - \mathcal{L}(v, z, p)]$$

Les termes du Lagrangien qui ne contiennent pas l'argument  $z$  ont des dérivées nulles, alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (z + \theta \varphi - z_d)^2 d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (z - z_d)^2 d\sigma \right] \\ &\quad - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\Omega} (z + \theta \varphi)(-\Delta p) dx - \int_{\Omega} z(-\Delta p) dx \right] \\ &\quad - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} (z + \theta \varphi) d\sigma - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} z d\sigma \right] - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\Omega} p(z + \theta \varphi) dx - \int_{\Omega} p z dx \right] \\ \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} 2\theta \varphi (z - z_d) + \theta^2 \varphi^2 d\sigma \right] - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \theta \varphi (-\Delta p) dx \\ &\quad - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \int_{\Gamma} \theta \varphi \frac{\partial p}{\partial n} d\sigma - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \theta \varphi p dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, p), \varphi \right\rangle &= \int_{\Gamma} \varphi(z - z_d) d\sigma - \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p) dx - \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \varphi p dx \\ &= \int_{\Gamma} \varphi \left( z - z_d - \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p + p) dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

(2.9) donne

$$\int_{\Gamma} \varphi \left( y - z_d - \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p + p) dx = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad (2.10)$$

Puisque  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  donc on peut se restreindre à  $\mathcal{D}(\Omega)$ . En effet

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \varphi \Big|_{\Gamma} = 0$$

Alors l'équation (2.10) implique

$$\int_{\Omega} \varphi(-\Delta p + p) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Il en résulte que  $-\Delta p + p = 0$  dans  $\Omega$ , au sens des distributions

Dans ce cas il découle de (2.10) pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Gamma} \varphi \left( y - z_d - \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

Cela veut dire que

$$y - z_d - \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial n} = y - z_d \quad \text{sur } \Gamma$$

A la fin, on obtient le système suivant au sens des distributions :

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = y(u) - z_d & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour terminer, il reste à montrer la dernière équation décrite dans le système d'optimalité. On considère, également l'équation d'Euler mais cette fois ci par rapport à  $v$  telle que

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, y, p), v - u \right\rangle = 0 \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \quad (2.11)$$

On a

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, z, p), \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [\mathcal{L}(v + \theta\psi, z, p) - \mathcal{L}(v, z, p)] \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{N}{2\theta} \left[ \int_{\Gamma} (v + \theta\psi)^2 d\sigma - \int_{\Gamma} v^2 d\sigma \right] + \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \\
 &\quad \left[ \int_{\Gamma} (v + \theta\psi)p d\sigma - \int_{\Gamma} vp d\sigma \right] \\
 &= N \int_{\Gamma} (v + p)\psi d\sigma \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, z, p), \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle Nv + p, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma)$$

pour tout  $v \in L^2(\Gamma)$ , On pose dans (2.11)  $\psi = v - u$

Ce qui entraîne que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, y, p) = Nu + p = 0 \quad \Rightarrow u = \frac{-P}{N}$$

# *Chapitre III*

## *Résultats Numériques*



## Résultats Numériques

### I. Cadre général de la résolution :

Dans ce chapitre, on abordera le cœur du sujet : *L'algorithme d'Uzawa pour la résolution numérique du problème de contrôle optimal à partir d'un lagrangien*. En vertu de la théorie étudiée précédemment, le problème de minimisation, dans des espaces fonctionnels appropriés, de la fonctionnelle  $J$  est compliqué à traiter. L'idée donc, est de considérer la minimisation de  $J$  sous contraintes d'égalités données dans le système d'état [1] s'il s'agissait du contrôle distribué, ou bien de celui de [4] qui interprète le cas du contrôle frontière. En fait cette minimisation est ramenée à la recherche d'un point selle  $(u, y, p) \in U_{ad} \times V \times V$  ( $V$  étant un espace de Hilbert et  $U_{ad}$  un convexe fermé d'un Hilbert noté  $Q$ ) associé au Lagrangien  $\mathcal{L}$  tel que l'on a

$$\sup_{q \in V} \mathcal{L}(u, y, q) = \mathcal{L}(u, y, p) = \inf_{(v, z) \in U_{ad} \times V} \mathcal{L}(v, z, p)$$

Celui-ci est formé de la fonctionnelle  $J$  dont les arguments sont la variable d'état  $y$  et le contrôle  $v$  qui sont indépendants, et des contraintes d'égalités. Un tel point selle sera calculé par l'intermédiaire de l'algorithme d'Uzawa, pour se faire il faut que :

- Le paramètre  $\rho$  soit bien choisi de façon à assurer la convergence de la solution approcher vers la solution exacte.
- $p$  soit dans  $\mathbb{R}_+^m$  pour résoudre le problème dual.

Il va en dire que dans la pratique, on doit d'abord chercher une version discrétisée de ce problème, pour se ramener ainsi à un problème de dimension finie. Pour réaliser ces buts, on introduit la méthode des éléments finis qui consiste à construire un sous espace de fonctions globalement continues et affines sur chaque maille, et qui représente une approximation de l'espace fonctionnel.

#### 1. Approximation par éléments finis

Soit  $\tau_h$  une triangulation du domaine  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$  composée uniquement des triangles  $K$ , vérifiant les propriétés suivantes :  $\forall K, K' \in \tau_h$  on a :

- $K \cap K' = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou un coté entier commun} \\ \text{ou 1 sommet commun} \end{cases}$
- $\partial K$  est soit une face pour un autre triangle  $K'$  soit une partie de la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Cela veut dire que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$$

Avec  $h$  un pas de discrétisation uniforme.

