République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de le Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

pour l'obtention de licence

en mathématiques

Thème

Processus de Poisson

Par : Mr. *Imakhlaf Ayyoub*

Sous l'encadrement de : Mr. *Abi-Ayad Djamal*

Année universitaire 2012-2013

Sommaire :

Introduction :

Dans ce travail, on va voir différentes définitions d'un processus aléatoire appelé processus de Poisson, ainsi que certaine de ses propriétés et un petit rappel de quelque lois utiles utilisée dans les démonstrations et les définitions qui vont suivre.

Un processus de Poisson étudie un cas particulier de phénomène aléatoire, le genre de phénomène qui arrive d'une façon séquentielle et indépendante comme par exemple le nombre de secousses sismiques, ou le nombre de guerre se déclarant, ou le nombre de clients dans une file d'attente, ou le nombre de décès dans une population quelconque …etc. Tout ça dans une période de temps déterminée.

Rappel de Lois :

1 La loi exponentielle :

1.1 Définition :

La loi exponentielle avec un paramètre λ, $\lambda > 0$, est une loi continue dont la densité est donné par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

On note

$$T \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

pour indiquer que T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle avec paramètre $\lambda > 0$. La loi exponentielle est souvent utilisé dans des applications en science et en génie pour modéliser des durées de vie, les temps entre des arrivées successives des clients dans des modèles de files d'attente,…etc.

1.2 Moments :

Un calcul élémentaire nous donne

$$E(T^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

et en particulier on a le moment d'ordre 1 est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, et le moment d'ordre 2 est $E(T^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. D'où $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.

1.3 Fonction de répartition :

Un autre calcul élémentaire nous donne

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

1.4 Fonction génératrice des moments :

Pour $u \geq \lambda$, on a :

$$\varphi_T(u) = E(e^{uT}) = \infty.$$

Pour $u < \lambda$, on obtient :

$$\varphi_T(u) = E(e^{uT}) = \frac{\lambda}{\lambda - u}.$$

D'où :

$$\varphi_T(u) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda - u} & si\ u < \lambda \\ \infty & si\ u \geq \lambda \end{cases}.$$

1.5 Théorèmes :

1.5.1 Théorème : Soit T, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $(0,\infty)$. Alors T suit la loi exponentielle si et seulement si pour tout nombres réels $s > 0$ et $t > 0$ on a

$$P(T > s + t) = P(T > s)P(T > t)$$

Démonstration :

Si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors un calcul direct donne pour $u > 0$:

$$P(T > u) = e^{-\lambda u}$$

en particulier pour $u = s + t$, avec s et t deux nombres réels strictement positif, on a :

$$P(T > s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t} = P(T > s)P(T > t).$$

Inversement, si T est une variable aléatoire réel à valeurs dans $(0,\infty)$ et satisfaisant la condition :

$$(\forall s, t \in \mathbb{R}_+^*) \qquad P(T > s + t) = P(T > s)P(T > t)$$

posons pour tout réel positif t, $f(t) = P(T > t)$. On a par définition algébrique des fonctions exponentielles que les fonctions $f(t) = a^t$ avec $a = f(1)$ sont les seules fonctions qui vérifie :

$$f(s + t) = f(s)f(t)$$

Donc dans notre cas $f(t) = P(T > 1)^t = e^{t\log(P(T>1))} = e^{-\lambda t}$ avec $\lambda = -\log(P(T > 1) = \log\left(\frac{1}{P(T>1)}\right) > 0$ ce qui donne :

$$P(T > t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 1 & sinon \end{cases}.$$

D'où, la fonction de répartition de T est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

1.5.2 Théorème : Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n \sim Géométrique(p_n)$ avec, pour un certain $\lambda > 0$, $p_n = \frac{\lambda}{n}$ alors $\forall n > \lambda$:

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} T$$

avec $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration :

Soit $\lambda > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\lambda}{n} < 1$ considérons une variable aléatoire W_n qui suit une loi géométrique de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Posons $T_n = \frac{W_n}{n}$.

Alors pour $t \geq 0$ on a :

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P\left(\frac{W_n}{n} \leq t\right) = P(W_n \leq tn)$$

$$F_{T_n}(t) = \sum_{k=1}^{[tn]} P(W_n \leq k) = \sum_{k=1}^{[tn]} (1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1}\frac{\lambda}{n} = 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{[tn]}$$

Donc la fonction de répartition de T_n est donnée par :

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 1-(1-\frac{\lambda}{n})^{[tn]} & si\ t \geq 1 \\ O & sinon \end{cases}.$$

En faisant tendre n vers l'infinie on obtient la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.

