

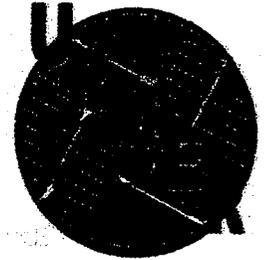
MS/530-09/01

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAID DE TLEMCEM



FACULTE DES SCIENCES

Département de Physique



Laboratoire d'Etude et Prédiction de Matériaux  
Unité de recherches Matériaux et Energies Renouvelables

**MEMOIRE DE MASTER**

En

**PHYSIQUE de la MATIERE CONDENSEE**

Présentée par :

**M<sup>r</sup> ACHEMAOUI Fouad**

**THEME**

**Applications de la Théorie des Matrices Aléatoires en Physique  
De la Matière Condensée**

Soutenu le : 28 /06/2012

**Pr. T. BOUCHAOUR**

Président

Université de Tlemcen

**Pr. A.HOUARI**

Encadreur

Université de Tlemcen

**Mr. A. SARI**

Examineur

Université de Tlemcen

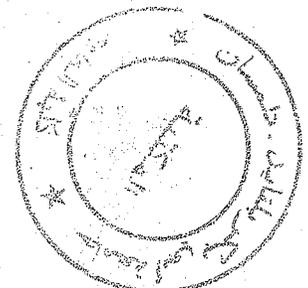
**Année Universitaire : 2011/2012**

Bibliothèque sciences



BFS7522

Ins.  
Date: 03 JUL. 2012  
Code: 7522



# Liste de figures

- Fig. (1) :** Représentation graphique de quelques spectres énergétiques...13
- Fig. (2) :** segments de spectres, chacun contenant 50 niveaux .les "flèches" ---< marquant l'occurrence de paires de niveaux avec des écarts inférieur à  $\frac{1}{4}$ . Ici les écarts dans chaque spectre sont mesurés en unités de l'écart moyen qui est défini par la longueur du segment divisé par 49.....20
- Fig. (3) :** Distributions des écarts entre niveaux à une particule dans la limite thermodynamique, cas d'un système diffusif (PW(s) : Wigner Dyson) et d'un système localisé (PP(s) : Poisson).....27
- Fig. (4) :** On représente chaque terme  $M_{ij}$  par un segment  $[i, j]$  et on apparie les segments deux à deux.....29
- Fig. (5) :** Histogramme obtenu en prenant une réalisation du GUE, avec N grand .....30
- Fig. (6) :** distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique..... 32. 33. 34. 35. 36
- Fig. (7) :** représentation graphique des valeurs propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs valeurs absolues..... 32. 33. 34. 35. 36
- Fig. (8) :** distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire (distribution normale)..... 37. 38. 39
- Fig. (9) :** Les différents types de désordre : (a) système ordonné, (b) désordre structural, (c) désordre topologique, (d) désordre compositionnel.....42
- Fig. (10) :** Ces trois courbes ont été obtenues par simulations numériques sur un réseau  $100 \times 10$  (modèle d'Anderson) avec un désordre  $w = 1$ .
- (a):  $g$  pour 20 échantillons différant simplement par leurs configurations d'impuretés.

- (b):  $g(h)$ , le champ magnétique  $H$  variant sur un intervalle de taille  $\approx 10 H_c$ , où  $H_c$  est le champ de corrélation.
- (c):  $g(E_F)$ , l'énergie de fermi  $E_F$  variant sur un intervalle de taille  $\approx 10 E_c$  où  $E_c$  est l'énergie de corrélation.....48

**Fig. (11) :** Universalité des fluctuations de la conductance dans le régime métallique : l'ordre de grandeur des fluctuations est le même pour un fil d'or de conductance moyenne  $\bar{g} \sim 875$

- (a) : expérience de Webb et al. Pour un SI MOSFET de  $\bar{g} \sim 13$ .
- (b) : expérience de Skocpol et al. Pour un système de  $\bar{g} \sim 1$  modélisé par un hamiltonien d'Anderson.
- (c) : simulation numérique d'A.D.Stone. d'autres expériences réalisées sur GaAs, AuPd, Ag, Bi, Al, donnent le même résultat.....48

# SOMMAIRE

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction générale</b> .....  | 7  |
| <b>Chapitre I : outils mathématiques et physique</b>  |    |
| <hr/>   |    |
| Introduction.....   | 9  |
| I.1. Indispensabilité des objets mathématiques en physique.....                                 | 9  |
| I.2. Représentation matricielle des grandeurs physiques.....                                    | 9  |
| I.3. Distribution des niveaux énergétiques d'un système non aléatoire.....                      | 11 |
| <b>Chapitre II : généralités sur les matrices aléatoires</b>                                    |    |
| <hr/>   |    |
| II.1. Définition d'une matrice aléatoire.....   | 15 |
| II.2. Quelques ensembles de matrices aléatoires.....  | 15 |
| II.2.1. ensembles gaussiens.....  | 15 |
| II.3. Applications de la théorie des matrices aléatoires.....                                   | 16 |
| II.4. Importances des connaissances de spectres énergétiques en physique.                       | 16 |
| II.5. Caractéristiques des spectres énergétiques .....  | 17 |
| II.6. Rigidité spectrale .....  | 18 |
| II.7. Définition d'une fonction appropriée pour l'étude des corrélations entre les niveaux..... | 21 |
| II.7.1. Présence de corrélation .....   | 21 |
| II.7.2. Absence de corrélation .....  | 24 |
| II.8. Wigner et les spectres d'atomes lourds.....   | 27 |
| II.9. Réalisation numérique : calcul du spectre d'une matrice aléatoire Non-symétrique. ....    | 31 |

## **Chapitre III : application de la théorie des matrices aléatoires aux fluctuations de la conductance dans les métaux désordonnés**

---

|  |    |
|--|----|
| Introduction.....  | 41 |
| III.1. Les différents types de désordre.....   | 41 |
| III.1.1. Désordre structural ou spatial.....   | 41 |
| III.1.2. Désordre topologique.....   | 41 |
| III.1.3. Désordre compositionnel.....  | 41 |
| III.2. Définition de la conductance $G$ d'un échantillon .....   | 43 |
| III.3. Différence classes des échantillons.....  | 43 |
| III.3.1. Les systèmes macroscopiques.....  | 43 |
| III.3.2. Les systèmes microscopiques.....  | 43 |
| III.4. Fluctuations dans le domaine macroscopique .....  | 44 |
| III.4.1. Origine des fluctuations macroscopiques à l'équilibre.....  | 44 |
| III.4.2. Fluctuation dans la limite macroscopique.....   | 44 |
| III.5. Intérêt des physiciens au domaine mésoscopique.....   | 45 |
| III.6. Calcul de la fluctuation de la conductance dans un milieu<br>mésoscopique.....                              | 46 |
| III.7. Observation des fluctuations dans un système mésoscopique .....   | 46 |
| III.8. Caractéristiques de ces fluctuations.....   | 47 |
| III.9. Rapport entre fluctuations du nombre de Thouless et les fluctuations<br>de la conductance.....              | 49 |
| III.10. Calcul des fluctuations de conductance $G$ via la Théorie des Matrices<br>Aléatoires (T. M. A).....        | 51 |
| III.10.1. Absence de corrélation entre les niveaux énergétiques.....   | 51 |
| III.10.2. Calcul des fluctuations de conductance $G$ dans le cas où les<br>niveaux énergétiques sont corrélés..... | 51 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Conclusion.....</b>  | <b>56</b> |
| <b>Références bibliographiques.....</b>   | <b>58</b> |
| <b>Appendices</b>   |           |
| Annexe 1 : Distribution de Poisson.....   | 61        |
| Annexe 2 : Définition de la fonction zêta de Riemann.....                           | 64        |
| Annexe 3 : Analyse de la répulsion des niveaux.....                                 | 65        |
| Annexe 4 : Résolution de l'équation $P(x) = U_{10} \int_x^{\infty} P(x') dx'$ ..... | 69        |
| Annexe 5 : Distribution de Rayleigh .....   | 70        |
| Annexe 6 : Théorème de fluctuation – dissipation.....                               | 72        |
| Annexe 7 : Comportement de l'erreur relative de conductance .....                   | 76        |

**INTRODUCTION**

**GÉNÉRALE**

# INTRODUCTION GENERALE

Ce mémoire est consacré à l'étude des matrices aléatoires et d'une de leurs nombreuses applications en physique.

La théorie des matrices aléatoires a initialement été introduite par E. P. Wigner dans le contexte de la physique nucléaire. Les niveaux excités d'un gros noyau atomique sont très denses et leurs corrélations sont importantes. Les interactions entre nucléons sont alors bien trop nombreuses et trop complexes pour que ces niveaux d'énergie puissent être étudiés analytiquement dans les détails. Wigner a suggéré alors de modéliser l'Hamiltonien d'un tel gros noyau atomique par une matrice aléatoire, c'est-à-dire une matrice à coefficients aléatoires. Le noyau est représenté ainsi par une "boîte noire" : on suppose que les nucléons interagissent de façon complètement aléatoire.

Cette approche est similaire à la démarche de la physique statistique qui modélise les positions et vitesses des particules dans un système de grande taille (Par exemple les atomes d'un gaz) par des quantités aléatoires.

Avec cette description, on peut estimer la probabilité de trouver une particule à tel endroit avec telle vitesse mais on ne peut pas suivre la trajectoire d'une particule donnée. En modélisant l'Hamiltonien d'un noyau atomique par une matrice aléatoire, on ne peut donc pas calculer la position exacte des niveaux d'énergie de tel ou tel noyau, mais on peut espérer d'écrire des propriétés statistiques des noyaux atomiques. La théorie des matrices aléatoires s'est rapidement révélée être une bonne description locale des niveaux de haute énergie des gros noyaux atomiques. En effet, on observe dans ces noyaux une répulsion entre les niveaux d'énergie voisins.

Depuis lors, la théorie des matrices aléatoires a trouvé de très nombreuses applications dans des contextes aussi divers qu'inattendus tels que la théorie des nombres, le chaos quantique, les systèmes désordonnés, les marches aléatoires évitantes ou encore la chromodynamique quantique (QCD) sur réseau. Je présente ci-dessous une de ces applications qui font de la théorie des matrices aléatoires un domaine de recherche actuel très actif et fascinant.[1].

Après connaître l'objectif de notre mémoire dans cette introduction, dans le chapitre I, nous introduisons quelques notions qui sont reliées au thème du mémoire, dans le chapitre II, nous nous concentrons sur l'approche des matrices aléatoires proprement dite. Dans le chapitre III, nous illustrons cette approche par une application au transport électronique quantique dans les solides désordonnés. Enfin, nous concluons notre étude.

**CHAPITRE I :**

**OUTILS**

**MATHÉMATIQUES ET**

**PHYSIQUE**

**M**athématique et physique, deux sciences aux objets bien distincts, la première s'intéressant aux objets abstraits tandis que la seconde étudie le monde réel. Pourtant, chacun sait confusément que les deux disciplines sont étroitement intriquées. Un grand nombre de savants des siècles passés, d'Archimède à Laplace en passant par Newton, se sont ainsi penchés simultanément sur ces deux domaines ; et aujourd'hui encore les deux matières sont enseignées du primaire jusqu'en premier cycle universitaire, collectivement qualifiées de «sciences exactes».

Mais le rôle de la mathématique en physique ne s'arrête pas au simple outillage. La prédiction du résultat d'une expérience à partir de la théorie, en effet, est un travail cent pour cent mathématique! D'où l'exigence, par les écoles d'ingénieur, d'un solide bagage mathématique de la part de leurs élèves. D'où encore la présence, dans les laboratoires de physique, de théoriciens de haute volée mathématique.

Bref, la mathématique est indispensable à la physique : cela n'est pas un scoop. En revanche, on oublie trop souvent que l'interaction entre mathématique et physique n'est pas à sens unique : le mathématicien a également beaucoup à gagner à rendre visite à ses confrères physiciens. [2].

### **I.1. Indispensabilité des objets mathématiques en physique :**

Depuis très longtemps (et il en sera toujours ainsi), le physicien étudie les phénomènes physiques réels ou artificiels, essaie de formuler des relations mathématiques ou lois de physique.

Pour que ces dernières soient valables, on a intérêt qu'elles soient indépendantes de tout système de coordonnées particulier utilisé pour les exprimer mathématiquement, bref, qu'elles soient universelles.

Dans ces démarches pour aboutir à cet objectif, le physicien est conduit à l'utilisation de certains objets mathématiques tels que les vecteurs, opérateurs, matrices, tenseurs, etc....

D'une façon générale, en physique et quelque soit la branche étudiée, ces objets mathématiques sont d'une importance capitale dans la formulation des théories.

En particulier, nous citons ici les matrices qui jouent un rôle très important en physique dans la représentation des différentes grandeurs physiques.

### **I.2. Représentation matricielle des grandeurs physiques :**

Illustrons par des exemples l'importance et l'avantage de la représentation matricielle des grandeurs dans la formulation théorique en physique classique et quantique.

En mécanique classique, on sait que pour un solide de forme quelconque, le moment d'inertie  $I$  qui figure dans la définition du moment angulaire  $\vec{L} = I \vec{W}$  où  $\vec{W}$  est la vitesse angulaire, dépend de son orientation par rapport à l'axe de rotation. Dans ce cas, la composante  $L_i$  de  $\vec{L}$  est donnée par :

$$L_i = \sum_j I_{ij} W_j \quad (\text{I-1})$$

Avec :  $i = x, y, z$

$J = x, y, z$

C'est-à-dire :

$$\vec{L} = [L_{ij}] \vec{W} \quad (\text{I-2})$$

Où :  $[L_{ij}]$  est la matrice d'inertie.

Avec l'élément de matrice :

$$L_{ij} = \int_s m (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \quad (\text{I-3})$$

Où  $m$  est la masse d'une particule du solide,  $r_i$  sont les composantes cartésiennes ( $x, y, z$ ) du vecteur position de la particule et  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

En physique de l'état solide, on sait que les propriétés de substances cristallines sont différentes dans différentes directions (c'est-à-dire elles sont anisotropes).

Parmi ces propriétés, citons la polarisation induite  $\vec{P}$  d'un cristal qui est liée à un champ électrique appliqué par :

$$\vec{P} = [\alpha_{ij}] \vec{E} \quad (\text{I-4})$$

Avec :  $i = x, y, z$

$J = x, y, z$

C'est-à-dire la composante  $P_i$  de  $\vec{P}$  est donnée par :

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \quad (\text{I-5})$$

Où  $[\alpha_{ij}]$  est le tenseur de polarisabilité (de second rang) qu'on peut considérer comme matrice  $3 \times 3$ .

Aussi, pour les cristaux, la densité de courant électrique  $\vec{J}$  est reliée au champ électrique appliqué  $\vec{E}$  par :

$$\vec{J} = [\sigma_{ij}] \vec{E} \quad (\text{I} - 6)$$

Avec :  $i = x, y, z$

$j = x, y, z$

Où :  $[\sigma_{ij}]$  est le tenseur de conductivité qu'on peut considérer comme une matrice  $3 \times 3$ .

En électronique, la formulation matricielle des relations entre les différentes grandeurs est très utile. Par exemple, dans l'étude des quadripôles (particulièrement les transistors) souvent on représente leurs caractéristiques par des matrices telles que la matrice d'impédance  $\overline{\overline{Z}}$ , la matrice hybride  $\overline{\overline{H}}$ , la matrice transfert  $\overline{\overline{T}}$  etc.....

En mécanique quantique, les observables sont représentées par des matrices hermétiques dans l'espace de Hilbert (espace des fonctions d'ondes). Les valeurs propres de ces matrices hermétiques sont les résultats théoriques des mesures des observables représentées. [4].

