

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

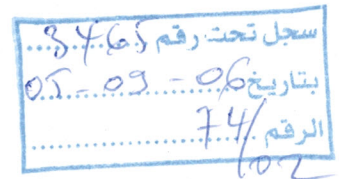
UNIVERSITE ABOU BAKR BELKAID  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

MEMOIRE DE MAGISTER EN ELECTRONIQUE



Spécialité : Signaux et Systèmes

THEME



---

ETUDE DE LA DISTRIBUTION D'ENERGIE TEMPS-FREQUENCE  
DU SIGNAL ELECTROCARDIOGRAMME (ECG)  
EN VUE D'UNE CLASSIFICATION DE PATHOLOGIES

---

Présenté par : Mohammed BACHIRI

Devant le jury composé de

Président :	M. K. GHAF FOUR	Maître de conférence - Univ. de Tlemcen
Examineurs :	M. M.A. CHIKH	Maître de conférence - Univ. de Tlemcen
	M. A. BESSAID	Maître de conférence - Univ. de Tlemcen
Rapporteur :	M. F. BEREKSI-REGUIG	Professeur - Univ. de Tlemcen



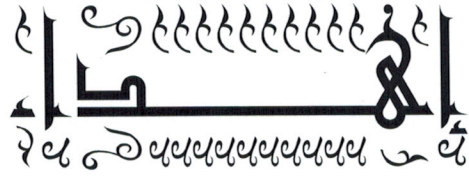
# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

لَبَّ أَوْزَعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي

أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَى وَالْكَافِرِينَ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا

بِرِضَاكَ وَأَتَقربَ إِلَيْكَ بِرِغْمَتِكَ فِي عِبَادَتِكَ

الصَّالِحِينَ



إلى روح والدي العزيز رحمه الله.

إلى والدي الكريمة و الغالية بارك الله في عمرها و أحسن الله إليها.

إلى إخواني و أخواتي كافة

إلى الأطفال حفصة، أسامة، سمية، نسيبة، هداية، كوثر، محمد أيوب، نائلة و إخلاص.

إلى كافة الأصدقاء و الزملاء وخاصة محمد بلحرير و عبد القادر منصور.

إلى كل هؤلاء جميعا و إلى غيرهم ممن ساعدني أو شجعني أو دعا لي بظهر الغيب.

أهدي ثمرة هذا الجهد راجيا من المولى تبارك و تعالى التوفيق و الثواب.

بشيري محمد

# Remerciements

*Le travail que décrit ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire de recherche de Génie Biomédical (GBM) de la faculté des sciences de l'ingénieur de l'université de Tlemcen.*

*Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Monsieur Fethi BEREKSI REGUIG pour sa disponibilité et sa compétence. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour son soutien, ses qualités humaines et sa patience.*

*J'exprime toute ma Reconnaissance à Monsieur Kheiredine GHAFFOUR qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et accepter de présider le jury de soutenance.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur Mohammed Amine CHIKH et à Monsieur Abdelhafid BESSAID d'avoir accepté d'examiner ce travail et de participer au jury.*

*Je tiens aussi à exprimer ma sympathie à tous les membres du laboratoire GBM.*

*Enfin Je remercie toute ma famille et surtout ma mère pour son encouragement et son soutien tout au long des mes études.*

# Table des matières

Résumé.....	6
Introduction.....	7
Abréviations et Notations.....	10
Chapitre 1 : Le coeur et l'électrocardiogramme	13
<b>1 Le système cardiovasculaire.....</b>	<b>14</b>
1.1 La circulation sanguine.....	14
1.2 Le coeur.....	15
1.2.1 Anatomie.....	15
1.2.2 Activité électrique.....	15
<b>2 L'électrocardiographie.....</b>	<b>17</b>
2.1 Principe de l'électrocardiogramme (ECG) .....	17
2.2 Les dérivations d'un électrocardiogramme.....	18
2.2.1 Les dérivations frontales.....	18
2.2.2 Les dérivations précordiales.....	18
2.3 Trace électrique du coeur.....	19
2.4 Aspect morphologique et signification du tracé ECG normal.....	20
2.5 De l'ECG au Holter.....	22
2.6 Bruits affectant l'enregistrement du signal ECG.....	23
<b>3 Les arythmies cardiaques.....</b>	<b>24</b>
3.1 Le rythme cardiaque.....	24
3.2 L'extrasystole ventriculaire (PVC) .....	24
3.3 Les troubles de la fréquence.....	25
3.3.1 La bradycardie.....	25
3.3.1.1 Bradycardie sinusale.....	25
3.3.1.2 Bradycardie d'origine jonctionnelle.....	25
3.3.1.3 Bradycardie d'origine ventriculaire.....	26
3.3.2 La tachycardie.....	26
3.3.2.1 Tachycardie sinusale.....	26

3.3.2.2	Tachycardie auriculaire et nodale AV.....	26
3.3.2.3	Tachycardie ventriculaire (TV).....	26
3.4	Les troubles de la régularité.....	26
3.4.1	Le flutter.....	27
3.4.2	La fibrillation.....	27
3.4.2.1	La fibrillation auriculaire (FA) .....	27
3.4.2.2	La fibrillation ventriculaire.....	27
3.4.3	Les Blocs.....	27
3.4.3.1	Le Bloc auriculo-ventriculaire (AV) .....	27
3.4.3.2	Les blocs de branche.....	28
<b>4</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>28</b>
Chapitre 2 : Les méthodes temps-fréquences		29
<b>1</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>30</b>
<b>2</b>	<b>Transformée de Fourier.....</b>	<b>31</b>
2.1	Formule.....	31
2.2	Inversibilité.....	31
2.3	Principe d'incertitude de Heisenberg.....	32
2.4	Avantages de l'analyse de Fourier.....	33
2.5	Inconvénients de l'analyse de Fourier.....	33
<b>3</b>	<b>Analyse temps-fréquence.....</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>Décompositions atomiques.....</b>	<b>35</b>
4.1	Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) .....	36
4.1.1	Principe.....	36
4.1.2	Reconstruction.....	36
4.1.3	Conservation d'énergie.....	37
4.1.4	La résolution temps-fréquence.....	37
4.1.5	Exemple 1 : Transformée de Fourier à court terme.....	38
4.2	Transformée en ondelettes continue (TOC).....	39
4.2.1	Principe.....	39
4.2.2	Condition d'admissibilité : choix de l'ondelette mère.....	41
4.2.3	Reconstruction.....	42
4.2.4	Quelques Propriétés.....	42

4.2.5	Exemple 2 : transformée en ondelettes continue.....	43
4.3	Transformée en ondelettes discrète (TOD) .....	44
4.3.1	Principe.....	44
4.3.2	L'Analyse Multirésolution (AMR).....	44
4.3.2.1	Cadre théorique.....	45
4.3.2.2	Transformée en ondelettes discrète dans le cadre de l'AMR.....	48
4.3.2.3	Avantages de l'AMR.....	49
4.3.2.4	Algorithme pyramidal.....	49
4.3.2.5	Filtrage par bande.....	50
4.4	Décomposition en paquets d'ondelettes.....	52
4.4.1	Principe.....	53
4.4.2	Bases de paquets d'ondelettes.....	54
4.4.3	Reconstruction.....	55
4.4.4	Sélection de meilleures bases de décomposition en paquets d'ondelettes.....	56
4.5	De la décomposition atomique à la distribution d'énergie.....	56
<b>5</b>	<b>Distributions d'énergie.....</b>	<b>58</b>
5.1	Distribution de Wigner-Ville (DWV) .....	58
5.1.1	Définition.....	58
5.1.2	Exemple 3 : Distribution de Wigner-Ville.....	60
5.1.3	Propriétés.....	60
5.1.4	Interférences.....	61
5.1.5	Exemple 4 : Termes d'interférences.....	62
5.2	Distribution Pseudo-Wigner-Ville (DPWV).....	62
5.2.1	Exemple 5 : DPWV.....	63
5.3	Discrétisation de la DWV.....	65
5.4	Réduction des termes d'interférences.....	65
5.4.1	Utilisation du signal analytique.....	65
5.4.2	Lissage : Distribution Pseudo-Wigner-Ville Lissée (DPWVL).....	66
5.4.3	Exemple 6 : DPWVL.....	67
5.5	Utilité des termes d'interférences.....	67
<b>6</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>70</b>



Chapitre 3 : Classification dans le plan temps-fréquence	71
<b>1 Méthodes de classification</b>	<b>72</b>
<b>2 Formulation d'une procédure de classification supervisée</b>	<b>73</b>
2.1 Notations	73
2.2 Espace de représentation discriminant	75
2.3 Règles de décision	76
2.3.1 Règle du plus proche représentant	76
2.3.2 Règle des k plus proches voisins	77
2.4 Les distances temps-fréquence	78
<b>3 Extraction des paramètres discriminants</b>	<b>79</b>
3.1 Paquets d'ondelettes	79
3.2 Distribution de Wigner-Ville	80
3.2.1 Contraste de Fisher	80
3.2.2 Sélection des paramètres discriminants	81
<b>4 Recherche de la procédure de classification optimale</b>	<b>82</b>
<b>5 Conclusion</b>	<b>83</b>

Chapitre 4 : Etude de la distribution d'énergie temps-fréquence  
du signal ECG 84

<b>1 Introduction</b>	<b>85</b>
<b>2 Description des données</b>	<b>86</b>
<b>3 Prétraitement</b>	<b>87</b>
<b>4 Classification des battements cardiaques par utilisation des paquets d'ondelettes</b>	<b>90</b>
4.1 Phase d'apprentissage	90
4.2 Phase de test	92
4.3 Choix de l'ondelette analysante et de la distance $D$	94
4.4 Résultats et Discussions	96
4.4.1 Recherche de la procédure de classification optimale	96
4.4.2 Capacité de généralisation	98
4.4.3 Robustesse vis-à-vis du bruit	100

<b>5</b>	<b>Classification des battements cardiaques par utilisation de la distribution de Wigner-Ville.....</b>	<b>101</b>
5.1	Calcul des cartes d'énergie.....	101
5.2	Extraction des paramètres discriminants.....	102
5.3	Résultats et Discussions.....	104
5.3.1	Distribution de Wigner-Ville.....	104
5.3.2	Recherche de la procédure de classification optimale.....	105
5.3.3	Classification ou lisibilité ?.....	107
5.3.4	Capacité de généralisation.....	109
5.3.5	Robustesse vis-à-vis du bruit.....	109
<b>6</b>	<b>Interprétations.....</b>	<b>111</b>
6.1	Limitations.....	111
6.1.1	Nature de la décision prise par les règles à base de distances.....	111
6.1.2	Nature des données et choix de l'ensemble d'apprentissage.....	111
6.2	Filtrage implicite par paquets d'ondelette.....	114
<b>7</b>	<b>Comparaison.....</b>	<b>114</b>
<b>8</b>	<b>Remarque sur la programmation.....</b>	<b>117</b>
	<b>Conclusion et Perspectives.....</b>	<b>118</b>
	<b>Annexe A : Rappels mathématiques.....</b>	<b>120</b>
	<b>Annexe B : Ondelettes Orthogonales.....</b>	<b>123</b>
	<b>Annexe C : Sélection de la meilleure base de décomposition en paquets d'ondelettes pour la classification supervisée.....</b>	<b>128</b>
	<b>Annexe D : Fenêtres de Pondération.....</b>	<b>133</b>
	<b>Annexe E : Base de données MIT-BIH.....</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie.....</b>	<b>141</b>

# Résumé

L'*électrocardiogramme* (ECG) est un signal physiologique qui permet d'explorer l'activité électrique du cœur en enregistrant les courants d'actions cardiaques transmis à la surface du corps, c'est l'examen le plus couramment pratiqué pour le diagnostic des affections cardiaques. L'étude que décrit ce mémoire porte sur la caractérisation des signaux ECG par des distributions d'énergie temps-fréquence et temps-échelle en vue de les classer automatiquement suivant les pathologies qu'ils présentent. Deux types de distributions sont étudiées, la première est construite à partir des coefficients des paquets d'ondelettes (temps-échelle), la seconde est la distribution de Wigner-Ville (temps-fréquence). Pour évaluer la pertinence de telles représentations une procédure de classification basée sur l'application de la règle du plus proche représentant est mise en œuvre. Celle-ci requiert le choix d'une mesure de distance et la définition d'un représentant pour chaque classe d'apprentissage. Deux classes de signaux ECG sont étudiées : celle des battements normaux (NOR) et celle des battements ventriculaires prématurés (PVC).

Les expérimentations menées dans le cadre de cette étude ont montré l'importance du choix du couple (représentation, distance) pour optimiser les performances de classification. La réduction de dimensionnalité qui est faite dans le cas des paquets d'ondelettes par l'algorithme LDB a permis d'obtenir à la fois un temps de calcul réduit et un filtrage implicite du bruit affectant le signal ECG. Cette dernière propriété est fortement souhaitable dans les systèmes de classification travaillant dans un environnement clinique où la présence de bruit est une caractéristique commune. Quant à la distribution de Wigner-Ville, malgré que la présence des termes d'interférences n'a pas altéré les performances de classification, la capacité de généralisation et la robustesse vis-à-vis du bruit ont été relativement faibles comparés avec celles obtenues par les paquets d'ondelettes.

**Mots clés :** ECG, distributions d'énergie, paquets d'ondelette, transformation de Wigner-Ville, classification.

# Introduction

L'électrocardiogramme (ECG) est l'examen le plus couramment pratiqué pour l'analyse des arythmies cardiaques. Très souvent, l'ECG est complété par un examen similaire d'une durée de 24 heures appelé « Holter », permettant la détection des arythmies qui n'apparaissent pas nécessairement au cours des quelques secondes de l'enregistrement ECG. L'étape importante dans l'identification d'une arythmie est la classification des battements cardiaques, en effet, la classification de plus de 100 000 battements (correspondant à un enregistrement Holter) est une tâche très coûteuse en temps et nécessite plus d'expérience et d'attention, d'où la nécessité de développer une procédure de classification automatique.

On retrouve dans la littérature plusieurs approches visant à classer les battements ECG, dont les différences tiennent premièrement, au choix de descripteurs caractérisant l'ECG, morphologie des formes d'ondes [YEA90] [HTU93] [CHA04], caractéristiques d'intervalles (durée du complexe QRS, durée de l'onde T,...) [YEA90] [HPT97] [CHA04], coefficients d'ondelettes [KRI03] [FRO04] cumulant d'ordres supérieurs [OSO01], polynômes d'Hermite [LAG00], et en deuxième lieu au choix de la méthode de classification utilisée, l'analyse discriminante linéaire [SEN95] [CHA04] [FRO04], réseaux de neurones à rétropropagation [FRO04] [YEA90] [OSO01] carte auto-organisatrice [HPT97].

Le travail que décrit ce mémoire porte sur la caractérisation des signaux ECG à l'aide de distributions d'énergie temps-fréquence et temps-échelle en vue de les classer automatiquement. Deux types de distribution seront étudiés, la première est construite à partir des coefficients des paquets d'ondelettes (temps-échelle) et la seconde est celle de Wigner-Ville (temps-fréquence). Quant à la méthode de classification utilisée, on se contente ici d'une simple règle de décision à base de prototypes et distances et on se concentre d'avantage sur l'évaluation de la pertinence des descripteurs fournis par de telles représentations.

Afin de limiter la complexité du problème on a choisi de se limiter à la reconnaissance de deux classes : la classe des battements cardiaques normaux et celle des battements ventriculaires prématurés (PVC). Cliniquement, cette dernière classe revêt une importance particulière, surtout dans le cadre de l'identification des patients à risque de mort subite rythmique, en effet, lorsque les battements PVC apparaissent en grand nombre ils peuvent constituer une initiation d'une tachycardie ventriculaire.

Ce mémoire se présente en quatre chapitres, les trois premiers chapitres dressent le cadre théorique de notre travail. Dans le premier chapitre on présente succinctement les bases de

l'électrocardiographie ainsi que les arythmies cardiaques susceptibles d'être détectées dans un enregistrement d'électrocardiogramme : ECG.

Le chapitre 2 est un passage en revue des outils de représentation temps-fréquence et temps-échelle que nous utiliserons par la suite. On commence par des rappels sur la transformée de Fourier et ses limitations. L'analyse temps-fréquence est ensuite abordée suivant deux grandes familles de représentations. La première est celle qui s'appuie sur la décomposition linéaire du signal en atomes temps-fréquence : transformée de Fourier à court terme, transformée en ondelettes et enfin la décomposition en paquets d'ondelettes. Pour la deuxième famille qui consiste à déployer l'énergie du signal sur les deux variables : le temps et la fréquence (distribution d'énergie temps-fréquence), on présente son membre le plus connu : la distribution de Wigner Ville (DWV) et ses versions lissées. On montre aussi qu'en partant des décompositions linéaires comme la décomposition en paquets d'ondelettes on peut construire des distributions d'énergie, mais celles-ci restent un cas particulier de cette famille.

Le chapitre 3 porte sur les méthodes de classification dans le plan temps-fréquence. Après avoir fait une brève introduction sur les techniques de classification, on présente la formulation générale d'une procédure de classification supervisée dans le plan temps-fréquence, trois éléments nécessaires sont discutés : la discrimination fournie par l'espace de représentation des signaux à classer, le choix de l'outil mesurant la dissemblance entre les signaux à discriminer et la règle permettant la prise de décision. L'extraction des paramètres discriminants est ensuite abordée, celle-ci est effectuée par l'algorithme de base discriminante locale (Local Discriminant Basis : LDB) dans le cas des paquets d'ondelettes et par le contraste de Fisher dans le cas de la distribution de Wigner-Ville. Le chapitre est conclu en discutant l'optimisation des performances de classification.

Le Chapitre 4 constitue la partie applicative de ce mémoire, il s'agit de mettre en œuvre une procédure permettant la classification automatique des battements cardiaques en utilisant les deux distributions d'énergie citées ci-dessus. Après avoir situé le contexte de notre travail on décrira les données utilisées et les considérations adoptées pour réaliser la procédure de classification. Les résultats correspondants aux différents schémas de classification proposés sont ensuite présentés, interprétés et comparés. Le chapitre se termine par une conclusion en résumant les points essentiels du travail et en mettant l'accent sur les perspectives de recherche.