1.5.3 Théorème : Soit $V_1, V_2, \dots, V_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad V_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$.
Alors $W_n = min\{V_1, V_2, \dots., V_n\} \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Démonstration :
Soit $w \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(W_n \leq w) &= P(min\{V_1, V_2, \dots., V_n\} \leq w) \\ &= 1 - P(min\{V_1, V_2, \dots., V_n\} > w) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{V_i > w\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(V_i > w) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i w} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)w} \end{aligned}$$

D'où $W_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

2 La loi gamma :

2.1 La fonction gamma :

2.1.1 Définition : La fonction gamma d'Euler, dénotée $\Gamma(a)$, est définie, pour $a > 0$, par :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du\,.$$

Cette intégrale est définie pour tout $a > 0$.

2.1.2 Propriétés :
> La fonction gamma est continue et différentiable.
> Pour tout $a > 1$, on a $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$.
> En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.
> $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}$.

2.2 La loi gamma :

La loi gamma avec paramètre α et λ, avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, est la loi continue dont la densité est :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

On note :

$$T \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

pour indiquer que T suit une loi gamma de paramètre $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. Si $\alpha = 1$ alors c'est tout simplement une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.3 Moments :

Un calcul élémentaire donne :

$$E(T^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_T(t)dt = \int_0^{+\infty} t^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^n} \int_0^{+\infty} (\lambda t)^{n+\alpha-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}.$$

Et en particulier on a $E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $E(T^2) = \frac{\alpha^2+\alpha}{\lambda^2}$. D'où $Var(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

2.4 Fonction génératrice des moments :

Pour $u \geq \lambda$, on a :

$$\varphi_T(u) = E(e^{uT}) = \infty.$$

Pour $u < \lambda$, on obtient :

$$\varphi_T(u) = E(e^{uT}) = \int_0^{+\infty} e^{ut} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-(\lambda-u)t} dt$$
$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda-u)^\alpha} \int_0^{+\infty} ((\lambda-u)t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda-u)t} (\lambda-u)dt$$
$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda-u)^\alpha} \int_0^{+\infty} v^{\alpha-1} e^{-\lambda v} dv = \left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^\alpha.$$

D'où :

$$\varphi_T(u) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^\alpha & si\ u < \lambda \\ \infty & si\ u \geq \lambda \end{cases}.$$

2.5 Théorèmes :

2.5.1 Théorème : Supposons que $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent, respectivement, $\Gamma(\alpha_1, \lambda), \dots, \Gamma(\alpha_n, \lambda)$. Posons $Z = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors Z suit $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda)$.

Démonstration : Sous les hypothèses du théorème, on a :

$$\varphi_Z(u) = E(e^{Zu}) = E\left(e^{u\sum_{i=1}^n X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{uX_i}\right) = \prod_{i=1}^n E(e^{uX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda - u}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - u}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

On reconnait la fonction génératrice des moments de la loi gamma $\Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \lambda)$. En vertu du théorème d'unicité des fonctions génératrices des moments, on conclut que $Z \sim \Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \lambda)$

Corollaire : Puisque la loi exponentielle est une loi gamma(1, λ), alors si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires qui suivent la loi exponentielle(λ) $i.i.d$, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable aléatoire gamma(n, λ).

3 Loi de Poisson :

3.1 Définition :

La loi de Poisson, avec le paramètre $\lambda \geq 0$, est la loi discrète dont la fonction de masse est donnée par :

$$p_X(k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} & si\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

On note :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

pour indiquer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$.

3.2 Moments factoriels :

Si X est une distribution de poisson de paramètre λ et si m est un entier positif, alors le m^e moment factoriel de X est donnée par :

$$\begin{aligned} E\Big(X(X-1)\dots\big(X-(m-1)\big)\Big) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\dots\big(k-(m-1)\big)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=m}^{n} k(k-1)\dots\big(k-(m-1)\big)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=m}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-m)!} = e^{-\lambda}\lambda^m \sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda^{k-m}}{(k-m)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^m \sum_{l=0}^{n} \frac{\lambda^l}{(l)!} = e^{-\lambda}\lambda^m e^{\lambda} = \lambda^m. \end{aligned}$$

En particulier, on obtient $E(X) = \lambda$, et on a :

$$\begin{aligned} Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 &= E\big(X(X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

3.3 La loi de Poisson et la loi binomiale :

Fixons $\lambda > 0$, et pour chaque entier positif n tel que $\frac{\lambda}{n} < 1$, considérons X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale(n, p_n), avec $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots\big(n-(k-1)\big)}{n^k} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La dernière égalité vient du fait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\dots\big(n-(k-1)\big)}{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k = 1.$$

En pratique, ce résultat nous dit que si n est grand et si p est petit, alors on peut exprimer la loi binomiale(n,p) par la loi de Poisson(np).L'approximation est très bonne lorsque $n \geq 50$ et $np < 10$.

