A la mémoire de mon père,
à ma mère
et à ma famille.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au Professeur Sidi Mohammed Bouguima, mon directeur de thèse, pour son aide et ses conseils précieux qu'il n'a eu cesse de prodiguer tout au long de ce travail.

Je remercie vivement le Professeur Mohammed Benalili pour avoir honoré la présidence du Jury.

Je suis très contente d'exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur Abdelkader Boucherif, pour le choix du sujet de cette thèse. Ce travail n'aurait pu aboutir sans son aide précieuse. Je le remercie aussi pour avoir accepté d'être membre du Jury.

Ma gratitude va également à :

Monsieur Smail Djebali, Professeur à l'E.N.S de Kouba à Alger,

Monsieur Mouffak Benchohra, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes et

Monsieur Abdelkader Lakmèche, Maître de conférences à l'université de Sidi Bel Abbes.

Je les remercie énormément pour m'avoir fait l'honneur de participer au Jury et pour l'attention qu'ils ont accordée à ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Gilles Godefroy, Professeur, Directeur de l'institut de Mathématiques de Jussieu pour son accueil et son aide durant mon stage.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon mari Mounir et mes enfants Khedoudja, Imane, Yousra et Abderrahmene pour leur soutien et leur aide.

Table des Matières

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques problèmes aux limites d'ordre trois.

Historiquement, les équations différentielles d'ordre trois remontent aux travaux de G.D Birkhoff en 1910 (voir [24]) où les méthodes de géométrie projective étaient mise en œuvre pour résoudre de telles équations. Depuis, plusieurs auteurs se sont penchés à examiner l'existence *et le comportement des solutions des équations différentielles d'ordre trois (voir par exemple* [26], [53]).

Nous nous proposons de décrire quelques résultats d'existence de solutions pour des équa*tions différentielles ordinaires avec termes non-locaux.La majeure partie du travail a trait aux* équations différentielles du troisième ordre. Dans l'ensemble, les équations se présentent sous la forme

$$(E) \quad Au = Nu \text{ avec des données de type non-locales}$$

où A est un opérateur différentiel et N est une non-linéarité, le domaine est un ouvert borné de $\mathbb{R}$.

Divers phénomènes physiques sont régis par de telles équations(voir par exemple[25],[34],[40])

Dans notre travail, on envisage de résoudre l'équation (E) comme dans le cas ordinaire par des itérations succéssives de type

$$Au_n = N(u_n, u_{n-1})$$

Pour mener à bien cette approche, on distingue deux étapes. La première consiste à faire des *estimations à priori sur les solutions éventuelles de (E) ,ensuite le passage à la limite se fait par* compacité en appliquant le théorème d'Ascoli-Arzéla. D'autres résultats font appel au théorème

théorème du point fixe de Schaefer ou le théorème de transversalité topologique de Granas.

Dans la section suivante, nous décrirons notre réalisation de ce programme sur plusieurs types d'équations.

Tout d'abord dans le premier chapitre nous exposons les définitions, notations et quelques théorèmes fondamentaux nécessaires pour la suite.

Dans le deuxième chapitre nous étudions l'existence de solutions des problèmes aux limites non locaux de la forme

$$\begin{cases} -y''' = f(t,y,y',y'') & t \in (0,1) \\ y(0) = \gamma, \quad y(\eta) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(\theta_i), \; y(1) = \sum_{j=1}^{m} b_j y'(\xi_j) \\ \qquad \eta,\, \xi_j, \theta_i \in (0,1) \quad i = \overline{1,n} \text{ et } j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Afin de montrer l'existence d'au moins une solution, nous supposons que la non-linéarité f satisfait une condition de monotonie combinée avec condition de croissance de type Nagumo. Nous utiliserons le théorème de tranversalité topologique de Granas dans le cadre de la méthode de sous et sur-solution. Contrairement aux travaux réalisés récemment, nous n'exigerons aucune condition sur les valeurs η, ξ_j et θ_i (voir par exemple [13], [27] et [59]).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des problèmes périodiques avec impulsions. Plus précisément, nous considérons le problème

$$\begin{cases} -y''' = f(t,y,y',y'') & t \in (0,2\pi) \\ y(0) = y(2\pi),\, y'(0) = y'(2\pi) \;\;, y''(0) = y''(2\pi) \\ y(t_i^+) = g_i\left(y(t_i)\right), y'(t_i^+) = h_i\left(y'(t_i)\right) \;\;, y''(t_i^+) = k_i\left(y''(t_i)\right) \;\; i = 1,...,m. \end{cases}$$

L'existence d'au moins une solution est obtenue par la méthode des sur et sous solutions. L'idée principale consiste à construire judicieusement des fonctions auxiliaires pour assurer des estimations à priori. Les théorèmes de Schaefer et d'Ascoli-Arzéla forment l'ingrédient essentiel de démonstration.

Dans le chapitre quatre nous étudions les problèmes aux limites avec conditions intégrales aux bord sous la forme suivante:

$$\begin{cases} y''' + f(t, y, y', y\prime) = 0 & t \in (0,1) \\ y(0) = 0 & \\ y\prime(0) - ay"(0) = \int\limits_0^1 h_1(y(s), y'(s))ds & \\ y\prime(1) - by"(1) = \int\limits_0^1 h_2(y(s), y'(s))ds. & \end{cases}$$

La présence des intégrales dans les conditions au bord rend l'étude moins évidente. En appliquant le théorème de transversalité topologique de Granas et la méthode de sous et sur-solution nous arrivons à montrer l'existence d'au moins une solution.

Enfin le dernier chapitre fera l'objet d'un problème modélisant un phénomène d'écoulement des fluides (voir [34], [35]) à savoir

$$\begin{cases} y''' + E(Ayy'' - y\prime^2) = \beta & t \in (0,1) \\ y(0) = 0, \; y(1) = 0, \; y''(1) = y''(0) + 1 = 0. & \end{cases}$$

L'existence est une conséquence du théorème de Schaefer. La multiplicité des solutions repose sur le principe des fonctions 0-epi et la réduction de Lyapunov-Schmidt.

Publications

1- **Z.N.Benbouziane**, A.BOUCHERIF AND S.M.BOUGUIMA, Third Order Nonlocal Multi-point Boundary Value Problems, *Dynamic Systems and Applications 13* (2004) 41-48.

2- **Z.Benbouziane**, A.BOUCHERIF AND S.M.BOUGUIMA, Existence Result for Impulsive Third Order Periodic Boundary Value Problems, Applied Mathematics and Computation .Volume 206, 15 December 2008, Pages 728-737.

3- A.BOUCHERIF, **Z.N.Benbouziane**, S.M.BOUGUIMA AND NAWEL EL.MALIKI, Third Order Boundary Value Problems with Integral Boundary Conditions (soumis).

4- **Z.N.Benbouziane**,A.BOUCHERIF AND S.M.BOUGUIMA, Multiple Solutions for Boundary Value Problems Arising from Floating cavities(soumis)

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Cadre Fonctionnel

Soit l'intervalle $I = [a, b]$. On note par $C(I)$ l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur I. On munit cet espace de la norme

$$|u|_0 = Max\{|u(t)|, t \in I = [a, b]\}.$$

Soit l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles définies et m-fois continuement différentiables sur I,

$$C^m(I) = \left\{u \in C^0(I) \;/\; u^{(j)} \in C^0(I), \text{ pour } j = 1, 2, ..., m .\right\}.$$

muni de la norme

$$\|u\|_m := Max\left\{\left|u^{(j)}\right|_0, 0 \leq j \leq m\right\}.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables u définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que la quantité

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(t)|^p \, dt\right)^{1/p},$$

soit finie, est noté par $L^p(I)$.

Soit $AC^m(I)$ l'espace des fonctions m-fois différentiable $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f^{(m)}$est absolument continue.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, on note par $W^{m,p}(U)$ l'espace de Sobolev des fonctions qui sont mesurables, m fois dérivables au sens des distributions, et telles que leurs dérivées successives soient dans L^p.

L'espace $W^{m,p}(U)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{m} \left\| u^{(i)} \right\|_{L^p},$$

($W^{m,p}(U) \subset C^{m-1}(U)$ avec injection continue.)

1.1.1 Fonctions de Carathéodory

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction $f : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est L^1-Carathéodory si elle satisfait aux conditions suivantes :*

i) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $f(., x, y, z)$ est mesurable sur I.

ii) Pour tout $t \in I$, la fonction $f(t, ., ., .)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

iii) Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$, il existe une fonction $m_K(.) \in L^1(I)$ telle que

$$|f(t, x, y, z)| \leq m_K(t) \text{ pour tout } t \in I \text{ et pour tout } (x, y, z) \in K.$$

On note par Car $_{L^1}(I \times \mathbb{R}^3)$ l'ensemble des fonctions L^1-Carathéodory.

1.2 Outils Fondamentaux

Soient X un espace métrique et $C(X)$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur X.

Définition 1.2 *Une partie A de $C(X)$ est équicontinue en $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $y \in X$ avec $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ alors*

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } u \in A.$$

1.2.1 Théorème d'Ascoli-Arzéla

Théorème 1.1 *[10] Soit X un espace métrique compact. Si A est une partie équicontinue et bornée de $C(X)$ alors A est relativement compacte.*

Définition 1.3 *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une fonction continue.*
i) L'application f est compacte si $f(E)$ est relativement compacte.
ii) L'application f est complétement continue si $f(A)$ est compacte pour tout borné A de E.

1.2.2 Théorème de Schauder

Théorème 1.2 *[15] Soient K un sous ensemble convexe,borné,fermé et non vide de E et $f : K \to K$ compacte . Alors f admet un point fixe dans K. Autrement dit, il existe $x_0 \in K$ tel que*

$$f(x_0) = x_0.$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est le résultat suivant.

1.2.3 Théorème du Point Fixe de Schaefer

Théorème 1.3 *[10] Soit $T : E \to E$ une application continue et compacte où E est un espace de Banach, tel que l'ensemble*

$$\{x \in E : x = \lambda Tx \quad pour\ \lambda \in (0,1)\},$$

est borné. Alors T admet un point fixe.

1.2.4 Théorème de Transversalité Topologique de Granas

Soient X un espace métrique, E un espace de Banach et K une partie convexe de E.

Définition 1.4 *[22] Une Homotopie$\{H_t : X \to K\}_{0\leq\ t\ \leq 1}$est dite compacte si l'application*

$$H : X \times [0,1] \to K,$$

telle que $H(x,t) = H_t(x)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$, est compacte.

Soit U une partie ouverte de K, $\bar{U}$ et ∂U sont respectivement la fermeture et la frontière de U dans K.

Définition 1.5 *L'application compacte $F\colon \bar{U} \to K$ est dite admissible si elle n'admet pas de point fixe sur la frontière ∂U.*
L'ensemble de ces applications est noté par $K_{\partial U}(\bar{U}, K)$.

Définition 1.6 *Une application F dans $K_{\partial U}(\bar{U}, K)$ est dite inessentielle s'il existe une application compacte $T : \bar{U} \to K$ qui n'admet pas de point fixe et telle que*

$$T_{|\partial U} = F_{|\partial U}.$$

Une application qui n'est pas inessentielle est dite essentielle.

proposition 1.1 Exemple 1.1 *[22] Soit $p \in U$ et $F \in K_{\partial U}(\bar{U}, K)$ l'application constante $F(x) = p$ pour tout $x \in \bar{U}$ est essentielle.*

Définition 1.7 *Deux applications F et T de $K_{\partial U}(\bar{U}, K)$ sont homotopiques et on note $(F \sim T)$ s'il existe une homotopie compacte $H_t : \bar{U} \to K$ telle que*

$$F = H_0\ , T = H_1 \text{ et } H_t \text{ est admissible pour tout } t \in [0,1].$$

Il est important de souligner la caractérisation suivante des applications inessentielles.

Lemme 1.1 *[22] Une application F dans $K_{\partial U}(\bar{U}, K)$ est inessentielle si et seulement si elle est homotopique à une application qui n'admet pas de point fixe.*

Comme conséquence de ce lemme on a le théorème de transversalité topologique.

Théorème 1.4 *[22] Soient F et T deux applications homotopiques de $K_{\partial U}(\bar{U}, K)$. Alors F est essentielle si et seulement si T l'est aussi..*

Théorème 1.5 (Théorème de Transversalité topologique de Granas [22]) *Soit K une partie convexe d'un espace de Banach E et $U \subset K$ un ouvert . On suppose que*

i) F et T sont des applications compactes de $\bar{U} \to K$.

ii) T est essentielle dans $K_{\partial U}(\bar{U}, K)$.

iii) L'homotopie $H(x,t), 0 \leq x \leq 1$, joignant F et T, est compacte .

iv) $H(x,t)$ n'admet pas de point fixe sur ∂U pour tout $t \in [0,1]$.

Alors il existe au moins un point fixe $u \in U$ pour $H(x,t)$ $0 \leq t \leq 1$, et en particulier il existe u tel que $u = F(u)$.

1.2.5 Méthode de Réduction de Lyapunov-Schmidt

Soient X et Y des espaces de Banach $L : D(L) \subset X \to Y$ est un opérateur linéaire et borné et $h : X \to Y$ un opérateur éventuellement non-linéaire. Soient $R(L)$ l'image de L et $N(L) = Ker(L)$ son noyau.

Définition 1.8 *[15] On dit que l'opérateur L est de Fredholm si*

$$dim\,(Ker\,(L)) < +\infty \text{ et } codim\,(R\,(L)) < +\infty.$$

(comme X et Y sont des espaces de Banach alors $R(L)$ est fermé). L'indice de L est défini par

$$ind\,(L) = \dim\,(Ker\,(L)) - codim\,(R\,(L)).$$

L'équation $Lx = h(x)$ est dite en résonance lorsque L n'est pas inversible. Supposons que L est de Fredholm avec $ind(L) = 0$.On définit les deux projections canoniques continues de la manière suivante

$$P : X \to X \quad \text{et} \quad Q : Y \to Y,$$

telles que $R(P) = N(L)$ et $N(Q) = R(L)$.

Nous avons la somme directe

$$X = N(L) \oplus N(P), \ \ Y = R(L) \oplus R(Q).$$

La restriction L_P de L à $D(L) \cap N(P)$ admet un invese $L_P^{-1} : R(L) \to D(L) \cap N(P)$.

On définit l'opérateur K par

$$K = L_P^{-1}(I - Q) : Y \to D(L) \cap N(P),$$

il vérifie

$$LK = I - Q \text{ sur } Y \quad \text{et} \quad KL = I - P \text{ sur } D(L).$$

Si x est une solution de $Lx = h(x)$ alors $x = Px + Khx$, et si x satisfait la nouvelle équation alors $x \in D(L)$ et $Lx = (I - Q)hx$.

Ainsi on obtient l'équivalence

$$Lx = h(x) \text{ si et seulement si } x = Px + Khx \text{ et } Qhx = 0.$$

En écrivant $x = u + v$ avec $u = Px \in N(L)$ et $v = (I - P)x \in N(P)$, il s'ensuit que

$$Lx = h(x) \text{ si et seulement si } v = Kh(u + v) \text{ et } Qh(u + v) = 0.$$

1.2.6 Principe des Fonctions O-epi

Définition 1.9 *[15] Soient E et G des espaces de Banach. Soit $\Omega \subset E$ un fermé et borné. On dit que $f : \Omega \to G$ est une fonction propre si pour tout compact $K \subset G$, $f^{-1}(K)$ est compacte.*

proposition 1.2 *[15] Soit $f : \Omega \to G$ est une fonction compacte, alors $I - f$ est propre.*

Définition 1.10 *[38] Soient $U \subset E$ ouvert et borné et $f : \bar{U} \to G$. On dit que f est une fonction $O-$ epi (zéro-epi) si:*

a) $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial U$.

b)Pour toute application compacte telle que $h(x) = 0$ et pour tout $x \in \partial U$, l'équation non linéaire

$$f(x) = h(x),$$

admet une solution dans U.

