Remerciements

Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.
Mes profonds remerciements à mes premiers fans,mes parents pour leur soutien quotidien infaillible,merci à leur enthousiasme débordant qui a été pour moi pilier fondateur de mon action, sans eux je n'aurais jamais pu réaliser se travail.
j'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur Mr BOUGUIMA Sidi Mohammed pour son soutien inoubliable et Je le remercie encore pour le sujet qu'il m'a proposé et pour son suivi permanent enrichi de beaucoup d'encouragement,ses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu.
Mes remerciements ainsi sincère que profondes s'adressent au Mr MEBKHOUT Benmiloud .Je le remercie encore une fois pour son soutien tout au long de mon cursus universitaire (en licence et en master), sans oublier Mr YEBDRI Mustapha mon professeur et responsable de la formation master qui est parmi les gens qui m'ont suivi pendant mes études,mes remercies aussi à tous mes professeurs qui m'ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.
Un grand merci aussi à tous mes collègues de l'option master Equation Différentielle Ordinaire.
Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribués d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Hellal Meriem,

Dedicace

Je dédie ce mémoire :
A mes très chèrs parents.
A mes chères soeurs : Haféda et Khaoula.
A mon frére :Mohammed Yacine.
A toute ma famille,mes
cousines :Ilhem,Ismahen,Nabahat,Amina,fouzia,Halima,Hassiba,Ghania
sans oublier les petits poussins : Mohammed El Amine, Naima, Kaoutar,
Adem, Amine, Fouzi et Charaf.
A toutes mes amies surtout :Naima et Farida.
A mes collégues : Attar Ahmed, Charif, Hamra, Marrakchi.
A tous mes enseignants.

Hellal meriem

Notations

Par soucis de lisibilité, on a besoin des notations suivantes

- $\mathbb{R}$: Corps des nombres réels
- $\mathbb{R}^+$: Corps des nombres réels qui ne sont pas négatifs
- $\mathbb{R}^n$: Espace des vecteurs à n entrées réelles
- $[a, b]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
- $]a, b[$: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
- $[a, b[$ ou $[a, b)$: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
- $|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
- $\| \, . \, \|$: norme sur $\mathbb{R}^n$.
- e^x : fonction exponentielle de x.
- max : fonction maximum.
- $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$: L'espace de Banach des fonctions vectorielles définies sur $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de la convergence uniforme
- U un domaine ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
- $x' = \frac{dx}{dt}$:dérivée de la variable x par rapport au temps t .
- $C(U)$: l'espace des fonctions continues sur U.
- $C^k(U)$: l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur G,$(k \in \mathbb{N})$
- $L^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable et il existe } C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } U\}$, dont la norme
  est : $\|u\|_{L^\infty(U)} = \inf\{c;\ |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } U\}$.

Table des matières

Introduction

Les équations à retard jouent un rôle cruciale dans la modélisation de nombreux domaines comme la biologie ou la physique, citons un exemple :

Equation de Mackey-Glass : Cette équation a été utilisée par Mackey et Glass [*1*] pour décrire la production des globules blancs. La densité de ces dernières en circulation dans le sang est notée $y(t)$. Ces cellules sont détruites avec un taux γ. Le taux maximal de production est noté σ, et n désigne la sensibilité du taux de production. Enfin, τ décrit le temps nécessaire à la production effective des globules blancs au temps t en réponse à une demande (effectuée au temps t-τ). Il s'agit d'une équation différentielle à retard discret

$$y'(t) = \gamma y(t) + \sigma \frac{y(t-\tau)}{1 + y^n(t-\tau)}$$

Nous renvoyons le lecteur pour plus de détails à la référence [*8*].

Le mémoire est organisé comme suit : dans le chapitre 1 on va donner quelques définitions et les notions qui seront utiles dans la suite. dans le chapitre 2, on formule le modèle de population juvénile-adulte avec retard.Le Chapitre 3, on donne des conditions suffisantes pour assurer la stabilité locale de l'équilibre positif ainsi que la stabilité globale de l'équilibre trivial. Nous montrons aussi que, sous certaines conditions, le modèle subit une bifurcation de Hopf. Enfin dans la section 4 nous donnons une conclusion avec une interprétation biologique des résultats obtenus .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre,nous rappellons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

1.1 Equations différentielles

1.1.1 Equations différentielles ordinaires :

Définitions :[*14*]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$une fonction continue.

Définition 1.1.1

Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur U est une relation du type

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

où $x' = dx/dt$.

Définition 1.1.2.

Soit x une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. *La fonction x est dite solution de l'équation* (1.1)*sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, et si x satisfait la relation* (1.1) *sur I.*

2. *Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné. La fonction x est dite solution du problème à valeur initiale associé à l'équation* (1.1) *s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x soit solution de l'équation* (1.1) *sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.*

Remarque 1.1.1.

Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, un problème à valeur initiale associée à l'équation (1.1) *est généralement exprimée sous l'écriture suivante :*

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

et une solution de (1.2) *est également dite solution de l'équation* (1.1) *à valeur initiale x_0 à l'instant initial t_0 (ou encore, de condition initiale (t_0, x_0)).*

Définition 1.1.3.

Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème (1.2) *est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.*

Proposition 1.1.1. [*6*]

Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) *est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.3.

l'équation intégrale (1.3) *est souvent utilisée au lieu du problème* (1.2), *par exemple dans les preuves de résultats d'existence, d'unicité de la solution.*

1.1.2 Existence et unicité de solution

Théorème 1.1.2 (*Existence*).[*6*]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.

Définition 1.1.4 [*5*]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction.

On dit que $f = f(t,x)$ est localement lipschitzienne en x si pour tout fermé et borné (c-à-d. compact)K dans U, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

pour tous (t,x_1) et (t,x_2) dans K

Théorème 1.1.4 (*Unicité*). [*6*]

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .Si $f = f(t,x) : U \to \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne en x, alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.

1.1.3 Stabilité des solutions :

On considére l'équation différentielle autonome

$$x' = f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

La solution d'équilibre de (*1.4*) est le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x^*) = 0,$$

En trouvant la solution de (*1.4*), c'est naturel d'essayer de déterminer si elle est stable.