### I.3. Distribution des niveaux énergétiques d'un système non aléatoire :

Considérons un système physique non aléatoire, c'est-à-dire un système qui ne présente aucun caractère aléatoire dans sa nature. Prenons comme exemple le cas le plus simple qu'on peut imaginer : une particule libre de masse  $m$  contrainte à se mouvoir dans une boîte cubique d'arête  $L$ . il est facile à montrer que les niveaux énergétiques permis sont donne par :

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (\text{I} - 7)$$

Où :  $m$  masse de l'électron et  $h$  la constant de Planck

$n_x, n_y, n_z$ , sont des entiers positifs ( $n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$ )

Notons ici que le spectre énergétique correspondant fig. (1 - d) présente un grand degré de dégénérescence c'est-à-dire il existe énormément de cas ou des fonctions d'onde différentes :

$$\psi(x, y, z) = \alpha \sin(K_x x) \sin(K_y y) \sin(K_z z) \quad (\text{I} - 8)$$

$$\left( \begin{array}{l} K_x = \frac{2\pi}{L} n_x \\ K_y = \frac{2\pi}{L} n_y \\ K_z = \frac{2\pi}{L} n_z \end{array} \right)$$

Ayant le même niveau  $E_{n_x, n_y, n_z}$

Ce spectre est une séquence irrégulière de séries de niveaux comprimés. Il ne montre aucun aspect de rigidité.

La question qui naturellement se pose est :

Comment un système physique non aléatoire possède un spectre de niveaux ayant une structure irrégulière, loin de l'uniformité du spectre de l'oscillateur harmonique fig. (1 - c) ?

Cette absence de rigidité dans un tel spectre d'un système "régulier" est une conséquence directe de la dégénérescence. Cette dernière peut s'expliquer du fait qu'on peut considérer un système "régulier" (exemple : un solide cristallin) comme constitué d'un ensemble de sous-systèmes plus petits qui ne sont pas couplés. Ceci se manifeste par une absence de corrélation entre les niveaux du spectre. [4].

Fig. (1) : Représentation graphique de quelques spectres énergétiques

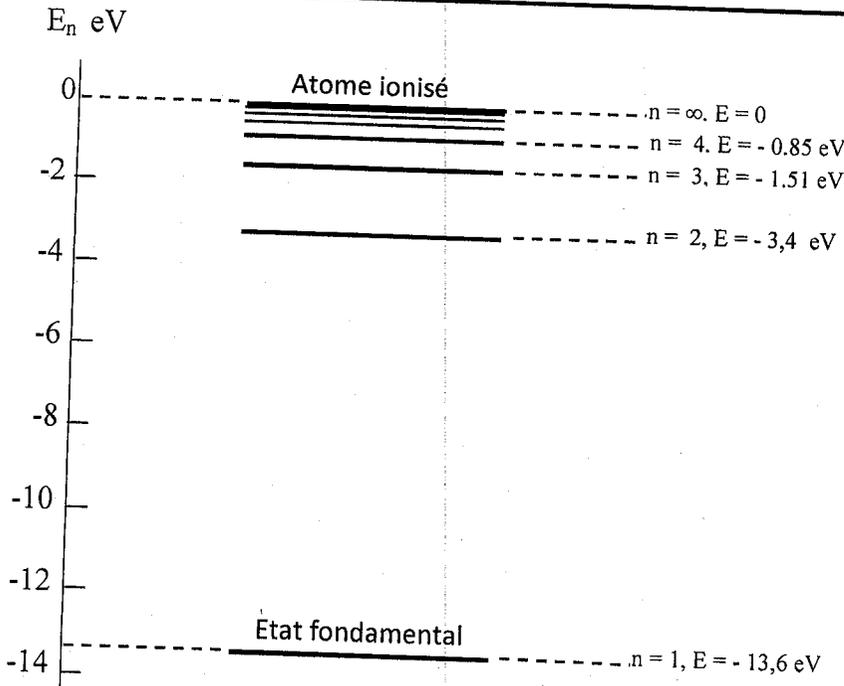


Fig. (1.a). Atome d'hydrogène isolé.

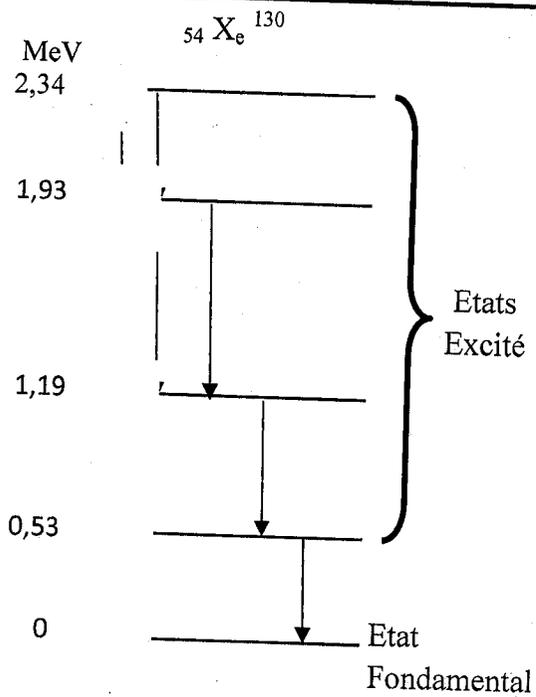


fig. (1.b). Noyau de l'élément  $^{130}_{54}\text{Xe}$ .

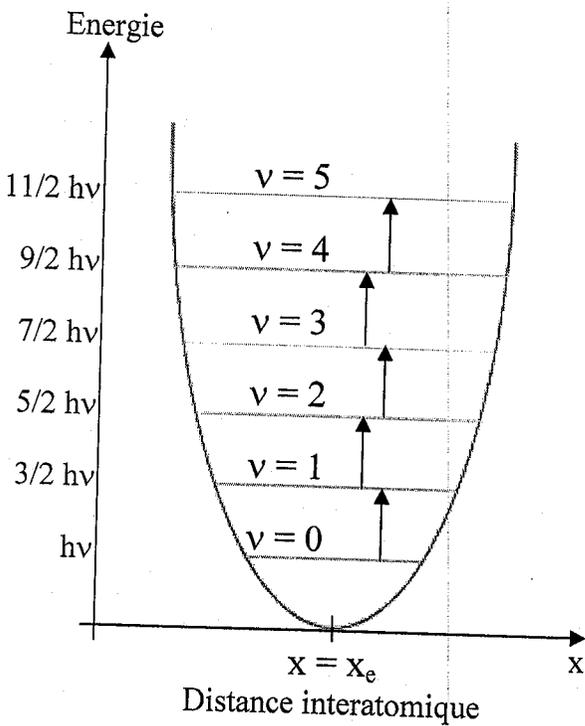


Fig. (1.c). Oscillateur harmonique.

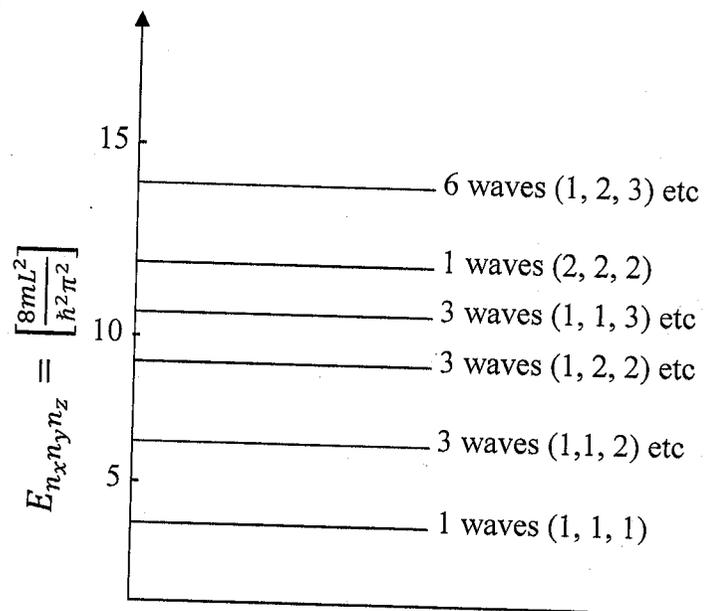


Fig. (1.d). Particule libre dans une boîte Cubique d'arrêt L

CHAPITRES II :  
GÉNÉRALITÉS  
SUR LES MATRICES  
ALÉATOIRES

### II.1. Définition d'une matrice aléatoire :

Avant de donner une définition d'une matrice aléatoire, rappelons qu'est ce qu'une variable aléatoire

Tout d'abord, précisons qu'un événement aléatoire est caractérisé par la possibilité d'être réalisé ou non. Par exemple, l'état interne d'un gaz (position et état de chaque atome) à un instant donné peut être considéré comme un événement aléatoire.

Une variable aléatoire réelle est un nombre réel dont la valeur est déterminée par le résultat d'une expérience associée à un événement aléatoire.

Si l'expérience consiste à mesurer une grandeur aléatoire  $X$ , il est impossible de prévoir à l'avance le résultat  $X_i$  que l'on va obtenir.

On ne peut que définir la probabilité  $\bar{w}_i$  d'obtenir  $X_i$  avec une certaine densité de probabilité.

Une matrice réelle aléatoire  $N \times M$  est un tableau de  $N$  lignes et  $M$  colonnes contenant  $N \times M$  nombres réels dont les valeurs sont aléatoires distribuées suivant une certaine loi de probabilité.

Pour donner un exemple, considérons le modèle d'Ising bidimensionnel ou les spins sont situés sur les  $N^2$  sites d'un réseau carré ayant  $N$  sites par côté.

Si les spins ne présentent aucune corrélation entre eux, la configuration du système à un instant donné peut être représentée par une matrice réelle aléatoire de taille  $N \times M$  où chaque élément est une variable aléatoire ne pouvant prendre que deux valeurs soit  $+1$  ou  $-1$  d'une façon équiprobable. [4].

### II.2. Quelques ensembles de matrices aléatoires :

#### II.2.1. ensembles gaussiens :

Ce sont les ensembles introduits par Wigner pour la théorie des spectres nucléaires. On distingue trois ensembles :

- l'ensemble gaussien orthogonal pour les systèmes invariants par renversement du temps (GOE),
- l'ensemble gaussien unitaire pour les systèmes non-invariants par renversement du temps (GUE),
- et l'ensemble gaussien symplectique pour les systèmes avec spin (GSE). [15].

### II.3. Applications de la théorie des matrices aléatoires :

On présente brièvement quelques unes des applications modernes de la théorie des matrices aléatoires dans les domaines de la physique statistique, de la physique des particules, de la gravité quantique et des mathématiques pures.

- Physique nucléaire
- Chaos quantique
- Fonction zêta de Riemann
- Polynômes orthogonaux

Puisque l'application principale de l'approche des matrices aléatoires que nous allons étudier concerne les spectres énergétiques des électrons dans un solide désordonné, il est pédagogique de se familiariser avec la notion de spectre en physique.

### II.4. Importances des connaissances de spectres énergétiques en physique :

Les systèmes physiques infiniment petits ne peuvent pas prendre pour énergie n'importe quelle valeur. Ils ont un spectre énergétique discret que l'on peut mettre en évidence en procédant à des expériences physiques simples.

Par exemple, un gaz à faible pression contenu dans un tube subit des décharges pour des valeurs bien particulières de la tension électrique appliquée (tube de Geissler).

La mécanique classique est impuissante à rendre compte de ce phénomène. Il faut avoir recours à la mécanique quantique. Il est alors possible de calculer complètement les différents états possibles d'un système physique tant que celui-ci reste simple (problème à 1 ou 2 corps) ; en revanche, il faudra faire des approximations pour les systèmes plus complexes ; c'est le cas des molécules ou des atomes autres que l'atome d'hydrogène.

En physique de l'état solide, il est aussi important de connaître le spectre énergétique des électrons (c'est-à-dire l'ensemble des niveaux énergétiques possibles que les électrons peuvent occuper) pour calculer la densité d'états, une grandeur fondamentale de laquelle dépendent toutes les propriétés de transport électronique dans les solides.

Aussi en spectroscopie nucléaire, la connaissance théorique du spectre énergétique d'un noyau nous permet de prédire le spectre d'émission de ce dernier. [3].

Les méthodes spectrales d'analyse et de caractérisation donnent lieu à des transitions entre les différents niveaux d'énergie des atomes ou des molécules. Il est donc indispensable de connaître le spectre c'est-à-dire l'ensemble des niveaux énergétiques de ces systèmes physiques en particulier l'état fondamental (l'état de plus basse énergie).

Dans ce mémoire il sera question d'étudier les spectres énergétiques de systèmes complexes qui sont les résultats des matrices aléatoires auxquels nous nous intéressons.

### II.5. Caractéristiques des spectres énergétiques :

Avant d'aborder l'étude des spectres énergétiques des systèmes physiques complexes et les conséquences de leurs caractéristiques sur les propriétés physiques, il est pédagogique de se familiariser avec des spectres de systèmes simples :

#### Atome d'hydrogène isolé :

Un spectre typique est celui d'un atome d'hydrogène isolé qui est montré par la fig. (1, a). Chaque ligne horizontale représente un niveau énergétique permis de l'atome. Dans ce cas, les niveaux énergétiques sont connus exactement et sont donnés par :

$$\varepsilon_n = -\frac{13,6}{n^2} eV \quad (\text{II} - 1)$$

Où  $n$  est le nombre quantique principal  $n=1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Dans une première description de ce spectre, on constate qu'il est borné entre le niveau fondamental  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$  ( $n = 1$ ) et le niveau  $E_\infty$  ( $n = \infty$ ) correspondant à l'état de l'hydrogène ionisé c'est-à-dire l'atome d'hydrogène avec son seul électron infiniment éloigné du proton.

Bien qu'il soit borné, ce spectre comporte une infinité de niveaux avec l'écart entre deux niveaux successifs qui se retraits comme :

$$(\Delta\varepsilon)_n \sim \frac{(2n + 1)}{[n(n + 1)]^2} \quad (\text{II} - 2)$$

Pour les états ayant  $n$  pas assez grand, la densité des niveaux reste faible et il est possible de les identifier et de calculer leurs écarts.

Une fois  $n$  devient assez grand, la densité des niveaux devient tellement grande (on parle alors de continuum) qu'on devrait renoncer à une description individuelle des niveaux. On songera plutôt à une description moyenne de l'ensemble des niveaux.

### II.6. Rigidité spectrale :

Pour définir cette notion de rigidité spectrale, nous empruntons une figure de la littérature qui montre des spectres d'origines différentes ou chaque spectre contient 50 valeurs (niveaux) successives.

La colonne (a) de la figure. (2) correspond à un système poissonien : une variable aléatoire  $S$  ayant une densité de probabilité  $P(X) = e^{-X}$ , (voir appendices : Annexe 1). Rappelons ici qu'une séquence poissonienne est construite comme suit :

$$X_1 = 0, X_{i+1} = X_i + S_i \quad (\text{II} - 3)$$

Où  $S_i$  sont des résultats d'essais indépendants de la variable aléatoire  $S$ . Le spectre résultant est appelé spectre poissonien.

La colonne (b) montre un exemple de segment de nombres premiers dans l'intervalle [7791097, 7791877].

La colonne (c) correspond au spectre de la partie imaginaire positive du 1551<sup>ème</sup> au 1600<sup>ème</sup> zéro de la fonction zêta de Riemann  $\zeta(z)$ . (Voir appendices : Annexe 2)

La colonne (d) est séquence de niveaux équidistants, ce spectre est connu sous l'appellation anglaise "PICKET FENCE".

Un exemple trivial d'un tel spectre est la suite des nombres entiers naturels en arithmétique.

En physique il correspond au spectre énergétique de l'oscillateur harmonique fig. (1.c) où les niveaux énergétiques sont données par :

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h \nu, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II} - 4)$$

Avec  $h$  : la constante de Planck et  $\nu$  : la fréquence d'oscillation.

Maintenant peut on déduire quelques indication juste en inspectant la fig. (2).

Les flèches  $\leftarrow$  indiquent les écarts :  $S_i = X_{i+1} - X_i$  qui sont inférieurs à  $\frac{1}{4}$  (voir fig. (2)).

Le spectre de poisson montre 12 flèches parmi 49 écarts, le spectre des nombres premières 9 flèches, le spectre des zéros de la fonction zêta de Riemann aucune flèche et le picket fence, bien sur aucune flèche.

Donc, on constate une similarité statistique entre (a) et (b) : une grande probabilité de petits écarts et une occurrence de grands écarts, par contre (d) montre clairement une faible probabilité de petits et grands écarts.

La faible probabilité de petits écarts est souvent qualifiée dans la littérature par le phénomène de répulsion des niveaux (rigidité spectrale).