Définition 1.11 *[15] On dit que l'ensemble $M \subset E$ est $\varepsilon-$enchainable si pour tout $a, b \in M$, il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, ..., x_n \in M$ tels que*

$$x_1 = a, x_{\hat{n}} = b \text{ et } d(x_{i+1}, x_i) < \varepsilon, \; i = 1, ..., n-1.$$

Dans ce cas l'ensemble

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ est une } \varepsilon\text{-chaine joingnant } a \text{ et } b.$$

Théorème 1.6 *[38] Soit $f : U \to G$ une fonction O-epi et propre. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $z \in f^{-1}(0)$ il existe une application continue et compacte $h_\varepsilon : U \to F$ telle que*

i) $h_\varepsilon(z) = 0$

ii) $\|h_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ *pour tout $x \in U$;*

iii) L'ensemble de solutions de l'équation :

$$f(x) = h_\varepsilon(x),$$

est $\varepsilon-$enchainable

Alors $f^{-1}(0)$ est non vide , connexe et compact .

Chapitre 2

Problèmes aux limites non locaux d'ordre trois

2.1 Introduction

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -y''' = f(t, y, y', y'') & t \in (0,1) \\ y(0) = \gamma, \quad y(\eta) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(\theta_i), \quad y(1) = \sum_{j=1}^{m} b_j y'(\xi_j), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0,1] \times R^3 \to R$ est une fonction continue.

Pour tout $j = 1, ..., m$ et $i = 1, ..., n$. η, ξ_j, θ_i sont des points dans l'intervalle $(0,1)$ et γ, a_i, b_j sont des réels avec $b_j \geq 0$.

Les valeurs ξ_j et θ_i ne sont pas nécessairement ordonnées.Un cas d'opérateur différentiel d'ordre 2 a été étudié dans [13]. Dans ce chapitre nous établissons un résultat d'existence pour un opérateur d'odre 3 avec des conditions plus générales. La technique utilisée permet de nous ramener au cas d'un problème en trois points qui a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [1], [2], [7], [25], [26], [43], [44], [46], [53] et [54].)

2.2 Notations et Définitions

Soient $\alpha, \beta \in C^3([0,1])$, on définit les fonctions suivantes. Pour tout $t \in I$

$$m(t) = \alpha(t) - \alpha(0) + \gamma,$$
$$M(t) = \beta(t) - \beta(0) + \gamma,$$

et

$$p(y)(t) \;=\; max(m(t),\; min(y(t),\; M(t)).$$

Remarque 2.1 *On note que* $y \in [m, M]$ *si* $m(t) \leq y(t) \leq M(t)$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Définition 2.1 *On dit que* α *est une sous–solution du problème (2.1) si*

$$\begin{cases} -\alpha''' \leq f(t, y, \alpha', \alpha'') & t \in]0,1[\,,\; y \in [m, M]\,, \\ \alpha(0) = \gamma, \quad \alpha(\eta) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha(\theta_i), \;\; \alpha(1) \leq \sum_{j=1}^{m} b_j \alpha'(\xi_j). \end{cases}$$

Une sur-solution β *est définie de la même manière en inversant le sens des inégalités.*

2.3 Estimations à Priori .

Dans tout le reste de ce chapitre, on suppose que le problème admet une sous-solution α et une sur-solution β telles que $\alpha' \leq \beta'$.

On suppose que la non linéarité f satisfait les conditions suivantes:

$(H1)$: La fonction $f : R \times R^3 \to R$, est continue et

$$|f(t, u, v, w)| \;\leq \Phi\left(|w|\right) \quad \forall t \in I, \forall u \in [m, M]\,, \forall v \in \left[\alpha', \beta'\right], \forall w \in R,$$

où $\Phi \in C\left(R^+, R^+\right)$ est telle que $\dfrac{1}{\Phi}$ est intégrable sur tout intervalle borné de R avec:

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\Phi(s)} > 1.$$

$(H2)$: Il existe $m > 0$ tel que

$$f\left(t, u, v_1, w\right) - f\left(t, u, v_2, w\right) > m\left(v_2 - v_1\right) \text{ pour tout } v_2 > v_1.$$

Lemme 2.1 *Si f vérifie la condition $(H1)$ alors il existe une constante positive $C_1 > 0$ telle que si y est solution du problème*

$$\begin{cases} -y''' = f(t, y, y', y'') & t \in (0,1), \\ y(0) = 0, \ \ y(\eta) = 0, \ y(1) = 0, & \end{cases} \tag{2.2}$$

vérifiant $y \in [m, M]$ et $y' \in [\alpha', \beta']$ alors y satisfait

$$|y"(t)| \leq C_1 \ \ \forall t \in [0,1].$$

Preuve: Soit y une solution de (2.2) et soit $t \in I$ tel que $y"(t) \neq 0$, alors il existe un intervalle $[a,b]$ contenant t tel que $y"(t)$ ne change pas de signe dans $[a,b]$.

Sans perdre de généralité on peut supposer que $y"(a) = 0$ et $y" \geq 0$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^t \frac{y'''(s)}{\Phi(y"(s))} ds = \int_0^{y''(t)} \frac{ds}{\Phi(s)} \leq 1.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\Phi(s)} > 1$ alors il existe une constante positive C dépendant seulement de α ,β et Φ tel que

$$|y"(t)| \quad \leq C_1 \ \forall t \in [0,1].$$

■

Remarque 2.2 *C_1 dépend seulement de α , β et Φ.*
Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -y''' = h\,(t, y\prime, y") & t \in (0,1) \\ y(0) = \gamma, \ \ y(\eta) = \delta, \ y(1) = \sigma, & \end{cases} \tag{2.3}$$

où h :$]0,1[\times R^2 \to R$ est une fonction continue vérifiant la condition

$$(A_h) : \begin{cases} (i) \quad |h\,(t,u,w)| \leq \Phi\,(|w|) & \forall t \in I, \ \forall u, \ v \ et \ w \in R \\ (ii)\, \exists \ l_1 > 0 : h\,(t,u,w) - h\,(t,v,w) > l_1\,(v-u)\,, \forall v > u, \forall t \in I \ et \ \forall w \in R. & \end{cases}$$

avec Φ est la fonction définie dans $(H1)$ et δ est telle que

$$\delta = 1 + \left(|\alpha|_0 + |\beta|_0\right) \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Remarque 2.3 *Le choix de cette valeur est crucial pour la suite des preuves.*

Lemme 2.2 *Si h satisfait la conditions (A_h), alors le problème (2.3) admet une solution unique.*

Preuve:

Existence. Soit $\lambda \in [0,1]$ .Considérons la famille de problèmes à un paramètre :

$$\begin{cases} -y''' = \lambda h\left(t, y', y''\right) & t \in (0,1) \\ y(0) = \gamma, \;\; y(\eta) = \delta, \;\; y(1) = \sigma. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $\lambda = 0$ le problème (1.4) admet une solution unique $y = \omega$ donnée par

$$\omega(t) = at^2 + bt + c \text{ où } a = \frac{\delta - (\sigma - \gamma)\eta}{\eta^2 - \eta}, b = (\sigma - \gamma) - a \text{ et } c = \gamma.$$

Soit λ tel que $0 < \lambda < 1$. Aprés un calcul long et élementaire, on obtient la fonction de Green $g(t,s)$ associée au problème homogène. Sa formule est:

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-b)(c-t)s^2}{2bc} + \dfrac{(s-t)^2}{2} \quad t \leq s, s \in [0,b] & \text{et } \dfrac{t(t-b)(c-s)^2}{2c(c-b)} \quad t \leq s, \; s \in [b,c] \\ \dfrac{(t-b)(c-t)s^2}{2bc} \quad t > s, s \in [0,b] & \text{et } \dfrac{t(t-b)(c-s)}{2c-b} - \dfrac{(t-s)^2}{2} \quad t > s, s \in [b,c]. \end{cases}$$

Soit y une solution du problème (2.4). D'aprés le lemme 2.1, il existe

$$C_1' = C_1 + |\omega''|_0 \text{ tel que } |y''|_0 \leq C_1'.$$

On en déduit aussi qu'il existe des constantes positives C_2 et C_3 telles que

$$|y'|_0 \leq C_2 \quad \text{et} \quad |y|_0 \leq C_3.$$

En effet, d'aprés le théorème d'accroissements finis, il existe $\xi \in [0,\eta]$ tel que

$$y'(\xi) = \frac{\delta - \gamma}{\eta},$$

et ainsi il en résulte que

$$|y'|_0 \leq \left|\frac{\delta-\gamma}{\eta}\right| + C_1' = C_2 \text{ et } |y|_0 \leq |\gamma| + \left|\frac{\delta-\gamma}{\eta}\right| + C_1' = C_3.$$

La fonction h étant continue alors il existe une constante C_4 telle que

$$\left|y^{(3)}\right|_0 \leq C_4 \quad \text{pour tout } \; t \in I.$$

Ainsi, il existe une constante ρ indépendante de λ

$$\rho = \rho(\gamma, \eta, \sigma, \delta, \alpha, \beta, \Phi),$$

de sorte que

$$\|y\|_3 \leq \rho + 1.$$

Soit

$$U = \left\{ y \in C^3(I) : \|y\|_3 \leq \rho + \mathbf{1} \right\}.$$

Soit $\bar{h}$ l'opérateur de Nemitskii associé à h

$$\bar{h} : \bar{U} \to C(I) \quad \text{où} \quad \bar{h}(y) = h\left(., y'(.), y''(.)\right),$$

et soit G l'opérateur intégrale de noyau la fonction de Green . On définit la fonction H par

$$H : [0,1] \times \bar{U} \to C(I) \qquad H(\lambda, y) = \omega + \lambda G\bar{h}y \quad \forall\, y \in U \text{ et } \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Il est clair que les solutions de (2.4) sont les points fixes de la fonction $H(1,.)$ dans U. L'opérateur G est- complètement continue et $\bar{h}$ est continue alors la fonction $H(\lambda,.)$ est compacte .

Par définition de l'ensemble U, l'équation $H(\lambda, y) = y$ n'admet pas de solutions sur ∂U pour tout $\lambda \in [0,1]$. Alors $H(\lambda, .)$ est une homotopie admissible.

Comme la fonction $H(0, .)$ est essentielle, d'aprés le théorème de transversalité topologique, $H(1, .)$ est essentielle .On déduit que $H(1, .)$ admet un point fixe qui est la solution du problème (2.4).

Unicité . Supposons que y_1 et y_2 sont deux solutions distinctes du problème (2.4).

Soit $w = y_1 - y_2$, il est évident que

$$w(0) = w(\eta) = w(1) = 0.$$

Comme $w \in C^3(I)$, alors il existe $\xi_1$et ξ_2 dans I tels que

$$w'(\xi_i) = 0, i = 1, 2.$$

Soit $v = w\prime$, alors $v \in C^3(I)$ et vérifie $v(\xi_i) = 0$, $i = 1, 2.$ On vérifie facilement que v et w sont non identiquement nulles .

On sait que v vérifie

$$-v''(t) = \lambda\left[h\left(t, y_1', y_1''\right) - h\left(t, y_2', y_2''\right)\right].$$

Supposons qu'il existe $t^* \in I$ tel que

$$v(t^*) > 0.$$

Sachant que $v(\xi_i) = 0$ alors il existe $\tau_0 \in I$ tel que $v(\tau_0) = Max_{t \in I}\, v(t)$, alors

$$v'(\tau_0) = 0,$$

et

$$v''(\tau_0) \leq 0.$$

Soit $z = y_1''(\tau_0) - y_2''(\tau_0)$ d'où

$$v''(\tau_0) = \lambda\left[h\left(\tau_0, y'_2(\tau_0), y''_2(\tau_0)\right) - h\left(\tau_0, y'_1(\tau_0), y''_1(\tau_0)\right)\right] = \lambda\left[h\left(\tau_0, y'_2(\tau_0), z\right) - h\left(\tau_0, y'_1(\tau_0), z\right)\right].$$

D'aprés l'hypothèse $(H3)$, on a

$$v''(\tau_0) > \lambda m\left(y_1'(\tau_0) - y_2'(\tau_0)\right) > 0.$$

Nous aboutissons ainsi à une contradiction. De la même manière, on prouve que v ne peut pas être négative, alors $v \equiv 0$.

Comme

$$y_1(0) = y_2(0) = \gamma,$$

on en déduit que

$$y_1(t) = y_2(t),$$

pour tout $t \in I$. ■

2.4 Existence de Solution

Théorème 2.1 *Soient α, β respectivement sous et sur-solution du problème (2.1) telles que $\alpha' \leq \beta'$ sur I.*

Sous les conditions (H1) et (H2), le problème (2.1) admet une solution y telle que

$$\alpha' \leq y' \leq \beta' \text{ et } \quad m \leq y \leq M \quad \text{ dans } I.$$

Preuve: On modifie le problème (2.1) comme suit

Avec C $=\max\{C_1', |\beta"|_0\}$ où C_1' est la constante du lemme 2.2, on définit les fonctions f_C et $F:\ I \times R^3 \to R$ par

$$f_C(t,u,v,w) := \begin{cases} f(t,p(u),v,C) & \text{si} \quad w \geq C \\ f(t,p(u),v,w) & \text{si} \quad |w| \leq C \\ f(t,p(u),v,-C) & \text{si} \quad w \leq -C, \end{cases}$$

et

$$F(t,u,v,w) := \begin{cases} f_C(t,u,\alpha',w) & \text{si } v < \alpha' \\ f_C(t,u,v,w) & \text{si } \alpha' \leq \ v \leq \beta' \\ f_C(t,u,\beta',w) & \text{si } v > \beta'. \end{cases}$$

Maintenant, considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} -y''' = F(t,y,y',y'') & t \in [0,1] \\ y(0) = \gamma, \quad y(\eta) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(\theta_i), \ \ y(1) = \sum_{j=1}^{m} b_j y'(\xi_j). \end{cases} \tag{2.5}$$

Soit $(y_k)_{k \in N}$ la suite de fonctions $y_k \in C^3\left([0,1]\right)$ définie par

$$y_0 = \tilde{N}t + \beta(t) \ \text{ avec } \tilde{N} = max_{t \in I}(\alpha' - \beta')(t),$$

et pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{cases} -y_k''' = F(t, y_{k-1}, y_k', y_k'') & t \in (0,1) \\ y_k(0) = \gamma, \quad y_k(\eta) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_{k-1}(\theta_i), \ \ y_k(1) = \sum_{j=1}^{m} b_j y_{k-1}'(\xi_j). \end{cases} \tag{2.6}$$

On montre par récurrence que si y_k est une solution de (2.4) alors pour tout $k \in N$, on a:

$$\begin{aligned} &i) \quad \alpha' \leq \ y_k{'} \leq \beta' \ , \\ &ii) \quad m \leq \ y_k \leq M \\ &iii) \quad \mid y_k" |_0 \ \leq C. \end{aligned}$$

Il est évident que y_0 vérifie ces trois propriétés.

Supposons que y_{k-1} vérifie i-iii) et montrons qu'il en est de même pour y_k.

i) Montrons que $y_k'(t) \geq \alpha'(t)$ pour tout t $\in [0,1]$. L'inégalité $y_k'(t) \leq \beta'(t)$ se démontre de la même manière.

Tout d'abord vérifions pour $t = 1$ et $t = 0$. En effet

$$y_k(1) = \sum_{j=1}^{m} b_j y_{k-1}'(\xi_j) \geq \sum_{j=1}^{m} b_j \alpha_{k-1}'(\xi_j) \geq \ \alpha(1)$$

Aussi, $y_k(0) = \gamma = \alpha(0)$.

Soit $v = y'_k - \alpha'$, montrons que $v \geq 0$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi.

Alors il existe $\tau \in I$ tel que $v(\tau) < 0$. Comme v est continue alors elle atteint son minimun en un point $s \in I$. Ainsi $v(s) = min_{\tau \in I}\, v(\tau) < 0$; ce qui entraine que

$$v(s) < 0\ ,\ v'(s) = 0 \quad \text{et} \quad v''(s) \geq 0,$$

qui conduit à

$$y'_k(s) < \alpha'(s)\ ,\quad y''_k(s) = \alpha''(s) \text{ et } y'''_k(s) \geq \alpha'''(s). \tag{2.7}$$

D'autre part, puisque α est une sous-solution on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq v''(s) = y'''_k(s) - \alpha'''(s) = -F(s, y_{k-1}(s), y'_k(s), y''_k(s)) - \alpha'''(s) \\ &\leq f(s, y_{k-1}(s), y'_k(s), \alpha''(s)) - f(s, y_{k-1}(s), \alpha'(s), \alpha''(s)) < m\left(y'_k(s) - \alpha'(s)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction.