Définition 1.1.5(*Stabilité au sens de Lyaponouv*)

la solution est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ telle que, pour toute autre solution $y(t)$ de (1.4) satisfaisant

$$|x^*(t_0) - y(t_0)| < \delta$$

(où $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$*), alors* $|x^*(t) - y(t)| < \varepsilon$ *pour* $t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1.4
une solution qui n'est pas stable est dite instable.

Définition 1.1.6 *(stabilité asymptotique)*
la solution est dit être asymptotiquement stable si elle est stable et , s' il existe une constante $b > 0$ *telle que, si* $|x^*(t_0) - y(t_0)| < b$*, alors*

$$\lim_{t\to\infty} |x^*(t) - y(t)| = 0.$$

Linéarisation :
Afin de déterminer la stabilité de x^*, on doit comprendre la nature des solutions proche de $x^*(t)$.
soit

$$x = x^* + y \tag{1.5}$$

En substituant (1.5) dans (1.4) et par le developpement de Taylor autour de $x^*(t)$ on obtient

$$x' = (x^*(t))' + y' = f(x^*(t)) + Df(x^*(t))\, y + O\left(|\, y\,|^2\right) \tag{1.6}$$

où Df est la dérivée de f et $|\cdot|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$ (note afin d'obtenir (1.6), f doit être au moins deux fois différentiables).
Puisque $\frac{dx^*}{dt}(t) = f(x^*(t))$ on obtient :

$$y' = Df(x^*(t))y + O\left(|\, y\,|^2\right) \tag{1.7}$$

Donc il est nécessaire d'étudier le système linéaire associe :

$$y' = Df(x^*(t))y. \tag{1.8}$$

Par conséquent, la question de la stabilité de $x(t)$ implique les deux étapes suivantes :
1) Déterminer si le $y = 0$ solution de (1.8) est stable.
2) Montrer que la stabilité (respectivement l' instabilité) de $y = 0$ solution de (1.8) implique la stabilité (respectivement instabilité) de $x^*(t)$.
Si $x^*(t)$ est une solution d'équilibre i.e $x^*(t) = x^*$, alors $Df(x^*(t)) = Df(x^*)$ est une matrice et la solution de(1.8) à travers le point $y_0 \in \mathbb{R}^n$de $t = 0$ peut immédiatement être écrite comme

$$y\left(t\right)=e^{Df\left(x^{*}\right)t}y_{0}$$

Théorème 1.1.5

Supposons que toutes les valeurs propres de $Df(x^*)$ ont des parties réelles strictement négatifs donc la solution d'équilibre $x = x^*$ du probleme non-linéaire (1.4) est asymptotiquement stable.

Définition 1.1.7

Soit $x = x^*$ un point fixe de

$$x'=f\left(x\right), \qquad x\in\ \mathbb{R}^{n}$$

alors, x^* est appelé un point fixe hyperbolique si toute les valeures propres de $Df(x^*)$ ont la partie réelle non nulle.

1.2 Equations différentielles à retard

Dans le modèle de *Malthus* la dynamique est décrite par la formule

$$\frac{dx}{dt}\left(t\right)=(d-m)x(t),$$

où $x(t)$ désigne le nombre d'individus d'une population donné a l'instant t ,d le taux de natalité de cette population et m son taux de mortalité.

La résolution de cette équation est directe :

$$x(t)=\exp^{(d-m)t}x\left(0\right), \qquad t\geq 0.$$

Si le taux de natalité d est supérieur au taux de mortalité m , la population croit ,sinon elle s'éteint, quelque soit la population initiale.

Cette modélisation n'est pas suffisante. En 1973 *Cooke* et *Yorke* proposent une amélioration du modéle de *Malthus*

$$\frac{dx}{dt}\left(t\right)=dx(t-r)-mx(t), \tag{1}$$

où $r > 0$ est par exemple , le temps de gestation de la population étudiée.L'équation (1) est une équation à retard ,le retard est noté r.

La résolution de telle équation est moins aisée que celle des équations différentielles ordinaires.

Premiérement, la donnée d'une condition intiale en $t = 0$ n'est pas suffissante pour resoudre (1) par exemple.Pour détérminer $\frac{dx}{dt}(0)$ il faut connaitre $x(0)$ et $x(-r)$.La condition initiale d'une équation à retard est donc une fonction définie sur $[-r, 0]$.

Ensuite, on résout d'abord l'équation sur un intervalle $[0, r]$.Ainsi l'équation est une équation différentielle ordinaire .En itérant cette méthode , on arrive à une approche dite méthode des"pas".

Nous présentons quelques propriétés des équations difféletielles linéaire à retard et quelques résultats sur les équation difféletielles à retard non linéaire.

1.2.1 Equation difféletielle linéaire à retard

Considérons l'équation differentielle à retard

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + bx(t-r), \qquad t \geq 0, \tag{1.9}$$

où a et b sont deux nembres réels et $r > 0$.

une condition initiale de (1.9) est une fonction ϕ définie sur un intervalle de longueur r .

Nous considérons l'éspace des fonctions continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,noté C :

$$C = C^0([-r, 0], \mathbb{R}).$$

l'ensemble C est muni de la norme du sup notée $\| \, . \, \|$.

Définition 1.2.1.
Si x^{ϕ} est une solution de (1.9) *vérifiant*

$$x(t) = \phi(t) \qquad \textit{pour } t \in [-r, 0]$$

alors nous posons

$$x_t^{\phi} = x^{\phi}(t+\theta), \qquad \theta \in [-r, 0]. \tag{2.1}$$

Si x est une fonction continue sur $[-r,T), T > 0$, dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [-r,0]$ $x_t \in C$.

La formule générale d'une equation differentielle linéaire à retard

$$\frac{dx}{dt}(t) = L(t, x_t), \qquad t \geq 0. \tag{2.2}$$

avec $x_0 = \phi \in C$ où $L : [0,+\infty) \times C \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

Remarque 1.2.1
Lorsque L ne dépend pas du temps t ,l'équation (2.2) est dite autonome.