## Abréviations et Notations

### Transformations

AMR	Analyse multirésolution.
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme.
TOC	Transformée en Ondelettes Continue.
TOD	Transformée en Ondelettes Discrète.
DWV	Distribution de Wigner-Ville.
DPWV	Distribution Pseudo-Wigner-Ville.
DPWVL	Distribution Pseudo-Wigner-Ville Lissée.
TH	Transformée de Hilbert.
$x(t)$	Signal.
$X(\nu)$	Spectre du signal $x(t)$ .
$L^2(R)$	Espace des signaux continus à énergie finie.
$l^2(Z)$	Espace des signaux discrets à énergie finie.
$\ x\ $	Norme $l^2$ du vecteur $x$ .
$X(\nu, \tau)$	Transformée de Fourier à court terme du signal $x(t)$ .
$C_x(a, b)$	Coefficients de la TOC.
$d_x(j, k)$	Coefficients de détails de la TOD.
$a_x(j, k)$	Coefficients d'approximations de la TOD.
$A_j x(t)$	Approximation du signal $x(t)$ à la résolution $2^{-j}$ .
$D_j x(t)$	Détail du signal $x(t)$ à la résolution $2^{-j}$ .
$C_{j,m}$	Paquets d'ondelettes.
$W_x(t, \nu)$	Distribution de Wigner-Ville du signal $x(t)$ .
$\tilde{W}_s$	Distribution de Wigner-Ville normalisée d'un signal $s$ .
$PW_x(t, \nu)$	Distribution pseudo-Wigner-Ville du signal $x(t)$ .
$PWL_x(t, \nu)$	Distribution pseudo-Wigner-Ville Lissée du signal $x(t)$ .
$SP_x(t, \nu)$	Spectrogramme du signal $x(t)$ .
$SC_x(a, b)$	Scalogramme du signal $x(t)$ .
$\psi(t)$	Ondelette mère.
$\hat{\psi}(\omega)$	Transformée de Fourier de $\psi(t)$ .

$\psi^*(t)$	Complexe conjugué de $\psi(t)$ .
$\phi(t)$	Fonction d'échelle.
$\omega$	Pulsation.
$C_\psi$	Constante définie par la condition d'admissibilité.
$W_m$	Fonctions engendrant les bases des paquets d'ondelettes.
$V_i$	Espaces d'approximations.
$W_i$	Espaces de détails.

## Classification

$T$	Ensemble d'apprentissage
$T'$	Ensemble de test.
EA	Ensemble d'apprentissage formé à partir de la base de données MIT-BIH.
ETR	Ensemble de test réduit formé à partir de la base de données MIT-BIH.
ETE	Ensemble de test étendu formé à partir de la base de données MIT-BIH.
MDC	Coordonnées les plus discriminantes (Most Discriminant Coordinates).
$D$	Distance.
$I$	Entropie relative ou ( <i>I-divergence</i> ).
$J$	Entropie relative symétrique ou ( <i>J-divergence</i> ).
$Q$	Distance quadratique.
$X$	Espace de représentation initiale des signaux d'entrée.
$E$	Espace transformé.
$F$	Espace des descripteurs pertinents.
$Y$	Espace de réponse.
$X^{(y)}$	Ensemble des signaux de la classe $y$ , représentés dans leur espace initial $X$ .
$E^{(y)}$	Ensemble des signaux de la classe $y$ , représentés dans l'espace $E$ .
$F^{(y)}$	Ensemble des signaux de la classe $y$ , représentés dans l'espace $F$ .
$x_i^{(y)}$	Signal de la classe $y$ , représenté dans son espace initial $X$ .
$e_i^{(y)}$	Signal de la classe $y$ , représenté dans l'espace $E$ .
$f_i^{(y)}$	Signal de la classe $y$ , représenté dans l'espace $F$ .
$\hat{f}^{(y)}$	Prototype représentant la classe $y$ dans l'espace $F$ .
$N_y$	Nombre de signaux constituant la classe $y$ .
$K_{Fisher}$	Contraste de Fisher.
$W^{(y)}$	Distributions de Wigner-Ville moyenne des signaux de la classe $y$ .



# Chapitre 1

Le coeur et l'électrocardiogramme

Nous présentons dans ce chapitre le fonctionnement général du système cardiovasculaire, puis, de manière plus détaillée, le principe de l'électrocardiogramme (ECG). Cette présentation se limite au strict nécessaire pour une bonne compréhension du mémoire. Pour une approche médicale plus rigoureuse voir [DEB97]

## 1 Le système cardiovasculaire [DUB04]

Le système cardiovasculaire assure la circulation du sang dans l'organisme et permet ainsi son alimentation en oxygène et en nutriments. Il est composé du cœur, sorte de double pompe, qui assure la circulation dans deux réseaux complémentaires : celui des artères et celui des veines.

### 1.1 La circulation sanguine

Le réseau artériel de la grande circulation est un circuit à haute pression ; il conduit le sang oxygéné à travers le corps dans des vaisseaux sanguins appelés, selon leurs tailles, artères, artérioles ou capillaires artériels (figure 1.1). Ce dernier niveau est constitué de multiples petites ramifications qui facilitent le transfert de l'oxygène du sang aux organes. Le sang, devenu pauvre en oxygène, revient au cœur dans les veines, puis est envoyé par les artères pulmonaires dans la petite circulation où il est oxygéné dans les poumons.

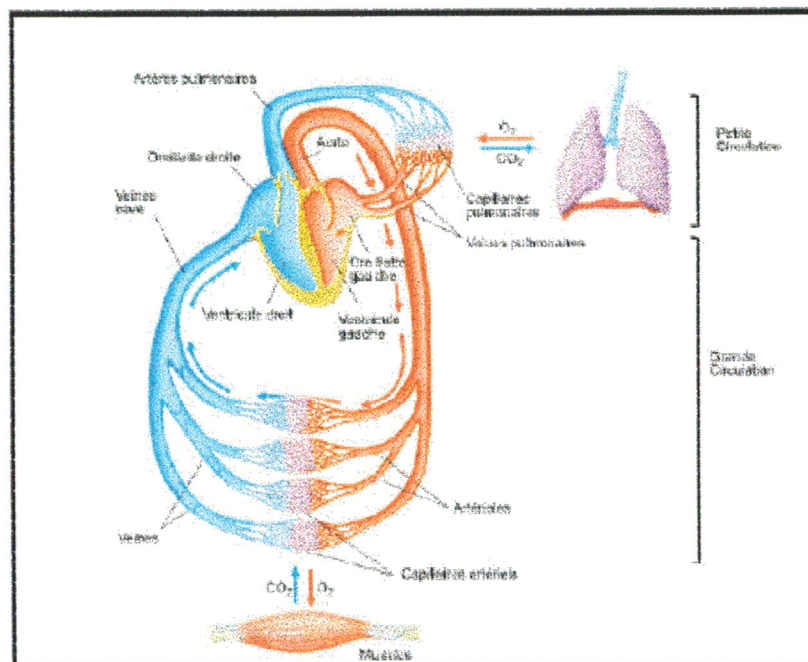


Figure 1.1 : Le système cardiovasculaire.

## 1.2 Le cœur

Le cœur est l'organe moteur du système cardiovasculaire, situé dans le médiastin : région médiane de la cavité thoracique, entre les deux poumons. Nous décrivons dans la suite du chapitre l'anatomie et l'activité électrique d'un cœur sain.

### 1.2.1 Anatomie

Le cœur propulse le sang grâce aux contractions de son tissu musculaire appelé myocarde. Une épaisse cloison le divise en deux moitiés (cœur gauche/cœur droit), et chacune d'elles comporte deux cavités : l'oreillette et le ventricule. Lorsque le cœur est relâché (diastole), le sang pauvre en oxygène arrive au cœur par la veine cave. Il y entre par l'oreillette droite, et en est chassé par sa contraction appelée *systole auriculaire* qui le déplace dans le ventricule droit. *La systole ventriculaire* (contraction des ventricules) propulse à son tour le sang du ventricule droit vers les poumons où il va se charger en oxygène. De retour au cœur par les veines pulmonaires, le sang s'accumule dans l'oreillette gauche puis, lors de la systole auriculaire, passe dans le ventricule gauche qui lors de la systole ventriculaire l'envoie vers les organes par l'artère aorte (figure 1.2). Ces phases de contraction (systole) et de relâchement (diastole) se déroulent dans un ordre bien précis (figure 1.3).

### 1.2.2 Activité électrique

Comme pour tous les muscles du corps, la contraction du myocarde est provoquée par la propagation d'une impulsion électrique le long des fibres musculaires cardiaques induite par la dépolarisation des cellules musculaires. Cette dépolarisation naît dans le haut de l'oreillette droite (le sinus), et se propage ensuite dans les oreillettes, induisant la systole auriculaire (figure 1.4) qui est suivie d'une diastole (décontraction du muscle). L'impulsion électrique arrive alors au noeud auriculo-ventriculaire (AV), où elle subit une courte pause permettant au sang de pénétrer dans les ventricules. Elle emprunte alors le faisceau de His, qui est composé de deux branches principales allant chacune dans un ventricule. Les fibres constituant ce faisceau, complétées par les fibres de Purkinje, grâce à leur conduction rapide, propagent l'impulsion électrique en plusieurs points des ventricules, et permettent ainsi une dépolarisation de l'ensemble du muscle ventriculaire, cette contraction constitue la phase de systole ventriculaire. Puis suit la diastole ventriculaire (décontraction du muscle); les fibres musculaires se repolarisent et reviennent ainsi dans leur état initial

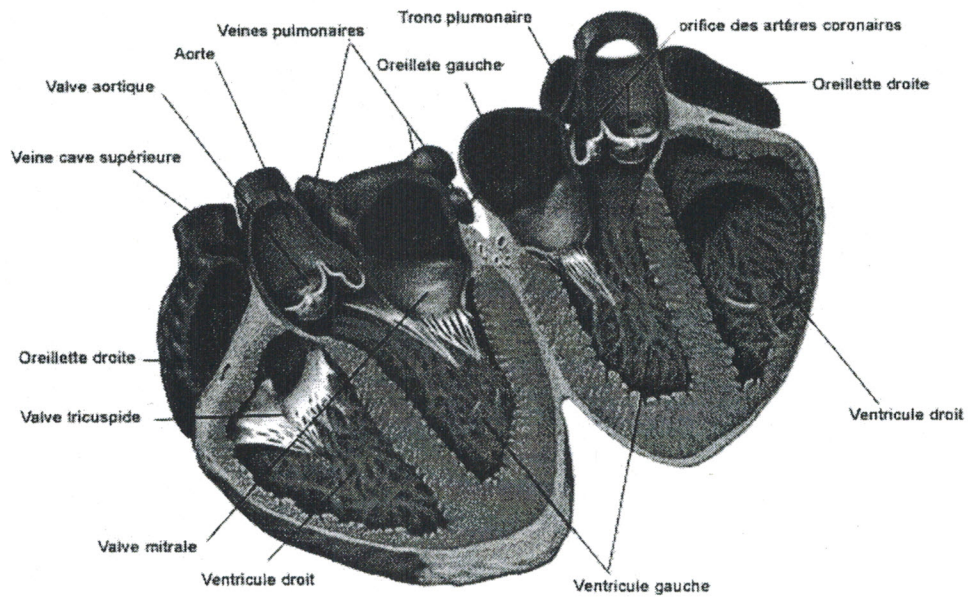


Figure 1.2 : Coupe longitudinale du cœur.

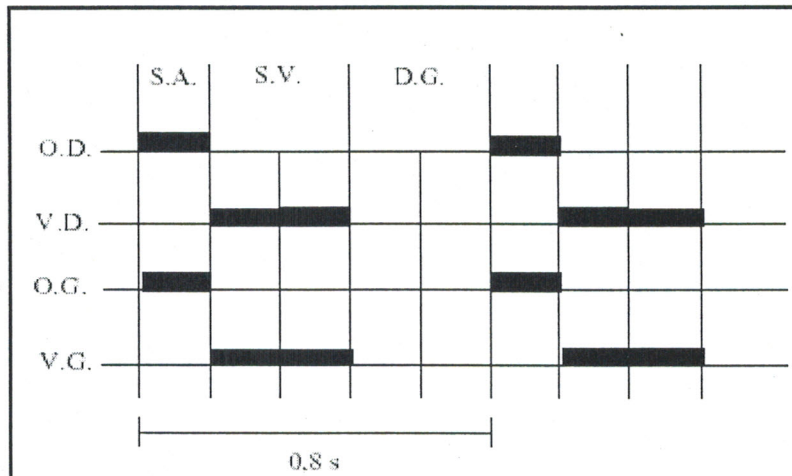


Figure 1.3 : Représentation schématique des diastoles et des systoles au niveau des quatre cavités d'un cœur battant au rythme de 75 révolutions par minute [DEN02].

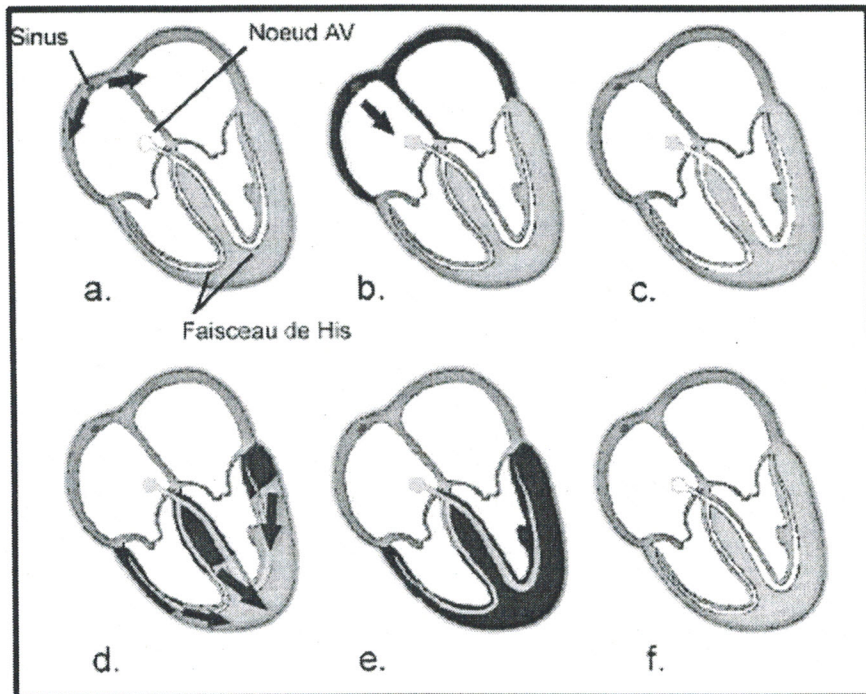


Figure 1.4 : L'impulsion électrique se propage dans le muscle cardiaque et induit sa contraction. Elle prend naissance dans le sinus (a) puis se propage dans les oreillettes (b) entraînant leurs contractions (systole auriculaire). L'impulsion arrive alors au nœud AV. Une courte pause est alors introduite (c) Au passage de l'impulsion électrique (d) les ventricules se contractent à leur tour (e) (systole ventriculaire). Après la diastole (décontraction du muscle) les cellules se repolarisent (f). Le cycle du battement cardiaque est alors terminé et le cœur est prêt pour un nouveau battement.

## 2 L'électrocardiographie

### 2.1 Principe de l'électrocardiogramme (ECG) [DUB04]

Vers 1880, E Marey et Augustus Waller montrèrent que l'activité électrique du cœur, découverte quelques années plus tôt, pouvait être suivie à partir de la peau; et vers 1890, Willem Einthoven réalisa le premier enregistrement cardiographique (électrocardiogramme : ECG). Le principe de l'enregistrement moderne de l'ECG est, à peu près, celui qui fut proposé par Einthoven : grâce à deux électrodes collées à la surface de la peau, on enregistre la différence de potentiel entre deux points diamétralement opposés par rapport au cœur, ce signal étant directement corrélé au déplacement de l'impulsion électrique dans les fibres du muscle cardiaque.

## 2.2 Les dérivations d'un électrocardiogramme

Il existe deux types de dérivations:

### 2.2.1 Les dérivations frontales

Ce sont les dérivations des membres : D1, D2, D3, aVR, aVL, et aVF. Elles explorent l'activité électrique du cœur dans le plan frontal. Elles sont de type unipolaire ou bipolaire

#### a) Dérivations bipolaires [HTML1]

Sont les dérivations D1, D2, D3 (figure 1.5). Elles traduisent la différence de potentiel entre deux membres, l'emplacement des deux électrodes est défini comme suit :

D1 : entre bras droit (pôle -) et bras gauche (pôle +).

D2 : entre bras droit (pôle -) et jambe gauche (pôle +).

D3 : entre bras gauche (pôle -) et jambe gauche (pôle +).

#### b) Dérivations unipolaires [HTML2]

Sont les dérivations aVR, aVL, et aVF (figure 1.5). Une électrode exploratrice est placée à la surface du corps, elle est reliée au pôle positif de l'électrocardiographe. Le pôle négatif de l'électrocardiographe est relié à une électrode neutre ou indifférente (borne centrale de WILSON).

L'électrode exploratrice est placée comme suit :

aVR : sur le bras droit .

aVL : sur le bras gauche.

aVF : sur la jambe gauche.

### 2.2.2 Les dérivations précordiales [HTML2]

Ce sont des dérivations unipolaires fixées en des points définis sur la paroi thoracique. L'électrode exploratrice est reliée au pôle positif de l'appareil, le pôle négatif à la borne centrale.

On les nomme pour les dérivations standards : V1, V2, V3, V4, V5, V6. (figure 1.6).

Elles explorent l'activité électrique du cœur dans un plan approximativement horizontal.