On aura alors

$$y'_k(t) > \alpha'(t) \quad \forall t \in I$$

La propriété *ii)* s'obtient à partir de i) aprés intégration sur l'intervalle $[0,t]$ et la propriété iii) est une conséquence directe du lemme 2.1.

Finalement, le lemme 2.2 confirme que la suite (y_k) est bien définie dans $C^3(I)$ et elle est uniformément bornée.

Alors d'aprés le théorème Ascoli-Arzela la suite (y_k) admet une sous-suite convergente dans $C^3[0,1]$ vers une limite y satisfaisant

$$\begin{aligned} &-y''' = F(t, y, y', y'') \qquad t \in (0,1) \\ &y(0) = \gamma, \quad y(\eta) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(\theta_i), \quad y(1) = \sum_{j=1}^{m} b_j y'(\xi_j), \end{aligned}$$

comme $m \leq y \leq M$, $\alpha' \leq y' \leq \beta'$ et $|y''|_0 \leq C$ alors $F(t,y,y',y'') = f(t,y,y',y'')$ et ainsi y est aussi une solution du problème(1.1) .c.q.f.d. ■

2.5 Application

Soient r_1, r_2 et $\gamma \in R$ et $r_1 < 0 < r_2$. Posons

$$m := \min\{r_1 t + \gamma, r_2 t + \gamma\} \text{ et } M := Max\{r_1 t + \gamma, r_2 t + \gamma\}.$$

Corollaire 2.1 *Soit f une fonction qui satisfait la condition (H1) avec:*

$$f(t, y, r_2, 0) \leq 0 \leq f(t, y, r_1, 0) \text{ pour tout } t \in (0,1) \text{ pour tout } y \in [m, M].$$

On suppose que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{m} b_j \leq 1 + r \text{ où } r \leq \inf(\frac{\gamma}{r_1}, \frac{\gamma}{r_2}).$$

Alors le problème (2.1) admet une solution y telle que :

$$r_1 \leq y' \leq r_2 \quad \forall t \in [0,1].$$

Preuve: En posant $\alpha(t) = r_1 t + \gamma$ et $\beta(t) = r_2 t + \gamma$, il est facile de montrer que α est une sous-solution et β est une sur-solution du problème (2.1) et $\alpha' \leq \beta'$ sur $[0,1]$.

Enfin la preuve du corollaire découle du théorème . ■

Chapitre 3

Problèmes aux limites périodiques avec impulsions d'ordre trois

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'existence des solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles ordinaires d'ordre trois assujetties à des impulsions à des moments précis. Plus précisement, nous considérons le problème (P)

$$(P)\begin{cases} -y''' = f(t,y,y',y'') & p.p \ \ t \in (0,2\pi) & (1) \\ y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi) \ \ , y''(0) = y''(2\pi) & & (2) \\ y(t_i^+) = g_i\left(y(t_i)\right), y'(t_i^+) = h_i\left(y'(t_i)\right) \ \ , y''(t_i^+) = k_i\left(y''(t_i)\right) \ \ i = 1, ..., m. & & (3) \end{cases}$$

où f est une fonction L^1−Carathéodory , g_i, h_i et k_i sont des fonctions à valeurs réelles données, et les points $t_i \in (0, 2\pi)$ pour $i = 1, 2, ..., m$ sont tels que

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < t_{m+1} = 2\pi.$$

Les équations différentielles avec impulsions apparaissent naturellement dans la déscription de phénomènes physiques et biologiques soumis à des changements brusques. Cette théorie a vu un dévelopement spectaculaire au cours des dernières décennies en particulier pour les problèmes non linéaires du second ordre (voir par exemple [32], [33] , [47], [48] et [49]). Néanmoins peu d'articles sont consacrés à l'étude des équations avec impulsions d'ordre supérieures.

L'objet de ce chapitre est une contribution dans ce sens.

3.2 Préliminaires

Soit I l'intervalle $[0,2\pi]$. Pour $m \in N$, soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < t_{m+1} = 2\pi$ une subdivision de l'intervalle $[0,2\pi]$.

Soit $D = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$. On note par $PC(I)$ l'ensemble des fonctions $u : I \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $I \backslash D$ avec

$$u\left(t_k^+\right) \text{ et } u\left(t_k^-\right) \text{ existent et telles que } u\left(t_k^-\right) = u\left(t_k\right) \text{ pour } k = 0,1,2,...,m.$$

Pour $u \in PC(I)$, on définit sa norme par $\|u\|_0 = \sup\{|u(t)|, t \in I\}$.
Alors $(PC(I), \|.\|_0)$ est un espace de Banach.

Soit $PC^l(I), l = 1,2$ l'espace des fonctions $u \in PC(I)$ telles que

$$u^{(l)}\left(t_k^+\right) \text{ et } u^{(l)}\left(t_k^-\right) \text{ existent et telles que } u^{(l)}\left(t_k^-\right) = u^{(l)}\left(t_k\right) \text{ pour } k = 0,1,2,...,m.$$

Ainsi on peut écrire pour tout $u \in PC^2(I)$ comme suit

$$u(t) = \begin{cases} u_{(0)}(t) & si \quad t \in [0, t_1] \\ u_{(1)}(t) & si \quad t \in (t_1, t_2] \\ . & \\ . & \\ u_{(m)}(t) & si \quad t \in (t_m, 2\pi], \end{cases}$$

où $u_{(i)}$ est deux fois continuememt différentiable sur (t_i, t_{i+1}).
Notant $PC_D^2(I) = \{u \in PC^2(I) : u'.\text{est absolument continue sur } (t_i, t_{i+1}) \ , i = 1, ..., m\}$
Pour u $\in PC_D^2(I)$; on définit sa norme par

$$\|u\|_D = \|u\|_0 + \|u'\|_0 + \left\|u''\right\|_0.$$

Muni de la norme $\|.\|_D$, $PC_D^2(I)$est un espace de Banach.

Définition 3.1 *Une fonction $u \in PC_D^2([0, 2\pi])$ est une solution du problème (P) si elle satisfait (1) presque partout sur $I\backslash D$, la périodicité (2) et la conditions des sauts (3).*
On suppose que les fonctions g_i, h_i et k_i sont continues sur $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, ..., m.$,et satisfont les conditions suivantes

i) *les fonctions g_i sont bornée, ainsi il existe m_g et $M_g \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\begin{cases} m_g &= \min\{g_i(x) / x \in R \quad i=1,...,m\} \\ M_g &= \max\{g_i(x) / x \in R \; i=1,...,m\} \end{cases}$$

ii) *les fonctions k_i sont (non décroissantes)* croissantes

iii) *Il existe des constantes L_i $0 < L_i \leq 1$ telles que $h_i(u) = L_i u$.*

3.3 Fonctions auxilliaires

Soient $\alpha, \beta \in PC_D^2([0, 2\pi])$ telles que $\alpha''(t) \leq \beta''(t)$.
Pour tout $t \in (t_i, t_{i+1})$,$i = 0, 1, 2, ..., m + 1.$, on introduit des fonctions auxilliaires qui vont jouer un rôle important dans la suite.

Soient

$$\mu := \max_{i=0,...,m} \left(\left|\alpha'(t_i)\right|, \left|\alpha'(t_i^+)\right|\right),$$

et

$$\eta := \max_{i=0,...,m} \left(\left|\beta'(t_i)\right|, \left|\beta'(t_i^+)\right|\right).$$

Pour $i \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ et $t \in (t_i, t_{i+1})$,on définit

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha'(t) - \mu \qquad \text{et} \qquad \tilde{\beta}(t) := \beta'(t) + \eta.$$

Pour $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, posons

$$\hat{\alpha}(t) := \alpha(t) - \alpha(t_i^+) - \mu(t - t_i) + m_g,$$

et

$$\hat{\beta}(t) := \beta(t) - \beta(t_i^+) + \eta(t - t_i) + M_g.$$

Enfin pour $t \in (0, t_1)$, posons

$$\hat{\alpha}(t) := \alpha(t) - \alpha(t_m^+) - 2\pi\mu + m_g,$$

et

$$\hat{\beta}(t) := \beta(t) - \beta(t_m^+) + 2\pi\eta + M_g.$$

On peut vérifier facilement les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&a)\ \ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in PC_D^1(I) \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t) \in PC_D^2(I) \\
&b) \hat{\alpha}(t_i^+) - \hat{\alpha}(t_i) = \hat{\alpha}(t_i^+) - \hat{\alpha}(t_i) = \alpha(t_i^+) - \alpha(t_i) \\
&c) \hat{\beta}(t_i^+) - \hat{\beta}(t_i) = \hat{\beta}(t_i^+) - \hat{\beta}(t_i) = \beta(t_i^+) - \beta(t_i).
\end{aligned}$$

Lemme 3.1 *Soient $\alpha, \beta \in PC_D^2(I)$ vérifiant sur $I \backslash D$*

$$\begin{aligned}
&(i) \qquad \alpha''(t) \le \beta''(t) \\
&(ii) \qquad \alpha(0) \le \alpha(2\pi), \\
&(iii) \qquad \beta(2\pi) \le \beta(0).
\end{aligned}$$

Alors

$$\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta} \quad et \quad \hat{\alpha} \le \hat{\beta} \quad sur\ I.$$

Preuve:

Si $\alpha" < \beta"$ sur $[0, 2\pi]$, alors pour tout $i \in \{0, 1, ..., m\}$ et $t \in (t_i, t_{i+1})$, on a

$$\int_{t_i}^{t} \alpha''(s)\, ds \le \int_{t_i}^{t} \beta''(s)\, ds,$$

alors

$$\alpha'(t) - \alpha'(t_i^+) \le \beta'(t) - \beta'(t_i^+)$$

on a

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha'(t) - \mu \leq \alpha'(t) - \alpha'\left(t_i^+\right) \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}(t) = \beta'(t) + \eta \geq \beta'(t) - \beta'\left(t_i^+\right)$$

ainsi

$$\tilde{\alpha}(t) \leq \tilde{\beta}(t)$$

De plus, pour $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i \in \{1, ..., m\}$, on obtient

$$\int_{t_i}^{t} \tilde{\alpha}(s)\, ds \leq \int_{t_i}^{t} \tilde{\beta}(s)\, ds$$

Ce qui implique que

$$\alpha(t) - \alpha\left(t_i^+\right) - \mu(t - t_i) + m_g \leq \beta(t) - \beta\left(t_i^+\right) + \eta(t - t_i) + M_g$$

et

$$\hat{\alpha}(t) \leq \hat{\beta}(t)$$

Pour tout $t \in (0, t_1)$, on a

$$\int_0^t \tilde{\alpha}(t)\, dt \leq \int_0^t \tilde{\beta}(t)\, dt$$

et

$$\alpha(t) - \alpha\left(0^+\right) - \mu t + \hat{\alpha}(2\pi) \leq \beta(t) - \beta\left(0^+\right) + \eta t + \hat{\beta}(2\pi).$$

Comme

$$\hat{\alpha}(2\pi) = \alpha(2\pi) - \alpha\left(t_m^+\right) - \mu(2\pi - t_m) + m_g,$$

$$\hat{\beta}(2\pi) = \beta(2\pi) - \beta\left(t_m^+\right) + \eta(2\pi - t_m) + M_g,$$

d'aprés la définition, on remarque que

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) \geq 0,$$

et

$$\beta(2\pi) - \beta(0) \leq 0,$$

il s'ensuit que

$$\alpha(t) - \alpha(0) - \mu t + \hat{\alpha}(2\pi) \geq \alpha(t) - \alpha(t_m^+) - 2\pi\mu + m_g = \hat{\alpha}(t),$$

et

$$\beta(t) - \beta(0) + \eta t + \hat{\beta}(2\pi) \leq \beta(t) - \beta(t_m^+) + 2\pi\eta + M_g = \hat{\beta}(t),$$

ainsi

$$\hat{\alpha}(t) \leq \hat{\beta}(t) \quad \text{pour } t \in (0, t_1),$$

et ceci complète la preuve du lemme 3.1.

Supposons que les conditions du lemme 3.1 soient satisfaites. Pour $t \in I$, posons

$$p(u)(t) := \max\left(\hat{\alpha}(t), \min\left(u(t), \hat{\beta}(t)\right)\right), \tag{3.1}$$

et

$$q(v)(t) := \max\left(\tilde{\alpha}(t), \min\left(v(t), \tilde{\beta}(t)\right)\right). \tag{3.2}$$

■

Notation 1 *On note par* $\left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right]$ *l' ensemble des* $u \in PC_D^2(I)$ *tels que*

$$\hat{\alpha}(t) \leq u(t) \leq \hat{\beta}(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

De la même manière $\left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]$ *l' ensemble des* $v \in PC_D^1(I)$ *tels que*

$$\tilde{\alpha}(t) \leq v(t) \leq \tilde{\beta}(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Lemme 3.2 *Les opérateurs* p*:* $PC_D^2(I) \to \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right]$ *et* $q : PC_D^1(I) \to \left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]$ *définies par les formules (3.1) et (3.2) respectivement sont continus et bornés.*

Maintenant, on introduit la notion de sous et sur-solutions.

Définition 3.2

a) On dit que $\alpha \in PC_D^2(I)$ *est une sous -solution du problème* (P) *si*

$$\begin{cases} -\alpha''' \geq f(t, y, \alpha', \alpha'') \quad \text{for a.e } t \in (0, 2\pi) \quad , y \in \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right] \\ \alpha(0) \leq \alpha(2\pi), \quad \alpha'(0) \leq \alpha'(2\pi), \quad \alpha''(0) \leq \alpha''(2\pi) \\ \alpha(t_i^+) \leq g_i(\alpha(t_i)), \; \alpha'(t_i^+) \leq h_i(\alpha'(t_i)) \quad , \alpha''(t_i^+) \leq k_i(\alpha''(t_i)) \quad i = 1, ..., m. \end{cases} \tag{3.3}$$

b) De la même façon on définit la sur-solution β *en inversant le sens des inégalitées précédentes.*

3.4 Existence de Solution

Avant d'énoncer et de démontrer notre résultat principal, nous démontrons le lemme suivant, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 3.3 *Soit* $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée et* L^1*-Carathéodory telle que*

$$(w_2 - w_1)\left[\varphi(t, w_2) - \varphi(t, w_1)\right] \geq 0 \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$. Le problème $(P\prime)$

$$\begin{cases} -u^{(3)} = \varphi(t, u''(t)) \quad p.p \;\; t \in (0, 2\pi) \\ u(t_i^+) = a_i \quad , \; u'(t_i^+) = b_i \; , \; u''(t_i^+) = c_i \quad i = 0, 1, 2, ..., m. \end{cases}$$

admet une soluttion unique $u \in PC_D^2([0, 2\pi])$.