Maintenant, on construit  $V_h$  et  $Q_h$  deux espaces de dimensions finies respectivement, comme une approximation aux deux espaces fonctionnels  $V$  et  $Q$

$$V_h = \{z_h \in V \text{ tel que } z_h|_K \in P_1\}$$

$$Q_h = \{v_h \in Q \text{ tel que } v_h|_K \in P_1\}$$

où  $P_1$  désigne l'espace des polynômes de degré  $\leq 1$

Ces deux sous espaces sont formés de fonctions affines par morceaux. De plus,  $U_{ad,h}$  est un sous ensemble de  $Q_h$  de la forme :

$$U_{ad,h} = \{v_h \in Q_h \text{ tq } 0 \leq v_h \leq \beta\}$$

**Remarque (3.1.1):**

Les fonction données  $f, z_d, y_d$  et  $\beta$  seront évaluées sur les sommets des triangles  $K$

$V_h$ , étant un  $\mathbb{R}$  sous espace vectoriel de  $V$ , donc :

$$\forall q_h \in V_h = \langle \psi_0, \dots, \psi_I \rangle \quad \exists \{q_i\}_{i=0}^{i=I} \subset \mathbb{R} \text{ tel que } q_h = \sum_{i=0}^I q_i \psi_i$$

Où  $\{\psi_i\}_{i=0}^{i=I}$  sont des fonctions de base de  $V_h$  vérifiant:

$$\psi_i(a_j) = \delta_{i,j} \quad 0 \leq i, j \leq I$$

Avec:  $a_j$  est dans l'ensemble des noeuds de  $\bar{\Omega}$   $\forall j = 0, \dots, I$

Ce qui entraine que:

$$q_h(a_j) = \sum_{i=0}^I q_i \psi_i(a_j) = q_j$$

$$\Rightarrow q_j = q_h(a_j) \text{ et } q_h \equiv (q_0, q_1, \dots, q_I) \in \mathbb{R}^{I+1}$$

Alors, pour cette raison on identifie:  $V_h \equiv \mathbb{R}^{I+1}$

Cette remarque est valable pour  $z_h$  puisque elle est définie dans  $V$  qui contient  $V_h$

$$\forall z_h \in V_h, \exists \{z_i\}_{i=0}^I \subset \mathbb{R} \quad z_h(a_j) = \sum_{i=0}^I z_i \psi_i(a_j) = z_j \text{ et } z_h = \sum_{i=0}^I z_i \psi_i$$

**Remarque (3.1.2):**

Comme  $z_h, q_h$  sont bien des fonctions appartenant à  $P_1$  sur chaque  $K$  de la triangulation  $\tau_h$  alors  $\Delta z_h = 0 = \Delta q_h$

Compte tenu des notations précédentes, on a

- ❖ le problème (P) peut s'écrire sous la forme:

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in U_{ad,h}} J(v_h) \quad (P_h)$$

- ❖ la formulation variationnelle associée à [1] ou bien à [4] est équivalente à

$$a(y_h, \varphi_h) = L(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

Qui peut s'écrire sous la forme d'un système

$$\sum_{j=0}^I y_j a(\psi_j, \psi_i) = L(\psi_i) \quad \forall i \in \{0, \dots, I\} \quad (3.1)$$

On pose *la matrice carrée*  $A = \{a(\psi_j, \psi_i)\}_{0 \leq i, j \leq I}$

*le vecteur inconnu*  $y = (y_0, y_1, \dots, y_I)^t$  (3.2)

*le vecteur*  $b = (L(\psi_0), L(\psi_1), \dots, L(\psi_I))$

Donc (3.1) est équivalente à résoudre

$$Ay = b \implies y = A^{-1}b$$

## 2. Choix du paramètre de convergence $\rho$

C'est l'étape la plus importante dans l'application de cet algorithme, elle consiste à faire un choix convenable de  $\rho$  de façon que  $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$

où  $A$  est la matrice déterminée précédemment telle que

$$\|A\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} \left( \sum_{j=0}^I |a_{i,j}| \right) \quad (3.3)$$

On choisit un paramètre  $\rho$  qui assurera la convergence de la solution optimale estimée vers la solution exacte. Soit donc,  $\varepsilon > 0$ ,  $p_h^0$  un réel positif. Comme il a été expliqué dans le premier chapitre V-1, à chaque itération  $k$ , on cherche à minimiser le lagrangien  $\mathcal{L}$  par une méthode numérique connue : la méthode du gradient avec projection à pas fixe dans le cas des contraintes ou seulement avec un gradient à pas fixe s'il s'agit d'une minimisation sans contraintes. Dans ce contexte on peut se référer à G. ALLAIRE [2], P.GCIARLET [13].

Dans les deux cas, pour un  $\varepsilon_1$  assez petit et un paramètre  $\mu$  positif, fixés, on se donne un vecteur initial  $u_h^{k,0}$ . A chaque itération  $r$ , la détermination de  $u_h^{k,r}$  est élémentaire puisqu'on a simplement

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h^{k,r+1} = P_{U_{ad}} \left( u_h^{k,r} - \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} (u_h^{k,r}, y_h^k, p_h^k) \right) \quad (\text{methode du gradient projeté}) \\ \text{ou bien} \\ u_h^{k,r+1} = u_h^{k,r} - \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} (u_h^{k,r}, y_h^k, p_h^k) \quad (\text{methode du gradient à pas fixe}) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

**Remarque (3.1.3)**

Le choix de  $\mu$  est très important puisque la convergence de cet algorithme dépendra de ce choix.

D'après G. ALLAIRE [2], P.GCIARLET [13], il faut que  $0 < \mu < \frac{2\alpha}{c^2}$  de façon que

- ❖  $\mathcal{L}'_v$  soit lipschitzienne sur  $Q$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que
 
$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} (v, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} (w, y, p) \right\| \leq C \|v - w\| \quad \forall v, w \in Q \quad (3.5)$$
- ❖  $\mathcal{L}$  est  $\alpha$ -convexe.