Existence et unicité [*11*]

Théorème 1.2.1
Si $\phi \in C$, il existe une unique fonction x^{ϕ} définie sur $[-r,+\infty)$ qui coincide avec ϕ sur $[-r,0]$ et qui vérifie (2.2) pour $t \geq 0$.

Remarque 1.2.2
Pour $t = 0$, la dérivée dans (2.2) représente la dérivée à droite.

Dans le cadre des équations différentielles linéaires à retard, la stabilité peuvent être détérminées grâce à la localisation des racines de l'équation caractéristique.

Proposition 1.2.1
La solution $x = 0$ de l'équation linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les racines de l'équation caractéristique associée sont à parties réelle négatives.

S'il existe une racine de l'équation caractéristique à partie réelle strictement positive,alors la solution $x = 0$ est instable.

1.2.2 Equation différentielle à retard :cas nonlinéaire

Considérons l'équation générale

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t) \qquad t \geq 0. \tag{2.3}$$

avec x_t définie en (2.1) et $f : I \times C \to \mathbb{R}, I = [a, b), [a, b]$ ou $[0, +\infty)$.

Existence et unicité

Théorème 1.2.2(*Existence locale*)[7]
Soit $f : I \times C \to \mathbb{R}$ continue alors pour toute fonction $\phi \in C$ il existe $T \in I \setminus \{0\}$ tel que l'équation (2.3) admette une solution sur $[-r, T]$ qui coïncide avec ϕ sur $[-r, 0]$.

Théorème 1.2.3(*Unicité*)
Supposons que $f : I \times C \to \mathbb{R}$ continue ,localement lipschitzienne en ϕ et uniformement lipschitzienne en t . Alors l'équation (2.3) posséde une unique solution x^{ϕ} pour toute fonction $\phi \in C$. De plus l'application $\phi \in C \to x_t^{\phi} \in C$ est localement lipschitzienne.

1.2.3 Linéarisation autour d'une solution particulière

Considérons l'équation (2.3), et supposons que l'application $\varphi \to f(t, \varphi)$ est de classe C^1 pour tout $t \geq 0$.

Soit x^* une solution particuliére de (2.3) .

Soit $Df(t, \varphi)$ l'opérateur défini, pour tout $\psi \in C$,par

$$Df(t, \varphi)\psi := \lim_{h \to 0} \frac{f(t, \varphi + h\psi) - f(t, \varphi)}{h}.$$

pout tout $t \geq 0$ et $\varphi \in C$,l'opérateur $Df(t, \varphi) : C \to \mathbb{R}$ est linéaire continue.

Définition 1.2.2
On appelle équation linéarisée associée à l'équation (2.3) autour de la solution particuliére x^* l'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = D_x f(t, x_t^*)\, x_t.$$

1.2.4 Fonction de Lyaponouv et équation à retard

Nous rappelons ici quelques résultats fondamentaux sur les fonctions de Lyaponuv appliquées aux équations à retard.

Soit $f : I \times C \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $f(t,0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Considérons l'équation différentielle à retard non-autonome,

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t) \qquad t \geq 0. \tag{2.3}$$

de donnée initiale $x_0 = \phi \in C$.

Définition 1.2.3(*stabilité*)
Supposons que $f(t,0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.
La solution $x = 0$ de (2.3) est dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\| \phi \| < \delta \Rightarrow \| x_t^{\phi} \| < \varepsilon \quad \text{pour } t \geq 0.$$

La solution $x = 0$ de (2.3) est dite asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $b > 0$ tel que

$$\| \phi \| < b \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x^{\phi}(t) = 0.$$

Définition 1.2.4(*solution bornées*)
Une solution x^{ϕ} de (2.3) est bornée s'il existe $\beta = \beta(\phi)$ tel que

$$| x^{\phi}(t) | < \beta(\phi) \qquad \text{pour } t \geq -r.$$

Les solutions de (2.3) sont uniformément bornée s'il existe β indépendant de ϕ tel que

$$| x^{\phi}(t) | < \beta \qquad \text{pour } t \geq -r.$$

Nous énonçons à présent des conditions suffisantes pour la stabilité de la solution $x = 0$ de (2.3) .

Soit $V : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ une fonction continue et x^{ϕ} solution de (2.3) pour la condition initiale $\phi \in C$. Nous posons

$$V'(t, \phi) := \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{V\left(t + h, x_{t+h}^{\phi}\right) - V(t, \phi)}{h}$$

Théorème 1.2.4*(stabilité asymptotique de la solution x=0)[11]*

Supposons que la fonction $f : [0,+\infty) \times C \to \mathbb{R}^n$ *envoie l'ensemble* $[0,+\infty)\times$*(bornés de* C*) dans des ensembles bornés de* $\mathbb{R}^n$*. Soient u,v,w trois fonctions définies sur* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*, continues et croissantes , vérifiants* $u(0) = v(0) = 0$ *et* $u(s)$ *,* $v(s) > 0$ *pour* $s > 0$*.*

S'il existe une fonction $V : [0,+\infty) \times C \to \mathbb{R}$ *continue telle que*

$$u(|\,\phi(0)\,|) \leq V(t,\phi) \leq v(|\,\phi\,|)$$

et

$$V\,'(t,\phi) \leq -w(|\,\phi(0)\,|)$$

alors la solution $x = 0$ *de* (2.3) *est stable , si de plus* $w(s) > 0$ *pour* $s > 0$ *alors la solution* $x = 0$ *de* (2.3) *est asymptotiquement stable.*

Pour une démonstration compléte,nous renvoyons le lecteur vers l'ouvrage de J.Hale[*11*],chapitre 5,théoréme 2.1.