Processus de Poisson :

1 Processus de dénombrement :

Soit $T_1, T_2, \dots$, des variables aléatoire satisfaisant $P(T_i > 0) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n} T_i \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Enfin posons pour $t \geq 0$:

$$N(t) = \max(n \geq 0 : \; S_n \leq t)$$

Autrement dit :

$$N(t) = \begin{cases} 0 & si \quad S_0 \leq t < S_1 \\ \vdots & \\ k & si \quad S_k \leq t < S_{k+1} \\ \vdots & \end{cases}$$

Ou bien

$$N(t) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t\}}$$

Le processus aléatoire $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$ est appelé alors un processus de dénombrement.
Remarque : Si les S_n représente le temps où surviennent certains évènements alors $N(t)$ représente le nombre d'évènement qui sont survenus durant l'intervalle de temps $[0, t[$.Ceci justifie la définition précédente.
Les T_n représente le temps qui faut pour qu'un évènement survienne, elles sont appelé les durées de vie.

2 Processus de renouvellement :

Un processus de dénombrement est dit un processus de renouvellement si les durées de vie des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

3 Processus de Poisson :

3.1 Première définition : Un processus de Poisson avec intensité λ est un processus de renouvellement dont les durées de vie suivent une loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

L'appellation processus de Poisson est justifiée par le théorème suivant :

3.2 Théorème : Si $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$ est un processus de renouvellement avec distribution de durée de vie exponentielle de paramètre λ alors :

$$\forall t \geq 0 \qquad N(t) \sim P(\lambda t)$$

Démonstration :

On remarque que $(\forall t \geq 0)(\forall n \geq 0) \quad N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$ ce qui donne

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$$

Et en vertu de la propriété de l'additivité de la loi gamma et de l'analogie entre la loi exponentielle et la loi gamma de paramètre$(1, \lambda)$, on a :

$$S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$$

En utilisant ces deux observations on obtient :

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1)$$

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

$$P(N(t) = n) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} - \frac{\lambda^{n+1}}{\mathrm{n}!} s^n e^{-\lambda s}\, ds$$

$$P(N(t) = n) = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda^n}{\mathrm{n}!} s^n e^{-\lambda s}\right) ds = \frac{\lambda^n}{\mathrm{n}!} s^n e^{-\lambda s}\Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Ce qui prouve que

$$N(t) \sim P(\lambda t) \quad \forall t \geq 0$$

On va généraliser le théorème précédent :

3.3 Théorème : Si $(N(t)\ ;\ t \geq 0)$ est un processus de Poisson avec intensité λ alors :
$a >$ Pour s, t fixe tels que $0 \leq s \leq t < \infty$,

$$N(t) - N(s) \sim P\big(\lambda(t-s)\big)$$

$b >$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout choix de nombre réel $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n < \infty$, les variables aléatoire $N(t_1) - N(t_0),\ N(t_2) - N(t_1), \ldots,\ N(t_n) - N(t_{n-1})$ sont mutuellement indépendantes.

Démonstration : On fixe s et t on a alors :
$N(t) - N(s) =$ le nombre d'évènements survenus dans l'intervalle $[s, t[$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$U_k =$ ''Le temps qui faut pour que le kième évènement survienne dans $[s, +\infty[$''.
Et on pose $V_1 = U_1 - s$ et $V_k = U_k - U_{k-1}$

On remarque que $U_n - s = \sum_{i=1}^{n} V_i$

On va maintenant montrer que $V_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$:

Pour faire il suffit de montrer que $\forall v \geq 0 \quad P(V_1 > v) = e^{-\lambda v}$. Donc, soit $v \geq 0$:
Supposons $N(s) = k$ et que $S_k = r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r \leq s$.
On a à cause de l'indépendance entre les durées de vie :

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(V_1 > v / \mathrm{N(s)} = \mathrm{k\ et\ S_k} = \mathrm{r})$$

