

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL**



**MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
MAGISTER EN GENIE CIVIL**

**OPTION : SEISMIC RISK EARTHQUAKE ENGINEERING**

*Présenté et soutenu le 21 /09 / 2013 par :*

M<sup>me</sup>DIB Hayat

**CLASSIFICATION DES PHENOMENES D'INSTABILITE DES  
PROFILES FORMES A FROIDS**

Jury De SOUTENANCE

Dr. A. MEGNOUNIF	Prof	Univ. Tlemcen	Président
Dr. N. BOUMECHRA	Prof	Univ. Tlemcen	Examineur
Dr. K. HAMDAOUI	MCB	Univ. Tlemcen	Examineur
Dr. M. DJAFOUR	Prof	Univ. Tlemcen	Encadreur

## **Préface**

*“Quels que soient leurs goûts, quels que soient leurs intérêts les futurs ingénieurs civils doivent apprendre à construire. La plupart d’entre eux bâtiront un jour des bâtiments ou des ponts.*

*Il est donc essentiel que tous se forment dans le domaine des structures. Pour gagner leur enthousiasme, il est indispensable que l’art de l’ingénieur leur soit présenté de manière rationnelle et analytique, c’est ainsi qu’ils pourront acquérir l’esprit de synthèse inhérent à leur formation”*

*Extrait de la préface, signé en novembre 1977*

*Par le professeur Jean-Claude Badoux,*

## **REMERCIEMENTS**

*Avant de présenter ce travail, je tiens à exprimer ma gratitude ainsi que ma profonde reconnaissance à mes encadrateurs, Monsieur DJAFOUR M. et MATTALLAH M. pour toute la confiance qu'ils m'ont témoigné, leurs conseils m'ont été particulièrement précieux pour l'élaboration de ce travail sous leur bienveillance direction ainsi à DJELLIL.M pour son aide précieux.*

*Je désire marquer ma reconnaissance envers les membres du juré qui ont accepté d'examiner et d'évaluer ce travail :*

- *MEGNOUNIF. A*
- *BOUMECHRA. N*
- *HAMDAOUI. K*

*Je tiens aussi à remercier du fond du cœur toute ma famille, tous mes proches, pour l'aide morale qu'ils m'ont prodiguée tout au long de la période de mes études.*

*Et enfin, je voudrais remercier mes parents qui m'ont encouragé à poursuivre mes études et je leur dédie ce mémoire.*

## Résumé

L'utilisation des structures métalliques ne cesse de croître malgré leur mode de défaillance et de déformation compliqué.

Sous une charge compressive les profilés formés à froids (P.F.F) peuvent subir plusieurs types d'instabilité (locale(L)- distorsionnelle (D)- globale(G) ou d'autres) d'où le recours aux méthodes numériques pour déterminer leurs charges critiques devient indispensable.

L'estimation de la charge critique élastique correcte est indispensable pour la procédure de dimensionnement et la conception et le design et afin de faciliter à l'ingénieur la détermination de cette charge critique utile, Adany et Schafer [1,2,3] ont présenté une nouvelle méthode (CFSM) capable de classer les différents modes d'instabilité en utilisant la méthode de bande finis(FSM).

Comme la FSM, la méthode des splines bandes finis (SFSM) est développée pour analyser le comportement des plaques et les membres prismatiques, elle utilise une fonction spline cubique pour l'interpolation longitudinal et réussit à produire des résultats plus efficaces que la méthode des éléments finis(FEM) et la FSM et en plus, prend en compte les différentes conditions aux limites.

Le but de ce travail est la proposition d'une technique de classification des modes d'instabilités des profilés formés à froids en utilisant la méthode des splines bande finis en se basant sur les hypothèses de la GBT (Generalized Beam Theory), pour un début le domaine couvert par l'étude est le domaine distortional-global(GD), un mode qui présente des difficultés et un manque d'information sur la cinématique et le mécanisme de déformation.

**Mots clé** : Stabilité – parois mince – décomposition modale – méthode des splines bandes finis contrainte

## Abstract

The use of the metal structures is growing inspite of their complicated mode of failure and deformation. Under a compressive load , the thin-walled members have can undergo different types of instability (local (L) - distortional (D) - global(G) or others) from where the recourse to numerical methods to determine their critical loads becomes essential. In order to facilitate to the engineer the determination of this useful critical load for the design , Adany and Schafer [1,2,3] presented a new method (CFSM) able to classify the various modes of instability by using the finite strip method (FSM).

Like the FSM, the Spline Finite Strip Method(SFSM) developed to analyze the behaviour of the plates and the prismatic members, it uses a cubic spline function for the interpolation longitudinal and succeeds in producing results more effective than the Finite Element Method (FEM) and the FSM . Moreover it takes into account different boundary conditions.

The final objective of this work is the proposal of a technique that classifies the instability modes of the thin-walled members under compressive loads by using the SFSM and while being based on the assumptions of the GBT (Generalized Beam Theory), and one concentrated primarily (for a beginning) on the mode GD (Distortionnal and Global) a mode which presents difficulties and a lack of information on the kinematics and the mechanism of deformation.

**Keywords** : Stability – Thin-Walled – Décomposition modal– Constrained Spline Finite Strip Method.

## ملخص

استخدام الهياكل المعدنية لا يزال ينمو على الرغم من فشلها في أوضاع معقدة و التشوه الذي يمكن أن تتعرض إليه.

تحت تأثير الضغط يمكن أن تخضع أقسام الهياكل المعدنية لعدة أنواع من عدم الاستقرار و الانبعاج (Local – Distortional- Global) أو غيرها، حيث استخدام الطرق الرقمية لتحديد قوة الحمل الحرجة ضروري و يصبح لا غنى عنه.

للتسهيل للمهندس حساب هذه قوة الحمل الحرجة اللازمة للتصميم والبناء، Adany , Schafer[1,2,3] قدما طريقة جديدة (CFMS) قادرة على تصنيف أنماط مختلفة من عدم الاستقرار باستخدام طريقة (SFSM).

مثل (FSM) طريقة (SFSM) تم تطويرها لتحليل و دراسة سلوك الهياكل، حيث يستخدم دالة (Spline) وتمكنا من تحقيق نتائج أكثر فعالية مثل لطريقة (FEM) و (FSM) ، وبالإضافة إلى ذلك، يأخذ بعين الاعتبار شروط الحدود المختلفة للبناء .

والهدف من هذا العمل هو اقتراح تقنية جديدة لتصنيف أنماط عدم الاستقرار للهياكل المعدنية المصنوعة تحت تأثير درجة حرارة باردة، باستخدام طريقة (SFSM) و ذلك بالاستناد إلى افتراضات مأخوذة من نظريته (GBT) ،وقد ركزنا أساسا و كبدائية دراسة نوع عدم الاستقرار (Global-Distorsional)، الذي يشكل الصعوبات وعدم وجود معلومات كافية عليه.

### كلمات مفتاح

توازن - هياكل رقيقة - تصنيف أنماط عدم الاستقرار -

« Constrained Spline Finite Strip Method »

# Table des matières

---

<b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>1</b>
1-1 Introduction: .....	2
1-2 Les profils formés à froids.....	2
1-3 Position du problème.....	5
1-4 L'objectif du travail.....	7
1-5 Plan de mémoire .....	8
<b>CHAPITRE 2 : LES PHENOMENES D'INSTABILITE DES PROFILS FORMES A FROIDS.....</b>	<b>9</b>
2-1 Introduction .....	10
2-2 Définition des phénomènes d'instabilité .....	11
2-2-1 Instabilité globale .....	12
2-2-2-1 Exemple : instabilité locale .....	12
2-2-2 Instabilité globale .....	13
2-2-3 Instabilité distorsionnelle .....	15
2-2-3-1 Discussion et analyse des investigations sur le mode distorsionnelle.....	16
2-3 Interaction des modes d'instabilité .....	20
2-4 Règles de calcul des PFF.....	20
2-4-1 Méthode de largeur efficace.....	20
2-4-2 Méthode de résistance directe (Direct strength method : DSM) .....	24
<b>CHAPITRE 3 : METHODE DE CALCUL DE LA CONTRAINTE DISTORSIONNELLE.....</b>	<b>27</b>
3-1 Introduction : .....	28
3-2 Méthode de Schäfer : .....	28
3-3 Méthode de Lau Hancock : .....	30
3-4 Les méthodes numériques .....	31
3-4-1 la méthode des splines bandes finis :la théorie .....	34
3-4-1-1 Modélisation : La fonction standard B3-spline :.....	34
3-4-2-2 Notations et Repères: .....	35
3-4-2-3 Modifications des C A L : .....	36
3-4-2-4 Fonctions de déplacement :.....	39
3-4-2-4-1 Déplacement membranaire :.....	40
3-4-2-4-2 Déplacement flexionnel : .....	42

3-4-2-5	Bilan énergétique : .....	43
3-4-2-5-1	Energie de déformation : .....	43
3-4-2-5-2	Travail des forces extérieures .....	44
3-4-2-5-3	Energie potentielle totale .....	44
3-4-2-6	Matrice de transformation géométrique .....	47
3-4-2-7	Assemblage des matrices .....	48
3-5	La théorie généralisée des poutres (Généralized Beam Theory G.B.T).....	49
 <b>CHAPITRE 4: CONSTRAINED FINITE STRIP METHOD : CFSM.....</b>		<b>50</b>
4-1	Introduction .....	51
4-2	Notation: Fonction de forme, DDL.....	53
4-3	Definition des modes d'instabilité .....	54
4-4	Derivation de la matrice de contrainte RGD.....	55
4-4-1	Implémentation de la 1ère hypothèse : Hypothèse de Vlassov .....	55
4-4-2	Implementation de la 2ème hypotheses .....	59
4-4-3	Assemblage de RGD .....	64
4-5	Exemple de validation.....	65
4-6	Conclusion.....	67
 <b>CHAPITRE 5: CONSTRAINED SPLINE FINITE STRIP METHOD: CSFSM .....</b>		<b>68</b>
5-1	Introduction .....	69
5-2	Formulationn de la CSFSM.....	70
5-2-1	Equation de la stabilité .....	70
5-2-2	Matrice de contrainte .....	71
5-2-3	matrice de contrainte condernant les deformations membranaires.....	71
5-2-4	Matrice de rigidité d'une bande dans l'espace GD : .....	77
5-2-5	Conséquence des hypothèses 1 et 2 sur la matrice de rigidité :.....	79
5-2-6	Développement de la matrice de contrainte du sous espace GD : .....	81
5-3	Effet des CAL sur l'instabilité distortionelle : .....	82
 <b>CHAPITRE 6: VALIDATION ET APLICATION NUMERIQUE.....</b>		<b>87</b>
6-1	Introduction .....	88
6-2	Exemples d'illustration.....	90
6-2-1	Comparaison avec la SFSM, CFSM, FSM, GBT .....	90
6-2-1-1	Exemple1 : cas d'un profilé simplement appuyé aux extrémités .....	90
6-2-1-2	Exemple2 : Cas d'un profilé articulé ou encasté à ses extrémités .....	91

<b>6-3 Utilisation de la CSFSM.....</b>	<b>92</b>
<b>6-3-1 Exemple 3 .....</b>	<b>92</b>
<b>6-3-2 Exemple 4 .....</b>	<b>94</b>
<b>6-3-3 Exemple 5 .....</b>	<b>95</b>
<b>6-3-4 Exemple 6.....</b>	<b>96</b>
<b>6-3-4 Influence des conditions aux limites .....</b>	<b>97</b>
<b>6-3-6 Influence du raidisseur de l'âme : .....</b>	<b>98</b>
<b>6-3-7 Influence du raidisseur de bord :.....</b>	<b>101</b>
<b>6-3-8 Influence de l'épaisseur de la section :.....</b>	<b>102</b>
<b><i>Conclusions et Recommandations :.....</i></b>	<b>103</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>113</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>114</b>

# Table des figures

---

Figure (1-1) Barre comprimée

Figure (1-2) Profilés et tôles formés à froids

Figure (1-3) Influence de l'érouissage sur la courbe contrainte-déformation de l'acier

Figure (1-4) Définition des imperfections locales

Figure (1-5) Stabilité d'une barre comprimée

Figure (2-1) Charge critique et formes déformées

Figure (2-2) Voilement d'une plaque

Figure (2-3) La forme sinusoïdale de la déformé

Figure (2-4) Voilement d'une section C

Figure (2-5) Flambement global d'une section en C

Figure (2-6) Modes de flambement d'une barre simplement comprimé

Figure (2-7) Instabilité distorsionnelle d'une section en C

Figure (2-8) Instabilité distorsionnelle d'une section C avec raidisseur d'âme

Figure (2-9) Investigations numériques sur l'instabilité distorsionnelle

Figure (2-10) Plaque uniformément comprimé

Figure (2-11) Etat de contraintes successives dans une paroi en compression

Figure (2-12) a : section efficace d'une paroi en compression

b : largeurs efficaces d'une section C fléchis et comprimé

Figure (2-13) La largeur efficace  $\frac{b_{eff}}{b}$  en fonction de l'élancement  $\bar{\lambda}_p$

Figure (2-14) Courbes de résistance

Figure (3-1) Semelle élastiquement appuyé sur la jonction âme semelle

Figure (3-2) Maillage en élément finis et en bande finis

Figure (3-3) Spline cubique, n polynôme de degré trois

Figure (3-4) La fonction B3-spline local

Figure (3-5) Une B3-spline bande : DDL- Repère

Figure (3-6) Les différents splines locaux

Figure (3-7) Splines modifiés aux frontières

Figure (3-8) a- la fonction  $\psi_i'(y)$

b- la fonction  $\psi_i(y)$

Figure (3-9) Chargement appliqué sur une bande spline

Figure (3-10) Une bande finis dans le système d'axe globale

Figure (4-1) Décomposition d'un espace de recherche

Figure (4-2) Les coordonnées, les degrés de liberté

Figure (4-3) Description d'une section ouverte à connexion simple

Figure (4-4) Etat d'une déformation membranaire d'une bande dans le cas de la GBT

Figure (4-5) Poutre équivalente - section transversal- chargement cinématique

Figure (4-6) Section transversale en C : maillage

Figure (4-7) Forces critiques avec deux minimums distincts

Figure (4-8) Caractéristique de formes déformées

Figure (4-9) Forces critiques des modes purs

Figure (5-1) : Tracé des deux fonctions  $\left[ \frac{\partial \phi_{ui}}{\partial y} \right] \{u_i\}$  et  $\frac{1}{b} \{ [\phi_{vi}] - [\phi_{vj}] \} \{v_j\}$

a- Y appartenant à  $[0 - m.h]$

b- Y appartenant à  $[1 - (m-1).h]$

c- Y appartenant à  $[2 - (m-2).h]$

Figure (5-2) La fonction représentative de U

Figure (6-1) Interface du logiciel SHEBACSFMS (post traitement)

Figure (6-2) Effet du nombre de sections splines sur les résultats de la CSFSM

Figure (6-3) Cas d'une section SIGMA dont toutes les lignes nodales sont simplement appuyées aux extrémités (exemple1)

Figure (6-4) Cas d'une section en C dont toutes les lignes nodales sont articulées(ou encasté) aux extrémités (exemple2)

Figure (6-5) Charge critique pour une section en C avec un raidisseur d'âme dont les lignes nodales sont simplement appuyées (exemple3)

Figure (6-6) Formes déformés en deux dimensions de l'exemple 3

Figure (6-7) Formes déformés en trois dimensions aux points minimum de l'exemple 3

Figure (6-8) Charge critique d'une section en C (exemple4)

Figure (6-9) Formes déformés en deux dimensions pour quelques longueurs dans le domaine

GD

Figure (6-10) Charge critique d'une section SIGMA dont les lignes nodales sont encastées et articulées aux extrémités

Figure (6-11) Décomposition modale en mode GD d'une section fermée

Figure (6-12) Effet des conditions aux limites

Figure (6-13) section transversal de l'exemple3 en variant la dimension du raidisseur d'âme

Figure (6-14) Effet de la profondeur du raidisseur d'âme de la section sur la charge critique

Figure (6-15) Section transversale de l'exemple4 en variant la dimension du raidisseur de bord

Figure (6-16) Effet du raidisseur de bord d'une section sur la charge critique

Figure (6-17) Section transversale de l'exemple2 en variant l'épaisseur de la section

Figure (6-18) Effet du l'épaisseur de la section sur la charge critique

Figure (6-19) Formes déformés en deux dimensions pour une longueur  $L=573.62\text{mm}$  en variant l'épaisseur de la section

# Liste des tableaux

---

Tableau (2-1): Formes de section et mode de flambement.

Tableau (3- 1) : caractéristiques géométriques des semelles des sections en C et en Z

Tableau (3-2): Les valeurs de la fonction spline local aux nœuds

Tableau (4-1): Les hypothèses de la G.B.T

Tableau (5-2): Les différents types de nœuds

Tableau (6-1) : Formes déformés pour plusieurs épaisseurs de la section

# Principales notations

---

Toutes les notations sont définies lors de leur première apparition dans le texte. Dans ce qui suit nous donnons les principaux symboles utilisés.

$\alpha$	Angle définissant l'orientation des bandes.
$\chi$	Courbure.
$\Delta$	Vecteur des DDL globaux
$\varepsilon$	Allongement unitaire.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations.
$\varphi$	Vecteur des formes propres/des fonctions splines.
$\Phi$	Matrice modale
$\gamma$	Distorsion.
$\Gamma$	Matrice de Changement de repère des bandes.
$\lambda$	Facteur de charge / Élancement.
$\Lambda$	Matrice diagonale des valeurs propres/facteurs de charge.
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\sigma$	Contrainte.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes.
$A$	Longueur de demi-onde.
$A$	Aire
$B$	Largeur de bande/paroi plane.
$C_w$	Constante de torsion gauchie.
$D$	Raideur flexionnelle des plaques.
$\mathbf{D}$	Vecteur des DDL d'une bande dans le repère global.
$E$	Module de Young
$\mathbf{E}$	Matrice d'élasticité.
$\mathbf{F}$	Vecteur forces.
$G$	Module de cisaillement.
$h, w$	Hauteur, largeur.
$\mathbf{H}$	Matrice contenant une base vectorielle/matrice de contrainte.

$I$	Moment d'inertie
$\mathbf{I}$	Matrice identité.
$J$	Constante de torsion de St. Venant.
$K$	Coefficient de rigidité.
$K$	Rigidité au cisaillement.
$\mathbf{k}_e$	Matrice de rigidité de l'élément bande exprimée dans le repère local.
$\mathbf{K}_e$	Matrice de rigidité de l'élément bande exprimée dans le repère global.
$\mathbf{K}_E$	Matrice de rigidité de la structure
$\mathbf{k}_g$	Matrice de rigidité géométrique de l'élément bande exprimée dans le repère local.
$\mathbf{K}_g$	Matrice de rigidité géométrique de l'élément bande exprimée dans le repère global.
$\mathbf{K}_G$	Matrice de rigidité géométrique de la structure
$K_V$	Coefficient de voilement.
$L$	Longueur.
$m$	Nombre de demi-ondes/nombre d'intervalles splines.
$M$	Moment fléchissant.
$N$	Effort normal
$\mathbf{N}$	Matrice des fonctions d'interpolation.
$P$	Charge.
$Q$	Effort tranchant.
$\mathbf{R}$	Matrice de contrainte.
$S$	Moment statique.
$t$	Epaisseur.
$\mathbf{U}$	Vecteur des champs de déplacement.
$u, v, w$	Champs de déplacement.
$u, v, w, \theta$	Degrés de liberté locaux
$U, V, W, \Theta$	Degrés de libertés globaux
$\mathbf{V}$	Vecteur des DDL de gauchissement.
$x, y, x$	Coordonnées locales.
$X, Y, Z$	Coordonnées globales.
$\psi$	Spline locale
$\overline{\psi}$	Spline local modifié

# Abréviation

---

FSM	Méthode des bandes finis
SFSM	Méthode des splines bandes finis
CFSM	Méthode des bandes finis contraintes
CSFSM	Méthode des splines bandes finis contraintes
GBT	Théorie généralisée des poutres
DSM	Méthode de résistance directe
FEM	Méthode des éléments finis
DDL	Degrés de liberté
PPF	Profilés formés à froids

**CHAPITRE 1**  
**Introduction Générale**

## 1- Introduction:

### Les profilés formés à froids :

L'utilisation de l'acier dans la construction remonte à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, bien que les métaux ferreux soient connus depuis environ 40 siècles. En 1890, l'acier a pu être produit de façon industrielle pour s'imposer comme le matériau le plus utilisé grâce à ses caractéristiques physiques [43]. L'acier offre de nombreuses possibilités pour un usage fonctionnel à la fois agréable et flexible. Il a été produit et employé couramment pour la première fois aux Etats unis, et l'apparition des premières normes de calcul est l'œuvre de l'institut américain de sidérurgie (AISI) en 1946. Les premières spécifications d'AISI ont été basées sur une grande partie des recherches du professeur George Winter (1936-1946).

L'acier se présente sous une gamme importante de produits : longs ou plats, profilés formés à froids ou à chauds, poutres, poutrelles et poteaux. En effet les profilés formés à froids représentent le secteur qui se développe le plus dans le domaine de la construction métallique. La logique de la construction métallique est une logique d'assemblage ou l'ossature se fait par point porteurs de types poteaux poutres.

Les profils en acier sont légers et économiques mais cette efficacité se traduit par des complications particulières ce qui justifie qu'ils fassent l'objet des règles de calcul spécifiques. Leur procédé de fabrication permettent d'optimiser la forme des sections, ils sont pour la plus part constitués de barres fléchis, comprimés (figure (1-1)) ou simultanément et utilisé souvent dans les murs et toits de bâtiment industriels, commerciales et agricoles.

Ces éléments formés à froids se caractérisent par leur faible épaisseur leur forme est assez élaborée et complexe (U-Z-E-C) ce qui permet d'influencer la capacité d'un élément en terme de résistance, de rigidité et de mode de ruine (Figure (1-2)), Leur portée courante varie de 4 m à 7 m, exceptionnellement peut dépasser les 10 m. Leur faible épaisseur (0,5 mm à 5 mm environ) les rendent susceptibles aux phénomènes d'instabilité, c'est leur rapport longueur sur épaisseur ( $l/b$ ) qui les classe comme des membres à parois mince.

Les profilés en acier sont classés en trois catégories :

- ↳ Les profils laminés à chaud.
- ↳ Les profils reconstitués et soudés.
- ↳ Les profils formés à froids

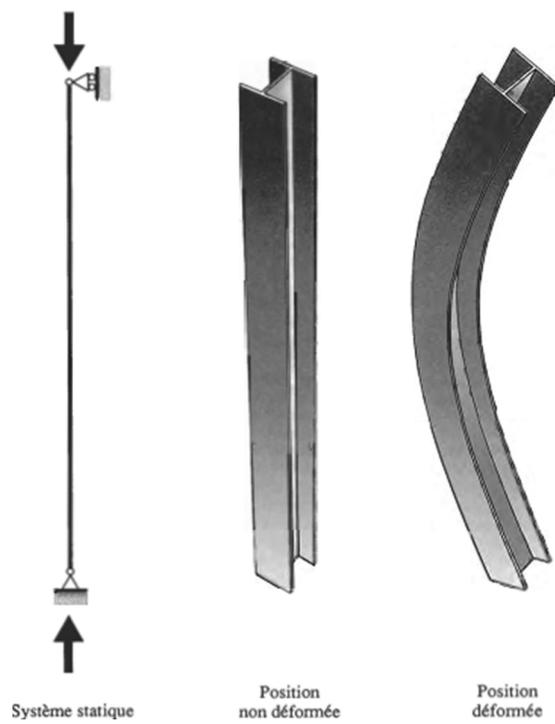


Figure (1-1) barre comprimé

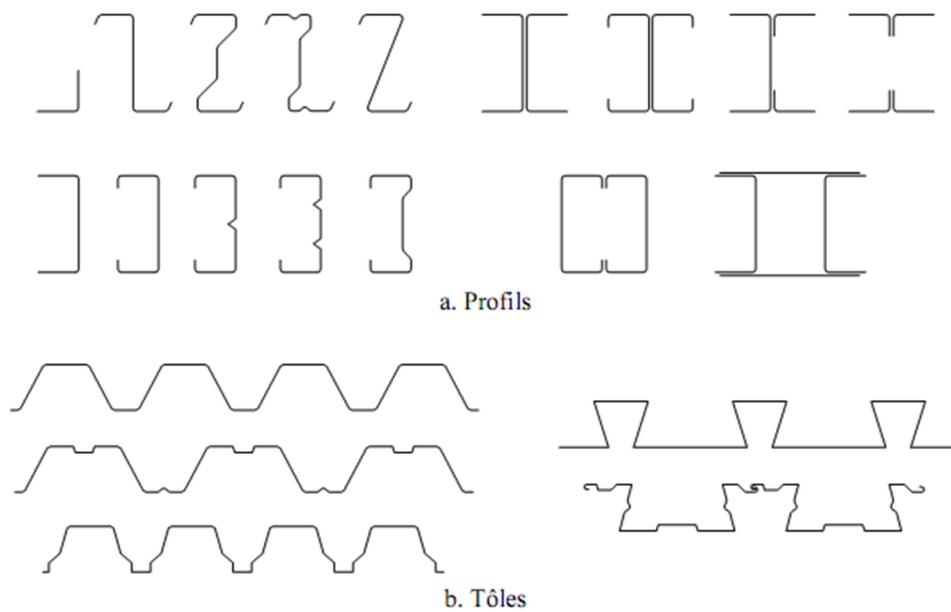


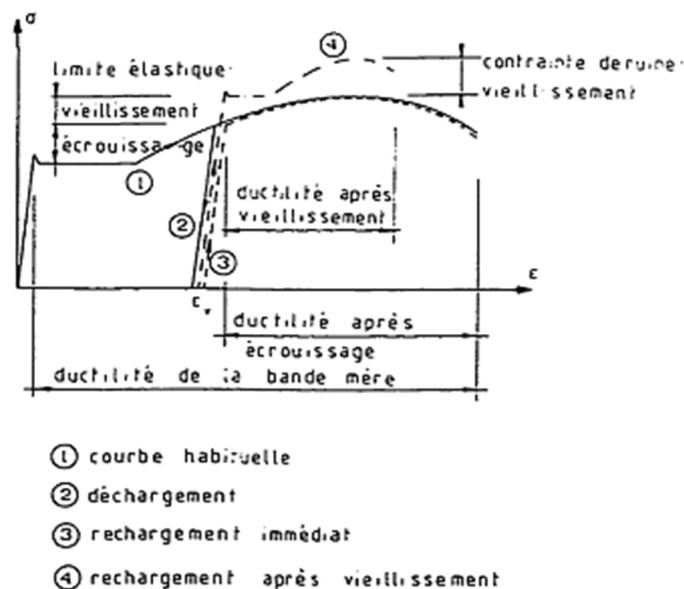
Figure (1-2) profilés et tôles formés à froids

Les profilés formés à froids sont produit comme leur nom le suggère sous une température ambiante soit par profilage soit par pliage. Mais à cause du procédé de laminage,

les dimensions du profil (légèreté, minceur du profil....) le rendent sensible à certains problèmes tels que :

### ❖ **Écrouissage :**

Le laminage à froid de l'acier entraîne inévitablement des modifications mécaniques de l'acier par rapport au produit de base, une variation de la limite élastique le long du profilé Figure (1-3) se manifeste lors de la formation des arrondis par flexion plastique (les plis réalisés) et dépend du nombre et de la résistance et de la modification de la ductilité.



**Figure (1-3) : influence de l'écrouissage sur la courbe contrainte-déformation de l'acier [10]**

### **Contraintes résiduelles :**

Elles peuvent être d'origine thermique due au refroidissement après laminage, mécanique due au dressage à froid. Lors de la mise en forme de la section, des efforts internes apparaissent et peuvent être responsables de l'apparition des contraintes résiduelles qui peuvent modifier sensiblement la résistance de l'élément.

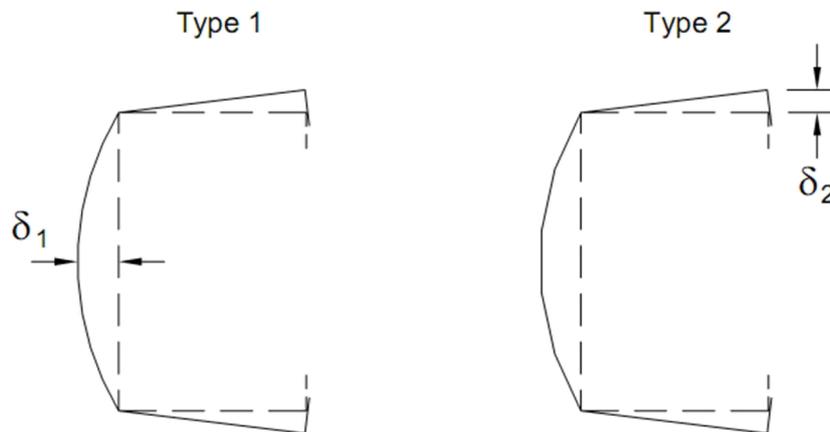
A titre d'exemple des contraintes résiduelles de traction produites dans des parois planes soumises à une compression engendrent un risque de voilement local.

### ❖ **Imperfection géométrique :**

Se sont des imperfections de forme des profilés c'est-à-dire que lors de la fabrication une déviation de profils par rapport à la géométrie parfaite, on distingue :

Local : tel que le défaut de planéité des parois et sont de deux types Figure (1-4).

Global : tel que les défauts de rectitude, les défauts de torsion (vrillage).



(Figure 1-4) Définition des imperfections locales [9]

Plusieurs études paramétriques ont été effectuées, citons celles de Schäfer et Pekoz [55, 56], Huang et Chen [31], Key et Hancock [37] où ils se sont intéressés à modéliser l'état initial du profilé et son effet sur la stabilité de l'élément surtout l'imperfection géométrique et les contraintes résiduelles, cette dernière peut influencer la tenue en fatigue du profil surtout pour les profils soudés, ou assembler par boulonnage.

### Position du problème :

L'utilisation des éléments minces formés à froids (les PFF) engendre des problèmes spécifiques dans le design et la construction qu'on ne trouve pas généralement dans les profilés formés à chaud. On doit immédiatement considérer les phénomènes d'instabilité qui posent actuellement un problème majeur aux ingénieurs pour la vérification et la compréhension du comportement de ce type de structure.

Les profilés formés à froids sont formés d'éléments plans et arrondis juxtaposés. Ils comportent souvent des raidisseurs. L'application d'une charge compressive et/ou flexion peut provoquer trois types d'instabilités :

- Instabilité locale
- Instabilité distorsionnelle
- Instabilité globale

L'instabilité locale ressemble beaucoup au voilement d'une plaque, le rapport épaisseur/largeur très petit des profilés formés à froids les rendent susceptibles à l'instabilité locale. La présence de l'instabilité locale ne signifie pas que sa charge de ruine est atteinte ; c'est le phénomène postcritique.

L'instabilité distorsionnelle se manifeste par une flexion dans le plan et une torsion, alors que l'instabilité globale est un mode non périodique, où les sections transversales subissent une rotation, ou une translation, ou les deux sans modification de la forme de la section.

La résistance ultime des pièces comprimées est souvent définie par un critère de stabilité de forme [42], la Figure (1-5) montre une analogie entre le flambage d'une barre bi-articulée et l'équilibre d'une balle sphérique. L'étude de la stabilité d'un système consiste à déterminer sa charge critique.

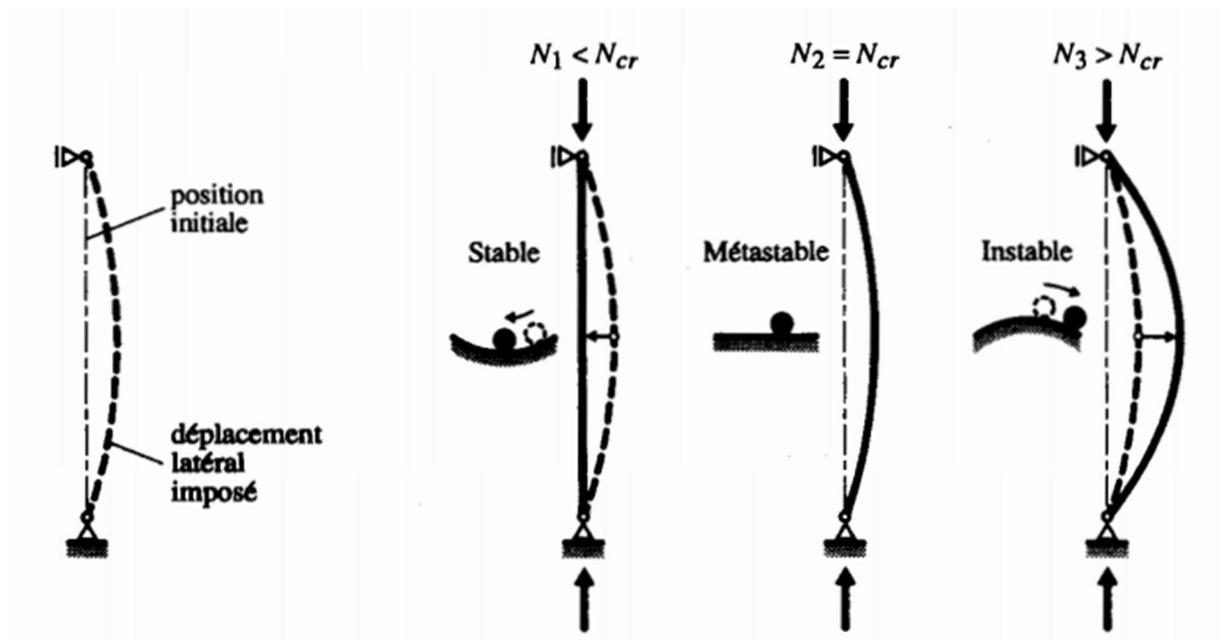


Figure (1-5) Stabilité d'une barre comprimée [42]

Le dimensionnement de toute structure doit reposer sur un concept clair, définissant les types de vérification à effectuer pour garantir son aptitude au service et sa sécurité structurale. L'ingénieur doit calculer la charge critique des modes d'instabilité. Pour le mode local et global, le problème est résolu par des équations analytiques d'Euler établies depuis 1744. Le problème se pose pour la charge du mode distorsionnel. Actuellement il n'existe

aucune approche analytique permettant de la calculer. Deux méthodes semi empiriques existent pour la calculer, celle de Schäfer (1997) et celle de Hancock (1987), mais ces dernières sont compliquées et lourdes à exploiter.

De ce fait, le recours aux méthodes numériques devient indispensable et nécessaire. On se propose dans ce mémoire de fournir à l'ingénieur une méthode numérique qui permet de déterminer la contrainte de flambement du mode mixte distorsionnel- global(GD) en utilisant des techniques de décomposition modale.

Jusqu'à ce jour la décomposition modale des éléments de structures formés à froids soumis à une force axiale de compression n'a été faite que par deux méthodes : la CFSM (Constrained Finite Strip Method) et la GBT (Generalized Beam Theory).

La CFSM a été établie par Schafer[1,2,3] en utilisant la méthode des bandes finies. Elle consiste à contraindre la méthode des bandes finies à produire et isoler les modes purs d'instabilité en utilisant les hypothèses de la théorie généralisée des poutres (GBT). Notre contribution principale est d'élargir le même concept en utilisant une autre méthode numérique qui est « les splines bandes finies » et là est tout l'enjeu de ce travail.

### **L'objectif du travail:**

Les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode des bandes finies, et la méthode des splines bandes finies qui traitent la stabilité des profilés formés à froids donnent un nombre important des modes d'instabilité et c'est à l'ingénieur de classer ces modes d'instabilité en se basant sur son intuition et sur son expérience, chose qui peut fausser les calculs. L'objectif de ce travail est de proposer une méthode simple permettant d'une part de séparer le mode combiné distorsionnel-global des autres modes d'instabilité et par la suite estimer la charge critique et d'autre part analyser et comprendre le comportement des PFF, nous permettant par la suite de fournir à l'ingénieur ceux dont il a besoin pour le calcul et le dimensionnement des profilés formés à froids et de valider la démarche proposée.