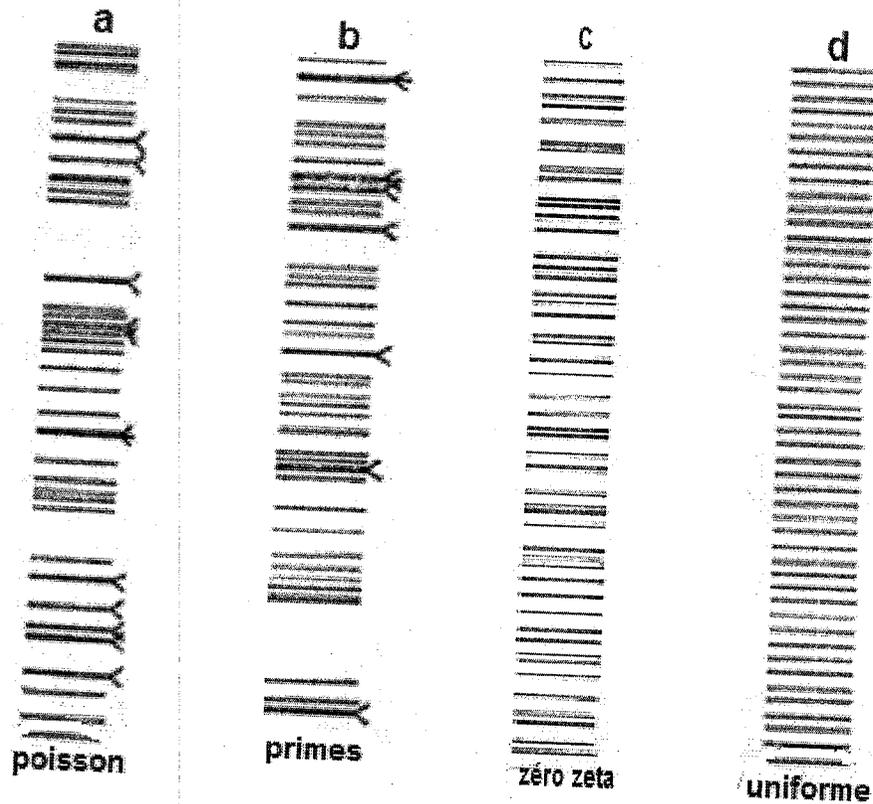
Notons que le spectre (c) dévie de (d) moins notablement que (a) et (b). Le spectre "PICKET FENCE" (d) est un spectre que nous qualifions d'absolument rigide dans le sens où il n'y a aucun départ de l'uniformité.

Une fois la position d'un niveau  $X_i$  quelconque est connue, la position de n'importe quel autre niveau est déterminée quelle que soit sa distance de  $X_i$ .

Pour ce spectre, les corrélations entre les écarts sont maximales et il montre un ordre parfait à courte et longue portée.

A l'opposé, le spectre poissonien ne contient aucune corrélation entre les écarts.

Dans des situations intermédiaires entre le spectre poissonien et le spectre "PICKET FENCE", le degré de rigidité spectrale dépendra de la nature et le degré de corrélations entre les écarts.



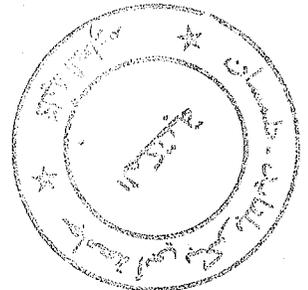
**Fig. (2) :** segments de spectres, chacun contenant 50 niveaux .les "flèches" ---< marquant l'occurrence de paires de niveaux avec des écarts inférieur à  $\frac{1}{4}$ . Ici les écarts dans chaque spectre sont mesures en unités de l'écart moyen qui est défini par la longueur du segment divisé par 49. [5].

**II.7. Définition d'une fonction appropriée pour l'étude des corrélations entre les niveaux :**

L'une des fonctions qui a été très souvent étudiée pour caractériser les corrélations entre les niveaux des différents spectres est l'espacement (ou écart) entre les niveaux adjacents (ou consécutifs).

La distribution de l'espacement entre deux valeurs propres consécutives  $P(S)$  qui est un bon moyen de mesurer les interactions locales, c'est la raison pour la quelle on s'est intéressé aux deux cas suivants :

- Cas de corrélation entre deux niveaux.
- Cas où il n'y a pas de corrélation entre les niveaux.

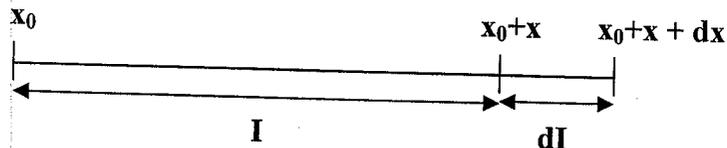


**II.7.1. Présence de corrélation :**

- **Distribution de Wigner :**

Reproduisons ici un argument simple, dû à Wigner. Pour cela ; considérons la probabilité  $P(x) dx$  pour que, étant donné un niveau localisé à  $x_0$ , le niveau suivant soit dans l'intervalle infinitésimal.

$$dI = [x_0 + x, x_0 + x + dx]$$



Cette probabilité peut être représentée comme le produit de deux facteurs.

$P(x) dx = P_r ( 1 \text{ niveau dans l'intervalle } dI / \text{ pas de niveau dans l'intervalle } I ) \times P_r (\text{ pas de niveau dans l'intervalle } I )$  où  $P_r$  signifie la probabilité et  $P_r (A/B)$  est la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

La probabilité :

$$Pr (\text{ pas de niveau dans l'intervalle } I ) = \int_{x'=x}^{\infty} P(x') dx' \tag{II - 5}$$

Posons pour :

$$P_r (1 \text{ niveau dans l'intervalle } dI / \text{ pas de niveau dans l'intervalle } I ) = \mu(x) dx$$

Par conséquent, la densité de probabilité  $P(x)$  est :

$$P(x) = \mu(x) \int_{x'=x}^{\infty} P(x') dx' \quad (\text{II-6})$$

Ceci est une équation intégrale qui peut être résolue donc :

$$\int_{x'=x}^{\infty} P(x') dx' = C e^{-\int \mu(x') dx'} \quad (\text{II-7})$$

Par différenciation on obtient :

$$P(x) = C \mu(x) e^{-\int \mu(x') dx'} \quad (\text{Voir appendices : Annexe 4}) \quad (\text{II-8})$$

Rappelons que, par définition, l'espacement relatif  $x$  est l'espacement réel  $S$  en unités de l'espacement moyen  $\bar{S}$  c'est-à-dire  $x = \frac{S}{\bar{S}}$  d'où :  $\bar{x} = \frac{\bar{S}}{\bar{S}} = 1$  (II-9)

Donc on a 2 conditions à prendre en considération :

$$\int P(x) dx = 1 \quad (\text{II-10})$$

$$\bar{x} = \int xP(x) dx = 1 \quad (\text{II-11})$$

Pour une séquence de niveaux de Poisson (pas de corrélation)  $\mu(x)$  est indépendante de  $x$  et on obtient :

$$\begin{cases} P(x) = C \alpha e^{-\alpha x} \\ \int P(x) dx = 1 \\ \int xP(x) dx = 1 \end{cases} \Rightarrow C = \alpha = 1$$

D'où on retombe sur :

$$P(x) = e^{-x} \quad x \geq 0 \quad (\text{II-12})$$

Une corrélation entre les niveaux peut être introduite en supposant l'existence d'une répulsion linéaire en posant pour la densité  $\mu(x)$  :  $\mu(x) = \beta x$  (II - 13)

$$P(x) = C \beta x e^{-\frac{\beta}{2}x^2} \quad (\text{II - 14})$$

Avec :

$$\int_0^{\infty} P(x) dx = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\int_0^{\infty} \beta x e^{-\frac{\beta}{2}x^2} dx} = 1 \quad (\text{II - 15})$$

$$\int_0^{\infty} P(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \beta x e^{-\frac{\beta}{2}x^2} dx = 1$$

Si  $\frac{\beta}{2} = \alpha$  :

$$\int_0^{\infty} \beta x e^{-\frac{\beta}{2}x^2} dx = 2 \alpha \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 2 \alpha \left( -\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left[ \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right]$$

$$\int_0^{\infty} \beta x e^{-\frac{\beta}{2}x^2} dx = 2 \alpha \left( -\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\alpha^{1/2}} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^{1/2} = \left( \frac{\beta}{2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

D'où :  $P(x) = P_W(x) = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4}x^2} \quad x \geq 0$  (II - 16)

Cette distribution est représentée sur la fig. (3).

Ce résultat pour la distribution de l'espaceur porte le nom de la **distribution de Wigner** dans le domaine des matrices aléatoires.

C'est une distribution standard en statistique appelée "distribution de Rayleigh" (voir appendice 5)

La distribution de Wigner montre explicitement la répulsion des niveaux ou la tendance des niveaux à éviter le rassemblement.

### II.7.2. Absence de corrélation :

- **Distribution de poisson :**

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_{N-1}, E_N$  les positions de  $N$  niveaux consécutifs d'un spectre dans l'intervalle  $\delta E$ .

$$\begin{array}{c} E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_{N-1} \leq E_N \\ \hline \delta E \end{array}$$

Soit  $S_i = E_{i+1} - E_i$  l'espaceur entre les niveaux consécutifs  $E_i$  et  $E_{i+1}$ .

La valeur moyenne de  $S_i$  est définie par :

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} S_i}{(N-1)} = \frac{S_{N-1} + S_{N-2} + \dots + S_2 + S_1}{(N-1)} \quad (\text{II-17})$$

$$\bar{S} = \frac{(E_N - E_{N-1}) + (E_{N-1} + E_{N-2}) + \dots + (E_2 - E_1)}{(N-1)} \quad (\text{II-18})$$

$$\bar{S} = \frac{E_N - E_1}{(N-1)} = D \quad (\text{II-19})$$

C'est-à-dire  $\bar{S}$  est l'espaceur moyen.

Définissons l'espaceur relatifs par :

$$t_i = \frac{S_i}{D} \quad (\text{II-20})$$

Définissons la densité de probabilité  $P(t)$  telle que  $P(t) dt$  est la probabilité pour que  $t_i$  quelconque soit-il, aurait une valeur comprise entre  $t$  et  $t+dt$ .

Si les positions des niveaux dans le spectre ne sont pas corrélées (c'est-à-dire statistiquement indépendantes). La probabilité pour que  $E_i$  ( $\forall E_i$ ) tomberait dans l'intervalle  $(E, E+dE)$  est indépendant de  $E$  et donnée simplement par :

$$P(E) dE = \rho dE$$

Avec :  $\rho = 1/D$

La probabilité pour qu'il existe dans l'intervalle de longueur  $D$  vaut 1.

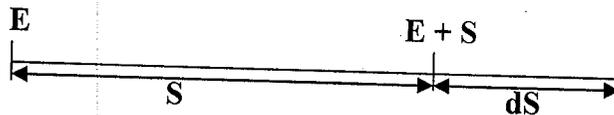
$P(E) dE$  est la probabilité pour que des niveaux existent dans l'intervalle de longueur  $dE$ .

$$\begin{cases} D \rightarrow 1 \\ dE \rightarrow P(E) dE \end{cases} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{D} \quad (\text{II} - 21)$$

Déterminons la densité de probabilité de l'espacement  $S$ .

Etant donnée un niveau situé à  $E$ .

Quelle est la probabilité de n'avoir aucun niveau dans l'intervalle  $[E, E+S]$  et 1 niveau dans l'intervalle  $dS$  situé à  $E+S$  ?



Subdivisons l'intervalle  $[E, E+S]$  en  $m$  intervalles d'égales longueurs (longueur des intervalles =  $S/m$ )



Puisque les niveaux sont statistiquement indépendants alors la probabilité  $P(0)$  de n'avoir aucun niveau dans l'intervalle  $[E, E+S]$  est le produit de probabilités de n'avoir aucun niveau dans n'importe des  $m$  intervalles c'est-à-dire :

$$P(0) = \prod_{i=1}^m P_i$$

$$P_i = 1 - \rho(dE)_i$$

$$P_i = 1 - \rho \left[ E + \frac{(i+1)}{m} S - \left( E + \frac{i}{m} S \right) \right]$$

$$P_i = 1 - \rho \frac{S}{m}$$

$$\text{Donc : } P(0) = \prod_{i=1}^m \left( 1 - \rho \frac{S}{m} \right) \quad (\text{II} - 22)$$

$$P(0) = \left( 1 - \rho \frac{S}{m} \right)^m \quad (\text{II} - 23)$$

Si on prend  $m \rightarrow \infty$  c'est-à-dire en faisant des subdivisions de plus en plus fines alors :

$$\left( 1 - \rho \frac{S}{m} \right)^m \rightarrow e^{-\rho S} \quad (\text{II} - 24)$$

Rappelons que la probabilité d'avoir un niveau dans l'intervalle  $dS$  est :

$$P(1) = \rho dS \quad (\text{II} - 25)$$

D'où la probabilité de n'avoir aucun niveau dans l'intervalle  $[E, E+S]$  et d'avoir 1 niveau dans  $dS$  située à  $E+S$  est :

$$P = P(0) \times P(1) = e^{-\rho S} \rho dS \quad (\text{II} - 26)$$

$$e^{-\rho S} \rho dS = e^{-\frac{S}{D}} d\left(\frac{S}{D}\right) \quad (\text{II} - 27)$$

$$e^{-\rho S} \rho dS = e^{-t} dt \quad (\text{II} - 28)$$

D'où la densité de probabilité de l'espacement relatif  $t$  est donnée par  $e^{-t}$  c'est la distribution de poisson.

Cette distribution est représentée sur la fig. (3).

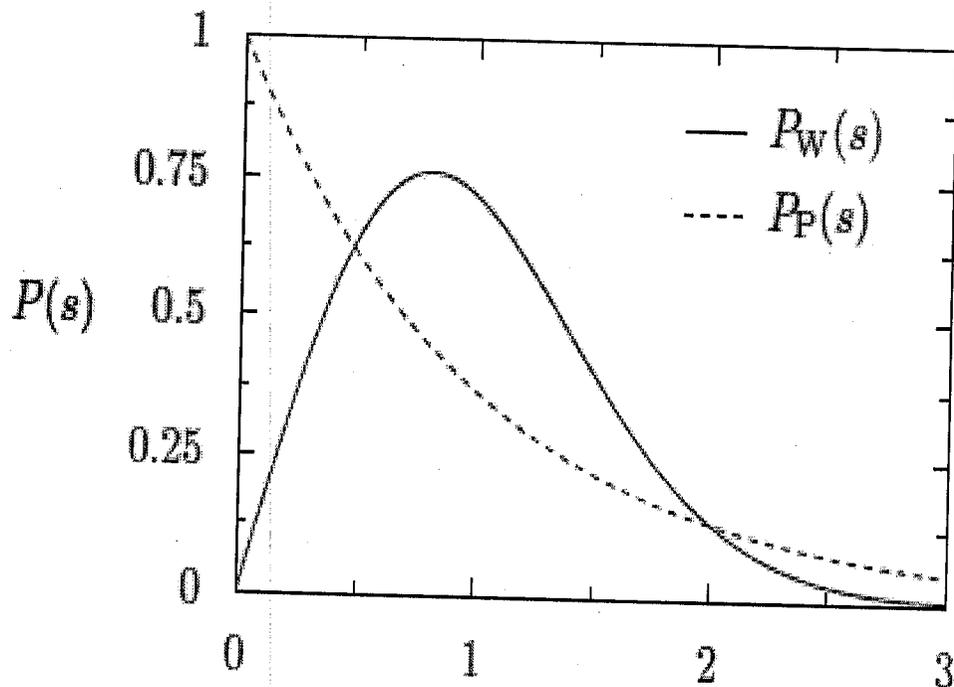


Fig. (3). : Distributions des écarts entre niveaux à une particule dans la limite thermodynamique, cas d'un système diffusif ( $P_W(s)$  : Wigner Dyson) et d'un système localisé ( $P_P(s)$  : Poisson).

### II.8. Wigner et les spectres d'atomes lourds:

Les matrices aléatoires ont d'abord été étudiées dans les années 30 par des statisticiens (matrices de covariance aléatoires).

Dans les années 50, les physiciens essaient de comprendre la spectroscopie des atomes lourds. Les raies spectrales correspondent à des valeurs propres (plus exactement des divergences entre ces valeurs propres) d'opérateurs auto-adjoints (Hamiltoniens) très complexes. Plutôt que d'essayer de calculer explicitement les spectres de ces opérateurs, Wigner propose d'étudier leurs propriétés statistiques et pour cela invente le modèle dit du GUE. [6].