On arrête ce processus lorsque

$$\|u_h^{k,r+1} - u_h^{k,r}\| \leq \varepsilon_1$$

Donc on peut déterminer  $u_h^k$  comme étant  $u_h^k = u_h^{k,r+1}$

**Remarque (3.1.4)**

C'est les mêmes démarches suivies pour la minimisation du lagrangien par rapport au second argument  $y_h^k$  et à la fin on trouve  $y_h^k = y_h^{k,r+1}$

A ce niveau, on résout le problème dual

$$(p_h^{k+1})_i = \max \left( 0, p_h^k + \rho(-\Delta y_h^k - f - u_h^k) \right)_i \quad i = 0, \dots, I \quad (3.6)$$

On s'arrête lorsqu'on obtient

$$\begin{aligned} \|u_h^{k+1} - u_h^k\| &\leq \varepsilon \\ \|y_h^{k+1} - y_h^k\| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

### 3. Convergence de la solution discrétisée :

Dans cette partie, on montrera la convergence de la solution approchée vers la solution exacte

**Théorème : (3.1.5)**

On suppose qu'il existe  $W$  sous espace de  $Q$  dense dans  $Q$  et une application  $r_h: W \rightarrow Q_h$  tel que

$$\forall v \in W, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_Q = 0$$

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_Q = 0$$

**Démonstration**

Soit  $\varepsilon > 0$  puisque  $W$  dense dans  $Q$ , alors il existe  $v \in W$  tel que  $\|u - v\|_Q \leq \frac{\varepsilon}{2c}$

Par définition on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_Q = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, h < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|v - r_h(v)\|_Q \leq \frac{\varepsilon}{2c})$$

A ce niveau, on doit se rappeler du théorème de convergence (d'après THOMAS RAVIART [10]) suivant :

**Théorème :**

Il existe une constante strictement positive et indépendante de  $Q_h \subset Q$  tel que

$$\|u - u_h\|_Q \leq c \inf_{v_h \in Q_h} \|u - v_h\|_Q$$

Donc on a

$$\|u - u_h\|_Q \leq c \inf_{v_h \in Q_h} \|u - v_h\|_Q \quad \forall v_h \in Q_h$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_Q &\leq c \|u - r_h(v)\|_Q \\ \Rightarrow \|u - u_h\|_Q &\leq c \|u - v\|_Q + c \|v - r_h(v)\|_Q \\ &\leq c \frac{\varepsilon}{2c} + c \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon \end{aligned}$$

Par passage à la limite, Il en résulte que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_Q = 0$$

**Remarque (3.1.6)**

Ce théorème est valable pour montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|y - y_h\|_V = 0$$

**II. Contrôle distribué (1D)**

Pour un exemple de test on se restreint à la dimension une, on considère donc un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ ;  $\Omega = ]0,1[$ .

Soit le problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} -y'' = f + v & \text{dans } \Omega = ]0,1[ \\ y(0) = y(1) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad [1]$$

On a montré dans le chapitre précédent, l'existence et l'unicité de la solution  $y(u)$  agissant sur le système d'état [1] et de même, pour le contrôle optimal  $u$  qui est une unique solution pour (P).

En gros, on doit chercher un point-selle  $(u, y, p) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  associé au lagrangien  $\mathcal{L}$  défini par

$$\mathcal{L}(v, z, q) = J(v, z) - \int_{\Omega} q(-y'' - f - v) dx \quad \forall (v, z, q) \in U_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

Avec

$$J(v, z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z - y_d)^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\Omega} v^2 dx$$

Où

$$z \in H_0^1(\Omega) \text{ et } v, y_d \in L^2(\Omega) \quad N > 0$$

Puisque les espaces considérés sont des espaces de Hilbert de dimension infinie, alors on se ramène à la dimension finie par une approximation  $(u_h, y_h, p_h)$  de  $(u, y, p)$  dans  $U_{ad,h} \times V_{0,h} \times V_{0,h}$  où  $V_{0,h}$  est un sous espace de  $H_0^1(\Omega)$  constitué de fonctions continues affines par intervalles. En effet ;

On subdivise l'intervalle  $\bar{\Omega}$  en  $n + 1$  intervalles  $K_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  de même longueur  $h = \frac{1}{n+1}$  où  $h$  est appelé le pas de discrétisation uniforme auquel on associe les points :

$$a_i = ih \quad 0 \leq i \leq n + 1$$

On a les notations suivantes :

- ❖  $K_i = [a_{i-1}, a_i]$  pour  $1 \leq i \leq n + 1$
- ❖  $\Omega = \bigcup_{i=0}^n K_i$
- ❖  $V_{0,h} = \{z_h \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } z_h|_{K_i} \in P_1 \quad 1 \leq i \leq n\}$
- ❖  $Q_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \text{ tel que } v_h|_{K_i} \in P_1 \quad 1 \leq i \leq n\}$
- ❖  $U_{ad,h} = \{v_h \in Q_h \quad 0 \leq v_h \leq \beta\}$  est un ensemble convexe fermé de  $Q_h \subset L^2(\Omega)$

Les fonctions définies sur chaque sous espace s'écrivent comme une combinaison linéaire des fonctions de base et leurs valeurs aux points  $a_i$ ,  $0 \leq i \leq n + 1$ .