L'utilisation de la méthode des splines bande finis vient de l'idée que cette dernière prend en compte les différents chargements et conditions aux limites qui existent dans la pratique, un avantage par rapport à la méthode des bandes finies.

La démarche proposée est basée sur les critères mécaniques de la GBT « Generalized Beam Theory », qui sont injectés dans la méthode numérique « les splines bandes finies ».

Pour définir le mode GD seulement deux hypothèses de la GBT sont utilisées, l'hypothèse de la flexion cylindrique et l'hypothèse de la déformation membranaire négligeable.

### Plan du mémoire :

Le mémoire est structuré en six chapitres comme suit :

➤ **Le Chapitre I** comprend un bref aperçu sur les PFF, leurs caractéristiques, la motivation et l'objectif de ce travail.

➤ **Le Chapitre II** comportent une étude bibliographique sur les structures à parois minces de point du vue comportement ainsi qu'une vue détaillée sur les phénomènes d'instabilité [définition – forme déformée.....] et précisément l'instabilité distorsionnelle. Nous abordons les méthodes de dimensionnements qui tiennent compte de l'influence du voilement sur le comportement global par le concept de la largeur efficace et la méthode de résistance directe(DSM).

➤ **Le Chapitre III** contient les méthodes de calcul de la charge critique tant analytique que semi empirique ou numérique. Les méthodes analytiques sont basées sur la théorie de Vlassov. les méthodes numériques tels que les éléments finis(FEM), les bandes finies(FSM), et les splines bandes finies(SFSM) .Les méthodes semi empiriques tels que la méthode de Schafer et la méthode de Lau-Hancock.

➤ **Le Chapitre IV** contient un bref énoncé de la CFMSM « Constrained Finite Strip Method », ses hypothèses de calcul et leur implémentation et la manière de déterminer la matrice contrainte qui est le point fondamental de cette méthode.

➤ **Le Chapitre V** traite la mise en œuvre de la CSFSM «Constrained Spline Finite Strip Method ». On y trouve tout le calcul en détail, de la motivation à la résolution et la détermination de la charge critique du mode GD.

➤ **Le Chapitre VI** clôture ce mémoire par des exemples pour valider notre programme et une comparaison des résultats avec les méthodes numériques existantes telles que la méthode des bandes finies et la méthode des splines bandes finies classique et la méthode des bandes finis contrainte(CFSM) et la théorie généralisé des poutres(GBT). Elle est suivie par une étude comparative où on expose l'influence de l'épaisseur, la dimension du raidisseur de bord, la dimension du raidisseur de l'âme sur la charge critique distorsionnelle ou globale et à la fin on donne une conclusion où on interprète nos résultats et on expose nos perspectives.

**CHAPITRE 2**  
**Les phénomènes d'instabilité des profils**  
**formés à froids**

## 2-1 Introduction :

Les problèmes associés aux constructions avec des éléments à parois mince découlent essentiellement du phénomène d'instabilité. La vérification de cette instabilité constitue dans de nombreux cas un problème délicat à traiter. Conscient de cette difficulté plusieurs chercheurs se sont penchés sur ce problème, et de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été menés (Adany [1, 2,3]- Hancock [28, 29,30]- Cheung [12]-Schafer [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 47,48] -Djafour [21, 22].....).

Selon la portée du profilé et sous l'application d'une charge compressive, on peut mettre en évidence trois types d'instabilité (figure 2-1) :

- Instabilité locale.
- Instabilité distorsionnelle.
- Instabilité globale.

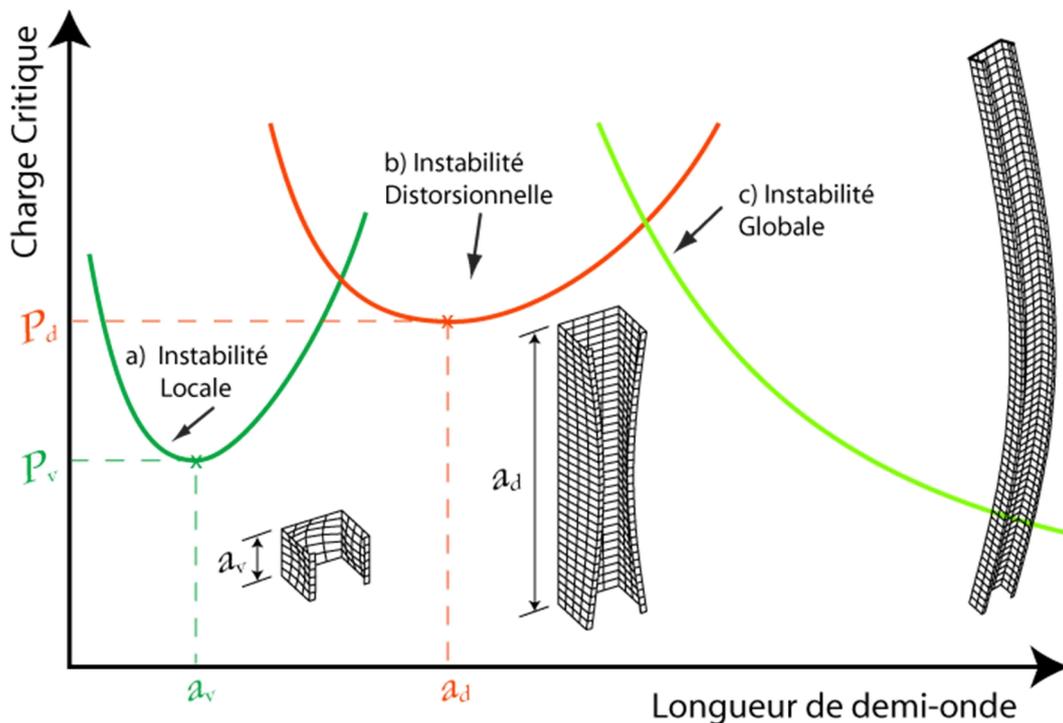


Figure (2-1) Charges critiques et Formes déformés caractéristiques d'une section en C

## 2-2 Définition des phénomènes d'instabilité :

### 2-2-1 Instabilité locale :

Les sections formées à froids et les sections constitués de plaques minces sont les plus sensibles à l'instabilité locale. C'est un phénomène d'instabilité par bifurcation de l'équilibre, mais après déformation ces sections constituées de plaques présentent une certaine réserve de résistance avant la rupture c'est le comportement postcritique. Ce type d'imperfection apparait lorsque le rapport hauteur-épaisseur est inférieur à 200 ( $h/t < 200$ ), c'est un mode impliquant seulement la flexion hors plan de la plaque sans déformation des lignes à la jonction des plaques c'est-à-dire juste une rotation et pas de translation (figure 2-1). Ce phénomène ressemble au voilement d'une plaque Figure (2-2). Le mode local est induit seulement par l'énergie des déformations flexionnelles, il se produit suivant une loi sinusoïdale Figure (2-3). Sa longueur de demi-onde est plus petite que la plus grande dimension caractéristique de l'élément.

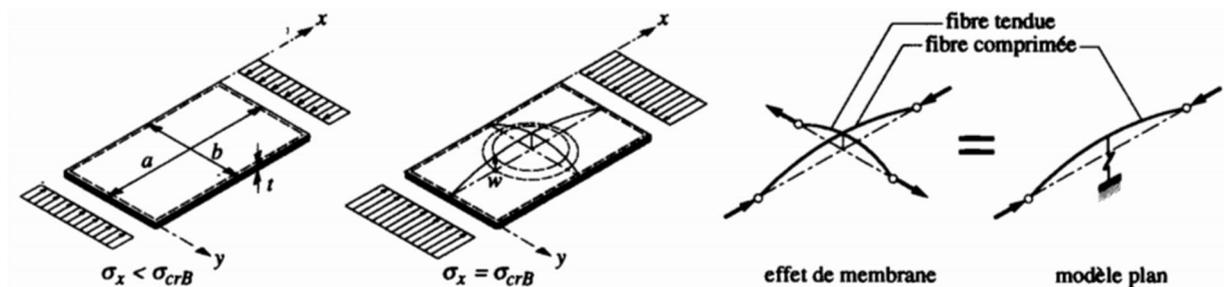


Figure (2-2): voilement d'une plaque

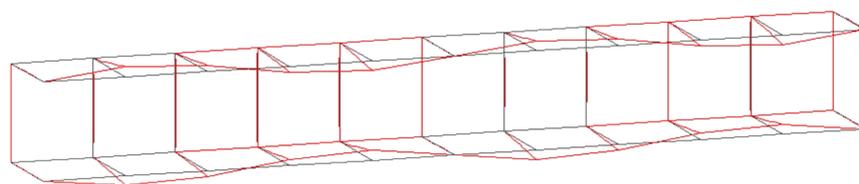


Figure (2-3) la forme sinusoïdale de la déformé (section en U)

### 2-2-1-1 Exemple : instabilité locale

Pour la plupart des sections en C, la charge critique du mode locale se produit à un minimum distinct (apparent) dans la 1ère branche de la courbe figure (2-1), ce minimum sera à une longueur de demi d'onde moins que la hauteur de l'âme. La forme déformée tracé montre l'instabilité locale d'un ou plusieurs éléments (âme ou semelle) mais pas de déplacement ou translation des nœuds de coins Figure (2-4).

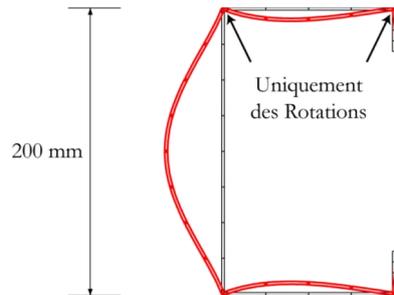


Figure (2-4) voilement d'une section C

Le voilement peut être évité :

- i- en limitant le rapport largeur ou la longueur et l'épaisseur de l'élément
- ii- en disposant judicieusement des raidisseurs, bien qu'ils soient coûteux et difficile à placer.

L'instabilité locale est largement couverte dans les principaux codes et règlement de la construction métallique (CEN/EC3, AISI/NAS...). L'estimation de sa charge critique élastique est basée sur le coefficient de voilement d'une plaque rectangulaire isolée. Elle est proportionnelle au coefficient de voilement  $k$ , elle a été étudié et récapitulé par Timoshenko, Gere et Bleich(1961). Dans le cas d'une plaque en compression, en flexion, ou en cisaillement elle est donné par :

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{k \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2-1)$$

Ou :

$k$  : est le coefficient de la plaque qui dépend des conditions aux limites et de la forme du chargement.

$b$  : largeur de la plaque

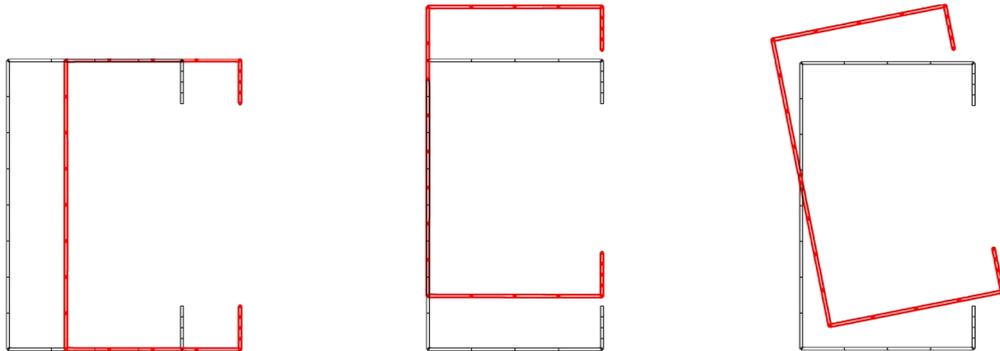
$t$  : épaisseur de la plaque

$E$  : module de Young

$\nu$  : Coefficient de poisson

### 2-2-2 Instabilité globale :

C'est le cas le plus simple et le plus clair. Ce flambement globale comprend les phénomènes de flambement d'Euler (1744), le mode flexionnel-torsionnel du poteau et latéral des poutres, ou la section se déplace comme un corps rigide sans aucune distorsion figure (2-5) et l'onde de flambement est la plus longue par rapport aux autres modes.



**Figure (2-5) flambement global d'une section en C**

Cette instabilité dépend de plusieurs facteurs :

- La distribution du moment le long de la poutre (Forme de diagramme du moment fléchissant).
- Les conditions aux limites (maintiens en flexion, torsion et gauchissement).
- Le niveau d'application des charges transversales et la possible dissymétrie de la section droite.

Pratiquement, l'instabilité globale est de trois types :

- ❖ Instabilité globale par flexion
- ❖ Instabilité globale par torsion
- ❖ Instabilité globale par flexion-torsion

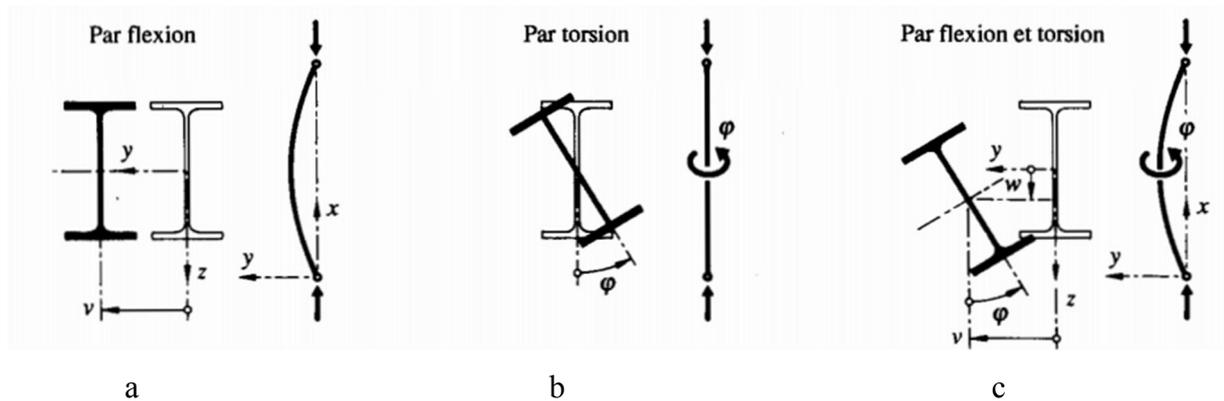


Figure (2-6) modes de flambement d'une barre simplement comprimée [43]

❖ **flambement par flexion** : les profils à section symétrique et chargés axialement en compression peuvent flamber par flexion autour de l'un des axes principaux.

Ce type d'instabilité est associé à des déplacements latéraux dans un plan de symétrie de la section, c'est le plan faible et de la moindre inertie. (Figure 2-6-a)

❖ **flambement par torsion et flexion-torsion** : le champ de déplacement comporte non seulement des déplacements latéraux de flexion mais aussi des torsions (figure (2-6-b-c)). Ce phénomène d'instabilité est d'une grande importance lorsqu'on parle des barres minces comprimées à section ouverte.

Le flambage par flexion ou par torsion seule sont des cas particuliers. Ce dernier n'apparaît que pour des sections dont le centre de gravité et le centre de cisaillement sont confondus tandis que le flambage par flexion-torsion est le phénomène d'instabilité qui dicte la ruine de l'élément. C'est le mode d'instabilité le plus général d'une barre droite (figure (2-6-c)).

Le tableau (2-1) donne quelques sections et leur mode de flambement.

Formes de section	Modes de flambement	Efforts normaux critiques à calculer
 <p>Le centre de cisaillement est confondu avec le centre de gravité.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Flambement par flexion</li> <li>• Flambement par torsion</li> </ul>	$N_{cr,y}$ $N_{cr,z}$ $N_{cr,T}$
 <p>Sections asymétriques</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Flambement par flexion-torsion</li> </ul>	$N_{cr,y}$ $N_{cr,z}$ $N_{cr,T}$ $N_{cr,TF}$
 <p>Sections avec un plan de symétrie</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Flambement par flexion dans le plan de symétrie</li> <li>• Flambement par flexion-torsion</li> </ul>	$N_{cr,y}$ $N_{cr,z}$ $N_{cr,T}$ $N_{cr,TF}$
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Flambement par flexion</li> </ul>	$N_{cr,y}$ $N_{cr,z}$

Tableau 2-1 : Formes de section et mode de flambement.

De la même manière que le mode local la charge critique de l'instabilité global ou charge critique d'Euler est donné par :

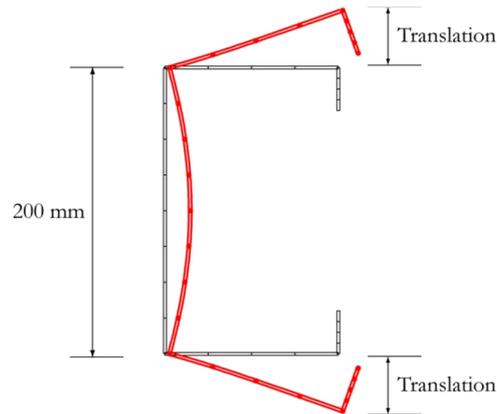
$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E I}{L_k^2} \quad (2-2)$$

Ou  $L_k$  : longueur de flambage

### 2-2-3 Instabilité distorsionnelle :

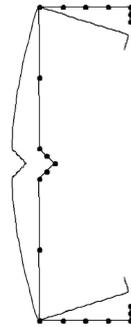
Les règles de calcul existant ne traitent pas explicitement le mode distorsionnel. C'est un mode mal maîtrisé et qui suscite plus d'attention.

En ce mode la semelle est déplacée ou tordues de sa position initiale sur toute la longueur de l'élément, d'où le changement de la forme de la section (figure (2-7)).



**Figure (2-7) instabilité distorsionnelle d'une section en C**

Pour des sections avec des raidisseurs intermédiaires, le mode distorsionnel est caractérisé par le déplacement du raidisseur perpendiculairement au plan de l'élément (Figure (2-8))



**Figure (2-8) instabilité distorsionnelle d'une section C avec raidisseur d'âme**

Par conséquent l'instabilité distorsionnelle exige le traitement soigneux de la rigidité à la rotation de la liaison semelle âme. Une des caractéristiques de ce mode est que sa longueur de demi-onde est intermédiaire entre le mode local et le mode d'Euler Figure (2-1), c'est-à-dire que le mode distorsionnel se produit à une contrainte supérieure à la contrainte du mode local, ainsi on a observé expérimentalement que ce mode a une réserve post-critique inférieur à celui du mode local.

### **2-2-3-1 Discussion et analyse des résultats des investigations sur le mode distorsionnel :**

Basé principalement sur les investigations expérimentales de Desmond et al (1981) [19] qui ont constaté qu'une section avec des raidisseurs de bord de longueur  $d_s$ , et largeur

de semelle  $d$ , qui a un rapport inférieur à  $\frac{d_s}{d} < 0,4$ , est une section régie par le mode distorsionnel tandis que si  $\frac{d_s}{d} > 0,4$  l'instabilité est initiée par le mode local.

D'autres recherches significatives, expérimentales et analytiques ont été effectuées à l'université de Sydney sur les profilés formés à froids par Hancock et Al [28, 29,30]. Leur modèle théorique d'un élément raidis est basé sur des ressorts de rotation et latéraux pour représenter l'appui à la jonction âme- semelle de la section. Ils ont développé des expressions explicite pour ce mode de ruine en ignorant la contrainte latérale développé par l'âme, et ont été incluse dans les normes australiennes. Lau et Hancock [41, 42] et Kwon et Hancock [39] ont développé respectivement la FSM et la SFSM pour évaluer la charge critique des profils à parois mince. Ces derniers (1992) ont proposé de déterminer la charge critique distorsionnelle par la méthode SFSM ou FSM au lieu des équations explicites, et ont employé une courbe de conception basé sur la parabole de Johnston (1976) pour déterminer la capacité de la section et expliquer le comportement inélastique. Cette méthode est largement introduite dans les codes Australiens. Elle ressemble à la DSM (Direct Strength Method). Ils ont également développé une autre courbe de conception basée sur une courbe modifiée de Winter qui rivalise avec la méthode de Schäfer DSM (2001) de l'instabilité distorsionnelle.

Une autre approche est proposée par Gardner et Nethercot (2004) pour les sections fermées ; Ashraf et Al (2006) ont inclus les sections ouvertes. Ils ont abandonné l'approche de la largeur effective [4], leur concept a été établi sur la capacité de déformation de la section basée sur la déformation du flambage local  $\varepsilon_{LB}$  et la contrainte de flambage local  $\sigma_{LB}$  de l'élément le plus mince  $\beta$  de la section, ainsi des relations empiriques ont été développées entre  $\varepsilon_{LB}$  et  $\beta$  et plusieurs facteurs de correction pour expliquer les propriétés des forces augmentés des profilés formés à froids.

L'instabilité distorsionnelle est influencée par :

- ❖ Les propriétés des sections (épaisseur- largeur de la semelle – hauteur de l'âme)
- ❖ L'existence des raidisseurs (de bord - intermédiaires ou non)
- ❖ Nature de section (simple – complexe)

Récemment, plusieurs travaux (numériques et expérimentaux) ont été réalisés afin de développer des propriétés (ou des caractéristiques) et des relations qui définissent le mode distorsionnel comme le mode local, nous citons à titre d'exemple celle de Huang et Al en 2011 [31]. Les figures suivantes présentent quelques études paramétriques numériques sur un

profilé à section en C qui montrent l'influence de la largeur de la semelle, la hauteur de l'âme, la profondeur des raidisseurs, et l'épaisseur de l'élément

**Figure (2-9-a.b)** montre le résultat de la variation de la largeur de la semelle. On constate que les plus hautes contraintes de distorsion sont observées autour d'un rapport de  $\frac{b}{h} = \frac{1}{3}$

Cette conclusion n'est pas générale car les longueurs des raidisseurs rapportent un optimum différent pour  $\frac{b}{h}$ .

**Figure (2-9-c.d):** on observe:

- ❖ Que les raidisseurs de bord longs sont généralement meilleurs.
- ❖ Les âmes plus profond sont plus flexible, ils fournissent ainsi moins de rigidité de rotation à la liaison semelle-âme et par conséquent ils sont plus sensible à l'instabilité distorsionnelle.

**Figure (2-9- e.f):** montre l'interaction complexe entre la semelle- l'âme et les raidisseurs de bord dans la détermination de la contrainte critique de l'instabilité distorsionnelle.

Selon [Huang 2011], une étude paramétrique sur des sections complexes a été menée en tenant compte des non linéarité géométriques et matérielles. Certaines remarques ont été tirées :

- ❖ L'effet de l'imperfection initiale de la géométrie est plus petit pour les sections complexes avec des raidisseurs.
- ❖ La charge critique du mode distorsionnel diminue quand la longueur de la colonne augmente.
- ❖ En comparant deux méthodes numériques de calcul FEM et FSM, les charges distorsionnelles s'approchent (convergent) quand les longueurs des colonnes diminuent.
- ❖ Quand la longueur de demi-onde est plus petite que 1, le rapport  $\frac{P_{crd-FEM}}{P_{crd-FSM}}$  est différent pour différentes sections.

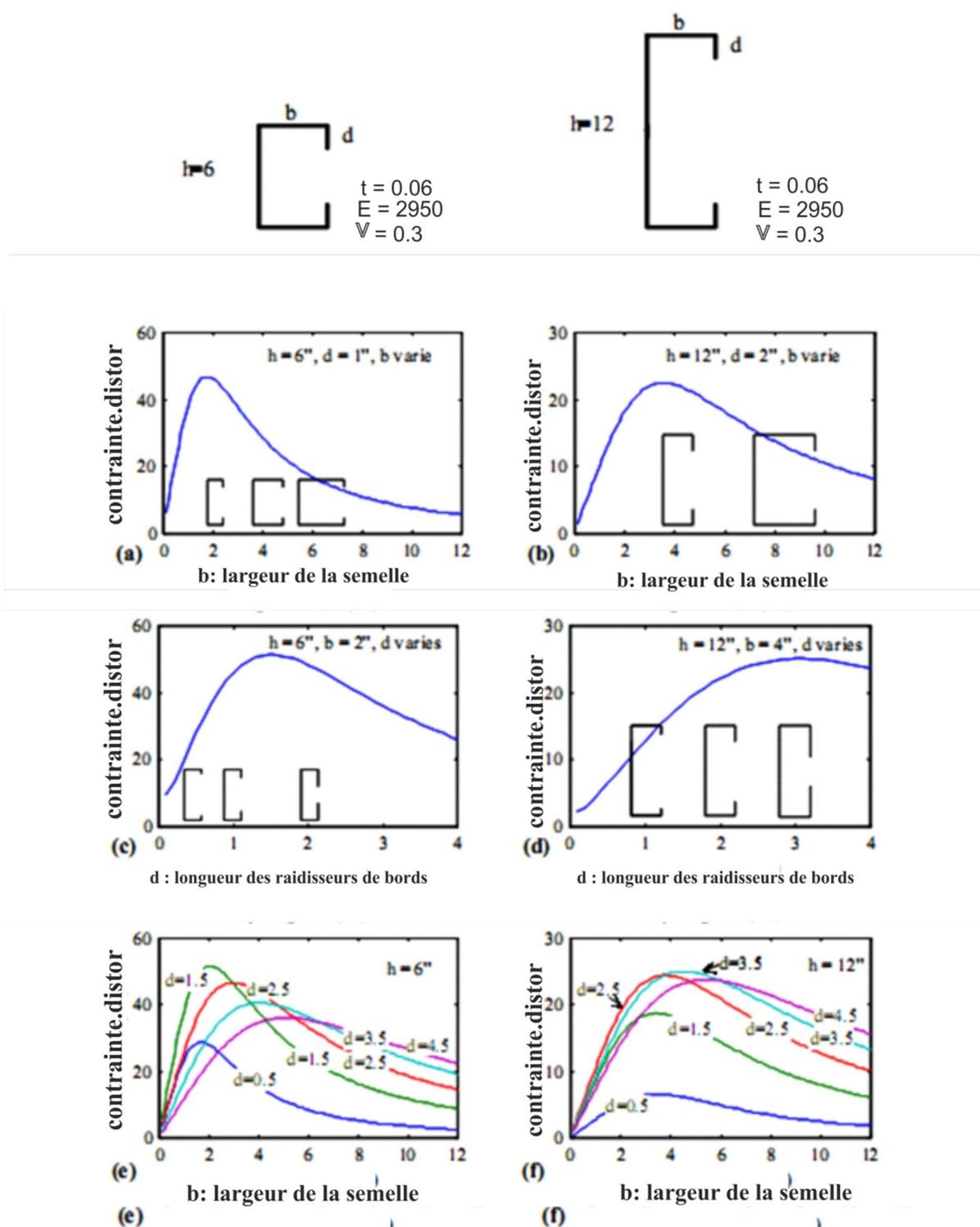


Figure (2-9) Investigations numériques sur l'instabilité distorsionnelle [47] :

(a-b) influence de la variation de la largeur de la semelle

(c-d) variation de la longueur des raidisseurs de bords

(e-f) variation de largeur de la semelle avec différent longueur des raidisseurs de bords

## Interaction des modes d'instabilité :

La difficulté dans l'analyse du comportement des structures minces réside dans l'établissement des limites d'intervalles entre les modes d'instabilité, sachant que les modes d'instabilité peuvent combiner des déformations correspondant à plus d'un type d'instabilité. Cependant dans la pratique, les modes d'instabilités sont reliés aux catégories de barres :

- **les barres courtes** : où l'instabilité locale est prépondérante.
- **les barres moyennes** : où les modes d'instabilité entrent en interaction
- **les barres longues** : où l'instabilité globale domine.

L'interaction entre les modes d'instabilité n'est pas significative pour les barres courtes et longues mais elle a une influence significative pour les barres moyennes.

Trois différentes hypothèses d'interaction entre les modes d'instabilité [local (L), Distorsionnel (D), Global (G)] existants sont considérés :

- ❖ L'interaction entre (L+G) et D  
L'interaction entre (L+G) et (D+G)
- ❖ L'interaction entre (L+D), (L+G) et (D+G)

Dans ce cas deux méthodes sont recommandées pour le calcul [51] :

- ❖ La méthode de largeur effective pour l'interaction entre (L+G) et (D+G)
- ❖ La méthode DSM pour l'interaction entre (L+G) et (D+G)

Dans le cas où ces modes d'instabilité ne sont pas en interaction, on les nomme des instabilités pur : Locale pur – Distorsionnelle pur – Globale pur.

## Règles de calcul des PFF :

### 2-4-1 Méthode de largeur efficace :

Cette méthode est largement considérée comme méthode principale de conception des PFF (poteaux- poutres). Elle est incluse dans la plupart des codes et règles de calcul des PFF, et elle a été conçue pour le dimensionnement des éléments à parois minces comprimés, où la contrainte élastique du voilement est la base de cette méthode.

Si on considère une plaque simplement appuyée et comprimée longitudinalement (Figure (2-10)), dans le stade post critique les contraintes se concentrent le long des bords, et la distribution des contraintes initialement uniforme devient non uniforme après voilement (figure (2-11)). Ces contraintes sont limitées à une largeur réduite appelé largeur efficace.

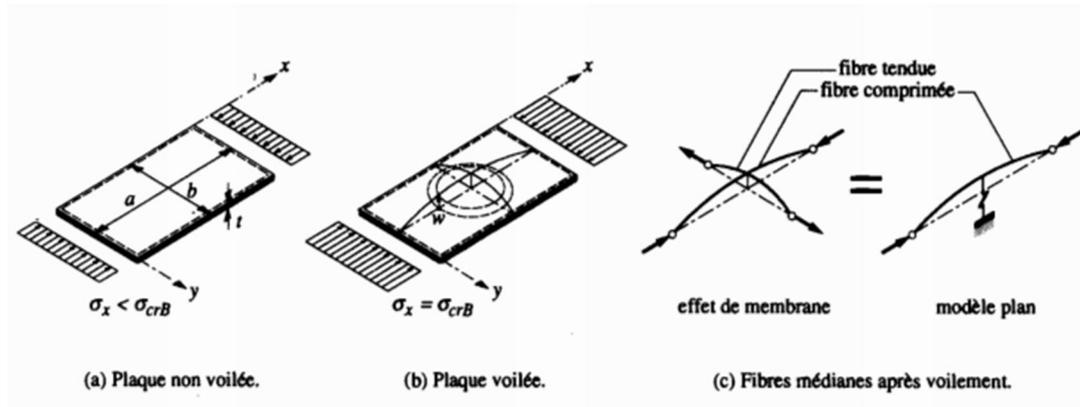


Figure (2-10) Plaque uniformément comprimée

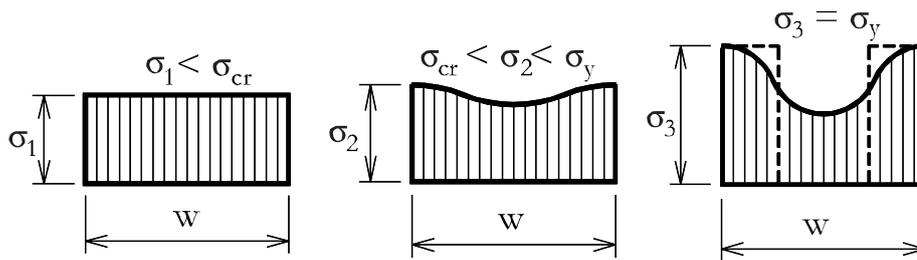


Figure (2-11) Etat de contraintes successives dans une paroi en compression

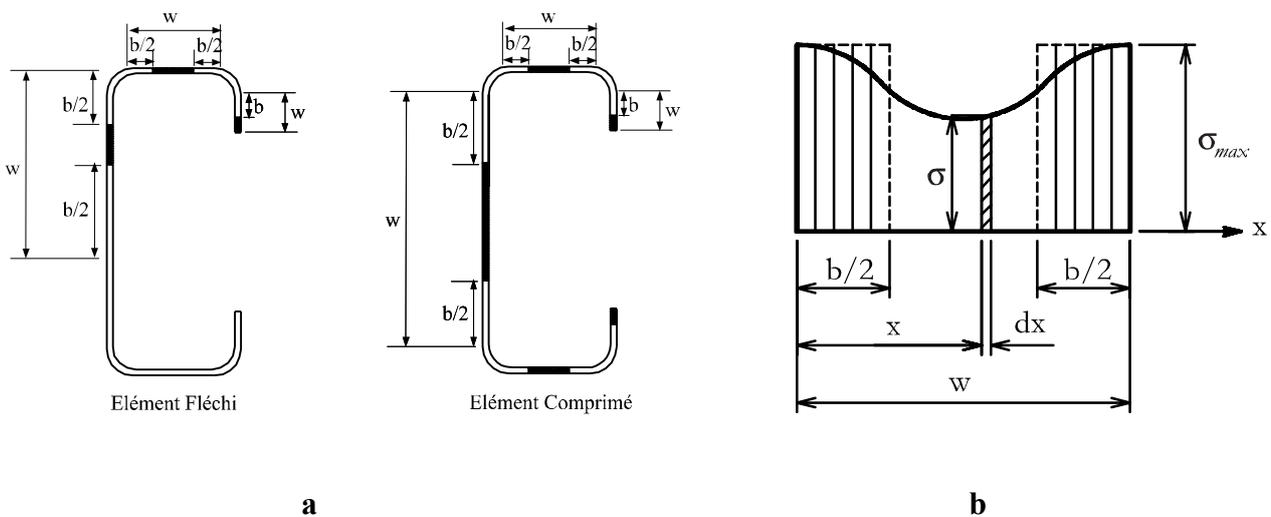


Figure (2-12) a : section efficace d'une paroi en compression

b : largeurs efficaces d'une section C fléchi et comprimée

L'expression de cette largeur efficace est donnée par Von Karman (1932) en supposant la contrainte interne maximum  $\sigma_{max}$  dans le domaine poste critique est égale à la contrainte critique élastique rapportée à la largeur efficace :

$$\sigma_{max} = (\sigma_{crit})_{eff} \quad (2-3)$$

D'ou :

$$\sigma_{max} = (\sigma_{crit}) \cdot \left(\frac{b}{b_{eff}}\right)^2 \quad (2-4)$$

$$b_{eff} = b \sqrt{\frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{max}}} \quad (2-5)$$

$\sigma_{crit}$  : Contrainte critique de voilement élastique de la plaque en considérant la largeur totale.

$\sigma_{max}$  : Contrainte interne max au bord de la plaque (en général :  $\sigma_{crit} = f_y$  limite d'élasticité).

Cette relation (équation 2-5) montre que la largeur efficace est en quelque sorte une traduction d'une courbe de voilement.

Par analogie avec le flambement on définit un coefficient :

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{max}}} \quad (2-6)$$

La largeur efficace (équation 2-5) s'écrit :

$$b_{eff} = \frac{b}{\bar{\lambda}_p} \quad (2-7)$$

Von Karman a établi la relation suivante :

$$b_{eff} = b \sqrt{K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{1}{\sigma_{max}}} \quad (2-8)$$

En réalité le voilement se produit avant d'atteindre  $\sigma_{crit} = \sigma_{max}$

Winter (1947) propose alors une formule semi empirique qui tient compte de l'imperfection géométrique et structurelle (pour une plaque comprimée et articulée aux bords) :

$$b_{eff} = 1.9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \quad (2-9)$$

Et sous une forme généralisée, cette formule s'écrit :

$$b_{eff} = b \quad \text{pour} \quad \bar{\lambda}_p \leq 0.9 \quad (2-10)$$

$$b_{eff} = \frac{b}{\bar{\lambda}_p} \left( 1 - \frac{0.22}{\bar{\lambda}_p} \right) \quad \text{pour} \quad \bar{\lambda}_p > 0.9 \quad (2-11)$$

Pour un élancement  $\bar{\lambda}_p > 0.9$  la norme SIA 161 donne la formule suivante pour calculer la largeur efficace :

$$b_{eff} = 0.9 \frac{b}{\bar{\lambda}_p} \quad (2-12)$$

La théorie linéaire élastique prescrit la formule suivante :

$$b_{eff} = 0.9 \frac{b}{\bar{\lambda}_p^2} \quad (2-13)$$

La figure (2-13) montre l'influence d'élancement  $\bar{\lambda}_p$  sur le rapport entre la largeur efficace et la largeur totale.