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(U_1 - \mathrm{s} > v / \mathrm{N(s)} = \mathrm{k\ et\ S_k} = \mathrm{r})$$

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(U_1 > v + \mathrm{s} / \mathrm{N(s)} = \mathrm{k\ et\ S_k} = \mathrm{r}\ )$$

Et comme la condition $\mathrm{N(s)} = \mathrm{k}$ entraine que $U_1 = \mathrm{S_{k+1}}$ on a :

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(\mathrm{S_{k+1}} > v + \mathrm{s} / \mathrm{N(s)} = \mathrm{k\ et\ S(k)} = \mathrm{r})$$

On a, sous les conditions $\mathrm{N(s)} = \mathrm{k}$ et $\mathrm{S_k} = \mathrm{r}$, $\mathrm{S_{k+1}} > v + \mathrm{s} \Leftrightarrow \mathrm{T_{k+1}} > \mathrm{v} + (\mathrm{s} - \mathrm{r})$

On obtient donc :

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(\mathrm{T_{k+1}} > v + (\mathrm{s} - \mathrm{r}) / \mathrm{N(s)} = \mathrm{k\ et\ S_k} = \mathrm{r})$$

Et vu que la condition $\mathrm{N(s)} = \mathrm{k}$ et $\mathrm{S_k} = \mathrm{r}$ est équivalente à $\mathrm{S_k} = \mathrm{r}$ et $\mathrm{T_{k+1}} > s - r$

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(\mathrm{T_{k+1}} > v + (\mathrm{s} - \mathrm{r}) / \mathrm{T_{k+1}} > s - r\ et\ \mathrm{S_k} = \mathrm{r})$$

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(\mathrm{T_{k+1}} > v + (\mathrm{s} - \mathrm{r}) / \mathrm{T_{k+1}} > s - r\ )$$

Puisque $\mathrm{T_{k+1}}$ est indépendant de $\mathrm{S_k}$.
On obtient donc :

$$P(V_1 > v) = \mathrm{P}(\mathrm{T_{k+1}} > v) \qquad \ldots (*)$$

Et par la propriété de l'absence de mémoire de la loi exponentielle on obtient :

$$P(V_1 > v) = e^{-\lambda v}$$

Les autres variables V_i sont indépendantes et identiquement distribuée, puisque ce sont des temps entre deux évènements successifs dans un processus de renouvellement. Donc les durées de vie sont des exponentielles de paramètre λ.

Puis, en faisant la même démonstration qu'en haut : en remplaçant $N(t)$ par $N(t) - N(s)$ et les $\mathrm{T_i}$ par les V_i et donc $\mathrm{S_n}$ par $U_n - s$ on aura :

$$P(N(t) - N(s) = n) = P(N(t) - N(s) \geq n) - P(N(t) - N(s) \geq n + 1)$$

$$P(N(t) - N(s) = n) = \ P(U_n - s \leq t - s) - P(U_{n+1} - s \leq t - s)$$

$$P(N(t) - N(s) = n) = \int_0^{t-s} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda^{n+1}}{\mathrm{n!}} x^n e^{-\lambda x} dx$$

$$P(N(t) - N(s) = n) = \int_0^{t-s} \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda^n}{\mathrm{n!}} x^n e^{-\lambda x}\right) ds = \frac{\lambda^n}{\mathrm{n!}} x^n e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=t-s} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

On obtient que $N(t) - N(s) \sim P\big(\lambda(t-s)\big)$.

Avec les mêmes notations qu'en haut, si on pose :

- $V_i^{(1)}$: Le temps de réalisation du i-ème évènement dans$[t_{n-1}, t_n]$
- $V_j^{(2)}$: Le temps de réalisation du j-ème évènement dans$[t_n, t_{n+1}]$

Et sous les conditions :

$$N(t_{n-1}) = k \ et \ N(t_n) = k'$$

Alors d'après le résultat $(*)$ de la démonstration précédente :

$$P\left(V_i^{(1)} > v, V_j^{(2)} > v'\right) = \mathrm{P}\big(\mathrm{T_{k+i}} > v, \mathrm{T_{k'+j}} > v'\big)$$

$$P\left(V_i^{(1)} > v, V_j^{(2)} > v'\right) = \mathrm{P}(\mathrm{T_{k+i}} > v)\mathrm{P}\big(\mathrm{T_{k'+j}} > v'\big)$$

$$P\left(V_i^{(1)} > v, V_j^{(2)} > v'\right) = \mathrm{P}\left(V_i^{(1)} > v\right)\mathrm{P}\left(V_j^{(2)} > v'\right)$$

Donc les durées de vie du processus $N(t_n) - N(t_{n-1})$ et de $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ sont indépendantes car celles de $N(t)$ le sont (pour $t \geq t_{n+1}$), d'où l'indépendance entre $N(t_n) - N(t_{n-1})$ et $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ deux processus définit sur deux intervalles disjoints

De cette généralisation on va voir que l'inverse de la première définition est aussi vrai.