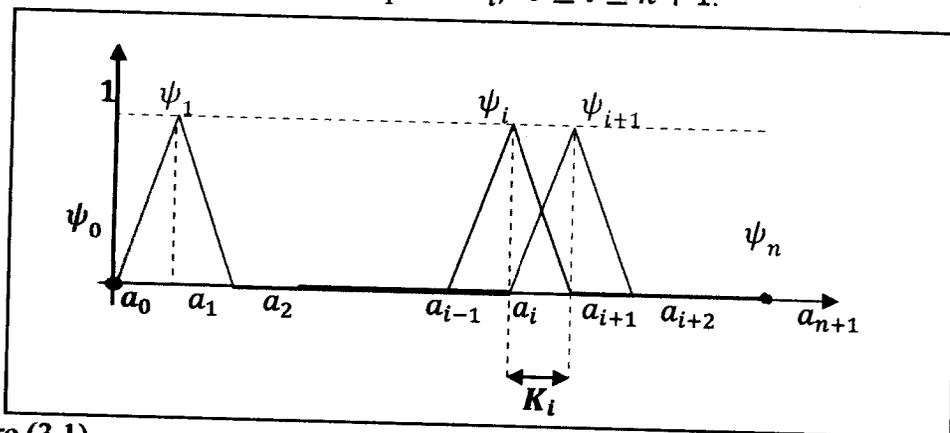


Figure (3.1)

Il est clair que la dimension de  $V_{0,h}$  est  $n$ , on doit donc déterminer sa base telle que

$$\begin{cases} V_{0,h} = \langle \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \rangle \\ \psi_i(a_j) = \delta_{ij} & \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ y_h \in V_{0,h} \Rightarrow \exists \{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R} & y_h = \sum_{i=1}^n y_i \psi_i \end{cases}$$

Une telle fonction de base est donnée analytiquement par :

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - a_i|}{h} & x \in [a_{i-1}, a_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque (3.2.1)**

$Q_h$  est un sous espace de  $L^2(\Omega)$  qui est de dimension finie égale à  $n + 2$  car les fonctions de base sont définies sur la frontière, mais comme le contrôle est défini uniquement à l'intérieur de  $\Omega$  alors on se restreint aux  $n$  fonctions de forme citées ci-dessus.

De plus on a  $u_h \in Q_h \Rightarrow \exists \{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R} \quad u_h = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$

Donc on est devant le nouveau problème

$$\sup_{q_h \in V_{0,h}} \mathcal{L}(u_h, y_h, q_h) = \mathcal{L}(u_h, y_h, p_h) = \inf_{(v_h, z_h) \in U_{ad,h} \times V_{0,h}} \mathcal{L}(v_h, z_h, p_h) \quad (3.7)$$

On recherchera le point-selle indiqué dans (3.7) par l'intermédiaire de l'algorithme d'Uzawa donc il faut tout d'abord, vérifier les conditions assurant la convergence de la solution estimée.

On commence par la vérification de l' $\alpha$  - convexité de  $J$  par rapport à  $u_h$  et  $y_h$  car le Lagrangien est formé de la fonction coût  $J$  dépendante de  $u$  et de  $y$  qui eux-mêmes sont indépendants, donc l' $\alpha$  - convexité de  $J$  sera vérifiée par rapport aux deux paramètres de minimisation approchés par  $u_h$  et  $y_h$

Après tout calcul, on trouve

$$\langle J'(u_h, y_h) - J'(v_h, y_h), u_h - v_h \rangle \geq \frac{N}{2} \|u_h - v_h\|^2$$

$$\langle J'(u_h, y_h) - J'(u_h, z_h), y_h - z_h \rangle \geq \frac{1}{2} \|y_h - z_h\|^2$$

Cela veut dire que  $J$  est  $\alpha$  - convexe avec  $\alpha = \max\left(\frac{N}{2}, \frac{1}{2}\right)$  pour  $N \in \mathbb{R}_+^*$

**Remarque : (3.2.2)**

Dans le chapitre I, les contraintes qualifiées  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  étaient affines, on les a, par conséquent, représenté sous la forme matricielle  $\varphi = Cv - d$ , dans ce cas, elle est donnée par

la première équation du système d'état [1]  $-y_h'' - f - v_h = 0$  qui elle aussi est affine donc convexe. Et de plus ce système est équivalent à sa formulation variationnelle

$$a(y_h, \varphi_h) = L(\varphi_h)$$

Cette formulation va nous aider à calculer le pas de descente, qui est le but de la partie suivante.

### 1. choix de $\rho$ :

Pour déterminer la valeur du pas de descente  $\rho$  on doit calculer la matrice  $A$ . En fait, on sait que le support de chaque  $\psi_i$  est  $K_{i+1} \cup K_i$   $1 \leq i \leq n$  ce qui permet de calculer le premier terme uniquement sur  $K_i$ . Ainsi, le troisième sera évalué uniquement sur  $K_{i+1}$ . Par contre le second sur tout le support. En utilisant (3.1) et (3.2), on peut avoir :

$$\sum_{j=1}^n y_j a(\psi_j, \psi_i) = y_{i-1} a(\psi_{i-1}, \psi_i) + y_i a(\psi_i, \psi_i) + y_{i+1} a(\psi_{i+1}, \psi_i)$$

$$a_{i,j} = a(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} a(\psi_i, \psi_{i-1}) & \text{si } j = i - 1 \\ a(\psi_i, \psi_i) & \text{si } j = i \\ a(\psi_i, \psi_{i+1}) & \text{si } j = i + 1 \end{cases}$$

Le premier terme et le dernier sont égaux puisque  $a$  est symétrique tel que

$$a(\psi_i, \psi_{i-1}) = a(\psi_{i-1}, \psi_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \psi_i' \psi_{i-1}' dx = \frac{-1}{h}$$

Egalement, après calcul du second terme, on a

$$a(\psi_i, \psi_{i-1}) = \int_{a_{i-1}}^{a_{i+1}} \psi_i'^2 dx = \frac{2}{h}$$

Donc on peut remarquer que la matrice associée a l'air d'être une matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et donc (3.2) entraîne que  $\|A\| = \frac{4}{h}$