Le G.U.E :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix}$$

Les  $M_{ij}$  sont des variables gaussiennes complexes centrées on a  $M_{ij} = \overline{M_{ji}}$

Les  $M_{ij}; i \leq j$  sont indépendantes.

$$P(M \in dM) = (2\pi)^{-N^2/2} \exp(-Tr(M^2) / 2) dM \quad (\text{II} - 29)$$

Les valeurs propres  $x_1, \dots, x_N$  de  $M$  sont déterminées par les moments

$$Tr(M^k) = \sum_{i=1}^N x_i^k \quad (\text{II} - 30)$$

On peut calculer la valeur moyenne des moments

$$E[Tr(M^{2k})] = \int \sum M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \dots M_{i_{2k} i_1} (2\pi)^{-N^2/2} \exp(-Tr(M^2) / 2) dM$$

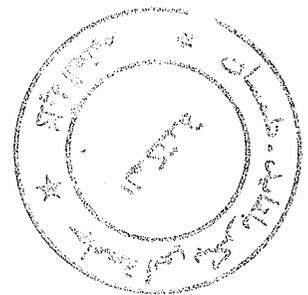
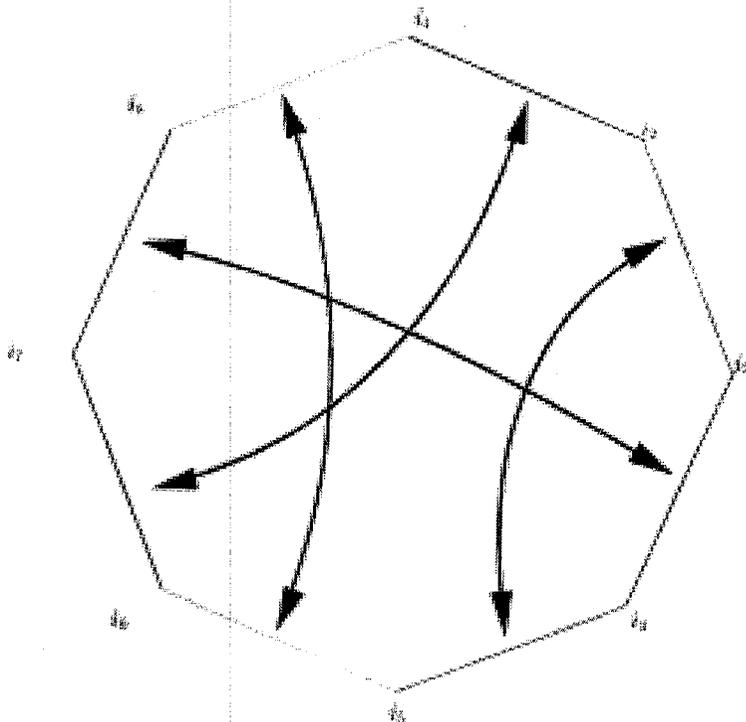
$$(\text{II} - 31) [6]$$

Au moyen du Lemme de Wick : si  $f_1, \dots, f_{2k}$  est une famille gaussienne centrée alors

$$E[f_1 f_2 \dots f_k] = \sum_{\text{appariements de } \{1,2,\dots,2k\}} E[f_{u_1} f_{u_2}] E[f_{u_3} f_{u_4}] \dots E[f_{u_{2k-1}} f_{2k}]$$

$$(\text{II} - 32) [6]$$

Dans le cas du GUE on a  $E [ M_{ij} M_{kl} ] = \delta_{il} \delta_{jk}$  (II - 33)



**Fig. (4) :** On représente chaque terme  $M_{ij}$  par un segment  $[i, j]$  et on apparie les segments deux à deux. [6].

La formule finale donne

$$E [ Tr ( M^{2k} ) ] = N^{k+1} \sum_{g=0}^{[k/2]} \varepsilon_k (g) N^{-2g} \tag{II - 34}$$

$\varepsilon_k (g)$  = Nombre de façons de replier le polygone à  $2k$  côtés pour obtenir une surface de genre  $g$ .

Cette relation entre matrices aléatoires et énumération de graphes sur les surfaces de Riemann a été élaborée par les physiciens en liaison avec la gravitation quantique. On y considère des intégrales du type

$$\int_{H_N} \exp -Tr \left( M^2 + \sum_{i \geq 3} \lambda_i M^i \right) dM \tag{II - 35}$$

Il y a des relations profondes avec la théorie des systèmes intégrables. [6].

**Comportement globale du spectre :**

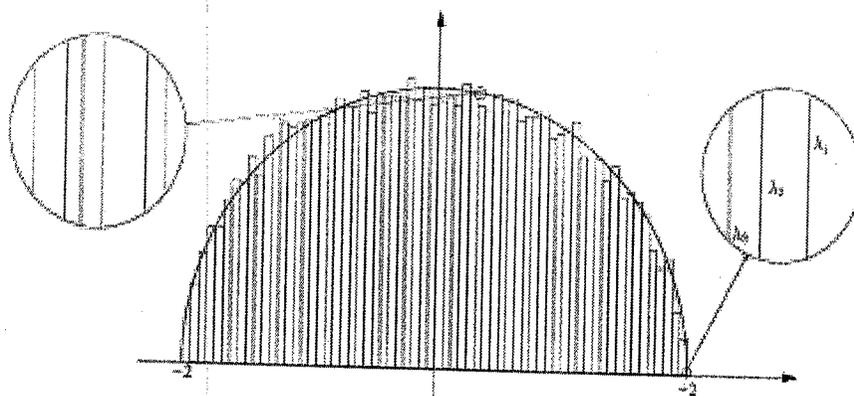
On a

$$E \left[ \frac{1}{N} Tr \left( \left( \frac{M}{\sqrt{N}} \right)^{2k} \right) \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \varepsilon_k(0) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \int_{-2}^2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} x^{2k} dx \tag{II - 36}$$

La loi limite du spectre de  $\frac{M}{\sqrt{N}}$  est donc la loi du demi-cercle, dite aussi loi de Wigner

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \quad \text{sur } [-2, 2] \tag{II - 37}$$

**Fig. (5) :** Histogramme obtenu en prenant une réalisation du GUE, avec N grand, [6].



Il y a trois régimes intéressants: le régime "global", le régime local au cœur du spectre, et enfin le régime au bord du spectre.

Cela concerne, pour une matrice aléatoire de valeurs propres  $x_1, \dots, x_N$ , le comportement de la mesure empirique

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \quad (\text{II} - 38)$$

La théorie des probabilités libres (D. Voiculescu) a permis de mieux comprendre ce comportement pour de nombreux modèles de matrices aléatoires. [6].

## II.9. Réalisation numérique : calcul du spectre d'une matrice aléatoire non-symétrique :

Avant d'aborder les calculs numériques définissons le logiciel Mathematica.

### II.9.1. Qu'est-ce-que Mathematica ?

Mathematica est un logiciel de calcul formel et numérique développé par Wolfram Research. Il permet essentiellement de faire du calcul formel (manipulation d'expressions mathématiques sous forme symbolique, par exemple : calcul de dérivées, de primitives, simplification d'expressions, etc...) Et du calcul numérique (Évaluation d'expressions mathématiques sous forme numérique; par exemple : calcul des premières décimales du nombre  $\pi$ , évaluation approchée d'intégrales, etc...). Mathematica incorpore un langage de programmation sophistiqué et permet aussi de faire des graphiques. C'est un logiciel très utilisé en enseignement, dans la recherche scientifique et dans l'industrie. [7].

### Calculs numériques :

On a testé des matrices réelles aléatoires non-symétriques de différentes tailles sous le logiciel mathematica et voila les résultats :

```
ar = Table[Random[],{50},{50}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%],Im[%]}]]
Print["fig. (6.1).distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 50x50 dans
le plan complexe"]
ListPlot[Abs[Eigenvalues[ar]]]
Print["fig. (7.1).représentation graphique des valeurs
propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs
valeurs absolues"]
```

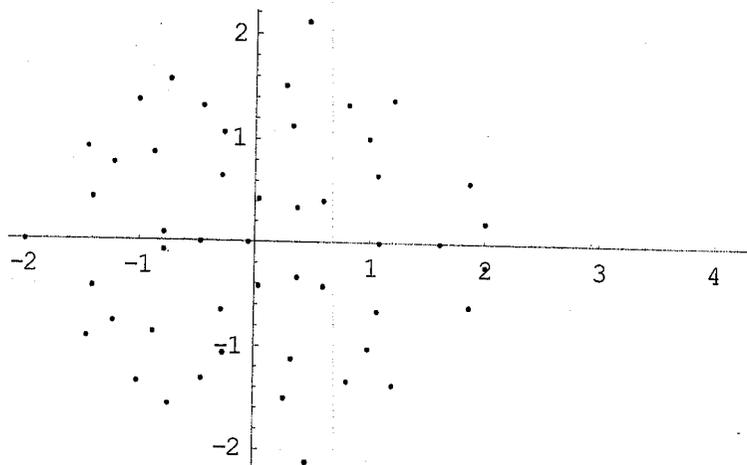


Fig. (6.1).distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 50x50 dans le plan complexe

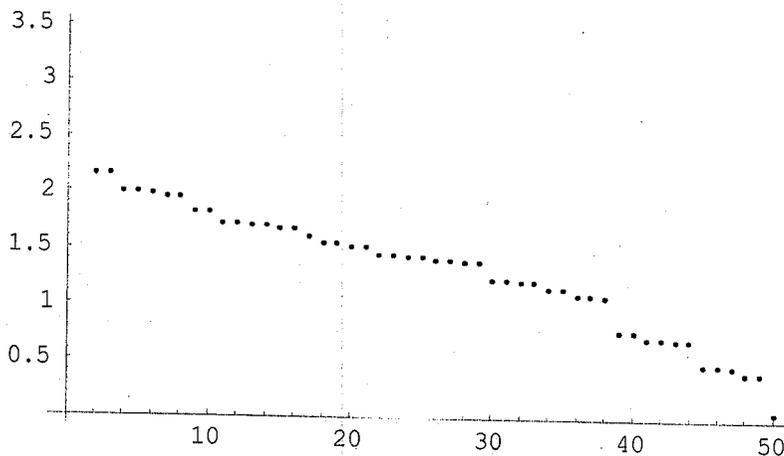


Fig. (7.1).représentation graphique des valeurs propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs valeurs absolues

```
ar = Table[Random[], {200}, {200}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%], Im[%]}]]
Print["fig. (6.2).distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 200x200
dans le plan complexe"]
ListPlot[Abs[Eigenvalues[ar]]]
Print["fig. (7.2).représentation graphique des valeurs
propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs
valeurs absolues"]
```

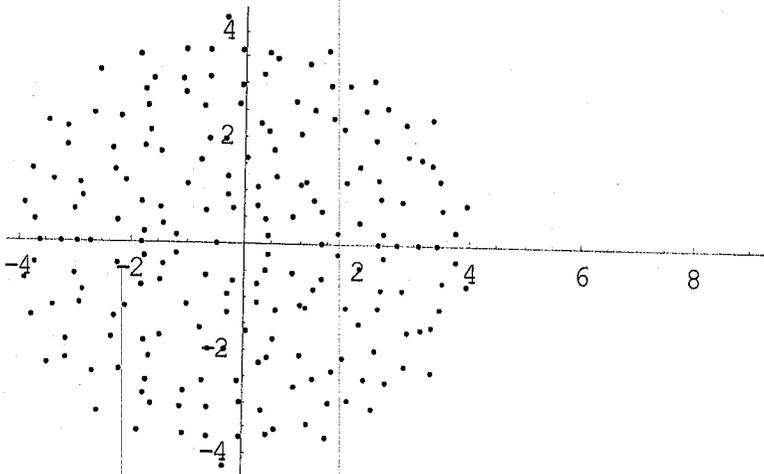


Fig. (6.2).distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire Non-symétrique de taille 200x200 dans le plan complexe

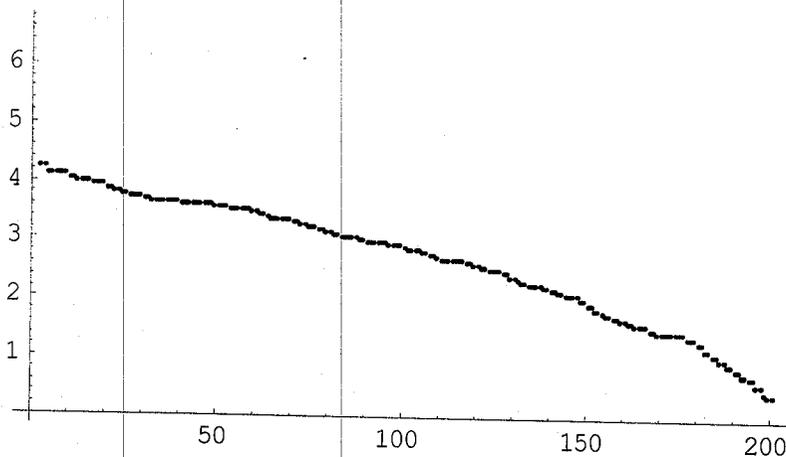


Fig. (7.2).représentation graphique des valeurs propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs valeurs absolues

```
ar = Table[Random[], {500}, {500}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%], Im[%]}]]
Print["fig. (6.3).distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 500x500
dans le plan complexe"]
ListPlot[Abs[Eigenvalues[ar]]]
Print["fig. (7.3).représentation graphique des valeurs
propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs
valeurs absolues"]
```

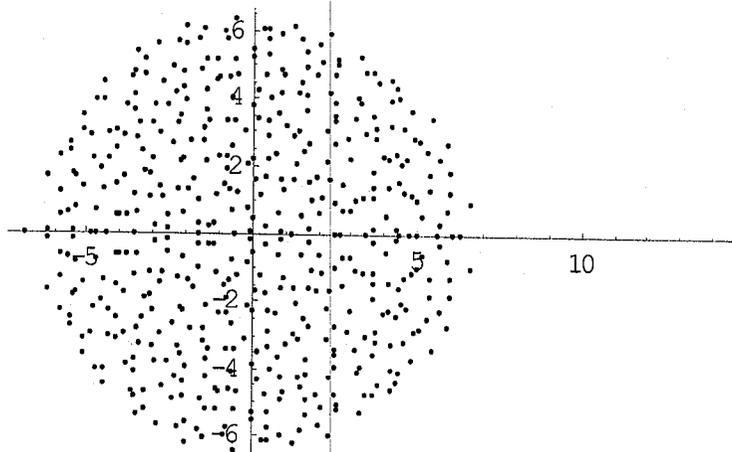


Fig. (6.3).distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 500x500 dans le plan complexe

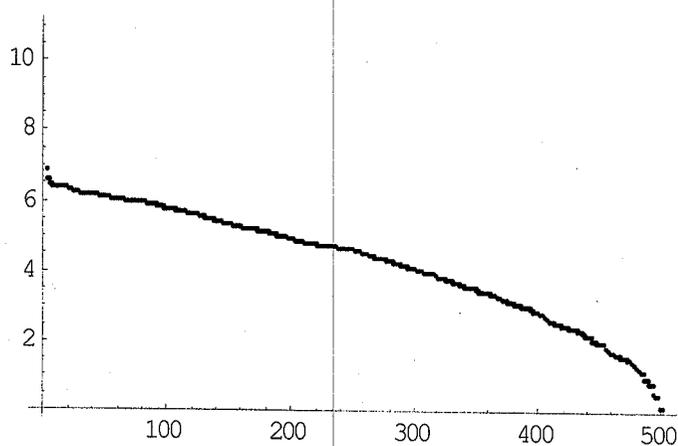


Fig. (7.3).représentation graphique des valeurs propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs valeurs absolues

```

ar = Table[Random[], {1500}, {1500}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%], Im[%]}]]
Print["fig. (6.4).distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 1500x1500
dans le plan complexe"]
ListPlot[Abs[Eigenvalues[ar]]]
Print["fig. (7.4).représentation graphique des valeurs
propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs
valeurs absolues"]