Soit $(N(t); t \geq 0)$ un processus de dénombrement satisfaisant les conditions "a" et "b" données ci-haut. Calculons la distribution du temps du premier renouvellement T_1

$$T_1 = \min\{t > 0 : N(t) = 1\}$$

Pour $t > 0$ on a :

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

ceci provient du point a : $N(t) - N(s) \sim P\big(\lambda(t-s)\big)$ avec s =0.
On a donc :

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Ceci montre que $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
Pour $n > 1$, et sous la condition $N(s) = n-1$ on pose :

$$T_n = \min\{t > 0 : N(t) = n\} - \min\{t > 0 : N(t) = n-1\}$$

$$P(T_n > t) = P(N(s+t) - N(s) = 0) = e^{-\lambda(t+s-s)}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

D'où $\forall n > 1$, $T_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Le point b nous assure l'indépendance entre les T_k.

3.4 Définitions : Soit $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ un processus aléatoire :
> La variable $X_v - X_u$ s'appelle l'accroissement du processus $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ sur $[u, v]$.
> On dit que $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ est un processus à accroissements stationnaires lorsque la distribution de l'accroissement sur un intervalle dépend seulement de la longueur de l'intervalle :

$$\mathcal{L}(X_{s+t} - X_s) = \mathcal{L}(X_t - X_0) \qquad \forall s \geq 0$$

> On dit que $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ est un processus à accroissements indépendants lorsque les accroissements correspondants à des intervalles disjoints sont des v.a.r indépendantes, c'est-à-dire pour un choix de $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout choix de nombre réel $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n < \infty$, les v.a.r $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont des variables mutuellement indépendantes.

Donc l'inverse de la première définition du processus de Poisson est donné :

3.5 Deuxième définition : Un processus de Poisson avec intensité λ est un processus de dénombrement avec accroissements stationnaires et indépendants avec pour tout

$$0 \leq s \leq t < \infty \qquad N(t) - N(s) \sim P\big(\lambda(t-s)\big)$$

Il existe une autre définition du processus :

3.6 Troisième définition : Un processus de Poisson avec intensité λ est un processus de dénombrement qui satisfait les conditions suivantes :
Quand $h \to 0$

1>$P(N(t+h) - N(t) = 0/N(t) = k) = 1 - \lambda h + o(h)$
2>$P(N(t+h) - N(t) = 1/N(t) = k) = \lambda h + o(h)$
3>$P(N(t+h) - N(t) > 1/N(t) = k) = o(h)$

On dit que la fonction g est un petit ordre de u lorsque u tend vers 0 et on note $g(u) = o(u)$; $u \to 0$ si on a $\lim_{u\to 0} \frac{g(u)}{u} = 0$.

Si on considère que $N(t) \sim P(\lambda t)$ et on fixe t un nombre réel positif et k un nombre entier non négatif alors on a :

$$P(N(t+h) - N(t) = 0/N(t) = k) = P(N(t+h) - N(t) = 0) = e^{-\lambda h}$$
$$= 1 - \lambda h + o(h)$$

Car les accroissements sont indépendants et que $N(t+h) - N(t) \sim P(\lambda h)$ puis on utilise le développement de Taylor de la fonction exponentielle.
Les deux autres égalités s'obtiennent de la même façon.

Maintenant on considère un processus de dénombrement $(N(t); t \geq 0)$ qui satisfait les trois conditions citées ci-haut.
On pose pour $\forall t \geq 0$ et pour $n = 0,1,2, \ldots$:

$$f_n(t) = P(N(t) = n)$$

Considérons d'abord la fonction $f_0(t)$. De la première condition, on obtient :

$$f_0(t+h) = P(N(t+h) = 0)$$
$$f_0(t+h) = P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0/N(t) = 0)$$
$$f_0(t+h) = f_0(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big)$$