Par suite

$$0 < \rho < \frac{ah^2}{8}$$

$$b = L(\psi_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

On applique le même principe pour calculer  $L(\psi_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . En fait, on a

$$\begin{aligned}
 L(\psi_i) &= \int_{\Omega} f \psi_i dx + \sum_{j=1}^n v_j \int_{\Omega} \psi_j \psi_i dx \\
 &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} f \left(1 + \frac{x - a_i}{h}\right) dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f \left(1 - \frac{x - a_i}{h}\right) dx \\
 &\quad + v_{i-1} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(1 + \frac{x - a_i}{h}\right) \left(1 - \frac{x - a_{i-1}}{h}\right) dx \\
 &\quad + v_i \left( \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(1 + \frac{x - a_i}{h}\right)^2 dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(1 - \frac{x - a_i}{h}\right)^2 dx \right) \\
 &\quad + v_{i+1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(1 + \frac{x - a_{i+1}}{h}\right) \left(1 - \frac{x - a_i}{h}\right) dx \\
 &= 2h + \frac{1}{h} \left( \int_{a_{i-1}}^{a_i} f x dx - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f x dx \right) - v_{i-1} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{x - a_i}{h}\right) \left(\frac{x - a_{i-1}}{h}\right) dx \\
 &\quad + v_i \left( \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{x - a_i}{h}\right)^2 dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{x - a_i}{h}\right)^2 dx \right) \\
 &\quad - v_{i+1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{x - a_{i+1}}{h}\right) \left(\frac{x - a_i}{h}\right) dx
 \end{aligned}$$

**Remarque (3.2.3) :**

Ces calculs peuvent être effectués par une méthode d'intégration numérique.

**Notation :**

Pour des raisons de simplification de la notation, on prend  $v_h, u_h, y_h, z_h, q_h$  et  $p_h$  respectivement comme étant  $v, u, y, z, q$  et  $p$

## 2. Construction de l'algorithme :

On a bien le problème primal (Pr)

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } J(v, y) \\ v \in U_{ad,h} \quad , \quad y \in V_{0,h} \\ \text{sous les contraintes d'égalités de [1]} \end{cases}$$

qui est équivalent à son dual (D) :

$$(D) \begin{cases} \text{Maximiser } \mathcal{L}(u, y, q) \\ q \in V_{0,h} \end{cases}$$

Pour résoudre la première étape de l'algorithme, on propose la méthode de gradient à pas fixe, pour la minimisation sans contrainte du Lagrangien par rapport à  $y$  on doit donc vérifier l' $\alpha$ -convexité de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $y$

En utilisant la dérivée partielle de  $\mathcal{L}$  déjà calculée dans le chapitre II,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(u, y, p), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} (y - y_d + \Delta p) \varphi \, dx$$

On obtient pour  $\varphi = y - z$  :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(u, z, p), y - z \right\rangle = \int_{\Omega} (y - z)^2 \, dx \geq \|y - z\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \alpha = 1$$

Le caractère de lipschitz de  $\mathcal{L}'_y$  présentée dans (3.5) donne

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(u, z, p) \right\| = \|y - z\| \leq \|y - z\| \quad C = 1$$

De tous ces calculs on conclut que  $0 < \mu_1 < \frac{2\alpha}{c^2} = 2$ .

Maintenant, on passe au second cas, la minimisation avec contraintes du lagrangien par rapport au contrôle  $v$ . Comme il a été mentionné dans le paragraphe I. on résout ce problème par le gradient à pas fixe avec projection. On vérifie aussi l' $\alpha$ -convexité de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $v$ . Du calcul fait dans le chapitre II on a

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, y, p), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} (Nu + p) \varphi \, dx \quad (3.8)$$

On obtient pour  $\varphi = v - u$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, y, p), v - u \right\rangle &= \int_{\Omega} N(u - v)^2 \, dx \\ &= N \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq N \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \alpha = N \end{aligned}$$

Il faut également que  $\mathcal{L}'_u$  soit lipchitzienne par rapport à  $u$  :

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(v, y, p) \right\| = N \|u - v\| \leq N \|u - v\| \quad C = N$$

Alors dans ce cas  $0 < \mu_2 < \frac{2\alpha}{c^2} = 2/N$ .

A ce niveau, on peut définir l'opérateur de projection  $P$  de  $V_{0,h}$  sur  $U_{ad,h}$  (ou bien sur le segment  $[0, \beta(x)]$ ) tel que l'on a

$$P_{[0, \beta(x)]} u = \min(\beta(x), \max(0, u(x))). \quad (3.9)$$

En résumé, soit  $\varepsilon > 0$  assez petit, on se donne un vecteur initial nul  $p^0$  parce que zéro est la plus petite valeur positive que peut prendre un réel positif. D'autant plus que l'on peut se

donner un vecteur initial  $y^0$  pour la seconde minimisation en résolvant le système (3.1) tel que  $y^0 = A^{-1} \cdot b$

Dans ces conditions et en utilisant les deux formules de (3.4) et celle de (3.9), on peut déterminer l'algorithme recherchant le point-selle  $(u, y, p)$ :

1. **Initialisation :**

$$k = 0, p^0 = 0, u^0 = 0 \quad \varepsilon \text{ assez petit}, \quad \rho > 0 \text{ fixé et } N \text{ donnée}$$

2. **Itération  $k$  :**

$p^k$  Connue

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation} \\ r = 0, u^{k,0} = 0, \mu_2: \text{fixé et } \beta \text{ donnée} \\ \\ \text{Itération } r \\ u_i^{k,r+1} = \min(\beta_i, \max(u_i^{k,r} - \mu_2(Nu_i^{k,r} + p_i^k), 0)) \quad 0 \leq i \leq n \\ \\ \text{Jusqu'à ce que :} \\ \|u^{k,r+1} - u^{k,r}\| \leq \varepsilon \\ \text{sinon on répète le processus} \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation} \\ r = 0, A, y_d, \mu_1 \text{ donnés} \\ \text{calcule } b \\ y^0 = A^{-1}b \\ \\ \text{Itération } r \\ y^{k,r+1} = y^{k,r} - \mu_1(y^{k,r} - y_d) \\ \\ \text{Jusqu'à ce que :} \\ \|y^{k,r+1} - y^{k,r}\| \leq \varepsilon \\ \text{sinon on re pete le processus} \end{array} \right.$$

$$c) (p^{k+1})_i = \max(0, p^k + \rho(-\Delta y^k - f - u^k))_i \quad i = 0, \dots, n$$