```

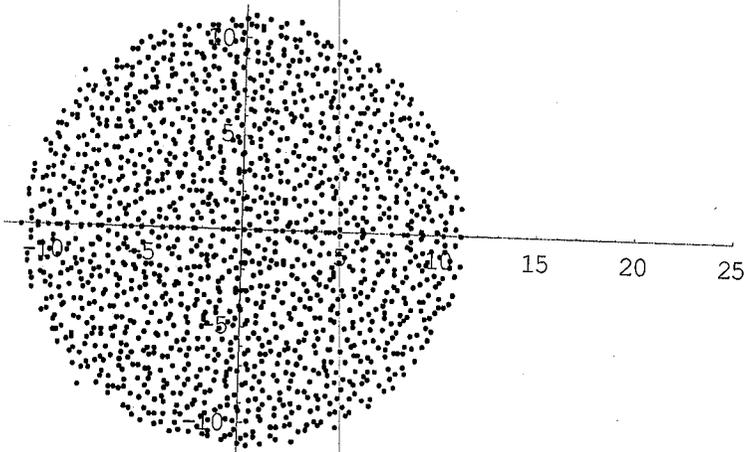


Fig. (6.4).distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 1500x1500 dans le plan complexe

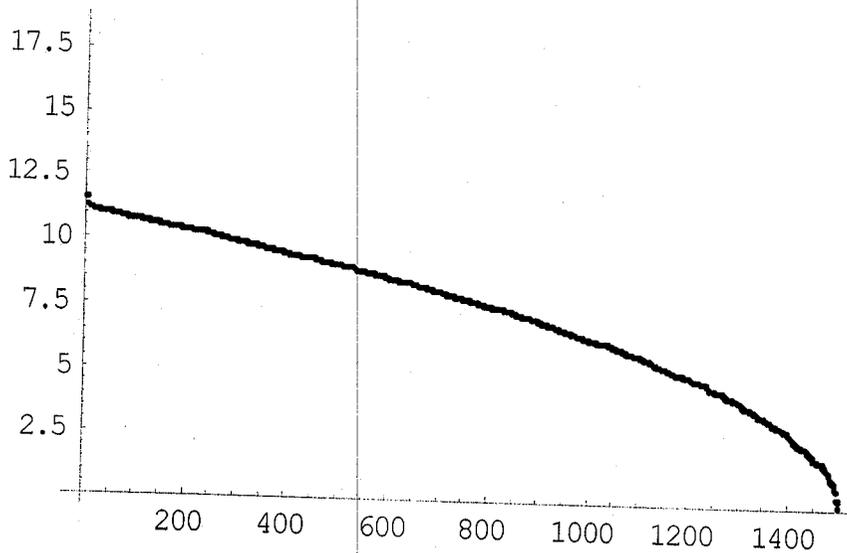


Fig. (7.4).représentation graphique des valeurs propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs valeurs absolues

```
ar = Table[Random[], {3500}, {3500}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%], Im[%]}]]
Print ["fig. (6.5).distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 3500×3500
dans le plan complexe"]
ListPlot[Abs[Eigenvalues[ar]]]
Print["fig. (7.5).représentation graphique des valeurs
propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs
valeurs absolues"]
```

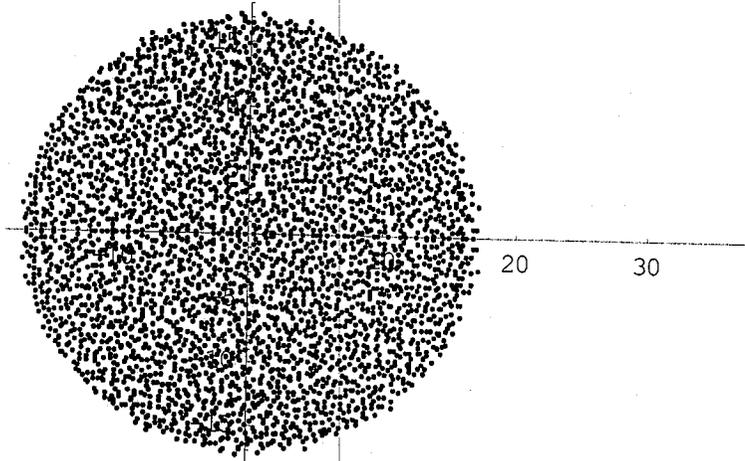


Fig. (6.5).distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 3500×3500 dans le plan complexe

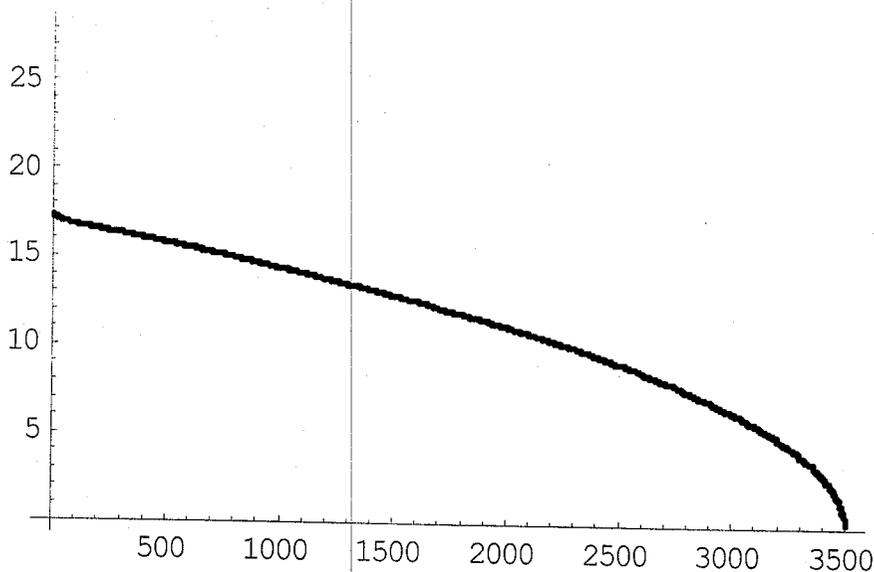


Fig. (7.5).représentation graphique des valeurs propres de cette matrice aléatoire en fonction de leurs valeurs absolues

```
Needs["Statistics`ContinuousDistributions`"]
RandomNormal[ $\mu$ _, $\sigma$ _]:=Random[NormalDistribution[ $\mu$ , $\sigma$ ]]
ar = Table[RandomNormal[1,1],{100},{100}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%],Im[%]}]]
Print["fig. (8.1) distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 100x100
(distribution normal)"]
```

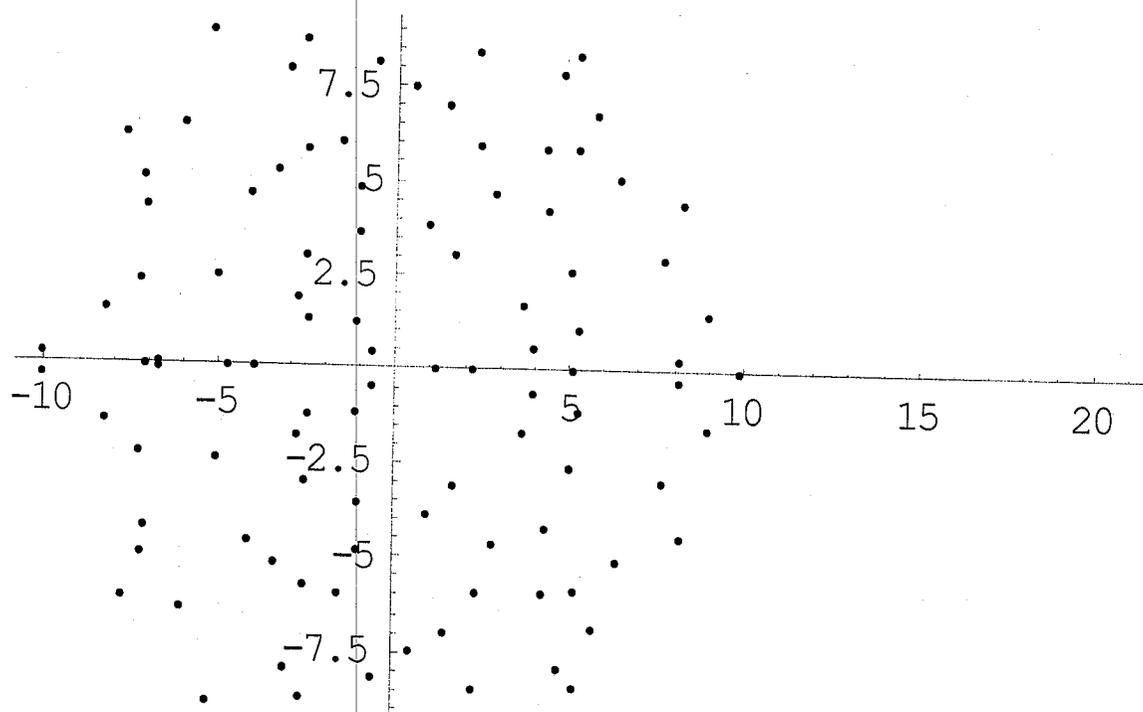


Fig. (8.1) distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 100x100 (distribution normal)

```
Needs["Statistics`ContinuousDistributions`"]
RandomNormal[ $\mu$ _, $\sigma$ _]:=Random[NormalDistribution[ $\mu$ , $\sigma$ ]]
ar = Table[RandomNormal[0.5,0.25],{1500},{1500}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%],Im[%]}]]
Print["fig. (8.2) distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 1500x1500
(distribution normal)"]
```

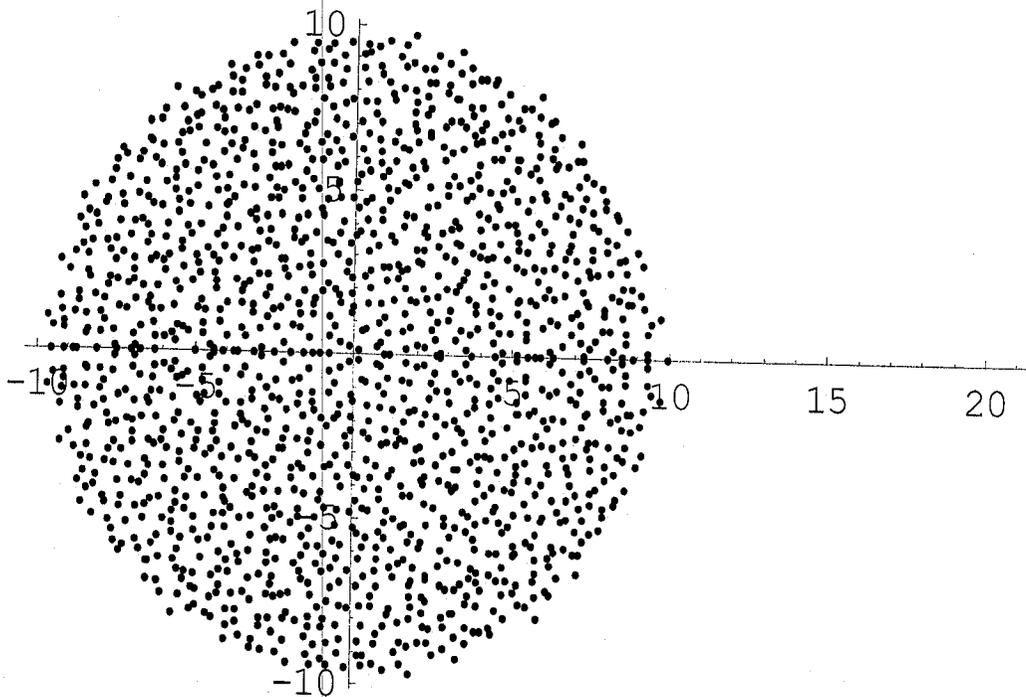


Fig. (8.2) distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 1500x1500 (distribution normal)

```
Needs["Statistics`ContinuousDistributions`"]
RandomNormal[μ_,σ_] := Random[NormalDistribution[μ,σ]]
ar = Table[RandomNormal[2,1.5],{3500},{3500}];
Eigenvalues[%];
ListPlot[Transpose[{Re[%],Im[%]}]]
Print["fig. (8.3) distribution des valeurs propres d'une
matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 3500×3500
(distribution normal)"]
```

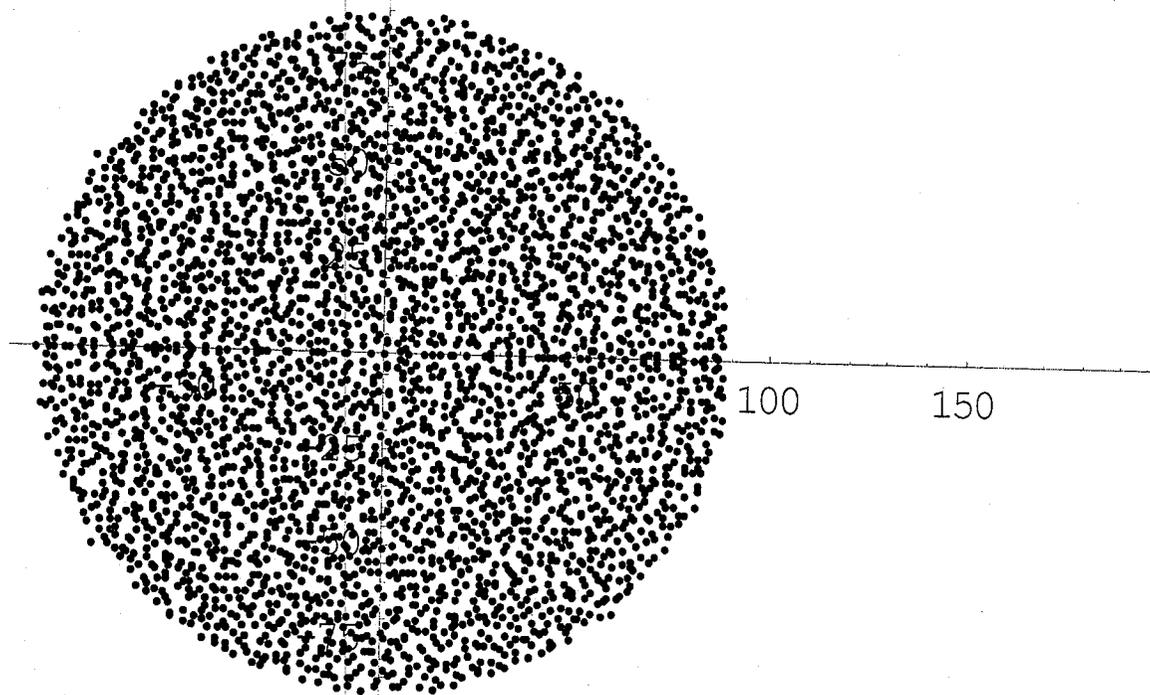


Fig. (8.3) distribution des valeurs propres d'une matrice réelle aléatoire non-symétrique de taille 3500×3500 (distribution normal)

CHAPITRE III :

APPLICATION DE LA  
THÉORIE DES MATRICES  
ALÉATOIRES AUX  
FLUCTUATIONS DE LA  
CONDUCTANCE DANS LES  
MÉTAUX DÉSORDONNÉE.

La théorie des matrices aléatoires a des applications physiques abondantes, allant de la physique nucléaire et atomique à la matière condensée, la physique statistique et la physique des hautes énergies et la gravité quantique, et continue de susciter beaucoup d'activités. Les travaux récents sur les matrices aléatoires revêtent un caractère plus analytique avec l'analyse des ensembles sans symétries particulières et des résultats difficiles sur l'universalité de leurs comportements ont été obtenus en mathématiques. La pertinence de la théorie des matrices aléatoires pour décrire les systèmes quantiques chaotiques et/ou désordonnés est maintenant bien établie. Des résultats marquants ont été obtenus sur les statistiques des valeurs extrêmes, dans différents ensembles plus ou moins conventionnels de matrices aléatoires. Beaucoup de phénomènes physiques étant gouvernés par des grandes fluctuations, cela pourrait se révéler fécond en physique statistique des événements rares ou loin de l'équilibre une autre direction très dynamique, liée aux grandes matrices, concerne les limites continues des applications fluctuantes. [8].

Dans ce chapitre nous illustrons l'un des succès de cette théorie (T.M.A) par une application au transport électronique dans les solides désordonnés, intitulée les fluctuations universelles de la conductance.