Preuve:

Existence. Pour $\lambda \in [0,1]$ et $i \in \{1,2,...,m\}$. Considérons la famille de problèmes à un paramètre

$$(P_\lambda)\begin{cases} -u^{(3)} = \lambda\varphi(t\,,u''(t)) & p.p\ t \in (t_i, t_{i+1}) \\ u(t_i^+) = \lambda a_i\ , \quad u'(t_i^+) = \lambda b_i\ , \quad u''(t_i^+) = \lambda c_i\ . \end{cases}$$

On montre qu'il existe $\delta > 0$ indépendant de λ , tel que toute solution possible de (P_λ) satisfait à

$$\|u\|_D \leq \delta \tag{3.4}$$

Il est évident que la solution u du problème (P_λ) est telle que

$$u''(t) = \lambda\left[c_i - \int_{t_i}^{t}\varphi(\nu\,,u''(s))\,ds\right],$$

et

$$u'(t) = \lambda\left[b_i + c_i(t-t_i) - \int_{t_i}^{t}\int_{t_i}^{s}\varphi(\nu\,,u''(\tau))\,d\tau ds\right],$$

$$u(t) = \lambda\left[a_i + b_i(t-t_i) + c_i\frac{(t-t_i)^2}{2} - \int_{t_i}^{t}\int_{t_i}^{s}\int_{t_i}^{\tau}\varphi(\nu\,,u''(\nu))\,d\nu d\tau ds\right], \tag{3.5}$$

φ étant bornée, soit

$$N = Max\{|\varphi(x\,,y)|\,/\,(x\,,y) \in I\times R\}.$$

Pour tout t $\in (t_i, t_{i+1})$ on a les estimations suivantes

$$|u(t)| \leq |a_i| + 2\pi|b_i| + (2\pi)^2|c_i| + (2\pi)^3 N,$$

et aussi

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq K = |b_i| + 2\pi|c_i| + (2\pi)^2 N \\ |u''(t)| &\leq 2\pi N + |c_i|. \end{aligned}$$

En posant

$$\delta = |a_i| + |b_i| + |c_i| + 2\pi (N + |b_i| + |c_i|) + (2\pi)^2 (N + |c_i|) + (2\pi)^3 N.$$

Nous obtenons

$$\|u\|_D = \|u\|_0 + \|u'\|_0 + \|u''\|_0 \leq \delta.$$

Pour tout $z \in PC_D^2(I)$, on pose

$$Tz(t) := a_i + b_i (t - t_i) + c_i \frac{(t-t_i)^2}{2} - \int_{t_i}^{t} \int_{t_i}^{s} \int_{t_i}^{\tau} \varphi(\nu, u''(\nu))\, d\nu d\tau ds. \tag{3.6}$$

L'équation (3.6) définit un opérateur

$$T : PC_D^2(I) \to PC_D^2(I).$$

(a) Montrons que T est continu. Soit $(z_n)_n$ une suite convergente vers z dans $PC_D^2(I)$,alors la suite $(z_n'')_n$converge vers z''dans $PC_D^1(I)$ et

$$|Tz_n(t) - Tz(t)| \leq \int_{t_i}^{t} \int_{t_i}^{s} \int_{t_i}^{\tau} |\varphi(\nu, z_n''(\nu)) - \varphi(\nu, z''(\nu))|\, d\nu d\tau ds.$$

Comme φ est une fonction L^1-Carathéodory alors

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi(\nu, z_n''(\nu)) - \varphi(\nu, z''(\nu))| = 0.$$

Aussi $|\varphi(\nu, z_n''(\nu))| \leq N$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'aprés le théorème de la convergence dominée on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{t_i}^{t} \int_{t_i}^{s} \int_{t_i}^{\tau} |\varphi(\nu, z_n''(\nu)) - \varphi(\nu, z''(\nu))|\, d\nu d\tau ds = 0.$$

De même on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(Tz_n)' - (Tz)'\|_0 = 0 \ , \lim_{n\to+\infty} \|(Tz_n)'' - (Tz)''\|_0 = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \|Tz_n - Tz\|_D = 0,$$

(b) Soit B un sous ensemble borné de $PC_D^2(I)$. Alors ,il existe $\rho > 0$ telle que :

$$\|z\|_D \leq \rho \text{ pour tout } z \in B.$$

On montre que $T(B)$ est relativement compact i.e uniformément borné et équicontinu. En effet soit z $\in B$, alors (13) implique que

$$\|Tz\|_D \leq \delta.$$

Aussi, comme φ est bornée, alors pour $\xi \leq \zeta$,

$$|Tz() - Tz(\xi)| \leq \int_{\xi}^{\zeta} \int_{t_i}^{s} \int_{t_i}^{\tau} |\varphi(\nu, z''(\nu))| \, d\nu d\tau ds \leq N(2\pi)^2 |\xi - \zeta|.$$

D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzéla T est un opérateur compact, alors l'ensemble de solutions de l'équation :

$$z = \lambda Tz, \quad \text{pour } 0 < \lambda < 1,$$

est borné.Le théorème de Schaefer implique que T admet un point fixe $z \in PC_D^2(I)$. Ce point fixe vérifie

$$z(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i \frac{(t - t_i)^2}{2} - \int_{t_i}^{t} \int_{t_i}^{s} \int_{t_i}^{\tau} \varphi(\nu, z"(\nu)) \, d\nu d\tau ds, \tag{3.7}$$

et $z(t_i^+) = a_i$

Unicité. Supposons que le problème(P_1) admet deux solutions v_1 et v_2 .
Soit $z(t) = v"_1(t) - v"_2(t)$; pour t$\in [t_i, t_{i+1}]$ $z(t_i^+) = z(t_{i+1}) = 0$
et pour $t \in (t_i, t_{i+1})$,nous avons

$$z(t) \; z'(t) = \left(v_1''(t) - v_2''(t)\right)\left(v_1'''(t) - v_2'''(t)\right),$$

$$= \left(v_1''(t) - v_2''(t)\right)\left[\varphi\left(t, v_2''(\nu)\right) - \varphi\left(t, v_1''(\nu)\right)\right] \leq 0.$$

Ainsi $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((z(t))^2\right) \leq 0$, ce qui conduit à

$$0 \leq (z(t))^2 \leq (z(t_i^+))^2 + \int_{t_i}^{t} \frac{d}{dt}\left((z(t))^2\right) dt \leq 0.$$

Ainsi, nous aurons

$$z(t) = 0 \text{ sur } [t_i, t_{i+1}].$$

Comme

$$(v_1 - v_2)'(t_i) = 0 \text{ et } (v_1 - v_2)(t_i) = 0,$$

il est clair que

$$v_1(t) = v_2(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Maintenant, nous passons à la preuve de notre résultat principal.

Sur la non linéarité f, nous allons imposer les conditions suivantes:

(H_2) Il existe fonctions continues $\theta_1 : I \to R^{+*}$ ~~et~~ $\theta_2 : I \to R$ telles que

Pour tout $t \in I, \hat{\alpha} \leq u_1 \leq u_2 \leq \hat{\beta}$ $, \tilde{\alpha} \leq v_1 \leq v_2 \leq \tilde{\beta}$ *and* $w \in R$,

$$f(t, u_1, v_1, w) - f(t, u_2, v_2, w) > -\theta_1(t)(u_1 - u_2) - \theta_2(t)(v_1 - v_2).$$

$(H3)$ Pour tout $t \in I, \hat{\alpha} \leq u \leq \hat{\beta}$ $, \tilde{\alpha} \leq v_2 \leq v_1 \leq \tilde{\beta}$ *and* $w \in R$,

$$[w_1 - w_2].[f(t, u, v_1, w) - f(t, u, v_2, w)] \geq 0.$$

■

Théorème 3.1 *Soit α, β respectivement sous et sur-solution du problème (P) telles que $\alpha" \leq \beta"$ sur I. Sous les conditions $(H1), (H2)$ et $(H3)$, le problème (P) admet au moins une solution y telle que :*

$$\tilde{\alpha} \leq y' \leq \tilde{\beta} \qquad \text{et } \hat{\alpha} \leq y \leq \hat{\beta} \quad \textit{dans } I.$$

Preuve: Comme α est une sous -solution, β une sur-solution telles que $\alpha" \leq \beta"$ sur I, d'aprés le lemme 3.1 $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ et $\hat{\alpha} \leq \hat{\beta}$.

On modifie le problème (P). Soit $F: \ I\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t,u,v,w)=\begin{cases} f(t,p(u),q(v),\beta'') & \text{si} \quad w\geq\beta" \\ f(t,p(u),q(v),w) & \text{si} \quad \alpha"\leq w\leq\beta" \\ f(t,p(u),q(v),\alpha'') & \text{si} \quad w\leq\alpha". \end{cases}$$

La fonction $F\in Car_{L^1}\left(I\times\mathbb{R}^3\right)$ est bornée pour tout $t\in I$ et $z\in\mathbb{R}$. Ceci découle de l'hypothèse $f\in Car_{L^1}\left(I\times\mathbb{R}^3\right)$et du fait que $p(.)$ et $q(.)$ sont continus et bornés.

On considère le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} -y'''=F(t,y,y',y'') \ \ p.p \ t\in(0,2\pi) \quad \text{et} \quad t\neq t_i \\ y(0)=y(2\pi),\ y'(0)=y'(2\pi) \quad ,y"(0)=y"(2\pi) \\ y(t_i^+)=g_i\left(y(t_i)\right),\ y'(t_i^+)=h_i\left(y'(t_i)\right) \quad ,y''(t_i^+)=k_i\left(y''(t_i)\right) \quad i=1,...,m. \end{cases} \tag{3.8}$$

pour montrer l'existence d'au moins une solution du problème (3.8) on procède par itération.

Etape 1

Soit (y_k) la suite définie dans $PC^2\left([0,2\pi]\right)$ définie telle que $y_0=\hat{\alpha}$ et

$$\begin{cases} -y_j'''(t)=F(t,y_{j-1},y_{j-1}',y_j'') \ \ p.p \text{ sur } (0,2\pi) \quad \text{et} \quad t\neq t_i. \\ y_j(0)=y_{j-1}(2\pi)\ ,y_j'(0)=y_{j-1}'(2\pi)\ ,\ y_j"(0)=y_{j-1}"(2\pi) \\ y_j(t_i^+)=g_i\left(y_{j-1}(t_i)\right),\ y_j'(t_i^+)=h_i\left(y_{j-1}'(t_i)\right)\ ,y_j''(t_i^+)=k_i\left(y_{j-1}'(t_i)\right),\ i=1,...,m. \end{cases} \tag{3.9}$$

Pour $j=0,1,2,...$ la fonction $\varphi: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(t,z)=F(t,y_{j-1},y_{j-1}',z) \text{ pour tout } \ t\in I \text{ et } z\in\mathbb{R}$$

est L^1-Carathéodory et bornée. La condition $(H3)$ implique que

$$(z_1-z_2)\left[\varphi(t,z_1)-\varphi(t,z_2)\right]\geq 0$$

Les conditions du lemme 3.1 sont satisfaites, alors le problème (18) admet une solution unique $y_k \in PC_D^2(I)$. Ainsi, la suite $(y_k)_{k\in N}$ est bien définie.

Montrons que cette suite vérifie la propriété suivante

Pour tout $j \in N$, pour tout $t \in I$:

$$i)\ \alpha''(t) \leq y_j''(t) \leq \beta''(t)$$
$$ii)\ \tilde{\alpha}(t) \leq y_j'(t) \leq \tilde{\beta}(t);$$
$$iii)\ \hat{\alpha}(t) \leq y_j(t) \leq \hat{\beta}(t) \text{ dans } I.$$

Puisque $y_0 = \hat{\alpha}$ on a $y_0 \in \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right]$. Aussi par définition de $\hat{\alpha}$, on a

$$y_0'(t) = \hat{\alpha}'(t) = \alpha'(t) - \mu = \tilde{\alpha}(t). \tag{3.10}$$

De la même façon , on montre que $y_0'(t) \leq \tilde{\beta}(t)$.

Aussi

$$y_0''(t) = \alpha''(t) = \alpha''(t) \text{ et } y_0''(t) \leq \beta''(t).$$

Supposons par récurrence que pour tout $n = 0, 1, 2...., j-1.$.

$$\alpha'' \leq y_n'' \leq \beta'',\ \tilde{\alpha} \leq y_n' \leq \tilde{\beta} \text{ et } \hat{\alpha} \leq y_n \leq \hat{\beta}. \tag{3.11}$$

Soit $w(t) = y_j''(t) - \alpha''(t)$, nous avons

$$w(0) = y_j''(0) - \alpha''(0) \geq y_{j-1}''(0) - \alpha''(2\pi) \geq 0,$$

$k_i$étant non décroissante, d'aprés l'hypothèse de récurrence (3.11)on a

$$w(t_i^+) = y_j''(t_i^+) - \alpha''(t_i^+) \geq k_i\left(y_{j-1}''(t_i^-)\right) - k_i\left(\alpha''(t_i^-)\right) \geq 0.$$

Maintenant montrons que $w(t) \geq 0$ pour tout t$\in (t_i, t_{i+1}]$ $i = 1, 2, ..., m$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi , il existe alors $\tau \in (t_{i_0}, t_{i_0+1})$ tel que

$$w(\tau) < 0 \text{ pour un } i_0 \in \{1, 2..., m\}.$$

De la continuité de w il existe $t^* \in (t_{i_0}, t_{i_0+1})$ tel que :

$$w(t^*) = 0 \quad \text{et} \quad w'(t^*) \leq 0.$$

D'autre part en utilisant l'hypothèse de récurrence et la propriété $(H2)$ de f on obtient

$$\begin{aligned}
0 &\geq y_j'''(t^*) - \alpha'''(t^*) = F(t^*, y_{j-1}(t^*), y_{j-1}'(t^*), y_j''(t^*)) - \alpha'''(t^*) \\
&\geq f(t^*, \hat{\alpha}(t^*), \tilde{\alpha}(t^*), \alpha''(t^*)) - f(t^*, p(y_{j-1}(t^*)), q(y_{j-1}'(t^*)), \alpha''(t^*)) \\
&\geq f(t^*, \hat{\alpha}(t^*), \tilde{\alpha}(t^*), \alpha''(t^*)) - f(t^*, y_{j-1}(t^*), y_{j-1}'(t^*), \alpha''(t^*)) \\
&> -\theta_1(\hat{\alpha}(t^*) - y_{j-1}(t^*)) - \theta_2(\tilde{\alpha}(t^*) - y_{j-1}'(t^*)) \geq 0,
\end{aligned}$$

d'où la contradiction .

De la même manière on montre que

$$y_j'' \leq \beta''.$$

Maintenant montrons que ii) $\tilde{\alpha} \leq y_j' \leq \tilde{\beta}$ et iii) $\hat{\alpha} \leq y_j \leq \hat{\beta}$ dans I pour tout j.
Soit $t \in (0, t_1)$,comme on a $y_j''(t) \geq \alpha''(t)$, une simple intégration sur $(0, t)$ donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^t y_j''(s)\, ds &= y_j'(t) - y_j'(0^+) \geq \int_0^t \alpha''(s)\, ds \\
y_j'(t) &\geq \alpha'(t) - \alpha'(0^+) + y_j'(0^+),
\end{aligned}$$

par hypothèse $y_j'(0^+) = y_{j-1}'(2\pi)$ et $y_{j-1}'(2\pi) \geq \tilde{\alpha}(2\pi)$. Alors

$$y_j'(t) \geq \alpha'(t) - \alpha'(0^+) + \tilde{\alpha}(2\pi),$$

il s'ensuit que

$$y_j'(t) \geq \alpha'(t) - \tilde{\alpha}(0^+) - \mu + \tilde{\alpha}(2\pi)$$

et de la définition

$$\tilde{\alpha}(2\pi) - \tilde{\alpha}(0^+) = \alpha'(2\pi) - \alpha'(0^+) \geq 0,$$

alors

$$y_j'(t) \geq \alpha'(t) - \mu = \tilde{\alpha}(t) \text{ pour tout } t \in (0, t_1).$$

Maintenant pour $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, ..., m$, on a

$$y_j'(t) - y_j'(t_i^+) = \int_{t_i}^t y_j''(s)\, ds \geq \int_{t_i}^t \alpha''(s)\, ds,$$

alors

$$\begin{aligned} y_j'(t) &\geq \alpha'(t) - \alpha'(t_i^+) + y_j'(t_i^+) \\ &\geq \alpha'(t) - \alpha'(t_i^+) + h_i(y_{j-1}'(t_i)). \end{aligned}$$

Par hypothèse on a $y_{k-1}'(t_i) \geq \tilde{\alpha}(t_i)$ et $\alpha'(t_i^+) \leq h_i(\alpha'(t_i))$
On déduit que

$$y_j'(t) \geq \alpha'(t) + L_i(y_{j-1}'(t_i) - \alpha'(t_i)) \geq \alpha'(t) - L_i\mu \geq \tilde{\alpha}(t)$$

De la même manière, on montre que $y_j'(t) \leq \tilde{\beta}(t)$ d'où ii)
iii) Soit $i \in \{1, ..., m\}$ et $t \in (t_i, t_{i+1})$, on a

$$y_j(t) - y_j(t_i^+) = \int_{t_i}^t y_j'(s)\, ds \geq \int_{t_i}^t \tilde{\alpha}(s)\, ds,$$

et comme

$$m_g \leq g_i(y_{j-1}(t_i)) \leq M_g,$$

alors

$$y_j(t) \geq \alpha(t) - \alpha(t_i^+) - \mu(t - t_i) + m_g = \hat{\alpha}(t).$$

De la même manière on obtient

$$y_j(t) \leq \hat{\beta}(t) = \beta(t) - \beta(t_i^+) + \eta(t - t_i) + M_g.$$

et pour $t \in (0, t_1)$ on a

$$y_j(t) - y_j(0) = \int_0^t y_j'(s)\,ds \geq \int_0^t \tilde{\alpha}(s)\,ds,$$

alors

$$y_j(t) \geq \alpha(t) - \alpha\left(0^+\right) - t\mu + y_{j-1}(2\pi),$$

et

$$y_j(t) \geq \alpha(t) - \alpha\left(0^+\right) - t\mu + \hat{\alpha}(2\pi),$$

ou bien

$$y_j(t) \geq \alpha(t) - 2\pi\mu - \alpha\left(t_m^+\right) + m_g = \hat{\alpha}(t),$$

et

$$y_j(t) \ \leq \ \beta(t) + 2\pi\eta - \beta\left(t_m^+\right) + M_g \ = \ \hat{\beta}(t).$$

Ceci termine la démonstration de la première étape

Etape 2.