3. **Teste d'arrêt**

$$\|u^{k+1} - u^k\| \leq \varepsilon$$

et  $\|y^{k+1} - y^k\| \leq \varepsilon$

Sinon on pose  $k = k + 1$  et on passe à 2

### III. Contrôle Frontière en 2D:

Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  le carré d'unité de  $\mathbb{R}^2$

Etant donné une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  de la forme  $f(x, y) = xy$ . Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal des équations aux dérivées partielles de type frontière, cela veut dire que le contrôle n'est pas défini à l'intérieur de  $\Omega$  mais seulement sur la frontière  $\Gamma$  qui représente une courbe.

Le système d'état attribué à ce type de contrôle est:

$$\begin{cases} -\Delta y + y = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad [4]$$

Compte tenu de tout ce qui a été vu auparavant, il est clair d'obtenir les résultats suivants :

❖ Le système d'état [4] est équivalent à sa formulation variationnelle associée telle que

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$ , il existe un unique  $y(u) \in H^1(\Omega)$  solution de :

$$a(y, \varphi(u)) = L(\varphi) \quad [5]$$

Cela veut dire que

$$\int_{\Omega} \nabla y \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} y \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \varphi u \, d\sigma$$

❖ Le problème de minimisation suivant

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \quad (P)$$

admet une unique solution d'après le théorème de Lax Milgram.

❖ Résoudre (P) est équivalent à trouver un point-selle  $(u, y, p)$  associé au Lagrangien  $\mathcal{L}$  dans  $L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  défini par :

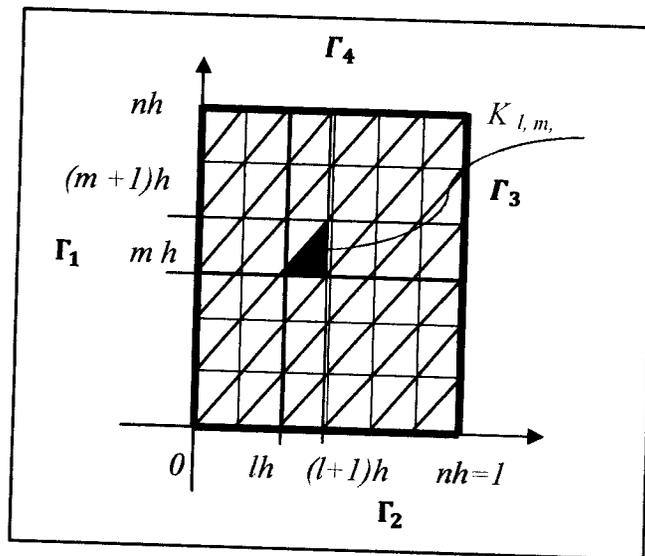
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, z, q) &= J(v, z) - \int_{\Omega} q (-\Delta z + z - f) \, dx \\ \text{où } J(v, z) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (z - z_d)^2 \, d\sigma + \frac{N}{2} \int_{\Gamma} v^2 \, d\sigma \end{aligned}$$

En utilisant une approximation par élément finis, on réduit le problème (3.7) à un problème en dimension finie. De façon plus précise, on se donne un entier naturel  $n$  et on choisit un pas de discrétisation uniforme en abscisse et en ordonnées comme étant  $h = \frac{1}{n+1}$  ; à ce pas  $h$  on associe les points

$$a_{l,m} = (lh, mh) \quad 0 \leq l, m < n + 1$$

qui subdivisent le domaine  $\bar{\Omega}$  en  $2n^2$  triangles de la forme:

$$K_{l,m,i} = \{(a_{l,m}; a_{l+1,m}; a_{l+1,m+1}) \quad 0 \leq l, m \leq n \quad \text{et} \quad 0 \leq i \leq 2(n+1)^2$$



Comme précédemment, on construit les fonctions de base  $\{\psi_{l,m}\}_{l,m=0}^n$  de  $V_h$  vérifiant la propriété

$$\psi_{l,m}(a_{l,m}) = \delta_{l,m} \quad \text{pour } l, m = 0, \dots, n$$

La dimension du sous espace  $V_h$  est  $l = (n+1)^2$

### 1. Choix du $\rho$ :

En calculant  $\rho^* = \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$ , on peut déterminer le pas de convergence qui doit être inférieur strictement à  $\rho^*$

- D'après la démonstration du théorème (3.2.2) (b) qui a été établi dans le chapitre précédent, on a obtenu le résultat suivant

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle = 2\|y(u) - y(v)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2N\|u - v\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

Ce qui entraîne que

$$\langle J'(u_h) - J'(v_h), u_h - v_h \rangle \geq 2N\|u_h - v_h\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

D'où l' $\alpha$ -convexité de  $J$  (l'ellipticité) avec  $\alpha = 2N$

- D'autre part, on doit calculer  $\|A\|_\infty$

De (3.1), on sait bien que

$$a(\psi_j, \psi_i) = \sum_{0 \leq l, m \leq n+1} \left( \int_{K_{l,m}} \nabla \psi_j \nabla \psi_i \, dx + \int_{K_{l,m}} \psi_j \psi_i \, dx \right)$$

Cette matrice sera obtenue pour une évaluation de chaque terme  $a(\psi_j, \psi_i)$  qui représente un élément de la matrice  $A$  pour cela on utilise des formules de l'intégration numérique. D'après M.FORIN et R.GLOWINSKI [9], on utilise des formules de quadrature pour des résultats exactes.