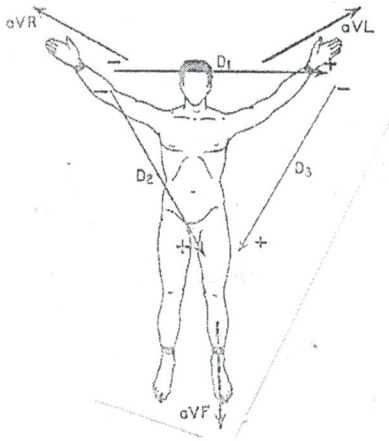


Figure 1.5 : Dérivations frontales

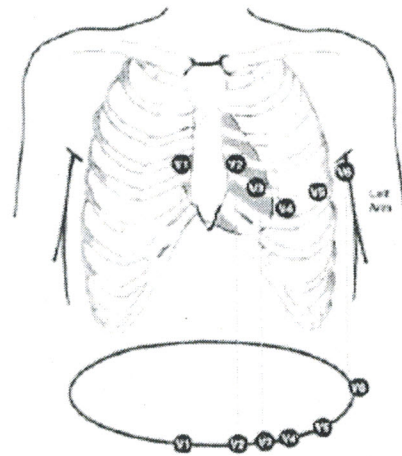


Figure 1.6 : Dérivations précordiales

## 2.3 Trace électrique du cœur

Le battement cardiaque peut donc être suivi grâce à l'enregistrement en surface du signal électrique qui l'accompagne. En effet, chaque phase du battement possède une trace électrique particulière. L'impulsion initiale vient du sinus : elle n'est pas visible sur l'ECG. L'onde électrique qui se propage ensuite dans les oreillettes, entraînant leurs contractions, laisse la trace d'une petite déflexion positive sur l'ECG : l'onde P (figure 1.7a). L'impulsion arrive alors au noeud auriculo-ventriculaire (AV), où se produit la courte pause qui se traduit sur l'ECG par un petit segment plat; puis elle emprunte les voies de conductions rapides (le faisceau de His) pour entraîner la contraction des ventricules, suivie de leur repolarisation. Cette propagation de l'impulsion, et la contraction brève et puissante de l'ensemble du muscle ventriculaire, dessinent sur l'ECG une succession de 3 ondes (Q, R et S) appelé complexe QRS (figure 1.7b). L'onde Q est la première: c'est une onde dirigée vers le bas, et peut être invisible pour certaines dérivations; la seconde est l'onde R : elle est de grande amplitude et dirigée vers le haut; la dernière est dirigée vers le bas : c'est l'onde S. C'est l'ensemble de ces trois ondes qui constitue le complexe QRS. Après chaque complexe QRS, on observe sur l'ECG une onde appelée onde T. Entre cette onde et l'onde précédente, on note une courte pause appelée le segment ST, dont l'étude est très importante pour l'identification de certaines pathologies. L'onde T traduit la phase de repolarisation des cellules constituant les ventricules; c'est un phénomène purement électrique et pendant cette phase le cœur est mécaniquement inactif (figure 1.7c).

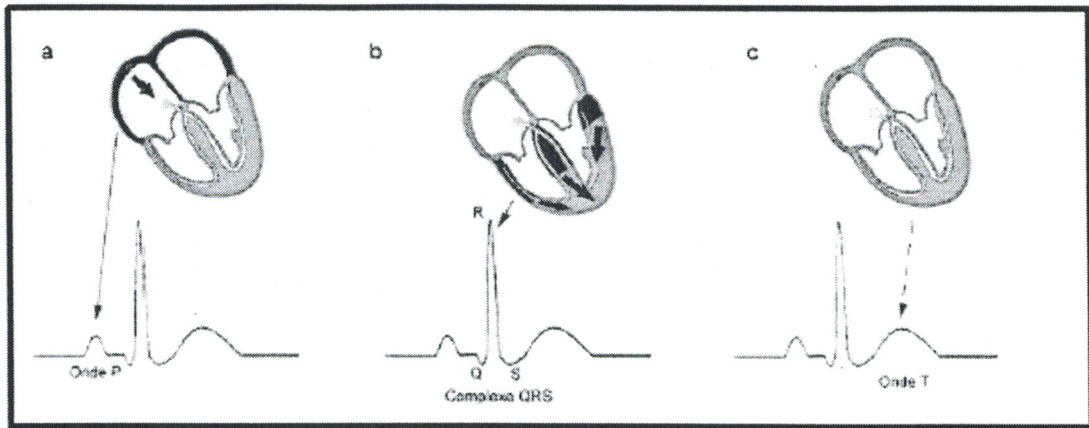


Figure 1.7 : Tracé électrique du cœur.

## 2.4 Aspect morphologique et signification du tracé ECG normal

L'électrocardiogramme est ainsi l'enregistrement sur papier des courants d'action cardiaque transmis à la surface du corps. Le tracé est effectué sur un papier millimétré et quadrillé (figure 1.8). Par convention, le tracé utilise en abscisse l'échelle de temps qui correspond à la vitesse de déroulement du papier et en ordonnée le voltage.

Grâce au quadrillage, on appréciera l'amplitude des ondes enregistrées d'une part en durée, d'autre part en intensité. Ce quadrillage est par convention d'un millimètre sur un millimètre avec un trait renforcé tous les 5 mm :

1 mm (1 petit carreau) horizontal correspond à 1 mV.

1 mm (1 petit carreau) vertical correspond pour un déroulement de 25 mm/sec du papier à 0,04 seconde (soit 0,2 seconde par trait renforcé).

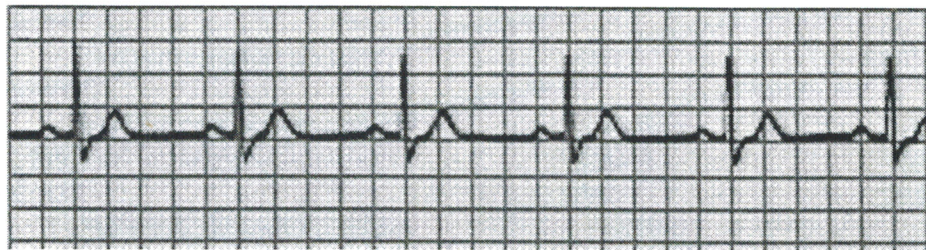


Figure 1.8 : Exemple de trace réel d'un ECG.



Le signal électrocardiogramme se constitue d'un ensemble de déflexions, de segments et d'intervalles [BEN] (figure 1.9).

Le premier repère est **la ligne isoélectrique** (ou la ligne de base) qui correspond à l'absence de l'activité électrique du cœur.

**Onde P** : est une onde positive, résulte de la propagation de l'onde d'excitation qui part du sinus et s'étend dans les oreillettes (dépolarisation auriculaire).

- La durée est inférieure à 0.11 sec
- L'amplitude est inférieure à 0.25mV

**Complexe QRS** : traduit la dépolarisation des ventricules. Il comporte

Une onde Q : déflexion négative

Une onde R : déflexion positive et élancée

Une onde S : déflexion négative

- La durée moyenne du complexe QRS est de 0.08 sec, supérieure à 0.10 sec elle devient pathologique.
- L'amplitude des composantes du complexe QRS varie en fonction de plusieurs facteurs (âge, sexe, race ...) [CHI05].

**Onde T** : c'est une onde lente, généralement positive et asymétrique. Elle traduit la repolarisation des ventricules, son amplitude est plus faible que celle du complexe QRS.

**Onde U** : c'est le témoin d'une repolarisation tardive de zone myocardiques [HED04], elle est de forme variable et demeure invisible dans environ la moitié des cas.

**Intervalle PR** : (ou PQ si l'onde Q existe); c'est le temps de conduction auriculo-ventriculaire, sa durée varie entre: 0.14 et 0.16 sec.

**Intervalle ST** : il est normalement isoélectrique et correspond à l'état de dépolarisation complète des ventricules (période d'inactivité électrique).

**Intervalle QT** : il indique le temps de dépolarisation et de repolarisation des ventricules, sa durée varie avec la fréquence cardiaque.

**Intervalle TP** : se mesure de la fin de T au début de P, il correspond à la diastole cardiaque électrique.

**Intervalle RR :** sépare les sommets de deux ondes R consécutives et définit le rythme ventriculaire.

**Intervalle PP :** sépare les sommets de deux ondes P consécutives et définit le rythme auriculaire.

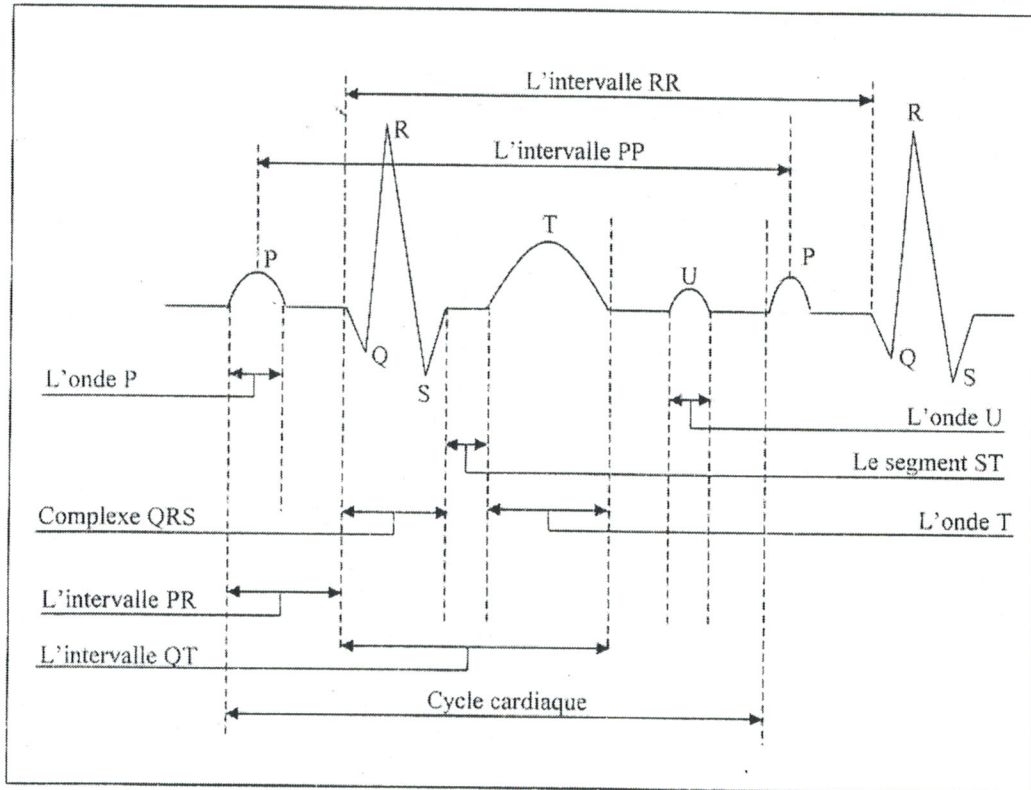


Figure 1.9 : Ondes, Segments et intervalles constituant le signal ECG.

## 2.5 De l'ECG au Holter [DUB04]

En cardiologie, l'examen le plus couramment pratiqué est l'ECG 12 dérivations (voir le paragraphe 2.2), sa durée peut varier de quelques secondes à une ou deux minutes; il permet le diagnostic et la localisation précise de certaines pathologies qui laissent des traces permanentes. En revanche, la courte durée de cet examen est un obstacle à la détection systématique de pathologies qui apparaissent de manière sporadique, comme certains troubles du rythme par exemple.

Pour remédier à cet inconvénient, Norman Holter proposa, au début des années 60, un appareil «portatif» permettant d'enregistrer l'activité cardiaque pendant plusieurs heures; cet enregistrement constitue ce que l'on appelle «l'examen Holter».

Le patient se fait poser l'appareil (figure 1.10) chez un cardiologue et retourne ensuite à ses occupations habituelles. 24 heures plus tard, il revient chez le cardiologue pour se faire enlever l'appareil qui a en mémoire 24 heures d'enregistrements ECG. Les résultats issus de l'analyse des quelque 100 000 battements que compte l'enregistrement permettent ainsi de diagnostiquer une plus grande gamme de pathologies que l'ECG hospitalier. En outre, la longueur de l'enregistrement autorise par exemple le suivi du rythme cardiaque durant les phases diurne et nocturne.

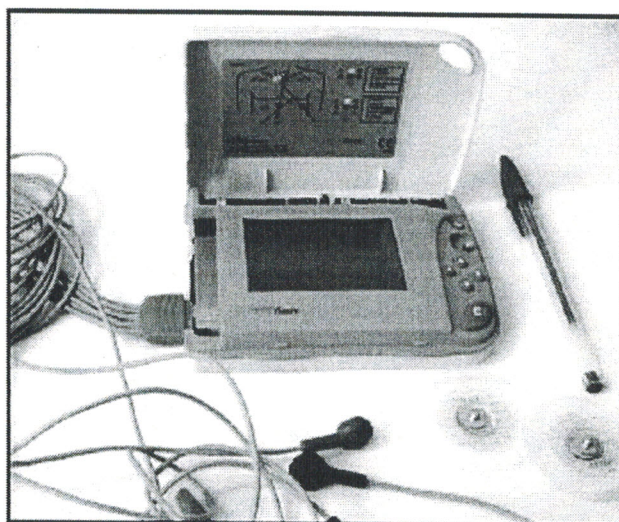


Figure 1.10 : Photographie d'un boîtier de holter d'électrocardiogramme.

## 2.6 Bruits affectant l'enregistrement du signal ECG

L'enregistrement du signal ECG est généralement contaminé avec différentes sources de bruits. Celles-ci peuvent perturber les caractéristiques du signal utile, parmi ces bruits on peut citer : [HAD97]

- L'électromyogramme (EMG) : Qui est dû aux variations de potentiel engendrées au sein des tissus musculaires.
- L'ondulation de la ligne de base : La ligne de base est la ligne d'équilibre de l'activité cardiaque, elle doit être isoélectrique. Des ondulations de très basses fréquences dues aux mouvements du patient ou au mauvais contact des électrodes peuvent perturber cette ligne.
- Interférences du réseau 50Hz.

## 3 Les arythmies cardiaques [DUB04]

### 3.1 Le rythme cardiaque

L'étude du rythme cardiaque se fait à partir du repérage des ondes R; ce rythme est caractérisé par deux propriétés : *la fréquence* des ondes R, exprimée en nombre de battements par minute (bpm), et leur *régularité*. En l'absence de toute pathologie, le rythme est régulier et sa fréquence est comprise entre 60 et 100 bpm la journée et 40 et 80 bpm la nuit. Hors de ces limites, il peut y avoir *trouble du rythme* qui doit faire l'objet d'une étude approfondie pour définir une éventuelle pathologie sous-jacente.

Les paragraphes suivants présentent sommairement les principaux troubles du rythme (troubles de la fréquence et troubles de la régularité). Le battement dit extrasystole ventriculaire sera présenté en premier lieu, vu son apparition dans pratiquement tous les enregistrements ECG.

### 3.2 L'extrasystole ventriculaire

Les extrasystoles ventriculaires (premature ventricular contraction :PVC) ce sont des battements anormaux ; s'observent sur presque tous les enregistrements. Bien que leur présence n'indique aucune pathologie particulière, si leur nombre par minute est supérieur à 6, elles peuvent être un signe précurseur d'une tachycardie ventriculaire. Celle-ci, constitue une pathologie majeure (voir ci-dessous le paragraphe 3.3.2.3). Contrairement aux battements normaux qui ont pour origine la dépolarisation des cellules sinusales, le battement PVC naît de la dépolarisation spontanée d'un petit groupe de cellules ventriculaires, appelé *foyer ectopique ventriculaire*. L'impulsion électrique créée n'emprunte pas la voie normale de conduction (faisceau de His), et se propage donc plus lentement dans les ventricules. Le tracé d'un battement PVC est caractérisé par deux propriétés : (figure 1.11).

- l'onde R n'est pas précédée d'une onde P, puisqu'il n'y a pas eu d'activité auriculaire préalable.
- et la durée du complexe QRS est supérieure à la durée d'un complexe QRS normal.

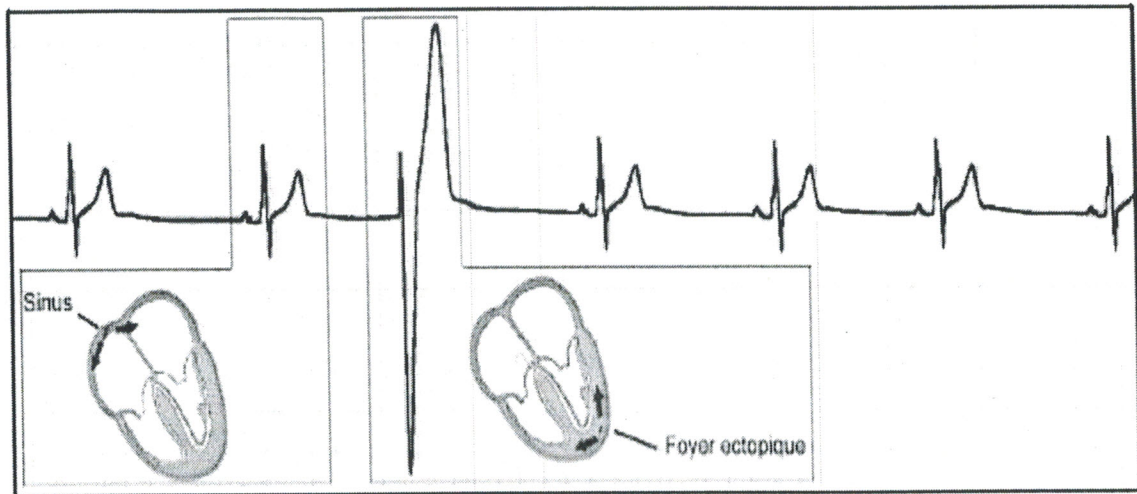


Figure 1.11 : L'extrasystole ventriculaire.

### 3.3 Les troubles de la fréquence

Un rythme cardiaque régulier est normal lorsqu'il est compris en journée entre 60 et 100 bpm, et entre 40 et 80 bpm pendant la nuit. Hors de ces limites, on parle de *bradycardie* lorsqu'il est trop lent, et de *tachycardie* lorsqu'il est trop rapide.

#### 3.3.1 La bradycardie

La bradycardie est caractérisée par une fréquence cardiaque inférieure à 60 bpm ; elle est dite d'origine sinusale, jonctionnelle, ou ventriculaire, selon le site d'initiation de l'impulsion électrique à l'origine des battements considérés.

##### 3.3.1.1 Bradycardie sinusale

Elle est caractérisée par la présence systématique d'une onde P avant les complexes QRS car l'origine de la contraction ventriculaire reste la dépolarisation du sinus et des oreillettes.