Remarque 1.2.4

Lorsque l'équation (2.3) est autonome,c'est-à-dire lorsque f ne dépend pas du temps $t, f = f(\phi)$,la dérivée de V le long des solutions de (2.3) est définie par

$$V\,'(\phi) := \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{V(x_h(\phi)) - V(\phi)}{h}, \quad \phi \in C$$

Exemple 1 :

Considérons l'équation à retard linéaire

$$\frac{dx}{dt}(t) = -ax(t) - bx(t-r), \qquad r > 0, \tag{1}$$

où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Cette équation s'écrit sous la forme (2.3) avec

$$f(\phi) = -a\phi(0) - b\phi(-r), \qquad \phi \in C$$

Posons

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(0) + \frac{a}{2}\int_{-r}^{0} \phi^2(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
V'(\phi) &= \frac{d\phi}{dt}(0)\,\phi(0) + \frac{a}{2}\phi^2(0) - \frac{a}{2}\phi^2(-r), \\
&= -\frac{a}{2}\phi^2(0) - b\phi(0)\phi(-r) - \frac{a}{2}\phi^2(-r), \\
&= -\frac{a}{2}\left(\phi(0)^2 + 2\frac{b}{a}\phi(0)\phi(-r) + \phi^2(-r)\right), \\
&= -\frac{a}{2}\left(\left(\phi(-r) + \frac{b}{a}\phi(0)\right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\phi^2(0)\right).
\end{aligned}$$

Comme $a > 0$, nous obtenons

$$V'(\phi) \le -\frac{a^2 - b^2}{2a}\phi^2(0) := -w\,(\phi\,(0))$$

Si $a >\mid b \mid$ la solution $x = 0$ de (1) est asymptotiquement stable

Exemple 2
Considérons l'équation différetielle à retard linéaire non autonome

$$\frac{dx}{dt}(t) = -a\,(t)\,x(t) - b\,(t)\,x(t-r), \qquad r > 0 \tag{2}$$

où a et b sont deux fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty)$ et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < \alpha < a\,(t) \qquad \text{pour} \quad t \ge 0$$

Posons

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(0) + \alpha \int_{-r}^{0} \phi^2(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
V'(\phi) &= \frac{d\phi}{dt}(0)\,\phi(0) + \alpha\phi^2(0) - \alpha\phi^2(-r), \\
&= -(a(t) - \alpha)\phi^2(0) - b\,(t)\,\phi(0)\phi(-r) - \alpha\phi^2(-r), \\
&= -\alpha\left(\phi^2(-r) + \frac{b\,(t)}{\alpha}\phi(0)\phi(-r) - \frac{a(t) - \alpha}{\alpha}\phi(0)\right) \\
&= -\alpha\left(\phi(-r) + \frac{b\,(t)}{2\alpha}\phi(0)\right)^2 + \frac{b^2\,(t) - 4\alpha(a(t) - \alpha)}{4\alpha}\phi^2(0).
\end{aligned}$$

Donc

$$V'(\phi) \leq -\frac{4\alpha(a(t)-\alpha) - b^2(t)}{4\alpha}\phi^2(0) := -w(\phi(0)).$$

Ainsi, si

$$4\alpha(a(t)-\alpha) > b^2(t). \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

la solution $x = 0$ de (2) est asymptotiquement stable.

On peut remarquer que (1) est un cas particulier de (2) et, en perenant $\alpha = \frac{a}{2}$ lorsque les fonctions a et b constantes on retrouve la condition de stabilité donné dans l'exemple 1

Chapitre 2

Modèle mathématique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation à retard suivante

$$\varphi'(t) = e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \beta(\varphi(t-\bar{a}))\varphi(t-\bar{a}) + \mu(\varphi(t))\varphi(t) \qquad t > \bar{a} \tag{1.1}$$

nous en établissons des résultats de stabilité et de bifurcation.

Au cours des dernières années, l'équation a retard de type

$$y'(t) = \sigma f(y(t-\tau)) - \gamma y(t) \tag{1.2}$$

a été largement investie dans la littérature.

Lorsque f est de la forme

$$\begin{aligned} f &= \frac{\delta}{\delta + y^n(t-\tau)} \\ ou f &= \frac{\delta y(t-\tau)}{\delta + y^n(t-\tau)} \end{aligned}$$

l'equation (1.2) a été proposée par Mackey et Glass[1] , pour décrire le système de contrôle physiologique, où $y(t)$ désigne la densité des cellules matures dans la circulation sanguine au temps t, et τ est le temp de retard entre la production des cellules immatures dans le moelle osseuse et leur maturation pour la libération dans la circulation sanguine.

Lorsque f prend la forme

$$f = e^{-\delta y(t-\tau)}$$

l'équation (1.2) a été étudiée par Wazewska-Czyzewska et Lasota [**2**], pour décrire la survie des globules rouges chez les animaux, où $y(t)$ désigne le nombre de cellules sanguines à l'instant t, τ est le temps nécessaire pour produire une globule rouge.

Lorsque f prend la forme

$$f = y\left(t - \tau\right) e^{-\delta y(t-\tau)}$$

l'équation(1.2) a été proposée par Gurney et al[3], pour décrire la dynamique de Nicholson(mouches à viande), où $y(t)$ est la population des adultes sexuellement matures, et τ est le temp pour tous les oeufs de se développer en adultes . Les premiers papiers traitant la dynamique de population cellulaire sont dûs à Bell et Anderson en (1967)[3], Fredrickson et al [1], Sinko et al [9], et Painter[12].

2.2 Modèle Juvénile-Adulte

On distingue entre deux types de modèles, l'un est dit non-structuré, et l'autre structuré.

On dit qu'un modèle est non-structuré lorsque le modèle est présenté par un système d'équations diférentielles ordinaires ou à retard, caractérisant soit la population totale, soit une sous population de la population totale.