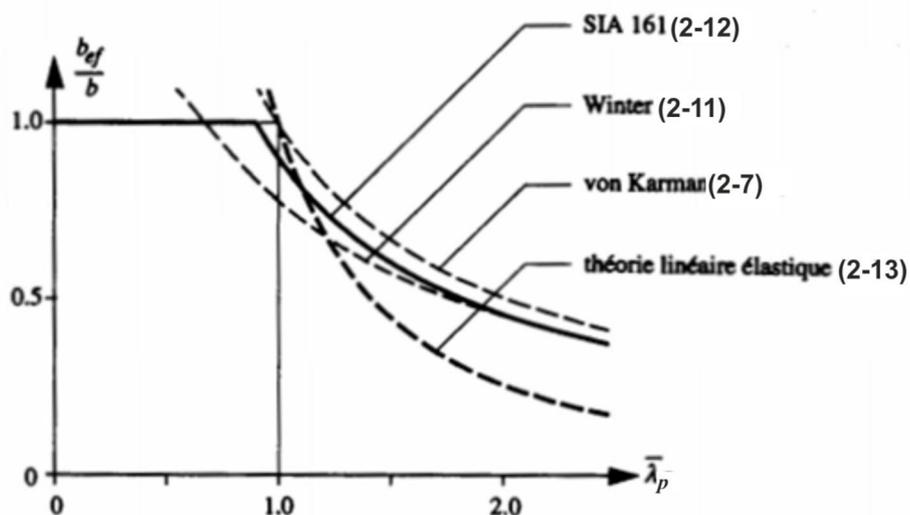


Figure (2-13) la largeur efficace  $\frac{b_{eff}}{b}$  en fonction de l'élancement  $\bar{\lambda}_p$

Comme la plupart des méthodes de calcul cette méthode présente certaines limitations :

- ❖ La méthode considère isolement les plaques composant la section transversal.
- ❖ Quand la section a des raidisseurs de bord ou intermédiaires, le calcul devient plus complexe.
- ❖ La méthode ne considère pas explicitement l'instabilité distorsionnelle

### 2-4-2 Méthode de résistance directe (Direct Strength Method : DSM)

Par rapport à la complexité des calculs utilisés dans la conception et le design des profils en acier formés à froids. La D.S.M allège le calcul et fournit un procédé plus robuste de conception et flexible en utilisant les méthodes numériques. La D.S.M a été développée par B. Schäfer et Pekoz (1998-2002); elle a été approuvée par le comité AISI de la réglementation et adopté dans les règles Américaines (2004) pour sa simplicité et sa capacité de concevoir les sections transversales les plus complexes. La DSM prend les expressions conventionnelles pour les largeurs effectives et les applique pour la section complète. La DSM définit explicitement le rapport entre l'instabilité élastique et la réponse charge-déformation avec des équations empiriques afin de prévoir la charge critique. Cette méthode a été destinée pour les poutres et les poteaux. Les équations ci-dessous ont été développées à partir des résultats d'essais des quelques sections standards des poteaux qu'on nome des « sections présélectionnées »

La résistance nominale  $P_n$  est le mineur des trois charges  $P_{ne}$  et  $P_{nl}$  et  $P_{nd}$  des trois types d'instabilités calculée ici après :

#### a - instabilité, flexionnel, torsionnel ou flexion-torsionnel :

La résistance nominal  $P_{ne}$  engendrée par une instabilité flexionnelle, torsionnelle ou flexionnelle-torsionnelle est donnée par :

$$\text{Pour } \lambda_c \leq 1.5 \quad P_{ne} = (0.658^{\lambda_c^2}) P_y \quad (2-14)$$

$$\text{Pour } \lambda_c > 1.5 \quad P_{ne} = \left( \frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) P_y \quad (2-15)$$

Avec:

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cre}}}$$

$$P_y = A_g \cdot F_y$$

$P_y$  : Le minimum des charges critiques élastiques des modes flexionnel, torsionnel-flexionnel, torsionnel.

**b - Instabilité locale :**

La résistance nominale pour le mode local ( $P_{ne}$ ) est estimée de la manière suivante :

$$\text{Pour } \lambda_l \leq 0.776 \quad P_{nL} = P_{ne} \quad (2-16)$$

$$\text{Pour } \lambda_l \geq 0.776 \quad P_{nL} = \left\{ 1 - 0.15 \left( \frac{P_{crL}}{P_{ne}} \right)^{0.4} \right\} \left( \frac{P_{crL}}{P_{ne}} \right)^{0.4} P_{ne} \quad (2-17)$$

Avec

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{P_{ne}}{P_{crl}}} : \text{L'élanement local}$$

$P_{crl}$  : Charge critique du mode local

**c- instabilité distorsionnelle :**

La charge critique élastique  $P_{crd}$  pour le mode distorsionnel est obtenue par

$$P_{crd} = \frac{F_{crd}}{A_g}$$

Ou :

$F_{crd}$  : Contrainte de déformation critique

$A_g$  : Aire de la section

La résistance nominale ( $P_{nd}$ ) du mode distorsionnel est :

$$\lambda_d \leq 0.561 \quad P_{nd} = P_y \quad (2-18)$$

$$\lambda_d > 0.561 \quad P_{nd} = \left( 1 - 0.25 \left( \frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} \right) \left( \frac{P_{crd}}{P_y} \right)^{0.6} P_y \quad (2-19)$$

Ou:

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crd}}}$$

$P_{crd}$  : Charge critique élastique du mode distorsionnel

L'interaction entre le mode distorsionnel et global est pris en compte en remplaçant  $P_y$  par  $P_{ne}$ .

Les équations (2-14) à (2-19) donnent les courbes de résistance schématisée dans la Figure (2-14).

La DSM prévoit la résistance de l'élément vis-à-vis des trois types d'instabilités.

Si une section contient des dimensions très minces, la charge due à l'instabilité locale serait très petite, et donc la résistance nominale calculée à partir de la DSM serait conservatrice dans ce cas ; cependant les éléments à dimensions très minces présentent un problème d'utilisation ; ils sont peu performants et efficaces.

Si des raidisseurs longitudinaux sont ajoutés, la résistance sera augmentée et la résistance prévue avec la DSM sera améliorée considérablement.

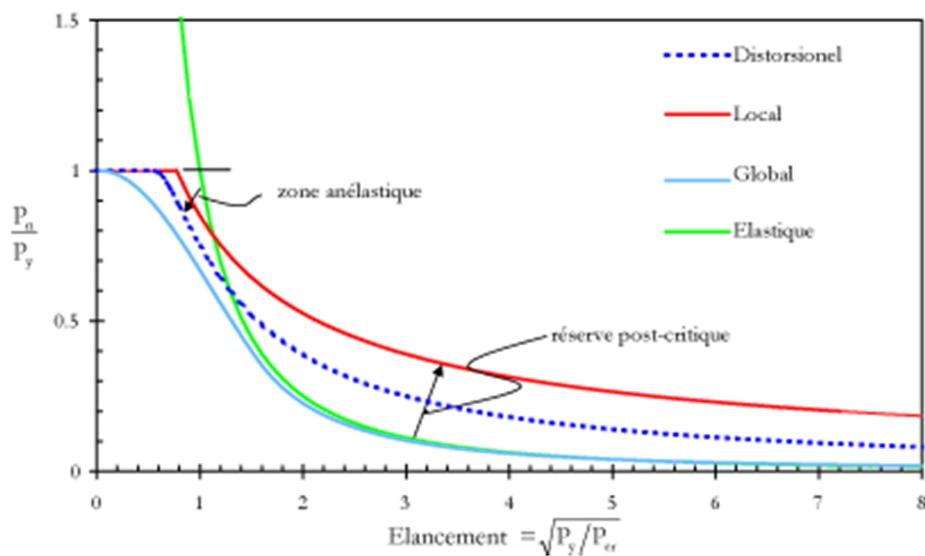


Figure (2-14) Courbes de résistance

**CHAPITRE 3**  
**Méthode de calcul de la contrainte  
critique distorsionnelle**

**Introduction :**

Les règles de calcul et de conception des PFF exigent le calcul de la contrainte critique. Pour le mode distorsionnel, deux méthodes essentielles s'imposent :

- ❖ Méthode de Lau et Hancock (1987)
- ❖ Méthode de Schäfer (1997)

Ces deux modèles utilisés sont liés à la contrainte de rotation à la jonction semelle/âme. Les deux approches sont semblables, une légère différence réside dans la manière de traiter l'âme [45], seulement la méthode de Schäfer fournit une solution plus précise mais moins conservatrice que celle de Hancock. Les expressions données ci-dessous s'appliquent seulement pour des semelles avec des raidisseurs de bord, pour d'autres types de semelles de nouvelles expressions sont exigées.

**3-2 Méthode de Schäfer :**

Pour des sections avec des raidisseurs de bords, l'instabilité se produit à une longueur de demi onde critique  $L_{cr}$  donnée par :

$$L_{cr} = \frac{6\pi^4 h(1-\nu^2)}{t^3} (I_{xf}(x_0 - h_x)^2 + C_{wf} - \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_0 - h_x)^2)^{1/4} \tag{3-1}$$

La contrainte distorsionnelle dépend de la rigidité à la rotation  $K_\phi$  à la jonction âme/semelle qui est la somme de la rigidité à la rotation élastique et la rigidité géométrique Figure (3-1) :

$$K_\phi = (K_{\phi f} + K_{\phi w})_g + (K_{\phi f} + K_{\phi w})_e \tag{3-2}$$

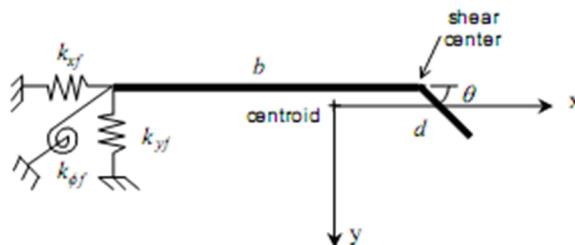


Figure (3-1) Semelle élastiquement appuyé sur la jonction âme semelle [46]

L'instabilité se produit quand cette rigidité à la rotation est nulle, cela veut dire que la rigidité élastique à la jonction âme/semelle est détruite par la rigidité géométrique, et par conséquent si la contrainte dépend d'une partie de la rigidité géométrique, alors elle s'écrit :

$$\sigma_{\text{crd}} = \frac{K_{\emptyset fe} + K_{\emptyset we}}{K_{\emptyset fg} + K_{\emptyset wg}} \quad (3-3)$$

Avec :

$K_{\emptyset fg} - K_{\emptyset fe}$  : Rigidité géométrique et élastique (respectivement) de la semelle.

$$K_{\emptyset fg} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[ A_f \left( (x_0 - h_x)^2 \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}}\right)^2 - 2y_0(x_0 - h_x) \left(\frac{I_{xyf}}{I_{yf}}\right) + h_x^2 + y_0^2 \right) + I_{xf} + I_{yf} \right] \quad (3-4)$$

$$K_{\emptyset fe} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left( EI_{xf}(x_0 - h_x)^2 + EC_{wf} - E \frac{I_{xyf}^2}{I_{yf}} (x_0 - h_x)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 GJ_f \quad (3-5)$$

$$K_{\emptyset we} = \frac{Et^3}{6h(1-\nu^2)} \quad (3-6)$$

$$K_{\emptyset wg} = \left(\frac{\pi}{L_{cr}}\right)^2 \cdot \frac{t.h^3}{60} \quad (3-7)$$

On voit clairement que ces expressions dépendent des propriétés de la section (semelle). Le tableau (3-1) donne un exemple de section C et Z calculé par Schäfer [52].

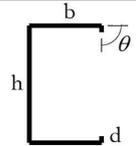
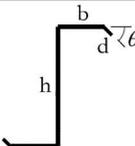
	
$\Delta_f = (b+d)t$	$\Delta_f = (b+d)t$
$J_f = \frac{1}{3}bt^3 + \frac{1}{3}dt^3$	$J_f = \frac{1}{3}bt^3 + \frac{1}{3}dt^3$
$I_{xf} = \frac{t(t^2b^2 + 4bd^3 + t^2bd + d^4)}{12(b+d)}$	$I_{xf} = \frac{t(t^2b^2 + 4bd^3 - 4bd^3 \cos^2(\theta) + t^2bd + d^4 - d^4 \cos^2(\theta))}{12(b+d)}$
$I_{yf} = \frac{t(b^4 + 4db^3)}{12(b+d)}$	$I_{yf} = \frac{t(b^4 + 4db^3 + 6d^2b^2 \cos(\theta) + 4d^3b \cos^2(\theta) + d^4 \cos^2(\theta))}{12(b+d)}$
$I_{xyf} = \frac{tb^2d^2}{4(b+d)}$	$I_{xyf} = \frac{tbd^2 \sin(\theta)(b + d \cos(\theta))}{4(b+d)}$
$I_{of} = \frac{1}{3}tb^3 + \frac{1}{12}bt^3 + \frac{1}{3}td^3$	$I_{of} = \frac{1}{3}tb^3 + \frac{1}{12}bt^3 + \frac{1}{3}td^3$
$C_{wff} = 0$	$C_{wff} = 0$
$x_o = \frac{b^2}{2(b+d)}$	$x_o = \frac{b^2 - d^2 \cos(\theta)}{2(b+d)}$
$h_y = y_o = \frac{-d^2}{2(b+d)}$	$h_y = y_o = \frac{-d^2 \sin(\theta)}{2(b+d)}$
$h_x = \frac{-(b^2 + 2db)}{2(b+d)}$	$h_x = \frac{-(b^2 + 2db + d^2 \cos(\theta))}{2(b+d)}$
$b = x_o - h_x$	$b = x_o - h_x$

Tableau (3- 1) : caractéristiques géométriques des semelles des sections en C et en Z [52]

### 3-3 Méthode de Lau- Hancock :

La formulation est légèrement différente que celle de Schäfer mais toujours liée à la rigidité à la rotation de la jonction âme/ semelle.

Premièrement on estime la longueur de demi-onde critique :

$$\lambda_d = 4,8 \left[ \frac{I_x \cdot b^2 \cdot h}{t^3} \right]^{1/4} \quad (3-8)$$

On calcule ensuite les paramètres suivants :

$$\eta\eta = \left( \frac{\pi}{\lambda_d} \right)^2, \quad \beta_1 = X_{bar}^2 + \left( \frac{I_x + I_y}{A} \right), \quad X_{bar} = b - x_o \quad (3-9)$$

$$\alpha_1 = \frac{\eta\eta}{\beta_1} (I_x \cdot b^2 + 0,039 \cdot J \cdot \lambda_d^2), \quad \alpha_2 = \eta\eta \cdot \left( I_y + \frac{2}{\beta_1} \cdot y_{bar} \cdot b \cdot I_{xy} \right) \quad (3-$$

10)

$$\alpha_3 = \eta n \left( \alpha_1 \cdot I_y - \frac{\eta n}{B_1} \cdot I_{xy}^2 \cdot b^2 \right), \quad y_{bar} = y_0 \quad (3-11)$$

Donc on peut faire une première estimation de la contrainte distorsionnelle critique parce que la rigidité à la rotation est écrite en fonction de cette contrainte. Cette étape de calcul exige la formulation et la solution d'une équation quadratique [29].

Cette équation à deux racines qui sont données comme suit :

$$\text{Racine positive : } (E, A, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{E}{2 \cdot A} \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) + [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4 \alpha_3]^{1/2} \right] \quad (3-12)$$

$$\text{Racine négative : } (E, A, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{E}{2 \cdot A} \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) - [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4 \alpha_3]^{1/2} \right] \quad (3-13)$$

La plus petite des deux racines est d'intérêt. Si une racine est négative, on prend la contrainte distorsionnelle critique égale à zéro.

Un fois la contrainte distorsionnelle pré estimée on calcule la rigidité à la rotation :

$$k_\phi = \frac{Et^3}{5,46(h+0,06\lambda_d)} \left[ 1 - \frac{1,11\sigma'}{Et^2} \left( \frac{h^2\lambda_d}{h^2 + \lambda_d^2} \right) \right] \quad (3-14)$$

En dernière étape, on recalcule la contrainte distorsionnelle après avoir corrigé les paramètres  $\alpha_1, \alpha_3$  :

$$\alpha_1 = \frac{\eta n}{B_1} (I_x \cdot b^2 + 0,039 \cdot J \cdot \lambda_d^2) + \frac{K_\phi}{\beta_1 \cdot \eta \cdot E}$$

$$\alpha_3 = \eta n \cdot \left( \alpha_1 \cdot I_y - \frac{\eta n}{B_1} \cdot I_{xy}^2 \cdot b^2 \right)$$

$$\sigma_{crd} = \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) - [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4 \alpha_3]^{1/2} \right]$$

### 3-4 Les méthodes numériques :

Plusieurs méthodes numériques existent, et évoluent de jour en jour, tels que les éléments finis(FEM), les bandes finies(FSM), les splines bandes finies(SFSM), les différences finis la GBT.....L'analyse numérique fait appel aux connaissances de ces méthodes numériques pour transformer les équations déjà établies par les sciences de l'ingénieur. Elles sont devenues un outil puissant pour l'analyse du comportement des structures à parois mince et elles ont atteint un niveau de maturité tel que plusieurs entre elles peuvent décrire avec succès le comportement (linéaire et non linéaire) jusqu'à la ruine des profilés à parois minces (PFF). Mais les règles américaines (AISI, 2004a) exigent que l'erreur de l'utilisation de ces méthodes par rapport a la solution exacte ne doit dépasser 1%. Nous donnerons un bref résumé

sur les deux méthodes FE et FSM. La méthode des splines bandes finis sera détaillée par rapport aux deux autres du moment que c'est celle-ci qu'on va utiliser dans ce travail.

Dans le domaine de la recherche, les ingénieurs sont devenus très familiers avec la méthode des éléments finis et son application pratique de type plaque et de type coque. Elle est de plus en plus appropriée pour l'analyse des modes d'instabilité des éléments à parois mince pour sa précision et sa puissance. Elle s'applique pratiquement pour tous les problèmes avec des conditions aux limites variés, condition de chargement et des sections des profilés diverses. Cette méthode est basée sur une idée simple : discrétiser une forme complexe en un grand nombre de sous domaines élémentaires de forme géométrique simple (élément finis) interconnectés en des points appelés nœuds (Figure (3-2)). On considère le comportement mécanique de chaque élément séparément puis on assemble les éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La détermination de la charge critique des éléments à parois mince par cette méthode exige la manipulation d'un grand nombre d'élément finis qui veut dire un grand nombre de degrés de liberté, d'où la nécessité de manipuler de grands vecteurs et matrices. Il est difficile de classer ces modes d'instabilité (vecteur,...) ; cela dépend d'un jugement sain et réfléchi de l'utilisateur qui est basé sur une analyse visuelle qui peut échapper à la maîtrise de l'utilisateur. La précision des résultats et la convergence de la méthode dépendent essentiellement de finesse du maillage d'où un effort informatique significatif. Au niveau de la structure à analyser, la complexité des formes géométriques des propriétés mécaniques et physiques, des charges et des conditions aux limites ne présentent plus guère de problème, mais des difficultés de modélisation et de discrétisation peuvent apparaître.

La méthode des bandes finies (Finite Strip Method : FSM) a été découverte en 1968 par Y.K Cheung [13]. Elle a été conçue pour des plaques rectangulaires et des C.A.L simples. C'est une variante de la méthode des éléments finis. Elle s'avère plus économique que les éléments finis, efficace, puissante et commode pour l'analyse du flambement des profils à parois mince. Elle ramène un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel en choisissant une fonction de déplacement appropriée tel que :

$$\omega(x, y) = \sum_{n=1}^r f_n(x) \cdot y_n(y) \quad (3-19)$$

Où :

$f_n(x)$  : Sont des polynômes

$y_m(y)$  :Sont des termes trigonométriques qui satisfont les conditions aux limites dans la direction y.

Les fonctions  $y_m$  peuvent être prises à partir des fonctions de base de l'équation de vibration d'une poutre :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\mu^4}{a^4} \cdot y = 0 \quad (3-20)$$

a : longueur de la poutre (la bande)

$\mu$  : Un paramètre relié à la fréquence, matériau, propriété géométrique.

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$y(y) = C_1 \cdot \sin \frac{\mu y}{a} + C_2 \cos \frac{\mu y}{a} + C_3 \cdot \sinh \frac{\mu y}{a} + C_4 \cosh \frac{\mu y}{a} \quad (3-21)$$

Les constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sont déterminés à partir des C.A.L.

La formulation de la méthode des bandes finies est similaire à la méthode des éléments finis. La FSM consiste à décomposer le domaine étudié en un ensemble d'éléments rectangulaires appelés « bande » assemblé entre eux par des lignes « nodale » (Figure (3-2)).

Schäfer s'est inspiré du travail de Cheung pour développer la CFSM (détaillé dans le chapitre 4) qui a comme résultat une classification automatique des modes d'instabilité.

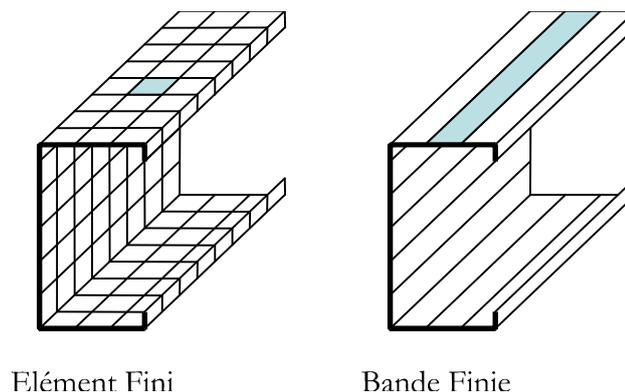


Figure (3-2) maillage en élément finis et en bande fini

### 3-4-1 La méthode des splines bandes finis : la théorie

La méthode des splines bandes finies a été développée à l'origine par Cheung en 1982 à partir de la méthode des bandes finies. Elle vient compléter cette méthode pour prendre en compte les différents types de chargements et conditions aux limites par la modification de quelques splines des deux extrémités. La SFM a beaucoup facilité l'analyse des structures dont les propriétés géométriques sont constantes le long d'une direction, généralement la direction longitudinale. Pour cela on est amené à faire un choix judicieux de la fonction d'interpolation qui approche mieux la variation de champ de déplacement surtout dans le sens longitudinal.

L'interpolation par splines (polynômes par morceaux) utilise une succession de polynômes de degré plus élevé tels que les raccordements entre polynômes soit le plus régulier possible, ça signifie que pour obtenir une courbe lisse, il faut que l'interpolant soit deux fois différentiables, et la fonction est régulière en chaque point, dans ce cas la fonction polynomiale est de 3ème degré, elle est appelée « B3.spline » ou spline cubique (Figure (3-4)).

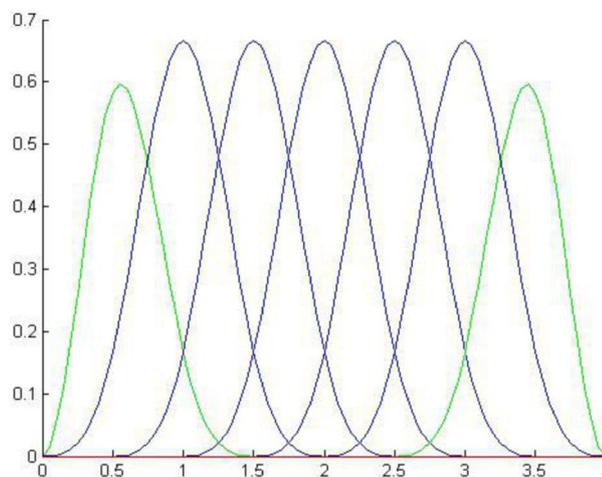


Figure (3-3) Spline cubique, n polynôme de degré 3

#### 3-4-1-1 Modélisation- La fonction standard B3-spline :

La fonction d'interpolation que nous utilisons pour approximer notre fonction de déplacement dans la direction longitudinale est la fonction B3-Spline.

La B3-spline local est définie par [33]:

$$\psi_i(y) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0 & y \leq y_{i-2} \\ (y - y_{i-2})^3 & y_{i-2} \leq y \leq y_{i-1} \\ (y - y_{i-2})^3 - 4(y - y_{i-1})^3 & y_{i-1} \leq y \leq y_i \\ (y_{i+2} - y)^3 - 4(y_{i+1} - y)^3 & y_i \leq y \leq y_{i+1} \\ (y_{i+2} - y)^3 & y_{i+1} \leq y \leq y_{i+2} \\ 0 & y \geq y_{i+2} \end{cases} \quad (3-22)$$

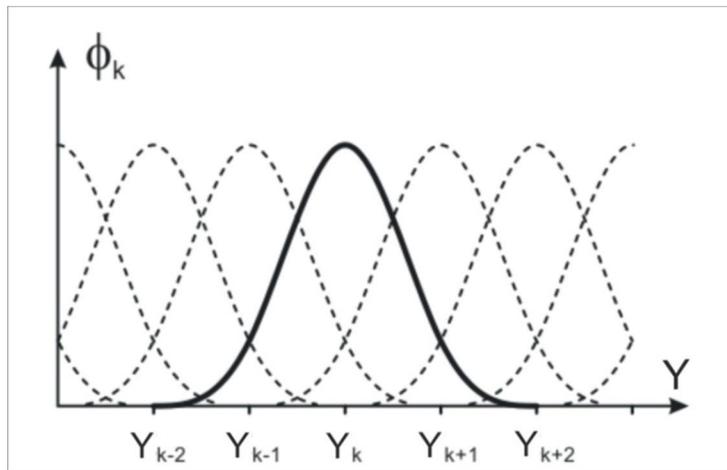


Figure (3-4) : la fonction B3-spline locale

### 3-4-1-2 Notations et Repères:

Dans la méthode des splines bandes finis un profil à parois mince est divisé en un nombre fini de bandes  $n_s$  de longueur identique  $a$ , liées entre elle par  $n$  lignes nodal, la ligne d'intersection de deux bandes reliées est appelée ligne nodale ou simplement nœud nodale, le nombre total des nœuds est noté  $nn$ . chaque ligne nodale est divisé longitudinalement en  $m$  sections dite « sections nodales », régulièrement espacées d'un intervalle  $h$ .

A chaque extrémité, une section nodale est ajoutée pour tenir en compte des conditions aux limites ; à la fin on aura  $(m+3)$  sections nodales numérotées de  $-1$  à  $m+1$  Figure (3-5).

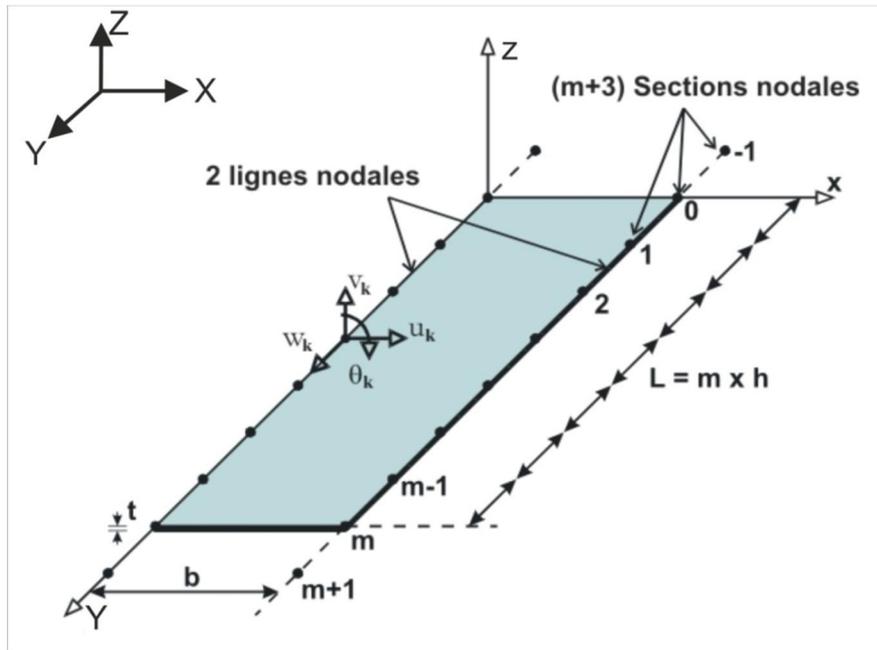


Figure (3-5) Une B3-spline bande : DDL- Repère

Deux axes de coordonnées sont utilisés : global et local Figure (3-5). Le système des coordonnées globales est notés X, Y, Z de tel manière que l'axe Y est parallèle à l'axe longitudinal de l'élément.

Le système local est noté x, y, z, et il est toujours associé à la paroi plane de l'élément de sorte que l'axe des x soit parallèle à la bande(c à d que l'axe x devrait se situer dans l'axe transversal).

Les degrés de liberté dans le repère global sont  $U_k$ - $V_k$ - $W_k$ trois translations et une rotation  $\theta_k$  autour de l'axe longitudinal.

### 3-4-1-3 Modifications des C A L :

Plusieurs méthodes sont disponibles pour l'édition de spline et la modification de leurs paramètres mathématiques. Les splines peuvent être ajustées, prolongées et raccordées. On peut modifier la direction de la tangente à ses extrémités (figure (3-6)).

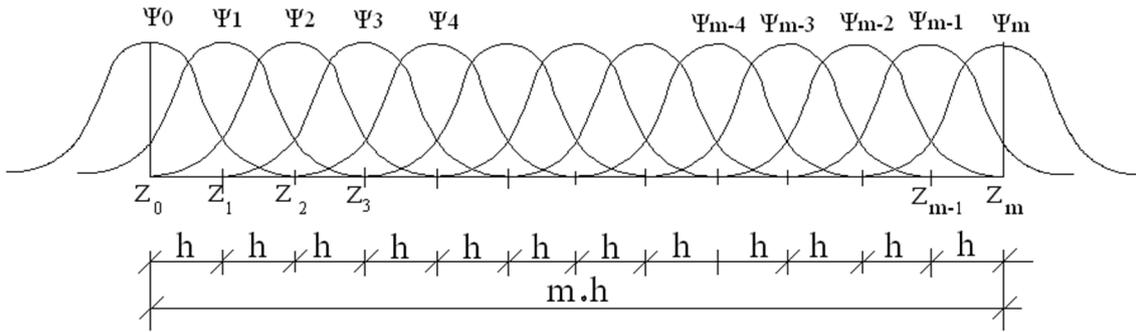


Figure (3-6) les différents splines locales

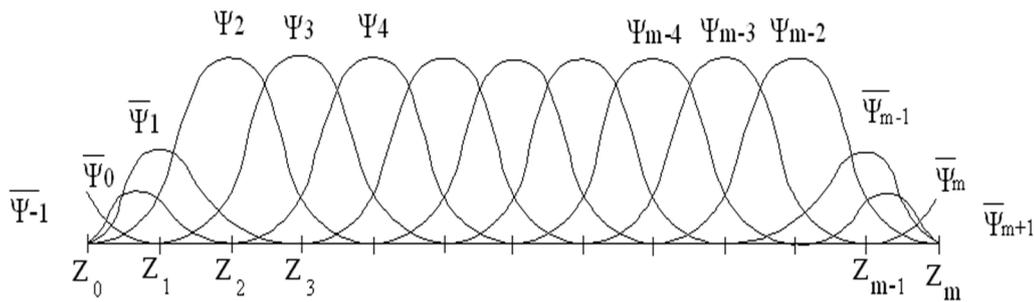


Figure (3-7) Splines modifiées aux frontières

Nous nous efforcerons de relier l'étude théorique de ces courbes avec leur application pratique.

Dans ce travail la forme proposée est présentée de manière à être la plus appropriée dans le domaine des splines bandes finis.

Le déplacement total est la somme des (m+3) B3-splines locales :

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \psi_i(y) \tag{3-24}$$

Ou

$\psi_i(y)$  sont les B3-spline local figure (3-6)

$\alpha_i$  sont les amplitudes des fonctions B3-splines(les degrés de liberté pour notre cas).

Afin de s'adapter aux diverses conditions aux limites trois splines locales d'extrémité centré à  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $y_1$  devraient être modifiées Figure (3-7).

Selon Cheung [12] ces splines modifiées ont les valeurs suivantes :

	$y = y_{i-2}$	$y = y_{i-1}$	$y = y_i$	$y = y_{i+1}$	$y = y_{i+2}$
$\psi_i(y)$	0	1/6	4/6	1/6	0

- ❖ Cas d'un profilé libre aux extrémités :  $W(1) \neq 0, W(0) \neq 0, W'(0) \neq 0, W'(1) \neq 0$

$$\overline{\psi}_{-1} = \psi_{-1}$$

$$\overline{\psi}_0 = \psi_1 - 4\psi_0$$

$$\overline{\psi}_1 = \psi_{-1} - \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$$

- ❖ Cas d'un profilé articulé aux extrémités :  $W(0)=0, W'(0) \neq 0, W(1)=0, W'(1) \neq 0$

$$\overline{\psi}_{-1} = \text{éliminé}$$

$$\overline{\psi}_0 = \psi_1 - 4\psi_0$$

$$\overline{\psi}_1 = \psi_{-1} - \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$$

- ❖ Cas d'un profilé encastré aux extrémités :  $W(0)=0, W'(0)=0, W(1)=0, W'(1)=0$

$$\overline{\psi}_{-1} = \text{éliminé}$$

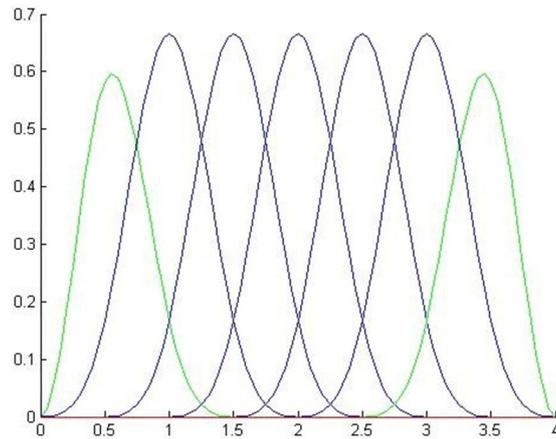
$$\overline{\psi}_0 = \text{éliminé}$$

$$\overline{\psi}_1 = \psi_{-1} - \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$$

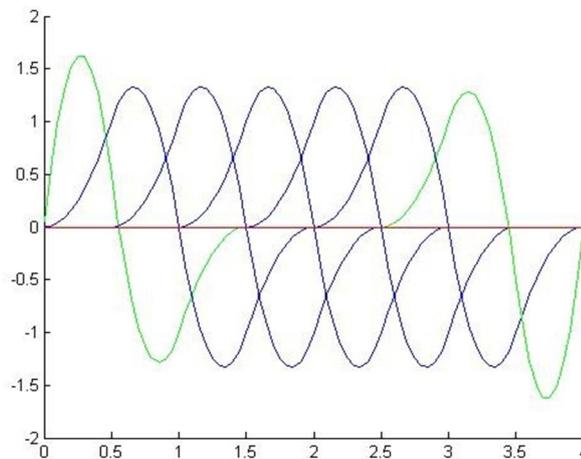
La fonction  $\psi_i(y)$  et ses 1ers dérivés sont représentés sur la Figure (3-8) et ses valeurs sont données dans le Tableau (3-2)

$\psi_i'(y)$	0	1/2h	0	-1/2h	0
$\psi_i''(y)$	0	1/h <sup>2</sup>	-2/h <sup>2</sup>	1/h <sup>2</sup>	0

Tableau (3-2) : les valeurs de la fonction spline local et de ses deux Premières dérivées aux nœuds



(a)



(b)

Figure (3-8) : a- la fonction  $\psi_i(y)$   
b- la fonction  $\psi_i'(y)$

### 3-4-1-4 Fonctions de déplacement :

Dans la SFMS, la fonction de déplacement de la bande est exprimée par le produit du polynôme d'interpolation transversale et par une combinaison linéaire des fonctions B3 splines.