##### 3.3.1.2 Bradycardie d'origine jonctionnelle

En cas de dysfonctionnement du sinus, le noeud AV peut assurer le rôle de pacemaker (stimulateur cardiaque) de secours à une fréquence de l'ordre de 30 à 60 bpm (battements par minute). L'impulsion électrique prend alors naissance dans le noeud (AV) et suit le chemin de conduction habituel : la morphologie des ondes QRS est identique à celle du battement normal; en revanche, l'onde P peut être absente ou, si elle est présente, peut être désynchronisée de la systole ventriculaire. Ce rythme est appelé *rythme d'échappement jonctionnel*.

### 3.3.1.3 Bradycardie d'origine ventriculaire

Lorsque les deux noeuds de dépolarisation se ralentissent, la stimulation cardiaque peut être assurée par un groupe de cellules du muscle ventriculaire (*foyer ectopique ventriculaire*); le rythme devient alors une succession de PVC à une fréquence très lente, entre 15 et 40 bpm, appelé *rythme d'échappement ventriculaire*. Le complexe QRS devient large avec une morphologie anormale.

### 3.3.2 La tachycardie

À l'inverse de la bradycardie, la tachycardie est caractérisée par une fréquence supérieure à 100 bpm ; elle peut être d'origine sinusale, auriculaire ou ventriculaire.

#### 3.3.2.1 Tachycardie sinusale

La tachycardie sinusale correspond à un rythme sinusal dont la fréquence est comprise entre 100 et 180 bpm; on observe avant chaque complexe QRS, une onde P normale.

#### 3.3.2.2 Tachycardie auriculaire et nodale AV

L'origine de la tachycardie auriculaire est un foyer ectopique auriculaire, il s'agit d'un groupe de cellules situées dans les oreillettes, qui se dépolarisent spontanément et plus rapidement que le sinus, prenant ainsi sa place. On observe une onde P de forme inhabituelle.

La tachycardie nodale AV a pour origine la décharge régulière d'un foyer ectopique localisé dans le noeud AV. Dans ce cas la fréquence des battements peut atteindre 250 bpm. Contrairement à la tachycardie auriculaire aucune onde P ne précède les complexes QRS car il n'y a pas d'activité auriculaire avant le battement.

#### 3.3.2.3 Tachycardie ventriculaire (TV)

La tachycardie ventriculaire est causée par un ou plusieurs foyer(s) ectopique(s) ventriculaire(s) (qui se dépolarisent à tour de rôle). Les battements ont donc la forme d'extrasystoles ventriculaires très rapprochées.

## 3.4 Les troubles de la régularité

L'absence de régularité des battements cardiaques est une caractéristique du rythme importante pour le diagnostic. Elle est souvent associée à un trouble de la production ou de la conduction de l'impulsion électrique (foyers ectopiques, blocs, ...).

### 3.4.1 Le flutter

Dans le cas du flutter auriculaire la fréquence de l'onde P peut atteindre 300 bpm, voire davantage. A cette fréquence, le noeud auriculo-ventriculaire ne parvient pas à conduire toutes les impulsions électriques vers les ventricules. L'activité auriculaire s'inscrit sous forme d'ondes F en "dents de scie" dont la fréquence est de 300 bpm. Les complexes QRS se répartissent de façon régulière selon des sous-multiples de 300 : 150, 100, 75 bpm [HTML3].

### 3.4.2 La fibrillation

#### 3.4.2.1 La fibrillation auriculaire (FA)

Pour la fibrillation auriculaire le rythme sinusal est remplacé par de multiples foyers autonomes, dont les rythmes se superposent et atteignent le centre nodal de façon anarchique. La réponse ventriculaire est donc irrégulière La ligne de base est remplacée par des ondulations irrégulières [HTML3].

#### 3.4.2.2 La fibrillation ventriculaire

C'est une désynchronisation de l'activité ventriculaire. Chaque fibre myocardique se contracte à un rythme propre. Le tracé montre des oscillations irrégulières et rapides de la ligne de base [HTML3].

### 3.4.3 Les Blocs

Le bloc est un exemple de problèmes de conduction. C'est un défaut localisé de propagation de l'impulsion électrique dans le tissu cardiaque. Lorsqu'il est complet, c'est-à-dire que l'absence de conduction est totale, des pacemakers de réserve comme un foyer ectopique auriculaire, ou le noeud AV, peuvent prendre le relais et entraîner des bradycardies ou tachycardies, comme étudié au paragraphe précédent. A l'inverse, lorsqu'il apparaît de manière sporadique, suivant le cas, il peut se manifester par des troubles du rythme: on observe alors une irrégularité.

#### 3.4.3.1 Le Bloc auriculo-ventriculaire (AV)

L'impulsion électrique se propage correctement au niveau des oreillettes mais elle n'est pas transmise aux ventricules. On distingue habituellement trois types de blocs AV :

1) Un bloc AV d'ordre 1 :

PR = 0.21 sec.

Chaque onde P est suivie d'un complexe QRS.

2) Un bloc AV d'ordre 2 :

Le tracé ECG présente de temps en temps des ondes P isolées, non suivies de complexes QRS.

3) Un bloc AV d'ordre 3 :

Plus souvent un QRS large.

Fréquence autour de 40 bpm, régulière.

### 3.4.3.2 Les blocs de branche

➤ **Bloc de branche gauche (BBG)**

Élargissement de QRS.

Absence d'onde Q et onde R large exclusive en D1, aVL et V6.

Onde T s'opposant à l'onde R.

➤ **Bloc de branche droit (BBD)**

Durée de QRS = 0.12 sec.

Rythme sinusal.

L'onde S large en D1, aVL et V6.

L'onde T négative en V1 et V2.

## 4 Conclusion

Nous avons donné dans ce chapitre une description globale et abrégée de l'activité électrique du cœur. L'électrocardiogramme (ECG) est l'enregistrement graphique de cette activité, il constitue l'examen cardiologique le plus effectué cliniquement, car il est peu coûteux et surtout non invasif. L'analyse des caractéristiques définissant le signal ECG est très utile dans le cadre de la détection des arythmies cardiaques, ces dernières ont été décrites à la fin de ce chapitre.



# Chapitre 2

## Méthodes Temps-Fréquence

# 1 Introduction

Un signal est le support physique d'une information. Il peut donc être d'origine très variée (électrique, acoustique, optique, physiologique ...) mais au-delà de cette diversité, c'est généralement l'évolution temporelle d'une grandeur, recueillie à la sortie d'un ou plusieurs capteurs [FLA98]. Le traitement du signal consiste à extraire l'information pertinente contenue dans le signal et la manipuler de différentes manières pour qu'elle se prête bien à des tâches ultérieures de décision (détection, estimation, compression, classification ...). Ce traitement se fait classiquement soit dans l'espace temporel : espace de représentation initiale, soit dans l'espace fréquentiel [LAR03].

Dans l'espace temporel le signal est analysé par des caractéristiques simples (formes d'ondes, amplitude, ...), ou plus complexes comme la mesure des similarités entre signaux en utilisant par exemple la fonction d'auto-corrélation. Si le signal a une composante aléatoire, les moments statistiques temporels du signal (moyenne, énergie ...) sont analysés [LAR03]

Pour de nombreuses opérations de traitement du signal la représentation offerte par l'espace temporel ne permet pas une caractérisation suffisante du signal. Si on prend l'exemple d'un *chirp linéaire* (signal modulé linéairement en fréquence et à amplitude constante (For. 2.1), il est difficile à partir de sa représentation temporelle (figure 2.1) de connaître le support fréquentiel ou le type de modulation (linéaire, parabolique...) contenue dans le signal [AFGL97].

$$x(t) = e^{i2\pi(\nu_0 t + (\beta/2)t^2)} \quad \text{For. 2.1}$$

où  $\beta$  est la pente de modulation.

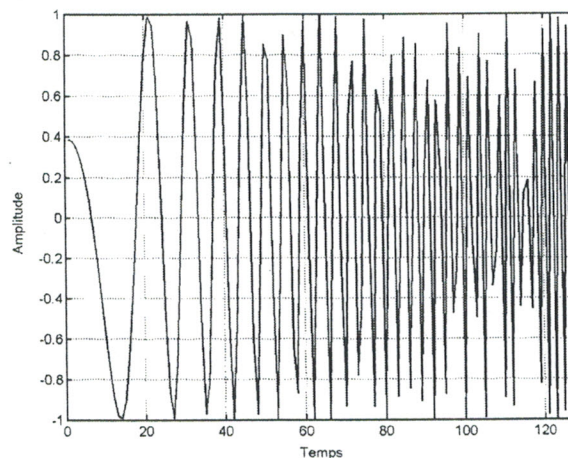


Figure 2.1 : Chirp linéaire.

L'espace fréquentiel offre une nouvelle représentation qui permet de mettre en évidence les caractéristiques fréquentielles du signal. L'outil le plus connu et utilisé pour passer de l'espace temporel à l'espace fréquentiel est la transformée de Fourier.

## 2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier joue un rôle prépondérant dans l'analyse et le traitement des signaux. Lors de cette transformation linéaire le signal est décomposé sur la base des exponentielles complexes ( $e^{i2\pi\nu t}$ ) [LPA03]. Le résultat obtenu (appelé spectre) permet alors de rendre compte de la composition fréquentielle du signal original.

### 2.1 Formule

La transformée de Fourier d'un signal continu  $x(t)$  est définie par :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{For. 2.2}$$

$X(\nu)$  : représente le spectre complexe de  $x(t)$ .

Pour que la transformée de Fourier existe, le signal doit être de carré sommable, c'est à dire d'énergie finie ( $x \in L^2(\mathbb{R})$  voir l'annexe A): [BRI01].

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{fini} \quad \text{For. 2.3}$$

En pratique, cette condition est toujours remplie puisque la mesure est faite sur un temps fini [BRI01].

### 2.2 Inversibilité

Une des propriétés essentielles de la transformée de Fourier est son inversibilité. On peut reconstituer le signal  $x(t)$  à partir de son spectre complexe par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad \text{For. 2.4}$$

La transformée de Fourier inverse permet d'interpréter  $x(t)$  comme une superposition d'ondes sinusoïdales de toutes les fréquences possibles, et les amplitudes associées à ces fréquences représentent les importances respectives des diverses ondes sinusoïdales [MAX00][BRI01].

### 2.3 Principe d'incertitude de Heisenberg.

Le principe de Heisenberg stipule qu'on ne peut obtenir à la fois une résolution infiniment bonne en temps et en fréquence : il y a un compromis à réaliser entre les deux. Plus une fonction  $x(t)$  est bien localisée en temps, c'est-à-dire qu'elle a de bonnes propriétés de décroissance quand  $|t|$  tend vers l'infini, moins sa transformée de Fourier  $X(\nu)$  sera bien localisée en fréquence. Ce principe est traduit mathématiquement par ce que l'on appelle *l'inégalité de Heisenberg-Gabor*. [FLA98] [LCA04]:

$$\Delta_x \Delta_\nu \geq \frac{1}{4\pi} \quad \text{For. 2.5}$$

où :  $\Delta_x$  représente la durée utile du signal.

$\Delta_\nu$  représente la bande de fréquence utile du signal.

La localisation en temps (mesurée par  $\Delta_x$ ) se fait au détriment de la localisation en fréquence (mesurée par  $\Delta_\nu$ ), et réciproquement.

On peut illustrer cette formule par une fonction particulière appelée gaussienne (For 2.6), et qui a la particularité que sa transformée de Fourier est encore une gaussienne (figure 2.2):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{For. 2.6}$$

La différence entre les deux largeurs montre bien le principe : Au plus on localise en temps, au moins on localise en fréquence [DBF03]. Notons que cette fonction donne le meilleur compromis autorisé par le principe d'Heisenberg [LCA04], à savoir

$$\Delta_x \Delta_\nu = \frac{1}{4\pi} \quad \text{For. 2.7}$$

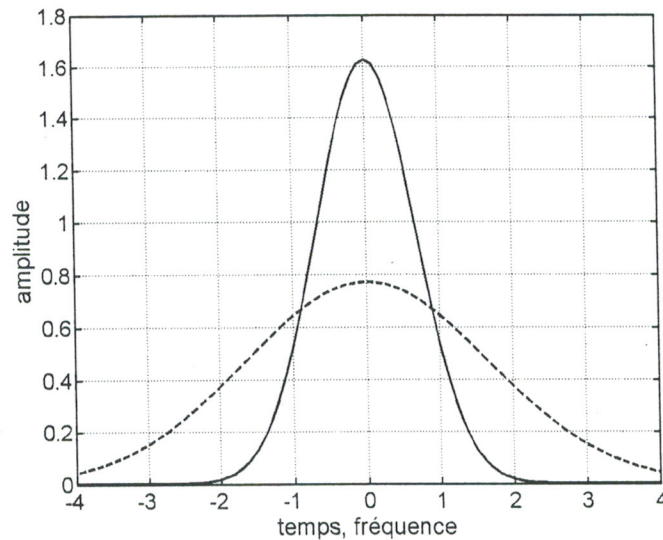


Figure 2.2 : Fonction gaussienne (en pointillé) et sa transformée de Fourier (trait plein)

## 2.4 Avantages de l'analyse de Fourier [FLA98]

L'analyse de Fourier basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier est incontournable en théorie et traitement des signaux pour de multiples raisons :

- 1) L'universalité du concept de fréquence sur lequel elle repose, que ce soit dans des domaines s'intéressant à des ondes physiques (acoustiques, optiques ...) ou reposant sur certaines périodicité d'événements (économie, biologie ...). Une description fréquentielle fournit un complément indispensable à la seule description temporelle qui est généralement insuffisante pour l'analyse.
- 2) La structure mathématique elle-même de l'analyse de Fourier, qui se prête naturellement à des transformations communes comme le filtrage linéaire.
- 3) l'ensemble de ces avantages conduit au développement de nombreux algorithmes, de processeurs, d'appareils permettant une analyse fréquentielle, conférant ainsi à celle-ci une notoriété d'usage.

## 2.5 Inconvénients de l'analyse de Fourier [BRI01]

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs inconvénients qui ne permettent pas une analyse satisfaisante de toutes les sortes de signaux :

- 1) Manque de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est à dire son spectre, mais ne permet

pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une information *globale* et non *locale*, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux stationnaires (voir l'annexe A), mais le devient pour des signaux non stationnaires. Par exemple, des perturbations sur l'axe des temps de la fonction  $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$  influencent chaque point sur l'axe fréquentiel (figure 2.3), ce qui signifie que les moments où interviennent ces perturbations ne sont pas connus.

2) La transformée de Fourier n'est pas l'outil adapté à l'étude des signaux dont la fréquence varie dans le temps, exemple : le signal chirp linéaire de la figure 2.1.

3) Pour calculer une valeur de  $X(\nu)$  pour une valeur  $\nu_0$  de  $\nu$  il faut connaître  $x(t)$  pour toutes les valeurs réelles de  $t$ , ce qui est impossible dans le cas de l'analyse en temps réel où le signal est traité au fur et à mesure de l'arrivée des données numériques, ainsi on ne peut pas connaître le spectre même approché, d'un signal dont on ne sait rien sur le futur, puisque des fréquences de toutes valeurs peuvent y apparaître. [GAS]

### 3 Analyse temps-fréquence

La dualité de Fourier rend les deux descriptions, temporelle et fréquentielle d'un signal à la fois nécessaires et insuffisantes. Nécessaires car, même si elles portent la même information, elles la présentent de façon complémentaire. Insuffisantes car, même si elles portent toute l'information, la façon dont elles la présentent est souvent trop éloignée de la réalité physique pour être commodément exploitable. [FLA98]

Afin de remédier à cette insuffisance de représentation, c'est-à-dire le manque d'information temporelle de la transformée de Fourier, la solution sera de quitter l'espace de Fourier pour passer à un espace transformé appelé *espace temps-fréquence* ou *plan temps-fréquence* qui donnera lieu à une représentation *conjointe* en temps et en fréquence permettant un *contrôle instantané* du contenu fréquentiel du signal. Les outils pour atteindre ce but sont appelés techniques d'analyse temps-fréquence. Plusieurs méthodes existent et aucune ne prédomine sur l'autre. Leur utilisation va dépendre de l'application visée et des avantages et des inconvénients de chacune pour faire apparaître les informations recherchées [DUM01].

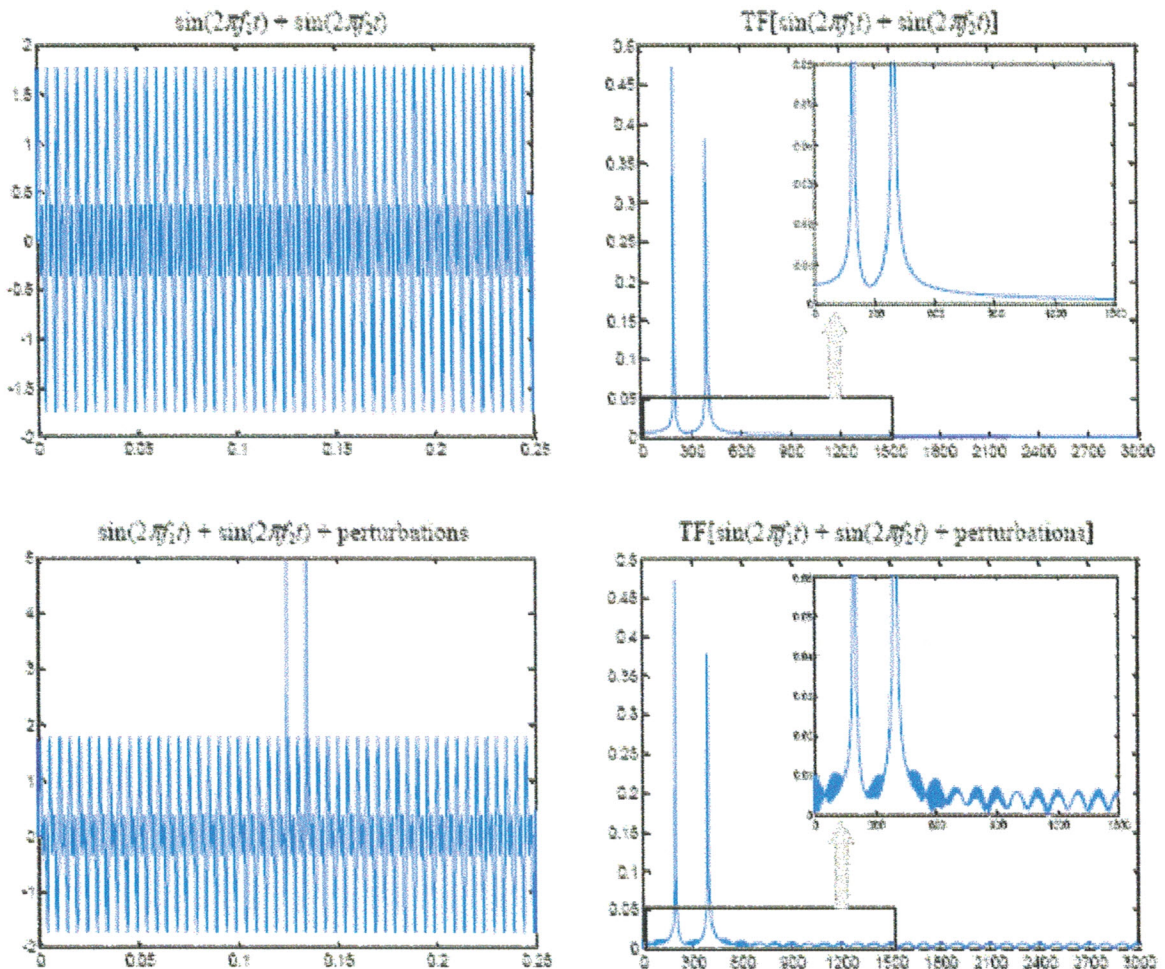


Figure 2.3 : Exemple de transformée de Fourier d'un signal non perturbé  $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ , avec  $f_1 = 200\text{Hz}$  et  $f_2 = 400\text{ Hz}$  puis perturbé aux instants  $t_1 = 0,1249\text{ m sec}$  et  $t_2 = 0,1349\text{ m sec}$ .