On a donc :

$$\frac{f_0(t+h) - f_0(t)}{h} = f_0(t)\left(-\lambda + \frac{o(h)}{h}\right)$$

En faisant tendre h vers 0 on obtient :

$$f_0^{'(t)} = -\lambda f_0(t)$$

Avec condition initiale :

$$f_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$$

Qui est une équation différentiable avec condition initiale dont la solution est :

$$f_0(t) = e^{-\lambda t}$$

D'où $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

En utilisant un raisonnement par récurrence générale on obtient :
en supposant que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ avec $n > 0$

$$f_i(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

On a :

$$\begin{aligned}
f_n(t+h) &= P(N(t+h)=n)\\
f_n(t+h) &= P(N(t)=0)P(N(t+h)-N(t)=n/N(t)=0)\\
&\quad + P(N(t)=1)P(N(t+h)-N(t)=n-1/N(t)=1)+\cdots\\
&\quad + P(N(t)=n-1)P(N(t+h)-N(t)=1/N(t)=n-1)\\
&\quad + P(N(t)=n)P(N(t+h)-N(t)=0/N(t)=n)\\
f_n(t+h) &= f_0(t)o(h)+\cdots+f_{n-2}(t)o(h)+f_{n-1}(t)\big(\lambda h+o(h)\big)\\
&\quad + f_n(t)\big(1-\lambda h+o(h)\big)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h}\\
&\qquad = f_0(t)\frac{o(h)}{h}+\cdots+f_{n-2}(t)\frac{o(h)}{h}+f_{n-1}(t)\left(\lambda+\frac{o(h)}{h}\right)\\
&\qquad + f_n(t)\left(-\lambda+\frac{o(h)}{h}\right)
\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers l’infini on obtient :

$$f_n^{'(t)} = -\lambda f_n(t)+\lambda f_{n-1}(t) = -\lambda f_n(t)+\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n-1!}$$

Avec condition initiale :

$$f_n(0) = P(N(0)=n) = 0$$

Qui est une équation différentiable avec condition initiale dont la solution est :

$$f_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

D’où $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

Ceci montre que $N(t)\sim P(\lambda t)$ pour tout $t \geq 0$.

Il est clair que si $(N(t), t \geq 0)$ vérifie les conditions 1,2 et 3 alors c’est un processus à accroissements stationnaires et indépendants.

Propriétés :

1 Loi de $(S_1, \dots, S_n)$ sachant que $N(t) = n$:

Soit $(N(t)\,; t \geq 0)$ un processus de Poisson avec intensité λ.

Fixons t et calculons la loi conditionnelle de S_1 sachant que $N(t) = 1$, alors pour $0 \leq s \leq t$ on a :

$$P(S_1 \leq s/N(t) = 1) = P(N(s) \geq 1/N(t) = 1)$$
$$P(S_1 \leq s/N(t) = 1) = P(N(s) = 1/N(t) = 1)$$
$$P(S_1 \leq s/N(t) = 1) = \frac{P(N(s) = 1 \cap N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$
$$P(S_1 \leq s/N(t) = 1) = \frac{P(N(s) = 1 \cap N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$
$$P(S_1 \leq s/N(t) = 1) = \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$
$$P(S_1 \leq s/N(t) = 1) = \frac{\left(e^{-\lambda s}\lambda s\right)\left(e^{-\lambda(t-s)}\right)}{\left(e^{-\lambda t}\lambda t\right)} = \frac{s}{t}$$

Donc la loi conditionnelle de S_1 sachant $N(t) = 1$ est la loi uniforme sur $[0, t]$.

Maintenant, calculons la fonction de répartition conjointe du couple (S_1, S_2) sachant que $N(t) = 2$ en un point (s_1, s_2) tel que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t$ on obtient :

$$P[(S_1 \leq s_1) \cap (S_2 \leq s_2)/N(t) = 2]$$
$$= \frac{P[(S_1 \leq s_1) \cap (S_2 \leq s_2) \cap (N(t) = 2)]}{P(N(t) = 2)}$$
$$= \frac{P[(N(s_1) = 1) \cap (N(s_2) - N(s_1) = 1) \cap (N(t) - N(s_2) = 0)]}{P(N(t) = 2)}$$
$$+ \frac{P[(N(s_1) = 2) \cap (N(s_2) - N(s_1) = 0) \cap (N(t) - N(s_2) = 0)]}{P(N(t) = 2)}$$
$$= \frac{\left(e^{-\lambda s_1}\lambda s_1\right)\left(e^{-\lambda(s_2 - s_1)}\lambda(s_2 - s_1)\right)\left(e^{-\lambda(t - s_2)}\right) + \left(e^{-\lambda s_1}\frac{(\lambda s_1)^2}{2!}\right)\left(e^{-\lambda(s_2 - s_1)}\right)\left(e^{-\lambda(t - s_2)}\right)}{\left(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}\right)}$$
$$= \frac{2s_1(s_2 - s_1) + {s_1}^2}{t^2}$$

On obtient, en dérivant par rapport à s_2 et puis par rapport à s_1, la densité de la loi conjointe des statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille 2 issu de la loi uniforme sur $[0, t]$.