### **III.1. Les différents types de désordre :**

Les matériaux désordonnés qui se trouvent abondamment dans la nature dans les phases amorphes caractérisés par l'absence apparente de l'ordre, présentent différents types de désordre :

#### **III.1.1. Désordre structural ou spatial :**

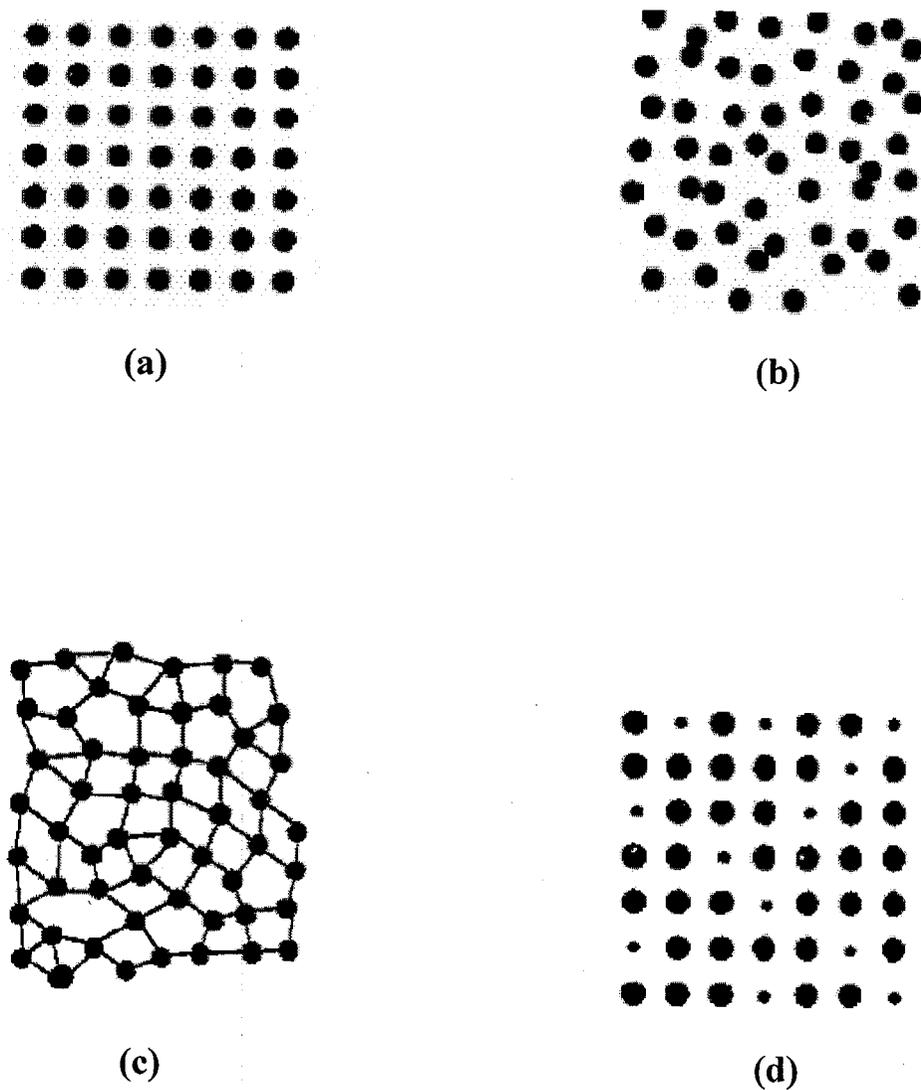
Dans ce cas de désordre, les atomes sont de même type mais disposés aléatoirement. Ce type de désordre est typique aux atomes en mouvement thermique aléatoire ou des matériaux amorphes.

#### **III.1.2. désordre topologique :**

Quand les atomes sont disposés aléatoirement sur des sites fixes et le nombre de plus proches voisins est constant.

#### **III.1.3. Désordre compositionnel :**

Dans ce cas de désordre, on a deux types d'atomes ou plus disposés sur des sites qui forment un arrangement régulier. [9].



**Fig. (9)** : Les différents types de désordre : (a) système ordonné, (b) désordre structural, (c) désordre topologique, (d) désordre compositionnel. [9].

### III.2. Définition de la conductance $G$ d'un échantillon :

La conductance est définie comme :

$$G = \frac{I}{V} \quad (\text{III} - 1)$$

Où  $I$  est l'intensité de courant parcourant l'échantillon et  $V$  la différence de potentiel aux bornes de cet échantillon. [5].

### III.3. Différence classes des échantillons :

Les physiciens sont habitués à traiter deux classes de systèmes en mécanique quantique :

**III.3.1. Les systèmes macroscopiques** qui sont décrits par un certain nombre de paramètres extensifs, où leurs propriétés sont souvent calculées en utilisant la limite thermodynamique (volume  $V$  du système et  $N$  nombre de particules tendent vers l'infini, avec :  $n = N/V$  est constant).

Généralement, les systèmes s'approchent de la limite macroscopique une fois que leurs tailles est plus grande devant certaine longueur de corrélation ( $\xi$ ). Dans la plus part des cas ( $\xi$ ) est de l'ordre d'une longueur microscopique.

On dit aussi qu'un système est macroscopique si l'espacement entre les niveaux d'énergie est très petit devant  $K_B T$  de tel sorte que les niveaux forment un continuum.

**III.3.2. Les systèmes microscopiques** où la longueur de l'échantillon est très inférieure devant la longueur de corrélation  $\xi$  ( $L \ll \xi$ ) et où les niveaux d'énergies sont discrets et leurs espacement est très grand devant  $K_B T$  ( $K_B T$  prise comme échelle d'énergie égale à  $25 \times 10^{-3}$  eV à température ambiante  $T = 300$  °K).

Ce pendant, il y a quelque années, il est devenue possible d'étudier expérimentalement des systèmes de l'état solide dont l'échelle est intermédiaire entre le monde macroscopique et le monde microscopique. Ces systèmes sont dits mésoscopiques, ils sont placés entre le macroscopique et le microscopique du fait que leurs niveaux d'énergie sont espacés d'une énergie de l'ordre de  $K_B T$ , leur taille géométrique est au dessus du microscopique et elle est de l'ordre de la longueur de corrélation  $\xi$ .

### III.4. Fluctuations dans le domaine macroscopique :

#### III.4.1. Origine des fluctuations macroscopiques à l'équilibre :

Les considérations de la mécanique statistique, éclairent que toute transformation spontanée dans un système isolé ne peut qu'augmenter son entropie c'est-à-dire de valeur le système vers un état plus probable (accroissement du désordre).

Tous les états macroscopiques différents se trouvent réalisés successivement en fonction du temps avec une fréquence proportionnelle à la probabilité  $w$  de chaque état. Cette probabilité est maximale pour l'état le plus probable. La théorie statistique fait prévoir dans l'évolution de l'ensemble en fonction du temps de faible écart par rapport à l'état le plus probable, ces écarts se sont les **FLUCTUATIONS**.

#### III.4.2. Fluctuation dans la limite macroscopique :

Lors d'une expérience, nous avons accès aisément aux caractéristiques macroscopiques de l'échantillon, mais nous ignorons en générale la configuration microscopique des impuretés que nous supposons donc disposées aléatoirement.

Pour les systèmes macroscopiques constitués d'un grand nombre de particules, le calcul des fluctuations est plus simple pour la raison suivante : la distribution de probabilité d'une variable macroscopique  $y$  est extrêmement piquée et les fluctuations autour de la valeur la plus probable  $\tilde{y}$  sont extrêmement faibles.

Par conséquent, toute mesure de la variable macroscopique  $y$  ne peut conduire qu'à la valeur la plus probable  $\tilde{y}$  qui ne peut, en fait être distinguée de la valeur moyenne  $\langle y \rangle$ . Toutefois, dans le cas d'une distribution symétrique, ces deux valeurs sont bien entendus égales.

En thermodynamique, les quantités que l'on mesure sont souvent les valeurs les plus probables mais les fluctuations sont si faibles qu'on ne peut que rarement voir une déviation appréciable de  $y$  autour de  $\tilde{y}$ .

Et donc pour un système macroscopique constitué d'un grand nombre de particules on peut noter pour une distribution relative à la variable  $y$  que le rapport entre l'écart type  $\Delta y$  ( $\Delta G$ ) et la valeur la plus probable  $\tilde{y}$  ( $G$ ) est égale à :

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{Voir appendices : Annexe 6}) \quad (\text{III} - 2)$$

Classiquement une mesure de conductance réalisée sur un échantillon précis donne la valeur moyenne  $\langle G \rangle$  avec une bonne probabilité. Si la taille de l'échantillon est assez grande. On dit que la conductance s'auto-moyenne quelque soit la dimension de l'échantillon.[4].

Ainsi en dimension de  $d$  pour un échantillon de taille lineaire, la fluctuation de la conductance est donnée par :

$$\Delta G \sim L^{\frac{d-4}{2}} \quad (\text{Voir appendices : Annexe 7}) \quad (\text{III - 3})$$

Ce qui signifie que les fluctuations de la conductance tendent classiquement vers zéro à toute dimension inferieure à 4 ( $d < 4$ ) comme la valeur moyenne de la conductance  $\langle G \rangle$  varie  $L^{d-2}$  on a le comportement de la fluctuation relative :

$$\frac{\Delta G}{\langle G \rangle} \sim L^{-d/2} \quad (\text{III - 4})$$

Cette auto moyennement de la conductance est due aux interférences quantique cohérentes entre les diverses trajectoires des électrons provenant des diffusions multiples des électrons de conductance par des impuretés.

Donc il faudra considérer aussi les autres moments c'est-à-dire toute la distribution de probabilité  $P(G)$  et non seulement  $\langle G \rangle$ .

Par conséquent ces effets d'interférence ne contribuent pas aux corrections quantiques de  $\langle G \rangle$ . Disparaissent-ils également lorsqu'on calcule la conduction d'un très long échantillon ?

La transmission à travers un long échantillon met en jeu un grand nombre de paramètres de telles interférences avec déphasage aléatoire, on pouvait penser naïvement quelles s'annuleraient mutuellement si  $L$  est assez grand  $G(L)$  tendrait pour  $L \gg 1$  vers une valeur  $G(L)$  commune aux différents configurations de même ensemble.

Du fait que les fluctuations à l'échelle macroscopique n'ont aucune importance physique considerable, les physiciens expérimentateurs se sont intéressés au domaine mésoscopique.

### III.5. Intérêt des physiciens au domaine mésoscopique :

Les physiciens se sont intéressés à l'étude de ce domaine pour ses caractéristiques pertinentes qui sont illustrées par des expériences récentes. Aussi, les physiciens s'intéressent à des systèmes détaillés "intermédiaire" pour comprendre comment la limite macroscopique est réalisée en construisant de grands amas.

Il y a aussi une raison fondamental dans l'étude de ces systèmes qui consiste à voir comment les principes de la mécanique quantique et la physique statistique s'applique dans ce domaine.

### III.6. Calcul de la fluctuation de la conductance dans un milieu mésoscopique :

En tenant compte des corrélations, Lee et Stone et indépendamment Al'tShuler. [10], ont montré ; que les interférences aléatoires induisent une correction significative à  $\langle G^2 \rangle$ . Le fait remarquable est que les fluctuations de la conductance dans un régime métallique (lorsque  $G \gg e^2/\hbar$ ) ont une amplitude universelle.

$$\Delta G \equiv \left\langle \left( G(L) - \overline{G(L)} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \sim \frac{e^2}{\hbar} \quad (\text{III} - 5)$$

Ainsi, l'universalité de  $\Delta G$  a été montrée par des calculs perturbatifs il restait néanmoins à en comprendre le fondement par une approche nouvelle macroscopique et statistique et que l'universalité  $\Delta G$  découle directement de l'application de la théorie des matrices aléatoires.

### III.7. Observation des fluctuations dans un système mésoscopique :

Diverses méthodes sont utilisées pour observer les variations de conductance induites par les effets d'interférences quantiques. Il s'agit de modifier d'un déphasage  $2\pi$  les interférences des marches au hasard qui traversent l'échantillon sans changer ses propriétés macroscopiques.

Les modèles théoriques suggèrent en général qu'on déplace les diffuseurs. On peut changer par conséquent la configuration microscopique.

Expérimentalement, il est difficile d'agir ainsi directement au niveau microscopique. Certes, on peut par diverses méthodes (irradiation ou simple action thermique) faire bouger ou modifier les centres diffuseurs mais on ne maîtrise pas assez précisément le processus pour le rendre reproductible par exemple.

On peut aussi appliquer un champ magnétique  $H$  variable ou faire varier les phases des électrons sans changer la configuration des diffuseurs.

Ce sont les méthodes les plus souvent utilisées par les expérimentateurs.

L'hypothèse ergodique consiste à supposer que toutes ces méthodes donnent les fluctuations de  $g$  de même ordre où  $g$  est la conductance en unité de  $e^2/\hbar$  :

$$g = \frac{G}{e^2 / \hbar} \quad (\text{Voir figure (10)})$$

On place l'échantillon dans un champ magnétique les phases sont modifiées par le potentiel vecteur de manière différente selon les trajectoires parcourues. Soit  $\Delta\varphi$  le déphasage induit par  $H$  entre deux trajectoires de même extrémité :

$$\Delta\varphi = 2 \pi \frac{e^2}{\hbar} H S$$

Où  $S$  est l'aire comprise entre deux trajectoires.

Lorsqu'on fait varier le champ magnétique, les interférences sont modifiées et la conductance aussi, on obtient ainsi expérimentalement la courbe  $g(H)$ .

Les fluctuations de  $g(H)$  sont parfaitement reproductibles pour un échantillon donné.

La seconde méthode d'observation de ces phénomènes d'interférence consiste à modifier le niveau de Fermi et donc l'énergie des électrons contribuant à la conductance en utilisant une structure M.D.S.

Pratiquement en faisant varier la tension de la grille on modifie l'énergie de Fermi du système et donc les interférences qui sont sensibles au vecteur d'onde  $K_F$  des électrons de la surface de Fermi. Ces mesures faites donnent pour  $G \gg e^2/\hbar$  une variance d'ordre  $e^2/\hbar$  indépendamment de  $\langle G \rangle$  comme le montre la figure (11).

### III.8. Caractéristiques de ces fluctuations :

Les systèmes mésoscopiques sont caractérisés par des fluctuations reproductibles c'est-à-dire que le signal qui caractérise ces fluctuations n'est pas un bruit aléatoire mais qu'il apparaît chaque fois qu'on réalise une mesure avec la même allure.

La propriété qui a été étudiée en détail est la fluctuation de conductance dans des petites structures en fonction du champ magnétique et d'autres paramètres :

Se sont des fluctuations qui diffèrent d'un échantillon à un autre même si ces échantillons ont une grandeur moyenne identique  $\langle G \rangle$  ; ces fluctuations de conductance sont les conséquences de la différence de configuration microscopique de deux systèmes mésoscopiques ayant les mêmes propriétés moyennes physiques.

Les fluctuations de la conductance sont de l'ordre de  $e^2/\hbar$  indépendamment de la taille de l'échantillon, dimensionnalité et du désordre c'est-à-dire qu'on a la même amplitude de fluctuation pour chaque échantillon.[4].

**Fig. (10) :** Ces trois courbes ont été obtenues par simulations numériques sur un réseau  $100 \times 10$  (modèle d'Anderson) avec un désordre  $w = 1$ .

- (a) :  $g$  pour 20 échantillons différant simplement par leurs configurations d'impuretés.
- (b) :  $g(h)$ , le champ magnétique  $H$  variant sur un intervalle de taille  $\approx 10 H_c$ , où  $H_c$  est le champ de corrélation.
- (c) :  $g(E_F)$ , l'énergie de fermi  $E_F$  variant sur un intervalle de taille  $\approx 10 E_c$  où  $E_c$  est l'énergie de corrélation.

**Fig. (11) :** Universalité des fluctuations de la conductance dans le régime métallique : l'ordre de grandeur des fluctuations est le même pour un fil d'or de conductance moyenne  $\bar{g} \sim 875$

- (a) : expérience de Webb et al. Pour un SI MOSFET de  $\bar{g} \sim 13$ .
- (b) : expérience de Skocpol et al. Pour un système de  $\bar{g} \sim 1$  modélisé par un hamiltonien d'Anderson.
- (c) : simulation numérique d'A.D.Stone. d'autres expériences réalisées sur GaAs, AuPd, Ag, Bi, Al, donnent le même résultat.

### III.9. Rapport entre fluctuations du nombre de Thouless et les fluctuations de la conductance :

Il s'agit de relier la conductance aux énergies propres de l'échantillon qui sont les valeurs propres de l'hamiltonien  $H$ .