Il y a deux grandes façons d'aborder le problème de représentation d'un signal dans le plan temps-fréquence. La première façon se réfère aux travaux de D. Gabor qui a introduit la notion de décomposition d'un signal en grains minima d'information (ou *atomes temps-fréquence*). La deuxième se repose sur la notion de distribution d'énergie temps-fréquence introduit par J. Ville. Ces deux voies demeurent aujourd'hui encore les deux directions de référence de l'essentiel des travaux sur ce sujet [FLA98].

## 4 Décompositions atomiques

Puisqu'un signal ne peut être arbitrairement concentré à la fois en temps et en fréquence, il est tentant de considérer les signaux les plus concentrés comme des constituants

élémentaires de tout signal, des « briques de base » à partir desquelles une forme d'onde quelconque puisse être construite. La règle de construction la plus simple est celle d'une superposition linéaire; les signaux élémentaires, ou « atomes temps-fréquence », jouant alors le rôle d'une base de décomposition et la représentation temps-fréquence est donnée par la collection (continue ou discrète) des poids associés à chacun des atomes [FLA98].

Pour introduire ce concept, commençons d'abord par la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT), appelée aussi Transformée de Fourier à Fenêtre Glissante (Short Term Fourier Transform, STFT en anglais), qui possède une interprétation très intuitive.

## 4.1 Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT)

### 4.1.1 Principe

L'idée de la TFCT est de partager un signal  $x(t)$  en fractions supposées stationnaires. Pour chaque fraction temporelle, une transformée de Fourier est appliquée. Le signal est découpé au moyen d'une fenêtre  $g(t)$  où l'indice  $\tau$  représente le positionnement temporel de cette fenêtre et donc le positionnement du spectre correspondant. La formule suivante résume le principe [DUM01] :

$$X(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g^*(t-\tau) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{For. 2.8}$$

La TFCT est une fonction à deux variables (la fréquence  $\nu$  et le temps  $\tau$  qui fixe l'instant d'analyse) ce qui permet d'obtenir un spectre local de  $x(t)$  autour de l'instant  $t = \tau$ . La transformée se calcule en glissant la fenêtre  $g$  devant le graphe du signal avec un certain *pas d'incrément* de façon à prendre toutes ses valeurs.

### 4.1.2 Reconstruction

Le signal  $x(t)$  peut être reconstruit à partir de sa transformée de Fourier à court terme en utilisant la formule d'inversion suivante [AFGL96] :

$$\forall x(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad x(t) = \frac{1}{E_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu, \tau) g(\tau-t) e^{i2\pi\nu\tau} dt d\nu \quad \text{For. 2.9}$$

à condition que la fenêtre  $g$  soit d'énergie finie :  $E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$



Cette formule (For. 2.9) indique que le signal original  $x(t)$  peut être décomposé en somme d'ondes élémentaires :

$$g_{\tau, \nu} = g(t - \tau) e^{i2\pi\nu t} \quad \text{For. 2.10}$$

qui peuvent être interprétées comme « atomes ». Chaque atome est obtenu à partir de la fenêtre  $g(t)$  par une translation en temps et une translation en fréquence (modulation) [AFGL96]. La figure 2.4 montre deux atomes construits à partir d'une fenêtre gaussienne.

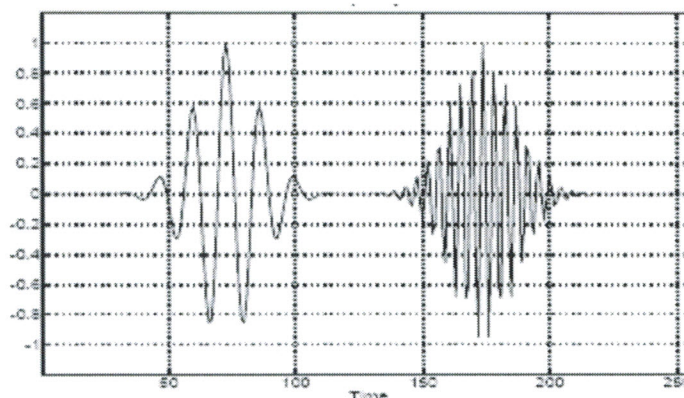


Figure. 2.4 : Deux atomes temps-fréquence construits à partir d'une fenêtre gaussienne

### 4.1.3 Conservation d'énergie [GAS00]

Pour une fenêtre  $g(t)$  d'énergie unité et pour tout signal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu, t)|^2 dt d\nu = E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{For. 2.11}$$

### 4.1.4 La résolution temps-fréquence

Pour la transformée de Fourier à court terme on doit réaliser un compromis entre la résolution temporelle et la résolution fréquentielle. La longueur de la fenêtre est choisie pour respecter l'hypothèse de stationnarité durant la durée de la fenêtre. Ce choix influence directement les propriétés de résolution; plus la fenêtre  $g$  est petite, plus la résolution temporelle est meilleure mais plus la résolution fréquentielle est mauvaise. Si une haute résolution fréquentielle est nécessaire alors une longue fenêtre temporelle  $g$  sera utilisée et il sera difficile de respecter l'hypothèse de stationnarité. [DUM01].

La forme, la longueur de cette fenêtre ainsi que le pas d'incrémentation sont des paramètres fixés avant l'analyse. Ils présupposent une bonne connaissance a priori du signal à analyser [DUM01]

#### 4.1.5 Exemple 1 : Transformée de Fourier à court terme [BRI01]

Pour appliquer la TFCT et montrer l'effet de la largeur de la fenêtre, le signal perturbé de la figure. 2.3 est utilisé. Ce signal représente la somme de deux fonctions sinusoïdales de fréquences  $f_1 = 200\text{Hz}$  et  $f_2 = 400\text{Hz}$  perturbées aux instants  $t_1 = 0,1249\text{ msec}$  et  $t_2 = 0,1349\text{ msec}$ . avec  $K = 4.9$  comme choix arbitraire.

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + K [\delta(t-t_1) + \delta(t-t_2)] \quad \text{For.2.12}$$

Le calcul de la TFCT va être effectué pour trois différentes tailles de fenêtre rectangulaire que l'on applique au signal. Le signal comportant 2048 points, ainsi que les fonctions de fenêtrage sont échantillonnées à 8 KHz. Les différentes tailles de fenêtre sont 20 msec, 10 msec et 5 msec, ce qui correspond à un nombre d'échantillons dans la fenêtre de 160, 80 et 40 respectivement. Sachant que les deux perturbations sont espacées de 80 échantillons, les fenêtres de tailles égales ou supérieures à 80 échantillons ne sont pas assez étroites pour distinguer à quels moments ont lieu ces perturbations.

Au départ (figure 2.5), la fenêtre de temps appliquée au signal est large par rapport à l'intervalle de temps des deux perturbations, si bien que celles-ci interviennent à des instants que l'on ne peut quantifier. Cependant, les deux fréquences se distinguent facilement de par la haute résolution de la fenêtre dans le domaine spectral. Quand la taille de la fenêtre devient de plus en plus petite, on commence à avoir une idée des instants où ont lieu ces perturbations tandis que la résolution en fréquence se dégrade. Pour une taille de fenêtre de 40 échantillons, les deux perturbations se distinguent très facilement mais l'information sur les deux fréquences est perdue.

La transformée de Fourier à court terme, présente l'inconvénient majeur d'avoir une fenêtre de longueur fixe. Il n'est donc pas possible d'analyser simultanément des phénomènes dont les variations peuvent s'opérer sur des durées très variables.

La solution évidente à ce problème consiste à faire varier la taille de la fenêtre d'analyse pour pouvoir saisir les hautes et basses fréquences à une résolution acceptable. De plus, le nombre d'oscillations contenues dans la fenêtre d'analyse doit demeurer constant à toutes les

fréquences [LPA03]. C'est justement le principe de fonctionnement des ondelettes, qui va être décrit dans la section suivante.

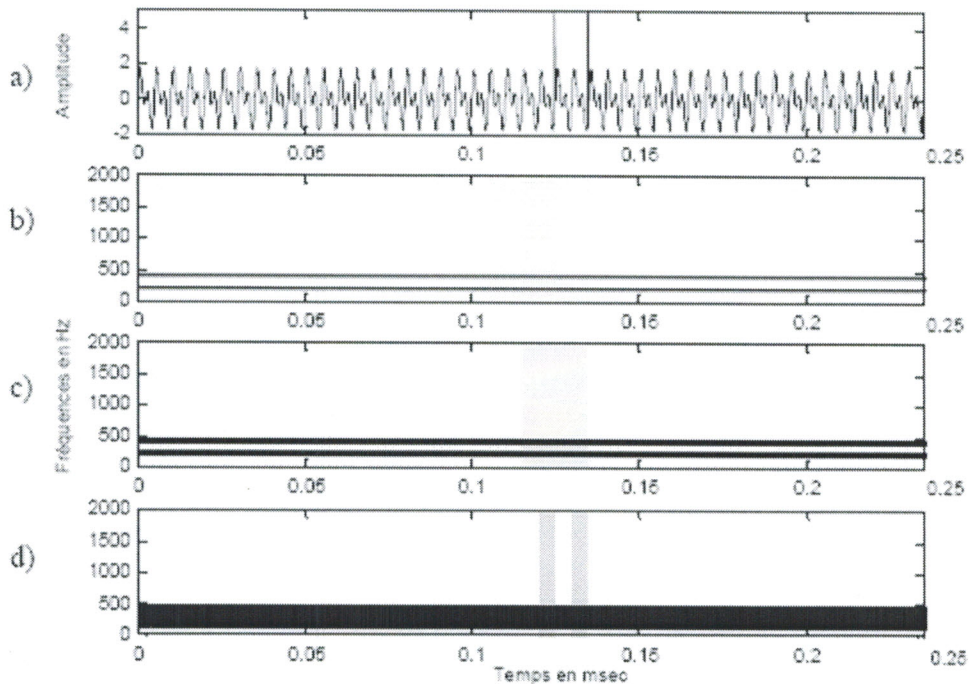


Figure. 2.5 : TFCT du signal original en (a) pour les fenêtres de longueur (b) 20 msec, (c) 10 msec, (d) 5msec.

## 4.2 Transformée en ondelettes continue (TOC)

J. Morlet en 1981, pour l'étude haute résolution des signaux sismiques, propose une transformée (appelée *transformée en ondelettes*) où la taille de la fenêtre est variable, ceci grâce à un paramètre d'échelle. Cette transformée, est une décomposition atomique dont les atomes sont issues d'une même fonction : l'*ondelette mère*, par opérations de *translation* et *dilatation*. [BOU97]

### 4.2.1 Principe

A partir de l'ondelette mère,  $\psi(t)$  on construit une famille de fonctions analysantes :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0 \quad \text{For. 2.13}$$

où le paramètre «  $a$  » est le facteur d'échelle (dilatation), et «  $b$  » est le paramètre de translation.

On définit alors les coefficients de la transformée en ondelettes d'un signal  $x(t)$ , comme étant les produits scalaires :

$$C_x(a, b) = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad \text{For. 2.14}$$

$\psi_{a,b}^*$  est le complexe conjugué de  $\psi_{a,b}$ .

Changer la valeur de  $a$  permet de dilater ( $|a| > 1$ ) ou de contracter ( $|a| < 1$ ) l'ondelette analysante  $\psi_{a,b}$  (propriété d'analyse multi-échelle); changer  $b$  autorise l'analyse de la fonction  $x(t)$  au voisinage de différents points  $b$  (propriété d'analyse locale). En effet d'après la Formule 2.14 lorsque le paramètre d'échelle  $a$  croît, l'ondelette couvre une plus grande fraction du signal permettant d'extraire le comportement à long terme de  $x(t)$ . Au contraire, lorsque  $a$  diminue, la fraction du signal analysée diminue et rend possible l'étude des variations locales à hautes fréquences [GAI00]. Donc  $1/a$  est proportionnel à une fréquence.

Par définition la transformée en ondelettes est une représentation *temps-échelle* plutôt que temps-fréquence, néanmoins pour des ondelettes bien localisées autour d'une fréquence non nulle  $\nu_0$  à l'échelle  $a = 1$ , une interprétation temps-fréquence est possible avec une identification formelle  $\nu = \nu_0/a$ . [AFGL96]

Notons que la différence principale vis-à-vis de la transformée de Fourier à court terme est que lorsque  $a$  est changé, la forme de l'ondelette ne change pas, mais *sa durée et sa largeur de bande* changent toutes deux. (figure.2.6)

La transformée de Fourier à court terme utilise la même largeur de fenêtre pour toutes les fréquences (figure.2.4). En contraste, la transformée en ondelettes utilise *une fenêtre courte aux fréquences élevées et une fenêtre longue aux fréquences basses*, ce qui permet de résoudre au moins partiellement le problème du compromis temps-fréquence

La transformée définie par la Formule 2.14 est appelée transformée en ondelette continue car le paramètre d'échelle  $a$  et le paramètre de position  $b$  prennent des valeurs continues. On verra que ces paramètres peuvent être discrétisés, on obtient alors la transformée en ondelettes discrète.

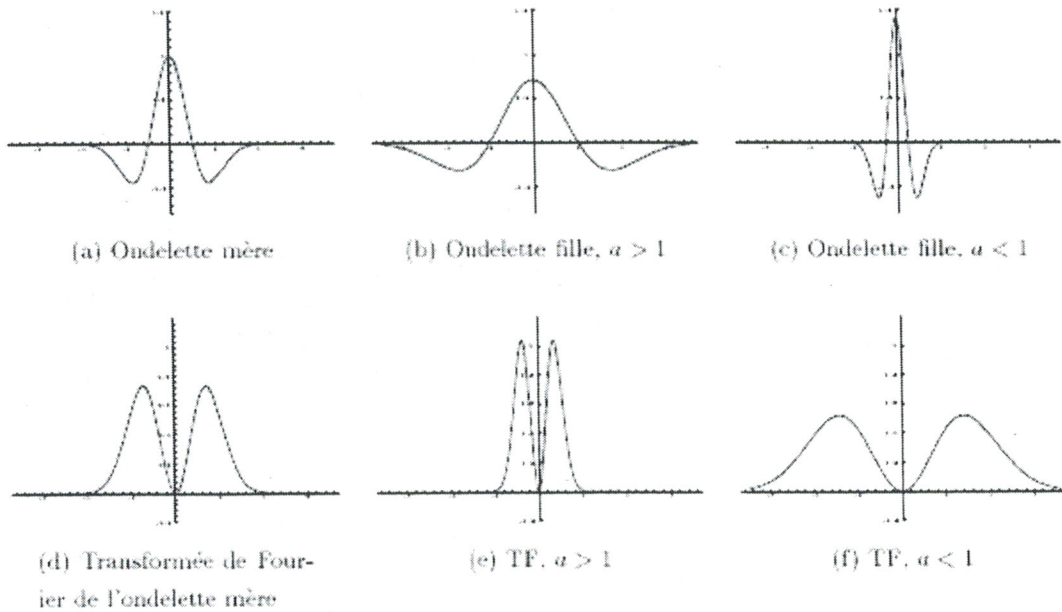


Figure. 2.6 : Exemples d'ondelettes pour plusieurs facteurs d'échelle et leur transformée de Fourier

#### 4.2.2 Condition d'admissibilité : choix de la l'ondelette mère [LPA03]

Le choix de l'ondelette mère n'est ni unique ni arbitraire. Elle doit répondre à certaines conditions [GAI00]. Parmi celles-ci nous citons *la condition d'admissibilité*.

Soit  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , alors

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad \text{For.2.15}$$

Où  $\hat{\psi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(t)$

$\psi(t)$  est soit à valeurs réelles, soit à valeurs complexes

Cette condition permet d'analyser le signal, puis de le reconstruire sans perte d'information. La condition d'admissibilité implique en outre que la transformée de Fourier de l'ondelette est nulle à l'origine des fréquences ( $\omega=0$ ) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \hat{\psi}(0) = 0 \quad \text{For. 2.16}$$

Ceci implique en particulier deux conséquences importantes :

- 1) L'ondelette  $\psi(t)$  doit posséder un spectre de type passe-bande.
- 2) L'ondelette  $\psi(t)$  doit être à moyenne nulle.