Maintenant, soit $C = \max\left\{\|\alpha''\|_0, \|\beta''\|_0\right\}$ on déduit les estimations suivantes:

$$\|y_j\|_0 \leq \delta_0 := \max\left\{\|\hat{\alpha}\|_0, \left\|\hat{\beta}\right\|_0\right\} \tag{3.12}$$

$$\left\|y_j'\right\|_0 \leq \delta_1 := \max\left\{\|\tilde{\alpha}\|_0, \left\|\tilde{\beta}\right\|_0\right\}. \tag{3.13}$$

$$\left\|y_j''\right\|_0 \leq C. \tag{3.14}$$

Ainsi, il existe $M > 0$, $M = \delta_0 + \delta_1 + C$, telle que pour tout $j = 0, 1, 2, ...$

$$\|y_j\|_D \leq M. \tag{3.15}$$

Ainsi, il existe $M > 0$, $M = \delta_0 + \delta_1 + C$, telle que pour tout $j = 0, 1, 2, ...$

$$\|y_j\|_D \leq M. \tag{3.16}$$

L'ensemble

$$\Delta := \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : |u| \leq \delta_0, |v| \leq \delta_1 , |w| \leq C\right\}.$$

est compact dans $\mathbb{R}^3$.Comme $F \in Car_{L^1}\left(I \times \mathbb{R}^3\right)$,il existe $F_\Delta \in L^1(I)$ telle que:

$$|F(u,v,w)| \leq F_\Delta(t) \text{ pour tout } (u,v,w) \in \Delta. \tag{3.17}$$

D'aprés la définition de y_j et les estimations (3.12), (3.13) et (3.14) nous avons pour tout $j = 1, 2, ...$

$$\left(y_{j-1}, y'_{j-1}, y''_j\right) \in \Delta. \tag{3.18}$$

De l'équation différentielle (3.9), (3.17) et (3.18), nous parvenons à la relation

$$\left|y'''_j(t)\right| \leq F_\Delta(t) \text{ p.p } t \in I. \tag{3.19}$$

Ainsi

$$y'''_j \in L^1(I).$$

Puisque

$$y''_j(t) = y''_j(0) + \int_0^t y_j^{(3)}(s)\,ds + \sum_{0<t_i<t} k_i\left(y''_{j-1}(t_i)\right),$$

est absolument continue sur (t_i, t_{i+1}) alors

$$y_j \in PC_D^2(I).$$

A partir de (??), la suite $(y_j)_j$est uniformément bornée.

D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela la suite$(y_j)_j$admet une sous suite convergente vers une limite y dans $PC_D^2(I)$.

La limite y vérifie les estimations (3.12), (3.13) et (3.14) et $(y, y', y'') \in \Delta$.

D'aprés le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a pour tout $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$\int_{t_i}^t F(s, y_{j-1}(s), y'_{j-1}(s), y''_j(s))ds \text{ est convergente vers } \int_{t_i}^t F(s, y(s), y'(s), y''(s))ds.$$

Rappelons que $F \in Car_{L^1}\left(I \times \mathbb{R}^3\right)$.On en déduit que y'' est absolument continue sur (t_i, t_{i+1}) et $y \in PC^2_D(I)$ avec

$$-y^{(3)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t)) \quad t \in I, t \neq t_i. \tag{3.20}$$

En passant à la limte, nous aurons

$$y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi)\ , y''(0) = y''(2\pi). \tag{3.21}$$

Comme les fonctions impulsions sont continues, alors on a

$$y(t_i^+) = g_i(y(t_i)),\ y'(t_i^+) = h_i(y'(t_i)),\ y''(t_i^+) = k_i\left(y''(t_i)\right),\ i = 1, ..., m. \tag{3.22}$$

On conclut à partir des équations (3.20), (3.21) et (3.22) que y est aussi solution du problème (3.9)

La définition de F et (3.20) impliquent que

$$-y^{(3)}(t) = f(t, p(y(t)), q(y'(t)), y''(t)) \quad t \in I, t \neq t_i. \tag{3.23}$$

La relation de récurrence donne

$$y \in \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right],\ y' \in \left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right],\ y \in \left[\alpha'', \beta''\right]. \tag{3.24}$$

alors

$$p(y) = y, q(y') = y'.$$

Ainsi (3.23) devient

$$-y^{(3)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t)). \tag{3.25}$$

En combinant (3.21), (3.22) et (3.23) on conclue que y est solution du problème (P). ■

Chapitre 4

Problèmes aux limites d'ordre trois avec conditions intégrales au bord

4.1 Introduction

La condition intégrale au bord peut être regardée comme une condition en plusieurs points mais par rapport à la mésure de Lebesgue, ainsi il est intéressant de considérer le cas général d'une mesure de Radon. Ce chapitre est une réponse partielle dans ce sens. Soit le problème

$$(P)\begin{cases} y''' + f(t, y, y', y'') = 0 & t \in (0,1) \quad (1) \\ y(0) = 0 & \quad (2) \\ y'(0) - ay''(0) = \int\limits_0^1 h_1\left(y(s), y'(s)\right) ds & \quad (3) \\ y'(1) - by''(1) = \int\limits_0^1 h_2\left(y(s), y'(s)\right) ds, & \quad (4) \end{cases}$$

avec h_i sont des fonctions à valeurs réelles et continues, a et b sont des nombres réels tels que $|1 + a| > b > 0$.

4.2 Notations et Définitions

Soit

$$U = \left\{u \in C^2([0,1]),\ u''' \in\ L^1\ [0,1]\right\},$$

Pour $u \in U$, la norme $\|u\|_U$ est définie par

$$\|u\|_U = \sup\left\{|u(t)| + |u'(t)| + |u''(t)|,\ t \in\ [0,1]\right\}.$$

Soit $f \in Car_{L^1}([0,1] \times R^3)$. Les fonctions $h_i : R^2 \to R$ sont continues, non-décroissantes par rapport aux deux variables et telles que $h_2 - h_1$est bornée dans R^2.

Définition 4.1 *Une fonction $u \in U$ est une solution du problème (P) si elle satisfait les conditions (1), (2) et (3) du problème (P).*
Soient $\alpha, \beta \in U$ telles que $\alpha' \leq \beta'$.

Lemme 4.1 *Si $\alpha' \leq \beta'$ sur $[0,1]$ et $\alpha(0) \leq \beta(0)$, alors $\alpha \leq \beta$ sur $[0,1]$*

Pour $\alpha, \beta \in U$, on définit les constantes positives C, l et r de la manière suivante :

$$C := \|\beta"\|_U + \frac{l}{|1+a| - b} + 1,$$

où

$$l := \sup\left\{|h_2\ (u,v) - h_1\ (u,v)|, (u,v)\ \in R^2\right\},$$

et

$$r := \frac{(|1+a| - b)\ (\|\beta''\|_U + 1)}{1 + |1+a|},$$

rappelons que $|1+a| - b > 0$ par hypothèse.

Remarque 4.1 *On note $y \in [\alpha, \beta]$ si $\alpha\ (t) \leq y(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Définition 4.2

a) On dit que $\alpha \in U$ *est une sous-solution du problème*(P) *si*

$$\begin{cases} -\alpha''' \leq f(t,y,\alpha',z) \ \ p.p\ t \in (0,1), \forall\, y \in [\alpha,\beta], |z| \leq C \\ \alpha(0) \leq 0 \\ \alpha'(0) + aC \leq \int_0^1 h_1\left(\alpha(s), \alpha'(s)\right) ds \\ \alpha'(1) + bC \leq \int_0^1 h_2\left(\alpha(s), \alpha'(s)\right) ds. \end{cases}$$

b) On dit que $\beta \in U$ *est une sur-solution du problème* (P) *si*

$$\begin{cases} -\beta''' \geq f(t,y,\beta',z) \ \ p.p\ t \in (0,1), \forall\, y \in [\alpha,\beta], |z| \leq C \\ \beta(0) = 0 \\ \beta'(0) - aC \geq \int_0^1 h_1\left(\beta(s), \beta'(s)\right) ds \\ \beta'(1) - bC \geq \int_0^1 h_2\left(\beta(s), \beta\prime(s)\right) ds. \end{cases}$$

Sur la non linéarité f on impose les conditions suivantes

Il existe une fonction continue $\theta : [0,1] \to R^{+*}$ telle que

$$(H1)\begin{cases} f(t,u,v_2,w) - f(t,u,v_1,w) \geq \theta(t)(v_1 - v_2) \\ \text{pour tout } t \in [0,1], u \in [\alpha,\beta], v_2 \leq v_1 \ , v_1, v_2 \in [\alpha',\beta'] \text{ et } w \in R. \end{cases}$$

et

$$(H2)\ \ \sup\left\{|f(t,u,v,w)| : t \in I,\ u \in [\alpha,\beta],\ v \in [\alpha',\beta'],\ |w| \leq C\right\} \leq r.$$

4.3 Existence de Solution

Lemme 4.2 *Soit* $\varphi : [0,1] \times R \to R$ *une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition suivante*

Il existe une fonction continue $\theta : [0,1] \to R^{+*}$ telle que

$$\varphi(t, w_2) - \varphi(t, w_1) \geq \theta(t)(w_1 - w_2) \quad for\ w_2 \leq w_1 \quad w_1, w_2 \in R.$$

Si en plus φ est bornée, alors pour toutes les valeurs réelles de δ, ρ et a avec $a \neq -1$; le problème

$$(Q) \begin{cases} -u''' = \varphi(t, u'(t)) & p.p\ t \in (0,1) \\ u(0) = 0 \ , \ u'(0) - au''(0) = \delta \ , \ u'(1) = \rho. \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in U$.

Preuve:

a/ Existence. Pour $\lambda \in [0,1]$ on considère la famille de problèmes à un paramètre (Q_λ)

$$(Q_\lambda) \begin{cases} -u''' = \lambda\varphi(t, u'(t)) & p.p\ t \in (0,1) \\ u(0) = 0 \ , \ u'(0) - au''(0) = \lambda\delta \ , \ u'(1) = \lambda\rho. \end{cases}$$

Soit u une solution de (Q_λ). Montrons qu'il existe une constante positive K , indépendente de λ telle que

$$\|u\|_U \leq K.$$

Il est facile de voir que si u est une solution de(Q_λ) alors elle satisfait à

$$\begin{aligned} u'(1) - u'(0) &= \int_0^1 u''(s)\,ds = \int_0^1 \left(u''(0) + \int_0^s u^{(3)}(t)\,dt \right) ds \\ &= u''(0) - \lambda \int_0^1 \int_0^s \varphi(t, u'(t))\,dt. \end{aligned}$$

D'autre part

$$u'(1) - u'(0) = \lambda\rho - \lambda\delta - au''(0),$$

alors

$$(1+a)\,u''(0) = \lambda\rho - \lambda\delta + \lambda \int_0^1 \int_0^s \varphi(t, u'(t))\,dt,$$

ainsi

$$\left|u''(0)\right| \leq \frac{\lambda}{|1+a|}\left(|\rho-\delta| + \int_0^1\int_0^s \left|\varphi\left(t\ , u'(t)\right)\right| dtds\right),$$

et

$$\left|u''(t)\right| \leq \left|u''(0)\right| + \lambda\int_0^1\int_0^s \left|\varphi\left(t\ , u'(t)\right)\right| dtds.$$

Aprés intégration on obtient

$$u'(t) \ = u'(0) + \int_0^t u''(s)\, ds.$$

Sachant que $u'(0) = au''(0) + \lambda\delta$ alors

$$\left|u'(t)\right| \leq \left|au''(0)\right| + |\delta| + \left|\int_0^t u''(s)\, ds\right|.$$

Comme $u(0) = 0$, on déduit que

$$|u(t)| \leq \int_0^t \left|u'(s)\right| ds.$$

La fonction φ étant bornée, soit $N = max\left\{|\varphi(x\ , y)| \,/\, (x\ , y) \in [0,1]\times R\right\}$, nous avons alors

$$\|u\|_U = |u(t)| + \left|u'(t)\right| \ + \left|u''(t)\right| \leq K.$$

où

$$K = \left(\frac{3+2|a|+3|1+a|}{|1+a|}N \ + \frac{3+2|a|}{|1+a|}\ |\rho-\delta| + 2|\delta|\right) + 1,$$

Notons que K est indépendente de λ.

On pose

$$V := \{u \in U : \|u\|_U < K+1\}.$$

Soit g la fonction de Green associée au problème homogène correspondant à (Q).

Un calcul simple de cette fonction nous donne

$$g(t,s) = \begin{cases} \frac{(s-1)}{2(1+a)}\left[t^2+2at\right] & 0 \leq t < s \\ \frac{(s+a)}{2(1+a)}\left[t^2-2t\right] + \frac{s^2}{2} & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La solution ω du problème

$$\begin{cases} -u''' = 0 \quad p.p\ t \in (0,1) \\ u(0) = 0\ ,\ u'(0) - au''(0) = \delta\ ,\ \ u'(1) = \rho. \end{cases}$$

est donnée par

$$\omega(t) = \frac{(\rho - \delta)}{1+a} t^2 + \frac{a(\rho + \delta)}{1+a} t.$$

Ainsi la solution du problème (Q_λ) s'écrit

$$u(t) = \lambda\omega(t) + \lambda \int_0^1 g(t,s)\varphi(s\ , u'(s))\, ds.$$

Soient G l'opérateur intégral de noyau la fonction g et $\tilde{\varphi}$ l'opérateur de Nemitskii associé à φ telle que

$$\tilde{\varphi} : \bar{V} \to L^1(I) \quad \text{où} \quad \tilde{\varphi}(y) = \varphi(.,y'(.)).$$

On définit l'opérateur $T : \bar{V} \to \bar{V}$ par

$$Ty = \omega + G\tilde{\varphi}y.$$

(a) Montrons que T est continu. Soit $(z_n)_n$une suite convegente vers z dans U, alors la suite $(z_n')_n$converge vers z' dans U et

$$|Tz_n(t) - Tz(t)| \leq \int_0^1 |g(t,s)|\, |\varphi(s, z_n'(s)) - \varphi(s, z'(s))|\, ds.$$

Comme φ est une fonction L^1-Carathéodory, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi(s, z_n'(s)) - \varphi(s, z'(s))| = 0.$$

Aussi $|\varphi(s\ , z_{n'}(s))| \leq N$ pour n$\in \mathbb{N}$ et $\left|\frac{\partial^i g(t,s)}{\partial t^i}\right| \leq M = 2\frac{|a-2|+1}{|1-a|}$, $i = 0,1,2$. D'aprés le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 ||g(t,s)|\, \varphi(s\ , z_n'(s)) - \varphi(s\ , z'(s))|\, ds\ = 0.$$

De même on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|(Tz_n)' - (Tz)'\right\|_0 = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left\|(Tz_n)'' - (Tz)''\right\|_0 = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \|Tz_n - Tz\|_U = 0.$$

(b) Soit B un sous ensemble borné de $\bar{V}$. Alors, il existe $\sigma > 0$ telle que

$$\|z\|_U \leq \sigma \text{ pour tout } z \in B.$$

On montre que $T(B)$ est relativement compact, i.e uniformément borné et équicontinu. Il est facile de vérifier que $T(B)$ est uniformément borné. Démontrons l'équicontinuité, en effet ,pour tout $z \in B$ et pour tout ξ , $\zeta \in (0,1)$ tel que $\xi \leq \zeta$

on a

$$|Tz(\zeta) - Tz(\xi)| \leq \int_\xi^\zeta |g(\zeta,s) - g(\xi,s)| \left|\varphi\left(s , z'(s)\right)\right| ds \leq NM\,|\xi - \zeta|.$$

D'aprés le Théorème d'Ascoli-Arzéla T est un opérateur compact, alors l'ensemble de solutions de l'équation

$$z = \lambda Tz, \text{ pour } 0 < \lambda < 1,$$

est borné indépendamment de λ .