Le comportement d'une bande est décomposé en 2 parties : membranaire et flexionnel, La déformation membranaire est notée  $\epsilon_m$  et régie par les hypothèses de la contrainte plane, La déformation flexionnel est noté  $\epsilon_f$  et suit la théorie des plaques minces de Kirchoff.

Ci- après les équations d'équilibre et la loi de comportement sont d'abord dérivées au niveau élémentaire.

### Déplacement membranaire :

Les déplacements membranaires (u, v) d'une bande spline est exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N_m][\phi_m]\{d_m\} \tag{3-25}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\phi_{ui}] \\ [\phi_{vi}] \\ [\phi_{uj}] \\ [\phi_{vj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3-26}$$

Ou :

$N_m$  : Polynôme d'interpolation transversal

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{b} \\ N_2 = \frac{x}{b} \end{cases}$$

$\phi_m$  : Polynôme d'interpolation longitudinal

$d_m$  : Vecteur des degrés de liberté

Sachant que le vecteur des degrés de liberté d'une ligne nodale comporte :

$$d_m = \{u_i v_i u_j v_j\}$$

Chaque composante de ce vecteur est composée de (m+3) terme:

$$\{u_i\} = \{u_{-1}^i u_0^i u_1^i \dots \dots \dots u_{m-1}^i u_m^i u_{m+1}^i\}^t$$

$$\{v_i\} = \{v_{-1}^i v_0^i v_1^i \dots \dots \dots v_{m-1}^i v_m^i v_{m+1}^i\}^t$$

$$\{u_j\} = \{u_{-1}^j u_0^j u_1^j \dots \dots \dots u_{m-1}^j u_m^j u_{m+1}^j\}^t$$

$$\{v_j\} = \{v_{-1}^j v_0^j v_1^j \dots \dots \dots v_{m-1}^j v_m^j v_{m+1}^j\}^t$$

Les  $\phi_{ui}\phi_{uj}\phi_{vi}\phi_{vj}$  sont les vecteurs qui définissent les (m + 3) fonctions splines cubiques. Pour la ligne nodale i on :

$$\begin{aligned} \Phi_{ui} &= \{\overline{\phi}_{-1}^{ui} \overline{\phi}_0^{ui} \overline{\phi}_1^{ui} \dots \dots \overline{\phi}_k^{ui} \dots \dots \overline{\phi}_{m-1}^{ui} \overline{\phi}_m^{ui} \overline{\phi}_{m+1}^{ui}\} \\ \Phi_{vi} &= \{\{\overline{\phi}_{-1}^{vi} \overline{\phi}_0^{vi} \overline{\phi}_1^{vi} \dots \dots \overline{\phi}_k^{vi} \dots \dots \overline{\phi}_{m-1}^{vi} \overline{\phi}_m^{vi} \overline{\phi}_{m+1}^{vi}\}\} \end{aligned}$$

Le vecteur de déformation membranaire s'écrit

$$\{\epsilon_m\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3-27)$$

Ou :

$$\epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} ([N_1 \ 0 \ N_2 \ 0]) \begin{Bmatrix} [\Phi_{ui}] \\ [\Phi_{vi}] \\ [\Phi_{uj}] \\ [\Phi_{vj}] \end{Bmatrix} \{d_m\} \quad (3-28)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} ([0 \ N_1 \ 0 \ N_2]) \begin{Bmatrix} [\Phi_{ui}] \\ [\Phi_{vi}] \\ [\Phi_{uj}] \\ [\Phi_{vj}] \end{Bmatrix} \{d_m\} \quad (3-29)$$

$$\epsilon_{xy} = \left\{ [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0] \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} [\Phi_{ui}] \\ [\Phi_{vi}] \\ [\Phi_{uj}] \\ [\Phi_{vj}] \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} ([0 \ N_1 \ 0 \ N_2]) \begin{Bmatrix} [\Phi_{ui}] \\ [\Phi_{vi}] \\ [\Phi_{uj}] \\ [\Phi_{vj}] \end{Bmatrix} \right\} \{d_m\} \quad (3-30)$$

Ainsi après simplification, les équations (3-28) et (3-30) deviennent :

$$\epsilon_x = -\frac{1}{b} [\Phi_{ui}] \{u_i\} + \frac{1}{b} [\Phi_{uj}] \{u_j\} \quad (3-31)$$

$$\epsilon_{xy} = (1 - \bar{x}) [\Phi'_{ui}] \{u_i\} - \frac{1}{b} [\phi_{vi}] \{v_i\} + [\Phi'_{uj}] \{u_j\} + \frac{1}{b} [\phi_{vj}] \{v_j\} \quad (3-32)$$

Ou  $\bar{x} = \frac{x}{b}$

**3-4-1-4-2 Déplacement flexionnel :**

La fonction de déplacement  $w$  est exprimée par la combinaison de polynôme de l'interpolation transversale et de fonction B3- spline de la fonction d'interpolation longitudinal de la manière suivante :

$$\{w\} = [N_f][\phi_f]\{d_f\} \tag{3-33}$$

$$w = [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{bmatrix} [\phi_{wi}] & & & \\ & [\phi_{\theta i}] & & \\ & & [\phi_{wj}] & \\ & & & [\phi_{\theta j}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{3-34}$$

Ou:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{b}\right)^3 \\ N_2 &= x\left(1 - 2\frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right) \\ N_3 &= \left(3\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{b}\right)^3\right) \\ N_4 &= x\left(\left(\frac{x}{b}\right)^2 - \frac{x}{b}\right) \end{aligned} \tag{3-35-a}$$

$[\phi_{wi}], [\phi_{wj}], [\phi_{\theta i}], [\phi_{\theta j}]$  sont les vecteurs qui définissent les  $(m+3)$  B3 splines.

$$\begin{aligned} \{w_i\} &= \{w_{-1}^i, w_0^i \dots \dots \dots w_{m+1}^i\}^T \\ \{w_j\} &= \{w_{-1}^j, w_0^j \dots \dots \dots w_{m+1}^j\}^T \\ \{\theta_i\} &= \{\theta_{-1}^i, \theta_0^i \dots \dots \dots \theta_{m+1}^i\}^T \\ \{\theta_j\} &= \{\theta_{-1}^j, \theta_0^j \dots \dots \dots \theta_{m+1}^j\}^T \end{aligned}$$

La déformation flexionnelle est proportionnelle à la courbure de l'élément, c'est à dire à la dérivée seconde du déplacement.

$$\varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{3-35}$$

D'où

$$\varepsilon_f = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_f][\phi_f] \\ -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\phi_f]N_f \\ 2z \frac{\partial N_f}{\partial x} \frac{\partial \phi_f}{\partial y} \end{bmatrix} \{d_f\} \quad (3-36)$$

### 3-4-1-5 Bilan énergétique :

Pour résoudre notre problème on fait appel au principe de minimum de l'énergie potentielle.

L'énergie potentiel totale d'un système est donnée par :

$$\phi = U - W \quad (3-37)$$

Ou

U : représente l'énergie de déformation des efforts intérieurs.

W : représente l'énergie potentielle de forces extérieures.

#### 3-4-1-5-1 Energie de déformation :

Puisque le comportement membranaire (u, v) est découplé du comportement flexionnel (w,θ) l'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b t \cdot \{\varepsilon_m\}^T \{\sigma_m\} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{\varepsilon_f\}^T \{\sigma_f\} dx dy \quad (3-38)$$

En introduisant la loi de Hooke :

$$\begin{aligned} \{\sigma_m\} &= [D_m] \{\varepsilon_m\} \\ \{\sigma_f\} &= [D_f] \{\varepsilon_f\} \end{aligned}$$

On retrouve

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{\varepsilon_m\}^T [D_m] \{\varepsilon_m\} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{\varepsilon_f\}^T [D_f] \{\varepsilon_f\} dx dy \quad (3-39)$$

Or en termes de fonction de forme on a la relation suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b [\{d\}^T [B]^T [D] \{d\}] dx dy \quad (3-40)$$

Ou:

$$\{d\}^T = \{\{d_m\}^T \{d_f\}^T\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_m] [0] \\ [0] [B_f] \end{bmatrix} \quad (3-40-a)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} t[D_m][0] \\ [0][D_f] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b}[\phi_{ui}] & [0] & \frac{1}{b}[\phi_{uj}][0] \\ [0] & (1 - \bar{x})[\phi'_{vi}] & [0]\bar{x}[\phi'_{vj}] \\ (1 - \bar{x})[\phi'_{ui}] & -\frac{1}{b}[\phi_i] & \bar{x}[\phi'_{uj}]\frac{1}{b}[\phi_{vj}] \end{bmatrix} \quad (3-40-b)$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{b^2} - \frac{12\bar{x}}{b^2}\right)[\phi_{wi}] & \left(\frac{4}{b} - \frac{6\bar{x}}{b}\right)[\phi_{\theta i}] & \left(\frac{12\bar{x}}{b^2} - \frac{6}{b^2}\right)[\phi_{wj}] & \left(\frac{2}{b} - \frac{6\bar{x}}{b}\right)[\phi_{\theta j}] \\ (-1 + 3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3)[\phi''_{wi}] & -x(1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2)[\phi''_{\theta i}] & (3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3)[\phi''_{wj}] & (-\bar{x}^2 + \bar{x})[\phi''_{\theta j}] \\ \left(-12\frac{\bar{x}}{b} + 12\frac{\bar{x}^2}{b}\right)[\phi'_{wi}] & (2 - 8\bar{x} + 6\bar{x}^2) - \frac{1}{b}[\phi'_{\theta i}] & \left(12\frac{\bar{x}}{b} - 12\frac{\bar{x}^2}{b}\right)[\phi'_{wj}] & (6\bar{x}^2 - 4\bar{x})[\phi'_{\theta j}] \end{bmatrix} \quad (3-40-c)$$

$$[D_m] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & \frac{\nu_y \cdot E_x}{(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & 0 \\ \frac{\nu_x E_y}{(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & \frac{E_y \cdot t^3}{(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-40-d)$$

$$[D_f] = \begin{bmatrix} \frac{E_x \cdot t^3}{12(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & \frac{\nu_y \cdot E_x \cdot t^3}{12(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & 0 \\ \frac{\nu_x E_y \cdot t^3}{12(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & \frac{E_y \cdot t^3}{12(1-\nu_x \cdot \nu_y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xy} t^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3-40-e)$$

### Travail des forces extérieures :

Généralement les éléments à parois mince sont soumis à une contrainte compressive uniforme le long de la bande et linéairement répartie à travers la largeur (Figure (3-9)), à chaque instant de l'histoire de chargement linéaire on a :

$$\sigma = \lambda_i \bar{\sigma} \quad (3-41)$$

$\bar{\sigma}$ : Chargement de référence.

$\lambda_i$ : Facteur de charge ou multiplicateur de charge

Il est important du point de vue pratique de déterminer les valeurs critiques de charge conduisant à l'équilibre, cependant de toutes les solutions, l'ingénieur ne s'intéresse qu'aux valeurs de chargement au delà desquelles le système devient instable, c'est la plus petite valeur positive de  $\lambda_i$ , donc ces charges critiques seront :

$$\sigma_{crit} = \lambda_{crit} \bar{\sigma} \quad (3-42)$$

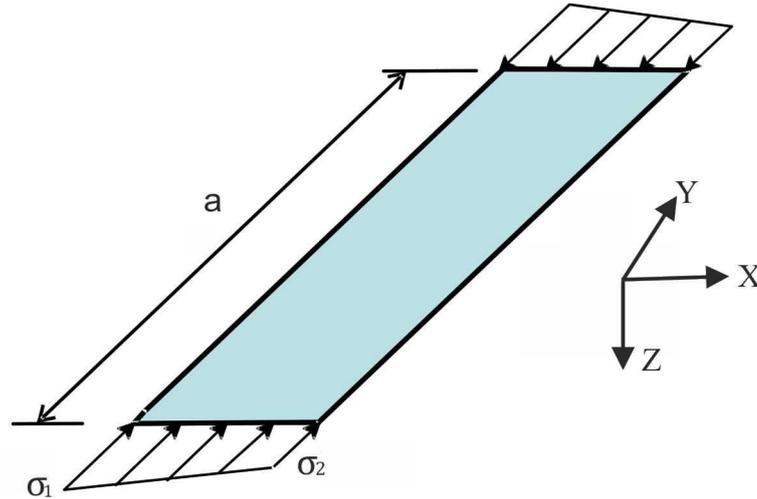


Figure (3-9) : chargement appliqué sur une bande spline

En considérant l'énergie potentielle due à ces forces causées par la partie non linéaire de la déformation [12]:

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^L \int_0^b \lambda \sigma_L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3-43)$$

Avec 
$$\sigma_L = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{L}$$

Ou encore:

$$W = -\frac{1}{2} t \int_0^L \int_0^b \lambda \left( \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{L} \right) \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{matrix} \right\} dx dy \quad (3-44)$$

$$W = -\frac{1}{2} t \lambda \int_0^L \int_0^b \left( \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{L} \right) \frac{\partial}{\partial y} (uvw) \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dx dy \quad (3-45)$$

En remplaçant les déplacements par les dérivés des fonctions d'interpolations et des déplacements nodaux, on obtient :

$$W = -\frac{1}{2} t \int_0^L \int_0^b \lambda \left( \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{L} \right) \{d\}^T \cdot \frac{\partial}{\partial y} [\phi]^T [N]^T [N] \frac{\partial [\phi]}{\partial y} \{d\} dx dy \quad (3-46)$$

### 3-4-1-5-3 Energie potentielle totale :

En remplaçant l'équation (3-39) et l'équation (3-46) dans l'équation (3-35) on obtient :

$$\emptyset = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{d\}^T [B]^T [D] [B] \{d\} dx dy - \frac{\lambda}{2} t \int_0^L \int_0^b \left( \sigma_1 + \frac{x}{b} \right) \frac{\partial}{\partial y} [\emptyset]^T [N]^T [N] \frac{\partial [\emptyset]}{\partial y} \{d\} dx dy \quad (3-47)$$

L'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \{\emptyset\}}{\partial \{d\}} = 0 \quad (3-48)$$

Il résulte :

$$[K] \{d\} - \lambda [K_g] \{d\} = \{0\} \quad (3-49)$$

Avec :

[K] : Matrice de rigidité

[K<sub>g</sub>] : Matrice de rigidité géométrique

$$[K] = \int_0^L \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy$$

[B] et [D] sont donnés dans le § 3-5-1-5-1

$$[K_g] = t \int_0^L \int_0^b \left( \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b} \right) \frac{\partial}{\partial y} [\emptyset]^T [N]^T [N] \frac{\partial [\emptyset]}{\partial y} dx dy$$

Ou :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_m] [0] \\ [0] [N_f] \end{bmatrix}$$

Ainsi Cheung [12] a montré que pour une structure prismatique simplement appuyée à ses extrémités, les modes de déformations sont découplés et chaque mode peut être traité séparément et donc l'analyse de la stabilité linéaire élastique est un problème de valeurs et vecteurs propre :

La ruine apparaît pour la plus petite valeur de  $\lambda$  (le plus petit coefficient d'amplification du chargement initial), le mode propre associé correspond à la déformé de ce coefficient.

Plus de détail de développement de ces équations sont données dans la thèse de Boumechra [8].

### 3-4-1-6 Matrice de transformation géométrique :

Un élément à parois mince est constitué de plusieurs bandes fines, et l'orientation de ces bandes diffèrent les unes des autres, d'où il est indispensable de ramener ces quantités dans un système d'axe global commun.

Considérons la figure (3-10) où une bande est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe X du repère global.

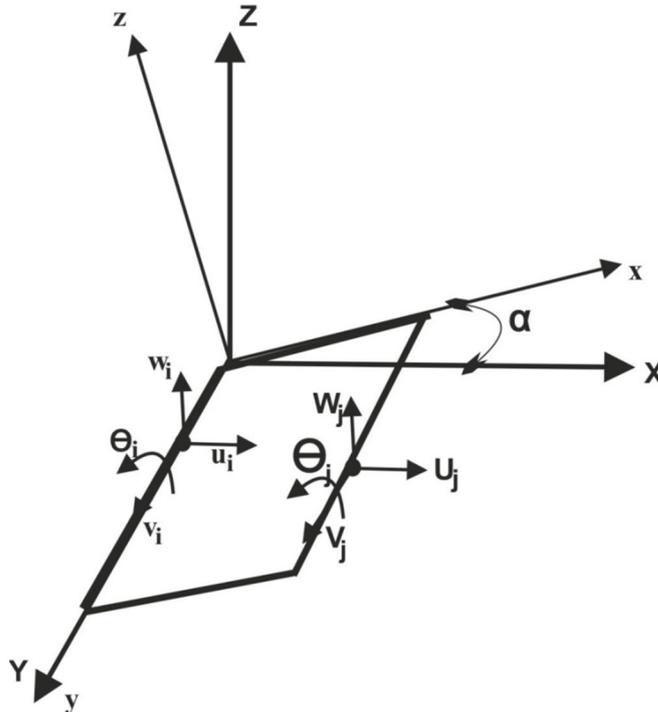


Figure (3-10) : une bande finis dans le système d'axe global.

La transformation géométrique ne se fait que dans le plan (xz).

Les axes globaux X, Y, Z sont définis de tels manière que l'axes Y soit parallèle à l'axe y local longitudinal de l'élément.

Vu la configuration géométrique décrite sur la Figure (3-10) les déplacements locaux s'écrivent :

$$\{d\} = [T]\{\Delta\} \tag{3-50}$$

Avec:

$$\{d\}^T = \left\{ \{u_i\} \{v_i\} \{w_i\} \{\theta_i\} \{u_j\} \{v_j\} \{w_j\} \{\theta_j\} \right\}^T$$

$$\{\Delta\}^T = \left\{ \{U_i\} \{V_i\} \{W_i\} \{\Theta_i\} \{U_j\} \{V_j\} \{W_j\} \{\Theta_j\} \right\}^T$$

Et

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

Notons que la matrice [T] est orthogonale et que son inverse est par conséquent égale à sa transposé.

### 3-4-1-7 Assemblage des matrices :

Après avoir établi les matrices de rigidité et les matrices de rigidité géométrique dans le repère local, il est nécessaire de les transformer au repère global en utilisant la matrice de rotation (équation (3-51)).

Les matrices de rigidité et de stabilité dans le repère global de chaque bande sont données par :

$$[K] = [T]^T [K] [T] \quad (3-52)$$

$$[K_g] = [T]^T [K_g] [T] \quad (3-53)$$

Sachant que chaque structure est constituée de n bandes, on est amené à assembler ces matrices élémentaires pour obtenir la matrice de rigidité globale, et la matrice de stabilité globale de la structure de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n K_i \\ K_g &= \sum_{i=1}^n K_{gi} \end{aligned} \quad (3-54)$$

### 3-5 La théorie généralisée des poutres (Généralized Beam Theory: G.B.T) :

La G.B.T est largement utilisée pour l'analyse linéaire et non linéaire des profils à parois mince de différentes sections transversales, constantes ou variables [45]. La G.B.T est initialement développée par Schardt depuis le début des années 1970 en Allemagne, puis améliorée par Davies et Leach (1994). Ces derniers ont identifié les équations différentielles de la G.B.T avec celle d'une poutre chargée axialement reposant sur une base élastique.

Le concept de cette méthode est de séparer et combiner le comportement d'une barre en séries de modes de déformations axiales de la section transversale, où n'importe quel déplacement d'une section est considéré comme une combinaison linéaire de n mode de déformation orthogonal. Le nombre n dépend de type de la section, du nombre de ligne nodale et des nœuds intermédiaires. La G.B.T a inspiré la définition des modes de déformation ou chaque mode a une équation. Une conséquence importante de l'application des hypothèses de G.B.T est que les déplacements de l'élément peuvent être exprimés en fonction des déplacements longitudinaux (de gauchissement). Ainsi pour distinguer entre le mode global et distorsionnel, la GBT suggère une analyse des fonctions de gauchissement.

En négligeant les déformations de cisaillement, l'équation du mode k de second ordre est :

$$E^k C^k V''' - G^k D^k V'' + B^k V + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K^{ijk} ({}^i W \quad {}^j V)' = {}^k q \quad (3-15)$$

Ou

$$k=1,2,\dots, n$$

$K$  : définit le mode

$C^k$  : la constante de gauchissement généralisée

$D^k$  : constante de torsion généralisée

$B^k$  : rigidité flexionnel transversal

$C^k D^k B^k$  sont des propriétés généralisés de la section qui dépend tous de la géométrie de la section transversale

${}^{ijk}K$  : propriété de la section du second ordre qui relie la déformation de la section à la distribution des contraintes

E et G module d'élasticité, module de cisaillement

${}^k V$  : déformation résultante

${}^k W$  : contrainte résultante

$q^k$  : charge uniformément répartie

$n$  : nombre de mode

Les caractéristiques de la section, et  $^{ijk}K$  sont des valeurs calculées manuellement.

Quand le second membre de l'équation (3- 15) est égal à zéro ( $q^k = 0$ ), La solution nous donne la contrainte résultante critique  $W^i$ , ceci en général exige la solution de valeurs propres où l'ingénieur est libre de choisir quel mode veut l'inclure dans son analyse.

Selon Davies et Leach [17] la contrainte résultante critique est de la forme:

$$^{i,k}W_{crit} = \frac{1}{^{i,kk}K} \left( \frac{\pi^2}{\gamma^2} E^k C + G^k D + \frac{\gamma^2}{\pi^2} B^k \right) \quad (3-16)$$

Quand la longueur d'onde varie, la contrainte minimum critique est :

$$^{i,k}W_{crit} = \frac{1}{^{i,kk}K} \left( 2\sqrt{E^k C^k B} + G^k D \right) \quad (3-17)$$

La longueur de demi-onde correspondante est :

$$\lambda^k = T \left( \frac{E^k C}{B^k} \right)^{0.25} \quad (3-18)$$

La GBT présente certaines limitations :

- ❖ Elle est difficile à comprendre
- ❖ N'est pas couramment employée, seulement quelques chercheurs l'ont utilisée
- ❖ Ne permet de manipuler que les éléments prismatiques

Il y a quelques hypothèses de base sur les contraintes (à savoir : contrainte membranaire transversale et la contrainte de cisaillement) dont les effets sont pratiquement considérés négligeables, cependant il peut y avoir des sections où ces hypothèses ne sont pas valide.

## **CHAPITRE 4**

### **Constrained Finite Strip Method : CFSM**

### 4-1 Introduction:

La méthode des bandes finis contrainte (Constrained Finite Strip Method : C F S M) est développée par Adany et Schafer[2], [3] ils furent les premiers à introduire les hypothèses de la GBT(Generalized Beam Theory) pour classer les modes d'instabilité c'est-à-dire que la CFSM emploie les mêmes critères mécaniques des modes d'instabilité que ceux utilisés par la GBT. L'idée est de garder les caractéristiques générales des méthodes numériques puis introduire les hypothèses de la GBT pour forcer les parois à se déformer en mode (L) ou en mode (G), mode (D) ou autre mode. Le point clé de ce procédé est la détermination de la matrice contrainte (R) associée à chaque mode d'instabilité, la dérivation de cette matrice est complexe est très longue. Dans cette section nous donnerons un résumé de la démarche telle qu'elle était présentée dans l'article.

Pour calculer les modes d'instabilité des structures à parois mince, on résout un problème généralisé des valeurs propres qui est écrit sous la forme :

$$K_e \phi = \lambda K_g \phi \quad (4-1)$$

Ou :

$K_e$ : matrice de rigidité élastique qui est fonction de la longueur de l'élément.

$K_g$  : matrice géométrique qui est fonction de la longueur du profilé et la distribution des forces sur la section.

$\phi = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_m]$  matrice des vecteurs propres.

$\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]$  matrice diagonales des valeurs propres.

m : nombre des DDL ( $m = 4 \times n$ ).

Le champ de déplacement (ou les modes de déformation) peut être décomposé en quatre sous espaces : globale (G), distorsionnel (D), local (L) et autre (O) Figure (3-1). Le vecteur dans l'espace réduit peut être relié au champ de déplacement général par la relation

$$d = R_M d_M \quad (4-2)$$

avec

$R_M$  : matrice contrainte de l'espace choisie [G, D, L, O]

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

$d_M$  : vecteur de déplacement dans l'espace réduit.  $M$  peut être remplacé par (G, D, L, O) ou une combinaison des différents modes (GD, GDL).

L'approche proposée est basée sur la dérivation de la matrice contrainte pour chaque mode de déformation qui relie les déplacements dans l'espace réduit aux déplacements dans l'espace général [2].

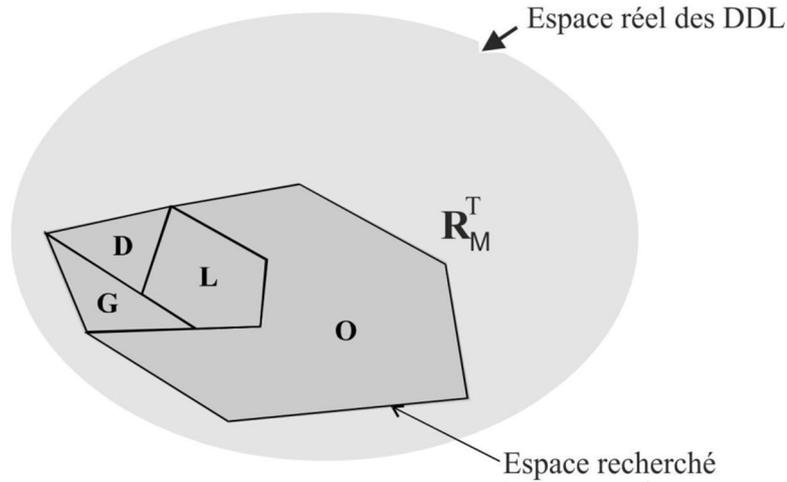


Figure (4-1) : décomposition d'un espace de recherche [2]

Introduisons l'équation (4-2) dans (4-1) et pré multiplions par  $R_M^T$

Le problème de valeur propre contraint au mode  $M$  s'écrit :

$$R_M^T \cdot K_e \cdot R_M \cdot \phi_M = \lambda_M \cdot R_M^T \cdot K_e \cdot R_M \cdot \phi_M \quad (4-3)$$

Ou simplement :

$$K_{e,M} \phi_M = \lambda_M K_{g,M} \phi_M \quad (4-4)$$

$K_{e,M}$  : Matrice de rigidité de CFSM (contrainte au mode M)

$K_{g,M}$  : Matrice géométrique de CFSM (contrainte au mode M)

$\lambda_M$  : Matrice diagonale qui contient des valeurs propres pour le mode sélectionné.

$\phi_M$  : Matrice des modes propres.

### 4-2 Notation: Fonction de forme, DDL:

Dans la méthode des bandes finies, un élément à parois minces est discrétisé en bandes liées entre elles par des lignes nodales (figure (4-2)). Un choix judicieux de la fonction de forme (fonction trigonométrique) est supposé pour représenter le déplacement longitudinal. Dans la direction transversale on fait une interpolation par un polynôme cubique alors que dans le sens longitudinal on choisit une fonction trigonométrique

Deux systèmes d'axes sont employés : l'axe local et l'axe global. Le repère global est noté  $X, Y, Z$  où l'axe  $Y$  est parallèle à l'axe longitudinal de l'élément. Le repère local noté  $(x, y, z)$  est associé à la bande. Les déplacements globaux sont : 3 translations ( $U, V, W$ ) et une rotation  $\theta$ . Les déplacements locaux sont : 3 translations ( $u, v, w$ ) et une rotation  $\theta$ .

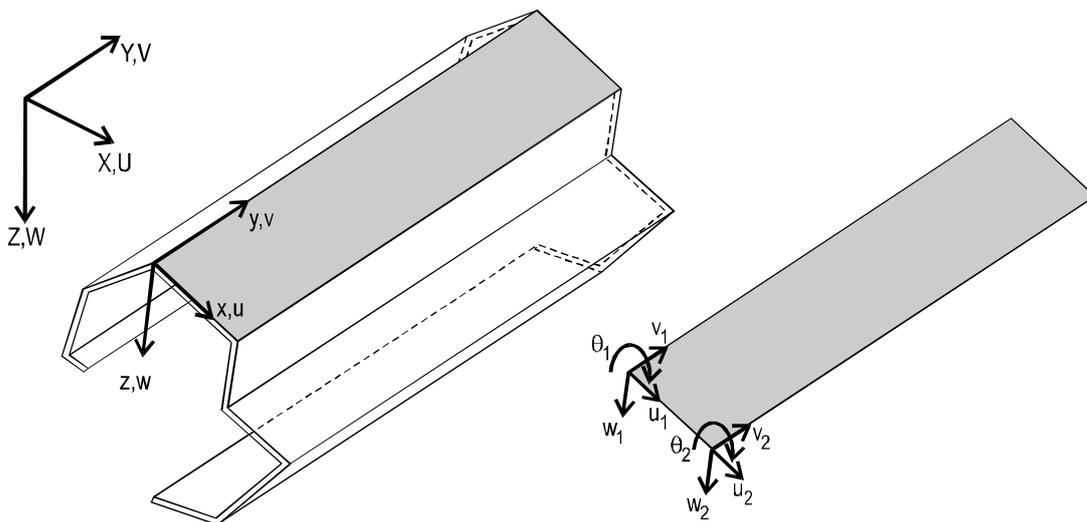


Figure (4-2): les coordonnées, les degrés de liberté [2]

La numérotation des nœuds et des bandes sont importantes dans la démarche d'Adany et Schafer, ils sont schématisés dans la figure (4-3). Les nœuds sont de deux types :

- ↪ **Les nœuds secondaires** : sont des nœuds qui relient deux bandes coplanaires.
- ↪ **Les nœuds principaux** : sont eux-mêmes divisés en deux : les nœuds principaux extrêmes tels que le premier et le dernier nœud et les nœuds principaux internes tels que les nœuds qui relient les bandes non coplanaires

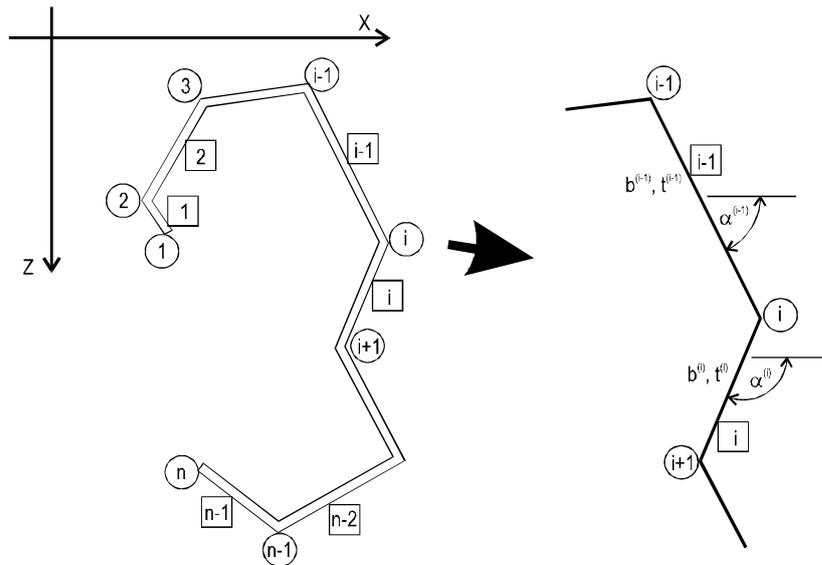


Figure (4-3) : Description d'une section ouverte à connexions simples [2]

#### 4-3 Définition des modes d'instabilité:

Les profils formés à froids soumis à une compression/flexion engendrent trois types d'instabilité pure : locale – distorsionnelle– globale.

Pour pouvoir identifier ces modes d'instabilité globale (G), distorsionnelle (D), locale (L) et autre (O), certaines hypothèses de la GBT basées sur des critères mécaniques doivent être introduites dans le calcul (tableau (4-1)) : [2]

- **Hypothèse 1** : cette hypothèse est liée à la théorie classique des poutres ou hypothèse de Vlassov, et limite certaines déformations membranaires :
  - ✓  $\gamma_{xy}=0$  (la distorsion dans le plan est nulle)
  - ✓  $\varepsilon_x = 0$  (la déformation transversale est nulle)
  - ✓  $V = f(x)$  (le déplacement de gauchissement est linéaire)
- **Hypothèse 2** : cette hypothèse implique que les déplacements de gauchissement sont non nuls ( $v \neq 0$ ) ce qui donne une séparation entre la déformation locale de la plaque et d'autre mode de déformation.
- **Hypothèse 3** : elle se rapporte à la distorsion de la section et fournit un moyen pour séparer les modes G et D.
- $\chi_{xx} = 0$  (la flexion transversale est nulle).

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

	Modes G	Modes D	Modes L	Modes O
Hypothèse 1 : $\gamma_{xy} = 0 / \varepsilon_x = 0$ V est linéaire	Oui	Oui	Oui	Oui
Hypothèse 2 : $\varepsilon_x \neq 0$ V ou $\varepsilon$ non nul	Oui	Oui	Non	-
Hypothèse 3 : $\chi_{xx} = 0$	Oui	non	-	-

**Tableau (4-1): Les hypothèses de la G.B.T**

Les hypothèses présentées ci-dessus sont issues de la G.B.T qui est la seule méthode capable de produire et d'isoler les modes d'instabilité des profils à parois minces.

D'autres modes peuvent ne pas exister dans la GBT, mais existent dans la FSM ou FEM.

Une conséquence importante de l'application de ces hypothèses de la GBT est que les déplacements peuvent être exprimés en fonction des déplacements longitudinaux (fonction de gauchissement) et pour distinguer le mode distorsionnel du mode global, la GBT suggère une analyse des fonctions de gauchissement.

### 4-4 Dérivation de la matrice de contrainte $R_{GD}$ :

#### 4-4-1 Implémentation de la 1ère hypothèse: Hypothèse de Vlassov :

Le déplacement est exprimé comme le produit de la fonction de forme et les déplacements nodaux.

$$u(x, y) = \left[ \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right) \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (4-5)$$

$$v(x, y) = \left[ \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right) \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \cos \frac{m\pi y}{a} \quad (4-6)$$

Ou:

$u_1, u_2, v_1, v_2$  sont les déplacements nodaux transversaux et longitudinaux respectivement.