$\psi(t)$  est donc une fonction à largeur temporelle finie (fenêtre temporelle) possédant un caractère oscillatoire. On est donc bien en présence d'une *petite onde* : une ondelette. D'autres contraintes supplémentaires de régularité, de décroissance rapide ou de compacité peuvent être imposées sur la structure de l'ondelette mère suivant les besoins. [BOU97]

Le facteur de normalisation  $1/\sqrt{a}$  (For. 2.13) est choisi de sorte que  $\psi_{a,b}(t)$  ait la même énergie pour toutes les échelles  $a$ , c'est-à-dire [QUA01] :

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \text{et } a > 0, \quad \|\psi\|_2 = \|\psi_{a,b}\|_2 \quad \text{For.2.17}$$

### 4.2.3 Reconstruction [LCA04]

Tout comme la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes est inversible.

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{db da}{a^2} \quad \text{For.2.18}$$

Cette égalité est prise dans  $L^2(\mathbb{R})$  ;  $C_\psi$  désigne la constante définie par la condition d'admissibilité (For.2.15).

### 4.2.4 Quelques Propriétés [BRI01]

#### *Linéarité :*

La transformée en ondelettes est linéaire, c'est-à-dire :

$$C_{\alpha x_1 + \beta x_2}(a,b) = \alpha C_{x_1}(a,b) + \beta C_{x_2}(a,b) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \text{ et } \forall (x_1, x_2) \in L^2(\mathbb{R})^2 \quad \text{For.2.19}$$

#### *Translation :*

Une des propriétés importantes de la transformée en ondelettes continue est l'invariance en translation :

$$y(t) = x(t - b_0) \quad \text{alors} \quad C_y(a,b) = C_x(a, b - b_0) \quad \text{For.2.20}$$

**Conservation d'énergie:** [LCA04]

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}) \text{ alors } \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |C_x(a,b)|^2 \frac{db da}{a^2} = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{For.2.21}$$

$C_\psi$  désigne la constante définie par la condition d'admissibilité (For.2.15).

#### 4.2.5 Exemple 2 : transformée en ondelettes continue [BRI01]

Pour appliquer la transformée en ondelettes continue, on va revenir au signal de l'exemple de transformée de Fourier à court terme (For.2.12). L'ondelette choisie est celle de Morlet complexe :

$$\psi(t) = e^{\frac{-t^2}{\alpha^2}} \left( e^{i\pi t} - e^{\frac{-(\pi\alpha)^2}{4}} \right) \quad \text{For 2.22}$$

Le résultat de la transformée en ondelettes continue est représenté dans la figure 2.7. La figure montre une bonne résolution à la fois en temps et en fréquence pour une valeur appropriée de  $a$ . En effet, on peut déterminer à quels instants ont lieu les deux perturbations et les deux fréquences se distinguent aisément.

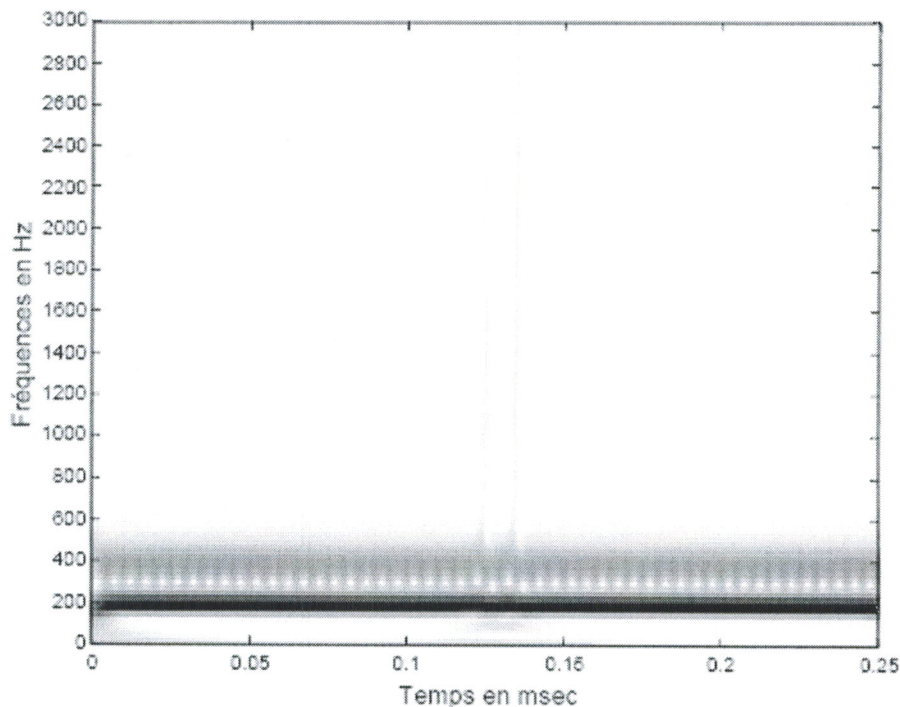


Figure.2.7 : Transformée en ondelettes continue (ondelette de Morlet) du signal de la figure 2.5.

### 4.3 Transformée en ondelettes discrète (TOD)

#### 4.3.1 Principe

La transformée en ondelettes continue fournit une représentation du signal extrêmement *redondante* dans la mesure où deux coefficients voisins partagent de l'information [HIT99], c'est-à-dire que l'on obtient plus de coefficients d'ondelettes qu'il n'en est nécessaire pour décrire le signal de manière exhaustive. [LPA03]

Une manière de réduire cette redondance est de discrétiser le paramètre d'échelle  $a$  et le paramètre de position  $b$  dans la formule.2.14 sur la grille dyadique définie comme suit: [MAN01] :

$$a = 2^j, \quad b = 2^j k, \quad \text{avec } (j, k) \in \mathbb{Z}^2$$

On obtient alors une transformée en ondelettes discrète: [MAN01] (c'est la transformée qui est discrète, et non l'ondelette qui reste une fonction continue [LPA03])

$$d_x(j, k) = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}^*(t) dt$$

Les ondelettes sont localisées aux nœuds de la grille dyadique :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k), \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2$$

et se déduisent de la fonction mère  $\psi(t)$  par dilatation en échelle de 2 et par translation.

Nous allons voir dans la section suivante comment les coefficients de la transformée en ondelettes discrète d'un signal peuvent être obtenus par l'analyse multirésolution.

#### 4.3.2 Analyse Multirésolution (AMR) [MAN01]

L'analyse multirésolution consiste à projeter un signal  $x(t)$  sur une série de sous-espaces orthogonaux de  $L^2(\mathbb{R})$  (les espaces d'approximations  $V_i$  et de détails  $W_i$ ). Nous verrons que la projection d'un signal sur les espaces de détails fournit sa transformée en ondelettes discrète. Les espaces de projections du signal sont entièrement caractérisés par la donnée de deux filtres (passe haut et passe bas). Ces filtres permettent le calcul rapide des coefficients de la



For.2.24



transformée en ondelettes discrète via un algorithme itératif. Nous nous contenterons ici de rappeler des résultats qui nous semblent utiles pour la suite. Le lecteur intéressé par plus de détails peut consulter par exemple [DAU92], [MAL89], [COH00].

### 4.3.2.1 Cadre théorique

#### a) Définition

Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite  $\{V_m\}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes :

- 1)  $\bigcap_m V_m = \{0\}$ ,  $\bigcup_m V_m$  dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $V_{m+1} \subset V_m$
- 2) Pour toute fonction  $x(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  et tout  $m$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $x(t) \in V_m \Leftrightarrow x(2^m t) \in V_0$
- 3) Pour toute fonction  $x(t)$  de  $V_0$  et tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $x(t-k) \in V_0$
- 4) Il existe une fonction  $\phi(t)$  de  $V_0$  telle que l'ensemble  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , constitue une base *inconditionnelle* ou base de *Riesz* de  $V_0$ . C'est à dire qu'il existe deux réels  $A$  et  $B$  avec  $A > 0$ , tels que : pour toute fonction  $x(t)$  de  $V_0$ ,  $x(t) = \sum_k f_k \phi(t-k)$ , avec  $f_k = \langle x(t), \phi(t-k) \rangle$

$$\text{et } A \|x(t)\|^2 \leq \sum_k |f_k|^2 \leq B \|x(t)\|^2$$

#### b) Interprétations

La propriété (1) : Les  $V_m$  sont appelés espaces d'approximations. La première relation  $V_{m+1} \subset V_m$  traduit le fait que la projection dans  $V_{m+1}$  est une approximation plus grossière du signal que sa projection dans  $V_m$ , c'est à dire que l'information contenue dans  $V_m$  est plus riche que celle contenue dans  $V_{m+1}$ .

La propriété (2) montre que l'on peut passer d'un espace d'approximation à un autre par changement d'échelle.

La propriété (3) traduit l'invariance par translation temporelle.

La propriété (4) montre que l'on peut engendrer  $V_0$  par simple translation temporelle d'un même motif de base  $\phi(t)$  [HIT99].

**c) Fonction d'échelle**

La fonction  $\phi$  est appelée fonction d'échelle car elle permet de passer d'un espace d'approximation à un autre, c'est à dire d'une échelle à une autre. La fonction  $\phi$  et ses versions translatées engendrent l'espace  $V_0$ . Un simple changement d'échelle, montre que les sous-espaces  $V_j$  sont engendrées par la dilatée  $\phi_j(t) = \phi(2^j t)$  et ses translatées. Cette famille constitue une base de Riesz de  $V_j$ . En général, on normalise ces coefficients : si  $\|\phi\|_2 = 1$  alors il l'en est de même pour les fonctions génératrices de l'espace d'approximation  $V_j$  :  $\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j} t - k)$ . Pour un signal  $x(t)$  d'énergie finie, les coefficients d'approximations sont définis par :

$$a_x(j, k) = \langle x, \phi_{j,k} \rangle \quad \text{For.2.25}$$

et l'approximation du signal  $x(t)$  à la résolution  $2^{-j}$  correspond à sa projection dans  $V_j$  :

$$A_j x(t) = \sum_k a_x(j, k) \check{\phi}_{j,k}(t) \quad \text{For.2.26}$$

où  $\check{\phi}_{j,k}(t)$  est la base duale de  $\phi_{j,k}(t)$ , c'est-à-dire, la base qui vérifie :

$$\langle \phi_{i,k}, \check{\phi}_{j,k} \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{For.2.27}$$

**d) Espaces de détails**

On définit  $\{W_i\}$ , les ensembles tels que :

$$W_i \oplus V_i = V_{i-1} \quad \text{For.2.28}$$

Les  $W_i$  représentent les espaces de « détails » (ce sont les complémentaires orthogonaux des espaces d'approximations). Cette construction implique directement que les  $W_i$  sont orthogonaux entre eux et que leur somme directe recouvre  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad \text{For.2.29}$$

En fréquence, on observe mieux la complémentarité des deux ensembles ainsi que leur finalité (basses fréquences correspondant à approximation, hautes fréquences à détail) :

Soit  $x(t) \in V_1$ , soit  $u(t)$  tel que  $u(t) = x(2t) \in V_0$ , alors en transformée de Fourier on a :

$$U(\omega) = \int x(2t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{For.2.30}$$

La figure. 2.8 montre la géométrie de ces espaces dans le long de l'axe fréquentiel.

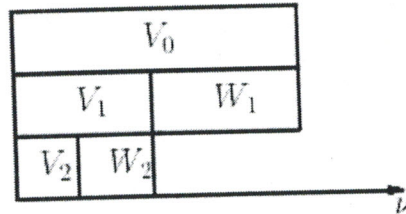


Figure.2.8 : Schéma de la géométrie des espaces de détails et d'approximations

### e) Fonction ondelette

Un des principaux résultats de l'AMR fournit l'existence de la fonction  $\psi$  telle que la famille  $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$  constitue une base de Riesz de  $W_j$ . Cette fonction est appelée ondelette mère.

Pour un signal  $x(t)$  d'énergie finie, les coefficients de détails sont définis par :

$$d_x(j, k) = \langle x, \psi_{j,k} \rangle \quad \text{For.2.31}$$

Le détail du signal  $x(t)$  à la résolution  $2^{-j}$  correspond à sa projection dans  $W_j$  est donné par :

$$D_j x(t) = \sum_k d_x(j, k) \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad \text{For.2.32}$$

où  $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$  est la base duale de  $\psi_{j,k}(t)$ , c'est-à-dire, la base qui vérifie :

$$\langle \psi_{i,k}, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{For.2.33}$$

La formule.2.28 signifie que l'approximation du signal à un niveau  $j$  correspond à une approximation plus grossière complétée par le détail :

$$A_j x(t) = A_{j+1} x(t) + D_{j+1} x(t) \quad \text{For.2.34}$$

Et la formule.2.29 implique que pour tout signal  $x(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$x(t) = \sum_k D_j x(t) = \sum_j \sum_k d_x(j, k) \tilde{\psi}_{jk}(t) \quad \text{For.2.35}$$

Du fait de la structure emboîtée des espaces ( $V_i$  et  $W_i$  sont inclus dans  $V_{i-1}$ ), il existe une relation d'échelle entre ces espaces. Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  définissant ces espaces, elles respectent cette relation que nous présentons au paragraphe suivant.

### f) Relation à deux échelles

Cette relation est appelée ainsi car elle fait intervenir deux échelles distinctes dans son écriture, c'est à dire qu'elle fait le lien entre deux espaces consécutifs.

$V_1 \subset V_0$ , alors  $\phi_{1,0} = \phi\left(\frac{t}{2}\right) \in V_1$  est combinaison linéaire des  $\phi(t-k)$  (base de  $V_0$ ), d'où :

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \exists g(l), \forall t \in \mathbb{R}, \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \phi_{1,0} = \sum g(l) \phi(t-l) = g * \phi(t) \quad \text{For.2.36}$$

La fonction  $\psi$  respecte aussi la relation à deux échelles : En effet,  $\psi(t/2) \in W_1 \subset V_0$  est combinaison linéaire des  $\phi(t-k)$ .

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \exists h(l), \forall t \in \mathbb{R}, \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \psi_{1,0} = \sum h(l) \phi(t-l) = h * \phi(t) \quad \text{For.2.37}$$

Ces relations mettent en évidence l'existence d'un filtre passe haut  $h$  et d'un filtre passe bas  $g$  dont la donnée est équivalente à celle des fonctions ondelette et échelle. Ces filtres nous permettront de réaliser la transformée en ondelettes discrète directement par filtrage du signal en appliquant l'algorithme pyramidal présenté ci-dessous.

#### 4.3.2.2 La transformée en ondelettes discrète dans le cadre de l'AMR

La transformée en ondelettes discrète d'un signal  $x(t)$  est définie par la collection de ses coefficients de détails  $\{d_x(j, k)\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  projections orthogonales de  $x(t)$  dans les espaces définis par l'AMR.

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ x(t) &\rightarrow d_x(j, k) = \langle x, \psi_{j,k} \rangle \end{aligned} \quad \text{For.2.38}$$

Cette transformée peut être inversée à l'aide d'une somme discrète, qui met en jeu la base duale  $\tilde{\psi}$  :

$$x(t) = \sum_j \sum_k d_x(j, k) \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad \text{For.2.39}$$

Les quatre relations données par la définition de l'AMR, confèrent à la fonction  $\psi$  son statut d'ondelette.

#### 4.3.2.3 Avantages de l'AMR

Il y a plusieurs avantages à utiliser l'AMR pour générer l'ondelette  $\psi$  :

- elle permet d'explicitier la base duale.
- elle rend utilisable la formule de reconstruction exacte.
- la base duale est une base d'ondelettes.
- dans le cas d'ondelettes orthogonales, la base duale est la base de départ ( $\tilde{\psi} = \psi$ ). De plus, la transformée d'un signal en ondelettes discrète peut être obtenue par filtrages et décimations successifs. C'est ce que nous allons présenter au paragraphe suivant.

#### 4.3.2.4 Algorithme pyramidal

Nous avons vu que l'AMR d'un signal revient à le décomposer à différentes échelles, en approximations et en détails. S. Mallat [MAL99] propose un algorithme rapide permettant de calculer les coefficients de détails et d'approximations en utilisant des filtrages et décimations successifs. La figure.2.9 présente cet algorithme : Les coefficients de détails correspondant à l'espace  $W_l$  sont obtenus par filtrage passe haut (filtre  $h_l$ ) puis décimation par 2, les approximations sont obtenues de la même manière par filtrage passe bas (filtre  $g_l$ ). Pour obtenir les coefficients de détails aux résolutions supérieures, il suffit de réitérer ces étapes sur les coefficients d'approximations. L'étape d'initialisation consiste à projeter le signal  $x(t)$  sur l'espace  $V_0$ . Dans la pratique, on dispose du signal échantillonné, on choisit alors la solution d'approximer  $a_{0,k}$  par  $x[k]$ .

On peut reconstruire le signal grâce à des filtres  $h_2$  et  $g_2$  selon l'algorithme présenté à la figure.2.10. L'approximation  $a_n$  à un niveau donné  $n$  est la somme des coefficients de détails  $d_{n+1}$  et d'approximations  $a_{n+1}$  du niveau supérieur préalablement interpolés et filtrés.

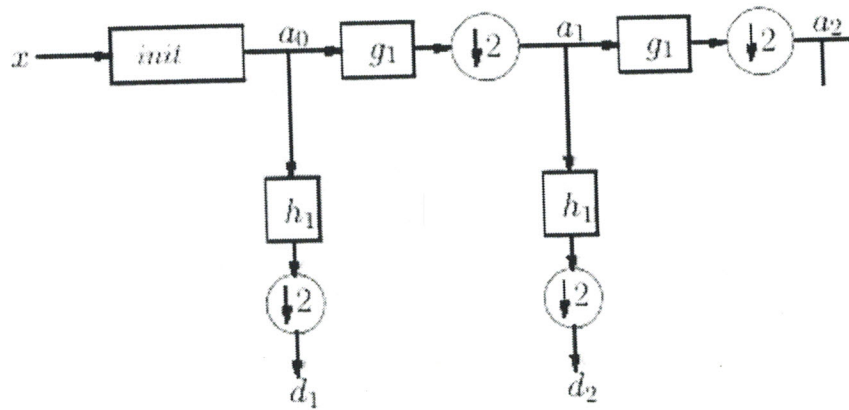


Figure.2.9 : Algorithme pyramidal de Mallat

$a_i$  : Coefficients d'approximations,  $d_i$  : coefficients de détails,  
 $\downarrow 2$  (Décimation) : prendre un élément sur 2.

