

Doc/510-02/02



THESE DE DOCTORAT D'ETAT

PRESENTEE
A
L'UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMEN

POUR L'OBTENTION
DU
DIPLÔME
DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par

Djamel BENMANSOUR

Sujet

"Problèmes d'estimation par rétrécisseurs de la moyenne
d'une loi gaussienne en dimension supérieure"

Soutenue à Tlemcen le 16 Décembre 2007 devant le jury composé de:

GHOUALI Nouredine
BOSQ Denis
PUMO Besnik
MOHDEB Zahir
DIB Hacem
BENABADJI Noury
MOURID Tahar

Président
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Invité
Directeur de Thèse

Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Professeur Université Paris 6
Maître De Conférences INH Université d'Anger
Professeur Université Mentouri Constantine
Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Professeur Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

2976
03 FEV. 2008

A ma mère, ma femme et mes enfants Asma , Mohammed Benali et Meriem.

Remerciements

Nous remercions le professeur Denis Bosq pour son aimable disponibilité ses conseils et l'aide qu'il nous a prodigués.

Nous remercions également le professeur Dominique Fourdrinier pour ses remarques pertinentes.

Nous remercions également le professeur et recteur de l'université de Tlemcen, Noureddine Ghouali d'avoir eu l'ambilité de bien vouloir présider le jury de notre thèse.

Nous exprimons aussi nos vifs remerciement aux membres examinateurs de notre travail, Messieurs les professeurs Besnik Pumo, Zahir Mohdeb et Hacene Dib .

Nous exprimons aussi notre gratitude à notre invité et collaborateur le professeur Noury Benabadji, d'avoir bien voulu nous honorer de sa présence lors de notre soutenance .

Et bien entendu nous remercions vivement et exprimons toute notre reconnaissance à notre directeur de thèse , le professeur Tahar Mourid , qui nous a encouragé, soutenu et aidé à finaliser notre travail.

Table des Matières

Présentation générale.....	4
Chapitre I	
Rappels et généralités.....	
I.1 Introduction.....	13
I.2 Estimateurs Minimax à rétrécisseurs uniformes.....	14
I.3 Estimateurs à rétrécisseurs différentiables.....	15
a) Introduction.....	16
b) Egalité de Stein.....	16
I.4 Estimateurs Minimax à rétrécisseurs ridges.....	17
a) Introduction.....	20
b) Modèle.....	20
I.5 Domination d'estimateurs à rétrécisseurs sur l'estimateur de James-Stein.....	21
a) Amélioration de l'estimateur de James-Stein par troncature.....	21
b) Amélioration de l'estimateur de James-Stein par des rétrécisseurs polynômiaux.....	23
c) Estimateurs de J.Berger et M.E.Bock.....	25
I.6 Conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein.....	28
I.7 Estimateurs de P. Shao et W. E. Strawderman.....	29
Chapitre II	
Estimateurs généralisés de James-Stein.....	35
II.1 Introduction.....	36
a) Présentation.....	36
b) Notations.....	37
c) Principaux résultats.....	38
II.2 Introduction du modèle.....	39
a) Modèle.....	39
b) Définition générale.....	40
c) Cas particuliers.....	40
II.3 Calcul du risque des estimateurs de James-Stein généralisés.....	41
a) Les composantes de X sont indépendantes et identiquement distribuées.....	41
b) Cas particulier où le pôle est l'origine.....	42
c) Condition pour que le risque soit fini.....	43
II.4 Estimateurs de James-Stein généralisés de type (1,2).....	44
a) Généralités.....	44
b) Cas σ^2 connu.....	47
c) Cas σ^2 inconnu.....	48

II.5 Estimateurs de James-Stein généralisés de type (4).....	49
a) Cas $\rho(w) = w^{r-1}$	49
b) Cas σ^2 connu.....	51
c) Cas σ^2 inconnu.....	54
II.6 Amélioration des estimateurs de James-Stein généralisés type (2).....	58
a) Troncature inférieure.....	58
b) Troncature supérieure.....	60
c) Double troncature	61
Chapitre III	
Classe d'estimateurs avec rétrécisseur de la moyenne d'une loi gaussienne.....	62
III.1 Préliminaires et Généralités.....	63
III.2 Domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein.....	69
III.3 Domination de l'estimateur primitif de James -Stein.....	78
III.4 Conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein	82
III.5 Simulations.....	83
III.6 Généralisation au cas de l'échantillon.....	90
Appendice	94
Conclusion	105
Bibliographie	106
Annexe	109

Présentation Générale

L'estimation de la moyenne θ d'une variable aléatoire de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$ dans R^p , I_p est la matrice unité, a connu de nombreux développements depuis les articles de C. Stein [22]. et W. James et C. Stein [15] Beaucoup de travaux et généralisations, ont été menés notamment par C. Judge et M. Box [16], D. Cellier et D. Fourdrinier [12], J. O. Berger et M. E. Bock [9], D. Benmansour et A. Martin [4], Y. Maruyama [18], Marvin. H. J. Gruber [14], P. Shao et W. E. Strawderman [21] etc...

Dans ces travaux, il s'agit essentiellement d'estimer la moyenne d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$ dans R^p par des estimateurs dits avec "rétrécisseurs" déduits, de la moyenne empirique qui se sont avérés meilleurs en coût quadratique que la moyenne empirique. Le but en général, est la détermination d'une classe d'estimateurs à rétrécisseurs qui serait minimax et optimale en rapport avec le coût quadratique.

Plus précisément, si X représente une observation ou un échantillon de la loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$, il s'agit d'estimer θ par un estimateur $\delta(X)$ relativement au coût quadratique :

$$L(\delta, \theta) = \|\delta(X) - \theta\|_p^2$$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme usuelle dans R^p . Nous associons sa fonction de risque :

$$R(\delta, \theta) = E_\theta(L(\delta, \theta)) = \int_{R^p} \frac{(\|\delta(x) - \theta\|_p^2)}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{\|x - \theta\|_p^2}{2}\right) dx$$

Ainsi si nous prenons comme exemple l'estimateur classique des moindres carrés, $\delta(X) = X$, il est minimax et sa fonction de risque est égale p : $R(\delta, \theta) = E_\theta(\|X - \theta\|_p^2) = \text{Var}(X)$. Ainsi tout estimateur dominant l'estimateur des moindres carrés serait lui aussi minimax.

W. James et C. Stein [15], ont introduit une classe d'estimateurs $\delta(X)$, équivariants relativement au groupe G des transformations orthogonales (ie pour toute matrice orthogonale Γ , $\Gamma\delta(X) = \delta(\Gamma X)$), de la forme :

$$\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right)X \tag{0.1}$$

où $g(u)$ est une application réelle, et la quantité $\xi(u) := 1 - \frac{g(u)}{u}$ est appelée rétrécisseur. Ils exhibent ensuite un estimateur dominant l'estimateur des moindres carrés $\delta(X) = X$ dès que la dimension de l'espace des observations $p \geq 3$. De plus ils proposent une forme explicite d'un estimateur, améliorant $\delta(X) = X$, noté :

$$\phi_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right)X$$

avec $\xi(u) = 1 - \frac{p-2}{u}$.

Cet estimateur est appelé estimateur primitif de James-Stein. Cette forme d'estimateur ayant un rétrécisseur débordant négativement en dehors de l'intervalle $[0, 1]$, A. J. Baranchik [2] propose la partie positive de l'estimateur de James-Stein notée:

$$\phi_{JS}^+(X) = \max\left(0, 1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right)X$$

où cette fois $\xi(u) = \max\left(0, 1 - \frac{p-2}{u}\right)$. Ainsi en éliminant cet inconvénient il obtient un estimateur $\phi_{JS}^+(X)$ dominant l'estimateur primitif de James-Stein $\phi_{JS}(X)$. En fait intuitivement le rétrécisseur $\xi(u)$ doit rester dans $[0, 1]$ pour tout u réel. D'autre part, d'autres améliorations de classes d'estimateurs avec $\xi(u) \geq 1$ ont été étudiées par troncature supérieure de $\xi(u)$ dans la thèse de troisième cycle de D. Benmansour et A. Martin [4] p 62-64).

Notons aussi que quand les estimateurs proposés ont des rétrécisseurs à valeurs dans R , c'est à dire qu'on applique le même facteur de rétrécissement à toutes les composantes de l'estimateur des moindres carrés $\phi_0(X)$ ($= X$ dans ce cas), on les appellera estimateurs à rétrécisseurs "uniformes". Dans le cas où les rétrécisseurs sont à valeur dans R^p , et sont donc à valeurs différentes par composante, on les appellera estimateurs à rétrécisseurs "ridges". On trouvera dans Marvin. H. J. Gruber [14] (pp. 227-305) un excellent résumé sur les estimateurs à rétrécisseurs "ridges", avec des simulations montrant numériquement les dominations de ces derniers sur ϕ_0 .

Enfin, quand les rétrécisseurs de certains estimateurs sont différentiables, C. Stein [23], à donné des conditions de domination de ces estimateurs sur ϕ_0 . Nous traiterons le cas classique de l'estimation de la moyenne θ sans aborder le cas Bayésien où il existe une littérature abondante sur le sujet. Une étude du cas Bayésien étant traitée dans la thèse de Y. Maruyama[18], D. Benmansour et A. Martin [5], Marvin. H. J. Gruber [14].etc...

Le plan de notre thèse est le suivant :

► **Dans le chapitre I**, nous présentons une synthèse des travaux sur les estimateurs à rétrécisseurs de la moyenne θ , d'une loi normale $N_p(\theta, I_p)$. Nous rappelons un résultat de minimaxité de l'estimateur primitif de W. James et C. Stein [15]. Une première extension de ce résultat, a été donnée par A. J. Baranchik [3], pour des estimateurs de la forme (0.1). En effet J. Baranchik [3] démontre que pour toute fonction réelle g , positive non décroissante et majorée par $p-2$, l'estimateur $\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right)X$ est minimax. W. E. Strawdermann [24] étend ce résultat à une autre fonction g , avec une borne supérieure égale à $2(p-2)$. Une extension de ce résultat, quand la variance de X est inconnue, est dans la thèse de D. Benmansour et A. Martin [4], que nous rappelons dans le chapitre II. Une égalité fondamentale établie par C. Stein [23] : si $Y \sim N(\nu, 1)$ et $g : R \rightarrow R$ une fonction différentiable telle que: $E[|g'(Y)|] < \infty$, alors $E[g(Y)(Y - \nu)] = E[g'(Y)]$, appelée égalité de Stein. Pour des estimateurs de la forme générale $\phi_g(X) = X + g(X)$, nous donnons le résultat de C. Stein [23], à savoir : si $g(x)$ est une solution de l'inéquation différentielle suivante :

$$\left[\|g(x)\|^2\right] + 2 \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x) \right] \leq 0$$

alors $\phi_g(X) = X + g(X)$ est un estimateur minimax. Nous rappelons aussi un résultat de B. Efron and C. Morris [13], obtenu pour les estimateurs à rétrécisseurs uniformes $\delta_g(X)$ donnés par la formule (0.1), où g est une fonction réelle différentiable et soumise à la condition : si $g(u)$ est solution de l'inéquation différentielle

$$g(u) \frac{(2(p-2) - g(u))}{u} + 4g'(u) \geq 0$$

alors $\delta_g(X) = (1 - g(\|X\|^2)/\|X\|^2)X$ est minimax.

Nous présentons ensuite une classe d'estimateurs à rétrécisseur "ridges" proposée dans le travail de D. Cellier et D. Fourdrinier [12]. Leur modèle choisi est plus général ie $X \sim N_n(\theta, \sigma^2 V)$ ainsi qu'une fonction de coût

$$L_{\sigma^2 Q}(\phi; \theta) = \frac{t(\phi(X) - \theta)Q(\phi(X) - \theta)}{\sigma^2}$$

où Q est une matrice positive pas nécessairement, définie positive. Ils définissent un estimateur de la forme :

$$\phi_h(X) = \phi_0(X) - h[\sigma^{-2t}\phi_0(X)B\phi_0(X)]C(\phi_0(X))$$

où B est une matrice symétrique définie positive sur Θ (espace des paramètres), C un endomorphisme de Θ et h une application de R^+ dans R^+ . Ils obtiennent alors une condition de minimaxité de $\phi_h(X)$ sur la fonction h qui est, si on note:

$$\alpha = \frac{2[\text{tr}(VQC) - 2\text{pgvp}(VQC)]}{\text{pgvp}(QC^2B^{-1})}$$

où pgvp signifie la "plus grande valeur propre", sous la condition l'application $t \rightarrow th(t)$ est croissante et majorée par α , alors $\phi_h(X)$ est minimax, quand σ^2 est supposé connu (une condition similaire est obtenue quand σ^2 est inconnu). Les auteurs dans [12], obtiennent avec les estimateurs à rétrécisseurs "ridges", des conditions de domination de l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 , similaires à celles obtenues pour un estimateur à rétrécisseur "uniforme", notamment pour les estimateurs de W.E. Strawdermann [24].

Nous donnons ensuite des résultats de domination de certains estimateurs sur l'estimateur primitif de James-Stein noté $\phi_{JS}(X)$. Nous rappelons d'abord un résultat de domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein noté $\phi_{JS}^+(X)$ sur ϕ_{JS} établi par A. J. Baranchik [2]. Une autre forme d'estimateurs à rétrécisseur de type polynômiale, donnée par Tze Fen Li and Wen Hou Kuo [26] est notée comme suit:

$$\phi_{TZ,c}(X) = \phi_{JS}(X) + \frac{cX}{\|X\|^r} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{cX}{\|X\|^r}\right)X$$

où c et r sont réels. Nous rappelons un théorème établi dans [26], de domination de $\phi_{TZ,c}$ sur ϕ_{JS} quand $2 < r < \frac{p+2}{2}$ et $c = \tilde{c} = (r-2)2^{\left(\frac{r-2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{p-r}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{p-2r+2}{2}\right)$. Les auteurs dans [26] proposent ensuite par récurrence une autre forme d'estimateurs à rétrécisseur de type polynômiale comme suit : Ils prennent $r = 4$, d'où $\tilde{c} = 2(p-6)$. Donc

$$\phi_{TZ,2(p-6)} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{2(p-6)}{\|X\|^4}\right)X$$

Ainsi pour $p > 6$, $\phi_{TZ,2(p-6)}$ domine ϕ_{JS} . Et pour $p > 10$, ils donnent le principe de construction de $\phi_{TZ,\tilde{d}}$.

$$\phi_{TZ,2(p-10)^2} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{2(p-6)}{\|X\|^4} + \frac{2(p-10)^2}{\|X\|^6} \right) X$$

où $\tilde{d} = 2(p-10)^2$. Les auteurs dans [26] démontrent alors que $\phi_{TZ,2(p-10)^2}$ domine $\phi_{TZ,2(p-6)}$ qui domine bien entendu ϕ_{JS} etc... Nous présentons quelques simulations montrant les gains des fonctions de risque des uns par rapport aux autres.

Nous présentons ensuite des résultats généraux sur une classe particulière d'estimateurs à rétrécisseurs ridges, proposés par J. Berger et M. E. Bock [9]. Ils notent $\delta_\Phi(X) = \Phi(X)X$ et posent :

$$\delta_{\Phi,\Psi}(X) = (\Phi(X) + \Psi(X))X$$

où $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des matrices $p \times p$. Les auteurs dans [9] considèrent dans leur article un modèle plus général. Il s'agit de l'estimation de la moyenne $\theta \in R^p$ d'une variable aléatoire $X \in R^p$ ayant une densité de probabilité de la forme $f(x-\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur R . Pour tout $x \in R^p$, ils notent : $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$ et une fonction $g : R^p \rightarrow R^p$ est dite fonction symétrique par coordonnée si

$$g(x_i, x^i) = g(-x_i, x^i) \quad \forall x_i, x^i \text{ et } 1 \leq i \leq p$$

La densité de probabilité $f(x-\theta) = (f(x_i - \theta_i, x^i - \theta^i))$ est dite unimodale par coordonnée si $f(x_i - \theta_i, x^i - \theta^i)$ est unimodale comme fonction de x_i pour tout x^i , $1 \leq i \leq p$. Un résultat de domination de $\delta_{\Phi,\Psi}(X)$ sur $\delta_\Phi(X)$ est obtenu (Th.1 [9] voir énoncé Th 1.16 Chap I) sous les conditions suivantes :

- 1) $f(x-\theta)$ est unimodale symétrique par coordonnée
- 2) $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des matrices diagonales dont les éléments notés $\phi_i(x)$ (respectivement $\psi_i(x)$) vérifient :
 $\psi_i(x)$ est une fonction symétrique par coordonnée et non négative, $\forall i, 1 \leq i \leq p$ et

$$\sum_{i=1}^p [\phi_i^2(x) - \{\phi_i(x) + \psi_i(x)\}^2 x_i^2] \geq 0$$

et ils déduisent un corollaire important (Corollaire 2 [9]) que nous utiliserons par la suite pour montrer l'inadmissibilité des estimateurs de P. Shao et W. E. Strawderman [21]. Le résultat du corollaire (voir énoncé 1.17 chap I) est le suivant : en notant les ensembles $W_i = \{x \in R^p : \phi_i(x) < 0\}$ et les fonctions symétriques par coordonnée $t_i : R^p \rightarrow [1, 2]$, $1 \leq i \leq p$, et si $f(x-\theta)$ et $\Phi(x)$ vérifient les conditions du Théorème 1.16 et $\phi_i(x)$ est symétrique par coordonnée, $1 \leq i \leq p$, alors l'estimateur dont les coordonnées sont définies par

$$\delta_{i,\phi_i}^*(X) = \{1 - t_i(X)I_{W_i}\} \phi_i(X)X_i$$

domine δ_Φ . D'autre part, comme δ_Φ^* est un estimateur à rétrécisseur positif, et si $t_i \equiv 1$, $1 \leq i \leq p$, nous retrouvons naturellement sa partie positive δ_Φ^+ . Ils déduisent alors que δ_Φ^+ domine δ_Φ . Enfin, à l'aide du Théorème 1.16, nous démontrons élémentairement la domination de ϕ_{JS}^- sur ϕ_{JS} , établie par A. J. Baranchik [2], dont la démonstration était plus

compliquée. Nous rappelons ensuite les conditions nécessaires de domination de l'estimateur $\delta_g(X)$ donné dans (0.1) avec g différentiable, sur ϕ_{JS} , formulées par Y. Maruyama et W. E. Strawderman [20]. Ils notent

$$R(\phi_{JS}, \theta) - R(\delta_\phi, \theta) = E_\theta(\xi_g(\|X\|^2))$$

avec

$$\xi_g(u) = -\frac{\{g(u) - (p-2)\}^2}{u} + 4g'(u)$$

et obtiennent des conditions nécessaires sur $g(u)$ et $\xi_g(u)$ pour que $\delta_\xi(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$. A savoir : si ξ_g est bornée et si l'estimateur δ_g domine l'estimateur ϕ_{JS} , alors pour tout $u \geq 0$, il existe $u_0 > u$ tel que $\xi_g(u_0) \geq 0$. Ils en déduisent un corollaire avec les conditions suivantes: si la fonction $\xi(u)$ est bornée et absolument continue et si l'estimateur δ_g domine l'estimateur ϕ_{JS} de James-Stein alors :

i) pour tout $u \geq 0$ il existe $u_0 > u$ tel que $g'(u) \geq 0$

ii) si $\lim_{u \rightarrow +\infty} u g'(u)$ existe alors elle est nulle

iii) si $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u)$ existe et $\lim_{u \rightarrow +\infty} u g'(u) = 0$ alors cette limite doit être $p - 2$.

Les auteurs dans [20] donnent un autre théorème dans le cas où g est deux fois différentiable, avec les conditions suivantes: les fonctions $g(u)$ et $\frac{g(u)}{u}$ sont bornées, $\xi'(u) = o(\frac{1}{u})$ et $\xi''(u) = o(\frac{1}{u^2})$. Si l'estimateur δ_g domine l'estimateur ϕ_{JS} de James-Stein alors $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = p - 2$.

Notons que ϕ_{JS}^+ et les estimateurs polynômiaux de Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [26] qui dominent ϕ_{JS} , ne satisfont pas les conditions nécessaires de domination de ϕ_{JS} .

Enfin nous rappelons les résultats de domination de ϕ_{JS}^+ , établis par G. G. Judge et M. E. Bock [16] et P. Shao et W. E. Strawderman [21]. Dans Marvin. H. J. Gruber [14] (p307 , p370) on trouve une étude numérique détaillée sur une classe d'estimateurs proposés par les auteurs [16], dans laquelle des formes d'estimateurs sont notées :

$$\phi(X_i) = (1 - u_1)I_{[0,1]}(u_1)X_i + a_1(1 - u_1)I_{[1,\alpha]}(u_1)X_i + a_2(1 - u_1)I_{[\alpha,+\infty]}(u_1)X_i, \quad 1 \leq i \leq p$$

où I_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A .

L'étude montre qu'aucun de ces différentes formes d'estimateurs ne domine l'estimateur ϕ_{JS}^+ , uniformément en $\theta \in R^p$. P. Shao et W. E. Strawderman [21] généralisent d'abord l'égalité de Stein (donnée par (1.8)) par un résultat fondamental (Lemme 1 dans [21] voir aussi énoncé Lemme 1.24 Chapitre I) et ensuite proposent deux classes d'estimateurs dominant uniformément en θ , $\phi_{JS}^+(X)$. La première étant de la forme

$$\delta(a, g, X) = \phi_{JS}^+(X) - \frac{ag(\|X\|^2)}{\|X\|^2} XI_{(p-2 \leq \|X\|^2 \leq p)}$$

où a est un réel , g est une fonction définie sur le compact $[p-2, p]$, (avec rappelons le $p \geq 3$) linéaire et symétrique autour du point $p-1$, telle que $g(p-2) = g(p) = 0$, $g'(p-2) < 0$ et $|g'(u)| \equiv 1$ p p sur $[p-2, p]$ (la courbe de g étant en forme de "W"). Ils construisent ensuite $g(u)$ sur des subdivisions dans l'intervalle $[p-1, p]$ et donnent des conditions sur le réel a pour que l'estimateur $\delta(a, g, X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$.

La deuxième classe est de la forme:

$$\delta(a, k, h, g, X) = \phi_{JS}^+(X) - a \left[\frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} I_{(\|X\|^2 \geq q)} + kh(\|X\|^2) I_{(\|X\|^2 < q)} \right] X$$

où a et k sont réels et g est une fonction continue, avec un graphe en forme de "W", définie sur $[q, +\infty[$, avec $g(q) = g(\infty) = 0$, et $p-2 < q < p-1$. De plus g est dérivable sauf en un certain nombre de points fini où il existe une dérivée à droite et à gauche et prenant des signes successivement positifs, puis négatifs (g est dite "piecewise" différentiable), et h une fonction continue, bornée, négative et définie sur $[0, q]$, telle que $|h(t)| < M$ et $h(q) = 0$ pour $p-2 < q < p-1$. Ils donnent ensuite des conditions sur les réels a et k pour que l'estimateur $\delta(a, k, h, g, X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$. Les deux classes d'estimateurs définies par P. Shao et W. E. Strawderman [21], sont inadmissibles étant donné qu'elles ne sont pas analytiques. Nous retrouvons ce résultat (Corollaire 3.18 chapitre III) que nous déduisons du Corollaire 1 de J. Berger et M. E. Bock [9] (voir Corollaire 1.17 dans le Chapitre I).

► **Dans le chapitre II.** Nous donnons un résumé succinct de diverses formes d'estimateurs à rétrécisseurs uniformes, qu'on appellera estimateurs de James-Stein généralisés, qui dominent l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 , et qui sont présentés dans la thèse de troisième cycle de D. Benmansour et A. Martin [4]. Les deux manuscrits [4] et [5] ont été publiés comme documents de travail au C.N.R.S (Equipe de recherche associée au C.N.R.S N° 900) dont les intitulés sont :

01 : D. Benmansour. Présentation dans les cadres classiques et Bayésien, des estimateurs de James-Stein généralisés. Document de travail - Nouvelle série 1984 -01 [6].

02 : D. Benmansour. et A. Martin Etude numérique des estimateurs de James-Stein généralisés de type polynomial. Document de travail - Nouvelle série 1984 -02 [7].

Les divers estimateurs proposés dominent tous, sous des conditions particulières l'estimateur des moindres carrés. Ils ne sont pas forcément comparables entre eux, sauf pour certains, que domine l'estimateur primitif de James Stein.

Le modèle proposé est plus général, puisque l'on considère qu'il s'agit d'estimer la moyenne d'une loi gaussienne multidimensionnelle de moyenne θ et une matrice de covariance $\sigma^2 \Sigma$, où $\theta \in \Theta$ (sous-espace de R^n de dimension p), ($3 \leq p < n$), Σ régulière connue et σ^2 suivant les cas connu ou inconnu.

Nous montrons dans la suite que pour un choix approprié de la fonction de coût, nous obtenons, à un facteur près, les mêmes résultats que pour un modèle simple ie $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$. La forme la plus générale de ces estimateurs est :

$$\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X) = \mu + [1 - \xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu)$$

où μ est appelé pôle, $\mu \in \Theta$ et il est choisi au préalable par le praticien. Notons que le choix de μ évite de rétrécir l'estimateur $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}$ vers 0 si ξ est proche de 1. Deux Lemmes (2.1 et 2.2) permettent de passer au modèle simple $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ avec un choix approprié de la fonction de coût, et $\mu = 0$. Ce qui réduit l'écriture de $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X)$ sous la forme

$$\phi_{\xi}^{(0)}(X) = [1 - \xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X))] \phi_0(X)$$

En observant que les variables aléatoires $X - \phi_0(X)$ et $\phi_0(X) - \mu$ sont gaussiennes

$N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma)$ indépendantes. Nous déduisons des formes particulières de $\phi_{\mu, \zeta}^{(0)}$, qui permettent de faciliter le calcul de leur fonction de risque.

De la forme générale précédente, on introduit pour des fonctions réelles η , ζ , ψ et ρ les estimateurs suivants:

$$\begin{aligned}\phi_{\mu, \eta, \zeta}^{(1)}(X) &= \mu + [1 - \eta(X - \phi_0(X))\zeta(\phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu) \\ \phi_{\mu, \psi}^{(2)}(X) &= \mu + [1 - \psi(X - \phi_0(X), \|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu)\end{aligned}\quad (0.2)$$

Aussi une combinaison de ces deux cas particuliers donne :

$$\phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}(X) = \mu + [1 - \eta(X - \phi_0(X))\rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu)$$

Nous formulons un Lemme (2.3) qui donne une condition nécessaire et suffisante de finitude du risque de $\phi_{\mu, \zeta}^{(0)}$, et donc de $\phi_{\mu, \eta, \zeta}^{(1)}$ et de $\phi_{\mu, \psi}^{(2)}$. Un autre Lemme (2.4) donne la finitude du risque de $\phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}$. Pour σ^2 connu, nous avons la minimaxité de $\phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}$ (Proposition 2.5) et nous retrouvons ainsi un résultat de W. E. Strawdermann [20]. Pour σ^2 inconnu, nous avons la minimaxité de $\phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}$ (Proposition 2.5), ce qui étend un résultat de [20], pour des rétrécisseurs de la forme $[1 - \eta(X - \phi_0(X))\rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)]$, sous des conditions sur η et ρ .

Comme cas particulier de $\phi^{(1,2)}$ on a :

$$\phi_{\mu, \rho, r}^{(3)}(X) = \mu + [1 - \sigma^{2(1-r)}\rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu)$$

où l'indice r est omis s'il est égal à 0, et r est un réel et σ^2 est connu. Si σ^2 est inconnu, $\phi^{(1,2)}$ s'écrit :

$$\phi_{\mu, \rho, r}^{(3)'}(X) = \mu + \left[1 - \left(\frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{n-p} \right)^{1-r} \rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2) \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

Une autre forme de $\phi^{(1,2)}$ est

$$\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}(X) = \mu + [1 - \eta(X - \phi_0(X))(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)^{r-1}] (\phi_0(X) - \mu)$$

Un lemme (Lemme 2.6) de condition de finitude du risque de $\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}$ est donné.

En combinant $\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}$ avec $\phi^{(3)}$ et $\phi^{(3)'}$ (c réel), donne avec σ^2 connu

$$\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}(X) = \mu + \left[1 - c \left(\frac{\sigma^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right)^{1-r} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

et pour σ^2 inconnu on a

$$\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)'}(X) = \mu + \left[1 - c \left(\frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{(n-p)\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right)^{1-r} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

Des conditions de finitude du risque de $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$, et la minimaxité de $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ pour $p \geq 3$ et $\frac{2-p}{4} \leq r \leq 0$ sont dans la Proposition 2.7. Le meilleur est obtenu pour $r = 0$ et $c = p - 2$. Ce qui correspond à l'estimateur primitif de James-Stein : $\phi_{JS} = \phi_{0, p-2}^{(3,4)}$. On poursuit la même démarche (Proposition 2.9) pour $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)'}$ (quand σ^2 est inconnu) en donnant des conditions de

finitude du risque de $\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)}$, et la minimaxité de $\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)}$ pour $p \geq 3$ et $\frac{2-p}{4} \leq r \leq 0$. Le meilleur est celui obtenu pour $r = 0$ et $c = \frac{(p-2)(n-p)}{n-p+2}$. C'est l'estimateur primitif adaptatif de James-Stein : $\phi_{JS} = \phi_{0, \frac{(p-2)(n-p)}{n-p+2}}^{(3,4)}$. Finalement nous présentons des résultats sur les estimateurs à rétrécisseurs obtenus par troncature inférieure (en 0) et supérieure (en 1). Rappelons l'estimateur ξ^+ obtenu par troncature inférieure de l'estimateur ξ .

$$\xi^+ = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi \leq 0 \end{cases}$$

Cette modification améliore les estimateurs de James-Stein généralisés donnés par (0.2). Une application $f : R^+ \rightarrow R^+$ est dite de classe C si pour tout h entier positif ou nul, elle vérifie l'inégalité suivante

$$\int_{R^+} f(w)(w-h)\chi_h^2(w)dw \geq 0$$

où χ_h^2 est la densité d'un Khi-deux à h ddl. Alors $\phi_{\mu,\psi^+}^{(2)}$ domine $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$ si l'application ψ définie dans (0.2) est telle que l'application $w \mapsto \psi^-(v, \sigma^2 w)$ est de classe C, pour tout v (Proposition 2.12). Un estimateur ξ_* obtenu par troncature supérieure de l'estimateur ξ est

$$\xi_* = \inf(\xi, 1) = 1 - (1 - \xi)^+$$

Alors l'estimateur $\phi_{\mu,\psi_*}^{(2)}$, obtenu par troncature supérieure de l'estimateur de James-Stein généralisé $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$, défini par (0.2), est uniformément meilleur que $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$ (Proposition 2.13). De même, la double troncature ψ_*^+ de ψ définie comme suit

$$\psi_*^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(v, w) > 1 \\ \psi(v, w) & \text{si } 0 \leq \psi(v, w) \leq 1 \\ 0 & \text{si } \psi(v, w) < 0 \end{cases}$$

appliquée à $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$ défini par (0.2) donne $\phi_{\mu,\psi_*^+}^{(2)}$ qui domine $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$.

► Dans le chapitre III, nous présentons une étude sur une classe particulière d'estimateurs à rétrécisseurs différentiables (Article paru dans le volume 51 - Fascicule 1-2 (2007) Revue des "Annales de l'ISUP", en octobre 2007, intitulé "Etude d'une classe d'estimateurs avec rétrécisseur de la moyenne d'une loi gaussienne") [8].

L'étude porte sur une classe particulière d'estimateurs proposés par J. Berger et M. E. Bock [9] de la forme :

$$\delta_{\phi, \psi}(X) = (\phi(\|X\|^2) + \psi(\|X\|^2))X \quad (0.3)$$

où la fonction ϕ sera soit $\phi_{JS}(X)$ ou $\phi_{JS}^+(X)$ et $\psi(\cdot)$ est une fonction différentiable assez régulière définie pour tout u dans R^+ et à valeurs dans R . Nous établissons deux lemmes fondamentaux (Lemmes 3.1 et 3.2), utiles pour le contrôle des différences de risques des estimateurs. Deux classes de fonctions ψ sont définies (ci-dessous) et nous déterminons des sous-ensembles paramétriques dans R^p dans le but que l'estimateur $\delta_{\phi, \psi}(X)$ domine la partie

positive $\phi_{JS}^+(X)$ de l'estimateur de James-Stein et donc de $\phi_{JS}(X)$. La classe d'estimateurs proposés, possède un rétrécisseur de la forme $\xi(u) = \phi(u) + \psi(u)$ qui n'est pas en général analytique et reste donc inadmissible. L'étude consiste à déterminer des parties paramétriques dans R^p pour que l'estimateur $\delta_{\phi_{JS}, \psi}(X)$ défini en (0.3) pour $\phi = \phi_{JS}^+$, domine partiellement la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\phi_{JS}^+(X)$. La décomposition des différences de risques en deux termes (cf Proposition 3.3 et décomposition (3.16)), suggère au moins deux classes possibles pour la fonction ψ :

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{l} \psi / \psi \geq 0 \text{ à support } [a, b], (0 \leq a < b) \\ \text{dérivable, (} b \text{ pouvant être infini), } \psi'(0^+) < \infty, \psi'(b^-) < \infty \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{l} \psi / \psi \text{ à support } [a, b], (p-2 < a < b), \\ \text{dérivable sur }]a, b[\text{ et tel que } \psi'(a^+) < \infty, \psi'(b^-) < \infty \end{array} \right\}$$

Nous établissons des résultats de domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein. En utilisant le Lemme 3.2 et des conditions sur les fonctions ψ dans la classe **A**, nous donnons des sous-ensembles paramétriques de R^p où notre estimateur domine la partie positive de l'estimateur de James-Stein. Les sous-ensembles paramétriques de R^p sont de type "grandes" boules privées de zéro, "petites" boules centrées à l'origine ou R^p privé d'une boule centrée en zéro ou enfin une "grande" boule centrée à l'origine (Théorèmes 3.9, 3.10 et 3.11)).

Nous donnons aussi pour des fonctions ψ dans la classe **A**, des sous-ensembles paramétriques dans R^p (ou R^p tout entier) assurant une domination sur l'estimateur primitif de James-Stein (Propositions 3.13, 3.14 et 3.16).

Une étude similaire est aussi menée pour la classe **B** (Proposition 3.17).

Nous montrons aussi en suivant Y. Maruyama et W. E. Strawderman ([20] Th 2.1) que nos classes d'estimateurs vérifient les conditions nécessaires de domination de $\phi_{JS}(X)$.

Des simulations ont été réalisées, représentant graphiquement les différences de risques correspondants aux estimateurs $\delta_{\phi_{JS}, \psi}(X)$ et $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X)$ par rapport aux estimateurs de James-Stein avec des choix particuliers des fonctions ψ dans les classes **A** et **B**. Une extension des résultats précédents au cas de l'échantillon est proposée.

Nous consacrons un Appendice à des lemmes techniques et nous présentons une conclusion pour l'ensemble de l'étude menée. Enfin dans l'Annexe nous présentons un travail que nous avons mené dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe d'écologie végétale du département de Biologie de l'université de Tlemcen et qui est publié dans la revue "**Ecologia Méditerranéa**" Tome 32 fascicule 1 - 2006 (Sous presse) intitulé "**Comparaison et phytoécologie des Atriplexaies en Oranie (Algérie)**" [1].

Chapitre I

Rappels et Généralités

I.1 Introduction

Nous présentons une synthèse des travaux sur les estimateurs à rétrécisseurs de la moyenne θ , d'une loi normale $N_p(\theta, I_p)$. En effet depuis qu'en 1956 C. Stein ([22]) a annoncé l'inadmissibilité de l'estimateur des moindres carrés noté dans toute la suite, $\phi_0(X)$, pour la moyenne θ d'une loi normale $N_p(\theta, I_p)$, avec $p \geq 3$, puis qu'en 1961 W. James et C. Stein [15] ont exhibé une classe d'estimateurs avec biais, dominants l'estimateur des moindres carrés, une littérature très abondante a été développée. Les ouvrages de C. Judge et M. Box [16], Marvin. H. J. Gruber [14] synthétisent une grande partie des travaux sur les estimateurs à rétrécisseurs.

Dans ces travaux, il s'agit d'estimer la moyenne d'une loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$ dans R^p par des estimateurs avec rétrécisseur déduits de la moyenne empirique qui se sont avérés meilleurs en coût quadratique que la moyenne empirique. Le but est en général, la détermination d'une classe de rétrécisseurs optimale. Ces travaux ont été, dans un premier temps développés pour des estimateurs dont les rétrécisseurs sont à valeurs dans R , c'est à dire qu'on applique le même facteur de rétrécissement à toutes les composantes de ϕ_0 . On les appellera estimateurs à rétrécisseurs "uniformes". Dans le cas où les rétrécisseurs sont à valeurs dans R^n , et sont donc à valeurs différentes par composante de ϕ_0 , on les appellera estimateurs à rétrécisseurs "ridges". On trouvera dans Marvin. H. J. Gruber [14] (pp. 227-305) un excellent résumé sur ces derniers, avec des simulations montrant numériquement les dominations des estimateurs à rétrécisseur "ridges" sur ϕ_0 . C. Stein [23] a ensuite donné une égalité (appelée depuis égalité de Stein) et défini les estimateurs à rétrécisseurs différentiables sous la forme : $\phi(X) = X + g(X)$ et il obtient des conditions de minimaxité sur les rétrécisseurs $g(X)$. Des extensions des travaux de W. James et C. Stein [15], et C. Stein [23]; à des lois sphériques symétriques multidimensionnelles, ont connues aussi un grand essor. On peut y retrouver l'essentiel de ces résultats dans C. Judge et M. Box [16] par exemple. Nous donnons un résultat obtenu par J. Berger et M. E. Bock [9] en I.5.c.

Plus précisément, si X représente une observation ou un échantillon de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$, le but est d'estimer θ par un estimateur $\delta(X)$ relativement au coût quadratique :

$$L(\delta, \theta) = \|\delta(X) - \theta\|_p^2 \quad (1.1)$$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme usuelle dans R^p . Nous associons sa fonction de risque :

$$\begin{aligned} R(\delta, \theta) &= E_\theta(L(\delta, \theta)) \\ &= \int_{R^p} \frac{(\|\delta(x) - \theta\|_p^2)}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{\|x - \theta\|_p^2}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ainsi si nous prenons comme exemple l'estimateur classique des moindres

carrés, $\delta(X) : \phi_0(X) = X$, il est minimax et sa fonction de risque est égale p ($R(\delta, \theta) = E_\theta(\|X - \theta\|_p^2) = \text{Var}(X)$).

W. James et C. Stein [15], ont introduit une classe d'estimateurs $\delta(X)$, équivariants relativement au groupe G des transformations orthogonales. (ie pour toute matrice orthogonale Γ , $\Gamma\delta(X) = \delta(\Gamma X)$), de la forme :

$$\delta_g(X) = \left(1 - \frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X \quad (1.3)$$

où $g(u)$ est une application réelle, et la quantité $\xi(u) := 1 - \frac{g(u)}{u}$ est appelée rétrécisseur. Ils exhibent un estimateur dominant l'estimateur des moindres carrés $\delta(X) : \phi_0(X) = X$, dès que la dimension de l'espace des observations $p \geq 3$.

Ils proposent une forme explicite d'un estimateur, améliorant $\delta(X) = X$, noté :

$$\phi_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} \right) X \quad (1.4)$$

avec $\xi(u) = 1 - \frac{p-2}{u}$.

Nous appellons cet estimateur l'estimateur primitif de James-Stein.

Cette forme d'estimateur ayant un rétrécisseur débordant négativement en dehors de l'intervalle $[0, 1]$, A. J. Baranchik [2] propose la partie positive de l'estimateur de James-Stein :

$$\phi_{JS}^+(X) = \max\left(0, 1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right) X \quad (1.5)$$

où cette fois $\xi(u) = \max\left(0, 1 - \frac{p-2}{u}\right)$. Ainsi en éliminant cet inconvénient il obtient un estimateur $\phi_{JS}^+(X)$ dominant l'estimateur primitif de James-Stein $\phi_{JS}(X)$. En fait intuitivement le rétrécisseur $\xi(u)$ doit rester dans $[0, 1]$ pour tout u réel. En effet si $\xi(u) \geq 1$, on peut à nouveau améliorer cet estimateur par troncature supérieure pour certaines formes de rétrécisseurs (D. Benmansour et A. Martin [4] p 62-64).

Dans cette partie, nous présentons les travaux de certains auteurs que nous utilisons dans notre document.

Dans toute la suite, on considérera X , comme une observation ou un échantillon de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, I_p)$. Les estimateurs généralisés de James-Stein $\delta_g(X)$, auront la forme (1.3), la fonction de coût $L(\delta_g, \theta)$, choisie, est donnée par l'égalité (1.1), et le risque quadratique $R(\delta_g, \theta) = E_\theta(L(\delta_g, \theta))$ étant exprimé par l'égalité (1.2). L'estimateur des moindres carrés $\phi_0(X)$ sera dans ce cas égal à X .

1.2 Estimateurs Minimax à rétrécisseurs uniformes

W. James et C. Stein [15] donnent pour l'estimateur $\phi_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} \right) X$, de la moyenne θ , et $p \geq 3$, un résultat de domination de l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 .

Théorème 1.1 (W. James et C. Stein [15]) *L'estimateur $\phi_{JS}(X)$, exprimé par (1.4) est minimax. Sa fonction de risque est*

$$R_{\phi_{JS}}(\theta) = p - (p-2)^2 E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \quad (1.6)$$

où K suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\|\theta\|^2}{2}$ (ie $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}\right)$).

En généralisant la forme de ϕ_{JS} , A. J. Baranchik [3], donne pour un estimateur $\delta_g(X)$ donné en (1.3), de la moyenne θ , et $p \geq 3$ un résultat de domination de l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 .