Pour la loi conditionnelle de $(S_1, \dots, S_n)$ sachant $N(t) = n$, On constate qu'il n'y a que le terme $\frac{P[(N(s_1)=1)\cap(N(s_2)-N(s_1)=1)\cap\dots\cap(N(s_n)-N(s_{n-1})=1)\cap(N(t)-N(s_n)=0)]}{P(N(t)=2)}$ qui dépend de $s_1, \dots, s_n$ donc tout les autres s'élimine après dérivation et on obtient :

$$P[(S_1 \leq s_1) \cap \dots \cap (S_n \leq s_n)/N(t) = n]$$
$$= \frac{\left(e^{-\lambda s_1}\lambda s_1\right)\left(e^{-\lambda(s_2-s_1)}\lambda(s_2-s_1)\right)\dots\left(e^{-\lambda(s_n-s_{n-1})}\lambda(s_n-s_{n-1})\right)\left(e^{-\lambda(t-s_n)}\right)}{\left(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right)}$$

$$f(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & si\ 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t \\ 0 & sinon \end{cases}$$

C'est la loi des statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille n issu de la loi uniforme sur $[0, t]$.

On résume tout ça dans le théorème suivant :
La densité conditionnelle de $(S_1, \dots, S_n)$ sachant $N(t) = n$ est donné par :

$$\mathcal{L}((S_1, \dots, S_n)/N(t) = n) = \mathcal{L}(W_{(1)}, \dots, W_{(n)})$$

où $W_{(1)}, \dots, W_{(n)}$ dénotent les statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille n issu de la loi uniforme sur$[0, t]$

2 Superposition :

2.1 Théorème : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des nombres réels strictement positifs et soit $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$.
Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, le processus $(N_j(t); t \geq 0)$ soit un processus de Poisson avec intensité λ_j tels que ces m processus soient indépendants les uns des autres, alors pour chaque $t \geq 0$ on a :

$$N(t) = N_1(t) + \dots + N_m(t)$$

est un processus de Poisson avec intensité λ.

Démonstration : Pour faire il suffit de vérifier que les durées de vie du processus de dénombrement $(N(t); t \geq 0)$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées, avec distribution exponentielle de paramètre λ**.**
Posons

- T_k : le temps entre le $(k-1)i\grave{e}me$ et le $(k)i\grave{e}me$ évènement du processus $(N(t); t \geq 0)$.
- $T_k^{(j)}$: le temps entre le $(k-1)i\grave{e}me$ et le $(k)i\grave{e}me$ évènement du processus $(N_j(t); t \geq 0)$.

On a alors $T_k = \min\left\{T_k^{(1)}, \dots, T_k^{(m)}\right\}$ et $T_k^{(j)} \sim exponentielle(\lambda_j)$. De plus comme les processus $(N_j(t); t \geq 0)$ sont indépendant les variables aléatoires $T_k^{(j)}$ le sont aussi.
Alors :

$$P(T_k > t) = P\left(\min\left\{T_k^{(1)}, \dots, T_k^{(m)}\right\} > t\right)$$

$$P(T_k > t) = P\left(T_k^{(1)} > t, \dots, T_k^{(m)} > t\right)$$
$$P(T_k > t) = P\left(T_k^{(1)} > t\right) \dots . P\left(T_k^{(m)} > t\right)$$
$$P(T_k > t) = e^{-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j t} = e^{-\lambda t}$$

Donc $P(T_k \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour tout $k \geq 1$ce qui montre que les T_k sont des exponentielles de paramètre λ.
Et d'après la première définition, $(N(t); t \geq 0)$ est bel et bien un processus de Poisson avec intensité λ, on dit que $(N(t); t \geq 0)$ est la superposition des processus $\left(N_j(t); t \geq 0\right)$.