On dit qu'un modèle est structuré lorsque chaque individu se distingue par son âge, sa taille, sa maturité, où d'autres propriétés physiques. Ce dérnier est donné soit par un système d'équations aux dérivées partielles, soit par un système d'équations aux dérivées partielles à retard.
Nous considérons une population structurée en age.Elle est composée de 2 classes, adultes et juvéniles.On suppose qu'il y une compétition entre les adultes (voir [2] pour plus de détails).

$$J_t\left(a,t\right) + J_a\left(a,t\right) + \nu\left(a\right) J\left(a,t\right) = 0{,}0 < a < \bar{a}\ {,}0 < t < T, \tag{2.1}$$

$$A_t\left(x,t\right) + \left(g\left(x,t\right), A\left(x,t\right)\right)_x + \mu\left(\varphi\left(t\right)\right) A\left(x,t\right) = 0{,}\underline{x} < x < \overline{x}\ {,}0 < t < T, \tag{2.2}$$

$$J(0,t) = \beta(\varphi(t))\,\varphi(t)\,, 0 < t < T\ ,$$

$$g(\underline{x},t)\,A(\underline{x},t) = J(\bar{a},t)\,, \quad 0 < t < T, \tag{2.3}$$

$$J(a,0) = J_0(a) \qquad\qquad 0 < a < \bar{a}\ ,$$

$$A(x,0) = A_0(x) \qquad\qquad \underline{x} < \ x < \overline{x}\ ,$$

Avec

$J(a,t)$ est la densité des juvéniles d'age a à l'instant t .

$A(x,t)$ dénote la densité des adultes de taille x au temps t .

La quantité $\bar{a}$ dénote l'âge auquel les jeunes se métamorphosent en adultes.

La valeur $\overline{x}$ désigne la taille maximale des adultes .

La valeur $\underline{x}$ désigne la taille minimale des adultes .

La fonction $\varphi(t) = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} A(x,t)dx$ est la population totale des adultes.

Les paramètres ν et μ sont des taux de mortalité des juvénile et des adultes, respectivement.

Les fonctions g et β sont les taux de croissance et de reproduction pour les adultes, respectivement.

Tout au long de la discussion, nous supposons que les paramètres dans (1.3) satisfont à l' hypothèse suivante :

(A_1) $g \in C^1([\underline{x},\overline{x}] \times [0,T])$. Par ailleurs , $g(x,t) > 0$ pour $(x,t) \in [\underline{x},\overline{x}] \times [0,T]$ et $g(\bar{x},t) = 0$ pour $t \in [0,T]$

(A_2) $\nu \in L^\infty(0,\bar{a})$ est positive ou nul.

(A_3) μ est positive ou nul et continument différentiable avec $\mu' \geq 0$.

(A_4) β est positive ou nul et continument différentiable avec $\beta' \leq 0$.

(A_5) $J_0 \in L^\infty(0,\bar{a})$ positive ou nul.

(A_6) $A_0 \in L^\infty(0,\bar{a})$ positive ou nul.

En effet, résolvant l'équation (2.1) par la méthode des caractéristiques on trouve

$$\frac{dt}{1} = \frac{da}{1}$$

Ce qui implique que

$$t = a + c$$

Alors sur les caractéristque on a

$$J(t+c,t) = V(t)$$

Calculons maintenant $\frac{dV(t)}{dt}$ on obtient

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\partial J}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial t}$$

Comme $\frac{\partial a}{\partial t} = 1$on trouve

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\partial J}{\partial a} + \frac{\partial J}{\partial t}$$

d'aprés (2.1) on a

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\nu\left(t - a_0\right)V\left(t\right)$$

On a trouvé une équation différentielle ordinaire donc

$$\frac{dV}{V}(t) = -\nu\left(t - a_0\right)dt$$

Ce qui implique
Pour $t \leq a$

$$V\left(t\right) = V\left(0\right)\exp^{\int\limits_0^t \nu(\tau + a_0)d\tau}$$

Avec

$$\begin{aligned} V_0\left(t\right) &= J\left(a_0, 0\right) \\ &= J\left(a - t, 0\right) \\ &= J_0\left(a - t\right) \end{aligned}$$

Alors on trouve

$$J\left(a,t\right) = J_0\left(a - t\right)e^{\,-\int_0^t \nu(a-t+\tau)d\tau} \quad \text{si } t \leq a,$$

Et pour $t > a$

$$V\left(t\right) \quad = \quad V\left(t_0\right)e^{-\int_0^{t_0} \nu(\tau+t_0)d\tau}$$

Avec

$$\begin{aligned} V(t_0) &= J(0, t-a) \\ &= \beta(\varphi(t-a))\varphi(t-a) \end{aligned}$$

Alors

$$J(a,t) = \beta(\varphi(t-a))\varphi(t-a)\, e^{-\int_{t-a}^{t}\nu(a-t+\tau)d\tau} \quad \text{si } t > a$$

Maintenant nous intégrons l'équation (2.2) en x de $\underline{x}$ à $\overline{x}$

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dx + \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \frac{\partial}{\partial x}(g(x,t), A(x,t)) = -\mu(\varphi) \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} A(x,t)\, dx$$

i.e

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} A(x,t)\, dx + \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \frac{\partial}{\partial x}(g(x,t), A(x,t)) = -\mu(\varphi) \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} A(x,t)\, dx$$

On sait que $\varphi(t) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} A(x,t)\, dx$ ce qui implique que

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} A(x,t)\, dx$$

Alors

$$\varphi'(t) + [g(\overline{x},t)A(\bar{x},t) - g(\underline{x},t)A(\underline{x},t)] = -\mu(\varphi)\varphi(t)$$

D'aprés la condition (A_1)

$$\varphi'(t) - (g(\underline{x},t)A(\underline{x},t)) = -\mu(\varphi)\varphi(t)$$

Et par (2.3) on trouve

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) &= J(\bar{a}-t) - \mu(\varphi(t))\,\varphi(t) \\
&= e^{-\int_{t-a}^{t} \nu(\bar{a}-t+\tau)d\tau}\,\beta(\varphi(t-\bar{a}))\,\varphi(t-\bar{a}) - \mu(\varphi(t))\,\varphi(t) \quad \text{si } t > \bar{a}
\end{aligned}
$$

Par le changement de variable $\eta = \bar{a} - t + \tau$ on obtient l'équation (1.1).

Chapitre 3

Stabilité et bifurcation de Hopf

3.1 Préliminaires

Définition :

Une bifurcation d'un systéme dynamique, c'est une modification de la nature de ses points stationnaires ou de ses cycles limites (stabilité ou instabilité d'une ou plusieurs solutions suivant les conditions initiales) due au changement de la valeur d'un paramétre du systéme, le paramétre de bifurcation.