Théorème 1.2 (A. J. Baranchik [3]) *L'estimateur $\delta_g(X)$, exprimé par (1.3) est minimax si*

- i) $g(\cdot)$ est monotone non décroissante, et
- ii) $0 \leq g(\cdot) \leq (p-2)$

On retrouve dans ce résultat la forme de ϕ_{JS} , en prenant $g = p-2$.

W. E. Strawderman [24] améliore les conditions sur la fonction g . Pour $p \geq 3$, il donne le théorème suivant

Théorème 1.3 (W. E. Strawderman [24]) *L'estimateur $\delta_g(X)$, exprimé par (1.3) est minimax si*

- i) $g(\cdot)$ est monotone non décroissante, et
- ii) $0 \leq g(\cdot) \leq 2(p-2)$

Dans le chapitre II (Proposition 2.5) nous avons amélioré ce résultat pour des formes plus générales de $\delta_g(X)$, pour σ^2 inconnu.

I.3 Estimateurs à rétrécisseurs différentiables

a) Introduction

Dans ce qui suit, nous rappelons l'égalité de Stein et donnons une condition suffisante de domination de l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 , par un estimateur de la forme

$$\phi(X) = X + g(X) \quad (1.7)$$

où g est une fonction différentiable. La fonction g sera suivant les cas à valeurs dans R ou R^p . C'est à dire qu'on donnera des conditions de minimaxité des estimateurs $\phi(X)$, formulés en (1.7), à rétrécisseurs soit uniformes, soit ridges.

b) Egalité de Stein .

Le lemme fondamental suivant définit l'égalité de Stein.

Lemme 1.4 (C.Stein [23]) *Soit Y une variable aléatoire réelle de loi $N(\nu, 1)$ et soit $g : R \rightarrow R$ une fonction différentiable telle que:*

$$E[|g'(Y)|] < \infty$$

Alors

$$E[g(Y)(Y - \nu)] = E[g'(Y)] \quad (1.8)$$

Démonstration Nous notons $p_0(y)$ la densité de la normale $N(0, 1)$, et dont la dérivée est : $p_0'(y) = -yp_0(y)$. On a alors

$$E[g'(Y)] = \int_{-\infty}^0 g'(y)p_0(y - \nu)dy + \int_0^{\infty} g'(y)p_0(y - \nu)dy$$

en utilisant la relation

$$p_0(y - \nu) = \int_y^{\infty} (z - \nu)p_0(z - \nu)dz$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g'(y)p_0(y - \nu)dy &= \int_0^{\infty} g'(y) \left(\int_y^{\infty} (z - \nu)p_0(z - \nu)dz \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} (z - \nu)p_0(z - \nu) \left(\int_0^{\infty} g'(y)I_{[y \leq z]} dy \right) dz \\ &= \int_0^{\infty} (z - \nu)p_0(z - \nu)(g(z) - g(0))dz \end{aligned} \quad (1.9)$$

où $I_{[y \leq z]}$ est la fonction indicatrice. La troisième égalité étant obtenue par le théorème de Fubini .

De même nous obtenons

$$\int_{-\infty}^0 g'(y)p_0(y - \nu)dy = \int_{-\infty}^0 (z - \nu)p_0(z - \nu)(g(z) - g(0))dz \quad (1.10)$$

en combinant (1.9) et (1.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} E[g'(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (z - \nu) p_0(z - \nu) (g(z) - g(0)) dz \\ &= E[g(Y)(Y - \nu)] \end{aligned}$$

D'où le résultat \square

En utilisant l'égalité (1.8) du Lemme 1.4, et pour un estimateur de la forme (1.7) avec $g : R^p \rightarrow R^p$, une fonction différentiable vérifiant

$$E_{\theta}(|\partial/\partial x_i g_i(x)|) < \infty \text{ pour } i = 1, \dots, p$$

la fonction de risque de l'estimateur $\phi(X) = X + g(X)$ s'écrit alors comme suit

$$\begin{aligned} R(\theta; \phi) &= E_{\theta}(\|\phi(X) - \theta\|^2) \\ &= E_{\theta}(\|X - \theta\|^2) + E_{\theta}[\|g(X)\|^2] + 2 \sum_{i=1}^p E_{\theta}(t(X - \theta)g_i(X)) \\ &= p + E_{\theta}(\|g(X)\|^2) + 2 \sum_{i=1}^p E_{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(X)\right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ainsi l'expression

$$p + [\|g(X)\|^2] + 2 \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(X) \right] \quad (1.12)$$

fournit un estimateur sans biais du risque de ϕ . C. Stein [23] déduit alors le théorème suivant

Théorème 1.5 (C. Stein [23]) *Soit $\phi_g(X) = X + g(X)$ un estimateur de θ . Si g est une solution de l'inéquation différentielle*

$$[\|g(x)\|^2] + 2 \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x) \right] \leq 0 \quad (1.13)$$

alors $\phi_g(X) = X + g(X)$ est minimax et domine donc l'estimateur des moindres carrés (ici $\phi_0(X) = X$).

B. Efron et C. Morris [13] ont obtenu pour les estimateurs à rétrécisseurs uniformes $\delta_g(X)$, exprimés par (1.3), le résultat suivant

Théorème 1.6 (B. Efron and C. Morris [13]) *Soit $\delta_g(X)$ un estimateur de θ (défini par (1.3)). Si g est solution de l'inéquation différentielle*

$$g(u) \frac{(2(p-2) - g(u))}{u} + 4g'(u) \geq 0 \quad (1.14)$$

vérifiée, par exemple par : si

- 1) g est monotone non décroissante
 - 2) $0 \leq g(u) \leq 2(p-2)$ pour tout $u \geq 0$.
- alors δ_g est minimax.

Remarque 1.7

i) Dans le Théorème 1.1, W. James et C. Stein [15] utilisent une démonstration assez longue par la méthode du χ^2 décentré. L'égalité de Stein permet d'écrire simplement : si

$$\phi_c(X) = \left(1 - \frac{c}{\|X\|^2}\right)X$$

alors

$$\begin{aligned} R(\theta, \phi_c) &= E_\theta \left(\left\| \left(1 - \frac{c}{\|X\|^2}\right)X - \theta \right\|^2 \right) \\ &= E_\theta(\|X - \theta\|^2) + c^2 E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) - 2c E_\theta \left(\sum_{i=1}^p \frac{X_i(X_i - \theta_i)}{\sum_{j=1}^p X_j^2} \right) \\ &= p + c^2 E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) - 2c \sum_{i=1}^p E_\theta \left(\frac{d}{dx_i} \left(\frac{X_i}{\sum_{j=1}^p X_j^2} \right) \right) \\ &= p + c^2 E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) - 2c \sum_{i=1}^p E_\theta \frac{\sum_{j=1}^p X_j^2 - 2X_i^2}{\left(\sum_{j=1}^p X_j^2\right)^2} \\ &= p + (c^2 - 2(p-2)) E_\theta \left(\frac{1}{\|X\|^2} \right) \end{aligned}$$

où la troisième égalité est obtenue à l'aide de l'égalité de Stein (égalité (1.8)). Ainsi $R(\theta, \phi_c) \leq p$ et atteint sa valeur minimale pour $c = p - 2$. On obtient ainsi l'estimateur primitif de James-Stein ϕ_{JS} donné par l'égalité (1.4).

ii) Nous retrouvons dans le Théorème 1.6 des fonctions solutions vérifiant les mêmes conditions que celles du Théorème 1.3 (W. E. Strawderman [24]) avec en plus la condition supplémentaire de différentiabilité.

iii) Le Théorème 1.6 fournit à nouveau une classe d'estimateurs à rétrécisseurs différentiables dominant l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 avec des rétrécisseurs uniformes. L'inégalité (1.14) étant satisfaite pour $g(u) = p - 2$, ce qui donne l'estimateur primitif de James-Stein.

iv) Notons aussi que le Théorème 1.5 contient les estimateurs "ridges" dont g est solution de l'inéquation différentielle donnée par (1.13).

I.4 Estimateurs Minimax à rétrécisseurs "ridges"

a) Introduction

Dans cette partie on présente d'autres types d'estimateurs de James-stein généralisé dont la fonction de rétrécissement des composantes de l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 , varie composante par composante. Nous donnons un résultat général sur la minimaxité des estimateurs "ridges", extrait de l'article de D. Cellier et D. Fourdrinier [12]. Nous présenterons aussi dans le paragraphe (I.5) les estimateurs à rétrécisseurs ridges proposés par J. Berger et M. E. Bock [9], quand l'observation X , suit une loi sphérique symétrique dans R^p .

b) Modèle

La variable aléatoire observée est $X \sim N_n(\theta, \sigma^2 V)$ avec V est une matrice symétrique, définie positive connue (il sera pratique de la considérer comme un isomorphisme linéaire de E^* sur E). On notera \bar{V} la forme quadratique associée. On notera aussi V_Θ la variance de ϕ_0 .

Les estimateurs ϕ auxquels nous nous intéressons ici sont construits à l'aide:

-d'une forme bilinéaire symétrique définie positive B sur Θ .

-d'un endomorphisme C de Θ .

-d'une application h de R^+ dans R^+ .

Si σ^2 est connu, ϕ s'exprime sous la forme;

$$\phi(X) = \phi_0(X) - h[\sigma^{-2} \bar{B}(\phi_0(X))] C(\phi_0(X)) \quad (1.15)$$

Si σ^2 est inconnu, nous remplaçons, dans la formule précédente, σ^2 par son estimateur sans biais usuel

$$\bar{V}^{-1}(X - \phi_0(X))/(n-p)$$

Et ainsi ϕ s'exprime sous la forme;

$$\phi(X) = \phi_0(X) - h \left[\frac{n-p}{\bar{V}^{-1}(X - \phi_0(X))} \bar{B} \phi_0(X) \right] C(\phi_0(X)) \quad (1.16)$$

La fonction de coût sera définie par Q , forme bilinéaire positive mais non nécessairement, définie positive.

$$L_{\sigma^2 Q}(\phi; \theta) = \frac{\bar{Q}(\phi(X) - \theta)}{\sigma^2} \quad (1.17)$$

Dans ce qui suit ils notent :

$$\tilde{h}(X) = h[\sigma^{-2} \bar{B}(\phi_0(X))] \quad \text{si } \sigma^2 \text{ est connu}$$

$$\tilde{h}(X) = h\left[\frac{(n-p)}{V^{-1}(X - \phi_0(X))} \bar{B}(\phi_0(X))\right] \quad \text{si } \sigma^2 \text{ est inconnu}$$

et ils supposent que B, C et h vérifient les propriétés suivantes:

(P_1) Il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E , orthonormale pour V^{-1} et dont les p premiers éléments constituent une base de Θ orthogonale pour Q et pour B , et dans laquelle l'endomorphisme C diagonalise.

(P_2) Les valeurs propres de C sont toutes positives ou nulles.

(P_3) L'endomorphisme de Θ^* QC^2B^{-1} n'est pas identiquement nul.

(P_4) Pour tout θ de Θ , $E_\theta(\bar{Q}\{\tilde{h}(y) C(\phi_0(y))\}) < \infty$.

Nous notons par $\text{pgvp}(C)$: "plus grande valeur propre" de la matrice C . Ils obtiennent le théorème suivant qui donne une condition suffisante de domination de l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 .

Théorème 1.10 (D. Cellier et D. Fourdrinier [12]) Soit

$$\alpha = \frac{2[\text{tr}(V_\Theta QC) - 2\text{pgvp}(V_\Theta QC)]}{\text{pgvp}(QC^2B^{-1})}$$

Sous les conditions (P_1), (P_2), (P_3) et (P_4), une condition suffisante, pour σ^2 connu (resp inconnu), pour que l'estimateur ϕ défini par (1.15) (resp (1.16)) ci-dessus soit uniformément de risque inférieur à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance ϕ_0 , est que l'application $t \rightarrow t h(t)$ soit croissante et majorée par α (resp $\alpha \frac{n-p}{n-p+2}$).

Pour que de plus ϕ définie par (1.15) (resp (1.16)) soit uniformément de risque strictement inférieur à celui de ϕ_0 , il suffit qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que

$$\begin{aligned} 0 < t_1 < t_2 & \quad \text{et} \quad 0 < t_1 h(t_1) < t_2 h(t_2) < \alpha \\ \text{resp } (0 < t_1 < t_2 & \quad \text{et} \quad 0 < t_1 h(t_1) < t_2 h(t_2) < \alpha \frac{n-p}{n-p+2}) \end{aligned}$$

Remarque 1.11 Nous retrouvons dans ce théorème une condition sur le rétrécisseur similaire à celle donnée sur les estimateurs de James-Stein généralisés de type (1.2), définis dans le Chapitre II, ainsi que la condition 2 des Théorèmes 1.2 (A. J. Baranchik [3]), et 1.3 (W. E. Strawderman [24]).

Une étude détaillée sur les propriétés et formes de Q , C , B et V , ainsi que d'autres propriétés des estimateurs ridges est faite dans Marvin. H. J. Gruber [14] (pp. 227-305).

1.5 Domination d'estimateurs à rétrécisseurs sur l'estimateur de James-Stein

a) Amélioration de l'estimateur de James-Stein par troncature

Pour des raisons de simplification d'écritures, nous adopterons le modèle simple $X \sim N_p(\theta, I_p)$. Rappelons que dans ce cas là, l'estimateur des moindres carrés $\phi_0(X) = X$. Rappelons aussi la forme de l'estimateur "primitif" de James-Stein (formule (1.4)).

$$\phi_{JS}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right)X$$

sa fonction de risque est

$$R(\theta; \phi_{JS}) = p - (p-2)^2 E(\|X\|^{-2})$$

C'est un estimateur de James-Stein-généralisé de type (2) Chapitre III, avec $\psi(v, w) = \frac{p-2}{\|X\|^2}$.

La partie positive de l'estimateur "primitif" de James-Stein (formule (1.5)) :

$$\phi_{JS}^+(X) = \max\left(0, 1 - \frac{p-2}{\|X\|^2}\right)X$$

domine uniformément l'estimateur primitif de James-Stein ϕ_{JS} . C'est un résultat qu'on trouve dans A. J. Baranchik [2], qui utilise une démonstration assez longue utilisant des lois du χ^2 décentrée. J. Berger et M. E. Bock [9] retrouvent ce résultat plus simplement (voir II.5.c). Nous avons ainsi un estimateur obtenu par troncature inférieure qui domine ϕ_{JS} .

Nous illustrons graphiquement les différentes fonctions de risques ($R(\phi_0, \theta)$, $R(\phi_{JS}, \theta)$ et $R(\phi_{JS}^+, \theta)$) en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ ($p = 6$).

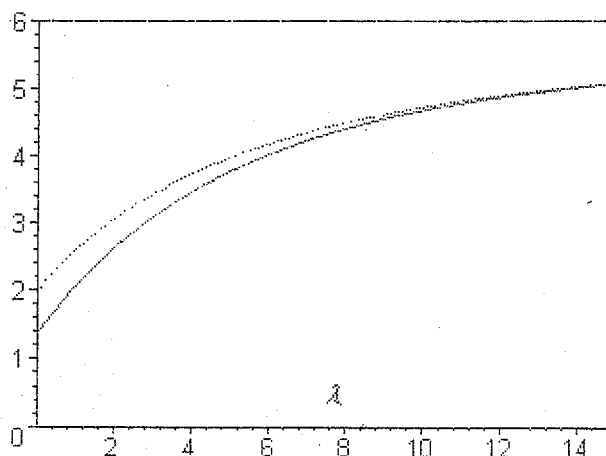


Figure 1

----- Estimateur des moindres carrés
 Estimateur de James-Stein
 ——— Partie positive de James-Stein

Fig. 1 Graphe des fonctions de risques ($R(\theta; \phi_0)$, $R(\theta; \phi_{JS})$ et $R(\theta; \phi_{JS}^+)$), en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ ($p = 6$).

Le graphe montre que $R(\theta; \phi_{JS}^+)$ est uniformément inférieur à $R(\theta; \phi_{JS})$ et à $R(\theta; \phi_0)$ pour tout $\lambda = \|\theta\|^2$.

b) Amélioration de l'estimateur de James-Stein par des rétrécisseurs polynômiaux

Les estimateurs proposés Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [26], sont de la forme générale proposée par J. Berger et M. E. Bock [9] (égalité (1.6)):

$$\phi_\psi(X) = \phi_{JS}(X) + \psi_c(\|X\|^2)X$$

où $\psi_c(\|X\|^2) = \frac{c}{\|X\|^r}$, c et r étant réels. Ceux sont les estimateurs polynômiaux proposés par Tze Fen Li and Wen Hou Kuo [26]. Nous les notons

$$\begin{aligned} \phi_{TZ,c}(X) &= \phi_{JS}(X) + \frac{cX}{\|X\|^r} \\ &= \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{c}{\|X\|^r}\right)X \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nous avons alors le résultat de domination de $\phi_{TZ,c}(X)$ sur ϕ_{JS} suivant

Théorème 1.12 (Tze Fen Li and Wen Hou Kuo [26]) *Pour tout $2 < r < \frac{p+2}{2}$, l'estimateur $\phi_{TZ,\tilde{c}}(X)$ de la forme (1.18), avec*

$$\tilde{c} = (r-2)2^{\left(\frac{r-2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-2r+2}{2}\right)} \quad (1.19)$$

domine ϕ_{JS} uniformément en θ .

Nous illustrons graphiquement les différentes fonctions de risques ($R(\phi_0, \theta)$, $R(\phi_{JS}, \theta)$ et $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$) en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$, $r = 4$ ($p = 8$).

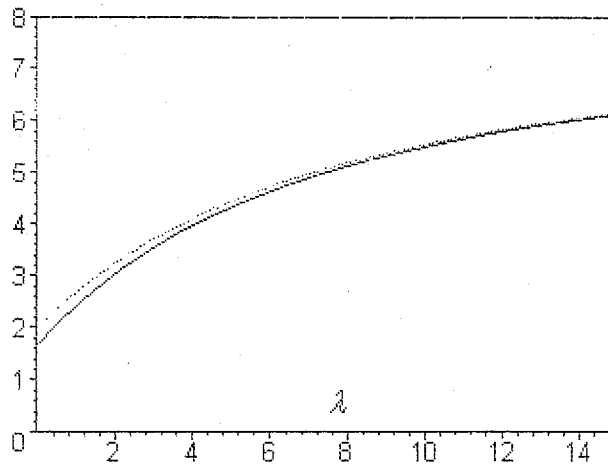


Figure 2

- Estimateur des moindres carrés
- Estimateur de James-Stein
- Estimateur de Tzé-Fen-Li (forme1)

Fig. 2 *Graphes des fonctions de risques ($R(\theta; \phi_0), R(\theta; \phi_{JS})$ et $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$), en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ ($r = 4, p = 8$).*

Le graphe montre que $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$ est uniformément inférieur à $R(\theta; \phi_{JS})$ et à $R(\theta; \phi_0)$ pour tout $\lambda = \|\theta\|^2$.

Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [26] construisent d'autres estimateurs en utilisant le même procédé d'écriture. A partir de l'estimateur $\phi_{TZ,\tilde{c}}$ obtenu ci-dessus et ils lui ajoutent à nouveau la quantité $\frac{dX}{\|X\|^r}$, où d est réel. Ils obtiennent un nouvel estimateur, $\phi_{TZ,\tilde{d}}$ dominant $\phi_{TZ,\tilde{c}}$, avec bien entendu des conditions sur r et p (\tilde{d} étant la valeur de d rendant la fonction de risque de $\phi_{TZ,\tilde{d}}$ optimale). Ainsi, ils construisent au fur et à mesure des estimateurs de telle sorte que le dernier estimateur obtenu domine, au sens du risque quadratique, tous les estimateurs construits précédemment. Ces résultats sont obtenus sous des conditions, notamment la dimension de l'espace des paramètres, p , de plus en plus croissante. Le procédé est le suivant: pour $r = 4$; et dans ce cas on obtient de l'égalité (1.19), $\tilde{c} = 2(p - 6)$ et donc

$$\phi_{TZ,2(p-6)} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{2(p-6)}{\|X\|^4} \right) X$$

Ainsi pour $p > 6$, $\phi_{TZ,2(p-6)}$ domine ϕ_{JS} uniformément en θ . Pour $p > 10$, ils donnent dans le théorème qui suit, le principe de construction de $\phi_{TZ,\tilde{d}}$.

Théorème 1.13 (Tze Fen Li et Wen Hou Kuo ([26])) *Pour $p > 10$, l'estimateur*

$\phi_{TZ,2(p-10)^2}(X)$ défini par

$$\phi_{TZ,2(p-10)^2} = \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} + \frac{2(p-6)}{\|X\|^4} + \frac{2(p-10)^2}{\|X\|^6} \right) X \quad (1.20)$$

domine $\phi_{TZ,2(p-6)}$ uniformément en θ .

Nous illustrons graphiquement les différentes fonctions de risques ($R(\phi_{JS}, \theta)$, $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$) et $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-10)^2})$ en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ ($p = 11, r = 6$).

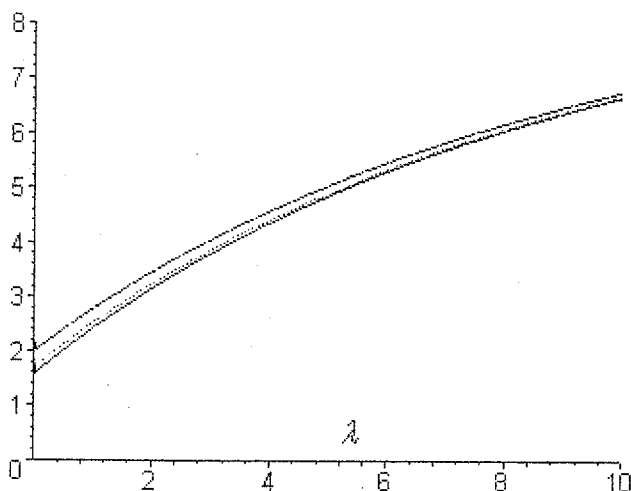


Figure 3
 - - - - - Estimateur de James-Stein
 - - - - - Estimateur de Tze-Fen-Li (forme1)
 ———— Estimateur de Tze-Fen-Li (forme2)

Fig. 3 Graphe des fonctions de risques ($R(\theta; \phi_{JS})$, $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$ et $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-10)^2})$), en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ ($r = 6, p = 11$).

Le graphe montre que $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-10)^2})$ est uniformément inférieur à $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$ et à $R(\theta; \phi_{JS})$ pour tout $\lambda = \|\theta\|^2$. On constate que la différence $R(\theta; \phi_{TZ,2(p-10)^2}) - R(\theta; \phi_{TZ,2(p-6)})$ est très "minime."

c) Estimateurs de J. Berger et M. E. Bock [9]

Il s'agit d'estimer la moyenne $\theta \in R^p$ d'une variable aléatoire $X \in R^p$ dont la densité de probabilité est de la forme $f(x - \theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur R . Nous présentons des résultats généraux sur une classe particulière d'estimateurs proposés par J. Berger et M. E. Bock [9] de la forme :

$$\delta_{\Phi}(X) = \Phi(X)X \quad (1.21)$$

$$\delta_{\Phi, \Psi}(X) = (\Phi(X) + \Psi(X))X \quad (1.22)$$

où $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des matrices $p \times p$. Pour tout $x \in R^p$, on note $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$

On notera aussi par I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A . Nous donnons les définitions suivantes.

Définition 1.14

Une fonction $g : R^p \rightarrow R^p$ est dite symétrique par coordonnée si

$$g(x_i, x^i) = g(-x_i, x^i)$$

pour tout x_i, x^i et $1 \leq i \leq p$

Définition 1.15

2) La densité de probabilité $f(x - \theta) = f(x_i - \theta_i, x^i - \theta^i)$ est dite unimodale par coordonnée si $f(x_i - \theta_i, x^i - \theta^i)$ est unimodale comme fonction de x_i pour tout x^i , $1 \leq i \leq p$.

Ils donnent ensuite le théorème suivant, en adoptant la fonction de coût donnée par (1.1):

Théorème 1.16 (J. Berger et M. E. Bock [9]) Si

1) $f(x - \theta)$ est unimodale symétrique par coordonnée

2) $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des matrices diagonales dont les éléments notés $\phi_i(x)$ (respectivement $\psi_i(x)$) vérifient:

a) $\psi_i(x)$ est symétrique par coordonnée et non négative, pour tout $1 \leq i \leq p$

b)

$$\sum_{i=1}^p [\phi_i^2(x) - \{\phi_i(x) + \psi_i(x)\}^2 x_i^2] \geq 0$$

alors

$$R(\delta_{\Phi, \Psi}, \theta) \leq R(\delta_{\Phi}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in R^p$$

Ils déduisent alors du Théorème 1.16 les corollaires suivants :

Corollaire 1.17 (J. Berger et M. E. Bock [9]) Si $f(x - \theta)$ et $\Phi(x)$ vérifient les conditions du Théorème 1.16 et si

- 1) $\phi_i(x)$ est symétrique par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq p$.
 2) Soient, pour tout $1 \leq i \leq p$, $W_i = \{x \in R^p : \phi_i(x) < 0\}$,
 a) $t_i R^p \rightarrow [1, 2]$ une fonction symétrique par coordonnée
 b) et $\delta_{i, \phi_i}^*(X)$, l'estimateur dont les coordonnées sont définies par

$$\delta_{i, \phi_i}^*(X) = \{1 - t_i(X)I_{W_i}\} \phi_i(X)X_i$$

alors

$$R(\delta_{\Phi}^*, \theta) \leq R(\delta_{\Phi}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in R^p$$

Notons que δ_{Φ}^* est un estimateur à rétrécisseur positif, et que dans le cas où $t_i \equiv 1$, $1 \leq i \leq p$, nous retrouvons naturellement sa partie positive δ_{Φ}^{*+} . Ils déduisent alors le corollaire suivant:

Corollaire 1.18 (J. Berger et M. E. Bock [9]) Si $f(x - \theta)$ et $\Phi(x)$ vérifient les conditions du Corollaire 1.17 .

Alors l'estimateur dont les coordonnées sont définies par

$$\delta_{i, \Phi}^+(X) = \phi_i^+(X)X_i$$

alors

$$R(\delta_{\Phi}^+, \theta) \leq R(\delta_{\Phi}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in R^p$$

Le Corollaire 1.18 se déduit simplement du Corollaire 1.17 en prenant $t_i \equiv 1$, $1 \leq i \leq p$

Remarque 1.19

i) On peut déduire du Théorème 1.16, une démonstration très simple de la domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\phi_{JS}^+(X)$, sur l'estimateur primitif de James-Stein $\phi_{JS}(X)$. En effet

$$\phi_{JS}(X) = \phi_{JS}^+(X) - \phi_{JS}^-(X)$$

$$\text{où } \phi_{JS}^-(X) = \max\left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1\right)X$$

Ainsi en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans R^p , nous avons :

$$\begin{aligned}
R(\phi_{JS}(X), \theta) - R(\phi_{JS}^+(X), \theta) &= E_{\theta}(\|\phi_{JS}^-(X)\|^2) + 2E_{\theta}(\langle \theta, \phi_{JS}^-(X) \rangle) \\
&= E_{\theta}(\|\phi_{JS}^-(X)\|^2) + 2 \sum_{i=1}^p E_{\theta} \left(\max \left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1 \right) \theta_i X_i \right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Comme $\max \left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1 \right) \geq 0$, alors le Théorème 1.16 implique que le deuxième membre de la deuxième égalité est positif. D'où le résultat.

ii) Nous remarquons que les auteurs choisissent dans ce travail un cadre général pour les estimateurs à rétrécisseurs (ici de type "ridges") et pour la loi de l'observation X , (ici loi sphérique symétrique unimodale par composante). Ainsi les résultats obtenus dans ce cas-là se prolongent naturellement au cas où la loi de l'observation X , est gaussienne multidimensionnelle, et aussi au cas des estimateurs à rétrécisseurs uniformes, équivariants relativement au groupe G des transformations orthogonales. (ie vérifiant pour toute matrice orthogonale Γ , $\Gamma\delta(X) = \delta(\Gamma X)$). Ces résultats seront exploités au chapitre III.

I.6 Conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein

Dans [20] Y. Maruyama et W. E. Strawderman, obtiennent pour des estimateurs de la forme

$$\delta_{\xi}(X) = \left(1 - \frac{\xi(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X$$

où ξ est différentiable, des conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein. Ils montrent

$$R(\phi_{JS}, \theta) - R(\delta_{\xi}, \theta) = E_{\theta}(g_{\xi}(\|X\|^2))$$

où

$$g_{\xi}(u) = -\frac{\{\xi(u) - (p-2)\}^2}{u} + 4\xi'(u) \quad (1.23)$$

obtenue à l'aide de l'égalité de Stein, et donnent des conditions nécessaires sur ξ et g_{ξ} pour que $\delta_{\xi}(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$.

Leur résultat est le suivant (Théorème 2.1 [20].)

Théorème 1.20 (Y. Maruyama et W. E. Strawderman [20]) *Supposons que la fonction g_{ξ} est bornée. Si l'estimateur δ_{ξ} domine l'estimateur ϕ_{JS} de James-Stein alors pour tout $u \geq 0$, il existe $u_0 > u$ tel que $g_{\xi}(u_0) \geq 0$.*

Ils en déduisent le corollaire suivant (Corollaire 2.2 [16].)

Corollaire 1.21 (Y. Maruyama et W. E. Strawderman [20]) *Supposons que la fonction ξ est bornée et absolument continue. Si l'estimateur δ_{ξ} domine l'estimateur ϕ_{JS} de James-Stein alors :*

- i) *pour tout $u \geq 0$ il existe $u_0 > u$ tel que $\xi'(u) \geq 0$*
- ii) *si $\lim_{u \rightarrow +\infty} u\xi'(u)$ existe alors elle est nulle*
- iii) *si $\lim_{u \rightarrow +\infty} \xi(u)$ existe et $\lim_{u \rightarrow +\infty} u\xi'(u) = 0$ alors cette limite doit être $p - 2$.*

Les auteurs donnent aussi d'autres conditions nécessaires (Théorème 2.3 [20]) dans le cas où ξ est deux fois différentiable.

Théorème 1.22 (Y. Maruyama et W. E. Strawderman [20]) *Supposons que les fonctions ξ et $\frac{\xi(u)}{u}$ sont bornées, et que $\xi'(u) = o(\frac{1}{u})$ et $\xi''(u) = o(\frac{1}{u^2})$. Si l'estimateur δ_{ξ} domine l'estimateur ϕ_{JS} de James-Stein alors $\lim_{u \rightarrow +\infty} \xi(u) = p - 2$.*

Remarque 1.23 *Nous savons que la partie positive de l'estimateur de James-Stein, ϕ_{JS}^+ , qui est bornée, mais dont la fonction de rétrécissement n'est pas différentiable, domine ϕ_{JS} . Quant aux estimateurs proposés par Tze Fen Li et Wen Hou Kuo [26] dans Th. 1.12 et Th. 1.13, ils donnent dans les deux cas, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \xi(u) = +\infty$ et aussi $\lim_{u \rightarrow 0} g_{\xi}(u) = \pm\infty$. (suivant les choix de r). Ces estimateurs dominent bien l'estimateur de James-Stein ϕ_{JS} mais ne satisfont pas aux conditions ni du Théorème 1.20 ni du Corollaire 1.21. Nous verrons dans le chapitre III des exemples d'estimateurs dominant l'estimateur de James-Stein ϕ_{JS} et qui satisfont aux conditions nécessaires de domination de ϕ_{JS} . Ces exemples étant déduits de la forme générale des estimateurs proposés par J. Berger et M. E. Bock [9]. Nous remarquons ainsi toute la diversité de formes d'estimateurs pouvant dominer et l'estimateur des moindres carrés, et l'estimateur primitif de James-Stein ϕ_{JS} .*

I.7 Estimateurs de P. Shao et W. E. Strawderman

Nous signalons tout d'abord que Marvin. H. J. Gruber ([14] pp 307 -370) a fait une étude numérique détaillée d'une classe d'estimateurs proposés par G. G. Judge et M. E. Bock [16] dans laquelle plusieurs formes d'estimateurs susceptibles de dominer la partie positive de l'estimateur de James -Stein sont proposées. Marvin. H. J. Gruber note

$$\phi(X_i) = (1 - u_1)I_{[0,1]}(u_1)X_i + a_1(1 - u_1)I_{[1,\alpha]}(u_1)X_i + a_2(1 - u_1)I_{[\alpha,+\infty]}(u_1)X_i \quad 1 \leq i \leq p$$

où

$$I_A(u) = 1 \text{ si } u \in A \\ = 0 \text{ sinon}$$

Les choix de a_1 , a_2 et α sont résumés comme suit:

Estimateurs	a_1	a_2	α
ϕ_{JS}	1	0	∞
$\phi_{0,JS}^+ := \phi_{JS}^+$	0	0	0
$\phi_{1,JS}^+$	-1	0	∞
$\phi_{2,JS}^+$	-1	1	2
$\phi_{3,JS}^+$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\phi_{4,JS}^+$	1	1	2

L'étude de ces différentes formes d'estimateurs montre qu'aucun ne domine l'estimateur ϕ_{JS}^+ , uniformément en θ . L'estimateur $\phi_{2,JS}^+$ est le seul à dominer ϕ_{JS}^+ pour les grandes valeurs de $\lambda = \|\theta\|^2$, avec des choix de a_1 , a_2 et α , appropriés. De plus les gains de ces différentes formes d'estimateurs se font sur des domaines très réduits de θ .

P. Shao et W. E. Strawderman [21] ont proposé deux classes d'estimateurs dominant $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément en θ .

Ils donnent d'abord une généralisation de l'égalité de Stein (donnée par (1.8)) dans un lemme fondamental et ensuite proposent leurs classes d'estimateurs. Le lemme s'écrit comme suit :

Lemme 1.24 (P. Shao et W. E. Strawderman [21]) *Soit ψ une fonction à support $[a, b]$ et continue telle que ψ' possède au plus un nombre fini de points de discontinuité $0 \leq a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = b$. Si, pour $i = 0, \dots, k+1$, $\psi'(a_i^+)$ et $\psi'(a_i^-)$ sont finies. Alors*

$$E_{\theta}^t \left[t(X - \theta)X\psi(\|X\|^2)I_{\{a < \|X\|^2 < b\}} \right] = E_{\theta} \left[\left(2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + p\psi(\|X\|^2) \right) I_{\{a < \|X\|^2 < b\}} \right] \\ + f(a) - f(b) \tag{1.24}$$

où

$$\begin{aligned}
f(a) &= K_1 g_1(\sqrt{a}) + (p-1)K_1 g_2(\sqrt{a}) \\
f(b) &= K_2 g_1(\sqrt{b}) + (p-1)K_2 g_2(\sqrt{b}) \\
K_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p 2^{p-1} \psi(a) (\sqrt{a})^p \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2 + a}{2}\right) \\
K_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p 2^{p-1} \psi(b) (\sqrt{b})^p \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2 + b}{2}\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_1(c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\alpha))^2 (\sin(\alpha))^{p-2} [\exp(\|\theta\| c \sin(\alpha) \cos(\varphi_1)) + \exp(-\|\theta\| c \sin(\alpha) \cos(\varphi_1))] \\
&\quad \times (\sin(\varphi_1))^{p-3} \dots \sin(\varphi_{p-3}) d\alpha d\varphi_1 \dots d\varphi_{p-2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g_2(c) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\alpha))^2 (\sin(\alpha))^{p-2} [\exp(\|\theta\| c \cos(\alpha)) + \exp(-\|\theta\| c \cos(\alpha))] \\
&\quad \times (\sin(\varphi_1))^{p-3} \dots \sin(\varphi_{p-3}) d\alpha d\varphi_1 \dots d\varphi_{p-2}
\end{aligned}$$

Remarquons que K_1, K_2 ont respectivement le signe de $\psi(a)$ et $\psi(b)$, et que si $a = 0$ alors $f(a) = 0$.

$t(X - \theta)$ indiquant le transposé du vecteur $(X - \theta)$. Si de plus $\psi(a) = \psi(b) = 0$, on retrouve alors l'égalité de Stein pour des fonctions invariantes orthogonalement. Enfin signalons aussi que P. Shao et W. E. Strawderman [21] ont proposé deux classes d'estimateurs dominant $\phi_{JS}^+(X)$.

La première de la forme

$$\delta(a, g, X) = \phi_{JS}^+(X) - \frac{ag(\|X\|^2)}{\|X\|^2} XI_{(p-2 \leq \|X\|^2 \leq p)} \quad (1.25)$$

où g est définie sur le compact $[p-2, p]$, ($p \geq 3$) linéaire et symétrique autour du point $p-1$, avec $g(p-2) = g(p) = 0$, $g'(p-2) < 0$ et $|g'(u)| \equiv 1$ p p sur $[p-2, p]$ (la courbe de g étant en forme de "W"). Ils construisent ensuite g sur des subdivisions dans l'intervalle $[p-1, p]$ et donnent des conditions sur le paramètre a pour que l'estimateur $\delta(a, g, X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$. Ils définissent ensuite

$$S(t) = 2(p-1) - t \quad p-1 \leq t \leq p$$

et

$$F_n(t) = \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+n-1} \quad p-1 \leq t \leq p \text{ et } n \text{ un entier naturel } > 0$$

Les auteurs montrent ensuite que si $p \geq 3$ et $n \geq j(p)$, avec $j(p)$ le plus petit nombre entier supérieur à $(5 + \sqrt{1+6p})/2$ et $t \in [p-1, p]$ alors $F_n''(t) \geq 0$. Ils démontrent aussi

l'existence d'un point $c_0 (\in [p-1, p-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}])$ tel que

$$\int_{p-1}^{c_0} F_0(t) dt = \int_{c_0}^p F_0(t) dt$$

Ils définissent un point $c_j (\in [p-1, p])$ tel que

$$\int_{p-1}^{c_j} F_0(t) dt = \int_{c_j}^p F_0(t) dt$$

Leur résultat fondamental est le suivant

Théorème 1.25 (P. Shao et W. E. Strawderman [21]) *Soit a un réel positif, $p \geq 3$ et soit p^* une valeur de l'intervalle*

$$(c_0, \min(c_1, c_2, \dots, c_{j(p)-1}, p-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}))$$

où

$$b = 1 - \sqrt{2}(p^* - (p-1)) < \min\left(\frac{1}{2}, p - p^*\right)$$

et soit

$$g(t) = \begin{cases} t - p, & \text{si } p^* \leq t \leq p \\ 2p^* - p - t, & \text{si } p-1 \leq t \leq p^* \end{cases}$$

la définition de g s'étendant sur $[p-2, p-1]$ par symétrie autour de $p-1$, c'est à dire

$$g(t) = \begin{cases} t - 3p + 2p^* + 2, & \text{si } 2(p-1) - p^* \leq t \leq p-1 \\ p-2-t, & \text{si } p-2 \leq t \leq 2(p-1) - p^* \end{cases}$$

Soit

$$A = 1 - \exp(1-b)^{\frac{p}{2} + j(p-1)}$$

et

$$B = \min \left\{ \frac{\int_{p-2}^p g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2} + j - 1} dt}{\int_{p-2}^p g^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2} + j - 2} dt} \text{ pour } j = 0, 1, \dots, j(p)-1 \right\}$$

si

$$0 < a \leq \min(B, 2(p-2)bA)$$

Alors l'estimateur $\delta(a, g, X)$, défini par (1.27), domine la partie positive de James-Stein $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément en θ .

La deuxième classe est de la forme:

$$\delta(a, k, h, g, X) = \phi_{JS}^+(X) - a \left[\frac{g(\|X\|^2)}{\|X\|^2} I_{(\|X\|^2 \geq q)} + kh(\|X\|^2) I_{(\|X\|^2 < q)} \right] X \quad (1.26)$$

où g est différentiable avec un graphe en forme de "W" et h est bornée continue et négative. Les auteurs dans [21] donnent alors le théorème suivant de domination de l'estimateur (1.26) sur ϕ_{JS}^+ .

Théorème 1.26 (P. Shao et W. E. Strawderman [21]) *Soient a et k deux nombres réels positifs et g une fonction continue, avec un graphe en forme de "W", définie sur $[q, +\infty[$, avec $g(q) = g(\infty) = 0$, et $p - 2 < q < p - 1$. De plus g est dérivable sauf en un certain nombre fini de points où il existe une dérivée à droite et à gauche et prenant des signes successivement positifs, puis négatifs (g est dite "piecewise différentiable") : il existe des nombres t_1, t_2, \dots, t_6 , tels que*

$$p - 2 < q < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6 < \infty$$

avec

$$g(t_2) = g(t_4) = 0$$

et

$$g'(t) = \begin{cases} \geq 0, & \text{si } t_1 \leq t \leq t_3 \text{ ou } t_5 < t < \infty \\ \leq 0, & \text{si } q \leq t < t_1 \text{ ou } t_3 \leq t \leq t_5 \end{cases}$$

Soit h une fonction continue, bornée et négative définie sur $[0, q]$, telle que $|h(t)| < M$ et $h(q) = 0$ pour $p - 2 < q < p - 1$.