$m$  : le nombre de demi-onde

$a$  : longueur de la bande

$b$  : largeur de la bande

L'hypothèse de Vlassov peut être écrite de la manière suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-7)$$

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4-8)$$

Introduisant l'équation (4-5) dans (4-7) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_1 + u_2}{b} \sin \frac{m\pi y}{a} = 0 \quad (4-9)$$

Sachant que l'équation (4-9) doit être vérifiée  $\forall y$ , il s'ensuit :

$$u_1 = u_2 \quad (4-10)$$

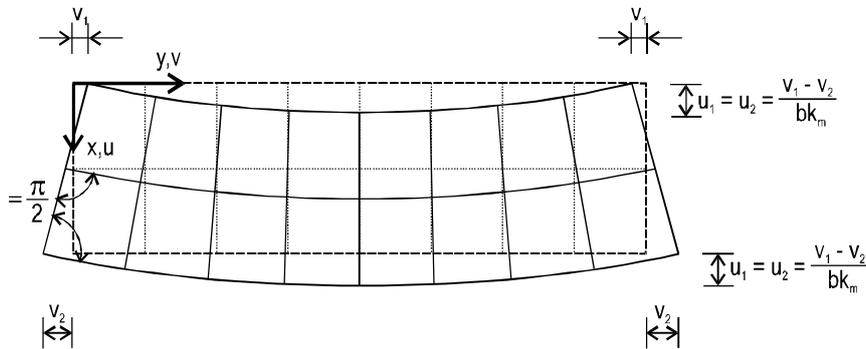
Le 2ème impact de la 1ère hypothèse peut être écrit :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi y}{a} + \frac{-v_1 + v_2}{b} \cos \frac{m\pi y}{a} = 0 \quad (4-11)$$

On obtient ainsi :

$$u_1 = u_2 = u = (v_1 - v_2)a/bm\pi \quad (4-12)$$

Ça implique que pour les déplacements transversaux des 2 lignes nodales d'une bande sont identiques, ce qui est une conséquence naturelle pour l'hypothèse de la déformation transversale nulle (Figure (4-4)).



**Figure (4-4): Etat d'une déformation membranaire d'une bande  
Dans le cas de la GBT [1]**

L'introduction de cette contrainte réduit le nombre de DDL de 4 à 3. Ainsi nous pouvons définir de nouveaux DDL réduits  $u$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .

La relation qui relie les DDL originaux et les DDL réduits est de la forme :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4-13)$$

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

---

Ou sous la forme compacte:

$$d = R d_r \quad (4-14)$$

Ou

R est la matrice contrainte.

D'autre part considérons la i ème ligne nodale, les bandes qui lui sont reliées sont le (i-1) et (i).

Appliquons la relation (4-12), on retrouve:

$$u^{(i-1)} = \frac{1}{k_m} \left[ \frac{1}{b^{(i-1)}} - \frac{1}{b^{(i-1)}} \right] \begin{Bmatrix} v_1^{(i-1)} \\ v_2^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (4-15)$$

Et

$$u^{(i)} = \frac{1}{k_m} \left[ \frac{1}{b^{(i)}} - \frac{1}{b^{(i)}} \right] \begin{Bmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3-16)$$

Ou 
$$k_m = \frac{m\pi}{a}$$

En employant la condition de compatibilité et d'équivalence entre le v local et V global

On reçoit :

$$\begin{Bmatrix} u^{(i-1)} \\ u^{(i)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} \frac{1}{b^{(i-1)}} & -\frac{1}{b^{(i-1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^{(i)}} & -\frac{1}{b^{(i)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

Cette équation fournit la relation entre les déplacements transversaux locaux et les déplacements globaux longitudinaux.

Le traditionnel changement de repère donne la relation entre les déplacements locaux (u, w) et les déplacements globaux (U, W) suivante :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \quad (4-18)$$

La relation entre les déplacements nodaux globaux (U, W) et les déplacements locaux u de u (i-1) ème et (i) ème ligne nodale s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u^{(i-1)} \\ u^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha^{(i-1)} & \sin \alpha^{(i-1)} \\ \cos \alpha^{(i)} & \sin \alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \quad (4-19)$$

En égalisant les côtés gauches des équations (4-18) et (4-19), la relation entre les déplacements longitudinaux V et les déplacements (U, W) est obtenu par :

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i-1)} & \sin\alpha^{(i-1)} \\ \cos\alpha^{(i)} & \sin\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \frac{1}{b^{(i-1)}} & \frac{-1}{b^{(i-1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^{(i)}} & \frac{-1}{b^{(i)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V^{(i-1)} \\ V^{(i)} \\ V^{(i+1)} \end{Bmatrix} \quad (4-20)$$

Le déterminant Di de cette matrice est :

$$D_i = \sin \alpha^{(i)} \cdot \cos \alpha^{(i-1)} - \sin \alpha^{(i-1)} \cdot \cos \alpha^{(i)} = \sin(\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)})$$

Puisque deux bandes non-coplanaires connectées font toujours un angle différent de zéro, le cas du  $D_i = 0$  est exclu.

Et donc on peut écrire l'équation (3-19) de la manière :

$$\begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \frac{1}{k D_i} \begin{bmatrix} \cos\alpha^{(i)} & -\sin\alpha^{(i)} \\ -\cos\alpha^{(i)} & \sin\alpha^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{b^{(i-1)}} & -\frac{1}{b^{(i-1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^{(i)}} & -\frac{1}{b^{(i)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V^{(i-1)} \\ V^{(i)} \\ V^{(i+1)} \end{Bmatrix} \quad (4-21)$$

Finalement on se basant sur l'équation (4-21) la relation entre les déplacements transversaux (U, W) de tous les nœuds principaux et le déplacement de gauchissement peut être généralisée

$$(4-22) \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_m} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}}\right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}} \frac{\sin\alpha^{(1)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}}\right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sin\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}}\right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}} \frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}}\right) & \left(\frac{\sin\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ W_{n-2} \\ W_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{-1}{k_m} \begin{bmatrix} \left(\frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}}\right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_2 b^{(1)}} \frac{\cos\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}}\right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(1)}}{\text{Det}_2 b^{(2)}}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\cos\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}}\right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(3)}}{\text{Det}_3 b^{(2)}} \frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}}\right) & \left(\frac{\cos\alpha^{(2)}}{\text{Det}_3 b^{(3)}}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix}$$

Ou dans un format compact :

$$U = \frac{1}{k} S_1 V = R_u V \quad W = \frac{-1}{k} C_1 V = R_w V \quad (4-23)$$

Avec :

U et W : des vecteurs de (n-2) éléments.

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

$V$  : Vecteurs de  $n$  éléments et contiennent les déplacements de gauchissements des nœuds principaux.

$S_1$  et  $C_1$  : des matrices de  $(n-2) \times (n)$  éléments contenant tout des données relatives à la géométrie de la section

Suite à l'hypothèse de la linéarité des déplacements de gauchissements de la section dans l'espace GD, les déplacements de gauchissement des nœuds secondaires peuvent être facilement calculées par une interpolation linéaire :

$$V_s = B_v V \quad (4-24)$$

Où :

$V_s$  : le vecteur des déplacements de gauchissements des nœuds secondaire.

$B_v$  : matrice calculée seulement avec la largeur de la bande

Comme on le voit bien dans les équations ci-dessus, l'hypothèse de Vlassov fournit certaine restriction sur les nœuds principaux extrêmes et par conséquent le système à résoudre sera sous déterminé.

### 4-4-2 Implémentation de la 2ème hypothèse:

Hypothèse 2 b : utilise l'équilibre des forces pour n'importe quelle section transversale, et ceci peut être analogue à un problème de poutre; la géométrie globale de la poutre équivalente est identique à la géométrie de la section. Cette analogie est schématisée par :

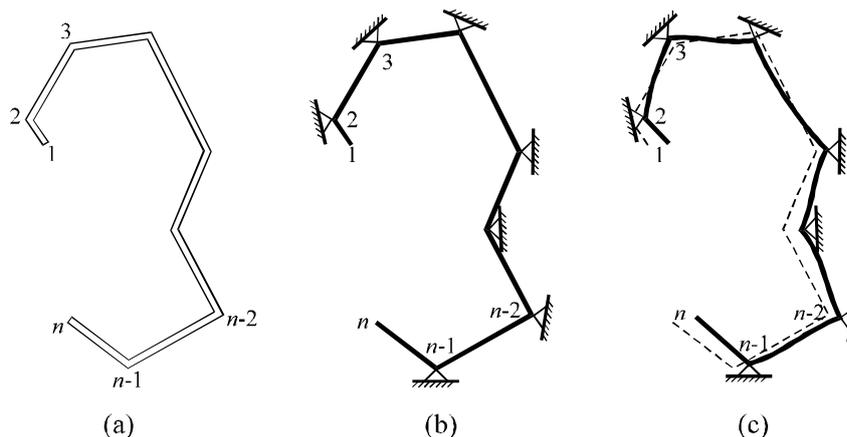


Figure (4-5) :a) section transversale - b) poutre équivalente - c) chargement cinématique

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

La rigidité flexionnelle de la poutre équivalente est identique à la raideur flexionnelle d'une plaque  $E t^3 / [12(1 - \nu^2)]$ .

On assume aussi que la rigidité axiale est très grande et la déformation de l'élongation est négligeable, ainsi seuls les moments sont considérés en gardant l'équilibre de la section.

Le chargement cinématique appliqué et exprimé par le mouvement des appuis qui n'est que les déplacements globaux  $U - W$  des nœuds principaux internes et par conséquent ça définit un problème de poutre équivalent qui exige la solution d'un système statiquement indéterminé.

Deux manières pour résoudre le problème :

- la méthode de flexibilité.
- La méthode de rigidité.

Adany et Schafer utilisent la méthode de flexibilité pour déterminer les matrices contraintes des nœuds principaux extrêmes [3].

Soit un élément poutre (Figure (4-5))  $u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2$  sont les DDL (degrés de liberté).

La matrice de rigidité locale typique d'un élément poutre est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{b} & & & & & & \\ & 0 & \frac{12EI}{b^3} & & & & \\ & 0 & \frac{bEI}{b^2} & \frac{4EI}{b} & & & \\ & & & & \text{Sym.} & & \\ \frac{EA}{b} & 0 & 0 & \frac{EA}{b} & & & \\ 0 & -12EI/b^3 & -6EI/b^2 & 0 & 12EI/b^3 & & \\ 0 & 6EI/b^2 & 2EI/b & 0 & -2EI/b^2 & 4EI/b & \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Ou :

EA : raideur axial

EI : rigidité flexionnelle de la poutre

$$\text{Pour un matériau isotrope : } EI = \frac{E a t^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\text{Pour un matériau orthotrope : } EI = \frac{E a t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \quad (4-26)$$

De manière similaire la rigidité axiale (EA) est exprimée par :

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

---

Pour un matériau isotrope :  $EA = \frac{Ea}{1-\nu^2}$

Pour un matériau orthotrope :  $EA = \frac{Ea}{(1-\nu_x\nu_y)}$  (4-27)

Dans la pratique, la matrice de rigidité d'un élément est dérivée de la matrice de rigidité d'une bande de la FSM. Ceci est accompli en éliminant tout les termes comportant des déformations longitudinales. Ce procédé mène à l'inclusion de la rigidité flexionnelle de la plaque de l'équation (4-22). Puisque la matrice de rigidité de FSM comprend toutes les contributions des demi ondes, la taille de la matrice est  $(8 \times 8) m \times m$  ( $m$  : est le nombre total des demis ondes), mais seulement une matrice secondaire  $(8 \times 8)$  est nécessaire pour dériver la matrice de rigidité pour la poutre équivalente.

Trois étapes sont essentielles pour obtenir la matrice de rigidité et la matrice géométrique d'une poutre équivalente :

- Premièrement, puisque nous ne considérons que les DDL transversaux on élimine les lignes et les colonnes correspondant aux déplacements longitudinaux ( $V$ ) dans la matrice de rigidité.
- Deuxièmement, selon l'hypothèse de Vlassov, on devrait éliminer tous les termes qui contiennent le module de cisaillement  $G$  et les termes qui contiennent  $G$  et  $D_{xy}$  dans la matrice géométrique et dans la matrice réduite de l'étape précédente.
- Troisièmement, tous les termes liés aux déplacements longitudinaux tels que  $D_y$  et  $D_1$  devraient être éliminés dans les matrices réduites précédentes.

Avec les étapes précédentes, nous formons la matrice de rigidité suivante :

$$K_{e,t} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 t}{b} & & & & & & \\ & 0 & \frac{12D_x}{b^3} & & & & \\ & 0 & \frac{6D_x}{b^2} & \frac{4D_x}{b} & & & \\ & -\frac{E_1 t}{b} & 0 & 0 & \frac{E_1 t}{b} & & \\ & 0 & \frac{-12D_x}{b^3} & \frac{-6D_x}{b^2} & 0 & \frac{-12D_x}{b^3} & \\ & 0 & \frac{6D_x}{b^2} & \frac{2D_x}{b} & 0 & \frac{-6D_x}{b^2} & \frac{4D_x}{b} \end{bmatrix} \cdot I_1 \quad (4-27)$$

Ou :

$$I_1 = \int_0^a Y_m Y_n dy$$

$$D_x = D_y = \frac{\nu_x E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_x E_y t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_{xy} = \frac{Gt^3}{12}$$

Toutes les équations et le développement en détail sont dans les articles [1], [2], [3].

Les éléments de cette matrice de rigidité de l'équation (4-27) sont exactement un multiple constant qui dépend de  $I_1$ , des éléments correspondant à la matrice des bandes finies et par conséquent l'important n'est pas les valeurs réels de la matrice de rigidité mais plutôt la distribution de cette rigidité. La matrice de rigidité locale peut être transformée en matrice de rigidité globale en utilisant la matrice de transformation géométrique et finalement l'assemblage ( $K_e, t$ ).

Ensuite on écrit l'équilibre statique de la poutre équivalente :

$$K_{e,t} \cdot d_t = q_t \quad (4-29)$$

$K_{e,t}$  : matrice de rigidité globale.

$d_t$  : vecteur des déplacements transversaux (U-W- $\theta$ ) de la poutre équivalente.

$q_t$  : vecteur nodal.

Selon l'hypothèse 2, la résultante des forces transversales devrait être en équilibre pour toute la section transversale.

Les déplacements U-W- $\theta$  sont de la forme :

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

---

$$\begin{aligned}
 U(y) &= \sum_{p=1}^n U_p Y_p \\
 W(y) &= \sum_{p=1}^n W_p Y_p \\
 \theta(y) &= \sum_{p=1}^n \theta_p Y_p
 \end{aligned}
 \tag{4-30}$$

Ou :

U-W- $\theta$  sont trois vecteurs de (n x 1) éléments contenant les déplacements transversaux globaux de tous les nœuds qu'on nomme les DDL de la poutre équivalente.

$U_p, W_p, \theta_p$  sont aussi 3 vecteurs de (n x 1) élément contenant les déplacements globaux transversaux pour tout les nœuds correspondant au nombre de la demi onde  $p$ .

$Y_p$  : fonction de forme dans la direction longitudinale correspondant à un nombre de demi ondes égale à  $p$ .

Donc  $d_t$  doit être un vecteur se composant des déplacements transversaux (U-W- $\theta$ ) sous la forme :

$$d_t = \sum_{p=1}^n (d_t)_p Y_p \tag{4-31}$$

$(d_t)_p$ : vecteur des déplacements transversaux de tous les nœuds correspondant au nombre la demi onde  $P$ .

Puisque aucune force externe n'est appliquée, on a seulement des translations des nœuds principaux internes, ainsi (U-W) sont connues tandis que tout les DDL transversaux de la poutre équivalente sont inconnus.

$$\begin{bmatrix} K_{e,t,kk} & K_{e,t,ku} \\ K_{e,t,uk} & K_{e,t,uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{t,k} \\ d_{t,u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{t,k} \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{4-32}$$

Ou :

Indice k : les DDL connus

Indice u : les DDL inconnus

$d_{t,k}$  : partie des déplacements contenant les déplacements connus de la poutre équivalente (U-W) des nœuds principaux internes de l'équation (4-31).

$d_{t,u}$ : tous les autres déplacements transversaux inconnus (les translations des nœuds principales extrêmes, les nœuds secondaires et les rotations de tous les nœuds de l'équation (4-31)).

## CHAPITRE 4: Constrained Finite Strip Method

---

$q_{t,k}$  : vecteur force exerçant sur les DDL connus.

$q_{t,u}$  : vecteur force exerçant sur les DDL non connus de la poutre équivalente.

La partie inférieure de l'équation (4-31) peut être exprimé par :

$$K_{e,t,uk}d_{t,k} + K_{e,t,uu}d_{t,u} = 0 \quad (4-33)$$

En décomposant l'équation (4-32) selon les DDL connus et inconnus et en la substituant dans l'équation (4-33) nous obtenons :

$$K_{e,t,uk} \sum_{p=1}^m (d_{t,k})_p Y_p + K_{e,t,uu} \sum_{p=1}^m (d_{t,u})_p Y_p = 0 \quad (4-34)$$

Par conséquent l'équation (4-34) peut être écrite :

$$\sum_{p=1}^m (K_{e,t,uk} (d_{t,k})_p + K_{e,t,uu} (d_{t,u})_p) Y_p = 0 \quad (4-35)$$

La contrainte résultante transversal doit être en équilibre pour toute la section, le coefficient  $Y_p$  doit être égale à zéro ce qui mène à :

$$(d_{t,u})_p = K_{e,t,uu}^{-1} K_{e,t,uk} (d_{t,k})_p \quad (4-36)$$

Pour  $p=1 \dots m$ .

Ou en format plus simple :

$$\begin{Bmatrix} U_{sp} \\ W_{sp} \\ \theta_{sp} \end{Bmatrix} = -K_{e,t,uu}^{-1} K_{e,t,uk} \begin{Bmatrix} U_{mp} \\ W_{mp} \end{Bmatrix} \quad (4-37)$$

$U_{sp}, V_{sp}$  vecteurs des DDI des déplacements transversaux des nœuds principaux et des nœuds secondaires correspondant au nombre de demi onde P.

$U_{mp}, V_{mp}$  même que l'équation (4-23).

### 4-4-3 Assemblage de $R_{GD}$ :

L'assemblage de la matrice  $R_{GD}$  se fait comme suit :

- assembler d'abord  $[R_{GD}]$  pour chaque demi-onde.
- Puis assembler chaque  $[R_{GD}]_p$  dans le  $[R_{GD}]$ , chaque  $[R_{GD}]_p$  peut être composé des sous matrices :

$$[R_{GD}]_P = \begin{bmatrix} R_{GD}^T, V_{mp} & R_{GD}^T, V_{rsp} & R_{GD}^T, V_{ump} & R_{GD}^T, V_{wmp} & R_{GD}^T, V_{usp} & R_{GD}^T, V_{wsp} & R_{GD}^T, V_{\theta p} \end{bmatrix}$$



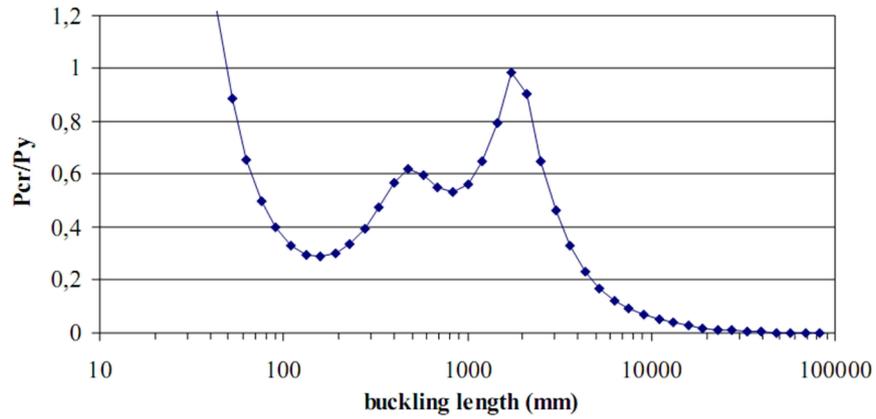


Figure (4-7) forces critiques avec deux minimums distincts [3]

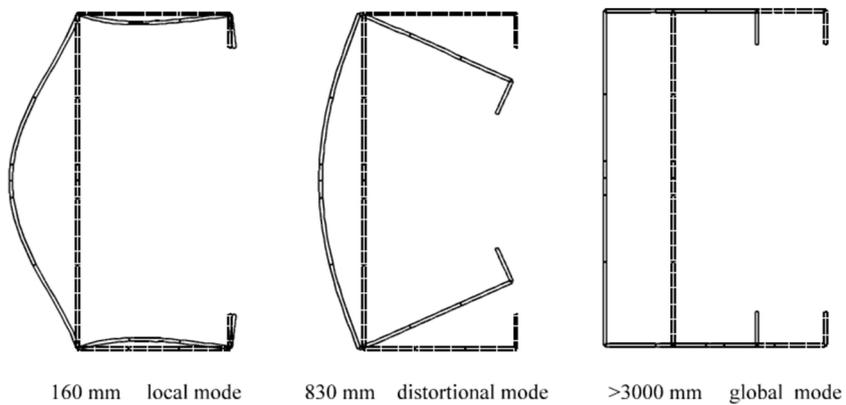


Figure (4-8) caractéristiques de formes déformées [3]

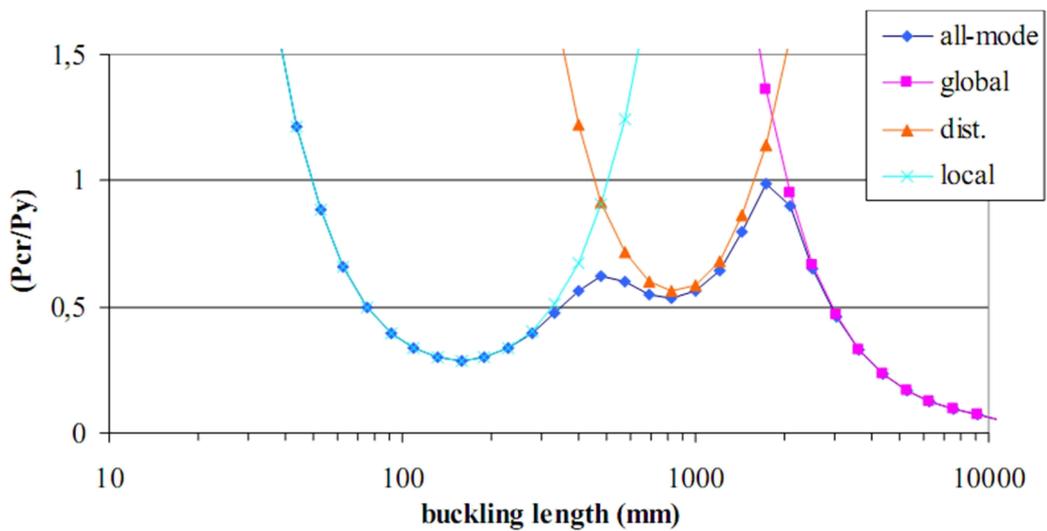


Figure (4-9): forces critiques des modes purs [3]

### 4-6 Conclusion:

Adany et Schafer ont développé la CFSM qui permet d'évaluer la charge critique et de la prévoir automatiquement pour un mode donné. Cette dernière est un paramètre principal pour la conception et le design des P.F.F.

La Méthode est basée sur la décomposition modale qui nécessite de garder les caractéristiques des méthodes numériques et d'introduire les équations de contrainte sur les déformations. Les résultats ainsi obtenus sont prometteuses en les comparant avec d'autres méthodes.

Schafer a mis l'application gratuitement sur le web de la CFSM dans <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/CUFSM> [53].

Comme n'importe quelle méthode numérique la CFSM a ses limites qui sont essentiellement :

- ↳ Elle ne traite pas les sections formées de moins de 3 éléments plans.
- ↳ Elle ne traite pas les sections fermées.
- ↳ Limité à certaines conditions aux limites.
- ↳ Une numérotation stricte des nœuds qui pose des difficultés pour l'utilisateur du logiciel.
- ↳ Ne traite pas des PFF avec des ouvertures

Mais des développements significatifs continuent à avoir lieu dans le CUFSM, à titre exemple nous citons des travaux sur :

- ↳ Des PFF avec des C.A.L. variés [64].

Certains de ces insuffisances (section fermée, présence de ramification,...) ont été levées par Djafour et Al(2010-2011).

L'élévation de la CFSM est un projet intéressant qui peut combler le manque d'information sur l'arrangement de la mécanique des modes d'instabilité des profilés formés à froids.

**CHAPITRE 5**  
**Constrained Spline Finite Strip Method :**  
**CSFSM**

### 5-1 Introduction :

Le calcul de la charge critique des éléments à parois mince peut se faire en employant des méthodes numériques tels que la méthode des éléments finis(F.E.M), la méthode des bandes finis(F.S.M), la théorie généralisée des poutres(G.B.T) ou d'autres.

Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients .Le dilemme principal est que les méthodes d'usage universel (F.E.M- F.S.M) ne parviennent pas à décomposer les modes d'instabilité (global- local- distorsions) alors que les méthodes qui peuvent le faire (GBT) ne sont pas générales.

Il n'existe aucune méthode complète qui peut manipuler ces modes de manière robuste et simple et :

- Qui s'applique pour n'importe qu'elle section transversale.
- Qui est disponible et soutenue par des logiciels.
- Qui peut calculer un mode séparément des autres modes ou des modes en interaction.

L'objectif de cette section est de prolonger la démarche de CFSM présentée dans le chapitre 4 pour une autre méthode numérique. On se propose dans ce travail d'appliquer le même concept de la CFSM mais en utilisant la méthode des splines bande finis (SFSM) du moment que cette dernière convient bien pour l'analyse de la stabilité des PFF et prend en compte en plus les différents types des conditions aux limites c'est la : CSFSM« Constrained Spline Finite Strip Method ».

La CFSM est basée sur les critères mécaniques, mais la détermination de la matrice contrainte est longue et lourde. Djafour [23] a proposé une démarche plus simple que celle d'Adany et Schäfer [1, 2,3] pour la détermination de cette matrice contrainte. Le procédé utilisé préserve la flexibilité de la méthode numérique FSM, vis-à-vis de la numérotation des nœuds, des caractéristiques des éléments, de la détermination des DDL effectifs ou non effectifs, et par conséquent c'est sa démarche que nous utilisons dans ce travail.

### 5-2 Formulation de la CSFSM :

#### 5-2-1 Equation de la stabilité :

Dans la méthode des splines bandes finis l'équation de la stabilité d'une bande spline soumise à une compression longitudinale s'écrit :

$$[K_E]\{d\} = \lambda [K_G]\{d\} \quad (5-1)$$

Pour résoudre cette équation on est amenée à résoudre un problème de valeurs et vecteurs propre.

En employant les critères mécaniques des modes de déformations que ceux utilisés dans la GBT cité dans le chapitre 3, le champ de déplacement de SFSM sont contraint à ne donner que des déplacements globaux et distorsionnels (GD).

$$d = R_{GD} \times d_{GD} \quad (5-2)$$

$R_{GD}$  : la matrice contrainte qui relie les déplacements dans l'espace réduit des modes globaux et distorsionnels aux déplacements dans l'espace général de SFSM

$d_{GD}$  : vecteur dans l'espace distorsionnel et global, contient les déplacements nodaux longitudinaux.

L'équation (5-2) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uv} \\ R_{vv} \\ R_{wv} \\ R_{\theta v} \end{bmatrix}_{GD} \cdot V \quad (5-3)$$

Ou :

$R_{vv}$  est une matrice unitaire carée.

En introduisant l'équation (5-2) dans (5-1) et pré multipliant par  $R_{GD}^T$  on reçoit :

$$R_{GD}^T \cdot K_E \cdot R_{GD} d_{GD} = \lambda_{GD} R_{GD}^T K_G R_{GD} d_{GD} \quad (5-4)$$

Ou encore :

$$K_{E,GD} d_{GD} = \lambda_{GD} K_{G,GD} d_{GD} \quad (5-5)$$

Avec

$K_{E,GD}$  : matrice de rigidité de CSFSM.

$K_{G,GD}$  : matrice géométrique de CSFSM.

### 5-2-2 Matrice de contrainte :

#### 5-2-2-1 Matrice de contrainte concernant les déformations membranaires :

En appliquant les deux premières hypothèses 1 et 2 (cité au chapitre3) de la GBT qui isolent le mode distorsionnel-global :

$$\diamond \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\diamond \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

Il en résulte de la 1<sup>ère</sup> hypothèse :

$$\frac{1}{b} [\phi_{ui}] \{u_i\} = \frac{1}{b} [\phi_{uj}] \{u_j\} \quad (5-6)$$

La seule hypothèse que nous imposons dans ce travail afin de faciliter le travail est que les conditions aux limites aux extrémités i et j du déplacement u sont identiques donc l'équation (5-6) devient :

$$u_i = u_j \quad (5-7)$$

L'introduction de la 2<sup>ème</sup> hypothèse de la GBT nous donne après simplification :

$$\left(1 - \frac{x}{b}\right) \left[\frac{\partial \phi_{ui}}{\partial y}\right] \{u_i\} + \frac{x}{b} \left[\frac{\partial \phi_{uj}}{\partial y}\right] \{u_j\} - \frac{1}{b} [\phi_{vi}] \{v_i\} + \frac{1}{b} [\phi_{vj}] \{v_j\} = 0 \quad (5-8)$$

En introduisant l'équation (5-7) on retrouve :

$$\left[\frac{\partial \phi_{ui}}{\partial y}\right] \{u_i\} = \frac{1}{b} ([\phi_{vi}] \{v_i\} - [\phi_{vj}] \{v_j\}) \quad (5-9)$$

L'effet des deux hypothèses de la GBT est une égalité entre polynôme à coefficient réels (la fonction spline et sa première dérivé) et par conséquent c'est deux fonctions polynômes sont égaux si seulement si leurs coefficient de leurs monômes de même degré sont égaux, et donc l'équation (5-9) ne peut être développée que par une identification par intervalles (annexe 1).

L'identification des deux polynômes se fait par intervalles et du moment que le polynôme est d'ordre 3 (pour la fonction  $\phi$ ) et d'ordre 2 (pour la dérivé de la fonction  $\phi'$ ) chaque identification nous donne 4 conditions par intervalle (4 équations), et comme on ne s'intéresse que pour les intervalles se situant entre 0 et m, on aura au total  $4 \times m$  équations.

En regroupant toutes les équations et en les écrivant sous forme matricielle et en écrivant les deux membres de l'égalité du même côté on obtient une matrice tri diagonale de la forme :

$$[\cdot] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (5-10)$$

Ou :

- La première diagonale concerne les  $\left[ \frac{\partial \phi_{ui}}{\partial y} \right] \{u_i\}$
- La deuxième diagonale concerne les  $\left( -\frac{1}{b} ([\phi_{vi}] \{v_i\}) \right)$
- La troisième diagonale concerne les  $\frac{1}{b} ([\phi_{vj}] \{v_j\})$

Le rang de cette matrice est  $2(m+3)$  (si on considère le cas libre) et par conséquent nous avons  $(m+3)$  termes inconnus de  $u$  qui sont dépendant des  $2(m+3)$  termes inconnus de  $v$ .

Sous forme abrégée l'équation (5-9) devient :

$$[A] \{u_i\} = [B] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5-11)$$

Ainsi le vecteur déplacement  $u_i$  sera relié au vecteur déplacement  $(v_i \text{ et } v_j)$  en utilisant la méthode des moindres carrés par :

$$\{u_i\} = [A^T \cdot A]^{-1} \cdot [A^T] \cdot [B] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5-12)$$

Si on pose :

$$[A^T \cdot A]^{-1} \cdot [A^T] \cdot [B] = [R] \quad (5-13)$$

On obtient :

$$\{u_i\} = [R] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5-14)$$

Ou simplement :

$$\{u_i\} = [R_1] \{v_i\} + [R_2] \{v_j\} \quad (5-15)$$

[R] est une matrice rectangulaire de taille  $(m+3) \times 2 \times (m+3)$  (dans le cas libre). Elle relie les degrés de liberté aux degrés de liberté  $v$ . On la nomme matrice de contrainte, et ça signifie

que les  $u_i$  et  $u_j$  sont exprimés en fonction des degrés de liberté de gauchissement et qu'ils ne sont plus effectifs et doivent être éliminés c'est-à-dire qu'au lieu des  $8(m+3)$  degrés de liberté de la bande seulement  $6(m+3)$  sont indépendants.

Si les  $v_i$  et  $v_j$  ont les mêmes conditions aux limites on aura :

$$[R_1] = - [R_2] \quad (5-16)$$

$R_1$  et  $R_2$  sont des matrices carrées dans ce cas, sinon, si les conditions aux limites sont différentes les deux matrices n'auront pas la même taille.

Sous forme abrégé on a :

$$\begin{Bmatrix} u_{-1} \\ u_0 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} v_{-1}^i - v_{-1}^j \\ v_0^i - v_0^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m^i - v_m^j \\ v_{m+1}^i - v_{m+1}^j \end{Bmatrix} \quad (5-17)$$

Cette matrice  $[R]$  peut être étendue pour concerner l'ensemble des degrés de liberté locaux de l'élément :

Suite à l'application des hypothèses 1 et 2 de la GBT chaque bande nous apporte  $2(m+3)$  équation de contrainte :

Il est indispensable d'écrire ces équations de contrainte non pas par rapport au repère local mais par rapport au repère global de la structure, en utilisant la matrice de transformation orthonormé  $[T]$  (équation (3-51)).

Et par conséquent les déplacements globaux s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ \Theta_j \end{Bmatrix} \quad (5-18)$$

Introduisons la relation (5-18) dans (5-17) :

➤ **Pour le nœud i :**

$$U_i \cos \alpha - W_i \sin \alpha = [R] \left\{ \begin{array}{c} v_{-1}^i - v_{-1}^j \\ v_0^i - v_0^j \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m^i - v_m^j \\ v_{m+1}^i - v_{m+1}^j \end{array} \right\} \quad (5-19)$$

➤ Pour le nœud j :

$$U_j \cos \alpha - W_j \sin \alpha = [R] \left\{ \begin{array}{c} v_{-1}^i - v_{-1}^j \\ v_0^i - v_0^j \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m^i - v_m^j \\ v_{m+1}^i - v_{m+1}^j \end{array} \right\} \quad (5-20)$$

L'introduction de la 2ème hypothèse nous mène à 2(m+3) équations de contrainte, pour chaque bande (s). On doit éliminer 2(m+3) degrés de liberté et par conséquent les degrés de liberté à éliminer pour toute la structure est de 2(m+3)\*ns (ns : nombre des bandes),

Djafour et al [25] ont établi une procédure pour déterminer les DDL à éliminer et à conserver (tableau (5-1)). L'analyse est basée sur une boucle sur les nœuds : pour chaque nœud i nous avons autant d'équations de contrainte que de bandes connectés à ce nœud.

Le choix des DDL à éliminer dépend de l'orientation de la bande (l'angle  $\alpha$ ), du nombre de connexion au nœud. Il présente 4 cas de connexions. Nous appliquons la même procédure mais pour la CSFSM :

❖ **1er cas : cas d'une seule connexion :**

Nous avons (m+3) équations de contraintes :

Si  $\sin \alpha = 0$  c'est les (m+3)  $U_i$  qui devront être éliminés

Si  $\cos \alpha = 0$  c'est les (m+3)  $W_i$  qui devront être éliminés

Sinon ça sera soit (m+3)  $U_i$  ou (m+3)  $W_i$  qui seront éliminés.

❖ **2ème cas : cas de deux connexions :**

Nous avons (m+3) équations de contraintes pour chaque bande  $s_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i \cos \alpha_{s1} - W_i \sin \alpha_{s1} = [R_{s1}] \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} \\ U_j \cos \alpha_{s2} - W_j \sin \alpha_{s2} = [R_{s2}] \begin{Bmatrix} V_i \\ V_k \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \quad (5-21)$$

Avec :

$\alpha_{s1}, \alpha_{s2}$  L'angle que fait la bande avec l'axe X.

$[R_{s1}], [R_{s2}]$ : Matrice contenant les caractéristiques de chaque bande [largeur de la bande, position des nœuds nodales].

Dans ce cas de connexions, deux cas peuvent se présenter :

↳ **cas de deux bandes non coplanaires** : en résolvant l'équation (5-21) on retrouve :

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} R_{s1} R_{s1} & 0 \\ R_{s2} & 0 \\ & R_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (5-22)$$

Et ainsi on a déterminé les déplacements transversaux du nœud i en fonction des déplacements de gauchissement des trois nœuds connectés ( $V_i, V_j, V_k$ ).