Alors, d'aprés le théorème de Schaefer, l'opérateur T admet un point fixe. Ceci prouve l'existence de solution pour notre problème.

b/Unicité. Supposons que le problème(Q) admet deux solutions v_1 et v_2.

Posons $z = v_1' - v_2'$,on a $z(1) = v_1'(1) + v_2'(1) = 0$ et montrons que $z(t) = 0$ pour tout t $\in [0,1]$.

Montrons d'abord que $z(0) = 0$. Supposons par absurde que $z(0) > 0$,

$$z(0) = v_1'(0) - v_2'(0) = a\left(v''(0) - v_2''(0)\right),$$

alors

$$z(0) = az'(0) > 0.$$

D'aprés la continuité de z et z', z est croissante sur $]0, \xi]$ pour un certain ξ dans $]0,1[$.

Comme $z(1) = 0$ alors il existe $t^* \in (0,1)$ tel que

$$z(t^*) = max_{t\in(0,1)} z(t),$$

alors

$$z(t^*) > 0\ ,\ z'(t^*)\ = 0 \text{ et } \ z''(t^*)\ \leq 0, \tag{4.1}$$

ainsi

$$z''(t^*)\ = v_1^{(3)}(t^*) - v_2^{(3)}(t^*) = \varphi(t^*, v_2'(t^*)) - \varphi(t^*, v_1'(t^*)),$$

$$z''(t^*)\ \geq \theta(t)(v_1'(t^*) - v_2'(t^*))\ > 0.$$

Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec (4).

On obtient le même résultat si on suppose que $z(0) < 0$, alors $z(0) = 0$.

Maintenant, supposons qu'il existe $t \in (0,1)$ tel que $z(t) > 0$. D'aprés la continuité de z, il existe $t^* \in (0,1)$ tel que

$$z(t^*)\ =\ max_{t\in(0,1)} z(t).$$

De la même façon que précédemment on obtient une contradiction.

Le même résultat est obtenu si on suppose qu'il existe $t \in (0,1)$ tel que $z(t) < 0$.

Nous déduisons que pour tout $t \in (0,1)$

$$z(t) = (v_1 - v_2)'(t) = 0.$$

Ceci implique que

$$v_1(t)\ = v_2(t) \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

■

Théorème 4.1 *Soient α, β respectivement la sous et sur-solution du problème (P) telles que $\alpha' \leq \beta'$ sur $[0,1]$. Sous les conditions (H1)) et (H2) le problème (P) admet au moins une* *solution y telle que*

$$\alpha' \leq y' \leq \beta' \ \ et \ \ \alpha \ \leq y \leq \beta \ \ sur \quad [0,1].$$

Preuve: On modifie le problème (1) comme suit

Soit $F: \ [0,1] \times R^3 \to R$ la fonction définie par :

$$F(t,u,v,w) = f(t,p(u),(q\,(v))\,,w),$$

$$\begin{aligned} (p(u))\,(t) &= \max\left(\alpha(t), \min\left(u\,(t)\,, \beta\,(t)\right)\ \right), \\ (q\,(v))\,(t) &= \max\left(\alpha'(t), \min\left(v\,(t)\,, \beta'\,(t)\right)\ \right). \end{aligned}$$

Maintenant considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -y''' = F(t,y,y',y'') \ \text{ pour } t \in (0,1) \\ y(0) = \ 0 \\ y'(0) - ay''(0) = \displaystyle\int_0^1 h_1\,(y(s),y'(s))ds. \\ y'(1) - by''(1) = \displaystyle\int_0^1 h_2\,(y(s),y'(s))ds. \end{cases}$$

Soit (y_k) la suite définie dans par

$$\begin{cases} -y_k^{(3)}\,(t) = F(t,y_{k-1},y_k',y_{k-1}'') \ \text{ pour } \quad t \in (0,1) \\ y_k(0) = \ \ 0 \\ y_k'(0) \ -ay_k''(0) = \displaystyle\int_0^1 h_1\left(y_{k-1}(s),y_{k-1}'(s)\right)\,ds \\ y_k'(1) = by_{k-1}''(1) + \displaystyle\int_0^1 h_2\left(y_{k-1}(s),y_{k-1}'(s)\right)\,ds \\ y_0 = \rho t + \beta\,(t)\,, t \in (0,1)\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

où

$$\rho = \max_{t\in[0,1]} \left(\alpha' - \beta'\right)(t), y_0''(t) = \beta''(t), y_0' = \rho + \beta'(t)$$

On pose

$$\varphi(t,z) := F(t, y_{k-1}, z, y_{k-1}''),$$

la fonction φ est continue et bornée pour tout $t \in [0,1]$ et $z \in R$. En effet,

$$F(t, y_{k-1}, z, y_{k-1}'') = f(t, (p(y_{k-1}))(t), (q(z))(t), y_{k-1}''),$$

et par définition $p(y_{k-1}) \in [\alpha, \beta]$, $(q(z)) \in [\alpha', \beta']$

Alors le lemme 4.2 montre que le problème ci-dessus admet une solution unique $y_k \in U$.

Ainsi la suite $(y_k)_{k\in N}$ est bien definie.

Maintenant montrons que pour tout $k \in N$

$$i) \sup_{[0,1]} |y_k''(t)| \leq C, \quad ii)\ \alpha' \leq y_k' \leq \beta' \text{ et } iii)\ \alpha \leq y_k \leq \beta \text{ dans } [0,1].$$

Il est facile de vérifier que

$$\sup_{[0,1]} |y_0''(t)| \leq C, \ \alpha' \leq y_0' \leq \beta' \text{ et } \alpha \leq y_0 \leq \beta \text{ dans } [0,1].$$

Supposons par récurrence que

$$\alpha' \leq y_j' \leq \beta', \alpha \leq y_j \leq \beta \text{ dans } [0,1] \text{ et } \sup_{[0,1]} |y_j''(t)| \leq C \text{ pour tout } j = 0, 1, 2....k-1. \quad (4.3)$$

i) Montrons que $\sup_{[0,1]} |y_k''(t)| \leq C$ pour $t \in (0,1)$

$$y_k''(t) - y_k''(0) = \int_0^t y_k'''(s)\, ds.$$

Alors

$$y_k''(t) = y_k''(0) - \int_0^t f(t, (p(y_{k-1}))(s), (q(y_k'))(s), y_{k-1}''(s)) ds, \quad (4.4)$$

de la relation (4.2) on obtient

$$y'_k(0) - y'_k(1) = by''_{k-1}(1) + \int_0^1 h_2\left(y_{k-1}(s), y'_{k-1}(s)\right) ds - \int_0^1 h_1\left(y_{k-1}(s), y'_{k-1}(s)\right) ds - ay''_k(0), \tag{4.5}$$

D'autre part, nous avons

$$y'_k(0) - y'_k(1) = -\int_0^1 y''_k(t)\, dt.$$

Par conséquent, on a

$$y'_k(0) - y'_k(1) = -y''_k(0) + \int_0^1 \int_0^t f(s, (p(y_{k-1}))(s), (q(y'_k))(s), y''_{k-1}(s)) ds dt. \tag{4.6}$$

Comme y_{k-1} , y'_{k-1}, y''_{k-1} satisfont la relation (4.2), alors des équations (4.5) et (4.6) nous déduisons que

$$\begin{aligned}(1+a)\, y''_k(0) &= by''_{k-1}(1) + \int_0^1 \left(h_2\left(y_{k-1}(s), y'_{k-1}(s)\right) - h_1\left(y_{k-1}(s), y'_{k-1}(s)\right)\right) ds \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^t f(s, (p(y_{k-1}))(s), (q(y'_k))(s), y''_{k-1}(s)) ds dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|(1+a)\, y''_k(0)\right| \leq bC + l + r.$$

Maintenant la relation (4.4) implique que

$$\left|y''_k(t)\right| \leq \frac{bC}{|1+a|} + \frac{l}{|1+a|} + \frac{1+|1+a|}{|1+a|} r.$$

De l'inégalité

$$\left|\int_0^1 f(t, (p(y_{k-1}))(s), (q(z))(s), y''_{k-1}(s)) ds\right| \leq r = \frac{C\left(|1+a| - b\right) - l}{1 + |1+a|}.$$

Il découle que

$$\sup_{[0,1]} |y_k''(t)| \leq C.$$

Maintenant afin de démontrer que ii) $\alpha' \leq y_k' \leq \beta'$, posons $w = y_k' - \alpha'$ et montrons que

$$w(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in (0,1).$$

Tout d'abord, on montre que $w(1) \geq 0$ et $w(0) \geq 0$. En effet

$$w(1) = y_k'(1) - \alpha'(1),$$

$$w(1) = by_{k-1}''(1) + \int_0^1 h_2\left(y_{k-1}(s), y_{k-1}'(s)\right) ds - \alpha'(1).$$

Comme y_{k-1} , y_{k-1}' et y_{k-1}''satisfont à (5) et h_2 est une fonction continue non décroissante, alors

$$by_{k-1}''(1) + \int_0^1 h_2\left(y_{k-1}(s), y_{k-1}'(s)\right) ds - \alpha'(1) \geq -bC - \alpha'(1) + \int_0^1 h_2\left(\alpha(s), \alpha'(s)\right) ds,$$

de la définition de la sous-solution on a

$$\alpha'(1) + bC \leq \int_0^1 h_2\left(\alpha(s), \alpha'(s)\right) ds,$$

et

$$w(1) = y_k'(1) - \alpha'(1) \geq 0,$$

de même nous aurons

$$w(0) = y_k'(0) - \alpha'(0),$$

et

$$w(0) = ay_k''(0) + \int_0^1 h_1\left(y_{k-1}(s), y_{k-1}'(s)\right) ds - \alpha'(0).$$

Ce qui donne

$$w(0) \geq -aC + \int_0^1 h_1(\alpha(s), \alpha'(s) - \alpha'(0),$$

de la définition de la sous solution, on a

$$\alpha'(0) + aC \geq \int_0^1 h_1(\alpha(s), \alpha'(s))\, ds,$$

et à fortiori

$$w(0) = y_k'(0) - \alpha'(0) \geq 0.$$

Maintenant supposons qu'il existe $t \in (0,1)$ tel que $w(t) < 0$. D'aprés la continuité de w, w' et w'' il existe $t^* \in (0,1)$ tel que

$$w(t^*) = \min_{t \in (0,1)} w(t).$$

Alors

$$w(t^*) < 0, \; w'(t^*) = 0 \text{ et } w''(t^*) > 0. \tag{4.7}$$

En utilisant la définition de sous-solution, on obtient

$$\begin{aligned} y_k'''(t^*) - \alpha'''(t^*) &= F(t^*, y_{k-1}(t^*), y_{k-1}'(t^*), y_{k-1}''(t^*)) - \alpha'''(t^*) \\ &= f(t^*, y_{k-1}(t^*), \alpha'(t^*), y_{k-1}''(t^*)) - \alpha'''(t^*) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$w''(t^*) \leq 0,$$

d'où la contradiction avec (4.7).

De la même façon on montre que $y_k' \leq \beta'$. Finalement montrons la propriété *iii*).

En effet

$$y_k(t) - y_k(0) = \int_0^t y_k'(s)\, ds \geq \int_0^t \alpha'(s)\, ds,$$

de sorte que

$$y_k(t) \geq \alpha(t) - \alpha(0) + y_k(0).$$

Par hypothéses $y_k(0) = 0 \geq \alpha(0)$, on déduit que

$$y_k(t) \geq \alpha(t).$$

De la même façon, on montre que

$$y_k(t) \leq \beta(t).$$

La suite $(y_k)_k$ est bien définie dans U et uniformément bornée dans U. Le théorème d'Ascoli-Arzela nous assure qu'une sous suite de $(y_k)_k$ converge vers une limite y dans U. On conclut, d'aprés le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, que pour $t_1, t_2 \in (0,1)$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(s, y_{k-1}(s), y'_{k-1}(s), y''_k(s))ds \quad \text{converge vers} \quad \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), y'(s), y''(s))ds,$$

ainsi

$$\begin{cases} -y^{(3)} = f(t, y, y', y'') \quad t \in (0,1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) - ay''(0) = \int_0^1 h_1(y(s), y'(s))ds \\ y'(1) - by''(1) = \int_0^1 h_2(y(s), y'(s))ds. \end{cases}$$

Ceci montre que y est une solution du problème (P) .c.q.f.d. ■

4.4 Cas Particulier

On remaque que si dans le problème (P) la non-linéarité ne dépend pas de y'', l'étude devient plus simple.

Exemple 4.1 *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -y^{(3)}(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad t \in (0,1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) + y''(0) = \int\limits_0^1 h_1(y(s), y'(s))ds \\ y'(1) + y''(1) = \int\limits_0^1 h_2(y(s), y'(s))ds, \end{cases} \tag{4.8}$$

avec

$$f(t,u,v) = t \arctan(\pi - v) \frac{\cos^2 tu}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$h_1(u,v) = u - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right) \text{ et } \quad h_2(u,v) = u + \arctan\left(u^3 + \sqrt{1 + (u+v)^2}\right).$$

On vérifie facilement que $\alpha(t) = \pi t$ *est une sous-solution et* $\beta(t) = 3\pi t$ *est une sur-solution de problème (4.8),* $f \in Car_{L^1}([0,1] \times \mathbb{R}^2)$ *et vérifie les conditions* $(H1)$ *et* $(H2)$ *avec* $r = \pi/2$. *Alors le problème (4.8) admet au moins une solution* y *telle que*

$$\pi t \leq y \leq 3\pi t \quad \text{et} \quad \pi \leq y' \leq 3\pi.$$

Chapitre 5

Solutions multiples pour un problème d'écoulement

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère une équation différentielle non linéaire d'ordre trois, issue de la mécanique des fluides (voir[40] par exemple)

Soit l'équation

$$y''' + E(Ayy'' - y''^2) = \beta \qquad y = y(t) \quad t \in [0,1]\,,$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = y(1) = y''(1) = y''(0) + 1 = 0,$$

où E, A et β sont les paramètres physiques avec E et A positifs. L'existence de solutions de ce problème aux limites a été étudiée dans [34] et [35] pour certaines valeurs de E, A et β.

Notre objectif est d'étudier un cas plus général,avec une fonction β non nécessairement constante et des conditions moins restrictives sur les paramétres E et A. Nous appliquerons le principe de réduction de Lyapunov-Schmidt. La multiplicité des solutions est obtenue à l'aide de la théorie des fonctions 0-epi .

5.2 Estimations à Priori

Considérons le problème

$$\begin{cases} y''' + E(Ayy'' - y'^2) = \beta & y = y(t) \quad t \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = y''(1) = y''(0) + 1 = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Aprés intégration de l'équation (1) de t à 1 , $t \in (0,1)$ nous obtenons

$$-y''(t) = +EAyy' + E(A+1)\int_t^1 y'^2(s)ds + \hat{\beta}(t),$$

avec $\hat{\beta}(t) = \int_t^1 \beta(s)ds$.