## 2. Construction de L'algorithme

On a bien le problème primal ( $Pr'$ )

$$(Pr') \begin{cases} \text{Minimiser } J(v, y) \\ v \in Q_h, \quad y \in V_h \\ \text{sous les contraintes d'égalités de [4]} \end{cases}$$

qui est équivalent à son dual ( $D'$ )

$$(D') \begin{cases} \text{Maximiser } \mathcal{L}(u, y, q) \\ q \in V_h \end{cases}$$

Pour la résolution du primal ( $Pr'$ ) on propose la méthode du gradient à pas fixe, pour la minimisation sans contrainte du Lagrangien par rapport à  $y$  et à  $v$ . On doit donc vérifier l' $\alpha$ -convexité de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $y$

En utilisant la dérivée partielle de  $\mathcal{L}$  calculée déjà dans le chapitre II,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(u, y, p), \varphi \right\rangle = \int_{\Gamma} \varphi \left( z - z_d - \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\Omega} \varphi (-\Delta p + p) dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

On obtient pour  $\varphi = y - z$  :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(u, z, p), y - z \right\rangle = \int_{\Gamma} (y - z)^2 dx \geq \|y - z\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad \alpha = 1$$

De la même manière que (3.5), on présente le caractère de lipschitz de  $\mathcal{L}'_y$  par rapport à  $y$ . ce qui donne

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(u, z, p) \right\| = \|y - z\| \leq \|y - z\| \quad C = 1$$

De tous ces calculs on conclut que  $0 < \mu_1 < \frac{2\alpha}{c^2} = 2$ .

Comme il a été vu dans le premier cas. On vérifie aussi l' $\alpha$ -convexité de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $v$ . Du calcul fait dans le chapitre II, on a

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, y, p), \varphi \right\rangle = \int_{\Gamma} (Nu + p)\varphi d\sigma \quad (3.10)$$

on obtient pour  $\varphi = v - u$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, y, p), v - u \right\rangle &= \int_{\Gamma} N(u - v)^2 dx \\ &= N \|u - v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq N \|u - v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad \alpha = N \end{aligned}$$

Il faut également que  $\mathcal{L}'_u$  soit lipchitzienne

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, y, p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, z, p) \right\| = N \|u - v\| \leq N \|u - v\| \quad C = N$$

Alors dans ce cas  $0 < \mu_2 < \frac{2\alpha}{c^2} = 2/N$ .

En résumé, soit  $\varepsilon > 0$  assez petit, on se donne un vecteur initial nul  $p^0$  et pour la même raison d'exactitude que précédemment, en utilisant la formulation variationnelle associée à [5] et la formule (3.2), on choisit  $y^0$  tel que  $y^0 = A^{-1} \cdot b$

En utilisant la première formule de (3.4) on abouti à la construction d'un algorithme recherchant le point-selle  $(u, y, p)$ :

**1. Initialisation :**  
 $k = 0, p^0 = 0, \quad \varepsilon \text{ et } \rho > \text{fixés}; N \text{ donnée}$

**2. Itération  $k$  :**  
 $p^k \text{ Connue}$

a)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation} \\ r = 0, \quad u^{k,0} = 0 \quad \mu_1 \text{ donnée} \\ \\ \text{Iteration } r \\ u^{k,r+1} = u^{k,r} - \mu_1 (Nu^{k,r} + p^k) \\ \\ \text{Jusqu'à ce que :} \\ \|u^{k,r+1} - u^{k,r}\| \leq \varepsilon \\ \text{sinon on répète le processus} \end{array} \right.$

b)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation} \\ r = 0, \quad A, z_d \text{ et } \mu_1 \text{ données} \\ \text{calcul } b \\ y^{k,0} = A^{-1}b \\ \\ \text{Iteration } r \\ y^{k,r+1} = y^{k,r} - \mu_1 (y^{k,r} - z_d) \\ \\ \text{Jusqu'à ce que :} \\ \|y^{k,r+1} - y^{k,r}\| \leq \varepsilon \\ \text{sinon on répète le processus} \end{array} \right.$

c)  $(p^{k+1})_i = \max (0, p^k + \rho(-\Delta y^k - f - u^k))_i \quad i = 0, \dots, (n+2)^2$

**3. Teste d'arrêt**  
 $\|u^{k+1} - u^k\| \leq \varepsilon$   
 et  $\|y^{k+1} - y^k\| \leq \varepsilon$   
 Sinon en pose  $k = k + 1$  et on passe à 2

# *Conclusion*

## Conclusion

Dans ce Manuscrit on est arrivé à voir l'algorithme d'Uzawa pour la résolution de problèmes de contrôle optimal des E.D.P à partir d'un lagrangien qui représente une méthode efficace pour la résolution du fait qu'elle utilise la dualité.

Du fait des contraintes sur l'état, le problème de contrôle primal n'est pas simple à approcher numériquement. Par contre le problème de contrôle dual est souvent un problème sans contrainte sur l'état, et de ce fait son approximation est plus aisée.

Evidement on a constaté que l'opérateur de projection du problème dual est immédiat, tandis que ce n'est pas le cas pour le primal. On remarque ainsi, que l'algorithme d'Uzawa correspond au gradient avec projection du problème dual.

## Annexe

Dans ce qui suit on considère  $V$  un espace de Hilbert et que  $K$  est un sous ensemble convexe et fermé de  $V$ , on définit la fonctionnelle  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$

### **Définition 01 :**

Soit  $V$  un espace de Hilbert,  $f$  une fonctionnelle de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  admet une dérivée directionnelle au point  $a$  dans la direction  $w$ , si :

$$\langle \nabla f(a), w \rangle = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \theta w) - f(a)}{\theta}$$

Si, de plus, la dérivée directionnelle en  $u$  existe pour tout  $w \in V$  et que  $w \mapsto \langle \nabla f(a), w \rangle$  est une application linéaire continue de  $V$ , dans  $\mathbb{R}$ , alors on dit que  $f$  est différentiable au sens de Gâteaux en  $u$ .