Soit

$$b_j = 2^{\frac{p}{2} + j} j! \Gamma\left(\frac{p}{2} + j\right)$$

On suppose qu'il existe un entier J tel que

$$\int_q^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2} + J + 1} dt > 0$$

et

$$\int_{t_3}^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2} + J - 1} dt \geq 0$$

On suppose aussi que pour tout $t > t_6$

$$g^2(t) \leq 4tg'(t)$$

Soit $B_1 < B_2$ deux constantes telles que si $0 \leq w \leq 2B_1$ ou $2B_2 \leq w$ pour un entier

$N > J$,

$$\int_q^\infty \frac{g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt}{b_0} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\int_q^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+j-1} dt}{b_j} \left(\frac{w}{2}\right)^j \geq 0$$

On suppose

$$k \geq \frac{4b_1 \sum_{j=1}^{J-1} \int_q^{t_6} g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}+j-1} dt (B_2^j) / b_j}{B_1 \int_0^{p-2} h(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}} dt}$$

et

$$2 \int_q^\infty g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt + k(q-p+2) \int_{p-2}^q h(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt > 0$$

et

$$0 < a < \min\left(0.5, A_1, A_2, \frac{1}{qkM}, \frac{B_1}{kM}\right)$$

où

$$A_1 = \frac{2G_1 + k(q-p+2)H_1}{M_1 + k^2N_1}, \quad G_1 = \int_q^\infty g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt$$

et

$$H_1 = \int_{p-2}^q h(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt, \quad M_1 = \int_q^\infty g^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-2} dt$$

$$N_1 = \int_0^q h^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}} dt$$

La quantité A_2 est donnée par

$$A_2 = \frac{4G_2}{4G_2 + M_2}$$

où

$$G_2 = \int_{t_6}^\infty g'(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt, \quad M_2 = \int_q^{t_6} g^2(t) \exp\left(\frac{-t}{2}\right) t^{\frac{p}{2}-1} dt$$

Sous toutes ces conditions et hypothèses, l'estimateur $\delta(a, k, h, g, X)$, défini par (1.28), domine la partie positive de James-Stein $\phi_{js}^+(X)$ uniformément en θ .

Les deux classes d'estimateurs (3.4) et (3.5), sont inadmissibles étant donné qu'elles ne sont pas analytiques. Cependant P. Shao et W. E. Strawderman [21] pensent qu'on peut extraire une sous-classe, de la deuxième classe d'estimateurs (égalité 1.26), admissible. Nous constatons la difficulté à construire les estimateurs (1.25) et surtout (1.26). Dans les deux cas, les conditions, notamment sur g sont assez compliquées. Ces deux classes d'estimateurs sont en effet inadmissibles, puisque on peut à nouveau les dominer par les estimateurs définis dans le Corollaire 3.18 (voir chapitre III).

Chapitre II

Estimateurs généralisés de James-Stein

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous résumons nos résultats que nous avons développé dans notre thèse de 3e cycle D. Benmansour et A. Martin publiée dans les deux manuscrits [4] et [5] : des documents de travail au C.N.R.S (Equipe de recherche associée au C.N.R.S N° 900) dont les intitulés sont :

01 : Présentation dans les cadres classiques et Bayésien, des estimateurs de James-Stein généralisés.

Document de travail - Nouvelle série 1984 -01 [6].

02 : Etude numérique des estimateurs de James-Stein généralisés de type polynomial .

Document de travail - Nouvelle série 1984 -02 [7].

qui porte sur l'estimation de la moyenne θ d'une variable aléatoire de loi gaussienne multidimensionnelle $N_p(\theta, \sigma^2 \Sigma)$ dans le cas classique et non Bayésien.

Depuis que Stein ([22]) a annoncé l'inadmissibilité de l'estimateur des moindres carrés pour la moyenne θ , d'une loi normale $N_p(\theta, I_p)$, avec $p \geq 3$, puis que W. James et C. Stein ([15]) ont exhibé une classe d'estimateurs biaisés, dominants l'estimateur des moindres carrés, une littérature très abondante a été développée. L'usage de tous ces résultats et travaux est rendu difficile par la variété des cadres d'hypothèse dans lesquels se situent les différents auteurs. C'est pourquoi nous avons entrepris dans notre travail, de reprendre toute une partie de la littérature existant dans ce domaine, et ce, dans un double but :

i) fournir une présentation unifiée des différents estimateurs de James-Stein "généralisés", disponibles dans cette littérature, en nous efforçant chaque fois d'étendre au maximum le cadre dans lequel ils se justifient.

ii) effectuer une étude numérique complète de certaines classes d'estimateurs suggérés par la considération d'estimateurs existants (en termes de recherche de coefficients minimisant le risque quadratique sous certaines contraintes). Ce travail ayant été développé dans le document ([5]). On y améliore les estimateurs de James-Stein (au sens du risque Bayésien) généralisés de type polynômial proposés par Tze Fen Li en([25]). Nous ne présenterons que l'étude classique des estimateurs de James-Stein généralisés et non la partie Bayésienne.

a) Présentation

On observe un vecteur aléatoire X gaussien multidimensionnel, de moyenne θ et de matrice de covariance $\sigma^2 \Sigma$: ($\theta \in \Theta$, sous-espace vectoriel de R^n , de dimension p connu et $2 < p < n$).

$$X \sim N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma)$$

Σ est régulière et connue et suivant les cas étudiés, σ^2 sera supposé connu ou inconnu. Remarquons que ce choix exclut, les études des cas où la variance serait non régulière ou moins bien connue. D'autre part, on ne s'intéressera qu'aux estimateurs à rétrécisseurs à valeurs dans R (rétrécisseurs uniformes). Nous avons donné aussi en Appendice quelques lemmes "probabilistes" connus qui regroupent les éléments parfois épars dans la littérature. Les Lemmes 2 et 4 et les Corollaires 3 et 5 reprennent tout ce qui est nécessaire pour les méthodes de "Poissonisation" qui facilitent les calculs de risque classique des estimateurs de James-Stein généralisés. (voir par ex. les travaux de A.J.Baranchik [3] et l'ouvrage de Marvin. H. J. Gruber [14]). Le Lemme 6 est dû à Tze Fen, Li et Wen Hou Kuo [26]. Les autres lemmes étant des exercices sur les lois de probabilités.

b) Notations

On introduit les classes suivantes d'estimateurs de James-Stein généralisés : l'estimateur "le plus général" est défini comme une application de R^n dans Θ de la forme:

$$\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X) = \mu + [1 - \xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu) \quad (2.1)$$

où μ est appelé pôle ($\mu \in \Theta$) et choisi au préalable par le praticien, ξ est appelée la fonction de rétrécissement (shrinkage function) et ϕ_0 étant l'estimateur des moindres carrés. Notons que le choix de μ nous évite de rétrécir $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}$ vers 0 si des fois ξ est proche de 1. L'estimateur $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}$ est appelé estimateur de James-Stein généralisé associé à la fonction de rétrécissement ξ et au pôle μ .

On introduit ensuite pour des fonctions réelles η , ζ , ψ et ρ les estimateurs suivants:

$$\phi_{\mu, \eta, \zeta}^{(1)}(X) = \mu + [1 - \eta(X - \phi_0(X))\zeta(\phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu) \quad (2.2)$$

$$\phi_{\mu, \psi}^{(2)}(X) = \mu + [1 - \psi(X - \phi_0(X), \|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu) \quad (2.3)$$

En combinant ces deux cas particuliers on a :

$$\phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}(X) = \mu + [1 - \eta(X - \phi_0(X))\rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu) \quad (2.4)$$

On a ensuite, comme cas particulier de $\phi^{(1,2)}$

$$\phi_{\mu, \rho, r}^{(3)}(X) = \mu + [1 - \sigma^{2(1-r)}\rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu) \quad (2.5)$$

(utilisé si σ^2 est connu; l'indice r est omis s'il est égal à 0, avec r réel).

On a aussi, comme cas particulier de $\phi^{(1,2)}$, dans le cas où σ^2 est inconnu et doit être estimé

$$\phi_{\mu, \rho, r}^{(3)'}(X) = \mu + \left[1 - \left(\frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{n-p} \right)^{1-r} \rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2) \right] (\phi_0(X) - \mu) \quad (2.6)$$

(Adaptation de $\phi_{\mu, \rho, r}^{(3)}$ au cas où σ^2 doit être estimé)

Un autre cas particulier de $\phi^{(1,2)}$ est

$$\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}(X) = \mu + [1 - \eta(X - \phi_0(X))(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)^{r-1}] (\phi_0(X) - \mu) \quad (2.7)$$

Qui, combiné avec $\phi^{(3)}$ et $\phi^{(3)'}$, quand σ^2 est connu, (c réel), donne

$$\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)}(X) = \mu + \left[1 - c \left(\frac{\sigma^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right)^{1-r} \right] (\phi_0(X) - \mu) \quad (2.8)$$

et quand σ^2 est inconnu donne

$$\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)'}(X) = \mu + \left[1 - c \left(\frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{(n-p)\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right)^{1-r} \right] (\phi_0(X) - \mu) \quad (2.9)$$

Enfin des cas particuliers de $\phi^{(3,4)}$ et $\phi^{(3,4)'}$ sont les estimateurs primitifs de James-Stein:

$$\phi_{JS,\mu}(X) = \mu + \left[1 - \frac{(p-2)\sigma^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

et

$$\phi_{JS,\mu}'(X) = \mu + \left[1 - \frac{(p-2)\|X - \phi_0(X)\|^2}{(n-p+2)\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

c) Principaux résultats

i) Les formules de calcul des risques, et leur spécialisation au cas des estimateurs de type (1,2) (Propositions 2.5 et 2.7) relèvent du calcul "statistique linéaire" le plus classique et se trouvent sous une forme ou une autre, dans n'importe quel "text book" traitant un passage de la statistique linéaire et Bayésienne. Ils n'ont donc d'autre originalité que leur présentation dans le cadre des estimateurs de James-Stein les plus généraux, adopté ici

ii) Pour les estimateurs de type (3), avec $r = 0$, et rappelons le, quand σ^2 est connu, W. E. Strawderman [24], améliorant un résultat de A. J. Baranchik [3], a fourni une condition suffisante de domination de l'estimateur des moindres carrés (à savoir le fait que l'application $u \sim u\rho(u)$ est croissante et dominée par $2(p-2)$). Nous avons étendu ce résultat aux cas de tous les estimateurs de type (1,2) (Proposition 2.5) et même dans le cas Bayésien qu'on ne résume pas dans ce travail. Le majorant dépendant alors de la fonction η . Ceci nous a permis en particulier de généraliser le résultat de W. E. Strawderman [24] aux estimateurs de type (3), utilisables quand σ^2 est inconnu.

iii) Troncatures : Il semble naturel de penser qu'une fonction de rétrécissement "doit" être à valeur dans $[0, 1]$, et que, s'il n'en est pas ainsi, on l'améliore en la tronquant en ces valeurs. C'est en fait évident dans le cas Bayésien; dans le cas classique, et pour la troncature en 0, cela a été démontré par A. J. Baranchik [2] pour l'estimateur primitif de James-Stein; mais son calcul s'étend immédiatement (Proposition 2.12) pour la troncature en 1. Nous fournissons (en Proposition 2.13) une caractérisation de certains estimateurs de type (2) pour lesquels cette amélioration a lieu.

II.2 Introduction du modèle

a) Modèle

On observe un vecteur aléatoire X de loi normale, multidimensionnelle, de moyenne θ et de matrice de covariance $\sigma^2 \Sigma$:

$$X \sim N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma)$$

Σ est connue et régulière et suivant les cas étudiés, σ^2 sera supposé connu ou inconnu. Chaque fois que cela ne prête pas à confusion, on note $\| \cdot \|$ (respectivement \perp) la norme (respectivement l'orthogonalité) définie par la forme quadratique (respectivement la forme bilinéaire symétrique) définie par Σ^{-1} . On suppose que θ appartient à Θ sous-espace vectoriel de R^n , de dimension p connu ($2 < p < n$). Dans tout le texte, U désignera la matrice (n, p) d'une application linéaire de R^p dans R^n dont l'image est Θ . On suppose de plus, que les colonnes de U sont Σ^{-1} orthogonales. Autrement dit U est la matrice d'une isométrie de R^p (muni de la distance euclidienne usuelle) dans R^n (muni de la distance associée à Σ^{-1}), dont l'image est Θ . Elle vérifie

$${}^t U \Sigma^{-1} U = I_p.$$

De même V désignera la matrice $(n-p, p)$ d'une isométrie de R^{n-p} (muni de la distance euclidienne usuelle) dans R^n (muni de la distance associée à Σ^{-1}) dont l'image est Θ^\perp . Elle vérifie

$${}^t V \Sigma^{-1} V = I_{n-p}.$$

Suivant les circonstances σ^2 sera supposé connu ou inconnu (et dans ce cas on exige $p < n$); et dans tout les cas on exige que $\sigma^2 > 0$, de sorte que le support de la distribution de X est R^n tout entier.

Soit $\phi(X)$ un estimateur de θ : On utilise la fonction de coût quadratique relativement à la forme bilinéaire associée à Σ :

$$L_{\sigma^2 \Sigma}(\phi; \theta) = \frac{\|\phi(X) - \theta\|_{\Sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{{}^t(\phi(X) - \theta) \Sigma^{-1} (\phi(X) - \theta)}{\sigma^2}$$

On note $R(\theta, \sigma; \phi)$ la valeur en θ de la fonction de risque de l'estimateur ϕ :

$$\begin{aligned} R(\theta, \sigma; \phi) &= E_{\theta}(L_{\sigma^2 \Sigma}(\phi; \theta)) \\ &= \int_{R^n} (\|\phi(x) - \theta\|^2) N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx) \end{aligned}$$

où on a noté $N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx)$ la densité de la loi gaussienne dans R^n . Si σ^2 est connu on notera $R(\theta; \phi)$ pour $R(\theta, \sigma; \phi)$.

On note ϕ_0 l'estimateur des moindres carrés généralisé de θ : c'est le projecteur orthogonal sur Θ , relativement à la forme bilinéaire symétrique définie par Σ^{-1} . Sa matrice est :

$$\Phi_0 = U({}^t U \Sigma^{-1} U)^{-1} {}^t U \Sigma^{-1} = U {}^t U \Sigma^{-1}$$

Son risque est constant et égal à p . Il est minimax.

L'estimateur sans biais de sa variance est :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{n - p}$$

b) Définition générale

Soit l'estimateur $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X)$ défini par (2.1). l'estimateur de James-Stein généralisé associé à la fonction de rétrécissement ξ et au pôle μ . Le risque de cet estimateur est noté :

$$R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi)$$

Dans le cas particulier où $\mu = 0$, on note

$$\phi_{\xi}^{(0)} \text{ pour } \phi_{0, \xi}^{(0)} \text{ et } R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi) \text{ pour } R^{(0)}(\theta, \sigma; 0, \xi)$$

Dans ce qui suit nous considérerons les différents cas particuliers des estimateurs de James-Stein généralisés cités plus haut. Nous comparons les différents estimateurs de James-Stein généralisés introduits, en recherchant en particulier si, dans telle ou telle sous-classe il en existe un uniformément meilleur que les autres.

c) Cas particuliers

On remarque que les deux "composantes" de ξ , c'est à dire $X - \phi_0(X)$ et $\phi_0(X) - \mu$ sont $N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma)$ indépendantes. Ceci explique les simplifications dans le calcul des risques pour les estimateurs où ξ est le produit de deux facteurs dépendants séparément de $X - \phi_0(X)$ et $\phi_0(X) - \mu$.

Ces estimateurs seront dits estimateurs de James-Stein généralisés de type (1); on note alors

$$\phi_{\mu, \eta, \zeta}^{(1)}(X) = \phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X)$$

où $\xi(v, u) = \eta(v)\zeta(u)$, avec $u := \phi_0(X) - \mu$ et $v := X - \phi_0(X)$

Le risque de cet estimateur est noté

$$R^{(1)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, \zeta) = R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi)$$

Un autre cas particulier important des estimateurs de James-Stein généralisés, est celui des estimateurs de James-Stein généralisés de type 2, pour lesquels ξ ne dépend de $\phi_0(X) - \mu$ que par l'intermédiaire de la norme $\|\phi_0(X) - \mu\|$, on note alors

$$\phi_{\mu, \psi}^{(2)}(X) = \phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X)$$

où $\xi(v, u) = \psi(v, \|u\|^2)$. Le risque de cet estimateur est noté

$$R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi) = R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi)$$

Les estimateurs à la fois de type 1 et 2 seront dits de type (1,2) et on note alors

$$\phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}(X) = \phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X)$$

où $\xi(v, u) = \eta(v)\rho(\|u\|^2)$. Le risque de cet estimateur est noté

$$R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, \rho) = R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi)$$

II.3 Calcul du risque des estimateurs de James-Stein généralisés

a) Les composantes de X sont indépendantes et identiquement distribuées.

On note $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ la matrice (n, n) symétrique, vérifiant $(\Sigma^{\frac{1}{2}})^2 = \Sigma$ et on rappelle que $(\Sigma^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\Sigma^{-1})^{\frac{1}{2}}$ (on le note $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$). X suit la loi $N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma)$ et soit $X^* = \Sigma^{-\frac{1}{2}} X$; X^* suit alors la loi $N_n(\theta^*, \sigma^2 I_n)$ où $\theta^* = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \theta$. L'ensemble des valeurs de θ^* est le sous-espace vectoriel Θ^* de R^n image de Θ par une application linéaire (de même dimension p) de matrice:

$$U^* = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U$$

A tout estimateur ϕ de θ calculé sur l'observations X , on associe l'estimateur ϕ^* de $\theta^* (= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \theta)$ calculé sur l'observation $X^* (= \Sigma^{-\frac{1}{2}} X)$; défini par:

$$\phi^*(X^*) = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \phi(\Sigma^{\frac{1}{2}} X^*)$$

Il est clair que l'application $\phi \rightsquigarrow \phi^*$ définit une bijection de l'ensemble des applications mesurables de R^n dans Θ sur l'ensemble des applications mesurables de R^n dans Θ^* . Notons aussi que ϕ_0 étant le projecteur orthogonal sur Θ , relativement à Σ^{-1} , ϕ_0^* est le projecteur orthogonal sur Θ^* , relativement à I_n . En effet on a, pour tout $\theta^* \in \Theta^*$ et tout X^*

$$\begin{aligned} {}^t(\theta^* - \phi_0^*(X^*))\theta^* &= {}^t(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\theta - \Sigma^{-\frac{1}{2}}\phi_0(X))\Sigma^{-\frac{1}{2}}\theta \\ &= {}^t(\theta - \phi_0(X))\Sigma^{-1}\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rappelons ce résultat connu, pour tout estimateur ϕ .

Lemme 2.1 (Lemme 1 D. Benmansour et A. Martin [4]) *La valeur du risque (relativement à la fonction de coût $L_{\sigma^2 \Sigma}$) de ϕ en θ , est égale à la valeur du risque (relativement à la fonction de coût $L_{\sigma^2 I_n}$) de ϕ^* en $\theta^* (= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \theta)$.*

Démonstration Notons par $N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx)$ la densité d'une gaussienne $N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma)$

$$\begin{aligned}
R(\theta, \sigma; \phi) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} (\phi(x) - \theta) \Sigma^{-1} (\phi(x) - \theta) N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} (\phi^*(\Sigma^{-\frac{1}{2}} x) - \theta^*) \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (\phi^*(\Sigma^{-\frac{1}{2}} x) - \theta^*) N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} (\phi^*(\Sigma^{-\frac{1}{2}} x) - \theta^*) (\phi^*(\Sigma^{-\frac{1}{2}} x) - \theta^*) N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|\phi^*(x^*) - \theta^*\|_{I_n}^2 N_n(\theta^*, \sigma^2 I_n; dx^*) \\
&= R(\theta^*, \sigma; \phi^*)
\end{aligned}$$

D'où le résultat \square

Il résulte de ce lemme que toute propriété relative au risque des estimateurs, et démontrée dans le cas où $\Sigma = I_n$ se transforme au cas général avec Σ symétrique définie positive. On pourra donc se limiter dans de nombreuses démonstrations au cas où $\Sigma = I_n$.

b) Cas particulier où le pôle est l'origine

Lemme 2.2 (Lemme 2 [4]) *La valeur du risque de l'estimateur de James-Stein généralisé de pôle μ et de fonction de rétrécissement ξ est égal, en $\theta = \mu$, au risque de l'estimateur de James-Stein généralisé de pôle 0 et de même fonction de rétrécissement ξ*

$$R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi) = R^{(0)}(\theta - \mu, \sigma; \xi)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
R^{(0)}(\theta, \sigma; \mu, \xi) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|\mu + [1 - \xi(x - \phi_0(x), \phi_0(x) - \mu)](\phi_0(x) - \mu) - \theta\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|1 - \xi(x - \phi_0(x), \phi_0(x) - \mu)(\phi_0(x) - \mu) - (\theta - \mu)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 \Sigma; dx) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|[1 - \xi(z - \phi_0(z), \phi_0(z))] \phi_0(z) - (\theta - \mu)\|^2 N_n(\theta - \mu, \sigma^2 \Sigma; dz) \\
&= R^{(0)}(\theta - \mu, \sigma; \xi)
\end{aligned}$$

D'où le résultat \square

Il résulte des Lemmes 2.1 et 2.2 que toute propriété relative au risque des estimateurs de James-Stein généralisés, et démontrée dans le cas où $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$, se transfère au cas général.

c) Condition pour que le risque soit fini:

Dans ce paragraphe nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de finitude de risques.

Lemme 2.3 (Lemme 3 [4]) *Pour que la valeur du risque de l'estimateur de James-Stein généralisé $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}$ soit finie, il faut et il suffit que*

i)

$$\int_{R^p \times R^{n-p}} \xi^2(\sigma Vt, \sigma Ux) \|x\|^2 N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) < +\infty$$

où γ vérifie: $U\gamma = \theta - \mu$

Dans le cas d'un estimateur de type (1), $\phi_{\mu, \eta, \xi}^{(1)}$ cette condition devient

ii)

$$\int_{R^p} \xi^2(\sigma Ux) \|x\|^2 N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) \left(\int_{R^{n-p}} \eta^2(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \right) < +\infty$$

Dans le cas d'un estimateur de type (2), $\phi_{\mu, \psi}^{(2)}$ cette condition devient

iii)

$$\int_{R^+ \times R^{n-p}} \psi^2(\sigma Vt, \sigma^2 w) w \chi_p^2\left(\left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2; dw\right) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) < +\infty$$

Démonstration On supposera être dans le cas où $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$

i)

$$R^{(0)}(\theta, \sigma; \xi) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|\phi_0(x) - \theta - \xi(x - \phi_0(x), \phi_0(x))\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx)$$

Soit $z (\in R^p)$ tel que $\phi_0(x) = Uz$; z existe et est unique, car U est une isométrie de R^p sur Θ ; la loi de z est $N_p(\gamma, \sigma^2 I_p)$, où $\theta = U\gamma$; on remarque que $\|\theta\| = \|\gamma\|$.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \|\phi_0(x) - \theta\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) &= \int_{R^p} \|z - \gamma\|^2 N_p(\gamma, \sigma^2 I_p; dz) \\ &= p\sigma^2 < \infty \end{aligned}$$

Pour que $R^{(0)}(\theta, \sigma; \xi)$ soit fini, il faut et il suffit donc que

$$\int_{R^n} \xi^2(x - \phi_0(x), \phi_0(x)) \|\phi_0(x)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) < \infty \quad (2.10)$$

Soit alors t tel que $x - \phi_0(x) = \sigma Vt$; t existe et est unique, car V est la matrice d'une isométrie de R^{n-p} sur Θ^+ ; la loi de t est $N_{n-p}(0, I_{n-p})$; il résulte alors de l'indépendance des variables aléatoires $X - \phi_0(X)$ et $\phi_0(X)$ que (2.10) s'exprime dans ce cas

$$\int_{R^p \times R^{n-p}} \xi^2(\sigma Vt, \sigma Ux) \|x\|^2 N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt)$$

D'où le résultat *i*).

ii) est une conséquence immédiate de *i*)

iii) Par définition même d'un estimateur de type (2), la condition *iii*) s'exprime dans ce cas

$$\int_{R^p \times R^{n-p}} \psi^2(\sigma Vt, \sigma^2 \|Ux\|^2) \|x\|^2 N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) < +\infty \quad (2.11)$$

Or $\|Ux\| = \|x\|$

Et puisque $U\gamma = \theta - \mu$, $\|\gamma\|^2 = \|\theta - \mu\|^2$, la loi de $\|X\|^2$ est la loi du χ^2 décentrée $\chi_p^2\left(\frac{\|\theta - \mu\|^2}{\sigma^2}\right)$ et le premier membre de (2.11) s'exprime par

$$\int_{R^+ \times R^{n-p}} \psi^2(\sigma Vt, \sigma^2 w) w \chi_p^2\left(\left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2; dw\right) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt)$$

D'où le résultat \square

II.4 Estimateurs de James-Stein généralisés de type (1,2)

a) Généralités

On rappelle que les estimateurs de James-Stein généralisés de type (1,2) sont ceux de la forme ($\mu = 0$)

$$\phi_{\eta, \rho}^{(1,2)}(X) = [1 - \eta(X - \phi_0(X)) \rho(\|\phi_0(X)\|^2)] \phi_0(X)$$

Le calcul du risque de $\phi_{\eta, \rho}^{1,2}$ est précisé par le lemme suivant.

Lemme 2.4 (Lemme 4 [4]) *On suppose que*

$$A_2(\sigma) = \int_{R^{n-p}} \eta^2(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) < +\infty$$

et on pose

$$A_1(\sigma) = \int_{R^{n-p}} \eta(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt)$$

Alors, si

$$\int_{R^+} \rho^2(\sigma^2 u) u \chi_p^2\left(\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}; du\right) = +\infty$$

la valeur du risque de $\phi_{\eta, \rho}^{1,2}$ est infinie, sauf dans le cas particulier où η est presque sûrement nulle sur Θ^\perp (auquel cas $\phi_{\eta, \rho}^{(1,2)}$ et $\phi^{(0)}$ ont le même risque égal à p)

Si

$$\int_{R^+} \rho^2(\sigma^2 u) u \chi_p^2 \left(\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}; du \right) < \infty$$

la valeur du risque de $\phi_{\eta, \rho}^{1,2}$ est finie et

$$\begin{aligned} R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho) &= p - \int_N \left[\int_{R^-} 2A_1(\sigma) \rho(\sigma^2 u) (u - 2h) \right] \Pi \left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}; dh \right) \\ &\quad - \int_N \left[\int_{R^+} A_2(\sigma) \rho^2(\sigma^2 u) u \chi_{p+2h}^2(du) \right] \Pi \left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}; dh \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $\Pi(\lambda)$ indique la loi de Poisson de paramètre λ

Démonstration

Rappelons qu'on suppose être dans le cas où $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$. La condition de finitude résulte de $R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho)$ résulte immédiatement des inégalités *ii*) et *iii*) du Lemme 2.3.

Soit donc désormais

$$\int_{R^+} \rho(\sigma^2 w) w \chi_p^2 \left(\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}; dw \right) < +\infty$$

on a alors

$$\begin{aligned} R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|\phi_0(x) - \theta - \eta(x - \phi_0(x))\rho(\|\phi_0(x)\|^2)\phi_0(x)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \|\phi_0(x) - \theta\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\ &\quad + \int_{R^n} \eta^2(x - \phi_0(x)) \rho^2(\|\phi_0(x)\|^2) \|\phi_0(x)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\ &\quad - 2 \int_{R^n} \eta(x - \phi_0(x)) \rho(\|\phi_0(x)\|^2)^t(\phi_0(x)) (\phi_0(x) - \theta) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \end{aligned}$$

D'autre part, si on pose (comme dans la démonstration du Lemme 2.3) : $\phi_0(x) = Uz = \sigma Uy$, $x - \phi_0(x) = \sigma Vt$ et $\theta = U\gamma$, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \eta(x - \phi_0(x)) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) &= \int_{R^{n-p}} \eta(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \\ &= A_1(\sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \eta^2(x - \phi_0(x)) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) &= \int_{R^{n-p}} \eta^2(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \\ &= A_2(\sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{R^n} \rho(\|\phi_0(x)\|^2)^t \phi_0(x)(\phi_0(x) - \theta) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\
&= \sigma^2 \int_{R^p} \rho(\sigma^2 \|x\|^2)^t x \left(x - \frac{\gamma}{\sigma}\right) N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) \\
&= \sigma^2 \int_N \left[\int_{R^+} \rho(\sigma^2 u)(u - 2h) \chi_{p+2h}^2(du) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}; dh\right)
\end{aligned}$$

(où on a utilisé, pour la dernière égalité, la formule (iv) du Lemme 4 de l'Appendice).

$$\begin{aligned}
J &:= \int_{R^n} \rho^2(\|\phi_0(x)\|^2) \|\phi_0(x)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\
&= \sigma^2 \int_{R^p} \rho(\sigma^2 \|x\|^2) \|x\|^2 N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) \\
&= \sigma^2 \int_N \left[\int_{R^+} \rho(\sigma^2 u) u \chi_{p+2h}^2(du) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}; dh\right)
\end{aligned}$$

(où on a utilisé, pour la dernière égalité, le Lemme 2 de l'Appendice). Il en résulte que

$$\begin{aligned}
R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho) &= p - 2A_1(\sigma) \int_N \left[\int_{R^+} \rho(\sigma^2 u)(u - 2h) \chi_{p+2h}^2(du) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}; dh\right) \\
&\quad + A_2(\sigma) \int_N \left[\int_{R^+} \rho^2(\sigma^2 u) u \chi_{p+2h}^2(du) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}; dh\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat \square

Une famille d'estimateur de James-Stein généralisés de type (1,2) uniformément meilleurs que ϕ_0 est fournie par la proposition suivante

Proposition 2.5 (Proposition 1 [4]) *Soit un estimateur de James-Stein généralisé de type (1,2)*

$$\phi_{\eta, \rho}^{(1,2)}(X) = \left[1 - \eta(X - \phi_0(X)) \rho(\|\phi_0(X)\|^2) \right] \phi_0(X)$$

On suppose que η et ρ sont à valeurs positives ou nulles, et que

$$A_2(\sigma) = \int_{R^{n-p}} \eta^2(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) < \infty$$

où V est une isométrie de R^{n-p} sur Θ^\pm et rappelons

$$A_1(\sigma) = \int_{R^{n-p}} \eta(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt)$$

Alors une condition suffisante pour que $\phi_{\eta, \rho}^{(1,2)}$ soit uniformément meilleur que ϕ_0 , est que pour tout σ , l'application définie sur R^+ par : $u \rightsquigarrow u\rho(\sigma^2 u)$ soit croissante et majorée par $2(p-2) \frac{A_1(\sigma)}{A_2(\sigma)}$. (Ce qui suppose, pour que $\phi_{\eta, \rho}^{(1,2)}$ ne coïncide pas avec ϕ_0 ,

que $p \geq 3$).

Démonstration L'application $u \rightsquigarrow u\rho(\sigma^2 u)$ étant majorée, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} u\rho(\sigma^2 u) \chi_p^2\left(\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}; du\right) < +\infty$$

Il en résulte du Lemme 2.4 que $R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho)$ est fini. De même du Lemme 2.4 (égalité (2.12)), une condition suffisante pour que l'on ait, pour tout (θ, σ) , $R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho) \leq p$ est que, pour tout entier positif ou nul h , on ait

$$B_h := \int_{\mathbb{R}^+} [2A_1(\sigma)\rho(\sigma^2 u)(u - 2h) - A_2(\sigma)\rho^2(\sigma^2 u)u] \chi_{p+2h}^2(du) \geq 0$$

η et ρ étant à valeurs positives ou nulles. On distingue alors deux cas:

– l'une des deux fonctions η ou ρ est presque sûrement nulle (relativement à toute mesure de Lebesgue sur Θ^\perp (resp Θ)) et alors $R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \eta, \rho) = p$.

– η et ρ ne sont pas presque sûrement nulles, alors $A_1(\sigma) > 0$, $A_2(\sigma) > 0$ et $p \geq 3$. Nous nous situons désormais dans ce cas. Il vient

$$B_h = A_1(\sigma) \int_{\mathbb{R}^+} u\rho(\sigma^2 u) \left[2\left(1 - \frac{2h}{u}\right) - \frac{A_2(\sigma)}{A_1(\sigma)} \rho(\sigma^2 u) \right] \chi_{p+2h}^2(du)$$

Par hypothèse, on a pour tout u , $0 \leq \rho(\sigma^2 u) \leq 2(p-2) \frac{A_1(\sigma)}{A_2(\sigma)}$

D'où

$$B_h \geq 2A_1(\sigma) \int_{\mathbb{R}^+} u\rho(\sigma^2 u) \left(1 + \frac{2-p-2h}{u}\right) \chi_{p+2h}^2(du)$$

Or $p+2h > 2$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left(1 + \frac{2-p-2h}{u}\right) \chi_{p+2h}^2(du) = 0$$

L'application $u \rightsquigarrow \frac{2-p-2h}{u}$ étant croissante, il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^+} u\rho(\sigma^2 u) \left(1 + \frac{2-p-2h}{u}\right) \chi_{p+2h}^2(du)$$

est la covariance relativement à χ_{p+2h}^2 de deux fonctions croissantes, elle est nécessairement positive ou nulle (d'après Théorème 1 Appendice). Ainsi $B_h \geq 0$ (et même $B_h > 0$ si ρ et η ne sont pas presque sûrement nulles).

D'où le résultat \square

b) Cas σ^2 connu

On suppose σ^2 connu, et on s'intéresse au cas particulier où la fonction η est constante. On peut toujours (à condition de modifier ρ en conséquence) prendre cette constante égale σ^2 . Autrement dit, on étudie les estimateurs de la forme (2.5) et $r = 0$ qui rappelons le

$$\phi_{\mu,\rho}^{(3)}(X) = \mu + [1 - \sigma^2 \rho(\|\phi_0(X) - \mu\|^2)](\phi_0(X) - \mu)$$

Ces estimateurs seront dits estimateurs de James-Stein de type (3); on notera alors

$$\phi_{\mu,\rho}^{(3)}(X) = \phi_{\mu,1,\rho}^{(2)}(X) \text{ et } R^{(3)}(\theta; \mu, \rho) = R^{(2)}(\theta; \mu, 1, \rho)$$

On a alors (en reprenant les notations de la Proposition 2.5)

$$A_1(\sigma) = \sigma^2 \text{ et } A_2(\sigma) = \sigma^4$$

Il suffit donc pour que $\phi_{\mu,\rho}^{(3)}$ soit uniformément meilleur que ϕ_0 ; que l'application $u \rightsquigarrow u\rho(\sigma^2 u)$ soit croissante (sur R^+) et majorée par $2\frac{p-2}{\sigma^2}$. Les estimateurs obtenus sont ceux proposés par W. E. Strawdermann [20].

c) Cas σ^2 inconnu

On s'intéresse au cas où on prend pour $\eta(X - \phi_0(X))$ l'estimation sans biais usuelle de σ^2 : c'est à dire où $\eta(v) = \frac{\|v\|^2}{n-p}$. Ces estimateurs seront dits estimateurs de James-Stein de type (3) adaptatifs (formule (2.6) et $r = 0$) ou de type (3)'. On notera alors

$$\phi_{\mu,\rho}^{(3)'}(X) = \phi_{\mu,\eta,\rho}^{(2)}(X) \text{ et } R^{(3)'}(\theta, \sigma; \mu, \rho) = R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, \rho)$$

et rappelons

$$\phi_{\mu,\rho}^{(3)'}(X) = \left[1 - \frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{n-p} \rho(\|\phi_0(X)\|^2) \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

On a alors (reprenant les notations de la proposition 2.5)

$$\begin{aligned} A_1(\sigma) &= \sigma^2 \\ A_2(\sigma) &= \int_{R^{n-p}} \frac{\|\sigma Vt\|^4}{(n-p)^2} N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \\ &= \frac{\sigma^4}{(n-p)^2} \int_{R^+} y^2 \chi_{n-p}^2(dy) \\ &= \sigma^4 \frac{(n-p+2)}{n-p} \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour que $\phi_{\mu,\rho}^{(3)'}$ soit uniformément meilleur que ϕ_0 , que l'application $u \rightsquigarrow u\rho(\sigma^2 u)$ soit croissante (sur R^+) et majorée par $2(p-2) \frac{A_1(\sigma)}{A_2(\sigma)} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{(p-2)(n-p)}{(n-p+2)}$. Autrement dit, que l'application $w \rightsquigarrow w\rho(w)$ soit croissante (sur R^+) et majorée par $2 \frac{(p-2)(n-p)}{(n-p+2)}$. On a ainsi obtenu une condition ne dépendant pas de σ .

II.5 Estimateurs de James-Stein généralisés de type (4)

a) Cas $\rho(w) = w^{r-1}$.

Un cas particulier fréquent des estimateurs de type (1.2) est celui où $\rho(w) = w^{r-1}$. Les estimateurs de James-Stein généralisés ainsi obtenus (formule (2.7)) sont dits de type (4), et on note

$$\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}(\mathbf{X}) = \phi_{\mu, \eta, \rho}^{(1,2)}(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad R^{(4)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, r) = R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, \rho)$$

et rappelons leur forme

$$\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}(\mathbf{X}) = \mu + \left[1 - \eta(\mathbf{X} - \phi_0(\mathbf{X})) (\|\phi_0(\mathbf{X}) - \mu\|^2)^{r-1} \right] (\phi_0(\mathbf{X}) - \mu)$$

Quand $r = 0$ on note

$$\phi_{\mu, \eta}^{(4)}(\mathbf{X}) = \phi_{\mu, \eta, 0}^{(1,2)}(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad R^{(4)}(\theta, \sigma; \mu, \eta) = R^{(1,2)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, 0)$$

Le calcul du risque de $\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}$ est précisé par le lemme suivant

Lemme 2.6 : (Lemme 5 [4]) *On suppose que*

$$A_2(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \eta^2(\sigma Vt) N_{n-p}(\mathbf{0}, I_{n-p}; dt) < +\infty$$

et on pose

$$A_1(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \eta(\sigma Vt) N_{n-p}(\mathbf{0}, I_{n-p}; dt)$$

On note, pour tout $\delta > 0$ et tout réel r

$$I_r(p, \delta) = \int_{\mathbb{R}^+} u^{r-1} \chi_p^2(\delta, du)$$

et en particulier

$$I(p, \delta) = I_0(p, \delta) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{u} \chi_p^2(\delta, du)$$

Alors, si

$$r \leq \frac{2-p}{4}$$

le risque de $\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}$ est infini, sauf dans le cas particulier où η est presque sûrement nulle sur Θ^\perp (auquel cas $\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)} = \phi_0$).

Si

$$r > \frac{2-p}{4}$$

le risque de $\phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}$ est fini quelque soit θ et vaut

$$R^{(4)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, r) = p - 2A_1(\sigma)(p + 2r - 2)\sigma^{2(r-1)}I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \\ + A_2(\sigma)\sigma^{4(r-1)}I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.13)$$

Dans le cas particulier où $r = 0$; on a pour $p > 2$

$$R^{(4)}(\theta, \sigma; \mu, \eta,) = p - \left[\frac{2(p-2)A_1(\sigma)}{\sigma^2} - \frac{A_2(\sigma)}{\sigma^4} \right] I_0\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.14)$$

Démonstration On prend comme convenu $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$. La condition de finitude du risque résulte de celle énoncée dans le Lemme 2.4. La condition

$$A_2(\sigma) < +\infty$$

s'exprime en effet ici

$$\int_{R^+} u^{2(r-1)} \chi_p^2\left(\left(\frac{\|\theta\|}{\sigma}\right)^2; du\right) < +\infty$$

c'est à dire $2(r-1) > -\frac{p}{2}$.

Le calcul du risque effectué dans la démonstration du Lemme 2.4 se modifie ici car

$$J_1 := \int_{R^n} \rho(\|\phi_0(y)\|^2)^t (\phi_0(y))(\phi_0(y) - \theta) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dy) \\ = \int_{R^n} \|\phi_0(y)\|^{2(r-1)t} (\phi_0(y))(\phi_0(y) - \theta) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dy) \\ = \sigma^{2r} \int_{R^p} \|x\|^{2(r-1)t} x \left(x - \frac{\gamma}{\sigma}\right) N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) \\ = \sigma^{2r}(p + 2r - 2) \int_{R^+} u^{(r-1)} \chi_p^2\left(\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}; du\right) \\ = \sigma^{2r}(p + 2r - 2) I_r\left(p, \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)$$

avec $\theta = U\gamma$ et donc $\|\theta\|^2 = \|\gamma\|_{I_n}^2$, et pour la dernière égalité, on a appliqué la formule iv) du Corollaire 5 de l'Appendice. Ainsi

$$\begin{aligned}
J_2 &:= \int_{\mathbb{R}^n} \rho^2(\|\phi_0(y)\|^2) \|\phi_0(y)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \|\phi_0(y)\|^{4r-2} N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dy) \\
&= \sigma^{2(2r-1)} \int_{\mathbb{R}^p} \|x\|^{2(2r-1)} N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) \\
&= \sigma^{2(2r-1)} \int_{\mathbb{R}^p} u^{2r-1} \chi_p^2\left(\left(\frac{\|\gamma\|}{\sigma}\right)^2; du\right) \\
&= \sigma^{2(2r-1)} I_{2r}\left(p, \frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
R^{(4)}(\theta, \sigma; \eta, r) &= p - 2A_1(\sigma)(p + 2r - 2)\sigma^{2(r-1)} I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta\|}{\sigma}\right)^2\right) \\
&\quad + A_2(\sigma)\sigma^{4(r-1)} I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta\|}{\sigma}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

La simplification de (2.14) dans le cas où $r = 0$ est évidente.
D'où le résultat. \square

b) Cas σ^2 connu

On suppose σ^2 connu, et on s'intéresse au cas particulier où la fonction η est constante. On la notera $c\sigma^{2(1-r)}$. Autrement dit, on s'intéresse aux estimateurs dont on rappelle la forme (formule (2.8))

$$\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}(X) = \mu + \left[1 - c \left(\frac{\sigma^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right)^{1-r} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

On notera alors en posant $\eta(v) = c\sigma^{2(1-r)}$

$$\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}(X) = \phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}(X) \quad \text{et} \quad R^{(3,4)}(\theta, \sigma; \mu, c, r) = R^{(4)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, r)$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.7 (Proposition 2 [4]) *La fonction du risque de l'estimateur de James-Stein généralisé de type (3,4) est infinie (sauf pour $c = 0$ cas où $\phi_{\mu, 0, r}^{(3,4)} = \phi_0$) si et seulement si $p \leq 2(1 - 2r)$.
Si $p > 2(1 - 2r)$ on a*

$$R^{(3,4)}(\theta; \mu, c, r) = p - 2c(p + 2r - 2)I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) + c^2 I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.15)$$

où pour tout $\delta > 0$, $p \in N$ et tout $r > -\frac{p}{2} + 1$,

$$I_r(p, \delta) = \int_{R_+} u^{r-1} \chi_p^2(\delta, du)$$

Pour $p \geq 3$ et $\frac{2-p}{4} < r \leq 0$; $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ est uniformément meilleur que l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 pour tout c tel que

$$0 \leq c \leq \frac{(p + 2r - 2) \Gamma\left(\frac{p}{2} + r - 1\right)}{2^{r-1} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 2r - 1\right)}$$

Parmi tous ces estimateurs, le meilleur est celui obtenu pour $r = 0$ et $c = p - 2$.