L'analyse de bifurcation d'un systéme dynamique

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu)$$

en fonction du paramétre de bifurcation μ, consiste à étudier le comportement asymptotique des solutions $X(t)$ en fonction de la variation du paramétre μ .

On distingue plusieurs types de bifurcations par exemple :

Bifurcation selle-noeud,bifurcation transcritique..,et bifurcation de Hopf.

Bifurcation de Hopf : c'est quand une modification continue des paramétres d'un systéme dynamique transforme une solution stationnaire stable en cycle limite.

Théorème 3.1.1(Hopf, 1942)

Soit un champ de vecteurs :

$$\frac{dX}{dt} = F(x, \mu)$$

dépendant d'un paramétre (de bifurcation) μ *, dont l'origine est pour tout* $\mu \in \mathbb{R}$ *un point stationnaire, et dont le champ linéarisé tangent à l'origine*

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X}(0, \mu).X$$

a pour tout μ *deux valeurs propres complexes conjuguées* $\lambda(\mu)$ *et* $\overline{\lambda(\mu)}$ *telles que pour* $\mu > 0$*,* $Re(\lambda(\mu)) > 0$ *(donc l'origine est un point stationnaire instable) et* $Re(\lambda(0)) = 0$*, aucune autre valeur propre n'étant à partie réelle nulle. Si l'application* $\mu \to Re(\lambda(\mu))$ *est dérivable en* 0 *et si*

$$\frac{dRe(\lambda(\mu))}{d\mu(0)} > 0$$

(i.e., si le graphe $\{(\mu, \left[\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}\right]), \mu \in \mathbb{R}\}$ *traverse transversalement l'axe imaginaire pur), il y a naissance en* $\mu = 0$ *de cycles limites de période voisine de* $T = 2\pi|\lambda(0)|$ *et d'amplitude voisine de* $\sqrt{\mu}$ *(pour* $\mu \approx 0$ *).*

pour les équations différentielles à retard,il y a une version particuliérs du théoréme de bifurcation de Hopf et qui est l'un des résultats les plus importants essentiellement la seule méthode plus rigoureuse établissant l'existence de solutions périodiques.
Nous renvoyons le lecteur à d'autre versions sur la bifurcation de Hopf dans la référence [*4*]

Dans la suite de cette section nous aurons besoin du lemme suivant.

lemme 3.1.1 :
Toutes les racines de l'equation

$$pe^z + q - ze^z = 0 \text{ avec } p, q \in R$$

admettent des parties réelles négatives si et seulement si

$$p < 1$$

et

$$p < -q < \sqrt{\theta_0^2 + p^2}$$

où θ_0 *est la racine de* $\theta = ptg\theta$ *avec* $0 < \theta < \pi$.

La démonstration est technique et fait appel à des outils d'analyse compléxe.Nous renvoyons le lecteur intéssé à la référence [13]

3.2 Stabilité

Dans cette partie, nous étudions la stabilité de l équilibre non trivial et l'existence de la bifurcation de Hopf locale pour l'équation (*1.1*).

Nous imposons l'hypothèse supplémentaire suivante sur les paramètres.
$(A7)$ Il existe une unique constante positive φ^* telle que

$$e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \beta(\varphi^*) - \mu(\varphi^*) = 0$$

φ^* est l'équilibre positif de l'équation (1.1), et la linéarisation de (1.1) autour de φ^* est donnée par

$$\varphi' = e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right]\varphi(t-\bar{a}) - \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\varphi(t) \tag{3.3}$$

Puis l'équation caractéristique de (3.3) est comme suit
cherchons la solution sous la forme $\varphi = e^{\lambda t}$, donc

$$\lambda e^{\lambda t} = e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] e^{\lambda(t-\bar{a})} - \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right] e^{\lambda t}$$

Ce qui implique

$$\lambda = e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] e^{-\bar{a}\lambda} - \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]$$

Donc

$$\lambda - e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] e^{-\bar{a}\lambda} + \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right] = 0 \tag{3.4}$$

la stabilité locale de φ^* est déterminé par le signe des parties réelles deλ.

Remarque 3.2.1

Si toutes les racines ont des parties réelles négatives alors φ^* *est localement stable.*

Théorème 3.2.2

L'équilibre positif φ^* *de l'équation* (1.1) *est localement stable si et seulement si*

$$e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] > \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right] \left(\frac{1}{\cos\theta_0}\right)$$

où θ_0 *est la racine de* $\theta = -\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\tan\theta$ *avec* $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Preuve

Nous écrivons premièrement l'equation (3.4) et on multiplie par $-\bar{a}e^{\bar{a}\lambda}$

On obtient

$$-\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]e^{\bar{a}\lambda} + \bar{a}e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta}\left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] - \bar{a}\lambda e^{\bar{a}\lambda} = 0$$

On pose $z = \bar{a}\lambda$

$$-\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right] + \bar{a}e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta}\left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] - ze^z = 0$$

Utilisant le lemme 3.1.1 on trouve que

$$p = -\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]$$

Et

$$q = \bar{a}e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta}\left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right]$$

Par l'hypothèse $(A3)$, la partie (1) du lemme est satisfaite i.e $p < 1$,

et la première inégalité dans la partie (2) i.e $p < -q$ donne en utilisant (A_3), (A_4), et (A_7)

$$-\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right] < -\bar{a}e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta}\left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right]$$

Ce qui implique que

$$\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*) > e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta}\left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right]$$

Et la deuxième inégalité de (2) du lemme i.e $-q < \sqrt{\theta_0^2 + p^2}$ donne

$$-\bar{a}e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] < \sqrt{\theta_0^2 + \bar{a}^2 \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]^2}$$

Où

$$\theta_0 = p \tan\theta_0 \text{ i.e.} \theta_0 = -\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\tan\theta_0$$

remplaçons θ_0 par sa valeur on trouve

$$\begin{aligned}
-\bar{a}e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] &< \sqrt{\begin{array}{c}\left(-\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\tan\theta_0\right)^2 + \\ \bar{a}^2\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]^2\end{array}} \\
&< \sqrt{\begin{array}{c}\bar{a}^2\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]^2 \tan\theta_0^2 + \\ \bar{a}^2\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]^2\end{array}} \\
&< \sqrt{\bar{a}^2\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]^2 \left(1 + \tan\theta_0^2\right)} \\
&< -\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\frac{1}{\cos\theta_0}
\end{aligned}$$

donc

$$e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] > \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\frac{1}{\cos\theta_0} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$$

la condition (A_4) et (A_7) implique que

$$e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \beta(0) > \mu(0).$$

Si cette relation est inversée, on peut naturellement s'attendre à ce que l'équilibre trivial de l'équation (1.1) soit stable.