↳ **Cas de deux bandes coplanaires** :

Les deux premiers membres de l'équation (5-22) sont identiques (en valeur absolu) et par conséquent les DDL de gauchissement ne sont pas indépendant, donc on peut définir un DDL par rapport aux d'autre, et on élimine dans ce cas le  $V_i$  et ( $U_i$  ou  $W_i$ ).

❖ **3ème cas: trois connexions** :

Nous pouvons dans ce cas écrire trois équations de contraintes :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha^{(s1)} & -R_{ij}^i & -\sin \alpha^{(s1)} \\ \cos \alpha^{(s2)} & -R_{ik}^i & -\sin \alpha^{(s2)} \\ \cos \alpha^{(s3)} & -R_{il}^i & -\sin \alpha^{(s3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ij}^j & 0 & 0 \\ 0 & R_{ik}^k & 0 \\ 0 & 0 & R_{il}^l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_j \\ V_k \\ V_l \end{Bmatrix} \quad (5-23)$$

Dans ce cas nous devons éliminer les 3 \*(m+3) DDL du nœud i ( $U_i, V_i, W_i$ ).

**4ème cas : nombre de connexions est plus que 3 : (ns ≥ 3)**

Dans ce cas on a ns bandes connectées au nœud i, qui veut dire ns × (m+3) DDL à éliminer :

- 3(m+3) DDL du nœud i
- (ns-3) (m+3) DDL des nœuds voisins

On peut aisément déduire que pour chaque type de connexion on se retrouve avec une équation de contrainte de la forme :

$$[\text{Cos } \alpha R_1^i - \text{Sin } \alpha R_2^i] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ V_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (5-24)$$

D'autre part les DDL sont composés de deux :

- Les DDL à **retenir** ou **effectives** que nous notons  $\Delta_e$
- Les DDL à **éliminer** que nous notons  $\Delta_k$

Ce qui nous donne :

$$H\Delta = [H_e \quad H_k] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = 0 \quad (5-25)$$

Ce que l'on peut écrire

$$H_{ee} \cdot \Delta_e + H_{ek} \cdot \Delta_k = 0 \quad (5-26)$$

On note ici que  $\Delta_e$  a pour dimension  $2(m+3) \cdot n_s$  ; d'où la dimension de  $\Delta_k = 4 \cdot n_s \cdot (m + 3) - 2 \cdot (m + 3) \cdot n_s$

L'équation (5-26) est équivalente à

$$\Delta_e + H_{ee}^{-1} \cdot H_{ek} \cdot \Delta_k = 0 \quad (5-27)$$

Ou encore  $\Delta_e + C_{ek} \cdot \Delta_k = 0 \quad (5-28)$

Avec  $C_{ek} = H_{ee}^{-1} \cdot H_{ek} \quad (5-29)$

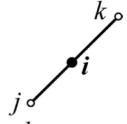
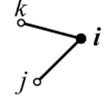
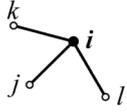
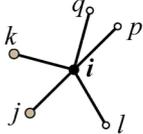
Nombre des bandes connectées	Illustration	Degrés de liberté à éliminer
1		$U_i$ ou $W_i$
2 (coplanaire)		$U_i$ ou $W_i$ et $V_i$
2 (non coplanaire)		$U_i$ et $W_i$
3		$U_i, W_i$ et $V_i$
$nc > 3$		$U_i, W_i, V_i$ et $(nc - 3)Vs$ des nœuds voisins ( $V_j$ et $V_k$ dans l'exemple)

Tableau (5-1) les différents types de nœuds

**5-2-2-2 Matrice de rigidité d'une bande dans l'espace GD :**

L'instabilité distorsionnelle et globale se produit à des longueurs de demi-onde plus élevé que la largeur de la section, et par conséquent, la flexion de la paroi plane est de type « flexion cylindrique » c'est à dire que dans le repère local de la bande les courbures  $\chi_y$  et  $\chi_{xy}$  peuvent être négligés devant  $\chi_x$  d'où la 1ère hypothèse du domaine GD :

$$\chi_y = \chi_{xy} = 0$$

Ceci engendre que :

$$\epsilon_f = \begin{Bmatrix} -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5-30}$$

Dont :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} ([N_f][\phi_f][d_f]) \tag{5-31}$$

En écrivant sous forme matricielle, on a :

$$\{\epsilon_f\} = \begin{bmatrix} -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [N_f][\phi_f] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{d_f\} \tag{5-32}$$

$$\{\varepsilon_f\} = B_f^{GD} \cdot d_{w\theta} \quad (5-33)$$

Avec :

$$[B_f^{GD}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{b^2} - 12\frac{\bar{x}}{b^2}\right) [\Phi_{wi}] & \left[\frac{4}{b} - \frac{6\bar{x}}{b}\right] [\Phi_{\theta i}] & \left(12\frac{\bar{x}}{b^2} - \frac{6}{b^2}\right) [\Phi_{wj}] & \left(\frac{2}{b} - \frac{6\bar{x}}{b^2}\right) \Phi_{\theta j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-34)$$

Avec  $\bar{x} = \frac{x}{b}$

Dans le domaine élastique linéaire, la loi de Hooke relie la déformation à la contrainte exercé par :

$$\{\sigma_f\} = [D_f]\{\varepsilon_f\} \quad (5-35)$$

$$\{\sigma_f\} = [D_f][\varepsilon_f] = \{M_x M_y M_{xy}\}^T \quad (5-36)$$

Avec :

$$[D_f] = \begin{bmatrix} \frac{E_x t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} & \frac{D_y \cdot E_x \cdot t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} & 0 \\ \frac{D_y \cdot E_y \cdot t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} & \frac{E_y t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xy} \cdot E_x \cdot t^3}{12} \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

Ou :

t : épaisseur de la bande.

$E_x$  : module d'élasticité suivant l'axe x.

$E_y$  : module d'élasticité suivant l'axe y.

$G_{xy}$  : module de cisaillement.

Pour un matériau isotrope on a :

$$E_x = E_y = E$$

$$\nu_x = \nu_y = \nu$$

$$G_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Dans le domaine GD la sous matrice de rigidité flexionnelle de la bande spline est exprimée par :

$$[K_{ef}] = \int_0^L \int_0^b [B_f^{GD}]^T [D_f] [B_f^{GD}] dx dy \quad (5-38)$$

En développant l'équation de la matrice  $K_{ef}$ , on obtient :

$$K_{ef} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (5-39)$$

Les termes de cette matrice sont donnés en annexe 2.

### 5-2-2-3 Conséquence des hypothèses 1 et 2 sur la matrice de rigidité :

Du fait que la déformation membranaire ( $u, v$ ) est découplée de la déformation flexionnelle ( $w, \theta$ ), la matrice de rigidité d'une bande est composée de deux sous matrices : membranaire et flexionnelle :

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{em} & 0 \\ 0 & K_{ef} \end{bmatrix} \quad (5-40)$$

Dans les deux sections précédentes, nous avons calculé les matrices de contraintes élémentaires dues aux déformations flexionnelles ( $K_{ef}$ ) et aux déformations membranaires ( $K_{em}$ ), donc une fois ces matrices élémentaires terminées ; on doit les assembler pour former la matrice de rigidité globale de toute la structure qu'on note  $K_E$ .

Cette matrice est décomposé en sous matrice de tel manière à regrouper les DDL à éliminer d'un côté et les DDL à retenir de l'autre côté :

$$K_E = \begin{bmatrix} K_E^{ee} & K_E^{ek} \\ K_E^{ke} & K_E^{kk} \end{bmatrix} \quad (5-41)$$

Sachant que dans le repère global l'expression suivante est valable :

$$\begin{bmatrix} K_E^{ee} & K_E^{ek} \\ K_E^{ke} & K_E^{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (5-42)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} K_E^{ee} \\ K_E^{ek} \end{bmatrix} \cdot \Delta_e + \begin{bmatrix} K_E^{ke} \\ K_E^{kk} \end{bmatrix} \cdot \Delta_k = \begin{Bmatrix} F_e \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (5-43)$$

Si on multiplie l'équation (5-28) par le multiplicateur de  $\Delta_e$  on obtient :

$$\begin{bmatrix} K_E^{ee} \\ K_E^{ek} \end{bmatrix} \cdot \Delta_e + \begin{bmatrix} K_E^{ee} \\ K_E^{ek} \end{bmatrix} C_{ek} \cdot \Delta_k = 0 \quad (5-44)$$

La soustraction des deux dernières équations, nous donne : 2équations selon les degrés de liberté (ceux à retenir ou ceux à éliminer).

$$(K_E^{ek} - K_E^{ee}). \Delta_k = F_e \quad (5-45)$$

$$(K_E^{kk} - K_E^{ke} C_{ek}). \Delta_k = F_k \quad (5-46)$$

Ces deux équations peuvent être combinée en utilisant une matrice de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda^{ke}$  ce qui donne :

$$(K_E^{kk} - K_E^{ke} C_{ek}). \Delta_k - F_k + \lambda^{ke} [(K_E^{ek} - K_E^{ee} C_{ek}). \Delta_k - F_e] = 0 \quad (5-47)$$

Pour que

$$\lambda^{ke} = \frac{\partial \Delta_e}{\partial \Delta_k} \quad (5-48)$$

A partir de l'expression (5-28) on reçoit :

$$\lambda^{ke} = -C_{ek}^T \quad (5-49)$$

En introduisant l'équation (5-49) dans (5-47) on obtient :

$$(K_E^{kk} - K_E^{ke} C_{ek} - C_{ek}^T K_E^{ek} + C_{ek}^T K_E^{ee} C_{ek}). \Delta_k = F_k - C_{ek}^T F_e \quad (5-50)$$

D'où l'expression :

$$K_R = K_E^{kk} - K_E^{ke} C_{ek} - C_{ek}^T K_E^{ek} + C_{ek}^T K_E^{ee} C_{ek} \quad (5-51)$$

Qui est en faite une matrice de rigidité réduite due à l'application des hypothèses de contrainte 1-2.

#### 5-2-2-4 Développement de la matrice de contrainte du sous espace GD :

L'application des deux hypothèses de la GBT :

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = 0 \\ \varepsilon_x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_x = 0 \\ \chi_{xy} = 0 \end{cases}$$

Nous a donnée une matrice de rigidité  $K_R$  (équation 5-51) qui ne concerne que les DDL effectives  $\Delta_e$ , enfin il nous reste à relier les DDL de la structureaux DDL de gauchissement  $V$ , pour cela on considère un chargement cinématique : la matrice  $K_R$  peut être partitionné sous forme de 4 sous matrices comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_R^{VV} & K_R^{V\Delta} \\ K_R^{\Delta V} & K_R^{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-52)$$

Il est à noter que

$V$  : DDL de gauchissements effectifs.

$\Delta_u$  : Le reste des DDL de  $\Delta_k$

On ne s'intéresse qu'aux DDL dépendant de  $V$ , de ce fait le vecteur force correspondant à  $\Delta_u$  sera nulle.

Ce qui donne :

$$\Delta_u = [-K_R^{\Delta\Delta-1} - K_R^{\Delta V}] V \quad (5-53)$$

Ainsi on peut écrire  $\Delta_k$  de la forme :

$$\Delta_k = \begin{Bmatrix} V \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_v \\ -K_R^{\Delta\Delta-1} \cdot K_R^{\Delta V} \end{bmatrix} \cdot V \quad (5-54)$$

De façon similaire l'ensemble DDL de la structure concernée par les équations de la contrainte s'écrit :

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_k \\ \Delta_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\Delta k} \\ -C_{ek} \end{bmatrix} \cdot \Delta_k \quad (5-55)$$

En reprenant l'équation (5-54) dans (5-55) ; on reçoit :

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_k \\ \Delta_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\Delta k} \\ C_{ek} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_v \\ -K_R^{\Delta\Delta-1} \cdot K_R^{\Delta v} \end{bmatrix} \cdot V \quad (5-56)$$

Au final nous avons relié tout les DDL concernés par les équations de contrainte aux DDL de gauchissement V, par une matrice de contrainte de l'espace GD qu'on note :

$$R_{GD} = \begin{bmatrix} I_{\Delta k} \\ C_{ek} \end{bmatrix}_X \begin{bmatrix} I_v \\ -K_R^{\Delta\Delta-1}, K_R^{\Delta v} \end{bmatrix} \quad (5-57)$$

### 5-3 Effet des CAL sur l'instabilité distorsionnelle :

Rappelons l'équation (5-9):

$$\left[ \frac{\partial \phi_{ui}}{\partial y} \right] \{ui\} = \frac{1}{b} \{ [\phi_{vi}] - [\phi_{vj}] \} \{vj\}$$

On sait que cette équation est vraie quel que soit y donc nous pouvons l'écrire pour y appartenant à [0 – m. h] :

$$\begin{bmatrix} \phi_{u0}^i(y_0) & \phi_{u1}^i(y_0) & \phi_{u2}^i(y_0) & \dots & \phi_{n+1}^i(y_0) \\ \phi_0^i(y_1) & \phi_1^i(y_1) & \dots & \dots & \phi_{m+1}^i(y_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{u0}^i(y_m) & \phi_{u1}^i(y_m) & \dots & \dots & \phi_{um+1}^i(y_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{m+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} \phi_{v0}^i(y_0) & \phi_{v1}^i(y_0) & \dots & \phi_{v+1}^i(y_0) & \dots & \phi_{v+1}^i(y_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{v0}^i(y_m) & \dots & \phi_{vm+1}^i(y_{m+1}) & \phi_{v0}^i(y_0) & \dots & \phi_{vm+1}^i(y_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0^i \\ \downarrow \\ V_{m+1}^i \\ V_0^j \\ \downarrow \\ V_{m+1}^j \end{Bmatrix} \quad (5-58)$$

Si on prend un exemple de 8 splines ( $m=8$ ), La figure (5-1) représente le tracé des deux fonctions (les deux membres gauches et droits) de l'équation (5-9) selon le domaine de résolution compris :

- a. Tous les nœuds nodaux sont introduits dans le domaine de résolution c'est-à-dire que  $y$  appartient à l'intervalle  $[0, m \cdot h]$ , il est clair que les deux courbes ne peuvent pas se croiser, et par conséquent le problème ne peut être résolu dans cette intervalle.
- b. Si on prend le deuxième tracé, l'intervalle de recherche est compris entre le nœud nodal 1 au nœud nodal  $(m-1)$  c'est-à-dire que  $Y$  est limité à  $[h, (m-1) \cdot h]$ , on remarque qu'il y a des intersections entre les deux fonctions mais cette solution est insuffisante.
- c. L'analyse est limitée aux nœuds nodaux internes (du nœud nodal 2 au nœud nodal  $m-2$ ) c'est-à-dire pour  $y$  appartient à  $[2h, (m-2) \cdot h]$ . Le tracé montre les deux courbes des deux fonctions confondues, cela veut dire qu'analytiquement on a une solution et on peut résoudre notre équation.

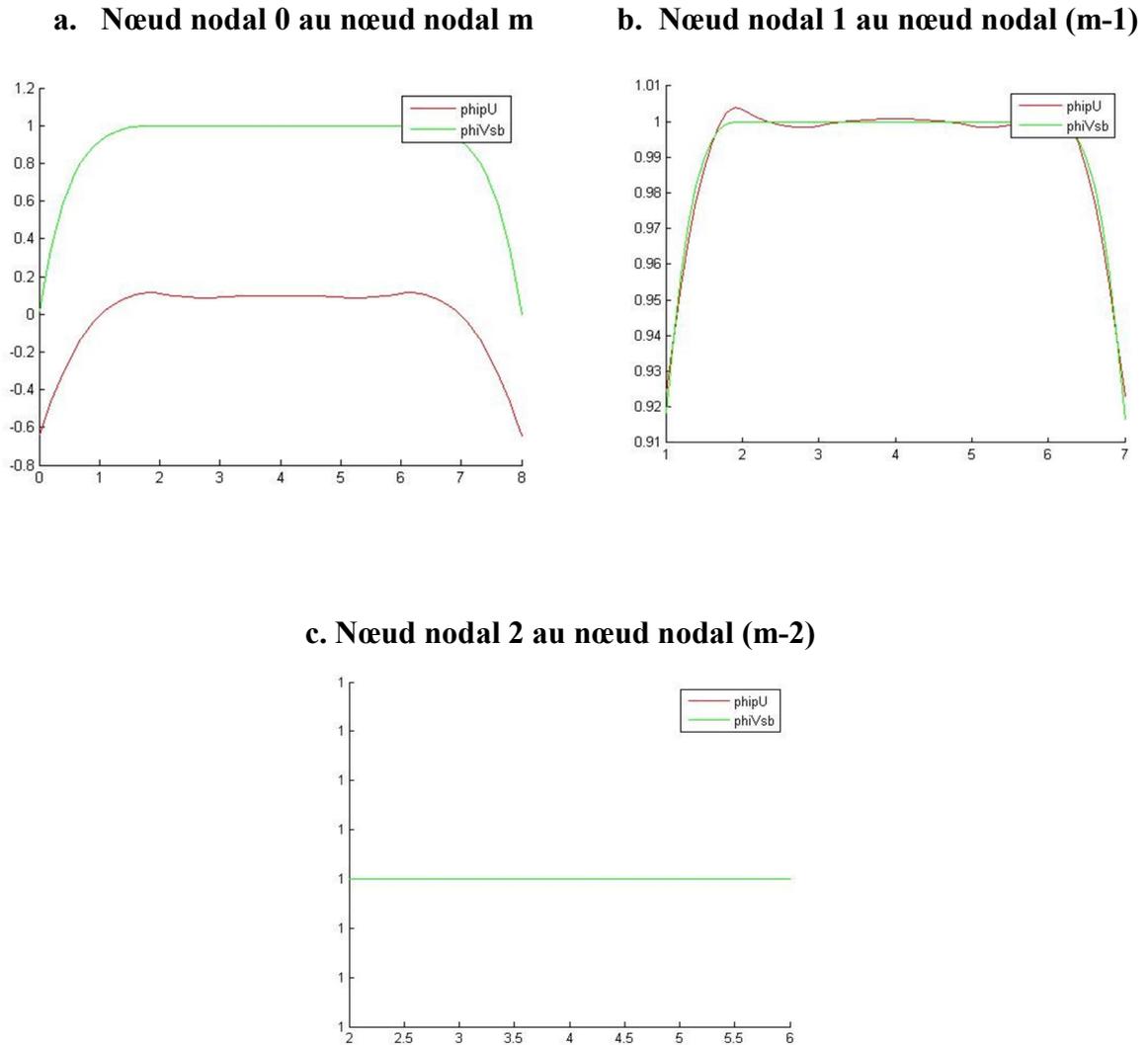
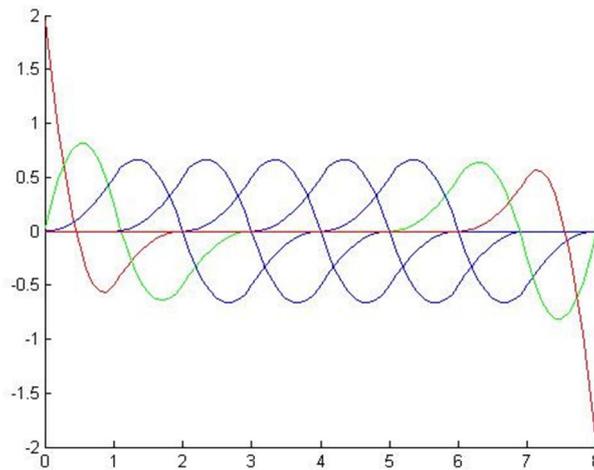


Figure (5-1) : Tracé des deux fonctions  $\left[\frac{\partial \phi_{ui}}{\partial y}\right] \{ui\}$  et  $\frac{1}{b} \{[\phi_{vi}] - [\phi_{vj}]\} \{vj\}$

- a. Y appartenant à  $[0 - m.h]$
- b. Y appartenant à  $[1 - (m-1).h]$
- c. Y appartenant à  $[2 - (m-2).h]$

On en déduit qu'on ne peut avoir une solution sauf si on la cherche dans le domaine  $[2.h, (m - 2).h]$ , ou encore les équations de contraintes ne sont valides que loin des C.A.L c'est à dire loin de la zone de perturbation, cette conclusion vient appuyer l'idée que l'instabilité globale se produit des CAL.

Maintenant si on revient au tracé des 2 fonctions séparément (Figure (5-2)) de l'équation (5-35).



**Figure (5-2) la fonction représentative de U**

On voit clairement que la spline modifié  $\bar{\psi}_0$  ne commence pas de zéro, alors qu'on sait qu'on modifie les splines des extrémités pour les accorder avec les données pratiques, dans ce cas, si on examine le graphe de la dérivée de la spline (figure (5-1-a)) on voit que cette spline dépend que de deux coefficient :  $\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i = 0$  (ces coefficients sont donnés dans le tableau(2-1)).

D'autre part la fonction au point 0 doit être égale à zéro cela implique que

$$\bar{\psi}_0 = \psi_{-1} + \psi_1$$

En utilisant cette nouvelle conditions aux limite pour les déplacements U on retrouve deux courbes confondue quelque soit y appartenant  $[0, m h]$ , mais cette nouvelle condition change les valeurs des splines modifiés aux extrémités (les CAL) que nous avons imposés des le départ, chose que n'est pas toléré, du moment que les conditions aux limites sont des données du problème.

La 3ème suggestion que nous donnons dans cet exposé est de considérer une nouvelle fonction d'interpolation pour les déplacements  $U$ , et de recalculer les splines modifiés des extrémités  $(\bar{U}_{-1}, \bar{U}_0, \bar{U}_1, \bar{U}_{m-1}, \bar{U}_m, \bar{U}_{m+1})$  en respectant les CAL du problème, on peut suggéré par exemple de prendre, une fonction d'interpolation du 4ème degré, en la dérivant, on retrouve une fonction de 3ème degré, et dans ce cas on aura une égalité de 2 fonctions semblables (polynôme de même ordre pour les  $U$  et les  $V$ ) et ainsi le solution sera plus simple et facile et évidente.

**CHAPITRE 6**  
**Validation et application numérique**

### 6-1 Introduction

Dans le chapitre précédant nous avons proposé un calcul du mode combiné distortionel-global par la méthode des splines bandes finis et afin de prouver son bon fonctionnement, nous présentons ce chapitre qui résume l'essentiel des résultats de l'étude numérique. Plusieurs exemples illustratifs sont considérés ici, et sont calculés par notre logiciel « **SHEBACSFMS** » qui applique les définitions des modes et les fonctions de base décrites dans ce document [Chapitre5].

Nous avons développé le logiciel « **SHEBACSFMS** » avec le langage Matlab. La Figure (6-1) montre l'interface du logiciel **SHEBACSFMS** dans la phase du post traitement. On peut voir le résultat sous forme de courbe dessinant la charge critique en fonction de la longueur du profilé. Le post processeur de SHEBACSFMS permet également de dessiner les formes modales en deux dimensions ou tridimensionnelles avec des longueurs du profilé que l'utilisateur a la possibilité de choisir. Grâce à ce logiciel l'utilisateur a la possibilité de faire différentes études paramétriques sur la stabilité des PFF et en tirer les résultats dont il a besoin pour le calcul et le dimensionnement.

Cette section contient des exemples de comparaison afin de valider le programme et la démarche suivie et des exemples pour montrer l'intérêt de la CSFSM. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats d'autres méthodes numériques connues et qui se sont imposées dans le domaine de génie civil et qui ont prouvé leur efficacité : la FSM, la CFSM, la SFSM et la GBT.

L'analyse numérique des exemples traite les différents conditions aux limites afin de visualiser l'effet de type de conditions aux limites d'une part et de montrer la capacité de la CSFSM par rapport à la CFSM d'une autre part.

La première question qu'on s'est posé est combien de sections splines faut-il pour que nos résultats convergent ? La Figure (6-2) montre l'influence du choix de la discrétisation d'un profilé avec une section en sigma simplement appuyé aux extrémités, elle montre qu'on obtient pratiquement le même résultat en variant le nombre de splines de 10, 15, 20 ; cela veut dire que le choix de la discrétisation n'influe pas sur le résultat contrairement au cas de l'instabilité locale ou on ne peut avoir des résultats convergentes qu'à partir d'une discrétisation égale à 20 sections splines. Le résultat obtenu nous donne une certaine confiance.

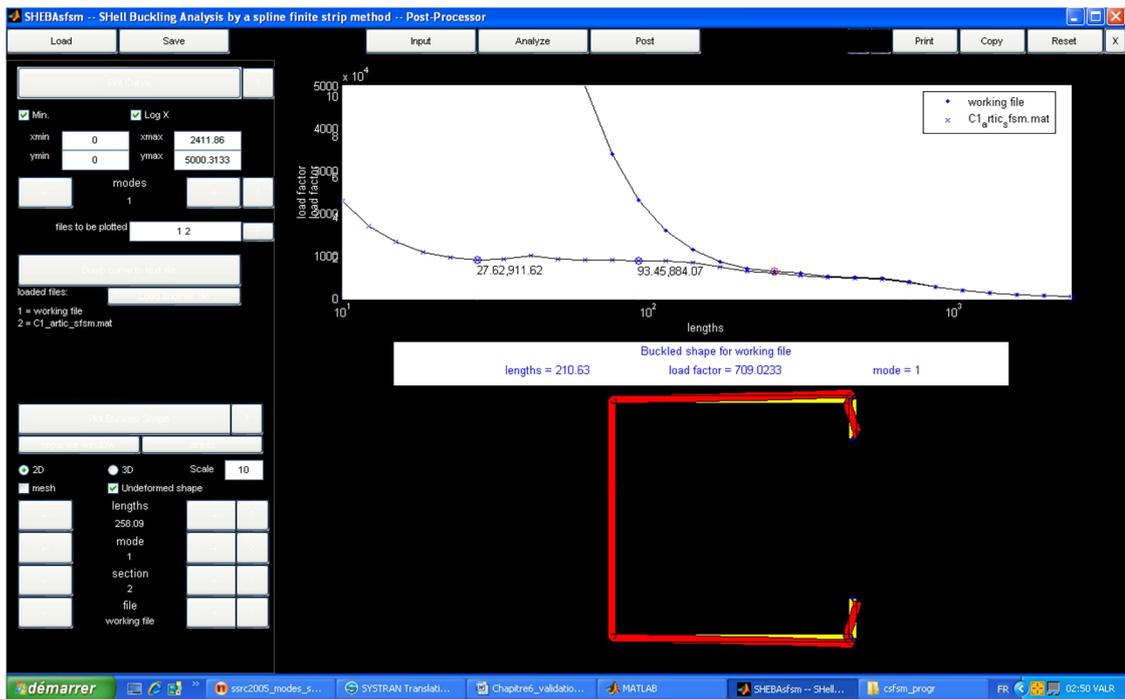


Figure (6-1) interface du logiciel SHEBACFSM (post traitement)

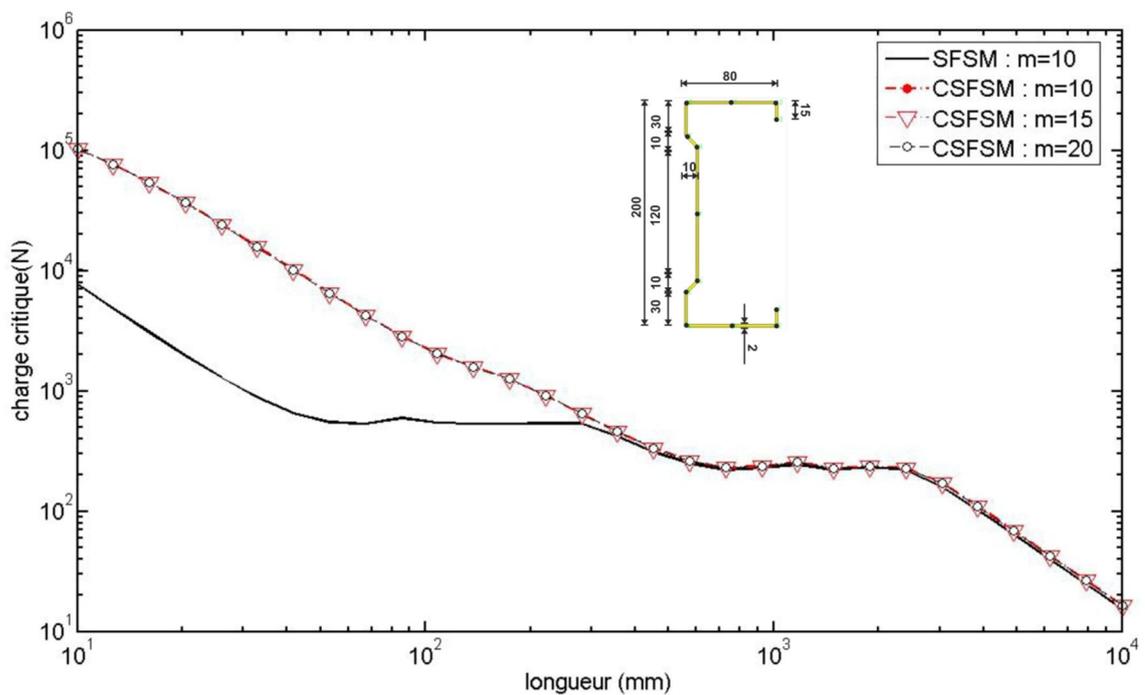


Figure (6-2) Effet du nombre des sections splines sur les résultats de la CSFSM

### 6-2 Exemples d'illustration

#### 6-2-1 Comparaison avec la SFSM, CFSM, FSM, GBT:

Afin d'illustrer la capacité de la CSFSM à classer les modes d'instabilité des profilés formés à froids et valider notre logiciel « SHEBACFSM » plusieurs exemples sont considérés. Les longueurs des données géométriques sont en millimètre. Les données mécaniques pour tous les exemples traités sont les suivants :

Le module d'élasticité  $E=210000$  MPA

Le coefficient de poisson  $\nu = 0,3$

Le cas d'un profilé simplement appuyé aux extrémités est validé en utilisant le logiciel CUFSM2 tandis que le cas d'un profilé articulé ou encastré aux extrémités est validé en utilisant le logiciel GBTUL1.

##### 6-2-1-1 Exemple1: cas d'un profilé simplement appuyé aux extrémités :

L'exemple 1 est une section avec une forme symétrique en SIGMA soumise à une force axiale de compression, ses dimensions sont données dans la Figure (6-3).

La Figure (6-3) donne les charges critiques en fonction de la longueur d'instabilité. Les courbes CSFSM et CFSM correspondent au mode combiné distorsionnel-global(GD) tandis que les courbes SFSM et FSM schématisent les résultats de la SFSM et FSM classiques et incluent donc tous les types de modes d'instabilité du profilé.

Le modèle SFSM a 10 nœuds principaux et les bandes (2-6-10) sont devisées en deux, ce qui nous donne trois nœuds secondaires. Au total nous avons 12 bandes devisées dans le sens de la longueur en 15 intervalles équidistants. Le nombre total des degrés de liberté est 572 DDL.

Dans la méthode SFSM ou CSFSM, le cas simplement appuyé est obtenu en libérant tout les déplacements (V) et en bloquant un, ainsi que tous les autres déplacements (U-W- $\Theta$ ), Les résultats de FSM et CFSM sont obtenus en utilisant le logiciel « CUFSM2 » disponible sur le web [50].Les résultats sont très satisfaisants. On voit bien que les courbes CSFSM et CFSM illustrant le domaine global-distorsionnel sont totalement confondus avec l'enveloppe inférieure des courbes FSM et SFSM. Les quatre méthodes donnent des résultats concordants.

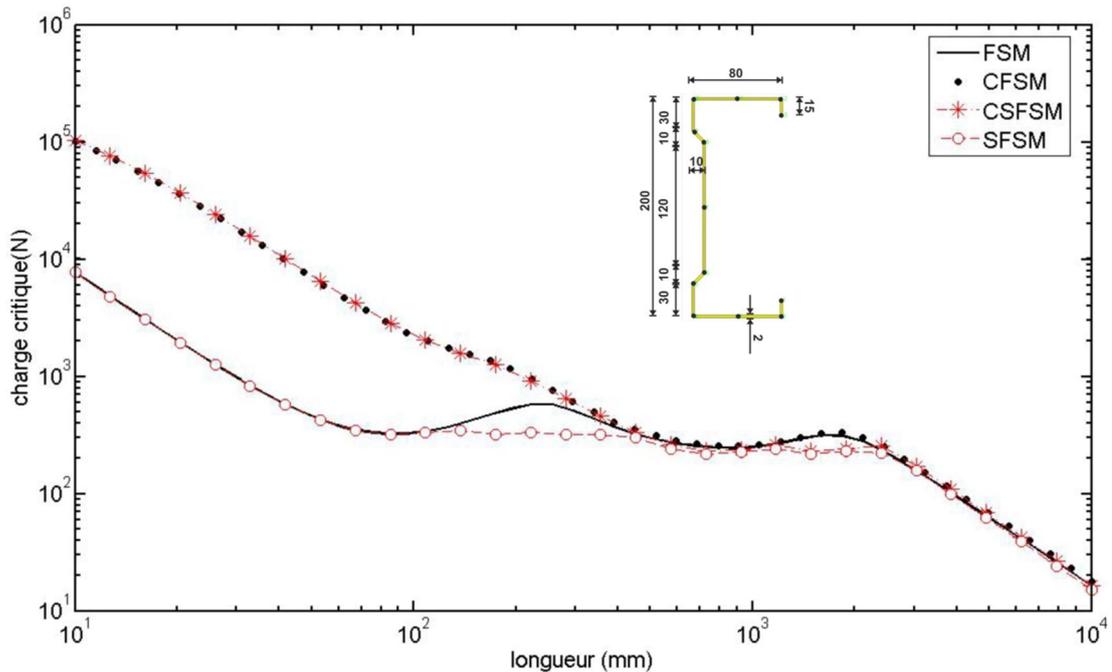


Figure (6-3) Cas d'une section SIGMA dont toutes les lignes nodales sont simplement appuyés aux extrémités (exemple1)

### 6-2-1-2 Exemple2 : Cas d'un profilé articulé ou encasté à ses extrémités :

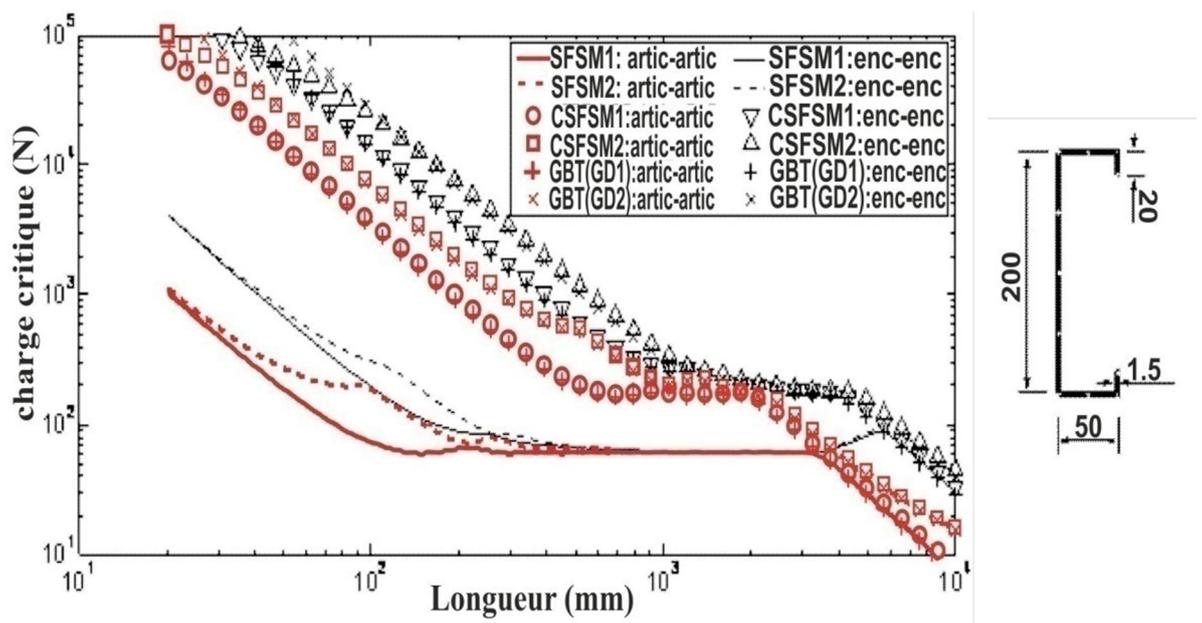
Afin de montrer la capacité de notre méthode CSFSM à traiter tous les types de conditions aux limites par rapport à la CFSM, deux cas de conditions aux limites sont considérés ici : cas d'une colonne soumise à une charge compressive, articulé ou encasté à ses extrémités. Pour la validation, nos résultats sont comparés à ceux obtenus avec le logiciel GBTUL1.