Démonstration On a ici (notation du Lemme 2.6)

$$A_1(\sigma) = c(\sigma^2)^{1-r} \text{ et } A_2(\sigma) = c^2(\sigma^2)^{2(1-r)}$$

Il résulte donc immédiatement du Lemme 2.6 que le risque de $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ est fini si et seulement si $p > 2(1 - 2r)$; et vaut

$$R^{(3,4)}(\theta; \mu, c, r) = p - 2c(p + 2r - 2)I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) + c^2 I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)$$

Pour θ fixé, ce risque est inférieur ou égal à celui de ϕ_0 si et seulement si

$$2(p + 2r - 2)cI_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) - c^2 I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \geq 0$$

Autrement dit si

$$0 \leq c \leq 2(p + 2r - 2) \frac{I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite uniformément en (θ, σ) ; il faut et il suffit que

$$0 \leq c \leq 2(p + 2r - 2) \inf_{\delta > 0} \frac{I_r(p, \delta)}{I_{2r}(p, \delta)}$$

où $\delta = \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2$.

Supposons $r \leq 0$ (ce qui implique, pour que l'inégalité $\frac{2-p}{4} < r$ puisse être satisfaite, que $p \geq 3$) on a alors

$$-\frac{p}{2} < 2r - 1 \leq r - 1 < 0$$

Il résulte du Lemme 6 de l'Appendice que

$$\inf_{\delta \geq 0} \frac{I_r(p, \delta)}{I_{2r}(p, \delta)} = 2^{-r} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + r - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 2r - 1\right)}$$

Ainsi $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ est uniformément meilleur que ϕ_0 si et seulement si

$$0 \leq c \leq 2^{1-r}(p + 2r - 2) \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + r - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 2r - 1\right)}$$

Il résulte d'autre part de (2.15) que $R^{(3,4)}(\theta; \mu, c, r)$ prend sa valeur minima pour

$$c = (p + 2r - 2) \frac{I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}$$

Ce minimum vaut

$$H^{(3,4)}(\theta; \mu, r) = p - (p + 2r - 2)^2 \frac{\left[I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \right]^2}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}$$

Dans le cas particulier où $r = 0$, la valeur optima de c est:

$$\tilde{c} = p - 2$$

(indépendant de θ , σ et μ). Il existe donc, pour chaque μ , un estimateur optimum parmi ceux de la forme $\phi_{\mu, c}^{(3,4)}$: c'est $\tilde{\phi}_\mu = \phi_{\mu, \tilde{c}}^{(3,4)}$, dont le risque est

$$\tilde{R}(\theta; \mu) = p - (p - 2)^2 I_0\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)$$

Il reste à vérifier que pour tout (θ, μ) et tout r tel que $\frac{2-p}{4} < r \leq 0$, on a

$$H^{(3,4)}(\theta; \mu, r) \geq \tilde{R}(\theta; \mu)$$

Autrement dit

$$\left(\frac{p + 2r - 2}{p - 2}\right)^2 \frac{\left[I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) \right]^2}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right) I_0\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)} \leq 1$$

or

$$-1 \leq \frac{p + 2r - 2}{p - 2} \leq 1$$

et d'après l'inégalité de Schwartz, pour tout $\delta \geq 0$

$$\begin{aligned}
[I_r(p, \delta)]^2 &= \left[\int_{R^+} u^{r-1} \chi_p^2(\delta, du) \right]^2 \\
&= \left[\int_{R^+} u^{r-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} \chi_p^2(\delta, du) \right]^2 \\
&\leq \left[\int_{R^+} u^{2r-1} \chi_p^2(\delta, du) \right] \left[\int_{R^+} u^{-1} \chi_p^2(\delta, du) \right] \\
&= I_{2r}(p, \delta) I_0(p, \delta)
\end{aligned}$$

D'où le résultat \square

Remarque 2.8

On remarque que, pour tout μ et tout $r > 0$, il n'existe pas de valeur de c telle que l'estimateur $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ soit uniformément le meilleur. Par contre si $r = 0$, $\phi_{JS, \mu} = \phi_{\mu; p-2}^{(3,4)}$ est uniformément meilleur parmi tous les estimateurs $\phi_{\mu, c}^{(3,4)}$. C'est l'estimateur "primitif" de James-Stein de pôle μ .

$$\phi_{JS, \mu}(X) = \mu + \left[1 - \frac{(p-2)\sigma^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

L'intérêt principal de la proposition précédente est d'établir que $\phi_{JS, \mu}$ est même uniformément meilleur parmi tous les estimateurs $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ où μ est fixé, c réel et $r \in \left] \frac{2-p}{4}, 0 \right]$; son risque est

$$R_{\phi_{JS}}(\theta; \mu) = p - (p-2)^2 I_0 \left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma} \right)^2 \right)$$

Le risque $R_{JS}(\cdot; \mu)$ n'étant pas constant, les estimateurs de James-Stein primitifs correspondants à des choix distincts de μ ne sont pas comparables entre eux.

c) Cas σ^2 inconnu

On considère les estimateurs qui se déduisent des estimateurs de type (3,4) en remplaçant σ^2 par son estimation sans biais usuelle.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{n-p}$$

Autrement dit on introduit les estimateurs (formule (2.9) dont on rappelle la forme

$$\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}(X) = \left[1 - c \left(\frac{1}{n-p} \frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right)^{1-r} \right] (\phi_0(X) - \mu)$$

On notera alors, en posant $\eta(v) = c \left(\frac{\|v\|^2}{n-p} \right)^{1-r}$,

$$\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}(X) = \phi_{\mu, \eta, r}^{(4)}(X) \quad \text{et} \quad R^{(3,4)}(\theta, \sigma; \mu, c, r) = R^{(4)}(\theta, \sigma; \mu, \eta, r)$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 2.9 (Proposition 3 [4]) Soit $r < 1 + \frac{n-p}{4}$. La fonction de risque de l'estimateur de James-Stein généralisé de type (3,4), est infinie (sauf pour $c = 0$ cas où $\phi_{\mu,0,r}^{(3,4)} = \phi_0$) si et seulement si $p \leq 2(1-2r)$.

Si $p > 2(1-2r)$ (autrement dit $\frac{2-p}{4} < r$) on a

$$R^{(3,4)}(\theta, \sigma; \mu, c, r) = p - 2c(p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{1-r} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} I_r\left(p, \frac{\|\theta - \mu\|^2}{\sigma^2}\right) \\ + c^2 \left(\frac{2}{n-p}\right)^{2(1-r)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} I_{2r}\left(p, \frac{\|\theta - \mu\|^2}{\sigma^2}\right)$$

où pour $\delta > 0$, tout $p \in N^*$ et tout $r > -\frac{p}{2} + 1$

$$I_r(p, \delta) = \int_{R^+} u^{r-1} \chi_p^2(\delta, du)$$

Si $r \leq 0$ (ie $p \geq 3$); $\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)}$ est uniformément meilleur que l'estimateur des moindres carrés ϕ_0 , pour tout c tel que

$$0 \leq c \leq 2(p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{r-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + r - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 2r - 1\right)}$$

Parmi tous ces estimateurs, pour tout pôle μ fixé, le meilleur est celui obtenu pour

$$r = 0 \text{ et } c = \frac{(p-2)(n-p)}{n-p+2}$$

Démonstration Notons que (V étant une isométrie de R^{n-p} sur Θ^\perp), on a

$$A_1(\sigma) = \int_{R^{n-p}} \eta(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \\ = \int_{R^{n-p}} c \left(\frac{\|\sigma Vt\|^2}{n-p}\right)^{1-r} N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \\ = c \frac{\sigma^{2(1-r)}}{(n-p)^{1-r}} \int_{R^+} u^{1-r} \chi_{n-p}^2(du) \\ = \begin{cases} c \left(\frac{2\sigma^2}{n-p}\right)^{1-r} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} & \text{si } r < 1 + \frac{n-p}{2} \\ +\infty & \text{si } r \geq 1 + \frac{n-p}{2} \end{cases}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
A_2(\sigma) &= \int_{R^{n-p}} \eta^2(\sigma Vt) N_{n-p}(0, I_{n-p}; dt) \\
&= c^2 \frac{\sigma^{4(1-r)}}{(n-p)^{2(1-r)}} \int_{R_+} u^{2(1-r)} X_{n-p}^2(du) \\
&= \begin{cases} c^2 \left(\frac{2\sigma^2}{n-p}\right)^{2(1-r)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} & \text{si } r < 1 + \frac{n-p}{4} \\ +\infty & \text{si } r \geq 1 + \frac{n-p}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

On suppose désormais $r < 1 + \frac{n-p}{4}$. Alors d'après le Lemme 2.6, le risque de $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ est fini si et seulement si $p > 2(1-2r)$ (autrement dit $r > \frac{2-p}{4}$, ce qui est possible puisque $\frac{2-p}{4} < 1 + \frac{2-p}{4}$). Il vaut alors

$$\begin{aligned}
R^{(3,4)}(\theta, \sigma; \mu, c, r) &= p - 2c(p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{1-r} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} I_r\left(p, \frac{\|\theta - \mu\|^2}{\sigma^2}\right) \\
&\quad + c^2 \left(\frac{2}{n-p}\right)^{2(1-r)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} I_{2r}\left(p, \frac{\|\theta - \mu\|^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Pour (θ, σ) fixé, ce risque est inférieur ou égal à celui de ϕ_0 (qui coïncide avec $\phi_{\mu, 0, r}^{(3,4)}$ quelque soient μ et r) si et seulement si

$$0 \leq c \leq 2(p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{r-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)} \frac{I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite uniformément en (θ, σ) , il faut et il suffit que

$$0 \leq c \leq 2(p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{r-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)} \inf_{\delta \geq 0} \frac{I_r(p, \delta)}{I_{2r}(p, \delta)}$$

où $\delta = \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2$. Dans le cas où $r \leq 0$, on en déduit (comme dans la démonstration de la Proposition 2.7) que $\phi_{\mu, c, r}^{(3,4)}$ est uniformément meilleur que ϕ_0 si et seulement si

$$0 \leq c \leq 2(p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{r-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 2r - 1\right)}$$

Il résulte d'autre part de (2.16) que $R^{(3,4)}(\theta, \sigma; \mu, c, r)$ prend sa valeur minima pour

$$c = (p+2r-2) \left(\frac{2}{n-p}\right)^{r-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 1 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2(1-r)\right)} \frac{I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}$$

et que ce minimum vaut

$$H^{(3,4)'}(\theta, \sigma; \mu, r) = p - (p + 2r - 2)^2 \frac{[\Gamma(\frac{n-p}{2} + 1 - r)]^2}{\Gamma(\frac{n-p}{2})\Gamma(\frac{n-p}{2} + 2(1-r))} \frac{[I_r(p, (\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma})^2)]^2}{I_{2r}(p, (\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma})^2)}$$

Dans le cas particulier où $r = 0$; la valeur optima de c est

$$\bar{c}' = \frac{(p-2)(n-p)}{(n-p+2)}$$

(indépendante de θ , et σ et μ).

Il existe donc pour chaque μ , un estimateur optimal parmi ceux de la forme $\phi_{\mu, c}^{(3,4)'}$: c'est $\phi_{JS, \mu}^{(3,4)'}$, dont le risque est

$$R_{JS}'(\theta, \mu; \sigma) = p - \frac{(p-2)^2(n-p)}{(n-p+2)} I_0\left(p, \left(\frac{\|\theta\|}{\sigma}\right)^2\right)$$

Il nous reste à vérifier que pour tout triplet (θ, σ, μ) , et tout r tel que $\frac{2-p}{4} < r \leq 0$, on a

$$H^{(3,4)'}(\theta, \sigma; \mu, r) \geq R^{(3,4)'}(\theta, \sigma; \mu)$$

Autrement dit

$$\left(\frac{p+2r-2}{p-2}\right)^2 \frac{[\Gamma(\frac{n-p}{2} + 1 - r)]^2 (n-p+2)}{\Gamma(\frac{n-p}{2})\Gamma(\frac{n-p}{2} + 2(1-r))(n-p)} \frac{I_r\left(p, \left(\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma}\right)^2\right)}{I_{2r}\left(p, \left(\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma}\right)^2\right) I_0\left(p, \left(\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma}\right)^2\right)} \leq 1$$

Or on sait (voir la démonstration de la Proposition 2.9) que

$$\left(\frac{p+2r-2}{p-2}\right)^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{[I_r(p, (\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma})^2)]^2}{I_{2r}(p, (\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma})^2) I_0(p, (\frac{\|\theta-\mu\|}{\sigma})^2)} \leq 1$$

Il suffit donc d'établir que, pour tout $r \leq 0$ (ie $1-r \geq 1$)

$$\frac{[\Gamma(\frac{n-p}{2} + 1 - r)]^2}{\Gamma(\frac{n-p}{2} + 2(1-r))} \leq \frac{n-p}{n-p+2} \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)$$

Posons, pour tout $x \geq 1$

$$g(x) = \frac{[\Gamma(\frac{n-p}{2} + x)]^2}{\Gamma(\frac{n-p}{2} + 2x)}$$

On remarque que

$$g(1) = \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) \frac{n-p}{n-p+2}$$

et le résultat découle de la décroissance de la fonction g (voir Lemme 8 de l'Appendice).
D'où le résultat.

Remarque 2.10

Pour tout μ et tout $r > 0$ il n'existe pas de valeurs de c telle que $\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)}$ soit uniformément le meilleur.

Par contre si $r = 0$; $\phi'_{JS,\mu} = \phi_{\mu, \frac{(p-2)(n-p)}{n-p+2}}^{(3,4)}$ est uniformément meilleur parmi tous les estimateurs $\left(\phi_{\mu,c}^{(3,4)} = \phi_{\mu,c,0}^{(3,4)} \text{ ainsi } \phi_{c,r}^{(3,4)} \right)$. C'est l'estimateur primitif "adaptatif" de James-Stein de pôle μ

$$\phi'_{JS,\mu}(X) = \left(1 - \frac{p-2}{(n-p+2)} \frac{\|X - \phi_0(X)\|^2}{\|\phi_0(X) - \mu\|^2} \right) (\phi_0(X) - \mu)$$

L'intérêt principal de la proposition précédente est d'exprimer que $\phi'_{JS,\mu}$ est même uniformément meilleur parmi tous les estimateurs $\phi_{\mu,c,r}^{(3,4)}$ où μ , est fixé c réel et $r \in]\frac{2-p}{4}, 0]$. Son risque est

$$R'_{JS}(\theta; \mu) = p - \frac{(p-2)^2(n-p)}{(n-p+2)} I_0 \left(p, \left(\frac{\|\theta - \mu\|}{\sigma} \right)^2 \right)$$

La fonction $R'_{JS}(\cdot; \sigma, \mu)$ n'étant pas constante, les estimateurs de James-Stein primitifs correspondants à des choix distincts de μ ne sont pas comparables entre eux.

II.6 Amélioration des estimateurs de James-Stein généralisés de type (2)

a) Troncature inférieure

Il est intuitif que l'amélioration qu'apportent les estimateurs de James-Stein généralisés par rapport à ϕ_0 est due au fait que la fonction de rétrécissement ξ "rapproche" l'estimation $\phi_{\mu,\xi}^{(0)}(X)$ de μ . Ce rapprochement n'est effectif que si

$$\xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X) - \mu) \geq 0$$

En effet le Corollaire 1 dans J. Berger et M. E. Bock [5] et rappelé en Corollaire 1.17, le confirme bien. Ainsi il serait raisonnable de remplacer ξ par sa partie positive ξ^+ , dès que ξ prend des valeurs négatives. Nous allons montrer que cette modification améliore les estimateurs de James-Stein généralisés de type (2). Nous utilisons la définition suivante.

Définition 2.11 : Une application $f : R^+ \rightarrow R^+$ est dite de classe C si et seulement si elle

vérifie pour tout entier positif ou nul h , l'inégalité

$$\int_{R^+} f(w)(w-h)\chi_h^2(w)dw \geq 0 \quad (2.17)$$

Exemple : Pour tout $r > 0$ (donc $> -\frac{h}{2}$) l'application: $w \rightarrow w^r$ appartient à la classe C .
En effet

$$\begin{aligned} \int_{R^+} w^r(w-h)\chi_h^2(dw) &= \frac{2^r}{\Gamma(\frac{h}{2})} \left(2\Gamma(\frac{h}{2} + r + 1) - h\Gamma(\frac{h}{2} + r) \right) \\ &= \frac{r2^{r+1}\Gamma(\frac{h}{2} + r)}{\Gamma(\frac{h}{2})} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Notons que le rétrécisseur de ϕ_{JS}^+ est de classe C et que le rétrécisseur de ϕ_{JS}^- ne l'est pas (pour le rétrécisseur de ϕ_{JS}^+ , (2.17) s'exprime comme la covariance de deux fonctions non décroissantes alors que pour le rétrécisseur de ϕ_{JS}^- , (2.17) s'exprime comme la covariance de deux fonctions, l'une non croissante et l'autre non décroissante). Le résultat suivant donne l'amélioration de $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$ par $\phi_{\mu,\psi^+}^{(2)}$.

Proposition 2.12 (Proposition 4 [4]) Soit $\sigma^2 > 0$. On suppose que l'application ψ définie sur $\Theta \times R^+$, est telle que pour tout v , l'application

$$w \mapsto \psi^-(v, \sigma^2 w)$$

appartient à la classe C . Alors, quelque soit θ , l'estimateur de James-Stein-généralisé de type (2) $\phi_{\mu,\psi}^{(2)}$ est amélioré par $\phi_{\mu,\psi^+}^{(2)}$:

$$\forall \theta, \quad R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi) \geq R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi^+)$$

Démonstration Nous prenons toujours $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$. Il résulte des Lemmes 2.1 et 2.2 que l'inégalité sur les risques obtenue dans ce cas, s'étend au cas général. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta R &:= R^{(2)}(\theta, \sigma; \psi) - R^{(2)}(\theta, \sigma; \psi^+) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \left\| \phi_0(x) - \theta - \psi(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \phi_0(x) \right\|^2 N(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \left\| \phi_0(x) - \theta - \psi^+(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \phi_0(x) \right\|^2 N(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (A + 2B) \end{aligned}$$

où

$$A = \int_{R^n} \left\{ \psi^2(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) - (\psi^+)^2(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \right\} \|\phi_0(x)\|^2 N(\theta, \sigma^2 I_n; dx)$$

et

$$B = \int_{R^n} \psi^-(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2)^t (\phi_0(x) - \theta) \phi_0(x) N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx)$$

Il est clair que $A \geq 0$. D'autre part, d'après l'indépendance de $X - \phi_0(X)$ et $\phi_0(X)$, si on note $Q_{\theta, \sigma, n}$ (resp $Q_{\theta, \sigma, n}^1$) la loi de $X - \phi_0(X)$ (resp $\phi_0(X)$), on obtient:

$$\begin{aligned} B &= \int_{\Theta^\perp} \left(\int_{\Theta} \psi^-(v, \|u\|^2)^t (u - \theta) u Q_{\theta, \sigma, n}^1(du) \right) Q_{\theta, \sigma, n}(dv) \\ &= \int_{\Theta^\perp} \left(\int_{\Theta} \psi^-(v, \sigma^2 \|x\|^2)^t \left(x - \frac{\gamma}{\sigma}\right) x N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dy\right) \right) Q_{\theta, \sigma, n}(dv) \\ &= \sigma^2 \int_{\Theta^\perp} \left[\int_{IN} \left(\int_{R^+} \psi^-(v, \sigma^2 w) (w - 2k) \chi_{p+2k}^2(dw) \right) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}, dk\right) \right] Q_{\theta, \sigma, n}(dv) \end{aligned}$$

(On applique ici la formule iv) du Lemme 2 de l'Appendice). Par hypothèse l'application $w \mapsto \psi^-(v, \sigma^2 w)$ appartient à la classe C, on donc a pour tout κ

$$\begin{aligned} \int_{IR_+} \psi^-(v, \sigma^2 w) (w - 2\kappa) \chi_{p+2\kappa}^2(dw) &\geq \int_{IR_+} \psi^-(v, \sigma^2 w) (w - (p + 2\kappa)) \chi_{p+2\kappa}^2(dw) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $B \geq 0$. D'où le résultat. \square

b) Troncature supérieure

Le "rétrécissement" effectué par le rétrécisseur ξ est mis en défaut quand, $\xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X))$ prend une valeur supérieure ou égale à 1, car $\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X)$ et $\phi_0(X)$ se trouvent de part et d'autre de μ .

Donc il a été suggéré de remplacer ξ par:

$$\xi_* = \inf(\xi, 1) = 1 - (1 - \xi)^+$$

La Proposition 2.13 ci-dessous justifie cette méthode pour les estimateurs de James-Stein généralisés de type (2).

Proposition 2.13 (Proposition 5 [4]) Soit $\phi_{\mu, \psi}^{(2)}$ un estimateur de James-Stein généralisé de type (2). Alors l'estimateur obtenu par troncature supérieur de ψ en 1, $\phi_{\mu, \psi_*}^{(2)}$ est uniformément meilleur.

$$\forall \theta; \forall \sigma \quad R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi) \geq R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi_*)$$

Démonstration Nous prenons toujours $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$.



$$\begin{aligned}
\Delta R^{(2)} &= R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi) - R^{(2)}(\theta, \sigma; \mu, \psi_*) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \left\| \left[1 - \psi(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \right] \phi_0(x) - \theta \right\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2} \int_{R^n} \left\| \left[(1 - \psi)^+(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \right] \phi_0(x) - \theta \right\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} (A + 2B)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \int_{R^n} \left[1 - \psi(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \right]^2 \|\phi_0(x)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx) \\
&\quad - \int_{R^n} \left\{ \left[(1 - \psi)^+(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2) \right]^+ \right\}^2 \|\phi_0(x)\|^2 N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx)
\end{aligned}$$

et

$$B = \int_{R^n} (1 - \psi)^-(x - \phi_0(x), \|\phi_0(x)\|^2)^t (\phi_0(x)) \theta N_n(\theta, \sigma^2 I_n; dx)$$

Il est clair que $A \geq 0$. D'autre part, de l'indépendance de $X - \phi_0(X)$ et $\phi_0(X)$, et si on note $Q_{\theta, \sigma, n}$ (resp $Q_{\theta, \sigma, n}^1$) la loi de $X - \phi_0(X)$ (resp $\phi_0(X)$) et rappelant que $\theta = U\gamma$, on obtient :

$$B = \int_{\Theta^+} \left\{ \left[\int_{\Theta} (1 - \psi)^-(v, \|u\|^2)^t u Q_{\theta, \sigma, n}^1(du) \right] \theta \right\} Q_{\theta, \sigma, n}(dv)$$

Or

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\Theta} (1 - \psi)^-(v, \|u\|^2)^t u Q_{\theta, \sigma, n}^1(du) \right] \theta &= \sigma \int_{R^p} (1 - \psi)^-(v, \sigma^2 \|x\|^2)^t x N_p\left(\frac{\gamma}{\sigma}, I_p; dx\right) U\gamma \\
&= \sigma \int_N \left(\int_{R^+} (1 - \psi)^-(v, \sigma^2 w) \chi_{p+2+2t}^2(dw) \right) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}, dt\right) \|\gamma\|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

On a donc $B \geq 0$. (Pour la dernière égalité, on a appliqué ici la formule *iii*) du Lemme 4 de l'Appendice).
D'où le résultat. \square

c) Double troncature

Si $\phi_{\mu, \psi}^{(2)}$ est un estimateur de James-Stein généralisé de type (2), tel que ψ prenne à la fois des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement supérieures à 1, et si de plus ψ satisfait aux conditions de la Proposition 2.12, on pourra bien sûr l'améliorer en utilisant $\phi_{\mu, \psi^+}^{(2)}$ où:

$$\psi_*^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(v, w) > 1 \\ \psi(v, w) & \text{si } 0 \leq \psi(v, w) \leq 1 \\ 0 & \text{si } \psi(v, w) < 0 \end{cases}$$

Chapitre III

Classe d'estimateurs avec rétrécisseur de la moyenne d'une loi gaussienne.

III.1 Préliminaires et Généralités

Nous présentons dans ce qui suit l'essentiel de notre article publié dans la revue des " **Annales de l'ISUP** ", en octobre 2007, intitulé "**Etude d'une classe d'estimateurs avec rétrécisseur de la moyenne d'une loi gaussienne**" [8].

Le but de ce travail est surtout de dominer au mieux la partie positive de l'estimateur de James-Stein, avec des estimateurs (généralement tronqués) à rétrécisseurs aussi simples que possibles et avec un minimum de conditions imposées dessus.

Considérons X est une observation de loi gaussienne $N_p(\theta, I_p)$ dans R^p , et soit ψ une fonction mesurable, à support $[a, b]$. Nous imposons les conditions suivantes sur la fonction ψ (dans le cas où $b = +\infty$)

$$\begin{aligned} C1 & \quad E_{\theta} [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2)] < \infty \\ C2 & \quad E_{\theta} [\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2)] < \infty \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le Lemme 1.24 du chapitre I, paragraphe I.7 (Lemme 1 dans P. Shao et W. E. Strawderman [21]) est essentiel au calcul de toutes les expressions de fonctions de risque, dans tout ce qui suit. Une conséquence de ce lemme est le résultat suivant

Lemme 3.1 Soit ψ une fonction vérifiant les conditions du Lemme 1.24.

1. Si $\psi(a) = \psi(b) = 0$ on a

$$E_{\theta} [{}^t(X - \theta)X\psi(\|X\|^2)I_{\{a < \|X\|^2 < b\}}] = E_{\theta} [(2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + p\psi(\|X\|^2))I_{\{a < \|X\|^2 < b\}}] \tag{3.2}$$

2. Si $\psi(a) = 0$ et $\lim_{b \rightarrow \infty} \psi(b) = 0$ (ou ψ bornée) on a

$$E_{\theta} [{}^t(X - \theta)X\psi(\|X\|^2)I_{\{\|X\|^2 > a\}}] = E_{\theta} [(2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + p\psi(\|X\|^2))I_{\{\|X\|^2 > a\}}] \tag{3.3}$$

Démonstration Pour le résultat 1, sous la condition $\psi(a) = \psi(b) = 0$, on a directement des expressions de K_1 et K_2 du Lemme 1.24:

$K_1 = K_2 = 0$ et par suite $f(a) = f(b) = 0$.

Pour le résultat 2, sous la condition $\psi(a) = 0$ on a $K_1 = 0$ et par suite $f(a) = 0$. Sous la condition $\lim_{b \rightarrow \infty} \psi(b) = 0$ (où ψ est bornée) on a d'une part $\lim_{b \rightarrow \infty} K_2 = 0$ et d'autre part, par passage à la limite dans les intégrales finies définissant $g_1(a)$ et $g_2(b)$ on a aussi $f(b) = 0$ (Th de convergence dominée). On retrouve dans ce cas l'égalité classique de Stein[23](égalité (1.18)).

D'où le résultat. \square

Dans la suite les expressions (3.2) et (3.3) du Lemme 3.1 et le lemme suivant sont déterminants pour l'évaluation des différents risques.

Lemme 3.2

1. Soit ψ une fonction à support $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\psi(a^+)$, $\psi(b^-)$ finies.

Alors

$$E_\theta[-p\psi(\|X\|^2) - 2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + \|X\|^2\psi(\|X\|^2)] - f(a) + f(b) = \lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \quad (3.4)$$

où $\chi^2(p+2, \lambda)$ est une v.a. suivant une la loi du χ^2 décentrée à $p+2$ degrés de libertés et de paramètre de décentrage $\lambda = \|\theta\|^2$.

2. Soit ψ une fonction à support $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (resp $[a, +\infty[$), $\psi(a) = \psi(b) = 0$, et $\psi'(a^+)$, $\psi'(b^-)$ finies, (resp $\psi(a) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$, $\psi'(a^+)$ finie). Alors

$$E_\theta[-p\psi(\|X\|^2) - 2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + \|X\|^2\psi(\|X\|^2)] = \lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \quad (3.5)$$

Démonstration 1. Soit ψ une fonction à support $[a, b]$ et appliquant le Lemme 1.24 :

$$E_\theta[\langle X - \theta, X \rangle \psi(\|X\|^2)] = E_\theta[2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + p\psi(\|X\|^2)] + f(a) - f(b)$$

Par conséquent

$$E_\theta[\psi(\|X\|^2)\langle X, \theta \rangle] = E_\theta[\psi(\|X\|^2)\|X\|^2 - 2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) - p\psi(\|X\|^2)] - f(a) + f(b) \quad (3.6)$$

d'autre part, nous avons

$$E_\theta[(\psi(\|X\|^2)X)_i] = E_\theta[(X_i - \theta_i)\psi(\|X\|^2)] + \theta_i E_\theta[\psi(\|X\|^2)]$$

or

$$\begin{aligned} E_\theta[(X_i - \theta_i)\psi(\|X\|^2)] &= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{(\psi(\|x\|^2)(x_i - \theta_i)) \exp\left(-\frac{\|x - \theta\|_p^2}{2}\right)}{(2\pi)^{p/2}} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\psi(\|x\|^2)}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{\|x - \theta\|_p^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} E_\theta[\psi(\|X\|^2)] \\ &= \theta_i E[\psi(\chi^2(p+2, \lambda))] - \theta_i E_\theta[\psi(\|X\|^2)] \end{aligned}$$

où la quatrième égalité découle de [14] p. 109, et $\chi^2(p+2, \lambda)$ est une v.a suivant la loi du χ^2 décentrée à $p+2$ degrés de libertés et de paramètre de décentrage $\lambda = \|\theta\|^2$.

Ainsi

$$E_\theta[\langle X, \theta \rangle \psi(\|X\|^2)] = \lambda E[\psi(\chi^2(p+2, \lambda))] \quad (3.7)$$

Les égalités (3.6) et (3.7) impliquent finalement l'égalité (3.4).

D'où le résultat 1. \square

2) le Lemme 3.1 implique dans ce cas là que $f(a) = f(b) = 0$ et ainsi on obtient l'égalité (3.7).

D'où le résultat 2. □

Rappelons que les expressions $f(a)$ et $f(b)$ sont données par le Lemme 1.24 et qu'elles ont respectivement le signe de $\psi(a)$ et $\psi(b)$.

Considérons X est une observation de loi gaussienne $N_p(\theta, I_p)$. Nous définissons une classe d'estimateurs en posant :

$$\delta_{\phi, \psi}(X) = (\phi(\|X\|^2) + \psi(\|X\|^2))X \quad (3.8)$$

où la fonction ϕ sera soit $\phi_{JS}(X)$ ou $\phi_{JS}^+(X)$ et ψ dans les classes **A** ou **B**. Son risque quadratique est noté :

$$R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) = E_{\theta}(L(\delta_{\phi, \psi}(X), \theta))$$

ψ vérifiant les conditions C1, C2 (quand $b = +\infty$). Les conditions C1, C2 assurent la finitude du risque de $\delta_{\phi, \psi}(X)$.

Nous avons le résultat suivant qui donne une condition simple sur la fonction ψ assurant la domination de $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}$ sur $\delta_{\phi_{JS}, \psi}$ et une minoration de la différence de risque :

$$R(\phi_{JS}, \theta) - R(\phi_{JS}^+(X), \theta).$$

Proposition 3.3 Si pour tout u dans $[a, p-2]$:

$$\psi(u) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{p-2}{u} - 1 \right) \quad (3.9)$$

alors on a :

1. $\Delta R_2 = R(\delta_{\phi_{JS}, \psi}, \theta) - R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, \theta) \geq 0$ ie $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}$ domine $\delta_{\phi_{JS}, \psi}$

2. $R(\phi_{JS}(X), \theta) - R(\phi_{JS}^+(X), \theta) \geq 2 \int_a^{p-2} (p-2-u)\psi(u)\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du$

où $\chi^2(p, \|\theta\|^2, u)$ indique la densité d'une v.a. Khi deux décentrée à p degrés de libertés et de paramètre de décentrage $\|\theta\|^2$

Démonstration 1. De la définition (3.8) nous avons

$$\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X) = \phi_{JS}^+(X) + \psi(\|X\|^2)X$$

et on peut écrire alors

$$\delta_{\phi_{JS}, \psi}(X) = \phi_{JS}^+(X) + \psi(\|X\|^2)X - \phi_{JS}^-(X) = \delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X) - \phi_{JS}^-(X)$$

où $\phi_{JS}^-(X) = \max\left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1\right)X$

Ainsi en notant $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire dans R^p nous avons :

$$\begin{aligned}
\Delta R_2 &:= R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, \theta) - R(\delta_{\phi_{JS}, \psi}, \theta) \\
&= -E_\theta \left[\left(\max \left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1 \right) \right)^2 \|X\|^2 \right] + 2E_\theta [\langle (\phi_{JS}^-(X) + \psi(\|X\|^2)X - \theta), \phi_{JS}^-(X) \rangle] \\
&= E_\theta \left[\max \left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1 \right) \|X\|^2 \left\{ -\max \left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1 \right) + 2\psi(\|X\|^2) \right\} \right] \\
&\quad - 2E_\theta [\langle \theta, \phi_{JS}^-(X) \rangle]
\end{aligned}$$

Comme les fonctions $\max \left(0, \frac{p-2}{\|X\|^2} - 1 \right)$ et la densité de la loi gaussienne multidimensionnelle vérifient les conditions du Théorème 1 dans [9] (rappelé dans le paragraphe I.5.c, Théorème 1.16) par conséquent on a $E_\theta [\langle \theta, \phi_{JS}^-(X) \rangle] \geq 0$.

Par suite de la condition (3.9) sur la fonction ψ nous obtenons le résultat 1..

Pour le résultat 2. nous avons d'après la définition (3.8) de l'estimateur $\delta_{\phi, \psi}(X)$:

$$R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) = R(\phi, \theta) + E_\theta [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2)] + 2E_\theta [\langle \phi(\|X\|^2)X - \theta, \psi(\|X\|^2)X \rangle]$$

Posons

$$\Delta_\phi := R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) - R(\phi, \theta)$$

Alors

$$\Delta_\phi = E_\theta [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2)] + 2E_\theta [\|X\|^2 (\phi(\|X\|^2) \psi(\|X\|^2))] - 2E_\theta [\psi(\|X\|^2) \cdot \langle X, \theta \rangle] \quad (3.10)$$

D'après l'égalité (3.6) on a :

$$E_\theta [\psi(\|X\|^2) \langle X, \theta \rangle] = E_\theta [\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) - 2\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) - p\psi(\|X\|^2)] - f(a) + f(b)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta_\phi &= E_\theta [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) + 2\|X\|^2 \psi(\|X\|^2) [\phi(\|X\|^2) - 1]] \\
&\quad + E_\theta [4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + 2p\psi(\|X\|^2)] + f(a) - f(b)
\end{aligned} \quad (3.11)$$

De la définition (3.8) de l'estimateur $\delta_\phi(X)$ et en remplaçant $\phi = \phi_{JS}$, nous obtenons alors de (3.4) et (3.11)

$$\Delta_{\phi_{JS}} = E_\theta [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) + 4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + 4\psi(\|X\|^2)] + f(a) - f(b) \quad (3.12)$$

$$= E_\theta [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) + 2\|X\|^2 \psi(\|X\|^2) - 2(p-2)\psi(\|X\|^2)] \quad (3.13)$$

$$- 2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))$$

De même en remplaçant $\phi = \phi_{JS}^+$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta_{\phi_{JS}^+} &= E_{\theta} \left[\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) + 4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + 2p\psi(\|X\|^2) \right] + f(a) - f(b) \\ &\quad - 2 \int_a^{p-2} \psi(u) u \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du - 2 \int_{p-2}^{+\infty} (p-2) \psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= E_{\theta} \left[\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) + 2\|X\|^2 \psi(\|X\|^2) \right] - 2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \\ &\quad - 2 \int_a^{p-2} \psi(u) u \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du - 2 \int_{p-2}^{+\infty} (p-2) \psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &= E_{\theta} \left[\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) \right] - 2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \\ &\quad + 2 \int_{p-2}^{+\infty} (p-2-u) \psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \end{aligned} \quad (3.15)$$

où dans les égalités précédentes $\chi^2(p, \|\theta\|^2, u)$ indique la densité d'une loi de χ^2 décentrée à p degrés de libertés et de paramètre de décentrage $\|\theta\|^2$.

Ainsi

$$\Delta_{\phi_{JS}^+} = 2 \int_a^{p-2} (p-2-u) \psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + \Delta_{\phi_{JS}} \quad (3.16)$$

Par suite, de la définition de Δ_{ϕ} , nous avons

$$R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, \theta) - R(\delta_{\phi_{JS}, \psi}, \theta) = -R(\phi_{JS}, \theta) + R(\phi_{JS}^+, \theta) + 2 \int_a^{p-2} (p-2-u) \psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du$$

La condition (3.9) sur ψ et le résultat 1. impliquent que la différence $-R(\phi_{JS}, \theta) + R(\phi_{JS}^+, \theta)$ est négative.

D'où le résultat 2. \square

Remarquons que si $\psi = 0$, on retrouve le résultat de domination de ϕ_{JS}^+ sur ϕ_{JS} obtenu par A. J. Baranchik [2] et retrouvé par la proposition 3.3 (résultat du Corollaire 2 dans [9], rappelé dans le paragraphe I.5.c, Corollaire 1.18)

Nous avons le résultat suivant qui exclut certains choix de la fonction ψ permettant la domination de $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X)$ sur ϕ_{JS}^+ .

Proposition 3.4 Soit ψ à support $[0, b]$ où $b \leq p-2$.

Si ψ est négative, ou telle que $E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \leq 0$, alors l'estimateur

$\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X) = \phi_{JS}^+(X) + \psi(\|X\|^2)X$ ne dominera jamais $\phi_{JS}^+(X)$.

Démonstration Soit $\psi \leq 0$ à support $[0, b]$ ($b \leq p-2$) ou telle que $E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \leq 0$, les relations (3.16) et (3.13) donnent

$$\begin{aligned}
\Delta_{\phi_{JS}^+} &= 2 \int_0^b (p-2-u)\psi(u)\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + \Delta_{\phi_{JS}} \\
&= \int_0^b u\psi^2(u)\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + 2 \int_0^b (p\psi(u) + 2u\psi'(u) - u\psi(u))\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + f(0) - f(b) \\
&= \int_0^b u\psi^2(u)\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du - 2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Remarque 3.5

1. Dans l'expression de la différence de risque (3.14) associée à l'estimateur (3.8) avec $\phi_{JS}^+(X)$, on peut la transformer comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\phi_{JS}^+} &= \int_0^{p-2} u\psi(u)(\psi(u) - 2)\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + \int_{p-2}^{+\infty} (u\psi(u) - 2(p-2))\psi(u)\chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\
&\quad + 2E_{\theta} [2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) + p\psi(\|X\|^2)]
\end{aligned}$$

où on a pris ψ positive à support R^+ et en remarquant que $f(0) = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) = 0$ (on a $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = 0$). Les conditions de bornitude sur ψ rendent les deux premiers termes ci dessus négatifs et avec la condition : $E_{\theta} [p\psi(\|X\|^2) + 2\|X\|^2\psi'(\|X\|^2)] \leq 0$ on a $\Delta_{\phi_{JS}^+} \leq 0$. Ce qui permet à l'estimateur $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X)$ de dominer $\phi_{JS}^+(X)$ quelque soit $\theta \in R^p$ tel que $\theta \neq 0$. Cependant comme le référée nous l'avait signalé, d'après [10] et [11] il est vain de chercher un estimateur dominant partout la partie positive de l'estimateur de James-Stein en imposant cette troisième condition. En effet, cette condition jointe avec les conditions de bornitude sur ψ n'est satisfaite que pour ψ identiquement nulle. Ce qui réduit notre estimateur $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X) = \phi_{JS}^+(X)$, qui est sans intérêt. Par contre en utilisant un lemme dans [21] (réécrit en le Lemme 1.24 paragraphe I.7 et Le lemme 3.1 déduit du Lemme 1.24, dans le paragraphe III.1), nous donnons certains sous-espaces paramétriques où cette condition est satisfaite.

2. Une condition pour dominer l'estimateur $\phi_{JS}^+(X)$ est de le dominer en $\theta = 0$. Un choix de ψ positive ou nulle dans R^+ ne nous permet pas de dominer $\phi_{JS}^+(X)$ en $\theta = 0$. En effet:

$$R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, 0) - R(\phi_{JS}^+, 0) = 2E_0[\langle \phi_{JS}^+(X)\psi(\|X\|^2), X \rangle] + E_0[\psi^2(\|X\|^2)\|X\|^2] \quad (3.17)$$

qui est positive. Par contre (3.17) est équivalent à

$$R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, 0) - R(\phi_{JS}^+, 0) = E_0 \left[\psi(\|X\|^2)\|X\|^2 \left(\psi(\|X\|^2) + 2 \left(1 - \frac{p-2}{\|X\|^2} \right) I_{[\|X\|^2 \geq p-2]} \right) \right] \quad (3.18)$$

Ainsi (3.18) suggère que si $0 \geq \psi(u) \geq 2 \left(\frac{p-2}{u} - 1 \right)$ pour tout $u \geq p-2$. Cette différence peut être négative et donc on peut définir une autre classe d'estimateurs dominant $\phi_{JS}^+(X)$ pour tout θ dans R^p . Par contre l'estimateur proposé par [16] avec: $\delta_K(X) = \left(1 - \frac{\phi_K(\|X\|^2)}{\|X\|^2} \right) X$

où

$$\phi_K(u) = p - 2 - 2 \frac{\exp(-\frac{u}{2})}{\int_0^1 \lambda^{\frac{p}{2}-2} \exp(-\frac{u\lambda}{2}) d\lambda}$$

possède un risque égal au risque de $\phi_{JS}(X)$ en $\theta = 0$, et donc ne domine pas $\phi_{JS}^+(X)$.