Théorème 3.2.3
Supposons que

$$e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta)d\eta} \beta(0) < \mu(0)$$

alors l'équilibre trivial de l'équation (1.1) *est globalement stable.*

Preuve

Introduisons une fonction de Lyapunov siuvante

$$V(t,v) = v^2(t) + \mu(0)\int_{t-\bar{a}}^{t} v^2(\tau)\,d\tau \qquad t \geq \bar{a}$$

si $\varphi(t)$ est solution de l'equation (1.1) alors

$$V(t,\varphi) = \varphi^2(t) + \mu(0)\int_{t-\bar{a}}^{t} \varphi^2(\tau)\,d\tau \qquad t \geq \bar{a}$$

Calculons maintenant $\frac{d}{dt}V(t,\varphi)$

$$\frac{d}{dt}V(t,\varphi) = 2\varphi(t)\varphi'(t) + \mu(0)\int_{t-\bar{a}}^{t} \left(\varphi^2(\tau)\right)' d\tau \qquad t \geq \bar{a}$$

remplaçons $\varphi'(t)$ par sa valeur on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(t,\varphi) &= 2\varphi(t)\left[e^{-\int_{t-a}^{t}\nu(\bar{a}-t+\tau)d\tau}\beta(\varphi(t-\bar{a}))\varphi(t-\bar{a}) - \mu(\varphi(t))\varphi(t)\right] \\ &\quad +\mu(0)\int_{t-\bar{a}}^{t}\left(\varphi^2(\tau)\right)' d\tau \quad t \geq \bar{a} \\ &= 2\varphi(t)\left[e^{-\int_{t-a}^{t}\nu(\bar{a}-t+\tau)d\tau}\beta(\varphi(t-\bar{a}))\varphi(t-\bar{a}) - \mu(\varphi(t))\varphi(t)\right] \\ &\quad +\mu(0)\left[\varphi^2(t) - \varphi^2(t-\bar{a})\right]\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse du théoréme on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(t,\varphi) &\leq 2e^{-\int_0^{\bar{a}}\nu(\eta)d\eta}\left[\beta(0)\varphi(t)\varphi(t-\bar{a}) - 2\mu(0)\varphi^2(t) + 2\mu(0)\varphi^2(t) - \mu(0)\varphi^2(t-\bar{a})\right] \\ &= 2e^{-\int_0^{\bar{a}}\nu(\eta)d\eta}\beta(0)\varphi(t)\varphi(t-\bar{a}) - \mu(0)\varphi^2(t) + \mu(0)\varphi^2(t-\bar{a})\end{aligned}$$

On a

$$\varphi(t)\varphi(t-\bar{a}) \leq \frac{1}{2}\left(\varphi^2(t) + \varphi^2(t-\bar{a})\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(t,\varphi) &\leq \left[e^{-\int_0^{\bar{a}}\nu(\eta)d\eta}\beta(0) - \mu(0)\right]_{<0}\left[\varphi^2(t) + \varphi^2(t-\bar{a})\right]_{<0} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

d'aprés le théorème de Liyaponouv l'équilibre trivial est globalement stable.

3.3 Bifurcation de Hopf

Nous allons maintenant montrer que sous certaines conditions l'équation (*1.1*) subit une bifurcation de Hopf en considèrant le retard comme paramètre de bifurcation.

Pour plus de simplicité, nous introduisons les notations suivantes.

$$\sigma = \mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)$$

et

$$\gamma = e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta) d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right]$$

et

$$\Lambda = -(1 + \bar{a}\sigma)\frac{d\sigma}{d\bar{a}} + \left(\frac{\sigma}{\gamma} + \bar{a}\gamma\right)\frac{d\gamma}{d\bar{a}} + \gamma^2 - \sigma^2$$

Théorème 3.3.1
supposons que

$$e^{-\int_0^{\bar{a}} \nu(\eta) d\eta} \left[\beta'(\varphi^*)\varphi^* + \beta(\varphi^*)\right] \leq \left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right]\left(\frac{1}{\cos\theta_0}\right)$$

où θ_0 *est la racine de*

$$\theta = -\bar{a}\left[\mu'(\varphi^*)\varphi^* + \mu(\varphi^*)\right] tg\theta \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

Si $i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}$ *est une racine purement imaginaire de l'équation caractéristique* (*3.4*) *et si* $\Lambda \neq 0$,*alors l'équation* (1.1) *subit une bifurcation de Hopf.*

Preuve

Avec les notations , l'équation caractéristique (*3.4*) prend la forme siuvante

$$\lambda + \sigma - \gamma e^{-\bar{a}\lambda} = 0 \tag{3.5}$$

$\lambda = i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}$ est une racine purement imaginaire de (3.5) si et seulement si

$$i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2} + \sigma - \gamma e^{-i\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}} = 0$$

Donc

$$i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2} + \sigma - \gamma \cos\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}\right) + i\gamma \sin\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}\right) = 0$$

Alors,on a

$$\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2} = -\gamma \sin\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}\right)$$

et

$$\sigma = \gamma \cos\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}\right)$$

Nous dérivons (*3.5*) par rapport à $\bar{a}$ on trouve

$$\frac{d\lambda}{d\bar{a}} + \frac{d\sigma}{d\bar{a}} - \frac{d\gamma}{d\bar{a}}e^{-\bar{a}\lambda} + \gamma\lambda e^{-\bar{a}\lambda} + \bar{a}\gamma e^{-\bar{a}\lambda}\frac{d\lambda}{d\bar{a}} = 0$$

i.e.