Alors le problème (5.1) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} -y''(t) = +EAyy' + E(A+1)\int_t^1 y'^2(s)ds + \hat{\beta}(t) & t \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = y''(0) + 1 = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Posons $z(t) = \dfrac{t}{3} - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6}$.La fonction z satisfait à la condition (2).
Il est clair que si y satisfait le problème

$$\begin{cases} -y'' = +EA(z+y)(z+y)' + E(A+1)\int_t^1 (z+y)'^2(s)ds + \hat{\beta}(t) + z'' & t \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = y''(0) = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

alors $v = (z+y)$ est une solution du problème

$$\begin{cases} v'' + \pi^2 v = -EAvv' - E(A+1)\int_t^1 v'^2(s)ds + \pi^2 v - \hat{\beta}(t) & t \in (0,1) \\ v(0) = v(1) = v''(0) + 1 = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

qui est équivalent au problème (5.2). Ainsi nous allons étudier le problème (5.3) .
Soit X l'espace de Banach $C^1[0,1]$ et $Y = L^2[0,1]$ muni de leurs normes usuelles.
On définit l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ tel que

$$Lu = u'' + \pi^2 u.$$

avec

$$D(L) = \{y \in W^{2,2}(0,1) : \; y(0) = y(1) = y''(0) = 0\}.$$

Soient $G : X \to Y$ l'opérateur de Nemitskii donné par

$$G(y)(t) = +EA(y+z)(t)(y+z)'(t) + E(A+1)\int_t^1 (y+z)'^2(s)ds - \pi^2 y(t),$$

et $-p(t) = \hat{\beta}(t) + z''$ on peut écrire le problème (5.3) sous la forme

$$\begin{cases} L\,y + G(y) = p(t) & t \in (0,1) \quad (3) \\ y(0) = y(1) = y''(0) = 0. & \quad (4) \end{cases} \tag{5.5}$$

Apartir des équations dans(5.3) il vient

$$y''(0) = 0 = -E(A+1)\int_0^1 (y+z)'^2(s)ds + 1 - \hat{\beta}(0).$$

On déduit que

$$\int_0^1 (y+z)'^2(s)ds = \frac{1-\hat{\beta}(0)}{E(A+1)} = C_0.$$

Comme la quantité

$$\left\|(y+z)'\right\|_{L^2}^2 \geq 0,$$

alors

$$\frac{1-\hat{\beta}(0)}{E(A+1)} \geq 0.$$

Remarque: On supposera dans toute la suite que

$$1 - \hat{\beta}(0) > 0.$$

Soit

$$C_1 = \left(\frac{1-\hat{\beta}(0)}{E(A+1)}\right)^{1/2} + \left\|z'\right\|_{L^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\left\|y'\right\|_{L^2} \leq C_1.$$

Notons que

$$\|z'\|_{L^2} = 1/45.$$

La relation $y(0) = y(1) = 0$ et l'inégalité de Wirtinger [24] nous donne

$$\|y\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi}\|y'\|_{L^2} \leq \frac{C_1}{\pi} \leq C_1.$$

En posant $v = (y + z)$ dans (5.3), on obtient pour tout t

$$|y''(t)| \leq |EAv(t)\, v'(t)| + \left|E(A+1)\int_t^1 v'^2(s)ds\right| + |p(t)|.$$

Soit $\gamma = \sup\{|p(t)|\,, t \in [0,1]\}$. L'inégalité de Holder conduit à

$$\int_0^1 |y''(t)|\,dt \leq |EA|\,\|v\|_{L^2}\,\|v'\|_{L^2} + |E(A+1)|\,\|v'\|_{L^2}^2 + \gamma \leq (2\,|EA| + |E|)\,\|v'\|_{L^2}^2 + \gamma,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 |y''(t)|\,dt \leq (2\,|EA| + |E|)\,C_0 + \gamma.$$

Ainsi il existe une constante positive $C_2 > 0$.

$$C_2 = (2EA + E)\,C_0 + \gamma,$$

telle que

$$\|y''\|_1 \leq C_2.$$

Comme $y(0) = y(1) = 0$ d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, nous obtenons

$$y'(t) = \int_\xi^t y''(s)\,ds \quad \text{pour un certain } \xi \in\,]0,1[\,,$$

et à fortiori

$$\|y\|_0 \leq \|y'\|_{L^1} \leq C_1 \quad \text{et} \quad \|y'\|_0 \leq \|y''\|_{L^1} \leq C_2. \tag{5.6}$$

Finalement la fonction y est bornée dans $C^1[0,1]$ et vérifie

$$\|y\|_1 \leq C \text{ où } C = C_1 + C_2.$$

5.3 Existence de Solution

Le problème linéaire associé à (5.5) admet une solution non triviale

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sin \pi t \text{ telle que } \|\varphi\|_{L^2} = 1.$$

L'opérateur L est un opérateur de Fredholm avec ind $L = 0$.

Posons

$$V = KerL = Span\{\varphi\} = \{u \in L^2[0,1] : u(t) = \alpha\varphi(t), \alpha \in R\},$$

c'est un sous espace fermé de $L^2[0,1]$.

L'espace $L^2[0,1]$ admet une décomposition en somme directe de la manière suivante

$$L^2[0,1] = V \oplus V^{\perp}, V^{\perp} = R(L).$$

On définit les deux projections canoniques continues

$$P : L^2[0,1] \to V \quad et\ Q : L^2[0,1] \to V^{\perp},$$

par

$$Q(u)(x) = \left(2\int_0^1 u(t)\sin \pi t dt\right)\sin \pi x,$$

et

$$P(u)(x) = u(x) - Q(u)(x) = (I - Q)(u(x)),$$

Pour tout $y \in L^2[0,1]$, ils existent $s \in R$ et $w \in V^{\perp}$ tels que

$$y = s\varphi + w \ et\ p = \tau\varphi + h \text{ avec } \tau \in R \text{ et } h \in V^{\perp}.$$

La restriction de L à $D(L) \cap V^{\perp}$ admet un inverse compact $K = L^{-1}$qui est l'opérateur intégral de noyau la fonction de Green modifiée

L'équation (3) devient aprés projection sur V et sur $V^{\perp}$

$$\begin{cases} Lw + QG(s\varphi + w) = h \\ PG(s\varphi + w) = \tau\varphi \quad s \in R, \quad w \in D(L) \cap V^{\perp}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Si y est une solution du problème (5.5) alors

$$\|y\|_{L^2} \leq C_1$$

et

$$\|s\varphi(.) + w\|_{L^2}^2 = < s\varphi(.) + w, s\varphi(.) + \omega > = s^2 + \|w\|_{L^2}^2 \leq C_1^2.$$

Il s'ensuit que

$$\|\omega\|_{L^2} \leq C_1 \text{ et } |s| \leq C_1.$$

L'ensemble de solutions de l'équation auxilliaire:

$$Lw + QG(s\varphi + w) = h$$

est défini par

$$S = \left\{(s, w) \in [-C_1, C_1] \times V^{\perp} / \quad w \in V^{\perp} \text{ et } Lw + QG(s\varphi + w) = h\right\}.$$

Pour tout s fixé tel que $|s| \leq C_1$, l'équation auxilliaire est en fait équivalente à l 'équation

$$w = K\left[h - QG\left(s\varphi + w\right)\right] = T_s\left(w\right). \tag{5.8}$$

Soit l'opérateur T_s défini par

$$T_s = T_{s,h} : D(L) \cap V^{\perp} \to V^{\perp} \;/\; T_s\left(w\right) = K\left[h - QG\left(s\varphi + w\right)\right].$$

Comme l'opérateur K est compact et l'application G est continue et borné alors T_s est continu et compact.

Afin de montrer l'existence de solution pour l'équation () il suffit de vérifier que l'ensemble U des solutions de la famille d'équations

$$w = \lambda T_s(w) = \lambda K[h - QG(s\varphi + w)], \quad 0 < \lambda < 1,$$

est à priori borné dans $C^1[0,1]$ indépendamment de $\lambda \in (0,1)$.

En effet, soit w une solution de (5.8) alors $w \in D(L) \cap V^{\perp}$ autrement dit

$$w(0) = w(1) = w''(0) = 0.$$

Posons $y = s\varphi + w$ et montrons que $\|y\|_1 \leq C$ (La constante C étant définie dans la section précédente)

Posons $t = 0$ dans l'équation auxilliaire, nous obtenons

$$QG(s\varphi + w)(0) = h(0),$$

D'une part nous avons

$$G(s\varphi + w)(0) = (PG(s\varphi + w))(0) + QG(s\varphi + w)(0) = QG(s\varphi + w)(0) = h(0),$$

et d'autre part

$$G(s\varphi + w)(0) = E(A+1)\int_0^1 (y' + z')^2\, dt.$$

Ainsi

$$-E(A+1)\int_0^1 (y' + z')^2\, dt = h(0) = 1 - \hat{\beta}(0),$$

On déduit que

$$\int_0^1 (y' + z')^2 = C_0.$$

D'aprés (5.6) on a $\|y\|_1 \leq C$ il découle que

$$\|w\|_1 = \|s\varphi + w - s\varphi\|_1 \leq C + |s| \leq C + C_1.$$

Alors les solutions de la famille d'équations (5.8) sont à priori bornées dans $C^1[0,1]$ indépendamment de $\lambda \in (0,1)$.

D'aprés le théorème de Schaefer l'ensemble S est une partie non vide de $[-C_1, C_1] \times \bar{B}(0, C)$.

Maintenant le système (5.7) est équivalent à résoudre l'équation suivante dans S

$$PG(s\varphi + w) = \tau\varphi \text{ ou bien } \Phi(s, w) = \tau,$$

où $\Phi : [-C_1, C_1] \times V^{\perp} \to R$ est définie par

$$\Phi(s, w) = -\int_0^1 G((s, w))(\zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

et

$$\tau = \int_0^1 p(t)\, \varphi(t)\, dt \text{ avec } p(t) = 1 - t - \hat{\beta}(t).$$

Il est clair que Φ est continue et uniformément bornée. Ceci montre le théorème suivant

Théorème 5.1 *Il existe un ensemble borné $\Omega_h \subset R$ tel que le problème (5.3) admet une solution si et seulement si $\tau \in \Omega_h$.*

5.4 Multiplicité des Solutions

Théorème 5.2 *Soit $p = \tau\varphi + h \in C[0,1]$, si $0 < 1 - \hat{\beta}(0) \leq \frac{tg(1)}{1+tg(1)}$ où $tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, alors il existe deux constantes τ_1, τ_2 tels que*

i) $\Omega_h = [\tau_1, \tau_2]$

ii) Si $\tau \in]\tau_1, \tau_2[$ alors le problème (5.3) admet au moins deux solutions distinctes .

Etude de S

Nous aurons besoin du Théorème 5.2 du chapitre 1. Plus précisemment, il s'agit du résultat suivant

Lemme 5.1 *Soit $f : \bar{U} \to G$ une fonction O-epi et propre. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $z \in f^{-1}(0)$ il existe une application continue et compacte $h_\varepsilon : \bar{U} \to F$ telle que*
i) $h_\varepsilon (z) = 0$
ii) $\|h_\varepsilon (x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in U$;
iii) l'ensemble de solutions de l'équation: $f(x) = h_\varepsilon (x)$ est $\varepsilon -$ enchainé
Alors $f^{-1} (0)$ est non vide ,connexe et compact.

Lemme 5.2 *Soit s_0 fixé dans $[-C_1, C_1]$. L'ensemble*

$$S(s_0) = \{(s_0,\omega) \ / \ (s_0,\omega) \in S\}, \tag{5.9}$$

est non vide,connexe et compact.

Preuve: T_{s_0} est continue et compact, et on sait que $(Id - T_{s_0})$ est propre d'aprés la Proposition 1.2 du chapitre 1

D'aprés (5.8) l'ensemble

$$(Id - T_{s_0})^{-1} (0),$$

est borné.

Soit $U = B(0, C+1) \subset V^{\perp}$,on a

$$(Id - T_{s_0})^{-1} (0) \subset U.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $u \in (Id - T_{s_0})^{-1} (0)$, on définit l'application

$$h_\varepsilon (w) = KQ [G(s_0\varphi + w) - G_\varepsilon (s_0\varphi + w)] + KQ [G_\varepsilon (s_0\varphi + u) - G(s_0\varphi + u)], \tag{5.10}$$

où l'opérateur

$$G_\varepsilon : L^2 [0,1] \to L^2 [0,1],$$

est défini par

$$G_\varepsilon(y) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right) G(y),$$

avec

$$N = 2M + \pi^2 \text{ avec } M = \sup\{|G(y)| : y \in U\}.$$

Nous remarquons que $h_\varepsilon$satisfait la condition i) et ii) du lemme 5.1.

Afin d'établir la condition *iii*) du lemme 5.1, montrons que l'équation

$$(Id - T_{s_0})(w) = h_\varepsilon(w), \tag{5.11}$$

admet une solution unique. En effet la relation (5.11) est équivalente à

$$\omega - K[h - QG_\varepsilon(s_0\varphi + \omega)] = KQ[G_\varepsilon(s_0\varphi + u) - G(s_0\varphi + u)].$$

Autrement dit

$$w" + \pi^2 w + QG_\varepsilon(s_0\varphi + \omega) = q, \tag{5.12}$$

avec

$$q = Q[G_\varepsilon(s_0\varphi + u) - G(s_0\varphi + u)] + h.$$

On définit l'opérateur $\tilde{L} : D(L) \cap V^{\perp} \to V^{\perp}$ par

$$\tilde{L}w = w" + w,$$

l'opérateur $\tilde{L}$ est inversible et

$$\left\|\tilde{L}^{-1}\right\| \leq \eta = 1 + \frac{1}{tg1},$$

La relation (5.12) peut être écrite sous la forme

$$\tilde{L}\omega = F\omega.$$

avec

$$Fw = Q\left[q - G_\varepsilon(s_0w + \omega) + \left(1 - \pi^2\right) w\right].$$

Pour tout $w_1, w_2 \in V^{\text{l}}$, on a

$$\|Fw_1 - Fw_2\|_{L^2} \leq \mu \|w_1 - w_2\|_{L^2},$$

avec

$$\mu = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\pi^2\right) EA \frac{1 + \hat{\beta}(0)}{E(A+1)},$$

comme par hypothèse $0 < 1 + \hat{\beta}(0) \leq \frac{1}{\eta}$, Alors

$$\mu < \frac{1}{\eta},$$

de sorte que $\tilde{L}^{-1}F : V^{\text{l}} \to V^{\text{l}}$est une contraction sur V^{l}.

L'équation

$$\tilde{L}w = Fw,$$

admet une solution unique dans V^{l} ce qui vérifie la condition (iii).

Finalement, d'aprés le lemme 5.1 on a $(Id - T_{s_0})^{-1}(0)$ est non vide ,connexe et compact. Alors S est un ensemble connexe ■

Conclusion

L'ensemble Ω_h est un intervalle Ω_h $=(\tau_1, \tau_2)$.