Dans le Chapitre I, on trouve une classe d'estimateurs δ_T défini par : $\delta_{T,\phi_{JS}} = \phi_{JS}(X) + \psi(\|X\|^2)X$ où la fonction ψ est polynômiale du type :

$$\psi(x) = \frac{d}{(x)^{\frac{r}{2}}} \quad x > 0, \text{ avec } 2 \leq r \leq \frac{p+2}{2} \text{ et } d = (r-2)2^{\frac{r-2}{2}} \Gamma\left(\frac{p-r}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{p-2r+2}{2}\right)$$

pour dominer $\phi_{JS}(X)$. Du fait que ψ est positive, en modifiant dans ce cas leur estimateur en :

$$\delta_{T,\phi_{JS}^+}(X) = \phi_{JS}^+(X) + \psi(\|X\|^2)X \text{ on obtient un estimateur ne dominant pas } \phi_{JS}^+(X) \text{ en } \theta = 0.$$

3. Dans ([18] Théorème 3.41) propose un estimateur admissible $\delta_{\xi}(X) = \left(1 - \frac{\xi(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right)X$ et

donne des conditions nécessaires de domination de $\phi_{JS}^+(X)$. Plus précisément si ξ vérifie :

- 1) $\lim_{u \rightarrow \infty} u \xi'(u) = 0$
- 2) $\lim_{u \rightarrow \infty} \xi(u) = p - 2$,
- 3) Il existe $u_0 > p - 2$ tel que $\xi(u_0) > p - 2$.

Or

$$\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X) = \phi_{JS}^+(X) + \psi(\|X\|^2)X = \left(1 - \frac{\min(\|X\|^2, p-2) - \|X\|^2 \psi(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right)X$$

et dans ce cas $\xi(\|X\|^2) = \min(\|X\|^2, p-2) - \|X\|^2 \psi(\|X\|^2)$. Ainsi pour satisfaire les conditions de ([18] Théorème 3.41, $\psi(u)$ doit être au moins négative sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \geq p - 2$, $\lim_{u \rightarrow \infty} u(\psi(u) + u\psi'(u)) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow \infty} u\psi(u) = 0$. Et par suite $\lim_{u \rightarrow \infty} u^2\psi'(u) = 0$.

Notons que la troisième condition du Théorème 3.41 de ([18]) est surtout une condition de domination de $\phi_{JS}^+(X)$ en $\theta = \theta$. Un choix donc de ψ positive ne permet pas dans ce cas de dominer $\phi_{JS}^+(X)$ en $\theta = 0$ puisque $\min(\|X\|^2, p-2) - \|X\|^2 \psi(\|X\|^2) < p - 2$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$. Ce qui nous amène à faire un choix de fonction ψ à la "limite" par rapport à la condition 3, par exemple en prenant des fonctions ψ à support égal à $[0, p - 2]$.

III.2 Domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein

Dans le paragraphe III.1, la remarque 3.5 et les Propositions 3.3 et 3.4 nous suggèrent au moins deux classes de fonctions ψ à support $[a, b]$ où $a \geq 0$ et $b > 0$ (b pouvant être infini). Dans toute la suite les fonctions ψ vérifient les conditions C1 et C2 (quand $b = +\infty$) et nous considérons les deux classes suivantes:

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{l} \psi / \psi \geq 0 \text{ à support } [a, b], \\ 0 \leq a < b \text{ dérivable, } \psi'(0^+) < \infty, \psi'(b^-) < \infty \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{l} \psi / \psi \text{ à support } [a, b], p-2 < a < b, \\ \text{dérivable sur }]a, b[\text{ et tel que } \psi'(a^+) < \infty, \psi'(b^-) < \infty \end{array} \right\}$$

Pour toute fonction ψ nous modifions l'estimateur (3.8) en posant

$$\delta_{c, \phi_{JS}^+, \psi}(X) = \delta_{c, \phi_{JS}^+}(X) = \phi_{JS}^+(X) + c\psi(\|X\|^2)X \quad (3.19)$$

où c est un paramètre positif. Le choix de ψ positive ne permettant pas dans ce cas de dominer ϕ_{JS}^+ en $\theta = 0$, on déterminera suivant les cas des sous-ensembles paramétriques Θ de R^p , dépendant de ψ en général privés de zéro et que nous allons préciser par la suite.

Pour tout $\psi \in \mathbf{A}$ de support $[a, b]$ $a \geq 0$, $b \leq p-2$ et à l'aide du Lemme 3.2 et de la fonction f du Lemme 1.24, nous définissons la fonction g pour $\alpha \in [0, 2]$ par:

$$g(\alpha, \theta) := \int_a^b (2p\psi(u) + 4u\psi'(u) - \alpha u\psi(u) + f(a) - f(b)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du$$

Posons

$$M = \max_{\{a < u < b\}} \psi(u), m = \min_{\{a < u < b\}} \psi(u), M_0 = \max_{\{a < u < b\}} u\psi(u) \text{ et } m_0 = \min_{\{a < u < b\}} u\psi(u)$$

tels que $m > 0$, $m_0 > 0$ et $2m > M_0 > 0$.

Nous introduisons les sous-ensembles paramétriques suivants.

$$\Theta_0 = \{ \theta \in R^p \mid g(0, \theta) \geq 0 \}$$

et pour $m_1 < 0$ on pose

$$\Theta_1 = \{ \theta \in R^p \mid g(2, \theta) \leq m_1 < 0 \}$$

et alors $\sup_{\theta \in \Theta_1} g(2, \theta) := m^* \leq m_1 < 0$ (Voir en page 69 que $\Theta_\epsilon \subset \Theta_1$ et ainsi Θ_1 n'est pas vide).

Cependant ces sous-ensembles sont difficiles à expliciter par la complexité des intégrants qui les définissent.

A la place nous utilisons des sous-ensembles plus "petits" mais plus explicites :

$$\Theta_0^* = \left\{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } 0 < \lambda \leq \frac{pm_0}{M_0} \right\}$$

$$\Theta_2 = \left\{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } \lambda \geq \frac{pM}{\left(m - \frac{M_0}{2}\right)} \right\}$$

Nous remarquons que nous avons les implications suivantes :

$$\Theta_0^* \subset \Theta_0 \text{ et } \Theta_2 \subset \Theta_0^c$$

En effet pour la première implication, soit

$$\theta \in \Theta_0^* \text{ ie } 0 < \lambda \leq \frac{pm_0}{M_0}$$

De l'égalité (3.4) on a

$$g(0, \theta) = -2c\lambda E[\psi(\chi^2(p+2, \lambda))] + 2cE[\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)]$$

Comme

$$M_0 = \max_{\{a < u < b\}} u\psi(u), \text{ et } m_0 = \min_{\{a < u < b\}} u\psi(u)$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda E[\psi(\chi^2(p+2, \lambda))] &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{k! 2^{\frac{p}{2}+k+1} (\frac{p}{2}+k) \Gamma(\frac{p}{2}+k)} \int_a^b u\psi(u) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2}+k-1} du \\ &\leq \lambda \frac{M_0}{p} P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b) \end{aligned}$$

et

$$E[\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)] \geq m_0 P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b)$$

Ainsi pour $0 < \lambda \leq \frac{pm_0}{M_0}$.

$$\begin{aligned} g(0, \theta) &\geq 2c(-\lambda \frac{M_0}{p} + m_0) P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où $\theta \in \Theta_0$

La deuxième implication se fait de façon similaire.

Remarque 3.6 Nous donnons un exemple de fonction $\psi \in \mathbf{A}$ et explicitons les sous-ensembles paramétriques Θ_0^* et Θ_2 . Soit la fonction $\psi(u) = \exp(-u)$ à support $[\frac{1}{10}, 1]$ ($p = 3$). Le calcul nous donne : $M = \exp(-\frac{1}{10})$, $M_0 = \frac{1}{e}$, $m_0 = \frac{1}{10} \exp(-\frac{1}{10})$, $m = \frac{1}{e}$. Ainsi $0 < M_0 < 2m$ est vérifiée et nous avons

$$\begin{aligned} \Theta_0^* &= \left\{ \theta \in \mathbf{R}^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } 0 < \lambda \leq \frac{3}{10} \exp\left(\frac{9}{10}\right) \right\} \\ \Theta_2 &= \left\{ \theta \in \mathbf{R}^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } \lambda \geq 6 \exp\left(\frac{9}{10}\right) \right\} \end{aligned}$$

Pour étudier la domination de l'estimateur (3.8) défini par une fonction ψ dans la classe \mathbf{A} sur la partie positive ϕ_{JS}^+ nous donnons les lemmes préparatoires suivants.

Lemme 3.7 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ vérifiant les conditions du Lemme 3.2 et à support $[a, b]$ $a > 0$, $b \leq p-2$.

Si $\theta \in \Theta_0$, alors il existe $\alpha^*(\psi, \theta) \in [0, 2]$ unique tel que $g(\alpha^*(\psi, \theta)) = 0$. Plus précisément on a

$$\alpha^*(\psi, \theta) = \frac{\int_a^b (2p\psi(u) + 4u\psi'(u) + f(a) - f(b)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du}{\int_a^b u\psi'(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du}$$

Démonstration Vérifions que la fonction $g(\alpha, \theta)$ vérifie les conditions du Théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0, 2]$. D'une part, d'après le Lemme 3.2. 1) nous avons pour

$$\begin{aligned} g(2, \theta) &:= \int_a^b (2p\psi(u) + 4u\psi'(u) - 2u\psi(u)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &= E_\theta [2p\psi(\|X\|^2) + 4\|X\|^2\psi'(\|X\|^2) - 2\|X\|^2\psi(\|X\|^2) + f(a) - f(b)] \\ &= -2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

puisque $\lambda = \|\theta\|^2 \geq 0$ et $\psi \geq 0$.

D'autre part, comme par hypothèse $\theta \in \Theta_0$, c'est à dire $g(0, \theta) \geq 0$ et la dérivée de $g(\alpha, \theta)$:

$$g'(\alpha, \theta) = - \int_a^b u\psi'(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du$$

est strictement négative sur $[0, 2]$ car $\psi \geq 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique $\alpha^*(\psi, \theta) \in [0, 2]$ tel que $g(\alpha^*(\psi, \theta)) = 0$.

D'où le résultat. \square

Dans le résultat précédent on a exhibé un nombre $\alpha^*(\psi, \theta)$ qui dépend de θ . Le Lemme suivant détermine l'existence d'un nombre $\alpha^*(\psi) \in [0, 2[$ uniforme sur l'ensemble paramétrique $\Theta_0^* \cap \Theta_1$ qui sera non vide. En effet ci-dessous nous déterminons un ensemble Θ_ϵ tel que $\Theta_\epsilon \subset \Theta_1$. Donc $\Theta_\epsilon \cap \Theta_0^* \subset \Theta_1 \cap \Theta_0^*$ et l'ensemble $\Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*$ sera non vide avec un choix de ϵ très "petit".

Lemme 3.8 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ à support $[a, b]$, $a > 0, b \leq p-2$ vérifiant les conditions du Lemme 3.2 partie 1. Alors

$$\sup_{\theta \in \Theta_0^* \cap \Theta_1} \alpha^*(\psi, \theta) := \alpha^*(\psi) < 2$$

Démonstration Soit $\theta \in \Theta_0^* \cap \Theta_1$. La fonction $g(\alpha, \theta)$ vérifie $g(0, \theta) \geq 0$ et $\sup_{\theta \in \Theta_1} g(2, \theta) := m^* \leq m_1 < 0$.

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta_0^*} g(0, \theta) &= \sup_{\theta \in \Theta_0^*} (-2c\lambda E[(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))] + 2cE[\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)]) \\ &\leq 2c\lambda M + 2cM_0 \\ &\leq 2c \frac{pm_0}{M_0} M + 2cM_0 =: D < \infty \end{aligned}$$

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\alpha^*(\psi, \theta) \in [0, 2[$ tel que $g(\alpha^*(\psi, \theta)) = 0$. Comme $\sup_{\theta \in \Theta_1} g(2, \theta) := m^* \leq m_1 < 0$, alors $\sup_{\theta \in \Theta_0^* \cap \Theta_1} \alpha^*(\psi, \theta) := \alpha^*(\psi) < 2$.
D'où le résultat. \square

Notons que le Lemme 3.8 met en évidence l'existence de $\alpha^*(\psi)$ uniforme sur l'espace paramétrique $\Theta_0^* \cap \Theta_1$ et tel que, $\alpha^*(\psi) < 2$ et $g(\alpha^*(\psi)) = 0$.
Pour une fonction $\psi \in \mathbf{A}$ et sous les conditions du Lemme 3.8 associons le nombre $\alpha^*(\psi) \in]0, 2[$. Pour l'estimateur défini en (3.19) remarquons que pour les fonctions ψ et $c\psi$, on a $\alpha^*(c\psi) = \alpha^*(\psi)$. Par suite $g(\alpha^*(c\psi)) = g(\alpha^*(\psi)) = 0$.
Pour $\epsilon > 0$, considérons les racines $\tau_1(\epsilon)$ et $\tau_2(\epsilon)$ strictement positives de l'équation $\tau e^{-\frac{\tau}{2}} = \epsilon$. Nous introduisons le sous-espace paramétrique suivant :

$$\Theta_\epsilon = \{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } 0 < \tau_1(\epsilon) \leq \lambda \leq \tau_2(\epsilon) \}$$

Remarquons que Θ_ϵ est une "grande" boule compacte R^p privée d'une "petite" boule en l'origine 0.

En effet un choix de ϵ suffisamment "petit" fournit $\tau_1(\epsilon)$ suffisamment "petit" et $\tau_2(\epsilon)$ suffisamment "grand".

Ainsi l'ensemble paramétrique Θ_ϵ sera suffisamment "large" pour les applications. Notons que $\Theta_\epsilon \subset \Theta_1$.

Le résultat suivant utilise le nombre $\alpha^*(\psi)$ du Lemme 3.8 sur l'espace $\Theta_1 \cap \Theta_0^*$. Cependant sa détermination nécessite la connaissance de Θ_1 , qui n'est pas toujours explicite. Nous le remplaçons par $\Theta_\epsilon \subset \Theta_1$.

Donc

$$\Theta_\epsilon \cap \Theta_0^* \subset \Theta_1 \cap \Theta_0^*$$

ainsi nous déterminons un nombre noté aussi $\alpha^*(\psi)$ (sans changer de notation par rapport au Lemme 3.8) par le même procédé que le lemme 3.8 sur $\Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*$:

$$\alpha^*(\psi) := \sup_{\theta \in \Theta_0^* \cap \Theta_\epsilon} \alpha^*(\psi, \theta) \leq \sup_{\theta \in \Theta_0^* \cap \Theta_1} \alpha^*(\psi, \theta) < 2$$

Par exemple si on choisit $\psi(u) = (1.5 - u)I_{[0.1, 1]}(u)$, un calcul simple numérique donne $\alpha^*(\psi) = 0.75$.

Posons

$$\Theta := (\Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*) \cup \Theta_2$$

Pour l'estimateur (3.19) nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.9 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ vérifiant les conditions du Lemme 3.8 et l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X)$ défini par (3.19) où $0 < c < \frac{2-\alpha^*(\psi)}{M}$ et $\alpha^*(\psi)$ est défini ci dessus. Alors l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément sur l'espace paramétrique Θ .

Démonstration L'expression (3.14) calculée pour l'estimateur (3.19) s'écrit

$$\Delta_{c, \phi_{JS}^+} = \int_a^b c u \psi(u) [c \psi(u) - 2] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + 2c \int_a^b (p \psi(u) + 2u \psi'(u) + f(a) - f(b)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du$$

où la deuxième intégrale n'est autre que la valeur $g(0, \theta)$.

Nous distinguons les deux cas :

1. Soit $\theta \in \Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*$. Par le Lemme 3.8 et par la définition de

$$\Theta_\epsilon = \{ \theta \in R^p / \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } 0 < \tau_1(\epsilon) \leq \lambda \leq \tau_2(\epsilon) \}$$

on a

$$\begin{aligned} g(2, \theta) &:= c \int_a^b (2p \psi(u) + 4u \psi'(u) - 2u \psi(u) + f(a) - f(b)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &= -2c \lambda E[(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))] \\ &= -2c \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{k! 2^{\frac{p}{2}+k+1} (\frac{p}{2} + k) \Gamma(\frac{p}{2} + k)} \int_a^b u \psi(u) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2}+k-1} du \\ &\leq -2cm \lambda e^{-\frac{\lambda}{2}} P(a \leq \chi^2(p) \leq b) \\ &\leq -2cm \epsilon \\ &< 0 \end{aligned}$$

où la première inégalité découle du fait que la série à termes positifs est minorée par le premier terme, c'est à dire pour $k=0$. Alors $\sup_{\theta \in \Theta_\epsilon} g(2, \theta) < 0$. Pour $\theta \in \Theta_0^*$ on a $\sup_{\theta \in \Theta_0^*} g(0, \theta) \geq 0$ et donc par le Lemme 3.8 on a

$$\alpha^*(\psi) := \sup_{\theta \in \Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*} \alpha^*(\psi, \theta) \leq \sup_{\theta \in \Theta_0^* \cap \Theta_1} \alpha^*(\psi, \theta) < 2$$

Par suite on a $\alpha^*(\psi) \in]0, 2[$ et $g(\alpha^*(\psi)) = 0$.

D'une part, en ajoutant et en retranchant la quantité $\alpha^*(\psi) u c \psi(u)$ respectivement dans le premier et le deuxième intégrant de Δ_{c, ϕ_{JS}^+} ci-dessus et par le fait que $\alpha^*(c\psi) = \alpha^*(\psi)$ et $g(\alpha^*(c\psi)) = g(\alpha^*(\psi)) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\Delta_{c,\phi_{JS}^+} &= \int_a^b c u \psi(u) [c \psi(u) - 2 + \alpha^*(\psi)] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\
&\quad + c \int_a^b (2p \psi(u) + 4u \psi'(u) - \alpha^*(\psi) u \psi(u)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\
&= \int_a^b c u \psi(u) [c \psi(u) - 2 + \alpha^*(\psi)] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + g(\alpha^*(c \psi)) \\
&= \int_a^b c u \psi(u) [c \psi(u) - 2 + \alpha^*(\psi)] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du
\end{aligned}$$

D'autre part; comme c vérifie $0 < c < \frac{2 - \alpha^*(\psi)}{M}$ on obtient par définition de $M = \max_{\{a < u < b\}} \psi(u)$:

$$c \psi(u) - 2 + \alpha^*(\psi) \leq cM - 2 + \alpha^*(\psi) < 0$$

Par suite on aboutit à $\Delta_{c,\phi_{JS}^+} \leq 0$ pour tout $\theta \in \Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*$.

2. Soit $\theta \in \Theta_2$

D'une part, l'égalité (3.4) nous donne

$$\begin{aligned}
g(0, \theta) &= 2c \int_a^b (p \psi(u) + 2u \psi'(u) + f(a) - f(b)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\
&= -2c \lambda E[(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))] + 2c E[\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)]
\end{aligned}$$

Le deuxième terme se calcule par :

$$\begin{aligned}
J_3 &:= E_\theta[\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{k! 2^{\frac{p}{2}+k} \Gamma(\frac{p}{2} + k)} \int_a^b u \psi(u) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2}+k-1} du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(p+2k)(\frac{\lambda}{2})^k}{k! 2^{\frac{p}{2}+k+1} \Gamma(\frac{p}{2} + k + 1)} \int_a^b u \psi(u) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2}+k-1} du \\
&\leq pMP(a \leq \chi^2(p+2, \lambda) \leq b) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2M_0 (\frac{\lambda}{2})^k e^{-\frac{\lambda}{2}}}{(k-1)! 2^{\frac{p}{2}+k+1} \Gamma(\frac{p}{2} + k + 1)} \int_a^b e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2}+k-1} du \\
&= pMP(a \leq \chi^2(p+2, \lambda) \leq b) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\lambda M_0}{2} (\frac{\lambda}{2})^k e^{-\frac{\lambda}{2}}}{(k)! 2^{\frac{p}{2}+k+1} \Gamma(\frac{p}{2} + k + 2)} \int_a^b e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2}+k} du \\
&\leq \left(pM + \frac{\lambda M_0}{2} \right) P(a < \chi^2(p+2, \lambda) \leq b)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

où dans la troisième égalité nous avons changé l'indice de sommation et la dernière inégalité découle du fait que $\Gamma(\frac{p}{2} + k) \geq \Gamma(\frac{p}{2} + k')$ pour tout $k \geq k'$ ($p \geq 3$).

D'autre part, pour le premier terme dans $g(0, \theta)$, puisque $m = \min_{\{0 < u < b\}} \psi(u)$, nous avons donc

$$E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \geq mP(a \leq \chi^2(p+2, \lambda) \leq b)$$

Ainsi par (3.20) on aboutit à

$$g(0, \theta) \leq 2c \left(pM + \frac{\lambda M_0}{2} - \lambda m \right) P(a \leq \chi^2(p+2, \lambda) \leq b) \quad (3.21)$$

Ainsi puisque $\theta \in \Theta_2$ ie $\lambda \geq \frac{pM}{\left(m - \frac{M_0}{2}\right)}$ donc $g(0, \theta) \leq 0$.

Alors comme c vérifie $0 < c < \frac{2}{M}$ où $M = \max_{\{a < u < b\}} \psi(u)$, et on aura donc $c\psi(u) - 2 \leq cM - 2 \leq 0$ et le premier terme de Δ_{c, ϕ_{JS}^+} est négatif. Par conséquent $\Delta_{c, \phi_{JS}^+} \leq 0$ pour tout $\theta \in \Theta_2$.

Ainsi pour tout $\theta \in (\Theta_\epsilon \cap \Theta_0^*) \cup \Theta_2$ et $0 < c < \frac{2 - \alpha^*(\psi)}{M}$ la différence de risque $\Delta_{c, \phi_{JS}^+} \leq 0$.
D'où le résultat. \square

Dans la suite, nous prenons des fonctions ψ à support $[0, b]$ (avec $b \leq p-2$). Pour cela nous introduisons un deuxième sous-espace paramétrique qui sera l'espace R^p privé d'une boule centrée en 0 et de rayon r qui sera déterminé par la suite.

Posons $M_1 = \max_{\{0 < u < b\}} u\psi^2(u)$. Nous définissons le sous-espace paramétrique suivant

$$\Theta_r = \left\{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } \lambda \geq r > 0 \right\}$$

où $r = c \frac{pM^2}{\left(2m - c \frac{M_1}{2}\right)}$ et c est un réel vérifiant $0 < c < 4 \frac{m}{M_1}$, où $m > 0$ est défini plus haut.

Remarquons que dans le nouveau sous-espace paramétrique Θ_r , nous avons un choix de r qui dépend de la constante c que l'on peut choisir dans l'intervalle $]0, 4 \frac{m}{M_1}[$ ce qui permet d'élargir cet espace paramétrique pour les applications.

Pour l'estimateur (3.19) nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.10 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ à support $[0, b]$ ($b \leq p-2$) et $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X)$ défini par (3.19) où c est un réel strictement positif vérifiant $0 < c < 4 \frac{m}{M_1}$.

Alors l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément sur l'espace paramétrique Θ_r .

Démonstration L'expression (3.15) calculée pour l'estimateur (3.19) s'écrit

$$\Delta_{c, \phi_{JS}^+} = c^2 E_\theta \left[\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) \right] - c2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))$$

Or en utilisant (3.20) et en remplaçant M_0 par M_1 on obtient

$$E_\theta \left[\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2) \right] \leq \left(pM^2 + \frac{\lambda M_1}{2} \right) P(\chi^2(p+2, \lambda) \leq b)$$

D'autre part, nous avons

$$E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \geq mP(\chi^2(p+2, \lambda) \leq b)$$

Ainsi on aboutit à

$$\Delta_{c,\phi_{JS}^+} \leq c \left(cpM^2 + c \frac{\lambda M_1}{2} - 2\lambda m \right) P(\chi^2(p+2, \lambda) \leq b)$$

Ainsi $\Delta_{c,\phi_{JS}^+} \leq 0$ pour un choix de $0 < c < 4 \frac{m}{M_1}$ et $\lambda > c \frac{pM^2}{(2m - c \frac{M_1}{2})}$.

D'où le résultat. \square

Dans le résultat précédent nous avons choisi des fonctions ψ à support inclus dans $[0, p-2]$, ce qui nous a permis de contrôler des différences de risques dans l'expression (3.15). Cependant si nous prenons des fonctions ψ à support contenant l'intervalle $[0, p-2]$, ceci introduit un terme supplémentaire dans l'expression des différences de risques. Dans ce cas nous déterminons un troisième sous-espace paramétrique qui sera l'espace R^p privé d'une boule centrée en 0 et de rayon r_1 qui sera déterminé par la suite. Nous définissons l'espace paramétrique suivant

$$\Theta_{r_1} = \{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } \lambda \geq r_1 > 0 \}$$

où $r_1 = \frac{2pM}{(2m - M_0)}$ avec les conditions $2m - M_0 > 0$ et $m > 0$.

Remarquons que dans le sous-espace paramétrique Θ_{r_1} , nous avons un choix de r_1 qui dépend uniquement des conditions $2m - M_0 > 0$ et $m > 0$ qui sont satisfaites par exemple si on choisit une fonction $\psi(u) = \exp(-u)$, $p = 3$ et $1 < b < 1 + \log(2)$ $m = 2 \exp(-b)$ et $M_0 = \exp(-1)$.

Pour l'estimateur (3.19) nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.11 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ à support $[0, b]$ tel que $b > p-2$, et $\delta_{c,\phi_{JS}^+}(X)$ est défini par (3.19) où c est un réel strictement positif. Si les conditions suivantes sont vérifiées

1.1 Pour tout $u \in [0, p-2]$, $0 \leq c\psi(u) \leq 2$

1.2 Pour tout $p-2 \leq u < b$, $0 \leq c\psi(u) \leq \frac{2(p-2)}{u}$

Alors l'estimateur $\delta_{c,\phi_{JS}^+}(X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément sur le sous-espace paramétrique Θ_{r_1}

Démonstration L'expression (3.15) calculée pour l'estimateur (3.19) s'écrit dans ce cas là

$$\begin{aligned} \Delta_{c,\phi_{JS}^+} &= E_\theta \left[\psi^2(\|X\|^2) \|X\|^2 + 4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + 2p\psi(\|X\|^2) \right] + f(a) - f(b) \\ &\quad - 2 \int_0^{p-2} u\psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, du) - 2 \int_{p-2}^{+\infty} (p-2)\psi(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &= \int_0^{p-2} c u \psi(u) (c\psi(u) - 2) (\chi^2(p, \|\theta\|^2, du) + \int_{p-2}^{+\infty} c\psi(u) (u\psi(u) - 2(p-2)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &\quad + c E_\theta \left[4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + 2p\psi(\|X\|^2) \right] + cf(a) - cf(b) \end{aligned}$$

Or d'après (3.5) on a

$$E_{\theta} [4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + 2p\psi(\|X\|^2)] + f(a) - f(b) = 2E_{\theta} [\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)] - 2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))$$

et l'inégalité (3.20) donne

$$2E_{\theta} [\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)] - 2\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \leq (2pM + \lambda M_0 - 2\lambda m) P(\chi^2(p+2, \lambda) \leq b) \quad (3.22)$$

Ainsi pour c positif et ψ vérifiant les conditions 1.1, 1.2 et $\lambda > \frac{2pM}{2m - M_0}$, on a $\Delta_{c, \phi_{JS}^+} \leq 0$.

D'où le résultat. \square

Remarque 3.12

- 1) Pour $p = 3$, la fonction $\psi(u) = \exp(-u)$ à support $[0, 1 + \log(2)]$ vérifie les conditions 1.1 1.2 pour tout choix de $0 < c < 1$.
- 2) Dans le cas d'un support infini (ie $b = +\infty$), nous donnons dans la Proposition 3.21 .1 un exemple de fonction ψ vérifiant les conditions 1.1 et 1.2 et nous obtenons là aussi une domination sur un sous-espace paramétrique explicite.

III.3 Domination de l'estimateur primitif de James -Stein

Dans le paragraphe III.2, la domination de l'estimateur défini par (3.19) sur la partie positive de James -Stein ϕ_{JS}^+ , uniformément sur les parties paramétriques explicitées, implique sa domination sur l'estimateur primitif de James -Stein ϕ_{JS} . Cependant dans cette partie, nous étudions directement la domination de l'estimateur défini par (3.23) sur l'estimateur primitif de James-Stein ϕ_{JS} . Ce qui nous permet de trouver des sous-espaces paramétriques plus "larges" que ceux donnés en paragraphe III.3.

Pour toute fonction ψ nous modifions l'estimateur (3.8) en posant

$$\delta_{c, \phi_{JS}, \psi}(X) = \delta_{c, \phi_{JS}}(X) = \phi_{JS}(X) + c\psi(\|X\|^2)X \quad (3.23)$$

où c est un paramètre positif. Dans cette partie nous donnons quelques résultats donnant une domination de l'estimateur défini par (3.23) sur l'estimateur primitif de James -Stein ϕ_{JS} dans certains espaces paramétriques.

Proposition 3.13 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ à support $[0, b]$ tel que $b > p - 2$, et $\delta_{c, \phi_{JS}}(X)$ est défini par (3.23) où c est un réel strictement positif et $0 \leq c\psi(u) \leq \frac{2(p-2)}{u}$ pour tout $u \in [0, b]$.

Alors, l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}}(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$ uniformément sur l'espace paramétrique

Θ_{r_1}

Démonstration L'expression (3.13) calculée pour l'estimateur (3.23) s'écrit

$$\Delta_{c,\phi_{JS}} = \int_0^b cu\psi(u) \left[c\psi(u) - \frac{2(p-2)}{u} \right] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ + 2cE_\theta [\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)] - 2\lambda cE(\psi(\chi^2(p+2, \lambda)))$$

et l'inégalité (3.22) donne

$$2E_\theta [\|X\|^2 \psi(\|X\|^2)] - 2\lambda cE(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \leq (2pM + \lambda M_2 - 2\lambda m) P(\chi^2(p+2, \lambda) \leq b)$$

Ainsi $\Delta_{c,\phi_{JS}} \leq 0$ pour c positif et ψ vérifiant les conditions 1.1, 1.2 et $\lambda > \frac{2pM}{2m-M_2}$.

D'où le résultat. \square

Le cas où $b = +\infty$ et pour tout $\theta \in R^p$ est traité par le résultat suivant.

Proposition 3.14 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ à support R^+ , positive, et $\delta_{c,\phi_{JS}}(X)$ défini par (3.23), et c un réel strictement positif.

Si les conditions suivantes sont vérifiées

1.1 Il existe α strictement positif tel que

$$E_\theta [4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + (4 + \alpha)\psi(\|X\|^2)] \leq 0, \forall \lambda \geq 0$$

1.2 Pour tout $u \in R^+$, $0 \leq c\psi(u) \leq \frac{\alpha}{u}$

Alors, l'estimateur $\delta_{c,\phi_{JS}}(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$ uniformément sur R^p

Démonstration L'expression (3.12) calculée pour l'estimateur (3.23) s'écrit

$$\Delta_{c,\phi_{JS}} = c^2 E_\theta [\|X\|^2 \psi^2(\|X\|^2)] + 4cE_\theta [\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + \psi(\|X\|^2)] \\ = cE_\theta [\psi(\|X\|^2)(c\|X\|^2 \psi(\|X\|^2) - \alpha)] + cE_\theta [4\|X\|^2 \psi'(\|X\|^2) + (4 + \alpha)\psi(\|X\|^2)]$$

Les conditions 1.1 et 1.2 impliquent que $\Delta_{c,\phi_{JS}}$ est négatif.

D'où le résultat. \square

Remarque 3.15 Un exemple de fonction ψ vérifiant les conditions de la Proposition 3.14 est traité dans la Proposition 3.21.2

Le cas où $b \leq p-2$ et pour tout $\theta \in R^p$, est traité par le résultat suivant.

Proposition 3.16 Soit $\psi \in \mathbf{A}$ à support $[0, b]$, $b \leq p - 2$, strictement positive, $\delta_{c, \phi_{JS}}(X)$ défini par (3.23), c un réel strictement positif et $0 \leq \psi(u) \leq \frac{2}{c} \left(\frac{p-2}{u} - 1 \right)$ pour tout $u \in [0, b]$.

Alors, l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}}(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$ uniformément sur R^p

Démonstration L'expression (3.13) calculée pour l'estimateur (3.23) s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta_{c, \phi_{JS}} &= \int_0^b c u \psi(u) \left[c \psi(u) + 2 - \frac{2(p-2)}{u} \right] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &\quad + c \int_0^b (2p\psi(u) + 4u\psi'(u) - 2u\psi(u)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du + f(a) - f(b) \\ &= \int_0^b c u \psi(u) \left[c \psi(u) + 2 - \frac{2(p-2)}{u} \right] \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du - 2c\lambda E(\psi(\chi^2(p+2, \lambda))) \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité le deuxième terme est négatif (ψ étant positive) et sous la condition

$$0 \leq \psi(u) \leq \frac{2}{c} \left(\frac{p-2}{u} - 1 \right),$$

le premier terme est négatif, par suite $\Delta_{c, \phi_{JS}}$ est négatif.

D'où le résultat. \square

Dans la suite nous étudions la domination de nos estimateurs en choisissant la fonction ψ dans la classe \mathbf{B} . Pour cela, nous introduisons un nouveau sous-espace paramétrique qui sera une boule de R^p centrée en 0 et de rayon r_2 qui sera déterminé par la suite. Pour $\psi \in \mathbf{B}$, posons

$$M_3 = \max_{\{a < u < b\}} \psi^2(u), m_1 = \min_{\{a < u < b\}} u\psi(u), m_2 = \min_{\{a < u < b\}} (u - p + 2)\psi(u)$$

Nous définissons le sous-espace paramétrique suivant

$$\Theta_{r_2} = \{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } 0 \leq \lambda \leq r_2 \}$$

où $r_2 = p \frac{2m_2 + cM_3}{2m_1}$, $m_1 < 0$ et c est un réel vérifiant $0 < c < -2 \frac{m_2}{M_3}$.

Remarquons que dans Θ_{r_2} nous avons un choix de r_2 qui dépend de la constante c que l'on peut choisir dans l'intervalle $]0, -2 \frac{m_2}{M_3}[$ ce qui permet d'élargir l'espace paramétrique pour les applications.

Rappelons que d'après l'égalité (3.16), pour toute fonction ψ appartenant à la classe \mathbf{B} , $\Delta_{\phi_{JS}^+} = \Delta_{\phi_{JS}}$. Dans ce cas là les conditions sur ψ pour dominer $\phi_{JS}^+(X)$ et $\phi_{JS}(X)$ seront identiques. Pour l'estimateur (3.19) défini pour une fonction ψ appartenant à la classe \mathbf{B} , nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.17 Soit $\psi \in \mathbf{B}$, $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X)$ défini par (3.19), $\delta_{c, \phi_{JS}}(X)$ défini par (3.23)

où c est un réel strictement positif vérifiant $0 < c < -2 \frac{m_2}{M_3}$. Si $m_1 < 0$, alors l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément sur Θ_{r_2} et de même l'estimateur $\delta_{c, \phi_{JS}}(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$ uniformément sur Θ_{r_2} .

Démonstration L'expression (3.15) calculée pour l'estimateur (3.19) s'écrit avec $\lambda = \|\theta\|^2$:

$$\begin{aligned} \Delta_{c, \phi_{JS}^+} &= c^2 \int_a^b u \psi^2(u) \chi^2(p, \lambda, u) du - 2\lambda c \int_a^b \psi(u) \chi^2(p+2, \lambda, u) du + 2c \int_a^b \psi(u) [u-p+2] \chi^2(p, \lambda, u) du \\ &\leq c^2 M_3 P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b) - 2\lambda c \frac{m_1}{p} P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b) + 2cm_2 P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b) \\ &= c(cM_3 - 2\lambda \frac{m_1}{p} + 2m_2) P(a \leq \chi^2(p, \lambda) \leq b) \end{aligned}$$

où dans l'inégalité, on a le deuxième terme qui découle du fait que

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2} + k + 1)} = \frac{1}{(\frac{p}{2} + k) \Gamma(\frac{p}{2} + k)} \leq \frac{1}{\frac{p}{2} \Gamma(\frac{p}{2} + k)} \quad \forall k \geq 0$$

et

$$\int \psi(u) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2} + k} du = \int u \psi(u) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{p}{2} + k - 1} du$$

Ainsi sous les conditions de l'énoncé : $0 < c < -2 \frac{m_2}{M_3}$, $m_1 < 0$ et $\lambda \leq p \frac{2m_2 + cM_3}{2m_1}$, Δ_{c, ϕ_{JS}^+} est négatif.

D'où le résultat. \square

Nous savons d'après le Corollaire 1.17 (Corollaire 1 dans J. Berger et M. E. Bock [9]) qu'on peut améliorer les estimateurs à rétrécisseurs prenant des valeurs négatives sur des parties de R . Ainsi les estimateurs définis dans la Proposition 3.17 peuvent être améliorés par leur partie positive. Les deux classes d'estimateurs définies par [21] sont inadmissibles, étant donné qu'elles ne sont pas analytiques. On le montre aussi à l'aide du corollaire suivant déduit du Corollaire 1.17 .

Corollaire 3.18 Soit

$W_1 = \{x \in R^p / \delta(a, g, x) < 0\}$, et $W_2 = \{x \in R^p / \delta(a, k, h, g, x) < 0\}$ où $\delta(a, g, x)$ est donné par la formule (1.25), a et g étant définis par le Théorème 1.25, et $\delta(a, k, h, g, x)$ est donné par la formule (1.26), a, k, h et g étant définis par le Théorème 1.26) et t une fonction définie comme suit :

$$t : \begin{cases} R^p \rightarrow [1, 2] \\ x \rightsquigarrow t(\|x\|^2) \end{cases}$$

et soient les estimateurs $\delta_{1, a, g}^*(X)$ et $\delta_{2, a, k, h, g}^*(X)$

$$\delta_{1,a,g}^*(X) = \{1 - t(\|X\|^2)I_{W_1}\} \delta(a, g, X)X$$

$$\delta_{2,a,k,h,g}^*(X) = \{1 - t(\|X\|^2)I_{W_2}\} \delta(a, k, h, g, X)X$$

Alors $\delta_{1,a,g}^*(X)$ domine $\delta(a, g, X)$, et $\delta_{2,a,k,h,g}^*(X)$ domine $\delta(a, k, h, g, X)$, uniformément en θ

Démonstration Découle immédiatement du Corollaire 1.17.

Notons que si $t \equiv 1$, alors on a d'après le Corollaire 1.18, $\delta_{1,a,g}^{**}(X)$ domine $\delta_{1,a,g}^*(X)$ et $\delta_{2,a,k,h,g}^{**}(X)$ domine $\delta_{2,a,k,h,g}^*(X)$, uniformément en θ .

III.4 Conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein

Dans la suite nous formulons des conditions nécessaires de domination de $\phi_{JS}(X)$ similaires à dans ([20] Th 2.1, et rappelées dans le paragraphe II.6). Rappelons que ces auteurs proposent des estimateurs de la forme $\delta_\xi(X) = \left(1 - \frac{\xi(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\right)X$ et donnent des conditions nécessaires de domination de l'estimateur de James-Stein. Ils notent

$$R(\phi_{JS}, \theta) - R(\delta_\phi, \theta) = E_\theta(g_\xi(\|X\|^2))$$

avec

$$g_\xi(u) = -\frac{\{\xi(u) - (p-2)\}^2}{u} + 4\xi'(u) \quad (3.24)$$

et obtiennent des conditions nécessaires sur ξ et g_ξ pour que $\delta_\xi(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$.

Pour le cas de notre estimateur $\delta_{\phi,\psi}(X)$ nous avons alors un résultat similaire en suivant la démonstration du Théorème 2.1 dans [20]. Nous posons

$$g_\psi(u) := -u\psi^2(u) - 4u\psi'(u) - 4\psi(u)$$

Proposition 3.19 *Supposons que la fonction g_ψ est bornée. Si l'estimateur, $\delta_{\phi_{JS}}(X) = \phi_{JS}(X) + \psi(\|X\|^2)X$ domine l'estimateur $\phi_{JS}(X)$ de James-Stein alors pour tout $u \geq 0$ il existe $u_0 > u$ tel que $g_\psi(u_0) \geq 0$.*

Démonstration En comparant notre estimateur $\delta_{\phi_{JS}}(X)$ à l'estimateur $\delta_\xi(X)$ nous avons :

$$1 - \frac{\xi(u)}{u} = 1 - \frac{p-2}{u} + \psi(u)$$

et alors $\xi(u) = p - 2 - u\psi(u)$. Donc de (3.8) nous avons par identification

$$g_{\xi}(u) = -u\psi^2(u) - 4u\psi'(u) - 4\psi(u) = g_{\psi}(u)$$

Le reste de la démonstration suit les mêmes étapes que celles du Théorème 2.1 dans [20].
D'où le résultat. \square

Nous avons aussi le corollaire suivant analogue au Corollaire 2.2 dans [20].