$$\frac{d\lambda}{d\bar{a}}\left(1 + \bar{a}\gamma e^{-\bar{a}\lambda}\right) + \frac{d\sigma}{d\bar{a}} - \frac{d\gamma}{d\bar{a}}e^{-\bar{a}\lambda} + \gamma\lambda e^{-\bar{a}\lambda} = 0$$

La relation $\lambda + \sigma - \gamma e^{-\bar{a}\lambda} = 0$ donne $\gamma e^{-\bar{a}\lambda} = \lambda + \sigma$
Ainsi

$$\frac{d\lambda}{d\bar{a}} = \frac{1}{1 + \bar{a}\left(\lambda + \sigma\right)}\left[-\frac{d\sigma}{d\bar{a}} + \frac{d\gamma}{d\bar{a}}e^{-\bar{a}\lambda} - \left(\lambda + \sigma\right)\lambda\right]$$

Calculons maintenant $Re\frac{d\lambda}{d\bar{a}}$
On a $\lambda = i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}$ et

$$\frac{d\lambda}{d\bar{a}} = \frac{1}{1 + \bar{a}\left(i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2} + \sigma\right)}\left[-\frac{d\sigma}{d\bar{a}} + \frac{d\gamma}{d\bar{a}}e^{-i\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}} - \left(i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2} + \sigma\right)\left(i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \bar{a}\sigma + i\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}}\right)\left(\frac{1 + \bar{a}\sigma - i\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}}{1 + \bar{a}\sigma - i\bar{a}\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}}\right)\left[\begin{array}{c} -\frac{d\sigma}{d\bar{a}} + \frac{d\gamma}{d\bar{a}}e^{-i\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}} - \\ \left(i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2} + \sigma\right)\left(i\sqrt{\gamma^2 - \sigma^2}\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1+\bar{a}\sigma - i\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}}{1+2\bar{a}\sigma+\bar{a}^2\gamma^2}\left[\begin{array}{c} -\frac{d\sigma}{d\bar{a}}+\frac{d\gamma}{d\bar{a}}\left[\cos\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}\right)-i\gamma\sin\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}\right)\right]+ \\ \gamma^2-\sigma^2-i\ \sigma\sqrt{\gamma^2-\sigma^2} \end{array}\right]$$

On multiplie par

$$\frac{1+\bar{a}\sigma - i\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}}{1+\bar{a}\sigma - i\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}}$$

On trouve

$$\begin{aligned} Re\frac{d\lambda}{d\bar{a}} &= \frac{1}{1+2\bar{a}\sigma+\bar{a}^2\gamma^2}\left[\begin{array}{c} (1+\bar{a}\sigma)\left(-\frac{d\sigma}{d\bar{a}}+\frac{d\gamma}{d\bar{a}}\cos\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}\right)+\gamma^2-\sigma^2\right) \\ +\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}\left(\frac{d\gamma}{d\bar{a}}\sin\left(\bar{a}\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}\right)-\sigma\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}\right) \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{1+2\bar{a}\sigma+\bar{a}^2\gamma^2}\Lambda \end{aligned}$$

On a $\Lambda \neq 0$ donc $Re\frac{d\lambda}{d\bar{a}} \neq 0$.

Et pour cela il éxiste une bifurcation de Hopf et $\bar{a}$ s'appelle le parametre de bifurcation.

3.4 Conclusion et Interpretaion biologique

L'interprétation biologique de l'analyse ci-dessus est que le processus de métamorphose influe sur le comportement dynamique de la population.
Si la métamorphose se produit très vite alors la population est conduite à l'extinction et si la metamorphose est lente ,la population est persitence et suit une solution periodique.

Bibliographie

[1] *A. G.Fredrickson, D. Ramkrishna, H. M. Tsuchiya*, Statistics and Dynamics of Procaryotic Cell Population, Math. Biosc. *1, 327-374, (1967).*

[2] *A. S. Ackleh* and *K. Deng*, A nonautonomous juvenile-adult model : Well-posedness and long-time behavior via a comparison principle, SIAM J. Appl. Math., *69 (2009), 1644–1661.*

[3] *G. I. Bell* et *E. C. Anderson, Cell Growth and Division. I.* A Mathematical Modelwith Application to Cell Volume Distribution in Mammalian Suspension Cultures,Biophys. *J. 7, 329-351, (1967).*

[4] *Hal Smith*,An Introduction to Delay Differential Equations With Applications to the Life Sciences,Springer.*2011*

[5] *H.Amann*,Ordinary Differential Equations,walter de Gruter Berlin ,New York,*1990.*

[6] *J. K. Hale.*Ordinary differential equations, Wiley-Interscience, New York, *1969.*

[7] *J. K. Hale.*Theory of functional differential equations, Applied Mathematical Sciences *3*,Springer-Verlag, New York, *1977.*

[8] *J. K. Hale* and *S. M. Verduyn Lunel,.*Introduction to functional differential equations, Applied Mathematical Sciences *99*, Springer-Verlag, New York, *1993.*

[9] *J. W. Sinko, W. Streifer*, A Model for Age-Size structure Population, Ecology, *48,910-918, (1967).*

[10] *L. Glass and M. C. Mackey*, Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems, Ann. New York Acad. Sci., *316 (1979), 214–235.*

[11] *M. Wazewska-Czyzewska and A. Lasota*, Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells, Mat. Stos., *6 (1976), 23–40.*

[12] *P. G. Painter, A. G. Marr*, Mathematics of Microbial Population, Ann. Rev. Microbiol.,*22, 519-548, (1968)*.

[13] *R. Bellman* and *K. L. Cooke*, “Differential-Difference Equations,” Academic Press, New York,*1963*.

[14] *R. D. Driver*. Ordinary and Delay Differential Equations, Applied Mathematical Sciences *20*, Springer-Verlag, New York, *1977*.

[15] *S.Wiggins*,Introduction to Applied Non Linear Dynamical Systems and Chaos,Springer,*1990*.

[16] *W. S. C. Gurney, S. P. Blythe* and *R*. M. Nisbet, Nicholson’s blowflies revisited, Nature, *287(1980), 17–21*.