Le nombre de Thouless  $N(E_c)$  est le nombre des niveaux d'énergie compris dans une bande d'énergie de largeur  $E_c$  tel que  $E_c$  apparaît comme un élargissement des niveaux de l'hamiltonien dû au principe d'incertitude c'est-à-dire  $E_c \tau \sim \hbar$ .

Avec :

$\tau$  : Le temps mis par un électron pour diffuser à travers l'échantillon de taille  $L$ .

$$\tau = L^2 / D \quad (\text{III} - 6)$$

$D$  : coefficient de diffusion.

Donc :

$$E_c = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar D}{L^2} \quad (\text{III} - 7)$$

Cet élargissement est un " effet de taille finie ", diminue lorsque  $L \rightarrow \infty$ .

Utilisant la relation d'Einstein qui donne la conductivité en coefficient de diffusion et la densité d'état :

$$\sigma = n e^2 D \quad (\text{III} - 8)$$

La conductance est reliée à la conductivité par la relation suivante :

$$G = \sigma L^{d-2} \quad (\text{Référence [11]}) \quad (\text{III} - 9)$$

$d$  : dimensionnalité de l'échantillon.

En remplaçant  $\sigma$  par sa valeur ci-dessus et  $D$  par  $D = \frac{E_c L^2}{\hbar}$

On trouve :

$$G = \frac{e^2}{\hbar} E_c L^2 \frac{L^{d-2}}{1/n}$$

$$G = \frac{e^2}{\hbar} \frac{E_c}{\frac{1}{n L^d}}$$

$$\Omega = L^d \text{ Volume}$$

Donc :

$n\Omega$  : le nombre de niveaux par unité d'énergie et où  $\frac{1}{n \Omega}$  représente l'espacement moyen entre les niveaux.

$$D = \frac{1}{n \Omega}$$

$$\Rightarrow G = \frac{e^2}{\hbar} \frac{E_c}{D} \quad (\text{III} - 10)$$

Et d'où la conductance en unité de  $\frac{e^2}{\hbar}$  est donnée par :

$$g = \left( \frac{G}{e^2 / \hbar} \right) = N(E_c) \quad (\text{III} - 11)$$

$N(E_c)$  : est le nombre de Thouless.

Dans cette approche, les fluctuations de la conductance sont causées par les fluctuations du nombre de Thouless  $\delta N(E_c)$  ceci nous permet d'utiliser la théorie des matrices aléatoires pour calculer ces fluctuations.

Donc :

$$\frac{\delta G}{G} \sim \frac{\delta N(E_c)}{N(E_c)} \quad (\text{III} - 12)$$

### III.10. Calcul des fluctuations de conductance G via la Théorie des Matrices Aléatoires (T. M. A) :

#### III.10.1. Absence de corrélation entre les niveaux énergétiques :

Dans ce cas la distribution de l'espacement S entre les niveaux consécutifs est poissonnière c'est-à-dire la fluctuation du nombre de niveau N dans n'importe quel intervalle du spectre est donnée par :  $\delta N = N^{1/2}$  particulièrement, pour un intervalle de longueur  $\delta E$ .

$$\delta N(\delta E) = [N(\delta E)]^{1/2} \quad (\text{III} - 13)$$

Et comme :

$$G = \frac{e^2}{\hbar} N(E)$$

Donc :

$$\delta G = \frac{e^2}{\hbar} [N(\delta E)]^{1/2} \gg \frac{e^2}{\hbar} \quad (\text{III} - 14)$$

De ce point de vue, les fluctuations de la conductance sont anormalement grandes.

Le fait que les fluctuations du nombre de niveaux  $N(\delta E)$  dans un intervalle de longueur  $\delta E$  sont petites comparées à  $\delta N = [N(\delta E)]^{1/2}$  indique qu'il doit avoir une répulsion entre les niveaux c'est-à-dire que le spectre énergétique doit avoir une rigidité spectrale.

#### III.10.2. Calcul des fluctuations de conductance G dans le cas où les niveaux énergétiques sont corrélés :

Dyson s'est intéressé à la modification de la fonction de distribution de l'espacement entre deux niveaux adjacents par les répulsions.

Cependant, il a donné importance au calcul des fluctuations du nombre de niveaux  $N(E)$  dans une bande d'énergie de largeur E, quand le nombre moyen des niveaux  $\langle N(E) \rangle$  dans cette bande est grand, donc il a montré que :

$$\langle \delta N(E) \rangle = \frac{2 K l^2}{\pi^2 \beta} \ln \langle N(E) \rangle \quad (\text{III} - 15)$$

Où  $\beta$  diffère d'un ensemble à un autre ( $\beta = 1$  pour l'ensemble orthogonal,  $\beta = 2$  pour l'ensemble unitaire,  $\beta = 4$  pour l'ensemble symplectique).

La quantité  $K$  est égale au nombre de séries non active des niveaux.

$L$  : est le nombre de dégénérescence.

Par suite on va démontrer quantitativement que  $\delta N(E)$  est une fonction logarithmique.

▪ **Démonstration :**

La fonction de corrélation de la densité d'état entre deux énergies différentes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  est donnée par :

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \langle \nu_{\varepsilon_1} \nu_{\varepsilon_2} \rangle - \langle \nu_{\varepsilon_1} \rangle \langle \nu_{\varepsilon_2} \rangle \quad (\text{III} - 16)$$

D'après la référence [11], on voit bien que la fonction  $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  dépend seulement de la différence  $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ .

En utilisant la théorie des matrices aléatoires et pour une grande séparation  $\varepsilon$ ,  $K$  varie

comme suit :

$$K(E) \sim - \frac{1}{\beta \pi^2 \varepsilon^2} \quad (\text{III} - 17)$$

La variance du nombre des niveaux est :

$$\langle \delta N^2(E) \rangle = \langle N^2(E) \rangle - \langle N(E) \rangle^2 \quad (\text{III} - 18)$$

Les fluctuations du nombre des niveaux dans une bande d'énergie de largeur  $E$  peuvent s'exprimer en fonction de  $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  par définition :

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle = \int_0^E \int_0^E d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (\text{III} - 19)$$

On va faire un changement de variables

En posant :  $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$$\alpha = \varepsilon_2$$

$$\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon$$

$$(III - 19) \Rightarrow \left\langle [\delta N(E)]^2 \right\rangle = \int_0^{E-\alpha} d\alpha \int_{-E}^E d\varepsilon K(\varepsilon)$$

$$\left\langle [\delta N(E)]^2 \right\rangle = \int_{-E}^E (E-\varepsilon) K(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\left\langle [\delta N(E)]^2 \right\rangle = \int_{-E}^E \frac{1}{\beta\pi^2} \frac{E-\varepsilon}{\varepsilon^2} d\varepsilon$$

$$\left\langle [\delta N(E)]^2 \right\rangle = \frac{2}{\beta\pi^2} \int_{-E}^E \frac{E-\varepsilon}{\varepsilon^2} d\varepsilon$$

D'après la référence (11) on trouve que :

$$\left\langle [\delta N(E)]^2 \right\rangle \sim \frac{2}{\beta\pi^2} \ln E \quad (III - 20)$$

En unité de l'espacement moyen on a :

$$\left\langle [\delta N(E)]^2 \right\rangle \sim \frac{2}{\beta\pi^2} \ln \frac{E}{D} \ll N^{1/2}(E) \quad (III - 21)$$

Dans le régime métallique ( $g \gg 1$ ) on a  $\frac{E}{D} \sim 1$

Avec :

D : l'espacement moyen.

Et donc :

$$\delta E \sim \delta D \Rightarrow \delta N(E) \sim 1 \quad (III - 22)$$

Et on sait que :

$$\delta G = \frac{e^2}{\hbar} \delta N(E)$$

Alors :

$$\delta G \sim \frac{e^2}{\hbar}$$

(III - 23)

**Ce résultat coïncide avec le résultat expérimental.**

# CONCLUSION

## Conclusion

L'un des intérêts de la mécanique statistique est de comprendre comment les propriétés des corps à l'échelle macroscopique peuvent s'expliquer à partir de celles de leurs constituants microscopiques (atomes, molécules, ...).

Cette étude n'est plus applicable pour les systèmes complexes et surtout pour les milieux désordonnés à cause des difficultés présentées par la formation de leur hamiltonien. D'où l'appel d'une nouvelle théorie : **THÉORIE DES MATRICES ALÉATOIRES.**

Puisque la théorie des matrices aléatoires est indépendante des détails microscopiques des systèmes, on prévoit qu'elle soit applicable à d'autres systèmes complexes (systèmes chaotiques, ....). C'est de la qu'on peut conclure qu'elle a un caractère universel.

Le résultat important de l'application de cette théorie au transport électronique se situe dans l'universalité des fluctuations de la conductance dans les milieux mésoscopiques qui sont de l'ordre de :

$$\left( \frac{e^2}{\hbar} \right)$$

**RÉFÉRENCES**

**BIBLIOGRAPHIQUES**

## Références bibliographiques

[1]...Céline NADAL

Thèse de doctorat (publiée) de l'université paris-sud XI sur :  
Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et physique  
quantique.

Soutenu le 21 juin 2011.

[2]...M. Rémi PEYRE

Quelques problèmes d'inspiration physique en théorie des probabilités  
thèse de doctorat présentée et soutenue publiquement le 12 novembre 2010  
Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon.

[3]...techniques spectroscopiques et nucléaires : diagrammes énergétiques et  
spectre des atomes.

Mesures Physiques Annecy – MPh2 SE3 ME3 – 2011 – Philippe Galez  
Techniques spectroscopiques d'analyse / Spectres des atomes

[4]...mémoire intitulé :

théorie des matrices aléatoires : application au transport quantique dans les  
solides. Soutenu en 1997 sous l'encadrement de Mr Houari Ahmed.

[5]... Gilles Montambaux

Conduction quantique et Physique mésoscopique  
[users.lps.u-psud.fr/montambaux](http://users.lps.u-psud.fr/montambaux). 4 janvier 2012  
[www.lps.u-psud.fr/users/gilles](http://www.lps.u-psud.fr/users/gilles).

[6]... Strasbourg, journée de la SMF (22 Octobre 2005) : Quelques  
propriétés des matrices aléatoires en mathématiques et en physique.

[7]... Julien Toulouse

LC209 - TP1 : Introduction à Mathematica.  
UPMC, Paris.

[8]...Robert GARRIGOS

de la physique avec mathematica.  
Groupe de Boeck s.a. 2009 Bruxelles

[9]...Théories Physiques: Méthodes, Modèles et Applications (section 02)  
Rapport de conjoncture 2010.

Présidente de la section : Claire Lhuillier.

[10]... Melle DJERABA Aicha

Etude des phénomènes de transport dans les systèmes bidimensionnels  
quantiques.

Thèse de doctorat présentée et soutenue publiquement le 12 mai 2010.

Universités des sciences et de la technologie d'Oran « Mohamed Boudiaf ».

[11]...El al'tshuler and B.I. shklovskii

Repulsion of levels and conductivity of small metal samples.

B.P. konstantinov institute of nuclear physics, academy of sciences of the  
USSR, Leningrad (submitted 22 january 1986), Zh. Eksp. Teor. Fiz. 91,220-  
234 (July 1986).

[12]...N. Zanon

théorie des matrices de transfert aléatoires application à l'étude de la  
conductance d'un système désordonné en régime quantique cohérent (thèse  
non publiée) soutenue le 06 octobre 1989.

[13]... Hervé kunz

matrices aléatoires en physique. Première édition, 1998.

Presse polytechniques et universitaires ramandes. CH – 1015 Lausanne.

[14]... J. L. Pichard

Random transfert matrix treadyand conductance fluctuation. Phy.

Rev. (April 1990)

[15]... Y. Velenik

Chapitres Choisis de Théorie des Probabilités - Version du 14 mai 2010 -

Dernière version téléchargeable a l'adresse

<http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html>

# APPENDICES

## Annexe 1

### Distribution de Poisson

Considérons le problème d'une source radioactive qui émet des particules de radiation, lors de la désintégration, à des instants aléatoires. Soit  $\lambda$  la probabilité d'une émission par unité de temps. Calculons la distribution du nombre de particules émises dans un intervalle de temps de longueur  $t$ . Cette distribution est appelée **la distribution de poisson**.

**Nous commençons par la définition suivante :**

La probabilité pour que  $n$  particules seraient émises à l'instant  $t+\delta t$  est donnée par la probabilité pour que  $n$  soient émises à l'instant  $t$  et aucune dans l'intervalle infinitésimal  $\delta t$  juste après, plus la probabilité pour que  $(n-1)$  seraient émises à l'instant  $t$ , et une particule émise dans l'intervalle qui suit  $\delta t$ .

$\lambda\delta t$  : étant la probabilité d'émission d'une particule pendant  $\delta t$  d'où  $1-\lambda\delta t$  : étant la probabilité de non émission d'une particule pendant  $\delta t$ .

La formulation mathématique de la définition est :

$$P_n(t + \delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\delta t$$

C'est-à-dire :

$$P_n(t + \delta t) - P_n(t) = -\lambda\delta t P_n(t) + P_{n-1}(t)\lambda\delta t$$

Divisons par  $\delta t$  et prenons  $\delta t \rightarrow 0$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Donnons à  $n$  toutes les valeurs possibles,  $n=0, 1, 2, \dots$ , nous avons une chaîne d'équations couplées qui peuvent être résolues en introduisant la fonction caractéristique :

$$F(x, t) = \sum_n P_n(t) x^n$$

Multiplions l'équation  $\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$  par  $x^n$  et additionnons les équations pour tous les  $n$  possibles, nous aurons :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_n P_n(t) x^n \right) = -\lambda \sum_n P_n(t) x^n + \lambda \sum_n P_{n-1}(t) x^n$$

$$\frac{d}{dt} F(x, t) = -\lambda F(x, t) + \lambda x F(x, t)$$

$$\frac{d}{dt} F(x, t) = -\lambda(1-x) F(x, t)$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial F(x, t)}{F(x, t)} = -\lambda(1-x) dt \Rightarrow F(x, t) = C(x) e^{-\lambda(1-x)t}$$

Ou :

$$C(x) = F(x, 0) = F_0(x)$$

$$F(x, t) = F_0(x) e^{-\lambda(1-x)t}$$

Détermination de  $F_0(x)$  :

Sachons que à  $t = 0$ , on a encore aucune particule émise c'est-à-dire  $n = 0$  et par conséquent

$$P_0 = 1 \text{ Et } P_n = 0 \text{ pour tous les autres } n = 1, 2, \dots$$

Donc :

$$F_0(x) = F(x, 0) = \sum_n P_n(t) x^n = P_0(t) = 1$$

D'où :

$$F(x, t) = e^{-\lambda(1-x)t}$$

Les  $P_n$  peuvent être obtenues en développant  $F(x, t)$  en puissance de  $x$  :

$$F(x, t) = \sum_n P_n(t) x^n = e^{-\lambda} \sum_n \frac{(\lambda t)^n}{n!} x^n$$

C'est-à-dire :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad \text{Qui est la distribution de poisson.}$$

La valeur moyenne de  $n$  à l'instant  $t$  est :

$$\langle n \rangle = \sum_n n P_n(t) = \left[ \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right]_{x=1}$$

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = \lambda t e^{-\lambda(1-x)t}$$

$$\langle n \rangle = \lambda t$$

La déviation moyenne :  $\Delta n$  est donnée par :

$$(\Delta n)^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$$

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

$$(\Delta n)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=1} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=1} - \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=1} \right]^2$$

$$(\Delta n)^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2$$

$$(\Delta n)^2 = \lambda t$$

C'est-à-dire :

$$\Delta n = \sqrt{\lambda t} = \langle n \rangle^{1/2}$$

Notons ici que les fluctuations relatives du nombre  $n$  mesurées par :

$$\frac{\Delta n}{\langle n \rangle} = \frac{1}{\langle n \rangle^{1/2}}$$

Qui est aussi le résultat des fluctuations relatives d'une grandeur thermodynamique.