La section transversale de l'exemple traité est présentée dans la Figure (6-4). Le profilé est divisé longitudinalement en 19 intervalles (19+3 sections nodales). Le modèle SFMS compte 10 bandes, 6 nœuds principaux et 5 nœuds secondaires, ce qui donne 968 degrés de liberté avant l'application des conditions aux limites. Pour simuler le cas articulé-articulé, 67 degrés de liberté doivent être fixés, ce qui donne 901 degrés de liberté actifs. Dans ce cas la taille de la matrice  $R_{GD}$  est de  $(901 \times 141)$ .

Pour le cas d'une colonne encastée à ses extrémités, tous les degrés de liberté de toutes les lignes nodales doivent être encastés ( $U \ V \ W \ \Theta$ ). En reprenant le même exemple (Figure (6-4)) quatre sections nodales seront éliminées pour chaque ligne nodale et par

conséquent nous aurons 792 degrés de liberté actifs d'où la dimension de la matrice  $R_{GD}$  est de  $(792 \times 108)$ .

La Figure (6-4) représente les courbes des deux premiers modes de déformation calculés par la CSFSM, la SFSM et la GBT. Il est remarquable que pour des longueurs d'instabilité grandes et intermédiaires, les courbes de la méthode classique SFSM et la GBT montrent un excellent accord avec la nouvelle méthode CSFSM ou ces derniers se confondent avec la courbe du mode combiné distorsionnel-global (CSFSM) et ça pour le deux types de CAL.



**Figure (6-4) Cas d'une section en C dont toutes les lignes nodales sont articulées (et encastées) aux extrémités (exemple2)**

### 6-3 Utilisation de la CSFSM:

Une des raisons essentielles pour élaborer ce programme est que la méthode classique SFSM est incapable de fournir la charge critique ainsi que la longueur correspondante dans certains types de section. Afin de montrer l'intérêt de la CSFSM deux exemples sont présentés.

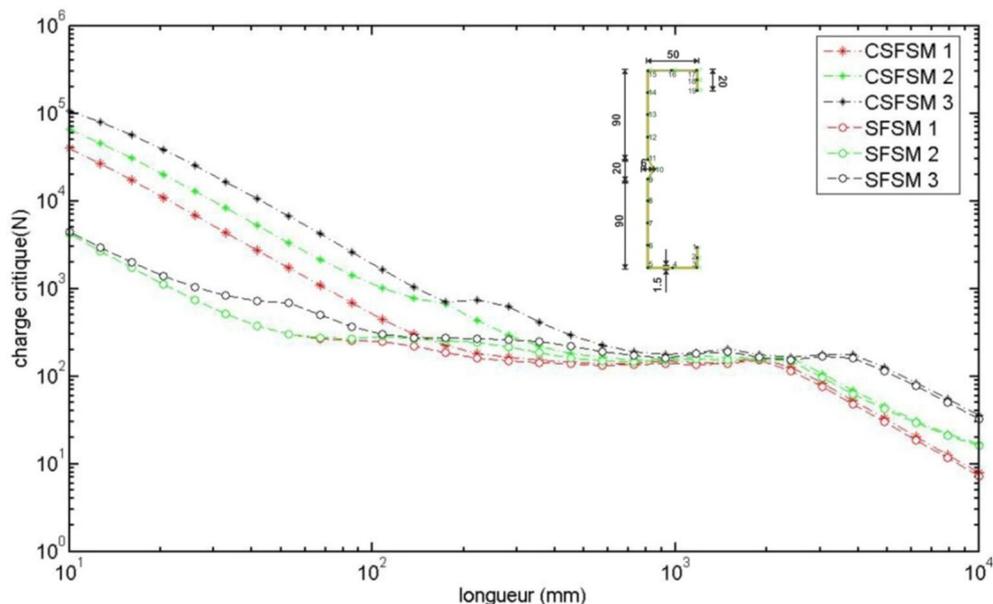
#### 6-3-1 Exemple 3 :

L'exemple traité est une section en C avec un petit raidisseur d'âme dont les lignes nodales aux extrémités sont simplement appuyées. La section transversale est donnée dans la Figure (6-5).

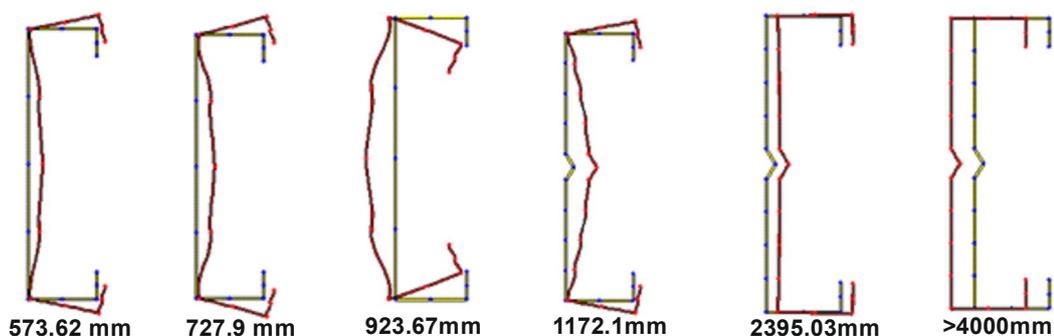
## Chapitre 6 : Validation et application numérique

La Figure (6-5) schématise aussi les forces critiques en fonction de la longueur calculée par la SFMSM et la CSFMSM. Aussi les formes déformées pour quelques longueurs d'instabilité choisis dans le domaine GD sont donnés dans la Figure (6-6) et la Figure (6-7). La séparation du mode GD est évidente, on remarque bien que pour des longueurs inférieures à 600mm on a un mode local et à partir de cette longueur débute le mode GD.

En observant la courbe SFMSM on voit bien que la courbe n'a pas un minimum mais il ya un changement de comportement autour de 600mm et 1000mm tandis que la courbe CSFMSM possède deux points minima distinct. Le premier se situe à une longueur de 573.62mm et le deuxième à une longueur de 1172.1mm. Selon les formes déformées donnés dans la Figure (6-6) c'est deux longueurs critiques appartiennent au mode distorsionnel, on se retrouve dans le cas d'un mode distorsionnel avec deux demi-ondes.



**Figure (6-5) charge critique pour une section C avec un raidisseur d'âme Dont les lignes nodales sont simplement appuyées aux extrémités (exemple3)**

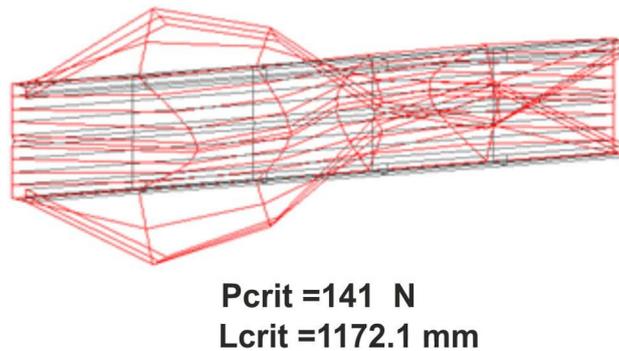
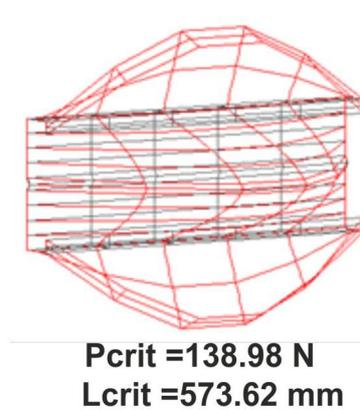


**Figure (6-6) formes déformés en deux dimensions de l'exemple 3 pour quelques longueurs**

## Chapitre 6 : Validation et application numérique

---

La Figure (6-7) représente les formes déformées de la section C simplement appuyé en trois dimensions pour deux longueurs critiques appartenant au domaine distorsionnel-global.



**Figure (6-7) Formes déformés en trois dimensions aux points minimum de l'exemple3**

### 6-3-2 Exemple 4 :

Cet exemple concerne un profilé simplement appuyé avec une section en C. Ses caractéristiques géométriques sont données dans la Figure (6-8). Six courbes sont représentées. La première est celle de tous les modes calculée avec la méthode classique de SFSM ainsi que le deuxième et le troisième mode. Les trois autres concernent les trois premiers modes combinés GD calculés avec la CSFSM. Il est bien évident que pour ce cas, la courbe SFSM possède un point minima distinct à une longueur égale 167.68mm tout comme la CSFSM. Les formes déformées aux voisinages de ce point sont données dans la Figure (6-9).

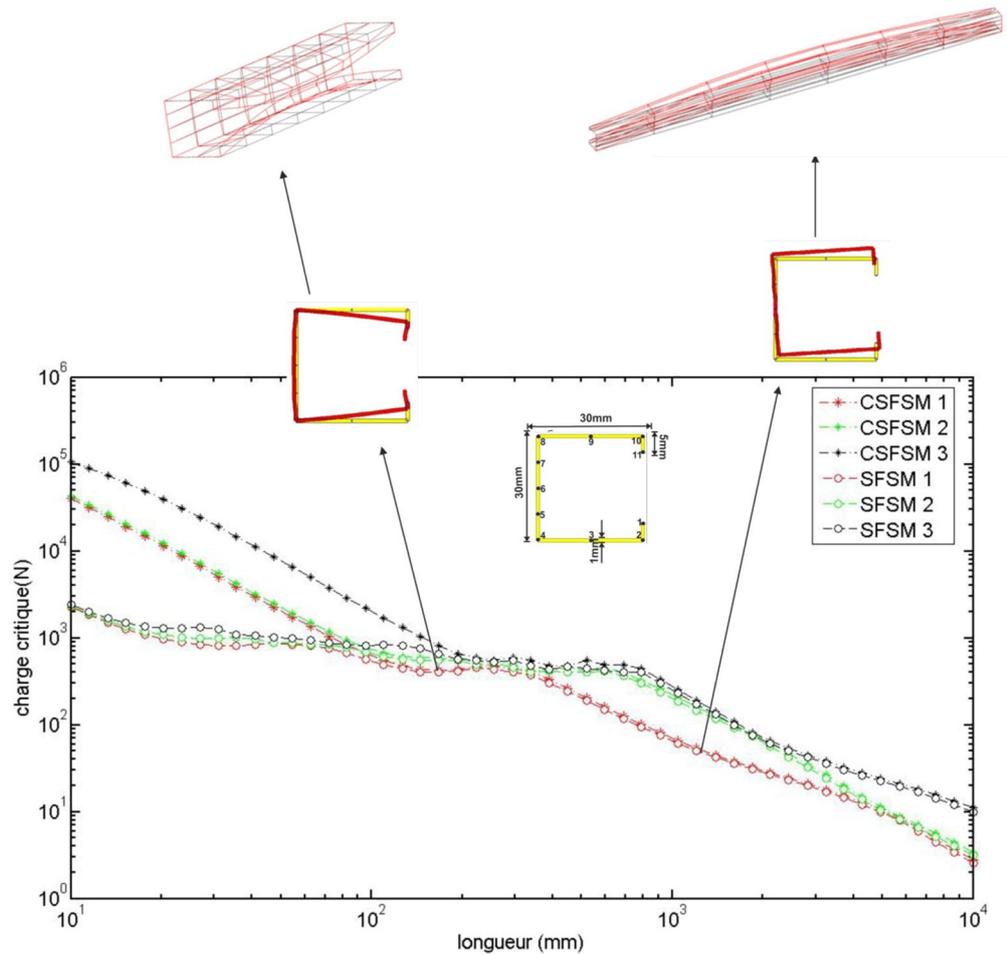


Figure (6-8) Charge critique d'une section en C (exemple4)

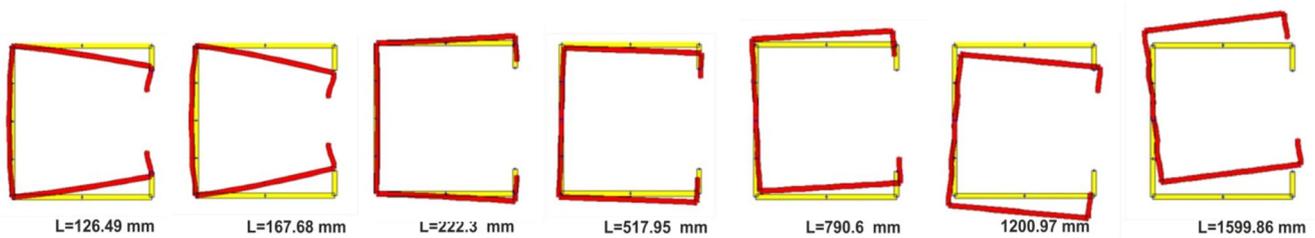
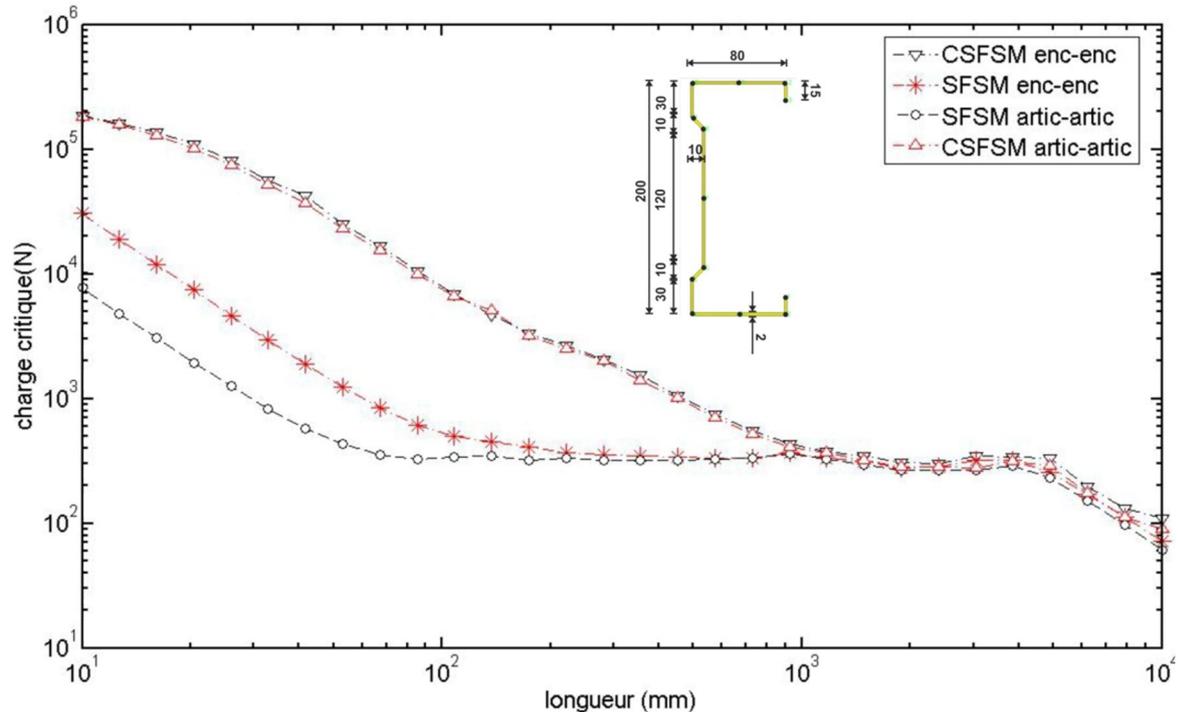


Figure (6-9) Formes déformés en deux dimensions pour quelques longueurs dans le domaine GD

### 6-3-3 Exemple 5 :

Pour cet exemple on a dessiné la courbe SFSM et CSFSM pour les deux cas de conditions aux limites (encasté-encasté et articulé-articulé). Les courbes SFSM et CSFSM mettent en évidence le domaine GD recherché et d'où la détermination du minimum qui

représente la charge critique du mode pur distorsionnel Figure (6-10), il se situe à une longueur  $L=3039.2$  mm et la charge critique vaut  $P_{crit}=279.50$  N.



**Figure (5-10) charge critique d'une section SIGMA dont les lignes nodales sont encastrés et articulé aux extrémités**

### 6-3-4 Exemple 6 :

L'exemple traité ici est une colonne creuse à section rectangulaire simplement appuyée à ses deux extrémités et soumise à une charge compressive ou chaque parois plane de la section est raidie par un raidisseur placé symétriquement. Les dimensions géométriques sont données dans la figure (6-11). La section est composée de 16 nœuds principaux et 16 bandes. La colonne est divisée dans le sens de la longueur en 15 intervalles (15+3 sections nodales). Ainsi la matrice de rigidité  $R_{GD}$  a une dimension  $(1055 \times 287)$ .

La figure (6-11) donne aussi la variation de la charge critique en fonction de la longueur de l'élément. Trois courbes sont représentées : la courbe SFSM du premier mode résultant d'un calcul par la SFSM classique, la deuxième courbe correspond au premier mode combiné GD calculé par la CFSM, la troisième courbe est celle du premier mode GD calculé par notre programme SHEBACFSM.

Pour des longueurs d'instabilité intermédiaires et pour les grandes longueurs, les courbes SFSM et CFSM classique concordent avec la courbe du mode distorsionnel-global, et

## Chapitre 6 : Validation et application numérique

par conséquent le programme élaboré fonctionne aussi pour les sections fermées et permet d'avoir la charge critique du mode désiré ainsi que la longueur critique correspondante.

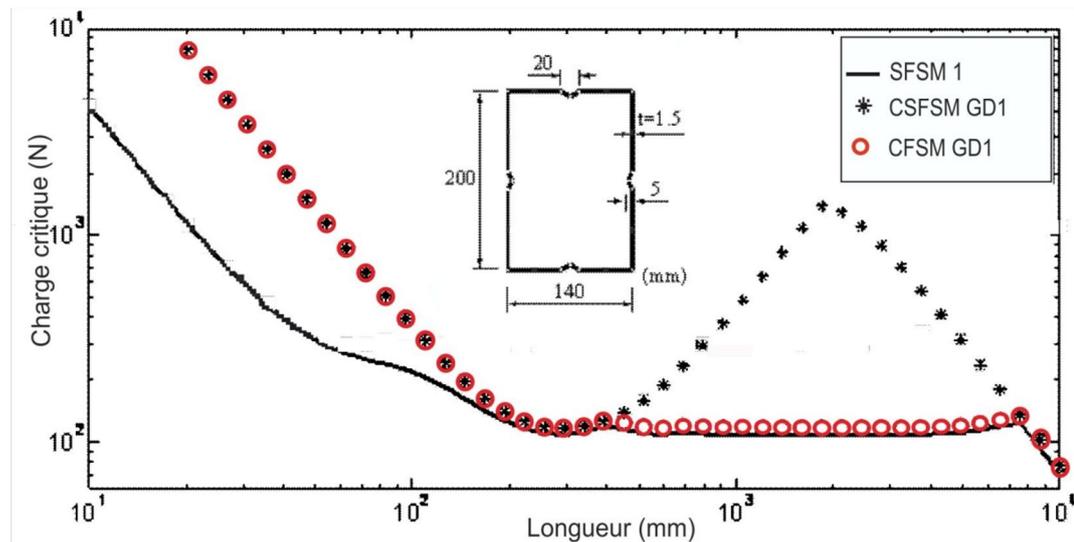


Figure (6-11) Décomposition modale en mode GD d'une section fermée

### 6-3-4 Influence des conditions aux limites :

L'exemple 5 est traité ici. Nous avons dessiné la courbe du domaine (GD) des cas encasturé - articulé et simplement appuyé dans le même graphe figure (6-12), les courbes sont presque identiques pour des longueurs intermédiaires et les longueurs élancées et ça nous mène à conclure qu'au niveau global, le type des conditions aux limites n'influent pas sur le mode distorsionnel.

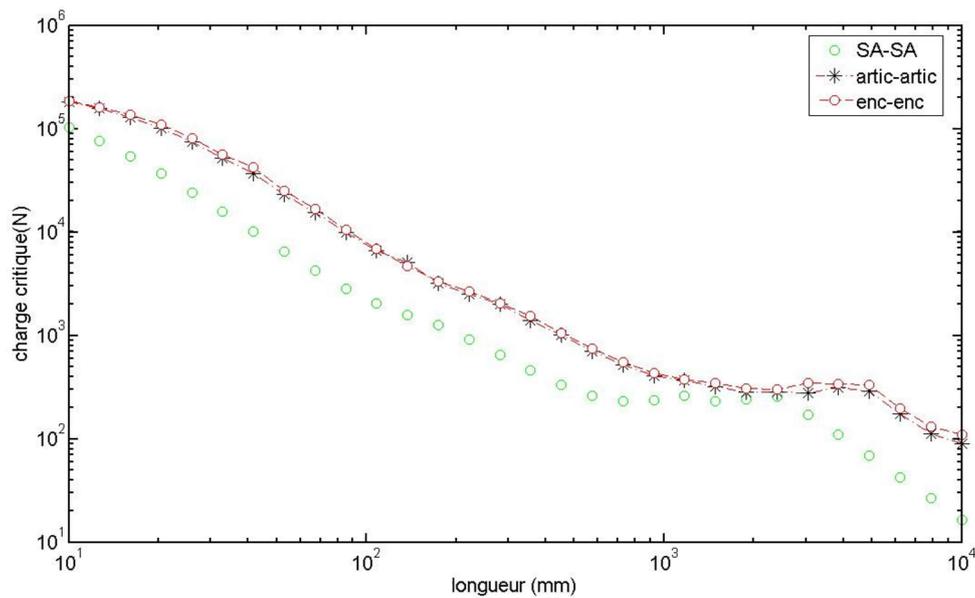


Figure (6-12) effet des conditions aux limites

### 6-3-5 Influence du raidisseur de l'âme :

La Figure (6-13) présente une série de sections transversales de l'exemple 3 avec différentes profondeurs de raidisseurs d'âme, le raidisseur de l'âme varie de 1 à 8 mm.

La Figure (6-14) donne l'effet de la profondeur du raidisseur d'âme sur le domaine GD. On voit clairement que la dimension du raidisseur n'influe pas sur le domaine G. Les huit branches des courbes schématisant le domaine G sont toutes confondues tandis que les branches de la courbe dessinant le mode D s'éloignent les unes des autres. Les charges critiques du domaine D pour une même longueur  $d$  varient selon la profondeur du raidisseur de l'âme. En fait l'instabilité distorsionnelle débute avant avec les sections à petit raidisseur par rapport aux sections avec des raidisseurs plus importants.

Le tableau (6-1) donne les formes déformées de la section pour deux longueurs différentes. La première schématise le domaine distorsionnel ( $L=294.71$  mm) et la deuxième ( $L=5689.87$  mm) schématise le domaine globale tout en variant l'épaisseur de la section. En conclusion on peut dire que pour des longueurs intermédiaires les charges critiques augmentent lorsque le raidisseur de l'âme dévie.

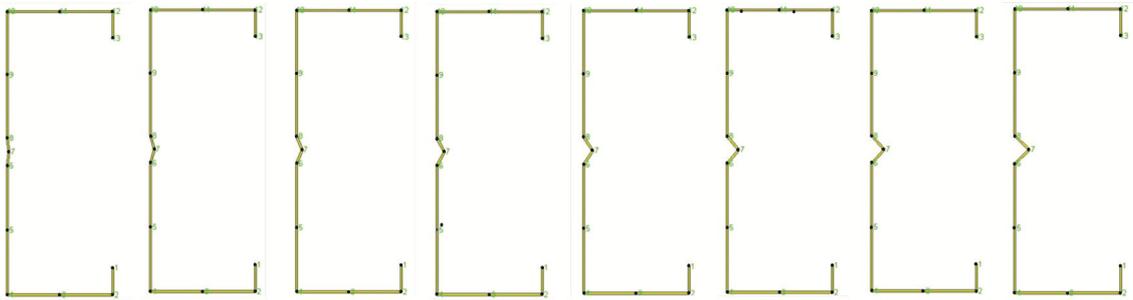


Figure (6-13) sections transversal de l'exemple3 en variant la dimension du raidisseur de l'âme

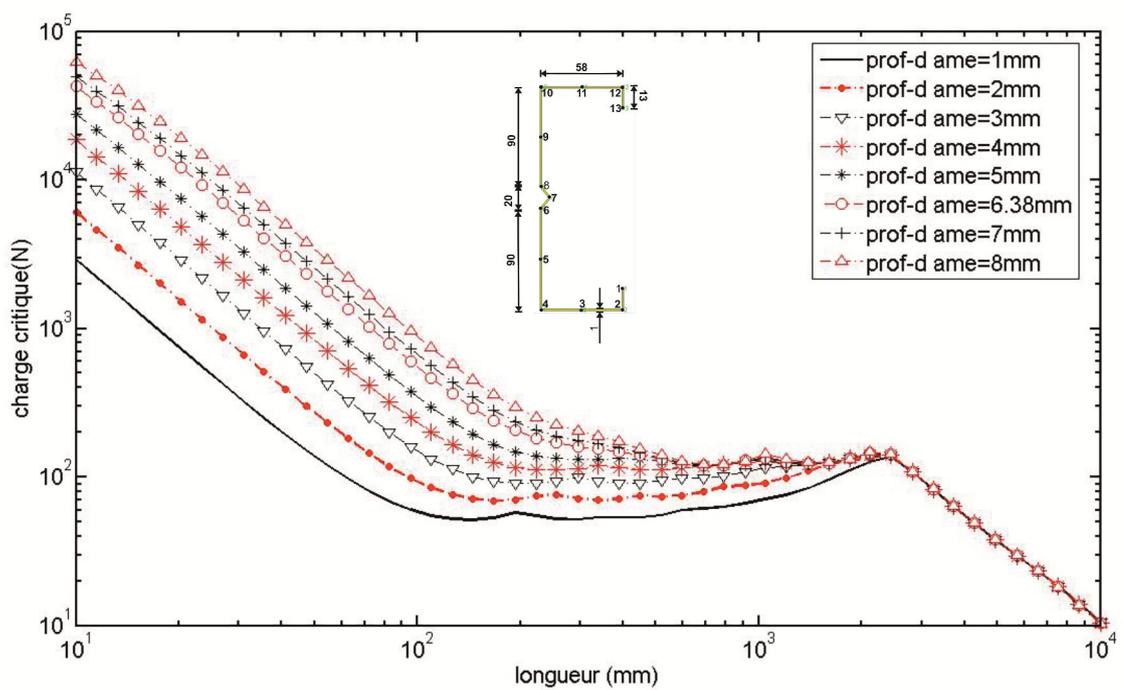
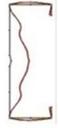


Figure (6-14) Effet de la profondeur du raidisseur de l'âme de la section sur la charge critique

épaisseur de la section	Pcrit du mode D	Pcrit du mode G
t= 1 mm	51.63 N 	29.32 N 
t= 2 mm	71.29 N 	29.38 N 
t= 3 mm	100.27 N 	29.45 N 
t = 4 mm	114.38 N 	29.51 N 
t=5 mm	131.36 N 	29.57 N 
t= 6.38 mm	160.63 N 	29.64 N 
t= 7 mm	175.91 N 	29.68 N 
t= 8 mm	203.32 N 	29.73 N 

**Tableau (6-1) : formes déformés de la section pour plusieurs épaisseurs de la section**

### 6-3-6 Influence du raidisseur de bord :

La Figure (6-15) présente une série de sections transversales de l'exemple 4 avec différentes longueur de raidisseurs de bords. Le raidisseur de bord varie de 1 à 7 mm, d'où la Figure (6-16) qui montre que les forces critiques augmentent lorsque le raidisseur de bord devient plus fort pour des longueurs intermédiaires alors qu'elles ne sont pas influencées pour des longueurs grandes.

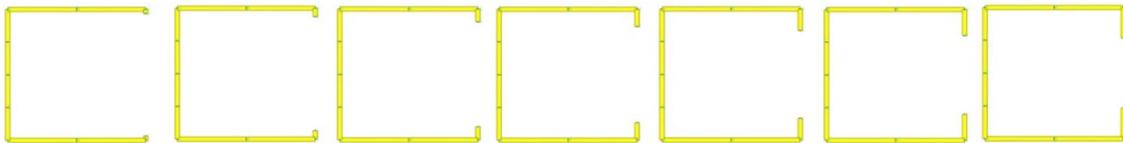


Figure (6-15) sections transversal de l'exemple4 en variant  
La dimension du raidisseur de bord

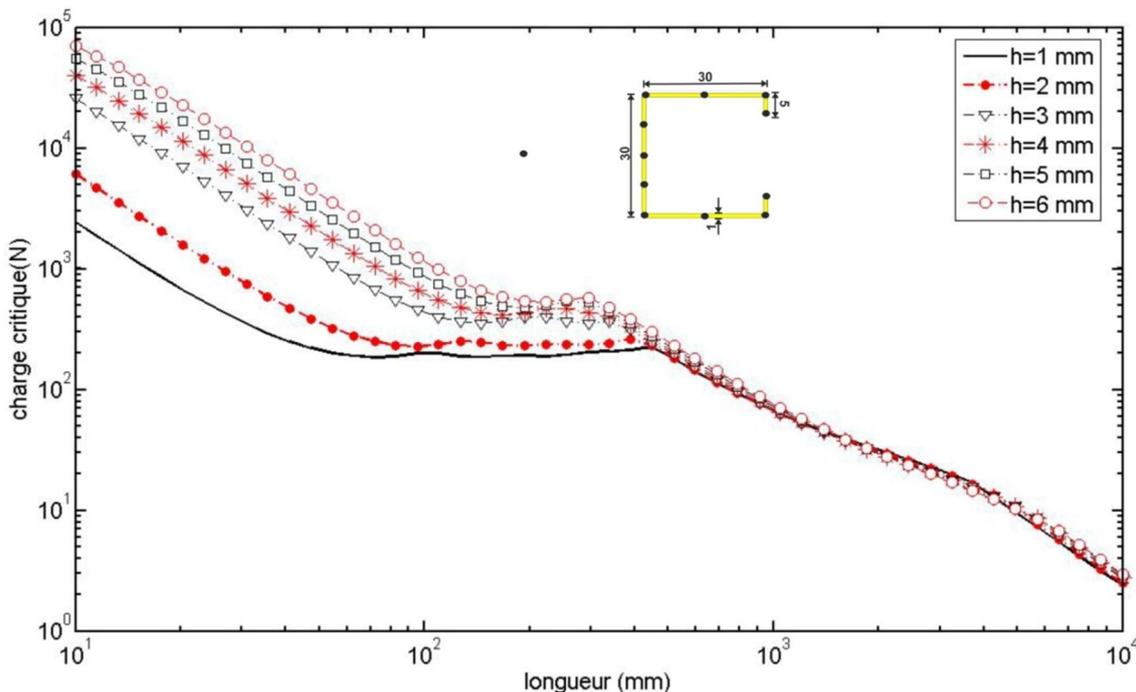


Figure (6-16) : Effet du raidisseur de bord d'une section sur la charge critique

### 6-3-7 Influence de l'épaisseur de la section :

La Figure (6-18) représente les forces critiques du mode GD pour des sections en C en variant les épaisseurs de la section (Figure (6-17)) afin de montrer l'influence de l'épaisseur sur le comportement du profilé. On voit clairement que pour des grandes longueurs d'instabilité l'épaisseur de la section n'influe pas sur sa déformation. Les branches de toutes les courbes schématisant le domaine G sont confondues, mais pour des longueurs intermédiaires l'épaisseur influe énormément sur le mode d'instabilité D. Quand l'épaisseur de la section croît les charges critiques du mode d'instabilité D croissent aussi. La Figure (6-19) donne les formes déformées en deux dimensions pour une même longueur ( $L=573.62$  mm) mais en variant l'épaisseur de la section.

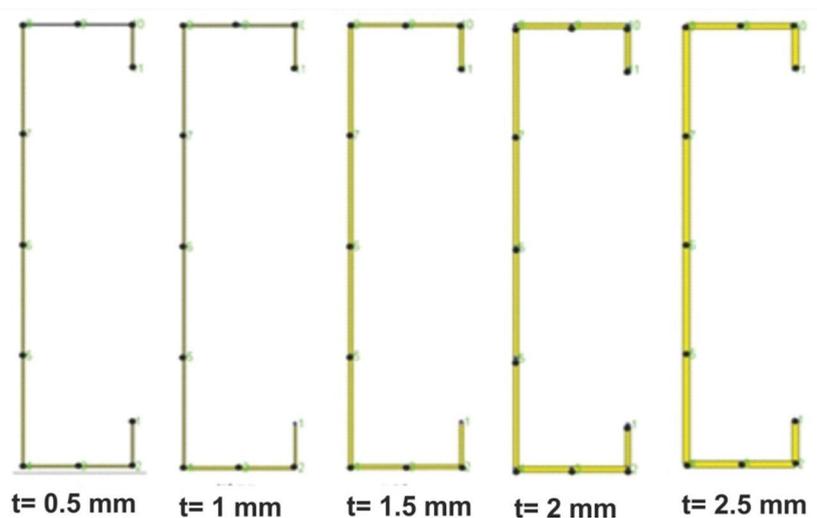


Figure (6-17) section transversal de l'exemple2 en variant l'épaisseur de la section

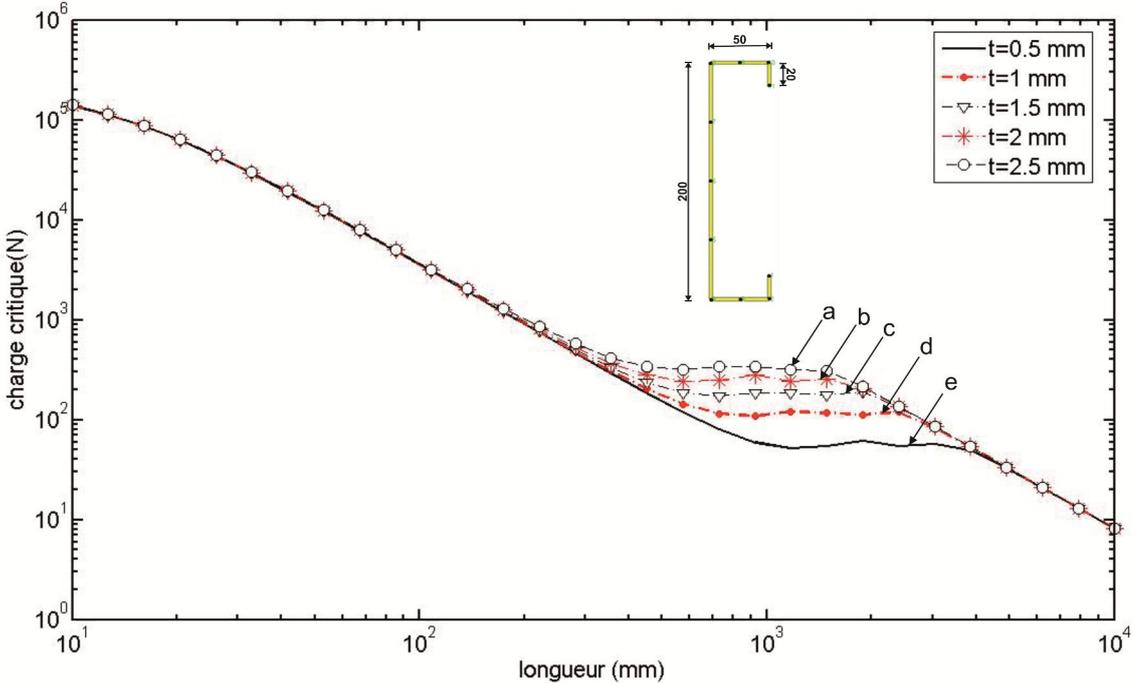
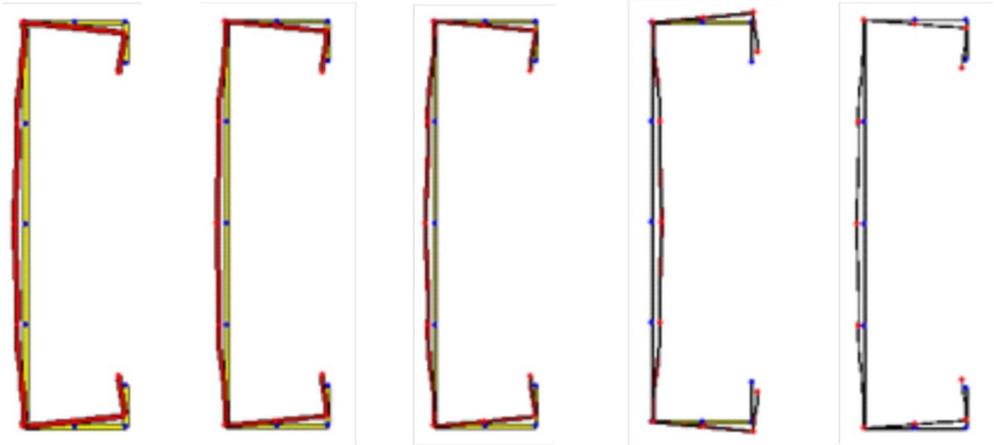


Figure (6-18) effet de l'épaisseur sur la charge critique



Pcrit=314.43 N Pcrit=242.53 N Pcrit=185.16 N Pcrit=143.43 N Pcrit=118.08 N

(a) (b) (c) (d) (e)

Figure (6-19) formes déformés en deux dimensions pour une longueur L=573.62 mm

### Conclusions et Recommandations

Beaucoup de problèmes demeurent sans solution dans le domaine du comportement de la modélisation informatique et du design des profilés formés à froids. Quelques sujets ont pu être étudiés et en plus avoir des résultats prometteurs. Les profilés formés à froids constituent un sujet de recherche important suite à leur utilisation croissante en construction et à la tendance permanente vers une meilleure optimisation de poids et de rigidité. Suite à une application d'une charge compressive, ces profilés peuvent subir trois types d'instabilité locale (L), distorsionnelle (D), globale (G).