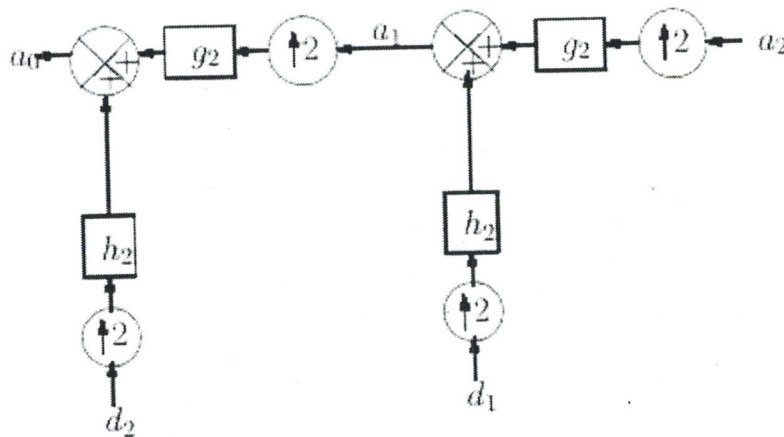


Figure.2.10 : Algorithme de reconstruction du signal.

$\uparrow 2$  (Interpolation) : rajouter un zéro entre deux éléments successifs.

#### 4.3.2.5 Filtrage par bande

D'un point de vue fréquentiel, le signal apparaît comme décomposé suivant différentes bandes. La figure.2.11 présente ce point de vue.

Les filtres  $h_l$  et  $g_l$  sont liés aux filtres exhibés par les relations à deux échelles (For.2.36 et For.2.37). Les conditions imposées par la définition de l'AMR impliquent que le filtre  $g$  soit passe bas, on a de plus :

$$\begin{cases} h_l(k) = \bar{h}(k) = h(-k) \\ g_l(k) = \bar{g}(k) = g(-k) \end{cases} \quad \text{For.2.40}$$

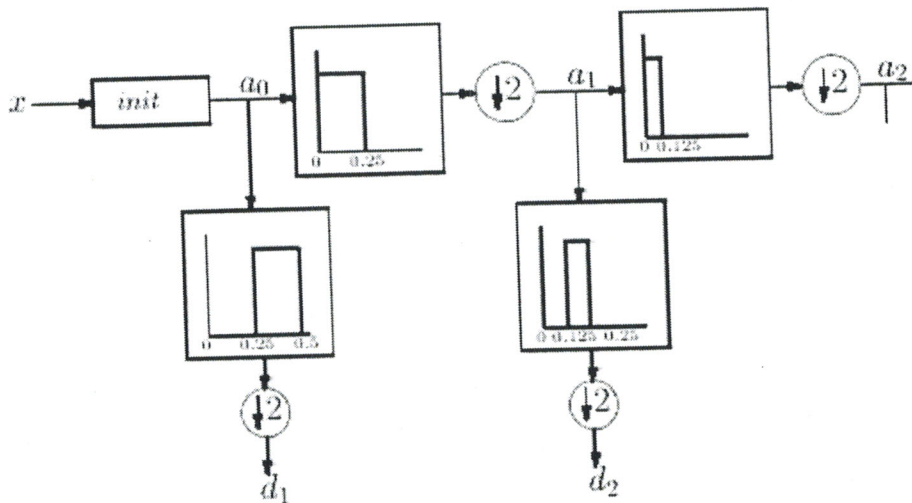


Figure.2.11 : Algorithme pyramidal de Mallat : point de vue fréquentiel

Les filtres de reconstruction  $h_2$  et  $g_2$  sont liés aux fonctions des bases duales. Dans le cas où les bases sont orthonormées nous avons :

$$\begin{cases} h_2(k) = h(k) \\ g_2(k) = g(k) \end{cases} \quad \text{For.2.41}$$

et dans le domaine fréquentiel nous avons la relation « miroir en quadrature » :

$$|H(\nu)|^2 + |G(\nu)|^2 = 1 \quad \text{For.2.42}$$

Les filtres  $H$  et  $G$  sont appelés *filtres miroirs en quadrature* (**QMF**, *Quadrature Mirror Filter*).

La figure.2.12 présente la décomposition en base d'ondelettes du signal  $x(t)$  composé de  $N$  points. L'arbre de décomposition a  $\log_2(N)$  niveaux. A chaque niveau, la résolution temporelle est divisée par 2, au dernier niveau les coefficients de détails sont représentés par un unique point, la résolution temporelle est nulle et la résolution fréquentielle est maximum. Le signal est décomposé en  $N-1$  coefficients de détails et 1 coefficient d'approximation (la composante la plus basse fréquence du signal). La figure.2.13 représente le pavage du plan temps fréquence induit par la décomposition d'un signal  $x \in R^{16}$ .

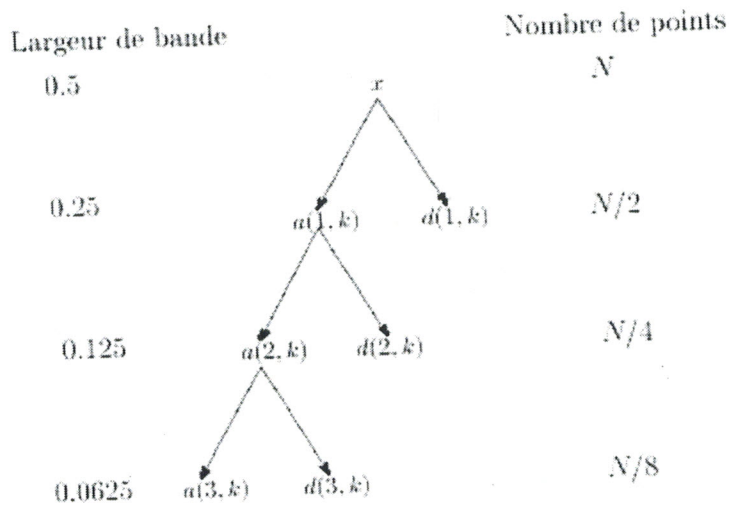


Figure.2.12 : Arbre de décomposition d'un signal sur une base d'ondelettes

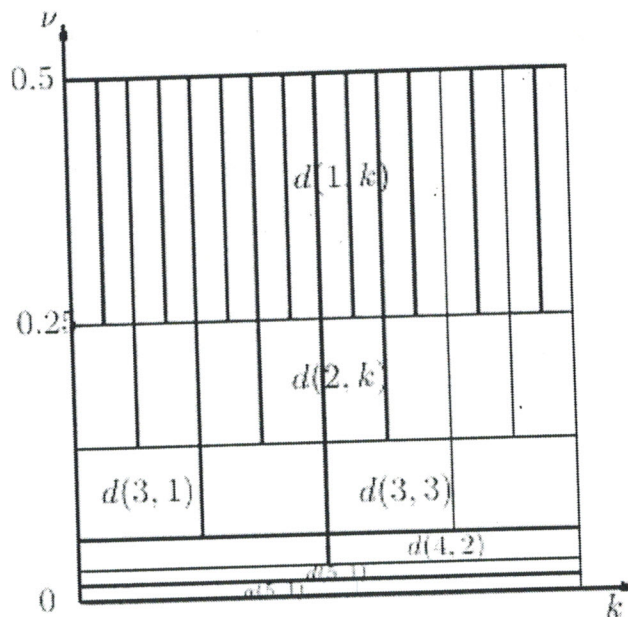


Figure.2.13 : Pavage du plan temps fréquence correspondant à la décomposition d'un signal  $x \in R^{16}$  sur une base d'ondelettes.

#### 4.4 Décomposition en paquets d'ondelettes [MAN01]

La décomposition en paquets d'ondelettes du signal est une généralisation de l'Analyse multirésolution. Les espaces d'approximations sont toujours découpés de la même façon mais les espaces de détails sont eux aussi somme directe de deux sous espaces orthogonaux de résolutions temporelles inférieures (divisées par 2). Nous ne développerons pas ici l'aspect théorique de cette décomposition mais nous nous intéresserons au côté applicatif.



### 4.4.1 Principe

Le principe de la décomposition en paquets d'ondelettes est de réitérer le processus de décomposition d'un signal en approximation et en détails non plus uniquement sur les coefficients d'approximations mais aussi sur ceux de détails. On dispose alors d'un plus grand nombre d'espaces de projection.

La figure.2.14 représente l'algorithme pyramidal étendu permettant d'obtenir les coefficients de décomposition en paquets d'ondelettes. Comme pour le calcul rapide des coefficients de la transformée en ondelettes du signal, on procède par filtrages et décimations successives du signal. Ici, les coefficients de détails sont aussi décomposés.

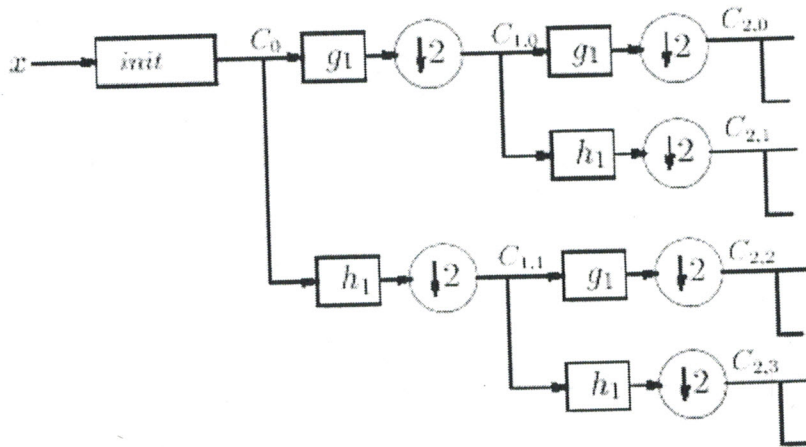


Figure.2.14 : Schéma de l'algorithme de la décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal,

#### a) Notations

$g_l$  et  $h_l$  sont les filtres miroirs en quadrature associés aux fonctions d'échelle  $\phi$  et ondelette  $\psi$ . Les  $C_{j,m}$  dénotent les paquets d'ondelettes. Si le signal à décomposer est de longueur  $n$  chaque paquet  $C_{j,m}$  contient  $n/2^j$  coefficients. Les coefficients des paquets d'ondelettes sont notés  $C_{j,m}(k)$  où  $j$  est le niveau de résolution,  $m$  correspond à la bande spectrale,  $k$  est l'indice de translation, et ils sont obtenus par la décomposition du signal sur les bases engendrées par les fonctions  $W_m$  :

$$C_{j,m}(k) = \langle x(t), 2^{-j/2} W_m(2^{-j}t - k) \rangle$$

For.2.43

$$W_{2m}(t) = 2^{1/2} \sum_k g_k W_m(2t-k) \quad \text{For.2.44}$$

$$W_{2m+1}(t) = 2^{1/2} \sum_k h_k W_m(2t-k) \quad \text{For.2.45}$$

où  $W_0$  correspond à la fonction  $\phi$

$W_1$  correspond à la fonction  $\psi$

### b) Redondance de l'information

La figure 2.15 présente l'arbre binaire de décomposition en paquets d'ondelettes pour un signal  $x \in R^4$ .

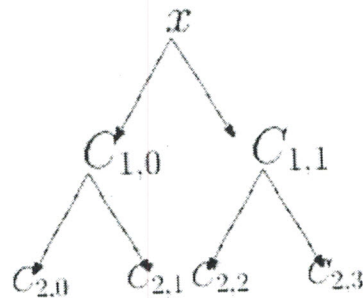


Figure.2.15 : Arbre binaire de décomposition d'un signal en paquets d'ondelettes

A chaque niveau de l'arbre, toute l'information du signal est représentée. A un niveau donné de décomposition, correspond un découpage fréquentiel régulier. Au dernier niveau, chaque fréquence est représentée par un point, on a perdu toute l'information temporelle, on a une décomposition purement fréquentielle du signal. La figure.2.16 montre le pavage du plan temps-fréquence pour un signal  $x \in R^8$  pour chacun des niveaux de l'arbre.

#### 4.4.2 Bases de paquets d'ondelettes

L'arbre binaire de décomposition en paquets d'ondelettes donne donc une représentation fortement redondante du signal. Si l'on souhaite travailler avec une représentation non redondante, il faut choisir une base de paquets, c'est à dire un ensemble de *nœuds* de l'arbre dont la projection dans l'espace temps-fréquence forme une partition. En considérant le découpage fréquentiel induit par la décomposition en paquets d'ondelettes, cela revient à recouvrir l'axe des fréquences sans chevauchement.

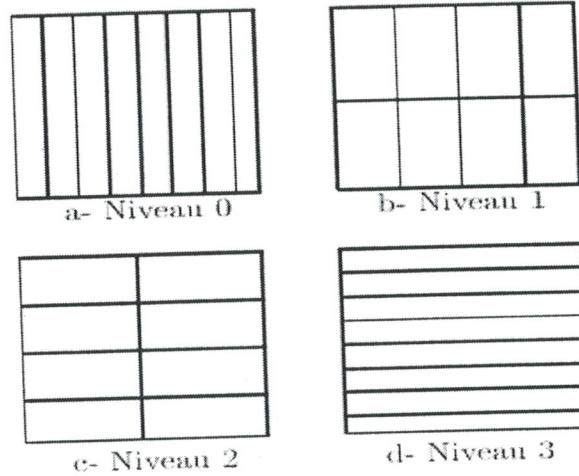


Figure.2.16 : Pavages temps-fréquences correspondant à chaque niveau de l'arbre de décomposition

La figure.2.17 représente un exemple de base de paquets d'ondelettes. Les nœuds choisis dans la constitution de la base sont entourés par des carrés. Les paquets choisis forment bien une partition de l'axe des fréquences (en horizontal sur l'arbre). Le pavage du plan temps-fréquence induit par la base est représenté pour un signal  $x \in R^8$

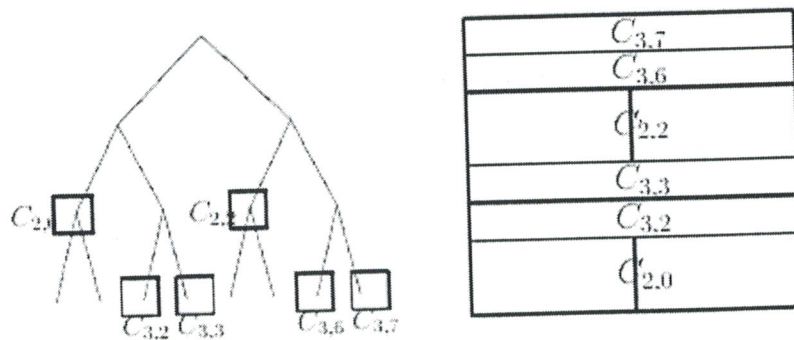


Figure.2.17 : Exemple de base de paquets d'ondelettes et pavage temps-fréquence correspondant.

### 4.4.3 Reconstruction

On peut reconstruire le signal en utilisant les filtres de reconstruction associés aux filtres de décomposition. Si  $\tilde{W}_m$  est la base duale associée aux fonctions  $W_m$ , et B est l'ensemble des indices  $\{j, m\}$  des nœuds sélectionnés dans une base de paquets d'ondelettes, alors :

$$x(t) = \sum_{\{j,m\} \in B} \sum_k C_{j,m}(k) 2^{\frac{-j}{2}} \tilde{W}_m(2^{-j}t - k) \quad \text{For.2.46}$$

#### 4.4.4 Sélection de meilleures bases de décomposition en paquets d'ondelettes

Nous avons vu que la décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal conduit à de nombreux choix possibles de bases, parmi lesquelles une *meilleure base* pourra être déterminée. La sélection de cette meilleure base sera faite en fonction du signal et de l'information recherchée. L'algorithme de sélection de meilleure base de paquets d'ondelettes a été tout d'abord mis en place pour la compression [COI92], ensuite d'autres algorithmes en sont inspirés dans différents domaines d'application (classification [SAI94], détection [HIT99], traitement d'image [MAN01] ...). Dans le cadre de notre application on va utiliser par la suite un algorithme de sélection d'une meilleure base pour la classification appelé algorithme de sélection de la base discriminante locale (*The Local Discriminant Basis Selection Algorithm : LDB*), dont l'objectif est de trouver la base de représentation qui maximise la séparabilité entre les classes d'apprentissage, on trouve dans l'annexe C une présentation détaillée de cet algorithme.

#### 4.5 De la décomposition atomique à la distribution d'énergie

Par opposition aux décompositions (atomiques) linéaires qui décomposent un signal en constituants élémentaires (atomes temps-fréquence), l'objet d'une distribution conjointe d'énergie est de répartir cette dernière sur les deux variables de description (le temps et la fréquence), dans ce cas la question est de trouver une distribution conjointe  $\rho_x(t, \nu)$  telle que l'on ait [FLA98] :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \nu) dt d\nu \quad \text{For.2.47}$$

L'énergie étant par nature une grandeur quadratique, il est donc naturel de chercher des distributions également quadratiques.

Une première solution à ce problème est possible en considérant des sous-produits quadratiques de décompositions linéaires. Nous avons vu (For.2.11 et For.2.21) par exemple que les deux transformées TFCT et TOC d'un signal  $x(t)$  vérifient la propriété de conservation d'énergie totale, pour des normalisations adéquates, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu, t)|^2 dt d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_x(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} = E_x \quad \text{For.2.48}$$

Ceci confère aux deux quantités  $SP_x(t, \nu) = |X(t, \nu)|^2$  définissant le *spectrogramme* et  $SC_x(a, b) = |C_x(a, b)|^2$  définissant le *scalogramme* le statut de la distribution d'énergie  $\rho_x(t, \nu)$  indiquée ci-dessus, ce qui permet au spectrogramme de mesurer l'énergie du signal  $x(t)$  au voisinage temps-fréquence du point  $(t, \nu)$ , et au scalogramme de mesurer cette énergie au voisinage temporel du point  $b$  à l'échelle  $a$ . Pour plus de détails concernant ces deux représentations quadratiques voir par exemple [AFGL96] [FLA98].

En suivant la même analogie on peut définir d'autres distributions, dans le contexte de notre travail on se limite à la distribution déduite des paquets d'ondelettes qui sera utilisée par la suite.