### **Définition 02 :**

Un ensemble  $K \subset V$  est dit convexe si, pour tout  $x, y \in K$  et tout réel  $\alpha \in [0, 1]$ , l'élément  $(\alpha x + (1 - \alpha)y)$  appartient à  $K$ .

### **Définition 03 :**

On dit qu'une fonction  $J$  définie sur un ensemble convexe non vide  $K \subset V$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est convexe sur  $K$  si et seulement si

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) \quad \forall u, v \in K, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

### **Proposition 04:**

Soit  $J$  une fonctionnelle réelle définie sur un convexe  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $J$  est convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in C \times C, \quad \langle \nabla J(x), y - x \rangle \leq J(y) - J(x)$$

### **Proposition 05 :**

Soit  $J$  une fonction convexe de classe  $C^1$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $x^*$  un point de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $x^*$  est un minimum (global) de  $J$  si et seulement si  $\nabla J(x^*) = 0$

### **Théorème 06 (de l'existence d'un minimum) :**

Si la fonction  $J$  qui est convexe et semi continue inférieurement est infini à l'infini

$$J(v) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_V \rightarrow +\infty$$

Ou bien si le convexe fermé  $K$  est borné.

Alors le problème (P) admet au moins une solution optimale tel que

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \quad (P)$$

**Proposition 07:**

$J$  est convexe, respectivement (strictement convexe) si et seulement si  $J'$  est monotone (respectivement strictement monotone)

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \langle \nabla J'(u) - \nabla J'(v), u - v \rangle &\geq 0 & \forall u, v \in V \\ \langle \nabla J'(u) - \nabla J'(v), u - v \rangle &> 0 & \forall u, v \in V \end{aligned}$$

**Théorème 08 (Inéquation et équation d'Euler):**

- Soit  $u \in K$  convexe. On suppose que  $J$  est convexe et différentiable en  $u$ . alors  $u$  est un point de minimum de  $J$  sur  $K$ , si et seulement il vérifie

$$\langle \nabla J(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

- Une condition nécessaire et suffisante pour que Le problème optimale (P) sans contrainte admette une solution  $u$  est que cette solution vérifie l'équation d'Euler suivante

$$\langle \nabla J'(u), v - u \rangle = 0 \quad \forall v \in K = V$$

**Théorème 09 (Lax Milgram) :**

Soit  $L(\cdot)$  une forme linéaire continue sur  $V$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $V$ . Alors la forme variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) & \text{pour toute fonction } v \in V \end{cases}$$

admet une unique solution.

**Théorème 10 (Projection) :**

Soit  $w \in V$ , il existe un et un seul  $Pw$  tel que

$$Pw \in K \quad \text{et} \quad \|w - Pw\| = \inf_{v \in K} \|w - v\|$$

$Pw$  Est appelé la projection de  $w$  sur  $K$

Si  $u$  vérifie

$$\langle u - w, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in K$$

Alors  $u = Pw$

## ***Références Bibliographiques***

1. **A. BOUNAIM**, *Méthodes de Décomposition de Domaine -Application à la résolution de problèmes de contrôle optimal*, Thèse de doctorat 25 juin 1999.
2. **G. ALLAIRE**, *Analyse Numérique et Optimisation*, Editions de l'Ecole Polytechnique-Palaiseau Mai 2006.
3. **J. F. BONNANS et E. CASAS**. *Contrôle de Systèmes Non Linéaires Comportant des Contraintes Distribuées sur L'état*. Rapport de recherche n° 300, Institut national de recherche en Informatique et en Automatique Domaine de Voluceau, Rocquencourt, France. Mai 1984.
4. **J. F. BONNANS**. *Application D'une Nouvelle Classe de Lagrangiens Augmentés en Contrôle Optimal de Systèmes Distribués*. Rapport de recherche n° 102. Institut national de recherche en Informatique et en Automatique Domaine de Voluceau, Rocquencourt, France. Novembre 1981.
5. **J. L. LIONS**, *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*. Edition Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1968.
6. **J. MOSSINO**, *Une Application de la Dualité au Contrôle Optimal-Contrainte Portant sur le Contrôle et sur L'état*, Université Paris XI,U.E.R. Mathématique,91 Orsay (France ) 1973-1974.
7. **L. BOURGEOIS et E. LUNEVILLE** *Contrôle Optimal des Equations aux Dérivées Partielles*. Ecole Nationale Supérieure De Techniques Avancées. Cours B7-2. Décembre 2008
8. **M. BERGOUNIOUX**, *Optimisation et Contrôle des Systèmes Linéaires*. Edition Dunod, Paris, 2001.
9. **M.FORIN et R.GLOWINSKI**, *Méthodes de Lagrange Augmenté-Applications a la Résolution Numérique de Problèmes aux Limites*. Edition Dunod Bordas, Paris 1982.

10. **P. A. RAVIART** et **J. M. THOMAS**, *Introduction à L'analyse Numérique des EDP*. Edition : Dunod, Paris, 1998
11. **P. A. RAVIART** *Les Méthodes D'éléments Finis en Mécanique des Fluides*. Edition : Eyrolles, Paris, 1981.
12. **P. FAURRE**, *Analyse Numérique Note d'Optimisation*. Editions de l'Ecole Polytechnique. ellipses, 1988.
13. **P. G. CIARLET**, *Introduction à L'analyse Numérique Matricielle et à L'optimisation*. Collection : sciences sup, Edition : Dunod Paris, 1998.
14. **X. ANTOINE** et **P. DREYFUSS** et **Y. PRIVAT**, *Introduction a L'optimisation : Aspects Théoriques, Numériques et Algorithmes*, ENSMN-ENSEM 2A, 2006-2007.