3 Décomposition :

3.1 Théorème : Soit m un entier positif et soit$(p_1, \dots, p_m)$ un vecteur satisfaisant pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ $0 \leq p_j \leq 1$ tels que $p_1 + \dots + p_m = 1$. Fixons $\lambda > 0$ et considérons un processus de Poisson avec intensité λ, disons $(N(t); t \geq 0)$.
Supposons que :

1. Il y a m types d'évènements dans le processus $(N(t); t \geq 0)$.
2. A chaque fois que survient un évènement, on a une probabilité $p_1$que ce soit un évènement de type 1, une probabilité $p_2$que ce soit un évènement de type 2 …etc.
3. Les attributions de types sont indépendantes les une des autres

Pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, dénotons par $\left(N_j(t); t \geq 0\right)$ le processus de dénombrement des évènements de type j. Alors :

$\left(N_j(t); t \geq 0\right)$ est un processus de Poisson avec intensité λp_j.

Les processus $\left(N_j(t); t \geq 0\right)$ sont indépendants.

Démonstration : On démontrera ce théorème pour $m = 2$ on obtient le résultat final en itérant la procédure de décomposition.

Soit $0 < s < t$ et $k \geq 0$. On a :

$$P(N_1(t) - N_1(s) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N(t) - N(s) = n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(N_1(t) - N_1(s) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(N_1(t) - N_1(s) = k) = \frac{(p\lambda(t-s))^{n-k}}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\left(\lambda(t-s)(1-p)\right)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$P(N_1(t) - N_1(s) = k) = \frac{(p\lambda(t-s))^{n-k}}{k!} e^{-\lambda p(t-s)}$$

On obtient de façon similaire que :

$$P(N_2(t) - N_2(s) = k) = \frac{((1-p)\lambda(t-s))^{n-k}}{k!} e^{-\lambda(1-p)(t-s)}$$

En suite, soient $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_n$ alors en posant $Y_i^j = N_j(t_i) - N_j(s_i)$ et $Y_i = N(t_i) - N(s_i)$:

$$P\left(Y_i^1 = n_i, Y_i^2 = m_i \, , 1 \leq i \leq n\right)$$

$$= P(Y_i^1 = n_i \, , 1 \leq i \leq n / Y_i = m_i + n_i \, , 1 \leq i \leq n \,) P(Y_i = m_i + n_i \, , 1 \leq i \leq n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{m_i + n_i}{n_i} p^{n_i} (1-p)^{m_i} \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = m_i + n_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{m_i + n_i}{n_i} p^{n_i} (1-p)^{m_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{\left(\lambda(t_i - s_i)\right)^{m_i + n_i}}{(m_i + n_i)!} e^{-\lambda(t_i - s_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\left(\lambda p(t_i - s_i)\right)^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda p\,(t_i - s_i)} \frac{\left(\lambda(1-p)(t_i - s_i)\right)^{m_i}}{m_i!} e^{-\lambda(1-p)(t_i - s_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i^1 = n_i) P(Y_i^2 = m_i)$$

Les processus $(N_1(t); t \geq 0)$ et $(N_2(t); t \geq 0)$ sont des processus à accroissements stationnaires et indépendants de loi de poisson et sont indépendant l'un de l'autre.

Conclusion :

Le Processus de Poisson est un outil élémentaire dans l'étude des phénomènes aléatoires dans le temps. Il permet d'étudier le nombre d'occurrences d'un phénomène dans une période déterminée, il permet même de décomposer l'étude d'un phénomène en l'étude de phénomènes plus particuliers, ou le contraire, de rassembler l'étude de plusieurs phénomènes en l'étude d'un phénomène plus générale.

Comme exemple, on peut considérer le nombre de catastrophe naturelle survenu en une année dans une région quelconque, qui se réalise selon un processus de Poisson. Puis de le décomposer en deux études :
celle des catastrophes causé par l'homme et celle des catastrophes naturelles, qui se réalisent selon deux autres Processus.
Ou bien de considérer le nombre de secousse sismique, d'inondations et d'orages et qui se réalisent, chacun selon un processus de Poisson différent, et de les ramener à l'étude des catastrophes naturelles.

On a vu aussi le lien existant entre la statistique d'ordre issu d'un échantillon de loi uniforme et une loi conditionnelle des durées de vie sachant le nombre d'évènements survenu dans l'intervalle $[0, t]$.

Bibliographie :

[1] Claude Bélisle « Note De Cours » Université de Laval, Canada.

[2] Sheldon M.Ross « Initiation Aux Probabilités » Presses polytechniques romandes.

[3] Y.Velenik « Probabilités Et Statistiques » Université de Genève