## Annexe 2

### Définition de la fonction zêta de Riemann

Dans le corps des complexes, la fonction zêta de Riemann  $\xi(z)$  est définie pour l'argument  $z = x + iy$  avec  $x > 1$ , c'est-à-dire dans le demi-plan ( $x > 1$ ) comme :

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

$\xi(z)$  Peut aussi s'écrire comme un produit infini de termes de la forme :

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^z} \text{ ou } p \text{ est un nombre premier, c'est-à-dire : } \xi(z) = \prod_p \left(1 - p^{-z}\right)^{-1}$$

## Annexe 3

## Analyse de la répulsion des niveaux

Cas simple : matrice  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad (H_{12} = H_{21})$$

Calcul des valeurs propres de H :

Pour cela il faut que le déterminant soit nul.

$$\text{Det}(H - E1) = 0$$

$$\Rightarrow |H - E1| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} H_{11} - E & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} - E \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (H_{11} - E)(H_{22} - E) - H_{12}^2 = 0$$

$$\Rightarrow H_{11}H_{22} - E(H_{11} + H_{22}) + E^2 - H_{12}^2 = 0$$

$$\Rightarrow E^2 - E(H_{11} + H_{22}) + H_{11}H_{22} - H_{12}^2 = 0$$

$$\Delta = (H_{11} + H_{22})^2 - 4(H_{11}H_{22} - H_{12}^2)$$

$$\Delta = (H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2$$

$$E_1 = \frac{H_{11} + H_{22} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$E_2 = \frac{H_{11} + H_{22} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$E_1 + E_2 = H_{11} + H_{22}$$

$$E_1 - E_2 = \left[ (H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2 \right]^{1/2}$$

Calcul de  $P_2(E_1, E_2)$  :

$$P_2(E_1, E_2) = \iiint \delta \left\{ (E_1 - E_2) - \left[ (H_{11} - H_{22})^2 + H_{12}^2 \right] \right\} f(H_{11}) f(H_{22}) f(H_{12}) dH_{11} dH_{22} dH_{12}$$

$$I_1 = \int f(H_{12}) \delta \left\{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \left[ (H_{11} - H_{22})^2 + H_{12}^2 \right]^{1/2} \right\} dH_{12}$$

On pose :

$$a^2 = (H_{11} - H_{22})^2$$

$$H_{12}^2 + a^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{H_{12}^2 + a^2} \quad y > 0$$

$$H_{12} = \sqrt{y^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow dH_{12} = \frac{y \, dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

On sait que :

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$I_1 = \int \frac{f \left( \pm \sqrt{|E_1 - E_2|^2 - a^2} \right)}{\sqrt{|E_1 - E_2|^2 - a^2}} \delta \left( y - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right) dy$$

$$P_2(E_1, E_2) = |E_1 - E_2| \iint f(H_{11}) f(H_{22}) \frac{f \left( \pm \sqrt{|E_1 - E_2|^2 - (H_{11} - H_{22})^2} \right)}{\sqrt{|E_1 - E_2|^2 - (H_{11} - H_{22})^2}} \times \\ \times \delta \left( H_{11} + H_{22} - (E_1 + E_2) \right) dH_{11} dH_{22}$$

Noter :

$$f(H_{11}) f(H_{22}) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} H_0} \right)^2 e^{-\frac{(H_{11}^2 + H_{22}^2)}{2H_0^2}}$$

$$f \left( \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 - (H_{11} - H_{22})^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi} H_0} \exp \left( -\frac{(E_1 - E_2)^2 - (H_{11} - H_{22})^2}{2H_0^2} \right)$$

D'où :

$$f(H_{11})f(H_{22})\left(\pm\sqrt{(E_1-E_2)^2(H_{11}-H_{22})^2}\right) \equiv \frac{1}{(\sqrt{\pi}H_0)^3} e^{\left(-\frac{(E_1-E_2)^2}{2H_0^2}\right)} e^{-\frac{H_{11}H_{22}}{H_0^2}}$$

$$P_2(E_1, E_2) = |E_1 - E_2| \frac{1}{(\sqrt{\pi}H_0)^3} e^{\left(-\frac{(E_1-E_2)^2}{2H_0^2}\right)} \iint \frac{e^{-\frac{(H_{11}H_{22})^2}{H_0^2}}}{\sqrt{|E_1 - E_2|^2 - (H_{11} - H_{22})^2}} \times \\ \times \delta(H_{22} - (E_1 + E_2 - H_{11})) dH_{11} dH_{22}$$

$$|E_1 - E_2| \ll H_0 \Rightarrow \frac{|E_1 - E_2|^2}{H_0^2} \ll 1$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{(E_1-E_2)^2}{2H_0^2}} \sim 1$$

$$P_2(E_1, E_2) \sim \frac{|E_1 - E_2|^2}{H_0^3} \iint \frac{e^{-\frac{H_{11}H_{22}}{H_0^2}}}{\sqrt{|E_1 - E_2|^2 - (H_{11} - H_{22})^2}} \delta(H_{22} - (E_1 + E_2 - H_{11})) dH_{11} dH_{22}$$

$$I_2 = \int \left[ \int \frac{e^{-\frac{H_{11}H_{22}}{H_0^2}}}{\sqrt{(E_1 - E_2)^2 - (H_{11} - H_{22})^2}} \delta(H_{22} - (E_1 + E_2 - H_{11})) dH_{22} \right] dH_{11}$$

$$I_2 = \int \frac{e^{-\frac{H_{11}(E_1+E_2-H_{11})}{H_0^2}}}{\sqrt{(E_1 - E_2)^2 - (H_{11} + H_{11} - E_1 - E_2)^2}} dH_{11}$$

Si  $E_1 > E_2$  :

$$\sqrt{(E_1 - E_2)^2 - (2H_{11} - E_1 - E_2)^2} = \sqrt{(E_1 - E_2 + 2H_{11} - E_1 - E_2)(E_1 - E_2 - 2H_{11} + E_2 + E_1)}$$

$$= 2\sqrt{(H_{11} - E_2)(E_1 - H_{11})}$$

$$(H_{11} - E_2)(E_1 - H_{11}) > 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} H_{11} - E_2 < 0 \\ E_1 - H_{11} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{11} < E_2 \\ E_1 < H_{11} \end{cases} \Rightarrow E_1 < H_{11} < E_2$$

$$I_2 = \int_{E_2}^{E_1} \frac{e^{-H_{11} \left( \frac{E_1 + E_2 - H_{11}}{H_0^2} \right)}}{\sqrt{-H_{11}^2 + (E_1 - E_2)H_{11} - E_1 E_2}} dH_{11}$$

On pose  $A = E_1 + E_2$

$$I_2 = \int_{E_2}^{E_1} \frac{e^{-H_{11} \left( \frac{A - H_{11}}{H_0^2} \right)}}{\sqrt{-H_{11}^2 + AH_{11} - E_1 E_2}} dH_{11}$$

Pour simplifier les calculs on prend :  $A = 0$  et  $E_1 = E_2 = 1$  ; on obtient donc :

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{e^{\left( \frac{H_{11}^2}{H_0^2} \right)}}{\sqrt{1 - H_{11}^2}} dH_{11}$$

En calculant cette intégrale numériquement (méthode de Simson), on trouve qu'elle est finie,

Donc :

$$P_2(E_1, E_2) \sim \frac{|E_1 - E_2|}{H_0^3}$$



## Annexe 4

Résolution de l'équation  $P(x) = U_{10} \int_x^\infty P(x') dx'$ 

La probabilité que l'espacement entre niveaux soit plus large que S est :

$$P(x) = U_{10} \int_x^\infty P(x') dx'$$

On pose que :

$$\int_x^\infty P(x') dx' = Y(x)$$

Ou :

$$Y'(x) = P(\infty) - P(x)$$

D'autre part :

$$P(\infty) = 0$$

Mais un système physique a toujours une énergie finie, donc on a :

$$-Y'(x) = \mu(x) Y(x)$$

$$\frac{Y'(x)}{Y(x)} = -\mu(x)$$

Après intégration, on trouve :

$$\ln Y(x) = -\int \mu(x) dx$$

Alors :

$$Y(x) = C e^{-\int_x^\infty \mu(x') dx'}$$

Enfin on trouve la solution de la forme suivante :

$$P(x) = C \mu(x) e^{-\int \mu(x') dx'}$$

## Annexe 5

## Distribution de Rayleigh

Considérons un point dans le plan de coordonnées  $(x, y)$  .prenons  $x$  et  $y$  comme deux variables aléatoires normalement distribuées avec une moyenne nulle :

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0 \quad \text{et avec une variance commune :}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{2}{\pi}$$

Explicitement, les densités de probabilités des variables  $x$  et  $y$  sont données par :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{4}x^2}$$

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{4}y^2}$$

Maintenant, intéressons-nous à la densité de probabilité  $P(r)$  du rayon :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La probabilité pour que le rayon du vecteur de coordonnées  $(x, y)$  dans le plan soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$  et la variable  $y$  soit comprise entre  $y$  et  $y + dy$  est la probabilité pour que le Point  $M(x, y)$  ; appartienne du rectangle de surface  $dx \, dy$

$$d^2P = P(x)P(y) \, dx \, dy$$

$$d^2P = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

En coordonnées polaires, l'élément de surface

$$dS = dx \, dy = J \, dr \, d\theta$$

Où  $J$  est le Jacobien de la transformation  $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

C'est-à-dire :

$$d^2P = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}r^2} r dr d\theta$$

$d^2P$  Est aussi la probabilité pour que le rayon :  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  soit compris entre  $r$  et  $r + dr$  mais uniquement dans le secteur compris entre  $\theta$  et  $d\theta$ , d'où :

$$P(r)dr = \int_{\theta=0}^{2\pi} d^2P = 2\pi \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}r^2} r dr$$

Finalement, la densité de probabilité  $P(r)$  est :

$$P = \frac{\pi}{2} r e^{-\frac{\pi}{4}r^2}$$

Qui coïncide avec la distribution de Wigner.

## Annexe 6

## Théorème de fluctuation – dissipation

Fluctuation de la conductance :

Considérons la fluctuation de la conductance dans un système à nombre de particules fixe infini dans un volume déterminé  $V$ .

La fluctuation de densité est donnée par :

$$\langle \Delta N^2 \rangle = -\frac{TN^2}{V^2} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle = T \left( \frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

Sachant que :

$$\langle N \rangle = e^{\frac{\Omega}{T}} \sum_N N e^{\frac{N\mu}{T}} \sum e^{-\frac{E}{T}}$$

Et :

$$\frac{d\Omega}{d\mu} = -\langle N \rangle$$

Pour un gaz idéal :

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} = N^{-1}$$

La conductivité  $\sigma$  est donnée par :

$$\sigma = n.e.v$$

Avec :  $v$  : vitesse

$$\Rightarrow \langle \sigma^2 \rangle = N . e . v \langle n^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \Delta \sigma N \left( \langle n^2 \rangle \right)^{1/2} N^{-1/2}$$

$$\langle \Delta V \rangle^2 = k_B T V K_T \quad \text{Avec} \quad K_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Théorème de fluctuation dissipation :

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle \frac{KT}{v} K_T$$

Et :

$$v = V / N$$

D'où :

$$K_T = \frac{1}{v (-\partial P / \partial V)}$$

$$(PVNT) \Rightarrow V \sim \frac{T}{P} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{T}{P^2}$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{TN^2}{V^2} \cdot \frac{T}{P^2}$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle = N^2 \cdot \frac{T^2}{V^2 P^2} = N^2 \dots \dots (P^2 V^2 N^2 T^2)$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle \sim N^2$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle = -k_B T \frac{\partial V}{\partial P} = k_B T V K_T$$

$$\left\langle \Delta \left( \frac{V}{N} \right)^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{N^2} V K_T$$

Or :

$$\Delta \left( \frac{V}{N} \right) = V \Delta \left( \frac{1}{N} \right) = -\frac{V}{N^2} \Delta W \quad (\text{puisque } N \text{ est constant})$$

$$\frac{V^2}{N^2} \langle \Delta N^2 \rangle = \frac{k_B T}{N^2} V K_T \Rightarrow \langle \Delta N^2 \rangle = -\frac{k_B T}{V} N^2 K_T$$

$$\frac{V^2}{N^2} \langle \Delta N^2 \rangle = -k_B T \frac{N^2}{V^2} \frac{\partial V}{\partial P}$$

Or :

$$PV = nRT = Nk_B$$

Donc :

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{P^2} Nk_B$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{N^2} \langle \Delta N^2 \rangle = k_B T \frac{N^2}{V^2} \frac{1}{P^2} Nk_B$$

$$\left\langle \frac{\Delta N^2}{V^2} \right\rangle = \frac{N}{V^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \left( \frac{N^2}{V^2} \right) = \frac{N}{V^2}$$

$$\sigma = n e v$$

$$\Rightarrow \langle \Delta \sigma^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle - \langle \sigma \rangle^2$$

$$\langle \Delta \sigma^2 \rangle = e v \left( \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \right)$$

$$\langle \Delta \sigma^2 \rangle = e v \langle \Delta n^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \Delta \sigma^2 \rangle \sim e v \frac{N}{V^2}$$

$$\Delta \sigma \sim e v \frac{N^{1/2}}{V} \Rightarrow \frac{\Delta \sigma^2}{\sigma^2} = V \frac{N^{1/2}}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2} \sim N^{-1/2}$$

Puisque :

$$G = \sigma \frac{S}{L} \quad (S, L \text{ constants})$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta G}{G} \sim N^{-1/2}$$

## Annexe 7

## Comportement de l'erreur relative de conductance

Nous considérons un échantillon désordonné comme une série de  $L$  résistance aléatoire  $r_i$ , nous obtenons par les lois classiques d'association de résistance en série :

$$R = \sum_{i=1}^L r_i$$

Le théorème de la limite centrale assure l'absence de corrélations entre les  $r_i$ .

En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} R \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \langle R \rangle = L\bar{r} \\ \text{Var } R = \langle (R - \bar{R})^2 \rangle \xrightarrow{L \rightarrow \infty} L (r - \bar{r})^2 \end{array} \right.$$

La fluctuation de la résistance  $\Delta R = \sqrt{\text{Var } R}$  est donc d'ordre  $\sqrt{L}$  quand la longueur  $L$  de l'échantillon est assez grande.

Passons à la conductance  $G = \frac{1}{R}$

$$\Delta G = \frac{1}{\langle R \rangle^2} \Delta R$$

$\langle R \rangle \sim L$  implique  $\Delta R \sim L^{3/2}$  et par suite  $\frac{\Delta G}{\langle G \rangle} \sim L^{-1/2}$  ainsi la fluctuation relative de  $G$  décroît et tend vers 0 quand  $L$  croît.

De même, en dimension quelconque  $d$ , pour un échantillon de taille  $L^d$  :

$$\Delta G \sim L^{\frac{d-4}{2}}$$

Et donc :

$$\frac{\Delta G}{\langle G \rangle} \sim L^{-d/2}$$

## Résumé :

Ce mémoire est consacré à l'étude des matrices aléatoires et d'une de leurs nombreuses applications en physique.

Dans le chapitre I, nous introduisons quelques notions qui sont reliées au thème du mémoire, dans le chapitre II, nous nous concentrerons sur l'approche des matrices aléatoires proprement dite, réalisation numériquement d'un résultat théorique de la littérature. Dans le chapitre III, nous illustrons cette approche par une application au transport électronique quantique dans les solides désordonnés. Enfin, nous concluons notre étude.

Mots clés : matrice, aléatoire, désordre, Wigner, fluctuation, conductance.

## ملخص :

هذه الأطروحة مكرسة لدراسة المصفوفات العشوائية وواحدة من تطبيقاتها الكثيرة في مجال الفيزياء. في الفصل الأول، نقدم بعض المفاهيم التي تتعلق بموضوع الأطروحة، في الفصل الثاني، سوف نركز على مفهوم مصفوفة عشوائية، نتحقق رقمياً من نتيجة نظرية. في الفصل الثالث، نقوم بتوضيح هذا المفهوم من قبل تطبيق النقل الإلكتروني الكمي في المواد الصلبة الغير مرتبة. في النهاية، نخلص دراستنا. كلمات البحث: مصفوفة، اضطراب، عشوائي، فيجتر، تصرف، عدم استقرار.

## Abstract :

This thesis is devoted to the study of random matrices and one of their many applications in physics.

In Chapter I, we introduce some concepts that are related to the theme of memory, in Chapter II, we will focus on the random matrix, numerical realization of a theoretical result of the literature. In Chapter III, we illustrate this approach by application to quantum electronic transport in disordered solids. At last, we conclude our study.

Keywords: matrix, random, disorder, Wigner, fluctuation conductance.