Corollaire 3.20 *Supposons que la fonction $h(u) := u\psi(u)$ est bornée et absolument continue. Si l'estimateur $\delta_{\phi_{JS}}(X) = \phi_{JS}(X) + \psi(\|X\|^2)X$ domine l'estimateur $\phi_{JS}(X)$ de James-Stein alors :*

- i) pour tout $u \geq 0$ il existe $u_0 > u$ tel que $\psi(u_0) + u_0\psi'(u_0) \leq 0$
- ii) si $\lim_{u \rightarrow +\infty} u\psi(u) + u^2\psi'(u)$ existe alors elle est nulle
- iii) si $\lim_{u \rightarrow +\infty} (p - 2 - u\psi(u))$ existe et si $\lim_{u \rightarrow +\infty} u\psi(u) + u^2\psi'(u) = 0$ alors $\lim_{u \rightarrow +\infty} u\psi(u) = 0$.

Démonstration Il suffit de noter que $\xi(u) = p - 2 - u\psi(u)$ et donc $\xi'(u) = -\psi(u) - u\psi'(u)$. La démonstration étant similaire à celle du Corollaire 2.2 dans [20]. \square

III.5 Simulations

Les deux classes **A** et **B** étant définies dans le paragraphe III.3, nous illustrons dans ce qui suit la domination des estimateurs $\delta_{c, \phi_{JS}^+, \psi}(X)$ et $\delta_{c, \phi_{JS}, \psi}(X)$ sur les estimateurs ϕ_{JS}^+ et ϕ_{JS} respectivement.

I) Classe A:

1) Nous donnons un exemple de fonction $\psi_1 \in \mathbf{A}$, dans le cas où $b = +\infty$, vérifiant les conditions 1.1 et 1.2 du Théorème 3.11. La même fonction $\psi_1 \in \mathbf{A}$ étant choisie dans le cas où $b = +\infty$, vérifiant cette fois-ci les conditions 1.1 et 1.2 de la Proposition 3.14.

Proposition 3.21 *A partir de l'estimateur (3.8) définissons*

$$\delta_{1, \phi_{JS}^+}(X) := \delta_{1, \phi_{JS}^+, \psi_1}(X) = \phi_{JS}^+(X) + c\psi_1(\|X\|^2)X$$

et

$$\delta_{2, \phi_{JS}}(X) := \delta_{2, \phi_{JS}, \psi_1}(X) = \phi_{JS}(X) + c\psi_1(\|X\|^2)X$$

où la fonction $\psi_1(u) = e^{-su}$, avec s et c deux réels strictement positifs, tels que $\frac{c}{s} \leq 2(p-2)$ et $c \leq 2$.

1. Pour $p \geq 3$ posons

$$\Theta_{r_3} = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } \lambda \geq r_3 := p + \frac{1}{2s} \right\}$$

alors $\delta_{1, \phi_{JS}^+}(X)$ domine $\phi_{JS}^+(X)$ uniformément sur Θ_{r_2}

2. Si

$$s > \frac{1}{p-2}, c > 0, \frac{c}{es} \leq \alpha < 4 \frac{s(p-2)-1}{1+2s}, p \geq 3$$

alors $\delta_{2, \phi_{JS}}(X)$ domine $\phi_{JS}(X)$ uniformément sur \mathbb{R}^p

Démonstration

1. L'égalité (3.15) donne :

$$\begin{aligned} \Delta_{\phi_{JS}^+} &= E_\theta \left[\psi_1^2(\|X\|^2) \|X\|^2 + 4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + 2p\psi_1(\|X\|^2) \right] \\ &\quad - 2 \int_0^{p-2} \psi_1(u) u \chi^2(p, \|\theta\|^2, du) - 2 \int_{p-2}^{+\infty} (p-2) \psi_1(u) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &= \int_0^{p-2} u \psi_1(u) (\psi_1(u) - 2) (\chi^2(p, \|\theta\|^2, du)) + \int_{p-2}^{+\infty} \psi_1(u) (u \psi_1(u) - 2(p-2)) \chi^2(p, \|\theta\|^2, u) du \\ &\quad + E_\theta \left[4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + 2p\psi_1(\|X\|^2) \right] \end{aligned}$$

Le choix de notre classe nous donne $f(0) = f(+\infty) = 0$. Un choix de $0 < c < 2$ et $\frac{c}{s} \leq 2(p-2)$, permet de rendre les deux premiers membres de la deuxième égalité négatifs. Il reste à choisir λ de telle manière que le troisième membre de la deuxième égalité soit négatif. A cet effet le Lemme 9 de l'Appendice nous permet d'écrire:

$$E_\theta \left[4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + 2p\psi_1(\|X\|^2) \right] = 2ct^{p/2+1} e^{\frac{c}{2}(t-1)} (p-2s\lambda t)$$

avec $t = \frac{1}{1+2s}$. Donc pour $\lambda \geq p + \frac{1}{2s}$ on aura

$$E_\theta \left[4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + 2p\psi_1(\|X\|^2) \right] \leq 0$$

D'où le résultat 1. \square

2. L'égalité (3.12) donnent :

$$\begin{aligned} \Delta_{\phi_{JS}} &= E_\theta \left[\psi_1^2(\|X\|^2) \|X\|^2 + 4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + 4\psi_1(\|X\|^2) \right] \\ &= E_\theta \left[\psi_1(\|X\|^2) (\psi_1(\|X\|^2) \|X\|^2 - \alpha) \right] + E_\theta \left[4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + (4+\alpha)\psi_1(\|X\|^2) \right] \end{aligned}$$

Le choix de notre classe nous donne aussi $f(0) = f(+\infty) = 0$. Pour $0 < \frac{c}{es} \leq \alpha$ on a le premier membre de la deuxième égalité négatif. Pour rendre le deuxième membre de la deuxième égalité négatif, on utilise le Lemme 9 de l'Appendice pour écrire:

$$E_\theta \left[4\|X\|^2 \psi_1'(\|X\|^2) + (4+\alpha)\psi_1(\|X\|^2) \right] = ct^{p/2+1} e^{\frac{c}{2}(t-1)} ((4+\alpha)(1+2s) - 4sp - 2s\lambda t)$$

avec $t = \frac{1}{1+2s}$. Donc si on choisit $s > \frac{1}{p-2}$, $c > 0$, $\frac{c}{es} \leq \alpha < 4 \frac{s(p-2)-1}{1+2s}$, $p \geq 3$ et $\lambda \geq 0$, on

aura

$$E_{\theta} [4\|X\|^2 \psi'_1(\|X\|^2) + (4 + \alpha) \psi_1(\|X\|^2)] \leq 0.$$

D'où le résultat 2. =

Nous illustrons graphiquement la différence de risque Δ_{c, ϕ_{JS}^+} en fonction de c et $\lambda = \|\theta\|^2$, pour $s = 2$.

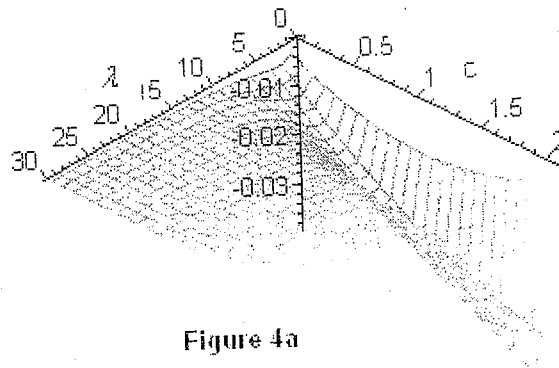


Figure 4a

Fig. 4a Graphe de la différence de risques Δ_{c, ϕ_{JS}^+} en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ et c ($s = 2$, $p = 3$).

Le graphe montre que la surface Δ_{c, ϕ_{JS}^+} est négative pour $\lambda = \|\theta\|^2 \in]0, 30]$ et $c \in [0.1, 2.1]$.

Nous présentons différentes coupes de la nappe de la Fig.4a pour différentes valeurs de c .

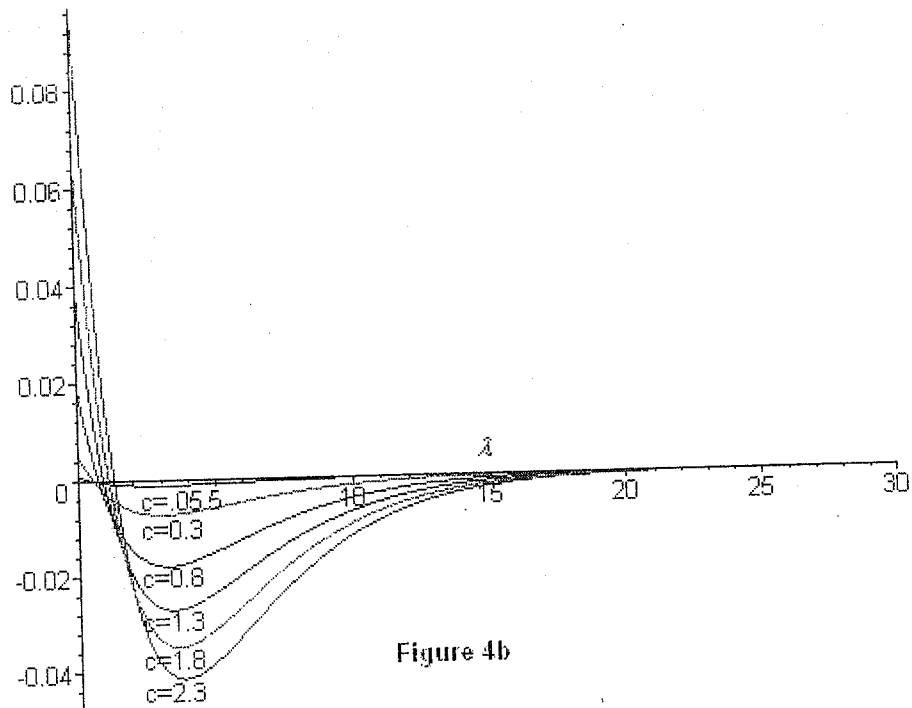


Figure 4b

Fig. 4b Graphe de la différence de risques Δ_{c,ϕ_{JS}^*} en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ et pour les valeurs de $c = 0.05, 0.3, 0.8, 1.3, 1.8, c = 2.3$. ($s = 2$, $p = 3$).

De même nous illustrons graphiquement la différence de risque $\Delta_{c,\phi_{JS}}$ en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ et pour les valeurs de $c = 0.05, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, c = 3$. ($s = 2$, $p = 3$).

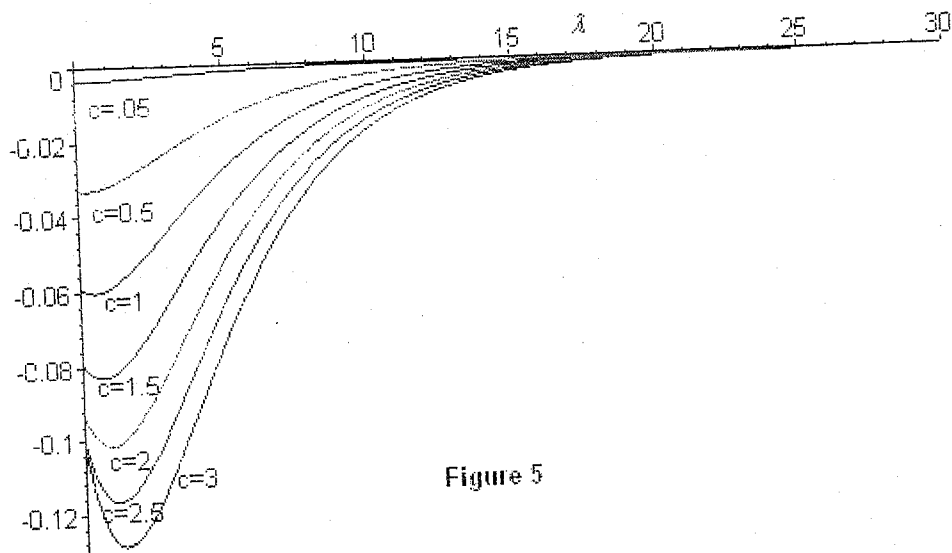


Figure 5

Fig. 5 Graphe de la différence de risques $\Delta_{c,\phi_{JS}}$ en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ et pour les valeurs de $c = 0.05, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, c = 3$. ($s = 2$, $p = 3$).

Le graphe montre que la surface $\Delta_{c,\phi_{JS}}$ est négative pour $\lambda = \|\theta\|^2 \in]0, 30]$ et pour un choix de α tel que : $\frac{c}{2e} \leq \alpha < 2$. (cf. les conditions 1.1 de la Proposition 3.16).

Nous donnons un exemple de fonction $\psi_2 \in \mathbf{A}$, vérifiant les conditions du Théorème 3.10
Soit

$$\psi_2(u) = (1.5 - u)I_{[0,1]}(u), \quad c > 0$$

et rappelons

$$\delta_{c,\phi_{JS}^+}(X) = \phi_{JS}^+(X) + c(1.5 - \|X\|^2)I_{[0,p-2]}(\|X\|^2)X.$$

Nous illustrons graphiquement la différence de risque Δ_{c,ϕ_{JS}^+} en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ et c ($p = 3$).

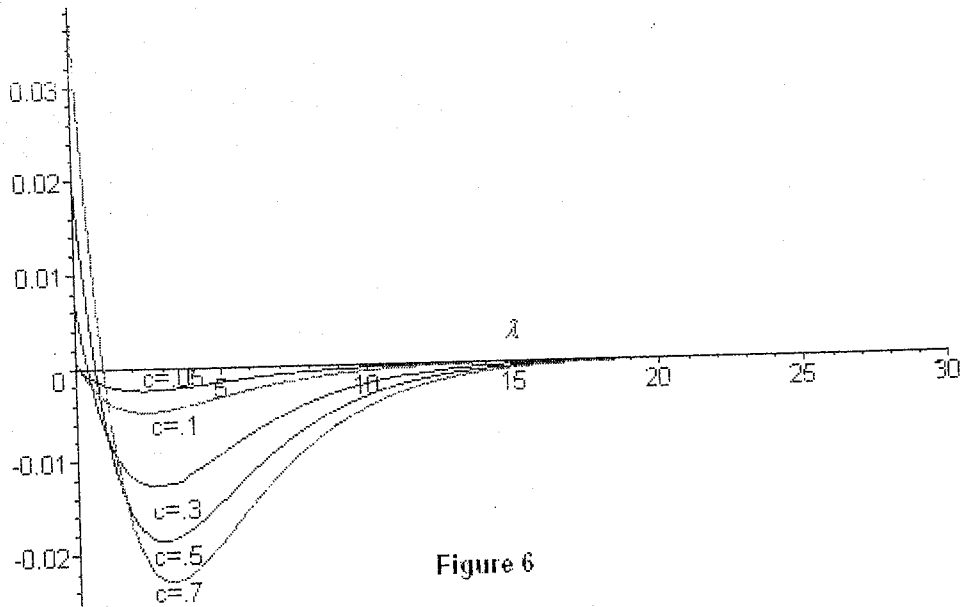


Figure 6

Fig. 6 Graphe de la différence de risques Δ_{c, ϕ_{JS}^+} en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ et pour les valeurs de $c = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, c = 0.7$. ($p = 3$).

Le graphe montre que la surface Δ_{c, ϕ_{JS}^+} est négative pour $\lambda = \|\theta\|^2 \in]0, 30]$.

Nous donnons un exemple de fonction $\psi_1 \in \mathbf{A}$ pour déterminer $\alpha^*(\psi_1)$ du Lemme 3.8
Soit

$$\psi_1(u) = (1.5 - u)I_{[0,1]}(u)$$

et rappelons

$$\delta_{c_1, \phi_{JS}^+}(X) = \phi_{JS}^+(X) + c_1(1.5 - \|X\|^2)I_{[0,1]}(\|X\|^2)X \quad c_1 > 0$$

Le calcul donne : $\alpha^*(\psi_1) = 0.75$. Dans ce cas on a $\psi_1(u) \leq \frac{1}{c_1}(\frac{2}{u} - \alpha^*(\psi_1))$ pour tout u dans $[0, 1]$ et pour tout $c_1 > 0$. Ainsi $\Delta_{c_1, \phi_{JS}^+} \leq 0$.

Nous illustrons graphiquement la détermination de $\alpha^*(\psi_1)$ et nous obtenons $\alpha^*(\psi_1) \approx 0.75$.

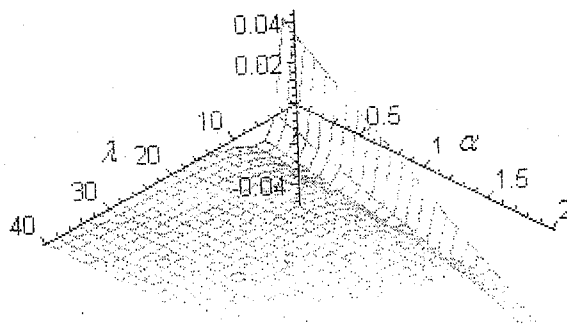


Figure 7

Fig. 7 Graphe de $g(\alpha, \theta)$ en fonction de α et $\lambda = \|\theta\|^2$ pour $p = 3$.

II) Classe B:

Nous donnons un exemple de fonction $\psi_3 \in B$, vérifiant les conditions de la Proposition 3.17.

Soit $\psi_3(u) = \frac{1.5-u}{u} I_{[7.5, 250]}(u)$. Rappelons que dans ce cas on a $\Delta_{c, \phi_{JS}^+} = \Delta_{c, \phi_{JS}}$.

Nous représentons graphiquement la différence de risque $\Delta_{c, \phi_{JS}^+} = \Delta_{c, \phi_{JS}}$ en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$ pour $c = 0.001, 0.005, c = 0.01$ et $p = 3$.

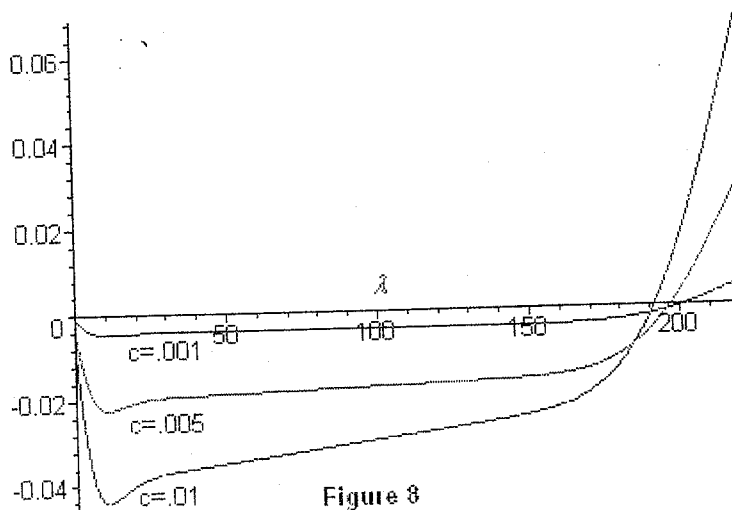


Figure 8

Fig. 8 Graphe de la différence de risque $\Delta_{c_2, \phi_{JS}^+} = \Delta_{c_2, \phi_{JS}}$ en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2$.

La famille d'estimateurs $\delta_{c, \phi_{JS}^+}(X) = \phi_{JS}^+(X) + c \frac{1.5 - \|X\|^2}{\|X\|^2} I_{[7.5, 250]}(\|X\|^2) X$ domine $\phi_{JS}^+(X)$ et la famille d'estimateurs $\delta_{c, \phi_{JS}}(X) = \phi_{JS}(X) + c \frac{1.5 - \|X\|^2}{\|X\|^2} I_{[7.5, 250]}(\|X\|^2) X$ domine $\phi_{JS}(X)$ uniformément sur le sous-espace paramétrique

$$\Theta_{r_2} = \{ \theta \in R^p \mid \lambda = \|\theta\|^2 \text{ et } 0 \leq \lambda \leq r_2 = 195 \}$$

III.6 Généralisation au cas de l'échantillon

Dans cette partie, nous allons donner un résultat équivalent à la Proposition 3.3 dans le cas d'un échantillon X_1, \dots, X_n de la loi gaussienne $N_p(\theta, I_p)$. Cependant tous les résultats obtenus dans les paragraphes précédents peuvent s'écrire aussi dans le cas d'un échantillon. Nous définissons une classe d'estimateurs en posant:

$$\delta_{\phi, \psi}(X_1, \dots, X_n) = \left(\phi(\|\bar{X}_n\|^2) + \psi(\|\bar{X}_n\|^2) \right) \bar{X}_n \quad (3.25)$$

où \bar{X}_n est la moyenne empirique et la fonction ϕ sera soit $\phi_{JS}(X)$ ou $\phi_{JS}^+(X)$ et ψ une fonction mesurable de R^+ vers R . Son risque quadratique est noté $R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) = E_\theta(L(\delta_{\phi, \psi}, \theta))$.

L'estimateur primitif de James-Stein s'écrira alors comme suit

$$\phi_{JS}(X_1, \dots, X_n) = \left(1 - \frac{p-2}{c\|\bar{X}_n\|^2} \right) \bar{X}_n \quad (3.26)$$

où c est une constante réelle positive.

L'estimateur classique des moindres carrés, $\delta(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n$, a une fonction de risque constante, égale à $\frac{p}{n}$. Il est donc minimax puisque dans ce cas:

$$R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) = E_\theta(\|\bar{X}_n - \theta\|_p^2) = \text{Var}(\bar{X}_n).$$

Le Lemme suivant donne le risque de l'estimateur primitif de James-Stein.

Lemme 3.22 Nous avons

$$\begin{aligned} R(\phi_{JS}, \theta) &= \frac{p}{n} - \frac{(p-2)^2}{c} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{c} \right) E_\theta \left(\frac{1}{\|\bar{X}_n\|^2} \right) \\ &= \frac{p}{n} - \frac{(p-2)^2}{c} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{c} \right) E \left(\frac{1}{p-2+2K} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où K est une v.a de Poisson $P(\frac{\lambda}{2})$ et $\lambda = n\|\theta\|^2$. Ainsi ϕ_{JS} domine l'estimateur \bar{X}_n pour tout $c > \frac{n}{2}$

Démonstration En effet on a \bar{X}_n qui suit la loi $N_p(\theta, \frac{1}{n}I_p)$ et donc $\bar{Z}_n = n^{\frac{1}{2}} \bar{X}_n$ suit la loi $N_p(n^{\frac{1}{2}}\theta, I_p)$. D'après l'égalité de Stein [23] (égalité (1.8)) on obtient

$$\begin{aligned} R(\phi_{JS}, \theta) &= E_\theta[\|\bar{X}_n - \theta\|^2] - 2\frac{p-2}{c} E_\theta\left[\left\langle (\bar{X}_n - \theta), \frac{\bar{X}_n}{\|\bar{X}_n\|^2} \right\rangle\right] + \frac{(p-2)^2}{c^2} E_\theta\left(\frac{1}{\|\bar{X}_n\|^2}\right) \\ &= \frac{p}{n} - 2\frac{p-2}{c} E_\theta\left[\left\langle (\bar{Z}_n - n^{\frac{1}{2}}\theta), \frac{\bar{Z}_n}{\|\bar{Z}_n\|^2} \right\rangle\right] + \frac{(p-2)^2}{c^2} E_\theta\left(\frac{1}{\|\bar{X}_n\|^2}\right) \\ &= \frac{p}{n} - 2\frac{p-2}{c} E_\theta\left[\frac{p-2}{n\|\bar{X}_n\|^2}\right] + \frac{(p-2)^2}{c^2} E_\theta\left(\frac{1}{\|\bar{X}_n\|^2}\right) \\ &= \frac{p}{n} - \frac{(p-2)^2}{c} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{c}\right) E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \end{aligned}$$

Puisque $R(\bar{X}_n, \theta) = \frac{p}{n}$ et $c > \frac{n}{2}$ nous déduisons le résultat. \square

Nous pouvons mener une étude sur cet estimateur similaire à celle des paragraphes précédents. Cependant nous nous limitons dans ce cas à formuler l'équivalent de la Proposition 3.3, dans le cas où ψ est à support R^+ avec $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = 0$.

Proposition 3.23 Si pour tout u dans $[0, \frac{p-2}{c}]$ et $c > \frac{n}{2}$:

$$\psi(u) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{p-2}{cu} - 1 \right)$$

alors on a :

- 1) $\Delta R_2 = R(\delta_{\phi_{JS}, \psi}, \theta) - R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, \theta) \geq 0$ ie $\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}$ domine $\delta_{\phi_{JS}, \psi}$
- 2) $R(\phi_{JS}, \theta) - R(\phi_{JS}^+, \theta) \geq 2 \int_0^{\frac{p-2}{c}} \psi(u) \left(\frac{p-2}{c} - u \right) \chi^2(p, n\|\theta\|^2, du)$

Démonstration Nous reprenons quelques étapes de la démonstration de la Proposition 3.3

1) En effet on a

$$\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}(X_1, \dots, X_n) = \phi_{JS}^+(X_1, \dots, X_n) + \psi(\|\bar{X}_n\|^2) \bar{X}_n$$

et

$$\delta_{\phi_{JS}, \psi}(X_1, \dots, X_n) = \phi_{JS}^+(X_1, \dots, X_n) + \psi(\|\bar{X}_n\|^2) \bar{X}_n - \phi_{JS}^-(X_1, \dots, X_n)$$

où $\phi_{JS}^-(X_1, \dots, X_n) = \max\left(0, \frac{p-2}{c\|\bar{X}_n\|^2} - 1\right)\bar{X}_n$

Ainsi en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans R^p nous avons

$$\begin{aligned} \Delta R_2 &:= R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, \theta) - R(\delta_{\phi_{JS}^-, \psi}, \theta) \\ &= -E_\theta \left[\left(\max\left(0, \frac{p-2}{c\|\bar{X}_n\|^2} - 1\right) \right)^2 \|\bar{X}_n\|^2 \right] \\ &\quad + 2E_\theta \left[\langle (\phi_{JS}^+(X_1, \dots, X_n) + \psi(\|\bar{X}_n\|^2)\bar{X}_n - \theta), \phi_{JS}^-(X_1, \dots, X_n) \rangle \right] \\ &= E_\theta \left[\max\left(0, \frac{p-2}{c\|\bar{X}_n\|^2} - 1\right) \|\bar{X}_n\|^2 \left\{ -\max\left(0, \frac{p-2}{c\|\bar{X}_n\|^2} - 1\right) + 2\psi(\|\bar{X}_n\|^2) \right\} \right] \\ &\quad - 2E_\theta[\langle \theta, \phi_{JS}^-(X_1, \dots, X_n) \rangle] \end{aligned}$$

Comme les fonctions $\max\left(0, \frac{p-2}{c\|\bar{X}_n\|^2} - 1\right)$ et la densité de la loi gaussienne multidimensionnelle vérifient les conditions du Théorème 1 dans [9] par conséquent on a $E_\theta[\langle \theta, \phi_{JS}^-(X_1, \dots, X_n) \rangle] \geq 0$. D'où le résultat 1).

Montrons le résultat 2). D'après la définition de l'estimateur $\delta_{\phi, \psi}(X_1, \dots, X_n)$ nous pouvons écrire

$$R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) = R(\phi, \theta) + E_\theta[\psi^2(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2] + 2E_\theta[\langle (\phi(\|\bar{X}_n\|^2)\bar{X}_n - \theta), \psi(\|\bar{X}_n\|^2)\bar{X}_n \rangle]$$

Posons $\Delta_\phi = R(\delta_{\phi, \psi}, \theta) - R(\phi, \theta)$ alors

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= E_\theta[\psi^2(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2] + 2E_\theta[\langle (\phi(\|\bar{X}_n\|^2)\psi(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2) \\ &\quad - 2E_\theta[\psi(\|\bar{X}_n\|^2)\langle \bar{X}_n, \theta \rangle] \end{aligned} \tag{3.28}$$

D'après l'égalité de Stein [23](égalité (1.8)) on obtient

$$\begin{aligned} E_\theta[\psi(\|\bar{X}_n\|^2)\langle \bar{X}_n, \theta \rangle] &= -\sum_{i=1}^p E_\theta[\bar{X}_i \psi(\|\bar{X}_n\|^2)(\bar{X}_i - \theta_i)] + E_\theta[\psi(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2] \\ &= -\frac{2}{n} E_\theta[\|\bar{X}_n\|^2 \psi'(\|\bar{X}_n\|^2)] + E_\theta[\psi(\|\bar{X}_n\|^2)(\|\bar{X}_n\|^2 - \frac{p}{n})] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= E_\theta\left\{ \psi^2(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2 + 2\psi(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2 \left[\phi(\|\bar{X}_n\|^2) - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{n} \|\bar{X}_n\|^2 \psi'(\|\bar{X}_n\|^2) + \frac{2p}{n} \psi(\|\bar{X}_n\|^2) \right\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Si dans la définition (3.25) de l'estimateur $\delta_{\phi, \psi}(X_1, \dots, X_n)$ nous remplaçons $\phi = \phi_{JS}$ et nous obtenons de (3.29)

$$\Delta_{\phi_{JS}} = E_\theta \left[\psi^2(\|\bar{X}_n\|^2)\|\bar{X}_n\|^2 + \frac{4}{n} \|\bar{X}_n\|^2 \psi'(\|\bar{X}_n\|^2) + \psi(\|\bar{X}_n\|^2) \left(\frac{p}{n} - \frac{p-2}{c} \right) \right] \tag{3.30}$$

et de même si nous remplaçons $\phi = \phi_{JS}^+$, nous obtenons

$$\Delta_{\phi_{JS}^+} = E_{\theta} \left\{ \psi^2(\|\bar{X}_n\|^2) \|\bar{X}_n\|^2 + \frac{4}{n} \|\bar{X}_n\|^2 \psi'(\|\bar{X}_n\|^2) + \frac{2p}{n} \psi(\|\bar{X}_n\|^2) \right\} \\ - 2 \int_0^{\frac{p-2}{c}} \psi(u) u \chi^2(p, \lambda, u) du - \frac{2(p-2)}{c} \int_{\frac{p-2}{c}}^{\infty} \psi(u) \chi^2(p, \lambda, u) du$$

où $\chi^2(p, n\|\theta\|^2, u)$ désigne la densité d'une v.a. du Khi-deux décentrée à p degrés de libertés et de paramètre de décentrage $\lambda = n\|\theta\|^2$.

Ainsi :

$$\Delta_{\phi_{JS}^+} = 2 \int_0^{\frac{p-2}{c}} \psi(u) \left(\frac{p-2}{c} - u \right) \chi^2(p, \lambda, u) du + \Delta_{\phi_{JS}} \quad (3.31)$$

Par suite, de la définition de $\Delta_{\phi} = R(\delta_{\phi}, \theta) - R(\phi, \theta)$, nous avons

$$\Delta R = R(\delta_{\phi_{JS}^+, \psi}, \theta) - R(\delta_{\phi_{JS}, \psi}, \theta) \\ = -R(\phi_{JS}, \theta) + R(\phi_{JS}^+, \theta) + 2 \int_0^{\frac{p-2}{c}} \psi(u) \left(\frac{p-2}{c} - u \right) \chi^2(p, \lambda, u) du \quad (3.32)$$

La condition imposée sur ψ et le résultat 1) impliquent que la différence $-R(\phi_{JS}, \theta) + R(\phi_{JS}^+, \theta)$ est négative.
D'où le résultat 2). \square

Appendice

Théorème 1 (Chebyshev's association inequality).

Soient f et g deux fonctions réelles non décroissantes (respectivement non croissantes) définies sur R . Si X est une variable aléatoire réelle, alors

a) Si f et g sont non décroissantes (respectivement non croissantes)

$$E[f(X)g(X)] \geq E[f(X)]E[g(X)]$$

b) Si f est non croissante et g est non décroissante (respectivement non décroissante et non croissante)

$$E[f(X)g(X)] \leq E[f(X)]E[g(X)]$$

Démonstration Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Si f et g sont non décroissantes, on a

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

d'où

$$E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \geq 0$$

en développant cette dernière inégalité et en utilisant le fait que X, Y sont indépendantes et identiquement distribuées on a le résultat a) (idem pour b))

D'où le résultat \square .

Lemme 2 La probabilité du χ^2 décentrée, $\chi_n^2(\delta)$, est la composée de la probabilité de poisson K de paramètre $\frac{\delta}{2}$ et de la transition de probabilité de N vers R^+ , qui à tout k associe la probabilité du χ^2 centrée χ_{n+2k}^2 .

Autres expressions de ce lemme

(1) Si une variable aléatoire Y suit, conditionnellement à une variable aléatoire K , la loi χ_{n+2K}^2 et si K suit la loi de Poisson $\Pi\left(\frac{\delta}{2}\right)$, alors Y suit la loi $\chi_n^2(\delta)$.

(2) Pour toute application f de R^+ dans R , $\chi_n^2(\delta)$ -intégrable, on a

i)

$$\int_{R^+} f(x) \chi_n^2(\delta; dx) = \int_N \left[\int_{R^+} f(x) \chi_{n+2k}^2(dx) \right] \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dk\right)$$

Démonstration Elle découle de la définition même de la loi du $\chi_n^2(\delta)$ décentré.
D'où le résultat \square .

Corollaire 3 Soit $\nu \in \mathbb{R}$, le moment d'ordre ν de la probabilité du $\chi_n^2(\delta)$, est fini si et seulement si

$$\nu > -\frac{n}{2}$$

Dans ce cas il vaut

ii)

$$\int_{\mathbb{R}^+} x^\nu \chi_n^2(\delta; dx) = 2^\nu \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \nu + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dk\right)$$

Démonstration Elle découle du fait que $\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right) = \left(\frac{n}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)$ et $\Gamma(x)$ étant définie pour tout $x > 0$.

D'où le résultat \square .

Lemme 4 Soit $\theta \in \mathbb{R}^p$; soit h une application mesurable, de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , $N_p(\theta, I_p)$ -intégrable on suppose que l'application, de \mathbb{R}^p dans $\mathbb{R}^p : z \rightsquigarrow h(\|z\|^2)z$ est intégrable. Alors

i)

$$\int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2)(z - \theta) N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta}{\|\theta\|^2} \int_N \left[\int_{\mathbb{R}^+} h(w) \chi_{p+2k}^2(dw) \right] (2k - \|\theta\|^2) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

ii)

$$\int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2)z N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta}{\|\theta\|^2} \int_N \left[\int_{\mathbb{R}^+} h(w) \chi_{p+2k}^2(dw) \right] 2k \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

iii)

$$\int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2)z N_p(\theta, I_p; dz) = \theta \int_N \left[\int_{\mathbb{R}^+} h(w) \chi_{p+2+2k}^2(dw) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

iv)

$$\int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2)^t (z - \theta) z N_p(\theta, I_p; dz) = \int_N \left[\int_{\mathbb{R}^+} h(w) (w - 2k) \chi_{p+2k}^2(dw) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

Démonstration

i) Soit

$$g(\theta) = \int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2) N(\theta, I_p; dz)$$

Pour tout i ($1 \leq i \leq p$) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2) N(\theta, I_p; dz) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_{\mathbb{R}^p} h\left(\sum_{i=1}^p (z_i^2)\right) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (z_i - \theta_i)^2\right) \prod_{i=1}^p dz_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} h\left(\sum_{i=1}^p (z_i^2)\right) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} (z_i - \theta_i) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (z_i - \theta_i)^2\right) \prod_{i=1}^p dz_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2) (z_i - \theta_i) N(\theta, I_p; dz) \end{aligned}$$

Or (Lemme 2 Appendice) on a, en posant

$$f(k) = \int_{\mathbb{R}^+} h(w) \chi_{p+2k}^2(dw)$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^p} h(\|z\|^2) N(\theta, I_p; dz) = \int_N f(k) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \quad (1)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_{R^p} h(w) \chi_p^2(\|\theta\|^2; dw) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \theta_i^2 \right)^k \frac{1}{k!} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \theta_i^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \left(\frac{1}{2} \|\theta\|^2 \right)^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \|\theta\|^2\right) \theta_i \left[k - \frac{\|\theta\|^2}{2} \right] \frac{1}{k!} \\
&= \frac{\theta_i}{\|\theta\|^2} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) (2k - \|\theta\|^2) \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2} \|\theta\|^2 \right)^k \exp\left(-\frac{1}{2} \|\theta\|^2\right) \\
&= \frac{\theta_i}{\|\theta\|^2} \int_N f(k) \frac{1}{k!} (2k - \|\theta\|^2) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)
\end{aligned}$$

Donc, $\forall i (1 \leq i \leq p)$

$$\int_{R^p} h(\|z\|^2) (z_i - \theta_i) N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta_i}{\|\theta\|^2} \int_N f(k) \frac{1}{k!} (2k - \|\theta\|^2) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \quad (2)$$

d'où le résultat *i*)

ii) Il résulte de (1) et (2) que

$$\int_{R^p} h(\|z\|^2) z_i N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta_i}{\|\theta\|^2} \int_N 2k f(k) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

autrement dit

$$\int_{R^p} h(\|z\|^2) z N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta}{\|\theta\|^2} \int_N \left[\int_{R^+} h(w) \chi_{p+2k}^2(dw) \right] 2k \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

d'où le résultat *ii*)

iii) d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\theta\|^2} \int_N f(k) 2k \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) &= \frac{1}{\|\theta\|^2} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) k \exp\left(-\frac{\|\theta\|^2}{2}\right) \frac{1}{k!} \left(\frac{\|\theta\|^2}{2}\right)^k \\
&= \int_N f(t+1) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dt\right)
\end{aligned}$$

d'où d'après *ii*)

$$\int_{R^p} h(\|z\|^2) z N_p(\theta, I_p; dz) = \theta \int_N \left(\int_{R^+} h(u) \chi_{p+2+2t}^2(du) \right) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dt\right)$$

d'où le résultat *iii*)

iv) enfin

$$\begin{aligned}
\int_{R^p} h(\|z\|^2)^t (z - \theta) z N_p(\theta, I_p; dz) &= \int_{R^p} h(\|z\|^2) \|z\|^2 N_p(\theta, I_p; dz) -^t \theta \int_{R^p} h(\|z\|^2) z N_p(\theta, I_p; dz) \\
&= \int_{R^+} h(u) u \chi_p^2(\|\theta\|^2; du) -^t \theta \int_{R^p} h(\|z\|^2) z N_p(\theta, I_p; dz) \\
&= \int_N \left(\int_{R^+} h(u) u \chi_{p+2k}^2(du) \right) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) - \\
&\quad - \frac{^t \theta \theta}{\|\theta\|^2} \int_N \left(\int_{R^+} h(u) \chi_{p+2k}^2(du) \right) 2k \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \\
&= \int_N \left(\int_{R^+} h(u) (u - 2k) \chi_{p+2k}^2(du) \right) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat \square .

Dans le cas où $h(u) = u^\nu$ (où $\nu \in]-\frac{p}{2}, +\infty[$) on a le corollaire suivant

Corollaire 5 Soit $\nu \in]-\frac{p}{2}, +\infty[$, $\theta \in IR^p$.

Alors

i)

$$\int_{R^p} \|z\|^{2\nu} (z - \theta) N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta \cdot 2^\nu}{\|\theta\|^2} \int_N \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + \nu + k)}{\Gamma(\frac{p}{2} + k)} (2k - \|\theta\|^2) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

ii)

$$\int_{R^p} \|z\|^{2\nu} z N_p(\theta, I_p; dz) = \frac{\theta \cdot 2^{\nu+1}}{\|\theta\|^2} \int_N \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + \nu + k)}{\Gamma(\frac{p}{2} + k)} k \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

iii)

$$\int_{R^p} \|z\|^2 z N_p(\theta, I_p; dz) = \theta \cdot 2^\nu \int_N \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + \nu + 1 + k)}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1 + k)} \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right)$$

iv)

$$\begin{aligned}
\int_{R^p} \|z\|^{2\nu} (z - \theta) z N_p(\theta, I_p; dz) &= (p + 2\nu) \int_{R^p} \|z\|^{2\nu} N_p(\theta, I_p; dz) \\
&= (p + 2\nu) \int_{R^+} w^\nu \chi_{p+2k}^2(dw)
\end{aligned}$$

Démonstration Les formules *i)*, *ii)* et *iii)* sont de simples transcriptions de *i)*, *ii)* et *iii)*. La formule *iv)* donne ici

$$\begin{aligned}
\int_{R^p} \|z\|^{2\nu} (z - \theta) z N_p(\theta, I_p; dz) &= \int_N \left[\int_{R^+} w^\nu (w - 2k) \chi_{p+2k}^2(dw) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \\
&= \int_N \frac{2^{\nu+1} \Gamma\left(\frac{p}{2} + k + \nu + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + k\right)} \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \\
&\quad - k \int_N \frac{2^{\nu+1} \Gamma\left(\frac{p}{2} + k + \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + k\right)} \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \\
&= \int_N \frac{2^\nu}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + k\right)} \left((p + 2\nu) \Gamma\left(\frac{p}{2} + k + \nu\right) \right) \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \\
&= (p + 2\nu) \int_N \left[\int_{R^+} w^\nu \chi_{p+2k}^2(dw) \right] \Pi\left(\frac{\|\theta\|^2}{2}; dk\right) \\
&= (p + 2\nu) \int_{R^+} w^\nu \chi_p^2(\|\theta\|^2; dw)
\end{aligned}$$

D'où le résultat \square .