D'aprés le théorème1, on sait que $\Omega_h \subset R$ un sous ensemble borné. Soient

$$\tau_1 = \inf \Omega_h \text{ et } \tau_2 = \sup \Omega_h.$$

En utilisant le lemme 5.2 on a

$$(\tau_1, \tau_2) \subseteq \Omega_h.$$

Posons

$$W = \{w \,/\, (s, w) \in S\}. \tag{5.13}$$

$h \in C[0,1]$ et $H^2(0,1) \subset\!\!\lrcorner\; C^1[0,1]$ ceci montre que W est un ensemble compact dans $C_0^1[0,1]$

Remarquant que τ_i $i = 1,2$ vérifient

$$\tau_1 = \inf \{\Phi(s,w) : -C_1 \leq s \leq C_1 \text{ et } (s,w) \in S\}, \tag{5.14}$$

$$\tau_2 = \sup \{\Phi(s,w) : -C_1 \leq s \leq C_1 \text{ et } (s,w) \in S\}. \tag{5.15}$$

Soit une suite $\{t_n\} \subset (\tau_1, \tau_2)$ telle que

$$t_n \to \tau_1.$$

L'équation (5.13) et le fait que $(\tau_1, \tau_2) \subseteq \Omega_h$ impliquent qu'il existe $\{(s_n, \omega_n)\} \subset S$ telle que

$$-C_1 \leq s_n \leq C_1 \text{ et } \Phi(s_n, w_n) = t_n. \tag{5.16}$$

En utilisant (5.16) et le fait que W est ensemble compact dans $C^1[0,1]$,on peut supposer que

$$s_n \to s_* \text{ et } w_n \to w_* \text{ dans } C_0^1[0,1]. \tag{5.17}$$

En Combinant (5.16) et (5.17) et l'équation.

$$w_n = K[h - QG(s_n\varphi + w_n)] \in S.$$

On conclut que

$$(s_*, w_*) \in S \text{ et } \tau_1 = \Phi(s_*, w_*).$$

Alors

$$\tau_1 \in \Omega_h.$$

De la même manière on montre qu'il existe $(s^*, w^*) \in S$ telle que

$$\tau_2 = \Phi(s^*, w^*).$$

Alors

$$\tau_2 \in \Omega_h,$$

ainsi

$$\Omega_h = [\tau_1, \tau_2] .$$

Finalement on montre que si $t \in \Omega_h$et $t \in (\tau_1, \tau_2)$ alors (5.4) admet au moins deux solutions distinctes .

Soient a et b tels que

$$\tau_1 < a \leq t \leq b < \tau_2.$$

Soient (s_a, ω_a) et $(s_b, \omega_b) \in S$ tels que

$$a = \Phi(s_a, \omega_a) \text{ et } b = \Phi(s_b, \omega_b) .$$

Comme S est connexe et Φ est continue alors il existe deux composantes connexes disjointes C_1 et C_2 dans S telles que C_1joint les points (s_a, ω_a) et (s_b, ω_b) tandis que C_2 joint les points (s_*, ω_*) et (s^*, ω^*) .

Les composantes C_1 et C_2 vérifient bien

$$[a, b] \subset \Phi(C_i), \ i = 1, 2.$$

alors d'aprés (5.13) il existe $(s_i, \omega_i) \in S$, $i = 1, 2$, tels que

$$\Phi(s_i, \omega_i) = t, \ i = 1, 2.$$

Alors les fonctions

$$y_1 = s_1\varphi + \omega_1 \text{ et } y_2 = s_2\varphi + \omega_2,$$

sont deux solutions distinctes de (5.1)

Perspectives

a) On notera dans ce travail la restriction à des équations d'ordre trois. Il est raisonnable de penser que cette restriction est d'ordre technique et il semble intéressant de généraliser ce type de résultats et notamment de conserver la même méthode aux équations d'ordres supérieurs.

b) Il semble important de poursuivre l'étude avec la présence d'une perturbation singulière et de comparer les résultats obtenus dans le travail Z.Du et al.

Bibliographie

[1] A.R.AFTABIZEDEH,C.P.GUPTA AND J.XU, Existence and Uniqueness Theorems for Three-Point Boundary Value Problems, Siam.J.Math.Anal .Vol 20, N^{0}03, pp 716-726, 1989.

[2] A.R.AFTABIZEDEH,K.DEIMLEING, A Three-Point Nonlinear Boundary Value Problem Differential and Integral Equation, Vol 04, N°1, 1991,189-194.

[3] A.BELARBI AND M.BENCHOHRA, Existence Results for Nonlinear Boundary Value Problems with Integral Boundary Conditions, Elec.J.Diff. Equ.,6(2005),1-10.

[4] **Z.N.Benbouziane**, A.BOUCHERIF AND S.M.BOUGUIMA, Existence Result for Impulsive Third Order Periodic Boundary Value Problems, Applied Mathematics and Computation (2008)(Accepté)

[5] **Z.N.Benbouziane**, A.BOUCHERIF AND.S.M.BOUGUIMA,Third Order Nonlocal Multipoint Boundary Value Problems, Dynamic Systems and Applications 13 (2004) 41-48.

[6] A.BOUCHERIF, Positive Solutions of Second Order Differential Equations with Integral Boundary Conditions, Discrete and Continuous Dnamical Systems.Supplement 2007 pp155-159.

[7] A.BOUCHERIF, S.M.BOUGUIMA, Nonlocal Multipoint Boundary Value problems.Nonlinear Studies, Vol.8, No4 (2001), 95-405.

[8] A.BOUCHERIF,S.M.BOUGUIMA,NAWAL AL-MALKI AND **Z.N.Benbouziane** , Third Order Differential Equations with Integral Boundary Conditions, submitted.

[9] H.BREZIS, Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications . Masson,Paris,1983.

[10] ROBERT.F.BROWN, A Topological Introduction to Nonlinear Analysis. Birkhâuser. Boston. Basel. Berlin.1993.

[11] A.BROWN AND A.PAGE, Elements of Functional Analisis,Van Nostrand,1970.

[12] ROBERT CAUTY, Solution du Problème de Point Fixe de Schauder, Fund. Math. 170 (2001), 231-246.

[13] DAOMIN CAO & RUYUN MA,Positive Solutions to a Second Order Multipoint Boundary Value Problem,Electronique Journal of Différential Equations,Vol.2000(2000),No.65,pp.1-8.

[14] J.CRONIN, Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis ,AMS,1964.

[15] KLAUS.DEIMLING, Nonlinear Functional Analysis,Springer-Verlag,Berlin Eindelberg New york Tokyo1980.

[16] Y.DONG, Periodic Solutions for Second Order Impulsive Differential Systems. Nonlinear Analysis,27 (1996), pp 811-820.

[17] Z.DU,W.GE, M.ZHOU, Singular Perturbations for Third-Order Multipoint Boundary Value Problem. J.D.Equations 218 (2005) pp 69-90.

[18] J.DUGUNDJI AND A.GRANAS, Fixed Point Theory, P.W.N .Warsaw, 1982.

[19] P.W.ELOE AND J.HENDERSON, Nonlinear Boundary Value Problems and a Priori Bounds on Solutions , Siam.J.Math.Anal .Vol 15,N^{0}4, pp 642-646, 1984.

[20] W.FENG AND J.RL.WEBB, Solvability of m-point Boundary Value Problem withnonlineargrowth,J.Math.Anal.App.212(1997),467-480

[21] M.GERA AND.F.SADIRBAEV, Multiple Solutions of a Third Order Boundary Value Problem.Math. Slovaka,42 (1992) N°2,173-180

[22] A.GRANAS,R.GUENTER AND J.LEE, Nonlinear Boundary Value Probems for Nonlinear Ordinary Différential Equations, Dissertationes Mathematicae,.CCXLIV.Warszawa 1985.

[23] A.GRANAS, Sur La Méthode de Continuité de Poincaré, C.R.Acad.Sci, Paris 282 (1976) 983-985.

[24] M.GREGUS. Third Order Linear Differential Equations.D.Reidel . Pulishing .Company, Dordrecht,Boston,Lancaster 1987.

[25] C.P.GUPTA, On Third Order Three-Point Boundary Value problems At Resonance Differential and Intégral Equations.1989, pp07-11

[26] C.P.GUPTA AND V.LAKSHMIKANTHAM, Existence and Uniqueness Theorems for a Third Order Three Point Boundary Value Problem, Nonl.Anal., T.M.A.Vol.16, N11 (1991), 949-957.

[27] C.P.GUPTA,Solvability of multi-point Boundary Value Problem ay resonance(III),Results Math.28(1995),270-276

[28] J.HENDERSON, Three-Point Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations by Matching Solutions. Nonlinear Analysis,Theory, Methods & Applications .Vol 07, N°04, pp 411-417, 1983.

[29] D.D.HAI AND K.SCHMIT, Boundary Value problems for Higher Order, Nonlinear Analysis, Theory, Methods& Applications .Vol 21, N°04, pp 293-305,1993.

[30] S.HU AND V.LAKSMIKANTHAM,Periodic Boundary Value Problems for Second Order Impulsive Differential Systems,Nonl.Anal.13 (1989), pp 75-85.

[31] V.LAKSMIKANTHAM,D.BAINOV,P.SIMEONOV, Theory of Impulsive Differential Equations.World Scientific,Singapor,1989.

[32] E.LIZ AND J.J.NIETO, Periodic Solutions of Discontinuous Impulsive Differential systems.J.Math.Anal.Appl.161(1991),388-394.

[33] E.LIZ AND J.J.NIETO, The Monotone Iterative Methode Technique for Periodic Boundary Value Problems for Second Order Impulsive Differential Equations. Comment.Math.Univ.Carolinae 34 (1993) ,405-411.

[34] C.LU,N.D.KAZARINOFF, J.B.MCLEOD AND WILLIAM C.TROY, Existence of Solutions of the Similarity Equations for Floating Rectangular Cavities and disks.Siam J.Math.Anal.Vol.19,No5 1119

[35] C.LU Existence,Bifurcation and Limite of Solutions of the Similarity Equations for Floating Rectangular Cavities and disks, Siam J.Math.A.Vol 21, No3, (1990) pp 721-728.

[36] RUYUN MA, Multiplicity Results For A Third order Boundary Value Problem At Resonance. Nonlinear Analysis, Theory,Methods £ Application,Vol.32, N°4 ,pp493-499, 1998.

[37] S.A.MARANO,A Remark on a Third Order Three-point Boundary Value Problem, Bull.Austral.Math.Soc.Vol 49, pp1-5, 1994.

[38] M.MARTELLI AND ALFONSO VIGNOLI, On the Structure of the Solutions Set of Nonlinear Equations,Nonlinear Analysis,Theory, Methods £ Application,Vol.7,N°7 , pp 685–693,1983

[39] J.MAWHIN, Topological Degre Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, NSF6CBMS Regional Conférence Series in Math, Vol.40, A.M.S,Providence,RI,1979.

[40] J.B.MCLEOD&JAMES SERRIN,The Existence of Similar Solutions for Some Laminar Boundary Layer Problems,Arch.Rat. Mech.and Anal.31(1968) 288–303.

[41] K.N.MURTY,K.R.PRASAD AND P.V.S.ANAND, On The Use of Differential inequlities in Three-Point Boundary Value Problems. Bulletin of the Institute of Mathematics Academica Sinica.Vol 21, N°03,1993 pp 263-275.

[42] J.NIETO,Periodic Solutions for Third Order Ordinary Differential Equations,Comment.Math.Univ.Carolinae,Vol 32, N°31,pp495-499,1991.

[43] D.O'REGAN Topological Transversality.Application to Third Order Boundary Value Problems,Siam.J.Math.Anal .Vol 18,N^{0}03,pp716-726,1987

[44] D.O'REGAN,Singular and Non Singular,Third Order Boundary Value Problems,Proc.Royal.Iris.Acad. Vol 90A,N°01,pp29-42,1990.

[45] I.RACHUNKOVA,On Certain Multipoint BoundaryValue Problems ,Acta Universitatis Palackiane Olmucensis ,Factas Rerum Naturralium Mathematica XXVIII, Vol 07, N°94,pp 43-60, 1989.

[46] I.RACHUNKOVA AND OLOMOUC, On Some Three-Point Problem for Third order Differential Equations.Mathematica Bohemica N.°01,pp 98-110,1992.

[47] I.RACHUNKOVA AND M.TVRDY, Nonlinear Systems of Differential Inequalities and Solvability of Certain Nonlinear Second Order Boundary Value Problems, J .Inequal. Appl.6 (2001),199-226.

[48] I.RACHUNKOVA AND M.TVRDY, Nonmonotone Impulse effects in Second Order Periodic Boundary Value Problems.Functional Differential Equations.V.9.(2002),No3-4 pp.471-498.

[49] I.RACHUNKOVA AND J.TOMECEK, Impulsive BVP's with Nonlinear Boundary Conditions for the Second Order Differential Equations without Growth Restrictions.J.Math.Anal.Appl.292 (2004) pp 525-539.

[50] I.RACHUNKOVA AND M.TVRDY, Method of Lower and Upper Functions and Their Application to Regular and Singular Boundary value Problems, Nonlinear Differential Equations Mathematical Notes, Miskolc 1 (2000),135-143.

[51] I.RACHUNKOVA AND M.TVRDY, Existence Result for Impulsive Second Order Periodic Problems, Nonlinear Analysis.59 (2004)133-146.

[52] D.R.K.RAO,On Three-Point Boundary Value Problems Associated with Third order Differential Equations.Nonlinear Analysis,Theory Methods &Applications .Vol 05, N°06, pp 669-673,1989.

[53] M.SENKYRIK, Method of Lower and Upper Solutions of Third-Order Three-Point regular Boundary Value Problem. Acta Universitatis Palackiane Olmucensis , Factas Rerum Naturralium Mathematica XXVIII, Vol 105, pp 60-69,1992.

[54] M.SENKYRIK AND OLOMOUC, Existence of Multiple Solutions for Third-order Three-Point Regular Boundary Value Problem Mathematica Bohemica .N°02, pp113-121,1994.

[55] M.Senkyrik, On a Third Order Three-Point Regular Boundary Value Problem Problem. Boundary Value Problem Acta Universitatis Palackiane Olmucensis, Factas Rerum Naturalium Mathematica XXVIII, Vol 100, pp75-86, 1991.

[56] Hu Shouchuan and V.Laksmikantham, Periodic Boundary Value Problems for Second Order Impulive Differential Systems. Nonlinear Analysis.T.M.A.13 (1989),75-85.

[57] Y Wang ,W.Ge, Existence of Solutions for Third Order Differential Equations with Integral Boundary Conditions, Comp and Math.with Appl.53 (2007) 144-154.

[58] C.Xue, Z.Du and W.Ge, Solutions to M-points Boundary Value Problems of Third Order Ordinary Differential Equations At Resonance,J .Appl.Math.& Computing Vol.17(2004), No.1-2, pp.229-244.

[59] C.Xue, X.Cai, A Third-Ordert Three-Point Boundary Value Problem with Nonlinear Terms Depending on the Higher Derivative,int.Journal of Math.Analysis,Vol.1, 2007, No.15, 745-754.

[60] Yoshida.K, Functional Analysis.4th.ed. Springer1974.

[61] Dong Yujun, Periodic Solutions for Second Order Impulsive Differential Systems.Nonlinear Analysis,T.M.A.27(1996),811-820.

[62] E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I : Fixed-Point Theorems,Springer,1986.

Résumé

Cette thèse est consacrée essentiellement à l'étude d'une classe de problèmes d'équations différentielles avec conditions non-locales. Il s'agit d'étudier l'existence d'au moins une solution en utilisant les techniques itératives combinées avec la méthode des sur et sous solutions.

Mots clés : Problèmes aux limites non locaux d'ordre trois, Sur et sous-solutions, Transversalité Topologique, Théorème de Schaefer, Solutions périodiques, Equations différentielles d'ordre trois avec impulsions, Conditions intégrales aux bords, Fonctions 0-epi, Méthode de Lyapunov-Schmidt, Multiplicité de solutions.

Abstract

This thesis is mainly devoted to study a class of third order differential equations with nonlocal Conditions. The existence of at least one solution is obtained using iterative technique combined with upper and lower solution method.

Keywords: Nonlocal third order boundary value problem, Upper and lower solutions, Topological transversality , Schaefer theorem, Periodic solutions, Third order differential equations with impulses, Integral boundary conditions, 0-epi maps, Lyapunov-Schmidt procedure, Solution set, Multiple solutions.

مختصر

هذه الأطروحة تتناول في جملتها دراسة لمعادلات تفاضلية من الدرجة الثالثة ذات قيم حدية غير محلية. طريقة إيجاد على الأقل حل للمعادلة تتركز على استعمال تقنية تكرارية مرفقة بطريقة حل أعلى وحل أدنى.

كلمات مفاتيح المعادلات التفاضلية من الدرجة الثالثة. قيم حدية غير محلية. قيم حدية تكاملية. معادلات تفاضلية من الدرجة الثالثة ذات نوابظ. حلول دورية. نظرية شافير. نظرية كغانة للعرضية التوبولجية. حل أعلى وحل أدنى. طريقة ليابونف شمدث. تعدد الحلول.