Depuis Euler, l'étude de la stabilité est basée sur le concept de la charge critique. Les règles de calcul et de dimensionnement des structures métalliques dépendent d'elle. A titre d'exemple on cite la méthode de DSM et la méthode de largeur effective, et d'un autre coté l'ingénieur a besoin d'une méthode simple efficace et précise pour son calcul.

Pour évaluer cette charge critique des méthodes numériques sont proposées : la FEM, la FSM, la SFSM. Ces méthodes restent un outil très fiable pour l'étude de la stabilité des profilés formés à froids. Récemment on a pu identifier les modes d'instabilité automatiquement grâce à la méthode de CFSM élaboré par Schäfer (2006) en se basant sur la FSM. Ce dispositif unique est fortement avantageux du moment que le nombre de degrés de liberté utile est nettement inférieur que le nombre de degrés de liberté initial. Cette méthode basée sur la détermination d'une matrice de contrainte. Schäfer a proposé une démarche lourde et compliquée notre égard dans la détermination de cette matrice et par conséquent le but de notre travail se résume en deux points essentiels :

➤ Premièrement utiliser la méthode des SFSM au lieu de la méthode de FSM, pour la décomposition modale et ça en injectant les hypothèses de classification des modes d'instabilité de la GBT, c'est la CSFSM « Constrained Spline Finite Strip Method ».

➤ Deuxièmement la proposition et la validation d'une technique originale, simple et qui marche avec succès dans la méthode FSM qui a pour but de déterminer les degrés de liberté effectifs et non effectifs. Ce type de degrés de liberté est une étape essentielle et cruciale dans la détermination de la matrice de contrainte, elle a été proposée par Djafour [24].

La SFSM combinée avec la CSFSM fournit un outil puissant pour explorer la stabilité de la section transversale des profilés formés à froids. Aussi la CSFSM tout comme la CFSM a la possibilité de décomposer la déformation en mode d'instabilité pure ou mode d'instabilité

## Chapitre 6 : Validation et application numérique

---

combiné. On s'est essentiellement intéressé au mode (GD) global et distortional pour un début, et donc en se basant sur les exemples présentés, on peut conclure que la méthode proposée peut identifier correctement le mode GD. Les exemples précédents démontrent l'exactitude de l'approche utilisée pour prévoir les charges critiques des profils formés a froids soumises à une charge compressive.

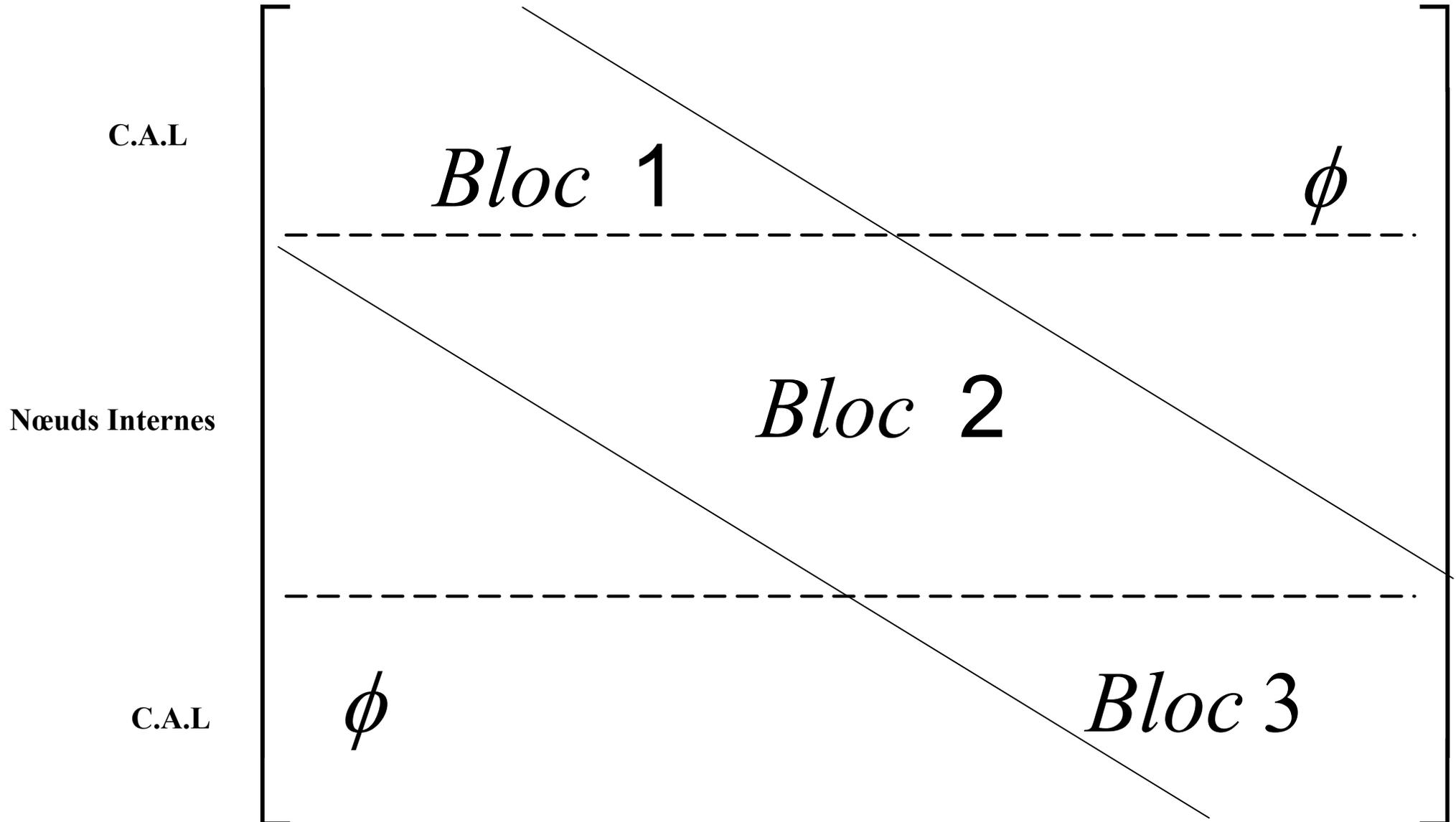
Une seule hypothèse a été faite dans ce travail (pour faciliter le travail) est que les conditions aux limites pour le déplacement  $U$  est la même aux extrémités  $i$  et  $j$  de la bande chose qui n'est pas toujours vraie dans la pratique, et donc pour des travaux ultérieurs on peut refaire le travail avec des CAL du déplacement  $U$  différents.

Un autre point doit être approfondi est le choix de la fonction d'interpolation, nous avons vu que le choix similaire des B3 splines pour la fonction  $V$  et la fonction  $U$  présentait des insuffisances (§ 5-2-3), l'idée de prendre deux fonctions d'interpolation différentes pour les deux fonctions  $U$  et  $V$  est intéressante et doit être étudié.

Aussi, Les études que nous proposons de faire dans l'avenir peuvent être mentionnées comme suit :

- Terminer le programme, en introduisant la classification des modes d'instabilité pur : local, distortional et global.
- Dans le domaine des structures métalliques le programme marche pour des sections simples ouvertes et fermés donc notre second objectif est d'élargir la démarche pour les sections avec des formes plus complexes et irrégulières suivant la longueur.
- Et finalement utiliser le même concept pour une autre méthode numérique, un outil numérique plus général et plus puissant qui est la méthode des éléments finis qui peut prendre en compte le caractère non linéaire de la structure.
- Une idée importante que nous avons tirés de ce travail est que l'instabilité distortional se produit loin des conditions aux limites et donc pour des travaux ultérieurs, au lieu d'appliquer les équations de contrainte sur toute la bande, on peut les appliquer sur les nœuds internes de la bande et considérer les degrés de liberté de la zone de perturbation comme des degrés de liberté ignorés.

Annexe 1



$$\left. \begin{array}{cccc}
 -1 & 7 & \frac{-11}{2} & 1 \\
 3y_1 & 3y_2 - 24y_1 & \left( -3y_{-1} + 12y_0 - \frac{3}{2}y_2 + 9y_1 \right) & -3y_0 \\
 -3y_2 & -3y_2^2 - 24y_1^2 & \left( \frac{3}{2}y_2^2 - 9y_1^2 - 12y_0^2 + 3_{-1}^2 \right) & 3y_0^2 \\
 y_1^3 & y_2^3 - 8_1^3 & \left( 3_1^3 - \frac{1}{2}y_2^3 + 4y_0^3 - 3_{-1}^3 \right) & -y_0^3
 \end{array} \right\} \text{Intervalle (0-1)}$$

$$\left. \begin{array}{cccc}
 -1 & \frac{7}{2} & -3 & 1 \\
 3y_2 & 3y_3 - \frac{27}{2}y_2 & -3y_0 + 12y_1 & -3y_1 \\
 y_2^2 & -3y_3^3 + \frac{27}{2}y_2^2 & 3y_0^2 - 12y_1^2 & 3y_0^3 \\
 y_2^3 & y_3^3 - \frac{9}{2}y_2^3 & -y_0^3 - 4y_1^3 & -y_1^3
 \end{array} \right\} \text{Intervalle (1 - 2 )}$$

**Matrice contrainte (concernant les V) Bloc 1**

**ANNEXES**

---

$$\begin{array}{cccc}
 -1 & 3 & -3 & 1 \\
 3y_3 & 3y_4 - 12y_3 & -3y_1 + 12y_2 & -3y_2 \\
 -3y_3^2 & -3y_4^2 + 12y_3^2 & 3y_1^2 - 12y_2^2 & 3y_2^2 \\
 y_3^3 & y_4^3 - 4y_3^3 & -y_1^3 + 4y_2^3 & -3y_2^2
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}} \right\} \text{Intervalle (2-3)}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 3 & -3 & 1 \\
 3y_4 & 3y_5 - 12y_4 & -3y_2 + 12y_3 & -3y_3 \\
 -3y_4^2 & -3y_5^2 + 12y_4^2 & 3y_4^2 - 12y_3^2 & 3y_3^2 \\
 y_4^3 & y_5^3 - 4y_4^3 & -y_2^3 + 4y_3^3 & -y_3^3
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}} \right\} \text{Intervalle (3-4)}$$

$$\begin{array}{cccc}
 -1 & 3 & -3 & 1 \\
 3y_5 & 3y_6 - 12y_5 & 3y_3 + 12y_4 & -3y_4 \\
 -3y_5^2 & -3y_6^2 + 12y_5^2 & +3y_3 - 12y_4 & 3y_4^2 \\
 y_5^3 & y_6^3 - 4y_5^3 & -y_3^3 + 4y_4^3 & -y_4^3
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}} \right\} \text{Intervalle (3-5)}$$

**Matrice contrainte (concernant les V) Bloc 2**

**ANNEXES**

---

$$\left. \begin{array}{cccc}
 -1 & 3 & -\frac{7}{2} & 1 \\
 3y_{m-1} & 3y_m - 12y_{m-1} & -3y_{m-3} + \frac{27}{2}y_{m-2} & -3y_{m-2} \\
 -3y_{m-1}^2 & -3y_m^2 + 12y_{m-1}^2 & 3y_{m-3}^2 - \frac{27}{2}y_{m-2}^2 & 3y_{m-2}^2 \\
 y_{m-1}^3 & y_m^3 - 4y_{m-1}^3 & -y_{m-3}^3 + \frac{9}{2}y_{m-2}^3 & -y_{m-2}^3
 \end{array} \right\} \text{Intervalle } (m-2 \rightarrow m-1)$$

$$\left. \begin{array}{ccc}
 -1 & \frac{11}{2} & -7 & 1 \\
 3y_m & \left( 3y_{m+1} - 12y_m + \frac{3}{2}y_{m-2} - 9y_{m-1} \right) & (-3y_{m-2} + 24y_{m-1}) & -3y_{m-1} \\
 -3y_m^2 & \left( -3y_{m+1}^2 + 12y_m^2 - \frac{3}{2}y_{m-2}^2 - 9y_{m-1}^2 \right) & -3y_{m-2}^2 - 24y_{m-1}^2 & 3y_{m-1}^2 \\
 y_m^3 & \left( 3y_{m+1}^3 - 4y_m^3 - \frac{1}{2}y_{m-2}^3 - 3y_{m-1}^3 \right) & -y_{m-2}^3 + 8y_{m-1}^3 & -y_{m-1}^3
 \end{array} \right\} \text{Intervalle } (m-1 \rightarrow m)$$

**Matrice contrainte (concernant les V) Bloc 3**

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & 21 & -\frac{33}{2} & 3 \\
 6y_1 & 6y_2 - 48y_1 & (-6y_{-1} + 24y_0 - 3y_2 + 18y_1) & -6y_0 \\
 -3y_1^2 & -3y_2^2 + 24y_1^2 & \left(\frac{3}{2}y_2^2 - 9y_1^2 - 12y_0^2 + 3y_{-1}^2\right) & 3y_0^2
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}} \right\} \text{Intervalle ( 0-1 )}$$
  

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & 21 & -9 & 3 \\
 6y_2 & 6y_3 - 27y_2 & -6y_0 + 24y_1 & -6y_1 \\
 -3y_2^2 & -3y_3^2 + \frac{27}{2}y_2^2 & -3y_0^2 - 12y_1^2 & 3y_1^2
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}} \right\} \text{Intervalle ( 1 - 2 )}$$

**Matrice contrainte (concernant les U) : Bloc 1**

**ANNEXES**

---

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & 9 & -9 & 3 \\
 6y_3 & 6y_4 - 24y_3 & -6y_1 + 24y_2 & -6y_2 \\
 -3y_3^2 & -3y_4^2 + 12y_3^2 & 3y_1^2 - 12y_2^2 & 3y_2^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & 9 & -9 & 3 \\
 6y_4 & 6y_5 - 24y_4 & -6y_2 + 24y_3 & -6y_2 \\
 -3y_4^2 & -3y_5^2 + 12y_4^2 & 3y_2^2 - 12y_3^2 & 3y_3^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & 9 & -9 & 3 \\
 6y_5 & 6y_6 - 24y_5 & -6y_3 + 24y_4 & -6y_4 \\
 -3y_5^2 & -3y_6^2 + 12y_4^2 & 3y_3^2 - 12y_4^2 & 3y_4^2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}} \right\} \begin{array}{l} \text{Intervalle ( 2 - 3 )} \\ \\ \text{Intervalle ( 3- 4 )} \\ \\ \text{Intervalle ( 4 - 5 )} \end{array}$$

**Matrice contrainte (concernant les U) : Bloc 2**

$$\left. \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & 9 & \frac{-21}{2} & 3 \\
 6y_m & (6y_{m+1} - 24y_m + 3y_{m-2} - 18y_{m-1}) & (-6y_{m-2} + 48y_{m-1}) & -6y_{m-1} \\
 -3y_m^2 & \left(-3y_{m+1}^2 + 12y_m^2 - \frac{3}{2}y_{m-2}^2 + 9y_{m-1}^2\right) & (3y_{m-2}^2 + 24y_{m-1}^2) & 3y_{m-1}^2
 \end{array} \right\} \text{Intervalle (m-2) } \rightarrow \text{(m-1)}$$

$$\left. \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3 & \frac{33}{2} & \frac{-21}{2} & 3 \\
 6y_m & (6y_{m+1} - 24y_m + 3y_{m-2} - 18y_{m-1}) & (-6y_{m-2} + 48y_{m-1}) & -6y_{m-1} \\
 -3y_m^2 & \left(-3y_{m+1}^2 + 12y_m^2 - \frac{3}{2}y_{m-2}^2 + 9y_{m-1}^2\right) & (3y_{m-2}^2 + 24y_{m-1}^2) & 3y_{m-1}^2
 \end{array} \right\} \text{Intervalle (m-1 } \rightarrow \text{m)}$$

**Matrice contrainte (concernant les U) : Bloc 3**

Annexe 2

$$\begin{aligned}
[k_{11}] &= \left( \frac{Et^3}{b^3(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vi}^T \cdot [\Phi]_{vi} dy \\
[k_{12}] &= \left( \frac{Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vi}^T \cdot [\Phi]_{\theta i} dy \\
[k_{13}] &= \left( \frac{-Et^3}{b^3(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vi}^T \cdot [\Phi]_{vj} dy \\
[k_{14}] &= \left( \frac{Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vi}^T \cdot [\Phi]_{\theta j} dy \\
[k_{21}] &= \left( \frac{Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta i}^T \cdot [\Phi]_{vi} dy \\
[k_{22}] &= \left( \frac{Et^3}{3 \cdot b(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta i}^T \cdot [\Phi]_{\theta i} dy \\
[k_{23}] &= \left( \frac{-Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta i}^T \cdot [\Phi]_{vj} dy \\
[k_{24}] &= \left( \frac{Et^3}{6 \cdot b(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta i}^T \cdot [\Phi]_{\theta j} dy \\
[k_{31}] &= \left( \frac{-Et^3}{b^3(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vj}^T \cdot [\Phi]_{vi} dy \\
[k_{32}] &= \left( \frac{-Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vj}^T \cdot [\Phi]_{\theta i} dy \\
[k_{33}] &= \left( \frac{Et^3}{b^3(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vj}^T \cdot [\Phi]_{vj} dy \\
[k_{34}] &= \left( \frac{-Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{vj}^T \cdot [\Phi]_{\theta j} dy \\
[k_{41}] &= \left( \frac{Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta j}^T \cdot [\Phi]_{vi} dy \\
[k_{42}] &= \left( \frac{Et^3}{6 \cdot b(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta j}^T \cdot [\Phi]_{\theta i} dy \\
[k_{43}] &= \left( \frac{-Et^3}{2 \cdot b^2(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta j}^T \cdot [\Phi]_{vj} dy \\
[k_{44}] &= \left( \frac{Et^3}{3 \cdot b(1-\mu^2)} \right) \cdot \int_0^L [\Phi]_{\theta j}^T \cdot [\Phi]_{\theta j} dy
\end{aligned}$$

## **Bibliographie :**

---

1. Adany, S., (2004). *Buckling mode classification of members with open thin-walled cross sections by using the finite strip method*. Research Report, Johns Hopkins University.
2. Adany, S., and B.W. Schafer, (2006a). Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation. *Thin-Walled Structures*, 44, 563–584.
3. Adany, S., and B.W. Schafer, (2006b). Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples. *Thin-Walled Structures*, 44, 585–600.
4. Ashraf, M., Gardner, L., and Nethercot, D.A.(2006). “Strength Enhancement of the corner. *Region of Stainless Steel Cross-Sections?*” *Journal of Constructional Steel Research*, 61(1), 37-52.
5. American Iron and Steel Institute, (AISI), (2004b). *Commentary on Appendix 1 Design of Cold-formed Steel Structural Members with the Direct Strength Method*. American Iron and Steel Institute, Washington, DC.
6. Bureau. Flambement par torsion et par flexion torsion d’une barre comprimé. *Revue construction métallique*(cticm Rubrique).
7. Batista, E.M., (1989). *Etude de la stabilité des profils à parois minces et section ouverte de type U et C*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
8. Boumechra, N., (1994). *Etude du raidissage longitudinal d’un panneau métallique soumis à une compression, flexion et cisaillement par la méthode des splines bandes finies*. Mémoire de Magister, U.S.T.O, Oran.
9. BuiHung .C.( 2008). *Analyse Statique du comportement des structures à parois mince par la méthode des éléments finis et des bandes finies de type plaque et coque surbaissée déformables en cisaillement*. Thèse de doctorat, école supérieur du Vietnam
10. Camotim, D., and R. Gonçalves, (2003). *GBT-based local and global buckling analysis of C-section and RHS stainless steel columns*. *The Steel Construction Institute*, 82-92.
11. Cheung, M.S., G. Akhras, and W. Li, (1999). Thermal buckling analysis of thick anisotropic composite plates by finite strip method. *Structural Engineering and Mechanics*, 7 (5).

## **Bibliographie :**

---

12. Cheung, Y.K. (1976). *Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon Press, New York.
13. Cheung, Y.K., (1997). *Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon Press, New York.
14. Comité Européen de Normalisation (CEN), (1996). *Eurocode 3: design of steel structures, part 1.3: general rules. Supplementary rules for thin gauge members and sheeting*. ENV 1993-1-3.
15. Davies, J.M., (2000). Recent Advances in cold formed steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 55, 267-288.
16. Davies, J.M., and P. Leach, (1992). Some application of generalised beam theory. *11<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, Missouri, 479-501.
17. Davies, J.M., and P. Leach, (1994). First-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31, 187-220.
18. Davies, J.M., P. Leach, and D. Heinz, (1994). Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31, 221-241.
19. Desmond, T.P., T., and Winter, G. (1981). Edge Stiffeners for Thin-Walled Members. *Journal of the Structural Division*, 107(ST2), 329-353.
20. Dinis, P.B., D. Camotim, and N. Silvestre, (2006). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary branched open sections. *Thin-Walled Structures*, 44, 20-38.
21. Djafour, M., (2007), A. Megnounif, and D. Kerdal, (1999). Elastic stability of built-up columns using the spline finite strip method. *6th International Colloquium on stability and ductility of steel structures SDSS'99*. Timisoara, Romania, 9-11 Septembre 1999, Elsevier Science Ltd, Oxford, 477-484.
22. Djafour, M., A. Megnounif, and D. Kerdal, (2001). The compound spline finite strip method for the elastic stability of U and C built-up columns. *International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation (SEMC 2001)*. Cape Town, south Africa, April 2-4 2001, Elsevier Science Ltd, Oxford, 836-842.

## **Bibliographie :**

---

23. Djafour, M. et AL (2010). *A constrained finite strip method for open and closed cross-section members*. *Thin walled Structure* 48(2010)955-065.
24. Dubina, D., (2001). The ECBL approach for interactive buckling of thin-walled steel members. *Steel and Composite Structures*, 1, 75-96.
25. Fan, S.C., and Y.K. Cheung, (1983). Analysis of shallow shells by spline finite strip method. *Engineering Structures*, 5, 255-262.
26. Gjelsvik, A., (1990). Buckling of built-up columns, with or without stay plates. *Journal Engineering Mechanics*, ASCE. 116(5)
27. Gonçalves, R., and D. Camotim, (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers and Structures*, 82, 1473-1484.
28. Hancock, G.J. (1978). Local, Distortional and Lateral Buckling of I-Beams. *Journal of the Structural Division*, ASCE. 104(11)
29. Hancock, G.J. (1997). Design for Distortional Buckling of Flexural Members. *Thin-Walled Structures*, 27(1), 3-12.
30. Hancock, G.J., (2003). Cold-formed steel structures, review article. *Journal of Constructional Steel Research*, 59, 473-487.
31. Huang et Al. (2011). Numerical investigation and design of thin-walled complex section steel columns *Zhejiang Univ Sci (Appl Phys & Eng)* 12(2), 131-138.
32. Johnston, B. G., (1971). Spaced steel columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE. 95(5).
33. G.M. Phillips. *Interpolation and Approximation by polynomials* (2003), mathematical Institute, University of St. Andrews.
34. Kerdal, D., M. Djafour, and A. Megnounif, (1995a). Stabilité élastique des profils en C soumis à la compression. *Revue Algérie Equipement*, 21, 18-22.
35. Kerdal, D., M. Djafour, and A. Megnounif, (1995b). Etude du voilement de profils en U soumis à la compression. *Revue Algérie Equipement*, 22, 7-11.

## **Bibliographie :**

---

36. Kesti, J., and J.M. Davies, (1999). Local and distortional buckling of thin-walled short columns. *Thin-Walled Structures*, 34, 115-134.
37. Key, P.W., and G.J. Hancock (1993). A Finite Strip Method for the Elastic-Plastic Large Displacement Analysis of Thin-Walled and Cold-Formed Steel Sections. *Thin Walled Structures*, 16, 3-29.
38. Kim, K.H., and C.K. Choi, (2004). A non-symmetric non-periodic B3-spline finite strip method. *Structural Engineering and Mechanics*, 18 (2).
39. Kwon, Y.B., and G.J. Hancock, (1992). Strength Tests of Cold-Formed Channel Sections undergoing Local and Distortional Buckling. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1992, 117(2), pp 1786 – 1803.
40. Lau, S.C. and G.J. Hancock, (1985). *Buckling of thin flat walled structures by a spline finite strip method*. Research report N°R487, University of Sidney, Australia.
41. Lau, S.C., and G.J. Hancock, (1987). Distortional Buckling Formulas for Channel Columns. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1987, 113(5), pp 1063 – 1078.
42. Lau, S.C and G.J. Hancock, (1988). *Inelastic Buckling of Channel Columns in the Distortional Mode*. Research report N°R578, University of Sidney, Australia.
43. Manfred A.Hirt,RolfBez. Construction métallique notions fondamentales et methods de dimensionnements.
44. Marc landowniki, Bertrand lemoine(2005).Concevoir et construire en acier. Edition Aecelor.
45. Megnounif A.(2007). Etude de la stabilité non linéaire des profils formés à froids. These de Doctorat, université de Tlemcen, Algérie.
46. MihaiNedelcu,(2010).GBT formulation to analyse the behavior of thin-walled members with variable cross-section. *ThinWalled Structure*,48,629-638.
47. NatasyaNgJiaWeyn ,NarayananSambuPotty,Kurian V John(2008). *Prediction of compression strength of cold formed steel columns*. 2<sup>nd</sup> EngeneeringConference on SustainableEngeneering. Infrastructures Development&Managment, Malaysia, ENCON 2008-271.

## **Bibliographie :**

---

48. Rondal, J., (1984). *Contribution à l'étude de la stabilité des profils creux à parois minces*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
49. Rondal, J., (2000). Cold formed steel members and structures, general report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55, 155-158.
50. Schafer, B.W., (1997). *Cold-Formed Steel Behavior and Design: Analytical and Numerical Modeling of Elements and Members with Longitudinal Stiffeners*. Ph.D. Thesis. Cornell University. Ithaca, New York.
51. Schafer, B.W., (2000). *Distortional buckling of cold-formed steel columns*. Final report, AISI.
52. Schafer, B.W., (2002). *Design manual for Direct Strength Method of cold-formed steel design*. Draft - January 7, 2002, AISI.
53. Schafer, B.W., (2006). *CUFSM: elastic buckling analysis of thin-walled members by finite strip analysis, CUFSM v2.6*. <<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>> visited on 2 oct. 2006.
54. Schafer, B.W., and S. Adany, (2006). Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. *18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, October 26-27, 2006, Orlando, Florida.
55. Schafer, B.W., and T. Peköz, (1998). Direct strength prediction of cold formed steel members using numerical elastic buckling solutions. *2<sup>nd</sup> International conference on thin-walled structures: Thin-walled structures, research and development*. Singapore, Elsevier Science Ltd, Oxford, 137-144.
56. Schafer; B. W., A. Sarawit; and T. Peköz (2006). Complex Edge Stiffeners for Thin-Walled Members. *Journal of structural engineering*, ASCE, 123 (2), 212-226.
57. Schardt, R., (1989). *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Springer, Berlin. (in German).
58. Sharp, M.L., (1966). Longitudinal Stiffeners for Compression Members. *J. of the Structural Div.*, ASCE, 92(ST5), pp. 187-211.

## **Bibliographie :**

---

59. Silvestre, N., and D. Camotim, (2002a). First Order Generalized Beam Theory for Arbitrary Orthotropic Materials. *Thin Walled Structures*, 40(9), 755-789.
60. Silvestre, N., and D. Camotim, (2002b). Second Order Generalised Beam Theory for Arbitrary Orthotropic Materials. *Thin Walled Structures*, 40(9), 791-820.
61. Sputo, T., and J. Tovar, (2005). Application of direct strength method to axially loaded perforated cold formed steel studs: Longwave buckling. *Thin-Walled Structures*, 43, 1852-1881.
62. Sridharan, S., (2000). Numerical simulation and computational models for coupled instabilities. *3<sup>rd</sup> International Conference on coupled instabilities in metal structures CIMS'2000*. Lisbon, Portugal. 21-23 Septembre 2000. Imperial College Press, London.
63. Von Karman, T., E. E. Sechler, and L. H. Donnell, (1932). The Strength of Thin Plates in Compression. *Transactions, ASME*, vol. 54, APM 5405.
64. Z.Li, B.W.Schafer. Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. Twentieth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. Saint Louis, Missouri, USA, November 3&4, 2010.
65. Wang Chungang et al (2007). Experiments o channel columns with inclined simple edge stiffeners under compression loading. *Front. Archit. Civ. Eng. China*, 1(3):312-321.
66. Winter, G., (1947). Strength of Thin Steel Compression Flanges. *Transactions of ASCE*, Paper No. 2305, Trans., 112, 1.
67. Yu, C., (2005). *Distortional Buckling of Cold-Formed Steel Members in Bending*. Ph.D. Thesis, Johns Hopkins University, Baltimore, MD.
68. Yu, W.W., (2000). *Cold-Formed Steel Design*. John Wiley & Sons, Inc.

## Résumé

L'utilisation des structures métalliques ne cesse de croître malgré leur mode de défaillance et de déformation compliqué.

Sous une charge compressive les profilés formés à froids (P.F.F) peuvent subir plusieurs types d'instabilité (locale(L)- distorsionnelle (D)- globale(G) ou d'autres) d'où le recours aux méthodes numériques pour déterminer leurs charges critiques devient indispensable.

L'estimation de la charge critique élastique correcte est indispensable pour la procédure de dimensionnement et la conception et le design et afin de faciliter à l'ingénieur la détermination de cette charge critique utile, Adany et Schafer [1,2,3] ont présenté une nouvelle méthode (CFSM) capable de classer les différents modes d'instabilité en utilisant la méthode de bande finis(FSM).

Comme la FSM, la méthode des splines bandes finis (SFSM) est développée pour analyser le comportement des plaques et les membres prismatiques, elle utilise une fonction spline cubique pour l'interpolation longitudinal et réussit à produire des résultats plus efficaces que la méthode des éléments finis(FEM) et la FSM et en plus, prend en compte les différentes conditions aux limites.

Le but de ce travail est la proposition d'une technique de classification des modes d'instabilités des profilés formés à froids en utilisant la méthode des splines bande finis en se basant sur les hypothèses de la GBT (Generalized Beam Theory), pour un début le domaine couvert par l'étude est le domaine distortional-global(GD), un mode qui présente des difficultés et un manque d'information sur la cinématique et le mécanisme de déformation.

## Abstract

The use of the metal structures is growing inspite of their complicated mode of failure and deformation. Under a compressive load, the thin-walled members have can undergo different types of instability (local (L) - distortional (D) - global(G) or others) from where the recourse to numerical methods to determine their critical loads becomes essential. In order to facilitate to the engineer the determination of this useful critical load for the design, Adany and Schafer [1,2,3] presented a new method (CFSM) able to classify the various modes of instability by using the finite strip method (FSM).

Like the FSM, the Spline Finite Strip Method(SFSM) developed to analyze the behaviour of the plates and the prismatic members, it uses a cubic spline function for the interpolation longitudinal and succeeds in producing results more effective than the Finite Element Method (FEM) and the FSM. Moreover it takes into account different boundary conditions.

The final objective of this work is the proposal of a technique that classifies the instability modes of the thin-walled members under compressive loads by using the SFSM and while being based on the assumptions of the GBT (Generalized Beam Theory), and one concentrated primarily (for a beginning) on the mode GD (Distortionnal and Global) a mode which presents difficulties and a lack of information on the kinematics and the mechanism of deformation.

## ملخص

استخدام الهياكل المعدنية لا يزال ينمو على الرغم من فشلها في أوضاع معقدة و التشوه الذي يمكن أن يتعرض إليه. تحت تأثير الضغط يمكن أن تخضع أقسام الهياكل المعدنية لعدة أنواع من عدم الاستقرار الانعاج (Local - Distortionnel - Global) أو غيرها. حيث استخدام الطرق الرقمية لتحديد قوة الحمل الحرجة ضروري و يصبح لا غنى عنه. للتسهيل للمهندس حساب هذه قوة الحمل الحرجة اللازمة للتصميم والبناء، [1,2,3] Adany, Schafer، قدما طريقة جديدة (CFMS) قادرة على تصنيف أنماط مختلفة من عدم الاستقرار باستخدام طريقة (SFSM). مثل (FSM) طريقة (SFSM) تم تطويرها لتحليل و دراسة سلوك الهياكل، حيث يستخدم دالة (Spline) وتمكننا من تحقيق نتائج أكثر فعالية مثل لطريقة (FEM) و (FSM)، وبالإضافة إلى ذلك، يأخذ بعين الاعتبار شروط الحدود المختلفة للبناء. والهدف من هذا العمل هو اقتراح تقنية جديدة لتصنيف أنماط عدم الاستقرار للهياكل المعدنية المصنوعة تحت تأثير درجة حرارة باردة، باستخدام طريقة (SFSM) و ذلك بالاستناد إلى افتراضات مأخوذة من نظريته (GBT)، وقد ركزنا أساسا و كبدائية دراسة نوع عدم الاستقرار (Global-Distorsionnel)، الذي يشكل الصعوبات وعدم وجود معلومات كافية عليه.