Lemme 6 Tze Fen Li and Wen Hou Kuo [22] Soit deux nombres réel r et s , tels que $-\frac{n}{2} < s \leq r < 0$. L'application, de R^+ dans R , $H_{n,r,s}$ définie par

$$H_{n,r,s}(\delta) = \frac{\int_{R^+} x^r \chi_n^2(\delta; dx)}{\int_{R^+} x^s \chi_n^2(\delta; dx)}$$

est strictement croissante ; en particulier son minimum est

$$H_{n,r,s}(0) = 2^{r-s} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}$$

Démonstration On va établir tout d'abord que

$$\frac{d}{d\delta} \int x^{\nu} \chi_n^2(\delta; dx) = \nu 2^{\nu-1} \int_N \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + j)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1 + j)} \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dj\right) \quad (3)$$

On a en effet (utilisant le Corollaire 3 de l'Appendice pour la première égalité) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \int x^{\nu} \chi_n^2(\delta; dx) &= 2^{\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + k)}{\Gamma(\frac{n}{2} + k)} \frac{1}{k!} \frac{d}{d\delta} \exp\left(\frac{-\delta}{2}\right) \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \\ &= 2^{\nu-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + k)}{\Gamma(\frac{n}{2} + k)} \frac{1}{k!} \exp\left(\frac{-\delta}{2}\right) \left[-\left(\frac{\delta}{2}\right)^k + k \left(\frac{\delta}{2}\right)^{k-1} \right] \\ &= 2^{\nu-1} \exp\left(\frac{-\delta}{2}\right) \left[-\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + j)}{\Gamma(\frac{n}{2} + j)} \frac{1}{j!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^j + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + j + 1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + j + 1)} \frac{1}{j!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^j \right] \\ &= 2^{\nu-1} \exp\left(\frac{-\delta}{2}\right) \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{\delta}{2}\right)^j \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + j)}{\Gamma(\frac{n}{2} + j + 1)} \left(-\left(\frac{n}{2} + j\right) + \left(\frac{n}{2} + \nu + j\right)\right) \right] \\ &= 2^{\nu-1} \nu \int_N \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \nu + j)}{\Gamma(\frac{n}{2} + j + 1)} \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dj\right) \end{aligned}$$

Posons alors

$$K_{n,r,s}(\delta) = \left[\frac{d}{d\delta} \int x^r \chi_n^2(\delta; dx) \right] \left[\int x^s \chi_n^2(\delta; dx) \right] - \left[\frac{d}{d\delta} \int x^s \chi_n^2(\delta; dx) \right] \left[\int x^r \chi_n^2(\delta; dx) \right]$$

Pour que $H_{n,r,s}$ soit strictement croissante, il suffit que $k_{n,r,s}$ prenne des valeurs strictement positives; c'est ce que nous allons établir. Il résulte du corollaire de l'Appendice et de l'égalité (3) ci-dessus, que

$$\begin{aligned} K_{n,r,s}(\delta) &= 2^{r+s-1} \left[r \int_{N^2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + r + i)}{\Gamma(\frac{n}{2} + i + 1)} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + s + j)}{\Gamma(\frac{n}{2} + j)} \Pi\left(\frac{\delta}{2}; di\right) \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dj\right) \right. \\ &\quad \left. - s \int_{N^2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + r + j)}{\Gamma(\frac{n}{2} + j)} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + s + i)}{\Gamma(\frac{n}{2} + i + 1)} \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dj\right) \Pi\left(\frac{\delta}{2}; di\right) \right] \end{aligned}$$

Et donc, puisque $r > s$,

$$K_{n,r,s}(\delta) \geq r 2^{r+s-1} \int_{N^2} k_{n,r,s}(i,j) \Pi\left(\frac{\delta}{2}; di\right) \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dj\right)$$

Où

$$k_{n,r,s}(i,j) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + r + i) \Gamma(\frac{n}{2} + s + j) - \Gamma(\frac{n}{2} + r + j) \Gamma(\frac{n}{2} + s + i)}{\Gamma(\frac{n}{2} + i + 1) \Gamma(\frac{n}{2} + j)}$$

On remarque que, quelque soit i , $k_{n,r,s}(i,i) = 0$; on a donc

$$K_{n,r,s}(\delta) \geq r 2^{r+s-1} \int_{[i < j]} (k_{n,r,s}(i,j) + k_{n,r,s}(j,i)) \Pi\left(\frac{\delta}{2}; di\right) \Pi\left(\frac{\delta}{2}; dj\right)$$

Or pour $i < j$, on a

$$\begin{aligned}
k_{n,r,s}(i,j) + k_{n,r,s}(j,i) &= \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + r + i\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + s + j\right) - \Gamma\left(\frac{n}{2} + r + j\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + s + i\right) \right] \\
&\quad \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + i + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + j + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + i\right)} \right] \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + r + i\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + s + i\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + i\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right)} \left[\prod_{t=0}^{j-i-1} \left(\frac{n}{2} + s + i + t\right) - \prod_{t=0}^{j+i-1} \left(\frac{n}{2} + r + i + t\right) \right] \\
&\quad \left[\frac{1}{\frac{n}{2} + i} - \frac{1}{\frac{n}{2} + j} \right] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

(Puisque, pour tout t , $\left(\frac{n}{2} + s + i + t\right) < \left(\frac{n}{2} + r + i + t\right)$). Comme par hypothèse, $r < 0$, on a $K_{n,r,s}(\delta) > 0$.
D'où le résultat \square .

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 7 Soit $X \sim N(\theta, I_p)$, et $\|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^p X_k^2}$ alors

$$\sup_{\|\theta\|^2} \left(\frac{E(\|X\|^{-2r+2})}{E(\|X\|^{-r})} \right) = 2^{-\left(\frac{r-2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p-2r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-r}{2}\right)}$$

Démonstration Découle immédiatement du Lemme 6

Lemme 8 Soit $h > 0$; la fonction G définie sur $\left] -\frac{h}{2}, +\infty \right[$ par

$$G(x) = \frac{[\Gamma(h+x)]^2}{\Gamma(h+2x)}$$

croît de 0 à $G(h)$ quand x décroît de $-\frac{h}{2}$ à 0, et décroît de $\Gamma(h)$ à 0 quand x croît de 0 à $+\infty$.

Démonstration

$$G'(x) = \frac{2\Gamma'(h+x)\Gamma(h+x)\Gamma(h+2x) - 2\Gamma'(h+2x)[\Gamma(h+x)]^2}{\Gamma^2(h+2x)}$$

$$= \frac{2\Gamma'(h+x)}{\Gamma^2(h+2x)} [\Gamma(h+x)\Gamma(h+2x) - \Gamma(h+2x)\Gamma(h+x)]$$

Donc $G'(x)$ est du signe de

$$\frac{\Gamma'(h+x)}{\Gamma(h+x)} - \frac{\Gamma'(h+2x)}{\Gamma(h+2x)}$$

Et comme l'application définie sur $]0, +\infty[$, par

$$x \rightarrow \frac{\Gamma'(h+x)}{\Gamma(h+x)}$$

est croissante. En effet

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right) - \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t) dt \right)^2$$

Or

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right) \quad (\text{Schwartz})$$

$$- \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t) dt \right)^2 \geq - \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right)$$

D'où: $\Gamma''(x)\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2 \geq 0$ et donc $\frac{\Gamma'(h+x)}{\Gamma(h+x)}$ est croissante. D'où

1^{er} cas: $x \in \left[\frac{-h}{2}, 0 \right[\Rightarrow h+x > h+2x \Rightarrow$

$$\frac{\Gamma'(h+x)}{\Gamma(h+x)} - \frac{\Gamma'(h+2x)}{\Gamma(h+2x)} \geq 0 \Rightarrow G \text{ est croissante}$$

2^{eme} cas: $x \in [0, +\infty[\Rightarrow h+x \leq h+2x \Rightarrow$

$$\frac{\Gamma'(h+x)}{\Gamma(h+x)} - \frac{\Gamma'(h+2x)}{\Gamma(h+2x)} \leq 0 \Rightarrow G \text{ est décroissante}$$

et on a: $\lim_{x \rightarrow \frac{-h}{2}} \Gamma(h+2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{-h}{2}} \Gamma(x) = +\infty$ d'où:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-h}{2}} \frac{[\Gamma(h+x)]^2}{\Gamma(h+2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{-h}{2}} G(x) = 0$$

D'autre part la formule de Stirling exprime que au voisinage de $+\infty$

$$\Gamma(y+1) \sim \sqrt{2\pi} y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y}$$

on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{2\pi} (h+x-1)^{h+x-1+\frac{1}{2}} e^{-(h+x-1)}]^2}{(\sqrt{2\pi}) (h+2x-1)^{h+2x-1+\frac{1}{2}} e^{-(h+2x-1)}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-h+1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2h+2x-2)^{h-\frac{1}{2}} (2h+2x-1)^{h+2x-\frac{1}{2}}}{2^{2h+2x-2} (h+2x-1)^{h+2x-\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2h+2x-2)^{h-\frac{1}{2}}}{2^{2h+2x-2}} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h-1}{h+2x-1}\right)^{h+2x-\frac{1}{2}} = e^h$$

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 0$.

D'où le résultat \square .

Lemme 9 Soit U une v.a. de loi $\chi^2(p, \lambda)$. Pour $s \geq 0$, $r > -\frac{p}{2}$, $t = \frac{1}{1+2s}$ et K une v.a. de loi de Poisson $P(\frac{\lambda t}{2})$, nous avons:

$$E(U^r e^{-sU}) = 2^r t^{\frac{p}{2}+r} e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)} E[\Gamma(\frac{p}{2} + K + r) / \Gamma(\frac{p}{2} + K)]$$

Démonstration Rappelons que si $U \sim \chi^2(p, \lambda)$ alors la loi de U conditionnelle à $K \sim P(\frac{\lambda}{2})$ est un χ^2_{p+2K} .

Nous avons donc

$$\begin{aligned}E(U^r e^{-sU} / K) &= \frac{1}{2^{\frac{p}{2}+K} \Gamma(\frac{p}{2} + K)} \int_{R^+} e^{-\frac{\lambda}{2}su} u^{\frac{p}{2}+K+r-1} du \\ &= \frac{2^r \Gamma(\frac{p}{2} + K + r)}{2^{\frac{p}{2}+K+r} \Gamma(\frac{p}{2} + K) \Gamma(\frac{p}{2} + K + r)} \int_{R^+} e^{-\frac{\lambda}{2}(1+2s)u} u^{\frac{p}{2}+K+r-1} du\end{aligned}$$

En posant $v = u(1+2s)$ et $t = \frac{1}{1+2s}$ on a:

$$\begin{aligned}E(U^r e^{-sU} / K) &= \frac{2^r \Gamma(\frac{p}{2} + K + r) t^{\frac{p}{2}+K+r}}{2^{\frac{p}{2}+K+r} \Gamma(\frac{p}{2} + K) \Gamma(\frac{p}{2} + K + r)} \int_{R^+} e^{-\frac{\lambda}{2}v} v^{\frac{p}{2}+K+r-1} dv \\ &= \frac{2^r t^{\frac{p}{2}+r} \Gamma(\frac{p}{2} + K + r) t^K}{\Gamma(\frac{p}{2} + K)}\end{aligned}$$

Par suite de la relation

$$E(U^r e^{-sU}) = E[E(U^r e^{-sU}/K)]$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned} E(U^r e^{-sU}) &= 2^r t^{\frac{p}{2}+r} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\frac{\lambda t}{2})^k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + k + r)}{\Gamma(\frac{p}{2} + k)} \\ &= 2^r t^{\frac{p}{2}+r} e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t}{2}} \frac{(\frac{\lambda t}{2})^k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + k + r)}{\Gamma(\frac{p}{2} + k)} \\ &= 2^r t^{\frac{p}{2}+r} e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)} E\left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + K + r\right) / \Gamma\left(\frac{p}{2} + K\right)\right] \end{aligned}$$

D'où le résultat \square .

Conclusion

Dans notre travail nous avons rencontré des difficultés techniques à montrer la domination totale des estimateurs étudiés sur la partie positive de l'estimateur de James-Stein sur tout l'espace paramétrique R^p . Signalons que P. Shao and W. E. Strawderman [21], ont proposé deux classes d'estimateurs en "W-shaped" dominant $\phi_{JS}^+(X)$, sur tout R^p mais de formes assez compliquées et inadmissibles. Cependant les méthodes que nous avons utilisées nous ont permis d'exhiber des sous-espaces paramétriques généralement ne contenant pas l'origine, très "larges" et suffisants pour des applications, où nous avons une domination uniforme de la partie positive de l'estimateur de James Stein. En général les ensembles paramétriques exhibés ne sont pas comparables entre eux mais une étude plus fine reste à mener. Notons que pour certaines fonctions ψ négatives, les sous-espaces paramétriques où notre estimateur dominait ϕ_{JS}^+ , contenaient l'origine et étaient généralement assez larges. Nous signalons que Marvin. H. J. Gruber [14] (p307 , p370) a fait une étude numérique détaillée d'une classe d'estimateurs proposés par G. G. Judge et M. E. Bock [16] dans laquelle plusieurs formes d'estimateurs susceptibles d'améliorer la partie positive de l'estimateur de James -Stein sont proposées. Une idée serait de choisir des estimateurs à "rétrécisseurs ridges" de la forme $\phi_{JS}^+(X) + \Psi(X)X$ où $\Psi(X)$ est une matrice diagonale dont les éléments notés $\psi_i(X)$, sont des fonctions réelles de $\|X\|^2$, $1 \leq i \leq p$, et ayant (au moins pour certains indices i) des signes négatifs .

Références bibliographiques

- [1] Aboura, R. Benmansour, D. Benabadji, N. *Comparaison et phytoécologie des Atriplexaies en Oranie (Algérie)*. Ecologia Méditerranéa , Tome 32 fascicule 1 - 2006 (Sous presse)
- [2] Baranchik, A. J. (1964); *Multiple regression and estimation of the mean of a multivariate normal distribution*. Stanford Univ. Technical Report 51
- [3] Baranchik, A. J. (1970); *A family of minimax estimatos of the mean of a multivariate normal distribution*. Ann. Math. Stat ,41,2,642-645
- [4] Benmansour, D. ,Martin, A. *Estimateurs de James-Stein généralisés Première partie: Présentation dans les cadres classique et Bayésien*. Thèse 3ème cycle Octobre 1983 Rouen France.
- [5] Benmansour, D. ,Martin, A. *Estimateurs de James-Stein généralisés Deuxième partie: Etude numérique des estimateurs de type polynômial*). Thèse 3ème cycle Octobre 1983 Rouen France.
- [6] Benmansour , D. *Présentation dans les cadres classiques et Bayésien, des estimateurs de James-Stein généralisés*. Document de travail - Nouvelle série 1984 -01.
- [7] Benmansour, D. ,Martin, A. *Etude numérique des estimateurs de James-Stein généralisés de type polynomial*. Document de travail - Nouvelle série 1984 -02.
- [8] Benmansour, D. Mourid, T. *Etude d'une classe d'estimateurs avec rétrécisseur de la moyenne d'une loi gaussienne*". Annales de l'ISUP volume 51 - Fascicule 1-2 (octobre 2007)

- [9] Berger, J, O and Bock, M. E. (1976) , *Estimating Singularities of Stein-type Estimators of Location Vectors* . J Roy Statist .soc. Ser .B..38 166-170 .
- [10] Bock, M. E. (1988) , *Shrinkage estimators : pseudo-Bayes rules for normal mean vectors*. In *Statistical Decision Theory and Related Topics 4* (S.S. Gupta and J.O. Berger, eds.) 1 281-298 Springer, New York.
- [11] Brown, L.D. (1988) , *The differential inequality of a statistical estimation problem*. In *Statistical Decision Theory and Related Topics 4* (S.S. Gupta and J.O. Berger, eds.) 1 299-324 Springer, New York.
- [12] Cellier,D. et Fourdrinier,D.(1985);*Estimateurs a rétrécisseurs de la moyenne d'une loi normale multidimensionnelle pour un coût quadratique usuel*.Statistique et analyse des données 1985 - vol.10 N°3 pp 26-41
- [13] Efron, B. and Morris, C.(1976) .*Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution*. Ann. Statist., 8,372-379
- [14] Gruber ,Marvin. H. G. (1998) *Improving efficiency by shrinkage ; Statistics :textbooks and monographs volume 156*
- [15] James, W. and Stein,C. (1961) *Estimation of quadratique loss* Proc 4th Berkeley Symp,Math .Statist.Prob.,Vol.1, 361-379 ,Univ of california Press , Berkeley.
- [16] Judge, G. G. And Bock M. E.(1978) *The statistical implications of pre-test and Stein rule Estimators* in econometrics North - Holland , Amsterdam .
- [17] Kubokawa,T. (1991), *An approach to improving the James-Stein estimator*.J.Multivariate.Anal.,36 ,121-126
- [18] Maruyama, Y. (2000) ; *Minimax admissible estimation of a multivariate normal mean and improvement upon the James -Stein estimator*. Doctor thesis , Faculty of Economics , University of Tokyo

- [19] Maruyama, Y. (2004) ; *Stein's Idea and Minimax Admissible Estimation of a Multivariate Normal Mean* ; J Multivariate Anal., 88 , 320 - 334 .
- [20] Maruyama, Y and Strawderman, W, E (2004). *Necessary Conditions for Dominating The James-Stein Estimator*. Ann.inst.statist.Math 57 (2005), n°1, 157-165.
- [21] Shao, P. and Strawderman, W. E. (1994) *Improving on the James-Stein positive part*. Ann.Statist., 22, 1517-1539
- [22] Stein, C. (1956) *Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution*. Proc 3th Berkeley Symp, Math. Statist. Prob., Vol. 1, 197-206, Univ of California Press, Berkeley.
- [23] Stein, C. (1973) *Estimation of the mean of a multivariate normal distribution* In Proc Prague Symp Asymptotic Statist , 345 - 381.
- [24] Strawderman, W., E. (1971). *Proper Bayes minimax estimators of the multivariate normal mean*. Ann. Math. Stat., 42, 1, 385-388.
- [25] Tze Fen Li (1982). A note on *James-Stein* and Bayes empirical Bayes Estimators , Comm. Statist.-Theor.Math., 11 (9) , 1029-1043
- [26] Tze Fen Li and Wen Hou Kuo (1982). *Generalized James-Stein Estimators* , Comm. Statist.-Theor.Math., 11 (20) , 2249-2257

Annexe

Nous présentons un travail que nous avons mené dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe d'écologie végétale du département de Biologie de l'université de Tlemcen et qui est publié dans la revue "**Ecologia Méditerranéa** " Tome 32 fascicule 1 - 2006 (Sous presse) intitulé "**Comparaison et phytoécologie des Atriplexaies en Oranie (Algérie)**".

Nous avons coopéré dans deux projets de recherche, en biologie (Ecologie végétale) depuis l'année 2000, sous la direction du Professeur M. BENABADJI Noury.

Le Premier projet de recherche, intitulé : « Etude phyto-écologique et biomorphologique de L'Atriplex Au Nord de Tlemcen » dont la durée était de 06 années (2000 à 2005).

Le deuxième projet de recherche, intitulé : « Etude comparative phyto-écologique des populations à Atriplex halimus L. au Nord-Est (Zenata et au Sud de Tlemcen (Chott El-Gharbi) », est en en cours.

Nous avons contribué à l'analyse des données floristiques (récoltées sur le terrain et inventoriées durant deux décennies, il s'agit des peuplements halophytes en général et ceux d'Atriplex halimus en particulier). Ce travail a été fait à l'aide de l'outil statistique. Nous l'avons concrétisé à l'aide de graphiques, montrant les corrélations pouvant exister entre les espèces inventoriées d'une part (particulièrement halophiles) et les paramètres floristiques et édaphiques étudiés d'autre part. L'usage de l'outil statistique, nous a montré l'importance des facteurs abiotiques comme la texture du sol, la conductivité électrique, le pH et le climat dans la répartition et la variation des touffes d'Atriplex halimus au niveau des différentes stations d'étude. Nous présentons dans ce qui quit l'article publié dans son intégralité.

Comparaison et phytoécologie des Atriplexaies en Oranie (Algérie)

Comparison and phytoecology of Atriplex communities in Oran region (Algeria)

Rédha Aboura, Djamel Benmansour et Noury Benabadji
- BP119, Département de biologie, Faculté des sciences, Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, 13000 Algérie

RESUME

Les nombreux travaux réalisés sur la végétation halophile dans l'Oranie en Algérie, nécessitent encore des apports complémentaires. Sur le plan bioclimatique, le gradient pluviométrique décroît du Nord de l'Algérie (Messerghine et Béni-Saf) vers le Sud (Chott El-Gharbi), ce qui influe sur la composition floristique des Atriplexaies des deux zones. L'approche pédologique a montré une texture limono-sableuse à sablo-limoneuse pour la majorité des stations des deux zones. Par ailleurs, le taux de salinité augmente au Sud par rapport au Nord, excepté la station de Messerghine (proche du Sebkha d'Oran), alors que le taux de matière organique est très faible dans le Sud. Nous signalons qu'un élément nouveau apporté dans l'analyse de la diversité biologique est la prise en compte, en plus de la présence des espèces, de leur abondance relative. Dans la zone Nord, la matorralisation et l'anthropisation marquent le paysage végétal de la station de Béni-Saf. A Messerghine, la composition floristique des Atriplexaies conserve son caractère halophile. Le cortège floristique des Atriplexaies de la zone Sud (Chott El-Gharbi) est marqué par sa pauvreté floristique en lien avec l'effet du surpâturage qui entraîne une succession végétale vers des steppes à *Peganum harmala* par endroits.

L'AFC (analyse factorielle des correspondances) réalisée à l'aide du logiciel Minitab 12, nous informe sur les facteurs régissant la composition floristique des atriplexaies des deux zones: pour la zone Nord, au niveau de la station de Messerghine, les paramètres édaphiques (humidité, M.O et salinité) expliquent en grande partie l'information apportée par les deux premiers axes (41%). Au niveau de la station de Béni-Saf, en s'éloignant de la Sebkha d'Oran, le facteur humain (action anthropique) explique la grande part de l'information (plus de 55%). Pour la zone Sud et plus exactement la station d'El Kasdir 01 (domaine steppique), ce sont à la fois le paramètre édaphique (salinité) et surtout le facteur anthropique qui expliquent l'information apportée par les deux premiers axes (61,1%).

Mots clés: *Atriplex halimus* L.- Dynamique végétale – Phyto-écologie – AFC –Chott El-Gharbi – Oranie (Algérie).

Abstract

The numerous studies carried out on the halophilous vegetation in Oran region (Algeria) still require complementary contributions. Bioclimatically, the pluviometric gradient decreased from North of Algeria (Messerghine and Béni-Saf) to South (Chott El-Gharbi) which influences the floristic composition of the atriplexaies of the two zones.

A pedological study showed sandy loam or a silty loam texture in the majority of the stations of the two zones. In addition, the rate of salinity increased in the South compared to North except the station of Messerghine (near to Oran Sebkhah), whereas the organic matter rate was very low in the South.

The new element brought by this study to the analyses of biologic diversity, it is that we took into account the relative abundance of species as well as their presence.

In the Northern zone, the matorralisation and the anthropisation mark the floristic landscape in Béni-Saf. In Messerghine the floristic composition of Atriplexaies remained halophilous. The floristic procession of Atriplexaies of the Southern zone (Chott El-Gharbi) was marked by low species richness in bond with the overgrazing which probably induces probably a floristic succession to steppes dominated by *Peganum harmala* between El Aricha and Abdelmoula.

CA (Correspondance Analyses) carried out using the software Minitab 12 informed us on the factors governing floristic composition of the atriplexaies of the two zones: for the Northern zone, in Messerghine, the edaphic parameters (moisture, O.M and salinity) mainly explained the information brought by the first two axes (41%). In Béni-Saf, while moving away from Oran Sebkhah, the anthropic activities accounted for a great part of information (more than 55%).

For the Southern zone, in the station of El Kasdir 01 (steppe field), it was both the edaphic parameter (salinity) and the anthropic factor which explained the information brought by the first two axes (61,1%).

Key words: *Atriplex halimus* L.- vegetation dynamics – phytoecology –CA (Correspondance Analyses) – Chott El-Gharbi – Oran region(Algeria).

INTRODUCTION

Les plantes du genre *Atriplex* sont présentes dans la plupart des régions du globe (Kinet et al., 1998). On le trouve dans le Sud et le Sud-Ouest de l'Europe : en France sur les côtes de la Manche et du Sud de la Bretagne; commun ou assez commun sur le littoral méditerranéen où il est en outre souvent cultivé en haie jusqu'à Aix-en-Provence. Hors Europe, on le trouve en

Afrique septentrionale et australe. Au Sud-Ouest de l'Asie et au Chili. Il s'est particulièrement diversifié en Australie (Anonyme, 1980).

En Algérie, les Atriplexaies représentent près d'un million d'hectares plus ou moins dégradé (Ouadah, 1982) et sont très prisées par le bétail (Froment, 1972). On trouve l'Atriplex dans les zones dites steppiques : Tebessa, Biskra, Boussaâda, Djelfa, Tiaret et Saida, et aux alentours des Chotts : Chott El-Gharbi (Benabadji, 1999), à El Bayadh (Chott Echergui), Mécheria et Tissemsilt. Il se trouve aussi dans les zones littorales, à Mostaganem et aux alentours de la Sebkha d'Oran (Ghezlaoui, 2001). De nombreuses études floristiques sur les halophytes en général et les Atriplexaies en particulier ont été réalisées dans le bassin méditerranéen. Parmi ces recherches : Simonneau en 1961 dans le cadre des aménagements agricoles, a travaillé sur les problèmes de la salinité dans les zones arides de l'Ouest Algérien. Djebaili (1970, 1984) a mené une étude phytoécologique globale de la steppe algérienne. Le genre *Atriplex* a été étudié par Francllet et Le Houérou en 1971 respectivement, en Tunisie et en Afrique du Nord. Gauchet et Burdin en 1974 de leur côté se sont intéressés à la géomorphologie et l'hydrologie des terrains salés. Le Houérou et al. (1975) ont cartographié et présenté les aspects phytoécologiques du Chott El-Hodna au Sud d'Alger. Le Houérou (1981) de nouveau s'est intéressé aux valeurs nutritionnelles de l'*Atriplex halimus*. Billard et Binet en 1975 ont effectué des travaux écophysiologicals sur l'Atriplex situé sur un substrat sableux du littoral. Bendaânoun en 1981 et 1991, a étudié la synécologie et la dynamique de la végétation halophile au Maroc (littoral atlantique). En Algérie occidentale, la végétation a été étudiée et inventoriée par Alcaraz (1982). En 1983, Aidoud a réalisé une étude sur la phytomasse, la production et les applications pastorales des écosystèmes steppiques oranais. El Afifi en 1986 a travaillé sur les terrains salés des côtes oranaises. Toujours en Oranie, Aimé (1991) a étudié dans le Tell oranais l'écologie des zones localisées respectivement dans les bioclimats sub-humides, semi-arides et arides. Benabadji (1991,1995), Bouazza (1991,1995), tous les deux ont étudié la phytoécologie des steppes, le premier s'est intéressé aux formations steppiques à *Artemisia herba-alba* et à *Salsola vermiculata*, le second aux formations steppiques à *Stipa tenacissima* et à *Lygeum spartum*. Sur le littoral septentrional Tunisien, Chaâbane en 1993 a effectué une étude sur la typologie et la syntaxonomie de la végétation, de même qu'il a proposé des actions d'aménagement susceptibles d'améliorer le couvert végétal. Au Sud Marocain (Marrakech), Benchaâbane en 1996 s'est fixé sur l'organisation et l'utilisation des Atriplexaies. Au niveau des Sebkhas d'Oran et d'Arzew, Tremblin (2000) étudie le comportement autoécologique de *Halopeplis amplexicaulis*. Par ailleurs, dans le Chott Echergui, Adi en 2001 a travaillé sur les formations à *Salsola vermiculata* réparties le long d'un gradient de salinité. Et enfin Belkhodja et Bidal (2001) ont étudié la réponse physiologique de l'*Atriplex halimus* aux concentrations élevées en sel au stade germinatif.

Dans notre cas, nous avons jugé utile de procéder à des comparaisons des Atriplexaies localisées respectivement au Nord de Remchi et celles localisées au Sud de Tlemcen (Chott El-Gharbi). Parmi toutes les études menées jusqu'à l'heure actuelle dans le domaine phytoécologique, aucune ne porte sur la comparaison de ces formations à *Atriplex halimus* entre le Nord et le Sud. Cette étude peut présenter une certaine originalité à caractère surtout phytoécologique et fait appel notamment à trois variantes écologiques majeurs : le bioclimat, le sol et la végétation. Les questions auxquelles nous tenterons de répondre dans cet article

sont :

Existe-t-il une différence phytoécologique des Atriplexaies entre le Nord et le Sud de l'Algérie. Si, oui, quels sont les paramètres qui expliquent ces différences ?

MATERIELS ET METHODES

1. SITUATION GEOGRAPHIQUE ET CHOIX DES STATIONS (FIGURE 1)

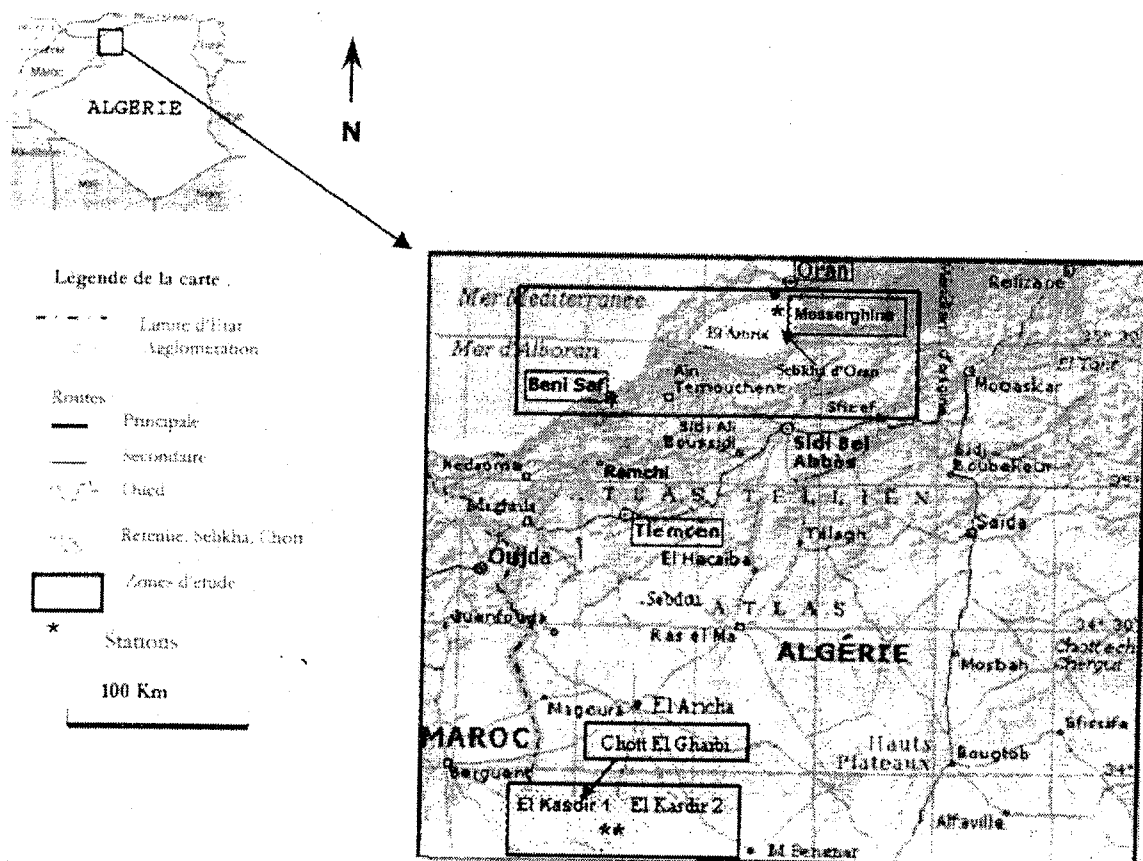


Figure 1 : Localisation des stations d'étude en Algérie

Notre région d'étude couvre une partie de l'Ouest Oranais qui correspond administrativement aux wilayas (départements) de Tlemcen, Ain Témouchent, Oran et Naâma. Elle est située à l'extrême Ouest du pays à proximité de la frontière Algéro-marocaine. Entre $32^{\circ}45'$ et $35^{\circ}49'$ de latitude Nord et entre $00^{\circ}32'$ et 02° de longitude Ouest. Le choix des stations est néanmoins orienté par la présence d'*Atriplex halimus*. La consultation des travaux précédents,

ainsi que les sorties sur le terrain nous ont montré que les peuplements à *Atriplex halimus* occupent de vastes espaces en Oranie, soit dans les régions steppiques au Sud d'El Aricha (Chott El-Gharbi), soit dans les zones littorales (au Nord de Remchi en particulier). Nous avons donc choisi deux groupes de stations appartenant à deux zones différentes :

· **Zone I (au Nord)** : Elle est située entre les monts des Traras au Nord-Ouest et Djebel Murdjadjo au Nord-Est d'une part, et entre les monts de Tlemcen au Sud-Ouest et les monts du Tessala au Sud-Est d'autre part (Stations de Béni-Saf et Messerghine).

· **Zone II (au Sud)** : Elle fait partie des hautes plaines steppiques, et plus précisément la région du Chott El-Gharbi, qui est ouverte au Nord sur les chaînons des monts de Tlemcen (Djebel El Abed et Djebel Mekaïdou). Elle est limitée au Sud par l'Atlas Saharien formé par le Djebel El Arar, Djebel Kerrouch et Djebel Bou-Amoud. A l'Est vers Mécheria la région est limitée par le Chott- Echergui. La partie centrale est formée par des cuvettes. Les agglomérations de Mekmen Benamar, Ouglat Abdelmoula et El Kasdir s'insèrent dans cette zone. (Stations d'El- Kasdir 1 et El-Kasdir 2).

2. VARIABLES CLIMATIQUES

Nous avons utilisé les données de précipitations et de températures pour tracer les diagrammes ombrothermiques de Bagnouls et Gaussen afin d'exprimer l'intensité de sécheresse, de même que nous avons calculé le Q2 d'Emberger afin de positionner les stations météorologiques des deux zones d'étude à travers les étages bioclimatiques du climagramme pluviothermique d'Emberger. Les valeurs extrêmes des températures ont été utilisées : M (moyenne des maxima du mois le plus chaud) et m (moyenne des minima du mois le plus froid), pour connaître l'amplitude thermique au sens de Debrach (1953).

3. VARIABLES EDAPHIQUES

Pour chaque station des deux zones étudiées, nous avons pris deux échantillons au niveau de l'horizon superficiel là où les racines existent. Plusieurs auteurs s'accordent pour reconnaître qu'en milieu salé, l'appareil racinaire est très superficiel (Adriani, 1954; Devaux, 1964; Nichabouri, 1967; Nichabouri et Corre, 1970). Dans ces échantillons ont été mesurés : la granulométrie, le pH, la salinité et la matière organique.

4. VEGETATION

La méthode utilisée pour l'échantillonnage de la végétation est celle de Braun-Blanquet (1932) et de Guinochet (1973) dit Stigmatiste. Elle a été utilisée par plusieurs phytosociologues. La surface du relevé doit être au moins égale à l'aire minimale (Godron et al., 1983), contenant la quasi totalité des espèces présentes (Chaâbane, 1993).

L'aire minimale de la station de Messerghine est de 32m², pour la station de Béni-saf, cette

surface est de 64m², alors qu'elle est de 128m² pour les stations d'El- Kasdir 01 et El- Kasdir 02. L'exécution des relevés est accompagnée de l'enregistrement des caractères stationnels (lieu, altitude, exposition, substratgéomorphologie, pente et taux de recouvrement). Chaque espèce présente, doit être affectée de deux indices. Le premier concerne l'abondance-dominance, le second représente la sociabilité (échelles de Braun-Blanquet, 1952). La détermination des taxons a été faite à partir de la nouvelle flore de l'Algérie et des régions désertiques méridionales de Quezel et Santa (1962,1963) et celle de Bonnier (1990). L'utilisation de cette approche méthodologique, a permis l'élaboration de tableaux floristiques pour chaque station.

Ce travail porte également sur l'analyse par l'AFC des groupements à *Atriplex halimus* de la Sebkhia d'Oran et de la steppe (Chott El-Gharbi). Ces peuplements semblent principalement être liés essentiellement aux facteurs écologiques et anthropiques. L'outil statistique peut nous aider à déterminer quelques facteurs d'ordre écologique qui régissent la composition floristique des Atriplexaies de nos régions. Celui-ci a été appliqué sur trois stations, notamment : Messerghine, Béni-Saf et El Kasdir 01. Ceci a permis la mise en évidence de gradients écologiques intervenants dans la structuration des phytocénoses de chaque station.

La flore inventoriée dans les différentes stations sera aussi étudiée du point de vue biologique (Raunkiaer, 1934). Nous avons tenu compte en plus de la présence des espèces, de leur abondance-dominance. Pour une espèce donnée, on calcule la somme de ses coefficients d'abondance-dominance dans les différents relevés, puis on la divise par le total des sommes des coefficients d'abondance-dominance de toutes les espèces présentes dans une station. On obtient approximativement, le pourcentage de l'espace occupé par cette espèce parmi la surface occupée par l'ensemble de la végétation et qu'on appelle : abondance relative. Cette démarche sera très informative, puisque deux espèces présentes dans une station n'occupent pas forcément la même surface.

RESULTATS

1. VARIABLES CLIMATIQUES

La comparaison du point de vue climatique entre la zone Nord et la zone Sud de Tlemcen révèle :

- Une durée de sécheresse plus longue pour la zone Sud (8 à 9 mois), par rapport à la zone Nord qui est de 6 à 7 mois.
- Une amplitude thermique au sens de Debrach (1953) élevée pour la zone Sud, entre 34° et 36°C (climat continental), alors que pour la zone Nord, elle ne dépasse pas les 27°C enregistrée à la station de Sénia (climat littoral).
- Selon le climagramme d'Emberger, les stations des deux zones appartiennent à deux étages bioclimatiques différents :

-Zone Nord : semi-aride supérieur ou inférieur

-Zone Sud : aride supérieur ou inférieur

On remarque par ailleurs que cette chénopodiacee est adaptée aux différentes conditions climatiques. Pour Franclet et Le Houérou (1971), *Atriplex halimus* se trouve presque sur tous les étages bioclimatiques, sub-humide, humide, aride, semi-aride, saharien supérieur et inférieur. La tendance du climat à l'aridité qui est plus accentuée dans la région du Chott El-Gharbi, peut avoir des influences sur le cortège floristique des Atriplexaies. Une minorité d'espèces végétales peuvent s'adapter à ces conditions.

2. VARIABLES EDAPHIQUES (Tableaux 1 et 2)

Stations	Messerghine	Messerghine	Béni-Saf	Béni-Saf
Echantillons	1	2	3	4
Granulométrie %				
Sable	70	86	61,9	67,87
Limon	29,25	12,1	36,2	31,63
Argile	0,75	1,9	1,9	0,5
Type de texture	sableuse	sableuse	sablo-limoneuse	sablo-limoneuse
pH	8,96	8,96	8,77	9,07
Appréciation	basique	basique	basique	basique
C.E (mS/cm)	1,21	0,87	0,9	1,15
Estimation de la salinité	Salé	peu salé	peu salé	peu salé
CaCO ₃ (%)	20,6	39,88	19,21	16,72
Quantité	Moyenne	Forte	Moyenne	Moyenne
Couleur	7,5 YR 5/3	7,5 YR 5/4	7,5 YR 5/4	7,5 YR 5/4
Matière organique	1,183	1,142	1,107	0,928
Humus	2,04	1,97	1,91	1,6
Estimation	Moyenne	Moyenne	Moyenne	Faible

Tableau 1. Résultats des analyses physico-chimiques du sol des stations situées au Nord de Tlemcen

Stations	El Kasdir 01	El Kasdir 01	El Kasdir 02	El Kasdir 02
Echantillons	5	6	7	8
Granulométrie %				
Sable	29	41,8	26	46,1
Limon	55	45,8	58	42,3
Argile	16	12,4	16	11,6
Type de texture	Limono-sableuse	Limono-sableuse	Limono-sableuse	Limono-sableuse
pH	7,9	7,8	7,9	7,9
Appréciation	basique	basique	basique	basique
C.E (mS/cm)	1,8	1,1	1,3	1,1
Estimation de la salinité	Salé	peu salé	salé	peu salé
CaCO ₃ (%)	23,1	25,7	20,3	20,4
Quantité	Moyenne	Forte	Moyenne	Moyenne
Couleur	7,5 YR 6/4	7,5 YR 6/4	7,5 YR 6/6	7,5 YR 6/6
Matière organique	1,107	0,457	0,378	0,493
Humus	1,908	0,818	0,651	0,849
Estimation	Faible	Très faible	Très faible	Très faible

Tableau 2. Résultats des analyses physico-chimiques du sol des stations situées au Sud de Tlemcen

La texture des échantillons du sol analysé des deux zones présente un pourcentage important de sables (jusqu'à 70%), la quantité du limon est non négligeable. Le pH est alcalin, il oscille entre 8,8 et 9,1 pour les stations de la zone Nord, et entre 7,8 et 7,9 pour la zone Sud. L'alcalinité est plus marquée au Nord. Le pH ne suit pas forcément la salinité du substrat, il peut être lié à la quantité du calcaire présente dans le sol (Sari Ali, 2004), d'ailleurs le calcaire présente des quantités plus importantes dans la zone Nord, où il dépasse parfois les 30%, ce qui n'est pas le cas pour la zone Sud (20 à 25%). En générale, on remarque que la salinité dans la zone Sud est plus élevée que dans la zone Nord (sauf station de Messerghine). La conductivité électrique est comprise entre 1,1 et 1,8 mS/cm dans les stations de la zone Sud, alors que pour la zone Nord, elle varie entre 0,9 et 1,2 mS/cm. Le taux de matière organique est en majorité très faible dans la zone Sud, il ne dépasse pas 1,2% selon Benabadji et Bouazza (2002), la faible couverture végétale peut en être la cause. L'*Atriplex halimus* prospère sur tous les sols argileux, gypseux, marneux et halomorphes, mais il se situe le plus souvent autour des Chotts où il existe une forte tendance à la salinité (Benabadji et al., 2004 - a).

Soltner (1992) confirme bien que les sols salés et sodiques se rencontrent autour des grandes dépressions salées, la Sebkhha et les Chotts en Afrique du Nord.

3 - VEGETATION

3-1- ANALYSE DE LA COMPOSITION FLORISTIQUE

Station Messerghine :

Dans cette station, l'*Atriplex halimus* s'accompagne de nombreuses autres espèces d'halophytes telles que : *Salsola kali*, *Salsola tetragona* et *Arthrocnemum glaucum*. Il est à noter que de bonnes touffes d'*Atriplex halimus* caractérisent cette station. Cette densité élevée des peuplements à *Atriplex halimus* est due à leur proximité de la ligne de chemin de fer, qui permet à ce site d'être à l'abri du troupeau. On remarque aussi que la strate arborée n'est représentée que par l'espèce *Tamarix gallica*. Sari Ali (2004) affirmait qu'à l'exception de *Tamarix gallica*, les formations arborescentes sont pratiquement exclues en général de ce type de milieux salés.

Station Béni – Saf :

Cette station riche en espèces (51 espèces) est dominée par *Atriplex halimus* et *Tamarix gallica* sur les rives de la Tafna, ils accusent une abondance-dominance relativement élevée (coefficient 2). Au niveau de cette station proche de la mer (15 km), nous avons une interpénétration des formations pré-forestières et de matorral dans le milieu halomorphe surtout en amont. Il s'agit de : *Whithania frutescens*, *Medicago minima*, *Calycotome villosa subsp.intermedia* et *Asparagus acutifolius*.

Station El Kasdir 01 :

Certaines espèces marquent une forte présence dans les vingt relevés floristiques effectués, citons : *Atriplex halimus* (17/20), *Noaea mucronata* (18/20), *Salsola vermiculata* (15/20) et *Lygeum spartum* (15/20). Ces espèces vivaces s'installent dans les parties les plus basses des dépressions où les mécanismes d'évaporation favorisent le développement d'efflorescences de gypse et de nitrates (Benabadji, 1999). Il y a aussi quelques annuelles telles que : *Astragalus scorpioides*, *Plantago ovata* et *Schismus barbatus*.

Station El Kasdir 02 :

Les espèces qui marquent une forte présence dans les relevés floristiques sont: *Peganum harmala* (13/20), *Noaea mucronata* (13/20), *Atriplex halimus* (10/20), *Salsola vermiculata* (11/20) et *Lygeum spartum* (08/20). Le taux de recouvrement ne dépasse pas 5% dans cette station, et on remarque que la présence de *Peganum harmala* est élevée. Il semblerait aussi que cette espèce envahissante tende de plus en plus à gagner du terrain dans les hauts plateaux en général, au niveau du Chott El-Gharbi particulièrement. Pour Nedjraoui et al.

(1999) « l'apparition d'unités de *Peganum harmala*, indique un surpâturage et montre l'ampleur de l'action anthropozoïque ». *Noaea mucronata* et *Salsola vermiculata* accusent une forte présence également (13/20 et 11/20), ce qui ne semble pas être le cas pour la poacée vivace *Lygeum spartum* présente huit fois dans les relevés.

3- 2-TYPES BIOLOGIQUES (TABLEAU 3)

	Nord	Nord	Nord	Nord	Sud	Sud	Sud	Sud
	M.ghine	M.ghine	B.Saf	B.Saf	Kasdir 1	Kasdir 1	Kasdir 2	Kasdir 2
Types biologiques	présence	Ab.re	présence	Ab.re	présence	Ab.re	présence	Ab.re
Thérophytes	53,57	52,57	52,94	45,50	43,47	27,81	41,17	11,1
Chameaphytes	28,57	38,97	29,41	33	47,82	59,06	47,1	78,7
Hémicryptophytes	07,14	04,77	05,88	0,15	00	00	00	00
Géophytes	07,14	02,20	05,88	08,50	08,69	13	11,7	10,2
Phanérophytes	03,57	01,47	05,88	11,50	00	00	00	00

Tableau 3. Répartition des types biologiques au niveau des stations situées au Nord et au Sud de Tlemcen

Pour des raisons d'espace nous avons abrégé les écritures dans le tableau 3. Les données sont ici exprimées en pourcentage. Ab.re voulant dire Abondance relative, M.ghine étant Messerghine et B.Saf étant Béni-Saf.

Pour les stations de Messerghine et Béni-Saf, les thérophytes dominant soit en nombre d'espèces (présence) ou en abondance relative. Pour la présence on a enregistré 53,6% pour Messerghine et 52,9% pour Béni-Saf. En ce qui concerne l'abondance relative, on a enregistré 52,6% pour Messerghine et 45,5% pour Béni-Saf. Sauvage (1960), Gaussien (1963), Nègre (1966), Daget (1980) et Barbero et al. (1990) présentent la thérophytie comme étant une forme de résistance à la sécheresse, ainsi qu'aux fortes températures des milieux arides et un stade de dégradation ultime (Quézel, 2000). Cette thérophytisation est liée encore aux perturbations du milieu par le pâturage. Floret et al. (1992) signalent que plus un système est influencé par l'homme (surpâturage, culture), plus les thérophytes y prennent de l'importance. On remarque pour la station de Messerghine que les hémicryptophytes et les géophytes qui ont un même pourcentage de présence (07,1%) diffèrent en abondance relative : 04,8% pour les hémicryptophytes et 02,2% pour les géophytes. Pour la station de Béni-Saf malgré la participation faible des espèces phanérogames (5,9%), elles occupent une surface significative (11,5%).

Au Sud, les formations à Atriplexaies (station El Kasdir 01 et El Kasdir 02) sont dominées par des chamaephytes. Elles dominent surtout en abondance relative : 59,1% pour El Kasdir 01 et 78,7% pour El Kasdir 02. On remarque aussi que les espèces phanérophytes sont

absentes. Pour Benabadji et Bouazza (2002), les chamaephytes s'adaptent mieux que les phanérophytes, à la sécheresse, elles sont en effet plus xérophiles. Benabadji et al. (2004-b) signalent que le pâturage favorise d'une manière globale les chamaephytes souvent refusées par le troupeau. Les hémicryptophytes sont absentes aussi; cela, peut s'expliquer par la pauvreté du sol en matière organique; phénomène confirmé par Barbéro et al. (1989). Deux espèces représentent les géophytes, il s'agit de *Stipa tenacissima* et *Lygeum spartum*. Danin et Orshan (1990) trouvent des proportions plus importantes en géophytes en domaine méditerranéen que steppique.

3-3- DISCRIMINATION PAR L' AFC

3-3- 1-STATION MESSERGHINE (FIGURE 2)

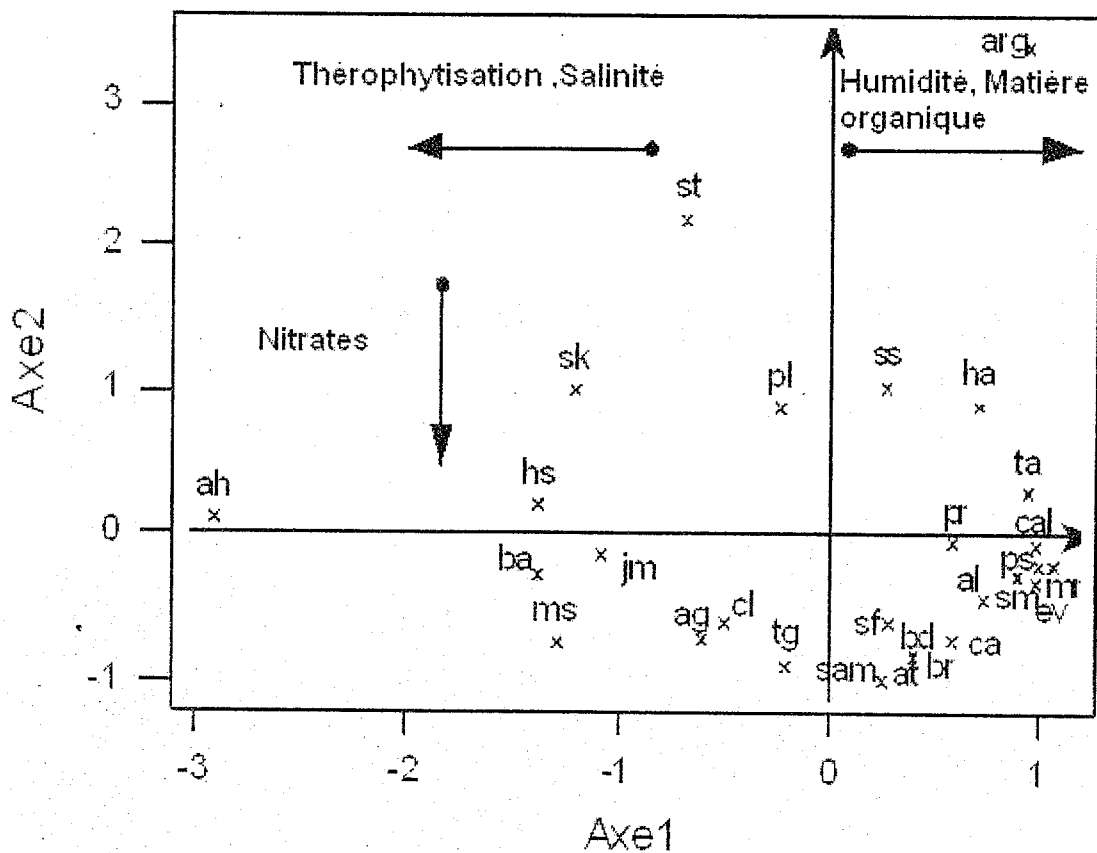


Figure 2. Plan factoriel des espèces station Messerghine (Axe 1 – Axe 2)

Interprétation de l'Axe 1 : valeur propre : 4,6

Taux d'inertie : 22,9%

Du côté positif de l'axe s'individualise un groupe d'espèces relevant du domaine pré-forestier et indiquant un milieu humide plus ou moins riche en matière organique : *Medicago minima* (1,1), *Echium vulgare* (1), *Pallenis spinosa* (1), *Convolvulus althaeoides* (1) et *Trifolium angustifolium* (0,9). Dans ce cas on peut dire que ce côté de l'axe 1 exprime vraisemblablement des teneurs relativement élevées en humidité et en matière organique.

Du côté négatif, trois espèces halophytes (*Atriplex halimus* (-2,9), *Halogeton sativus* (-1,4) et *Salsola kali* (-1,2) accompagnent deux thérophytes (*Bellis annua* (-1,4) et *Malva sylvestris* (-1,3)). On peut remarquer sur le plan phytosociologique que cet axe oppose les espèces caractéristiques des *Salsolatum vermiculata* telles que : *Halogeton sativus*, *Salsola kali*, *Salsola tetragona*, *Juncus maritimus* et *Atriplex glauca* aux caractéristiques des *Atriplico-halimi-Suaedatum fruticosae*, telles que : *Aeluropus littoralis*, *Echium vulgare*, *Halopeplis amplexicaulis* et *Suaeda mollis*.

Interprétation de l'Axe 2 : valeur propre : 3,6

Taux d'inertie : 18,1%

Du côté positif de l'axe 2, des espèces halophytes (chénopodiacées) représentées par *Arthrocnemum glaucum* (3,4), *Salsola tetragona* (2,2), *Salsola kali* (1) et *Halopeplis amplexicaulis* (0,9), sont suivies par deux autres espèces thérophytes des terres de culture: *Plantago lagopus* (0,9) et *Scabiosa stellata* (1). Du côté négatif de cet axe, nous avons un gradient nitratophile croissant, car la majorité des espèces sont celles des milieux pré-forestiers : *Sanguisorba minor* (-1), *Brachypodium distachyum* (-0,8), *Bromus rubens* (-0,8), *Aegilops triuncialis* (-0,8) et *Malva sylvestris* (-0,7).

3-3-2-STATION BENI-SAF (FIGURE 3)

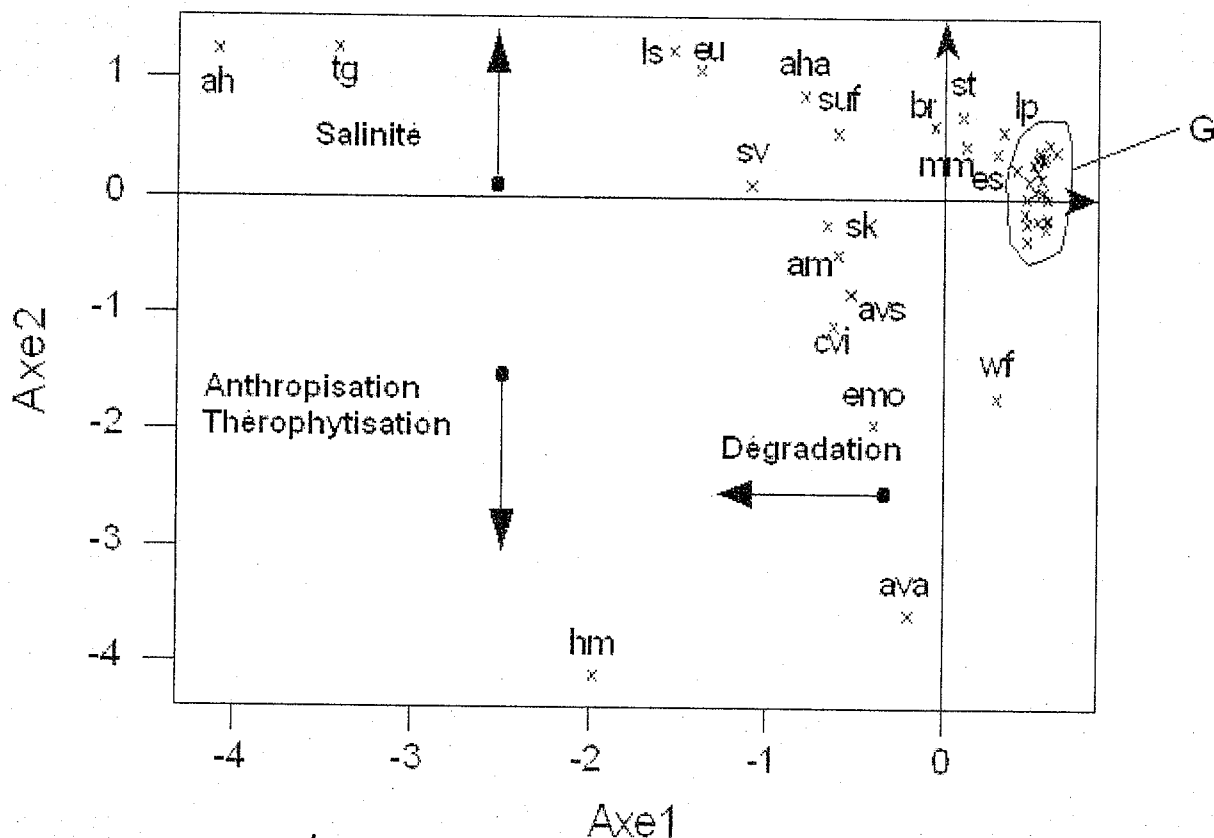


Figure 3. Plan factoriel des espèces station Béni-Saf (Axe 1 – Axe 2)

Interprétation de l'Axe 1 : valeur propre : 6,2

Taux d'inertie : 31%

Dans le côté négatif de l'axe 1, se démarquent deux espèces : *Atriplex halimus* (-4) et *Tamarix gallica* (-3,4). Au fur et à mesure que l'on progresse dans l'axe, on a une succession d'espèces halophytes : *Lygeum spartum* (-1,5), *Salsola vermiculata* (-1,1) et *Salsola kali* (-0,7) sont accompagnées par *Hordeum murinum* (-2) qui est une espèce annuelle, *Erucaria uncata* (-1,4) et *Artemisia herba-alba* (-0,8) (espèces typiques des milieux steppiques). Une fois sur le côté positif de l'axe, on se dirige vers des formations pré-forestières et de matorral, en passant par *Withania frutescens*, *Echinops spinosus*, puis on arrive au groupe G qui est constitué de plusieurs espèces, dont on relève la forte contribution notamment de : *Echium vulgare* (0,6), *Plantago lagopus* (0,6), *Convolvulus althaeoides* (0,6) et *Scolymus hispanicus* (0,6). C'est un axe qui exprime la succession suivante, du côté négatif vers le côté positif : **Halophytes→pelouses→Matorral→Pré forêt.**

Interprétation de l'Axe 2 : valeur propre : 4,8
 Taux d'inertie : 24%

Le côté positif de l'axe 2 est constitué essentiellement d'espèces halophytes dont on relève la forte contribution de: *Atriplex halimus* (1,3), *Tamarix gallica* (1,3), et *Lygeum spartum* (1,2), qui sont suivies d'espèces des milieux steppiques non salés : *Erucaria uncata* et *Artemisia herba-alba*. Le groupe G est situé au centre des deux axes. Du côté négatif de l'axe, deux espèces thérophytiques se démarquent: *Hordeum murinum* et *Avena alba* avec leurs fortes contributions respectivement de - 4,1 et -3,6 marquant un gradient de thérophytisation et d'anthropisation.

3-3- 3-STATION EL KASDIR 01 (FIGURE 4)

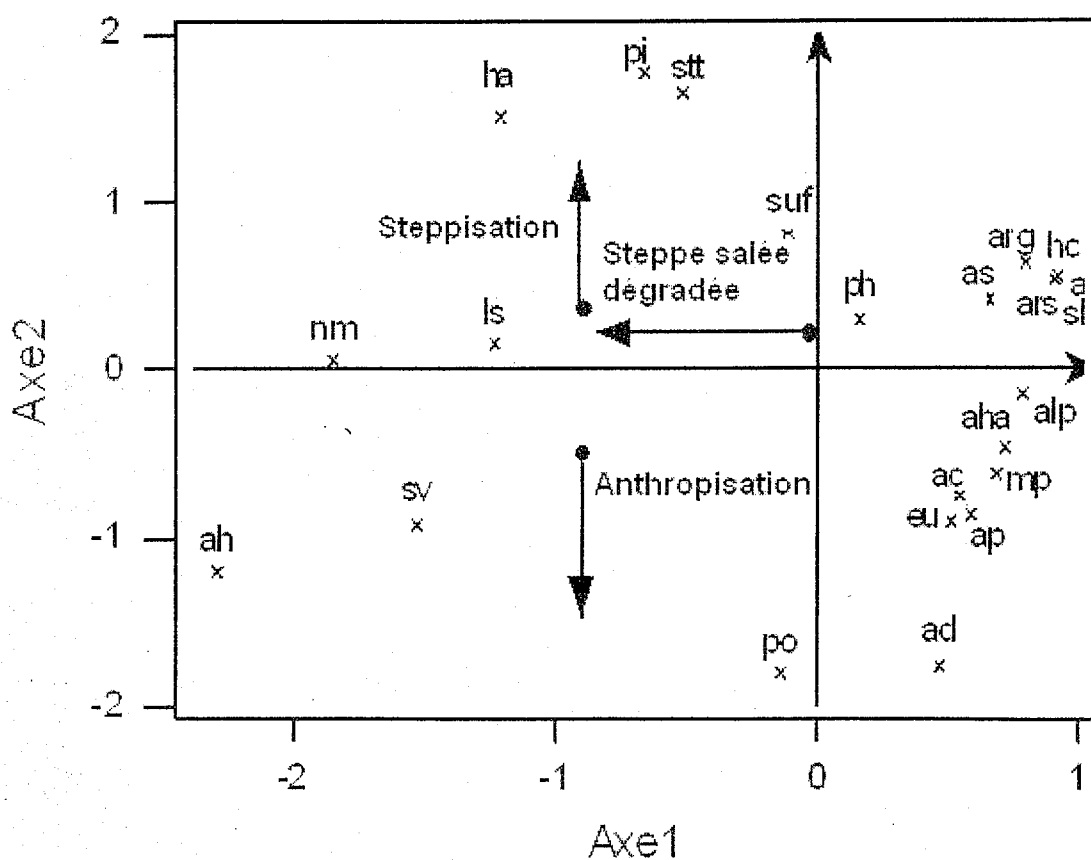


Figure 4. Plan factoriel des espèces station El Kasdir 01 (Axe 1 – Axe 2)

Interprétation de l'Axe 1 : valeur propre : 8,7

Taux d'inertie : 43,4%

Présentant un taux d'inertie de 43%, cet axe exprime la salinité et particulièrement la dégradation. Du côté négatif : les espèces *Atriplex halimus* (-2,3), *Noaea mucronata* (-1,9), *Salsola vermiculata* (-1,5) et *Lygeum spartum* (-1,2) présentent un taux de contribution élevé. Du côté positif sont concentrées la majorité des annuelles steppiques des terrains non salés.

Côté positif → Thérophytes des steppes non salées

Côté négatif → Chamaephytes des steppes salées

Interprétation de l'Axe 2 : valeur propre : 3,5

Taux d'inertie : 17,7%

La part la plus importante de l'information a été exprimée comme nous venons de le voir dans l'axe 1. Dans l'axe 2, la majorité des espèces se concentrent dans des valeurs de contribution entre -1 et +1, ce sont des taxons vivaces des milieux salés, accompagnés par des espèces annuelles que l'on peut rencontrer dans les milieux salés et non salés. On distingue aussi six espèces qui s'opposent de part et d'autre de l'axe : les espèces *Atriplex halimus*, *Atriplex dimorphostegia* et *Plantago ovata*, avec des valeurs de contributions de -1,2 et -1,8 et -1,80, s'opposent au groupe d'espèces steppiques *Stipa tenacissima* (1,7) et *Pseudocytisus integrifolius* (1,8) en compagnie de *Helianthemum apertum* (1,5), indicatrice du matorral.

DISCUSSION ET CONCLUSION

Au terme de ce travail nous pouvons remarquer :

L'approche bioclimatique a montré l'existence d'un gradient pluviométrique décroissant du Nord au Sud qui peut être considéré comme facteur de réduction de la diversité floristique des Atriplexaies. Ces dernières évoluent dans leur globalité et leur diversité dans un modèle géo-systémique en position de confrontation de deux aires bioclimatiques antagonistes. Au Sud de Tlemcen (El Kasdir), une façade sous contrôle des influences sahariennes. Au Nord, un front bénéficiant de la fraîcheur méditerranéenne, en particulier pour les stations de Messerghine et Béni-Saf. A cette échelle, la dissymétrie bioclimatique impose l'hybridité phytogéographique localement modifiée par le compartimentage topographique, et aussi par les contrastes orographiques.

Concernant les sols, les échantillons des deux zones présentent un pourcentage important de sables et une quantité non négligeable de limons, caractérisant ainsi une texture limono-sableuse à sablo-limoneuse excepté la station de Messerghine qui présente une texture sableuse. Le calcaire présente des quantités plus importantes dans la zone Nord où il dépasse les 30 % à Messerghine, alors que dans la zone Sud, il est situé entre 20 et 25%. La salinité dans la zone Sud est plus élevée que dans la zone Nord, excepté la station de Messerghine dont la salinité est aussi importante car elle est proche de la Sebkha d'Oran. La différence

entre les deux zones du point de vue pédologique s'avère plus nette en ce qui concerne la quantité de matière organique qui est pour la plupart des cas très faible dans la zone Sud, surtout dans la station El Kasdir 02, où elle ne dépasse pas 0.493%, cela est dû essentiellement au faible taux de recouvrement par la couverture végétale.

L'étude floristique réalisée sur les deux zones nous a permis d'avancer dans la démarche de comparaison entre les stations des deux zones. Pour la zone Nord, le taux de recouvrement oscille entre 20 et 30%. Dans la station de Messerghine, on a une dominance d'*Atriplex halimus*, *Salsola kali*, *Salsola tetragona* et *Arthrocnemum glaucum*, d'où la conservation du caractère halophile de la végétation de cette station. Dans la station de Béni-Saf, la matorralisation et l'anthropisation marquent le paysage floristique : interpénétration entre les sujets pré-forestiers et halophytes. Pour les types biologiques, les thérophytes dominent à Messerghine et Béni-Saf.

Le cortège floristique de la zone Sud (Chott El-Gharbi) est marqué par sa pauvreté (taux de recouvrement qui ne dépasse pas 5 % dans la station d'El Kasdir 02). Ce cortège est constitué d'espèces steppiques généralement vivaces adaptées aux conditions climatiques de cette zone : les chamaephytes dominent en tenant compte de leur abondance relative (59,1% pour El Kasdir 01 et 78,7% pour El Kasdir 02). En outre, le surpâturage déjà signalé dans plusieurs travaux de Benabadji et Bouazza (2001 et 2002) dans cette zone, est en train de modifier la physionomie du tapis végétal où *Peganum harmala*, espèce toxique, semble par endroits occuper de plus en plus le terrain.

L'AFC sur les espèces révèle : pour la zone Nord, au niveau de la station de Messerghine, c'est le facteur édaphique (humidité, M.O et salinité) qui explique les gradients formés par les groupes d'espèces, alors qu'à Béni-Saf, le facteur humain (action anthropique) est en grande partie à l'origine de la distribution des espèces.

Pour la zone Sud, et plus exactement la station d'El Kasdir 01, c'est à la fois le facteur édaphique (salinité) et anthropique qui semblent gérer la distribution des taxons.

Au regard de l'importance de l'*Atriplex halimus* comme patrimoine national écologique et économique, il serait intéressant de poursuivre ce travail en multipliant les stations d'études tant au Nord sur les côtes oranaises qu'au Sud du côté du Chott Echergui vers El-Bayadh. L'intérêt que l'on doit porter à ces formations à *Atriplex halimus* est confirmé par le mauvais état de ses peuplements. La sécheresse qui perdure en Algérie depuis plusieurs années les rend vulnérables et sensibles à toutes les perturbations du milieu. Certaines espèces sont rares dans ces Atriplexaies et nécessitent une protection sans laquelle, elles risqueraient de disparaître. Les cortèges floristiques dégradés témoignent des conditions biotiques et abiotiques en particulier dans la zone Sud (El Kasdir 1 et El Kasdir 2). Une politique de préservation de ses habitats et par conséquent la sauvegarde de cette flore fragilisée par l'homme demeure indispensable dans ces zones, elle prendra en compte les préoccupations socio-économiques des populations de la région.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Adriani M.J., 1954. Sur l'épipharmie et le bilan d'eau de quelques Salicornes de l'Hérault. *Vegetatio* 5 : 494 -499.
- [2]. Adi N., 2001. Contribution à l'étude des formations à *Salsola vermiculata* L. le long d'un gradient de salinité dans la région du Chott Chergui (Sud-Oranais). *Mém. Mag. Univ. Alger*. 118 p.
- [3]. Aidoud A., 1983. Contribution à l'étude des écosystèmes steppiques du Sud Oranais: Phytomasse, productivité primaire et application pastorale. Thèse. Doct. U.S.T.H.B. Alger. 250 p.
- [4]. Aimé S., 1991. Etude écologique de la transition entre les bioclimats sub-humides, semi-arides et arides dans l'étage thermo- méditerranéen du tell Oranais (Algérie Nord occidentale). Thèse. Doct. Es-Sci. Univ. Aix-Marseille III. 185 p + annexes.
- [5]. Alcaraz L., 1982. La végétation de l'Ouest Algérien. Thèse. Doct. Univ. Perpignan. 415 p.
- [6]. Anonyme, 1980. Les *Atriplex* en Tunisie et en Afrique du Nord. F.AO. SF/Tun 11. *Rapp.Tech.* 71 RT. 140 p.
- [7]. Barbero M., Bonin G., Loisel R. et Quezel P., 1989. Sclerophyllus *Quercus* forests of the mediterranean area. Ecological and ethological significance *Bielefelder Okol. Beiter* 4: 1-23.
- [8]. Barbero M., Loisel R. et Quezel P., 1990. Les essences arborées des îles méditerranéennes : leur rôle écologique et paysages. *Rev. Ecol. Med.* XXI (1/2): 98 – 112.
- [9]. Belkhodja M. et Bidal Y., 2001. La réponse écophysologique de l'*Atriplex* aux hautes salinités au stade de la germination des graines. *Sém. Nat. Probl. Agri. Zones Arides Sidi Bel-Abbès. Algérie:* 105-113.
- [10]. Benabadji N., 1991. Etude phytoécologique de la steppe à *Artemisia herba-alba* Asso. au Sud de Sebdou (Oranie, Algérie). Thèse. Doct. Sci. Univ. Aix Marseille III. 119 p + annexes.
- [11]. Benabadji N., 1995. Etude phytoécologique des steppes à *Artemisia herba alba* Asso. et à *Salsola vermiculata* L. au Sud Ouest de Sebdou (Oranie, Algérie). Thèse. Doct. Es-Sci. Univ. Tlemcen. 158 p + annexes.
- [12]. Benabadji N., 1999. Physionomie, organisation et composition floristique des *Atriplex* au Sud de Tlemcen ,Chott El-Gharbi (Algérie). *Atriplex in vivo*. n° 8, Orsay Paris Sud: 1-7.
- [13]. Benabadji N. et Bouazza M., 2001. L'impact de l'homme sur la forêt dans la région de Tlemcen. *For. Méd.* XXII. n° 3, Nov 2001: 269-274.
- [14]. Benabadji N. et Bouazza M., 2002. Contribution à l'étude du cortège floristique de la steppe au Sud d'El Aricha (Oranie, Algérie). *Sci. Tech.* N° spécial D: 11-19.
- [15]. Benabadji N., Bouazza M., Merzouk M., et Ghezlaoui S.M.B.E., 2004-a. Aspects phytoécologiques des *Atriplex* au Nord de Tlemcen (Oranie, Algérie). *Rev. Sci et Tech.* N° 22. Constantine: 62-79.

- [16]. Benabadji N., Bouazza M., Metge G., et Loisel R., 2004-b. Les sols de la steppe à *Artemisia herba-alba* Asso au Sud de Sebdo (Oranie, Algérie). Rev. Sci et Tech. Synthèse. n°13. Juin 2004: 20-28.
- [17]. Benchaâbane A., 1996. Organisation et utilisation des Atriplexes à *Atriplex halimus* dans la région de Marrakech (Maroc). Rev. Atriplex in vivo N°5. Rés. Int. Orsay. Paris XI: 16-23.
- [18]. Bendaânoun M., 1981. Etude synécologique et syndynamique de la végétation halophile et hygro-halophile de l'estuaire de Bou-Regreg (littoral atlantique du Maroc). Applications et perspectives d'aménagement. Thèse. Doct-Ing. Univ Aix Marseille III. 221p + annexes.
- [19]. Bendaânoun M., 1991. Contribution à l'étude écologique de la végétation halophile, halohygrophile et hygrophile des estuaires, lagunes, Deltas et Sebchas du littoral atlantique et méditerranéen et du domaine continental du Maroc. Thèse. Doct. Sci. Nat. Univ. Aix-Marseille III. 439p + annexes.
- [20]. Billard J.P. et Binet P., 1975. Physio-écologie des Atriplex des milieux sableux littoraux. Soc. Bot. France. 135 p.
- [21]. Bonnier G., 1990. La grande flore en couleurs. Tome 1, 2, 3, et 4. Belin. 1401 p.
- [22]. Bouazza M., 1991. Etude phytoécologique de la steppe à *Stipa tenacissima* Asso. au Sud de Sebdo (Oranie, Algérie). Thèse. Doct. Sci. Univ. Aix Marseille III. 119 p + annexes.
- [23]. Bouazza M., 1995. Etude phytoécologique des steppes à *Stipa tenacissima* L. et à *Lygeum spartum* L. au Sud de Sebdo (Oranie, Algérie). Thèse. Doct. Es-Sci. Univ. Tlemcen. 153 p + annexes.
- [24]. Braun-Blanquet J., 1932. Plant sociology : The study of plant communities. Mc Graw. Hill-New York. 112 p.
- [25]. Braun-Blanquet J., 1952. Phytosociologie appliquée. Comm. S.G.M.A. n° 116.
- [26]. Chaâbane A., 1993. Etude de la végétation du littoral septentrional de la Tunisie : Typologie, Syntaxonomie et éléments d'aménagement. Thèse. Doct. Es. Sci. Univ. Aix Marseille III : 338 p.
- [27]. Daget Ph., 1980. Sur les types biologiques botaniques en tant que stratégie adaptative, cas des thérophytes. In « Recherches d'écologie théorique ». Les stratégies adaptatives. Barbault De. R. , Baldin P. et Meyer J.A. (1986). Maloine. Paris: 89-114.
- [28]. Danin A. et Orshan G., 1990. The distribution of Rankiaer life forms in Israel in relation to the environment. Journal of vegetation science 1: 41-48.
- [29]. Debrach J., 1953. Notes sur les climats du Maroc occidental, Maroc méridional (32): 1122-1134.
- [30]. Devaux J.P., 1964. Etudes phytosociologiques et écologiques en Camargue et sur le plan du Bourg. ChapIV. Etude comparée de l'humidité, de la chlorinité du sol et de la nappe aux dunes de Beaudue. Ann. Fac. Sci. Marseille: 70-91.
- [31]. Djebaili S., 1970. Etude phytoécologique des parcours de Tadmit (Algérie). Bull. Soc. Hist. Nat. Afr. Nord. 61. Alger : 175-226.
- [32]. Djebaili S., 1984. Steppe algérienne, phytosociologie et écologie. O.P.U. Alger. 171p.
- [33]. El Afifi., 1986. Contribution à l'étude des terrains salés de l'Oranie, stations typiques des zones côtières et des bordures d'oueds. Mém. D.E.S. Univ. Oran. 71p.
- [34]. Floret C., Galan M.J. Le Floc'h E., Orshan G. et Romane F., 1992. Dynamics of holm oak (*Quercus ilex* L.) coppies after clear cutting in southern France. Vegetation : 99-100.

- [35]. Franclet A. et Le-Houérou H.N., 1971. Les *Atriplex* en Tunisie et en Afrique du Nord. Doct. F.A.O. Rome 1971. p 249 et p 189.
- [36]. Froment D., 1972. Etablissement des cultures fourragères d'*Atriplex* en Tunisie centrale in « Sém. Et. Prob. Méd. » : 12-19.
- [37]. Gauchet F. et Burdin S., 1974. Géologie, géomorphologie et hydrologie des terrains salés. Pres. Univ. Paris : 234 p.
- [38]. Gaussen H., 1963. Ecologie et phytogéographie. Abbayes: 952-972.
- [39]. Ghezlaoui B.E., 2001. Contribution à l'étude phytoécologique des peuplements halophytes dans le Nord de l'Oranie (Algérie occidentale). Mém. Mag. Ecol. Vég. Univ. Tlemcen. 85 p + annexes.
- [40]. Godron M., Daget Ph., Emberger L., Long G., Le Floch E., Poissonet J., Sauvage C. et Wacquart J.P., 1983. Code pour le relevé méthodique de la végétation et du milieu. C.N.R.S. Paris. 296 p.
- [41]. Guinochet M., 1973. Phytosociologie. Ed. Masson et Cie. Paris. 227p.
- [42]. Kinet J.M., Benrebiha F., Bouzid S., Lailhacar S. et Dutuit P., 1998. Le réseau *Atriplex*, Allier biotechnologies et écologie pour une sécurité alimentaire accrue en régions arides et semi-arides. Cah. Agr. Vol 7. N° 6: 505-509.
- [43]. Le Houérou H.N., 1981. The feed value of *Atriplex* ssp. Techn. Paper. N° 13. UNTF/ Lib 18, FAO and Agric. Res, Cent, Tripoli. Lybia. 5 p.
- [44]. Le Houérou H.N., Claudin J., Haywood M. et Donadieu P., 1975. Etude phytoécologique du Hodna (Algérie). 14 Fig. 22 Tab. et 1 Carte Coul. 1/200000 (3 feuilles). AGS : DP/Alg/66/509. F.A.O. Rome. 154 p.
- [45]. Nègre R., 1966. Les thérophytes. Mem. Soc. Bot. F1: 92-108.
- [46]. Nedjraoui D., Hirche A., Boughani A., Mostefa S., Alamani. et Benariad., 1999. Suivi diachronique des processus de désertification in situ et par télédétection des hautes plaines steppiques du Sud-Ouest Oranais. U.R.B.T. I.N.C. Alger : 9-15.
- [47]. Nichaboury A., 1967. Recherches écologiques sur les *Arthrocnemum* de France et en particulier sur leur appareil racinaire. Thèse. Doct-Ing. Montpellier, 249 p.
- [48]. Nichaboury A. et Corre J.J., 1970. Comportement de l'appareil racinaire de *Arthrocnemum fruticosum* et *Arthrocnemum glaucum* en relation avec les conditions du milieu halomorphe littoral. Ecol. Plant, 5 : 69-86.
- [49]. Ouadah Y., 1982. Contribution à l'étude des principales essences d'intérêt fourrager des régions arides et semi-arides d'Algérie : Application à quelques espèces. Mém. Ing. I.N.A. 108 p.
- [50]. Quezel P. et Santa S., 1962-1963. Nouvelle flore de l'Algérie et des régions désertiques méridionales. C.N.R.S. Paris. 2 vol. 1170 p.
- [51]. Quezel P., 2000. Réflexions sur l'évolution de la flore et de la végétation au Maghreb Méditerranéen. Ibis Press. Paris. 117 p.
- [52]. Raunkiaer C., 1934. The life-forms of plants and statistical plant geography, Clarendon Press, Oxford.
- [53]. Sari Ali A., 2004. Etude des relations sol-végétation de quelques halophytes dans la région Nord de Remchi. Mém. Mag. Univ. Tlemcen. 199 p.
- [54]. Sauvage Ch., 1960. Recherches géobotaniques sur le chêne liège au Maroc. Thèse. Doct. Montpellier. Trav. Inst. Sci. Cherf. Série botanique, 21. 462 p.

- [55]. Simonneau P., 1961. Essai sur la végétation halophile : Les problèmes de la salinité dans les régions arides. Actes Coll. U.N.E.S.C.O. Téhéran: 135-138.
- [56]. Soltner D., 1992. Les bases de la production végétale. Tome 2. 6ème édition. Sci et Tech Agr. 49310. Sainte Gène sur la Loire.France. 122 p.
- [57]. Tremblin G., 2000. Comportement autoécologique de *Halopeplis amplexicaulis* : plante pionnière des Sebkhass de l'Ouest Algérien. Rev. Sci. et Chang. Plan. Séch. Volume 11. N° 2 : 9-16.

Résumé

Nous présentons une synthèse des travaux sur les problèmes d'estimations par rétrécisseurs de la moyenne d'une loi gaussienne multidimensionnelle $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans R^p .

Pour le même modèle $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ des estimateurs de la forme générale suivante :

$\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X) = \mu + [1 - \xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu)$ où ξ est le rétrécisseur et μ est le pôle, sont étudiés et des résultats de domination sont établis en particulier pour des formes extraites de la forme générale.

Dans la suite nous étudions une classe d'estimateurs $\delta_\phi(X)$ avec rétrécisseur de la moyenne θ d'une loi

gaussienne $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ dans R^p proposés par J. Berger et M. E. Bock [5]. Nous montrons une

domination partielle sur des sous-ensembles paramétriques de R^p de la partie positive de l'estimateur de James-

Stein, qui sont de type "grandes" boules privées de "petites" boules centrées à l'origine ou R^p privé d'une boule

centrée en zéro ou enfin une "grande" boule centrée à l'origine. Nous donnons aussi des conditions nécessaires

de domination. Nous illustrons cette étude par des graphes sur les différences de risques correspondants. Une

extension au cas de l'échantillon est donnée.

Mots-clés: , Moyenne gaussienne, Estimateurs de James-Stein , Partie positive de l'estimateur de James-Stein, Rétrécisseurs, Coût quadratique.

Abstract

We present a summary of the work of the estimation of the mean of a Gaussian rv $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ with values

in R^p , where I_p is the unit matrix. For the same model $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ estimators of the general form:

$\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X) = \mu + [1 - \xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu)$ where ξ is shrinkage factor and μ is the pole, are studied and the results are set to dominate particular forms extracted from the general form.

In the following we study a class of estimators with shrinkage factor, $\delta_\phi(X)$, of the mean θ of a Gaussian rv

$X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ in R^p proposed by J. Mr. Berger and E. Bock [5]. We show partial domination of the James-

Stein positive part estimator in parametric subsets of R^p which are great balls deprived of small balls centred at

the origin or R^p deprived of a ball centred in zero or lastly a "great" ball centred at the origin.

We give also necessary conditions of domination. We illustrate this study by graphs on the risk differences. An extension to the case of the sample is given.

Key Words: Gaussian Mean, James-Stein estimator, James-Stein positive part estimator, shrinkage factor, quadratic loss

ملخص

نحن نقدم عملاً شاملاً حول تقديرات عامل تضيق لتوسطة من قانون غوس متعدد أبعاد $N_p(\theta, \sigma^2 I_p) \sim X$ في R^p .

و في نفس النموذج $N_p(\theta, \sigma^2 I_p) \sim X$ تقديرات الشكل العام التالي :

$\phi_{\mu, \xi}^{(0)}(X) = \mu + [1 - \xi(X - \phi_0(X), \phi_0(X) - \mu)](\phi_0(X) - \mu)$ حيث ξ هو عامل تضيق و μ هو القطب . نتائج هذه الدراسات استنبطت وجود خصوصية مجموعة مهيمنة ذات طبقة تقديرية من الشكل العام .

وفي نفس السياق قمنا بدراسات طبقة تقديرية $\delta_\phi(X)$ مع عامل تضيق لتوسطة θ من قانون

غوس $N_p(\theta, \sigma^2 I_p) \sim X$ في R^p اقترحها ج. بيرجي و م. ا. بوك [5]. وقد بينا تفوق جزئي على

القطعة الأيجابية للتقدير خمس-شطين في قطع فرعية من R^p علا شكل كور كبيرة ممنوعة من كور صغيرة

متمركزة في المحور أو R^p ممنوعة من كور صغيرة متمركزة في المحور أو كور كبيرة متمركزة في المحور .

وقد تم التطرق للعوامل الأساسية للتفوق مع توضيح هذه الدراسات برسوم بيانية حول الفروق في المخاطر المناسبة. وفي الأخير أمددنا هذه الدراسات للعينة المستعملة .

الكلمات الخاصة:

متوسطة من قانون غوس، تقدير خمس-شطي، تقدير القطعة الأيجابية لجمس-شطي، عامل تضيق، الخسارة

الرابعة .