Nous avons vu que la décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal conduit à de nombreux choix possibles de bases, ce qui permet une représentation adaptative (pavage arbitraire du plan temps-fréquence [HIT99] voir figure.2.17) aux caractéristiques du signal ainsi qu'aux objectifs de traitement (classification, compression, ...). Si, en outre, ces bases sont orthonormées, alors, l'énergie globale du signal original est conservée et la reconstruction exacte de ce dernier devient plus aisée. Ces propriétés intéressantes nous incitent à définir une distribution d'énergie à partir des paquets d'ondelettes orthonormales en vue de déployer de façon optimale l'énergie du signal ECG (voir chapitre1) sur le plan temps-fréquence.

En effet, pour un signal discret  $x[n]$  d'énergie finie (c'est-à-dire  $x[n] \in l^2(Z)$  [MMOP01]) on a :

$$E_x = \sum_n |x[n]|^2 = \sum_{\{j,m\} \in B} \sum_k |C_{j,m}(k)|^2 \quad \text{For.2.49}$$

où  $B$  est l'ensemble des indices  $\{j, m\}$  des noeuds sélectionnés dans une base de paquets d'ondelettes orthonormée.

De manière analogue aux cas de spectrogramme et scalogramme, on constate que le terme  $|C_{j,m}(k)|^2$  peut jouer le rôle d'une distribution d'énergie temps-fréquence de telle sorte que:

$$E_x = \sum_{\{j,m\} \in B} \sum_k ETF_x(j, m, k) \quad \text{For.2.50}$$

avec 
$$ETF_x(j, m, k) = |C_{j,m}(k)|^2 \quad \text{For.2.51}$$

Donc  $ETF_x(j, m, k)$  permet de mesurer à l'échelle  $2^{-j}$  l'énergie du signal  $x(t)$  au voisinage temporel du point  $k$  et dans la bande spectrale  $m$ .

## 5 Distributions d'énergie

Les distributions d'énergie discutées à la fin de la section précédente sont obtenues en élevant au carré le module d'une transformée linéaire (TFCT, TOC ou coefficients de paquets d'ondelettes). En effet ces distributions ne constituent qu'un cas très particulier de transformée bilinéaire [FLA98]. Il importe donc de trouver des solutions plus générales à  $\rho_x(t, \nu)$  en lui imposant de satisfaire certaines contraintes. Il est fort souhaitable par exemple d'obtenir les densités d'énergie temporelle  $|x(t)|^2$  et spectrale  $|X(\nu)|^2$  comme distributions marginales de  $\rho_x(t, \nu)$  [FLA98]. C'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, \nu) dt = |X(\nu)|^2 ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, \nu) d\nu = |x(t)|^2 \quad \text{For.2.52}$$

Un grand nombre de distributions satisfont à ces deux conditions, mais beaucoup moins à la contrainte additionnelle *d'invariance par translation en temps et en fréquence*, qui s'exprime comme suit:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \rightarrow \quad \rho_y(t, \nu) = \rho_x(t - t_0, \nu) \quad \text{For.2.53}$$

$$y(t) = x(t) e^{j2\pi\nu_0 t} \quad \rightarrow \quad \rho_y(t, \nu) = \rho_x(t, \nu - \nu_0) \quad \text{For.2.54}$$

La propriété d'invariance par translation a une grande importance, elle signifie que si un signal est déplacé en fréquence ou en temps d'une quantité, la distribution  $\rho_x(t, \nu)$  va être déplacée de la même quantité. Les distributions satisfaisant à ces contraintes additionnelles (For.2.53 et For.2.54) constituent ce qu'on appelle la *classe de Cohen* [FLA98]. La distribution de *Wigner-Ville* est la transformation la plus connue de cette classe.

### 5.1 Distribution de Wigner-Ville (DWV)

#### 5.1.1 Définition

La distribution de Wigner-Ville joue un rôle primordial dans la théorie et la pratique de l'analyse temps-fréquence, pour un signal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  elle est définie par : [AFGL96] :

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau/2) x^*(t-\tau/2) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad \text{For.2.55}$$

ou de façon équivalente par :

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu+\xi/2) X^*(\nu-\xi/2) e^{i2\pi\xi t} d\xi \quad \text{For.2.56}$$

où  $X(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $x(t)$

La distribution de Wigner-Ville peut se voir comme une analyse de Fourier à court terme dans laquelle la fenêtre est continuellement adaptée au signal, puisqu'elle n'est autre que le signal lui-même, renversé dans le temps. En d'autres termes la transformation de Wigner-Ville se résume aux deux opérations suivantes [FLA98]:

- 1) A tout instant  $t$ , multiplication du signal par le conjugué de son 'image en miroir' relativement à l'instant d'évaluation, de façon à former la quantité

$$q_x(t, \tau) = x(t+\tau/2) x^*(t-\tau/2) \quad \text{For.2.57}$$

- 2) Transformation de Fourier de  $q_x(t, \tau)$  sur la variable de décalage  $\tau$ .

Cette distribution fournit une représentation temps-fréquence permettant de mesurer l'énergie d'un signal  $x$  au temps  $t$  et à la fréquence  $\nu$  avec aucune restriction sur les résolutions temporelles et fréquentielles, parce que le fenêtrage sera fait de manière autonome avec le signal lui-même. [DUM01]

En faisant une analogie avec les distributions de probabilité conjointes de deux variables aléatoires, on peut voir  $W_x(t, \nu)$  comme la transformée de Fourier d'une forme acceptable de fonction caractéristique [PIC95] pour la répartition de l'énergie [FLA98], ceci nous permet d'interpréter  $W_x(t, \nu)$  comme une densité de probabilité conjointe, et de comparer les distributions temps-fréquence en utilisant les outils adaptés à la comparaison de distributions de probabilité [DAV00]. Cependant cette interprétation trouve une limitation naturelle imposée par la non positivité de  $W_x(t, \nu)$ , c'est-à-dire, que à l'inverse d'une densité de probabilité qui est toujours positive la distribution de Wigner-Ville peut prendre des valeurs négatives.

### 5.1.2 Exemple 3 : distribution de Wigner-Ville

Si on reprend l'exemple du signal chirp linéaire évoqué au début de ce chapitre (For.2.1) on remarque bien que sa distribution de Wigner-Ville se concentre idéalement sur la variation linéaire de la fréquence (figure 2.18.a). Malheureusement cette meilleure résolution est accompagnée par des valeurs négatives (figure 2.18.b) ce qui constitue une source de difficultés dans l'interprétation de  $W_x(t, \nu)$ .

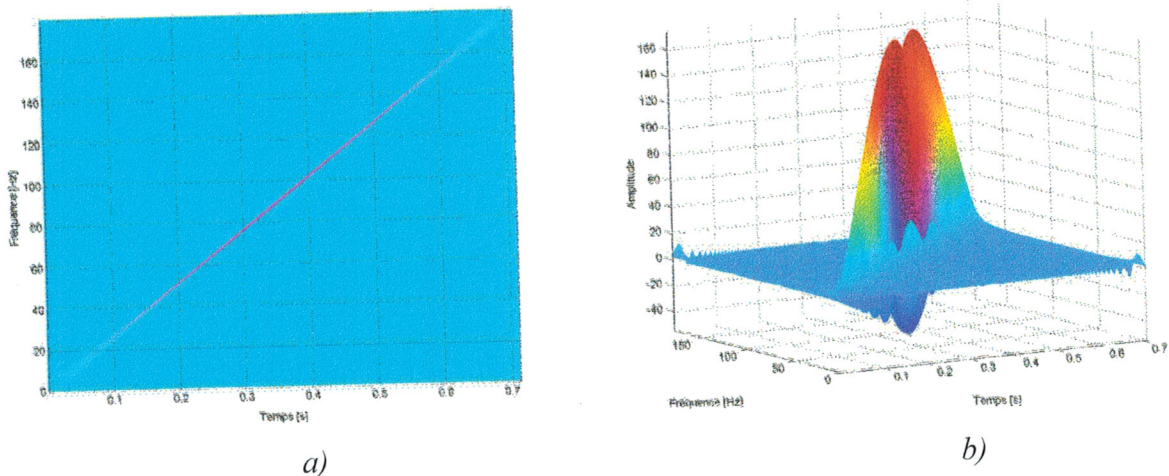


Figure.2.18 Transformée de Wigner-Ville d'un chirp linéaire, a) en deux dimensions, b) en trois dimensions

### 5.1.3 Propriétés

La distribution de Wigner-Ville possède de nombreuses propriétés souhaitables, parmi lesquelles on donne ici les plus importantes. [AFGL96] :

#### 1) Conservation d'énergie

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \nu) dt d\nu \quad \text{For.2.58}$$

#### 2) Propriétés marginales

Les densités d'énergie temporelle  $|x(t)|^2$  et spectrale  $|X(\nu)|^2$  peuvent être obtenues comme distributions marginales de  $W_x(t, \nu)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \nu) dt = |X(\nu)|^2 ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \nu) d\nu = |x(t)|^2 \quad \text{For.2.59}$$



3)  $W_x(t, \nu)$  est à valeurs réelles même si le signal à transformer est complexe

$$W_x(t, \nu) \in \mathbb{R} \quad \forall t, \nu \quad \text{For.2.60}$$

4) **Invariance par translations**

en temps  $y(t) = x(t - t_0) \rightarrow W_y(t, \nu) = W_x(t - t_0, \nu) \quad \text{For.2.61}$

en fréquence  $y(t) = x(t) e^{j2\pi\nu_0 t} \rightarrow W_y(t, \nu) = W_x(t, \nu - \nu_0) \quad \text{For.2.62}$

5) **Invariance par dilatation**

$$y(t) = \sqrt{k} x(kt), \quad k > 0 \Rightarrow W_y(t, \nu) = W_x(kt, \nu/k) \quad \text{For.2.63}$$

6) **Conservation des supports**

en temps :  $x(t) = 0, \quad |t| > T \Rightarrow W_x(t, \nu) = 0, \quad |t| > T \quad \text{For.2.64}$

en fréquence :  $X(\nu) = 0, \quad |\nu| > B \Rightarrow W_x(t, \nu) = 0, \quad |\nu| > B \quad \text{For.2.65}$

7) **Unitarité : (formule de Moyal)**

Cette propriété traduit la conservation du produit scalaire lorsqu'on passe du domaine temporel au domaine temps-fréquence :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \nu) W_y^*(t, \nu) dt d\nu \quad \text{For.2.66}$$

8) Localisation parfaite sur les signaux de type chirp linéaire voir l'exemple ci-dessus (figure.2.18)

5.1.4 Interférences

L'inconvénient majeur de la DWV est la présence de *termes d'interférences* dus à son caractère quadratique. Cela veut dire que la DWV de la somme de deux signaux  $x$  et  $y$  ne se réduit pas à la somme de distributions individuelles  $W_x$  et  $W_y$  (For.2.67), à cause du terme d'interférence  $2 \operatorname{Re}(W_{x,y}(t, \nu))$ .

$$W_{x+y}(t, \nu) = W_x(t, \nu) + W_y(t, \nu) + 2 \operatorname{Re}(W_{x,y}(t, \nu)) \quad \text{For.2.67}$$

avec

$$W_{x,y}(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau/2) y^*(t-\tau/2) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad \text{For.2.68}$$

Malheureusement, ces termes seront présents quelle que soit la distance temps-fréquence entre  $x$  et  $y$ , ce qui perturbe la lisibilité de l'image temps-fréquence de la DWV. On présentera par la suite des solutions pour réduire l'importance de ces termes, mais cela va provoquer en contrepartie une perte des propriétés intéressantes de la distribution (localisation, distributions marginales, unitarité ...) [AFGL96]. On est amené donc à faire un compromis entre ces deux choix antagonistes.

### 5.1.5 Exemple 4 : Termes d'interférences

Si on prend un signal  $x(t)$  constitué par superposition de deux atomes Gaussiens qui sont définis par : [GAS00]

$$\theta_{\nu,b}(t) = e^{-\frac{1}{2}(t-b)^2} e^{i2\pi\nu t} \quad \text{For.2.69}$$

alors

$$x(t) = \theta_{\nu_1,b_1}(t) + \theta_{\nu_2,b_2}(t) \quad \text{For.2.70}$$

La figure.2.19 montre que la distribution de Wigner-Ville de  $x(t)$  est composée de deux distributions douces (relatives à chacun des atomes) et d'un terme d'interférence (relatif à leur interaction). Celui-ci est localisé au milieu géométrique de la droite qui joint le centre temps-fréquence des atomes considérés. Il possède en outre une structure oscillante dont la direction est perpendiculaire à cette droite et dont la fréquence est proportionnelle à la distance entre atomes. Pour un signal constitué de  $N$  composantes la DWV compte  $N(N-1)/2$  termes d'interférences [FLA98].

## 5.2 Distribution Pseudo-Wigner-Ville (DPWV)

Le calcul de la DWV nécessite la connaissance de la quantité  $x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)$  pour  $\tau$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ce qui pose en pratique un problème. Il est alors envisageable de modifier la définition de la DWV en restreignant l'extension en  $\tau$  par l'intermédiaire d'une fenêtre  $h(\tau)$ , opération qui revient à effectuer un lissage fréquentiel (voir ci-dessous la section traitant la réduction des termes d'interférences) puisque :[FLA98] :

$$PW_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu - \xi) W_x(t, \xi) d\xi \quad \text{For.2.71}$$

où  $H(\nu)$  est la transformée de Fourier de la fenêtre  $h(\tau)$

Cette distribution est appelée la *Distribution Pseudo-Wigner-Ville* (DPWV). Puisqu'ils sont de nature oscillatoire, les termes d'interférences seront donc amortis.

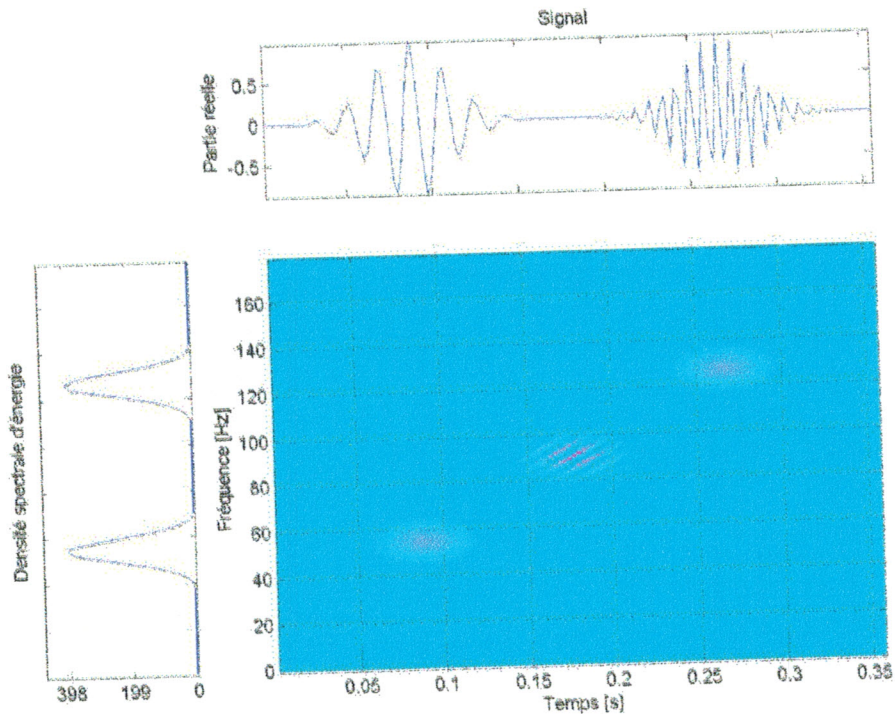


Figure.2.19 : Distribution de Wigner-Ville d'un signal constitué par superposition de deux atomes Gaussiens

### 5.2.1 Exemple 5 : DPWV [AFGL96]

Soit  $x(t)$  un signal, composé de quatre atomes Gaussiens (voir For.2.69). Sa DWV est illustrée par la figure.2.20, on voit sur l'image quatre termes individuels relatifs au signal, et six termes d'interférences, dont deux entre eux sont superposés.

Si on considère maintenant sa distribution pseudo-Wigner-Ville (figure.2.21), on remarque une claire atténuation des termes d'interférences oscillants parallèlement à l'axe des fréquences. [FLA98]. On remarque également que les termes individuels du signal sont affectés par un étalement fréquentiel.

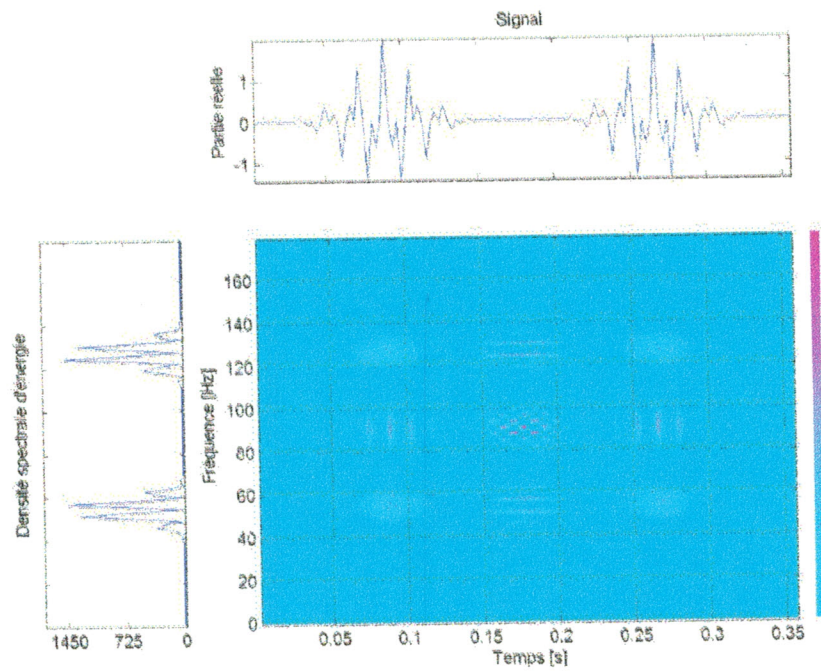


Figure.2.20 : DWV d'un signal composé de quatre atomes Gaussiens, présence de plusieurs termes d'interférences

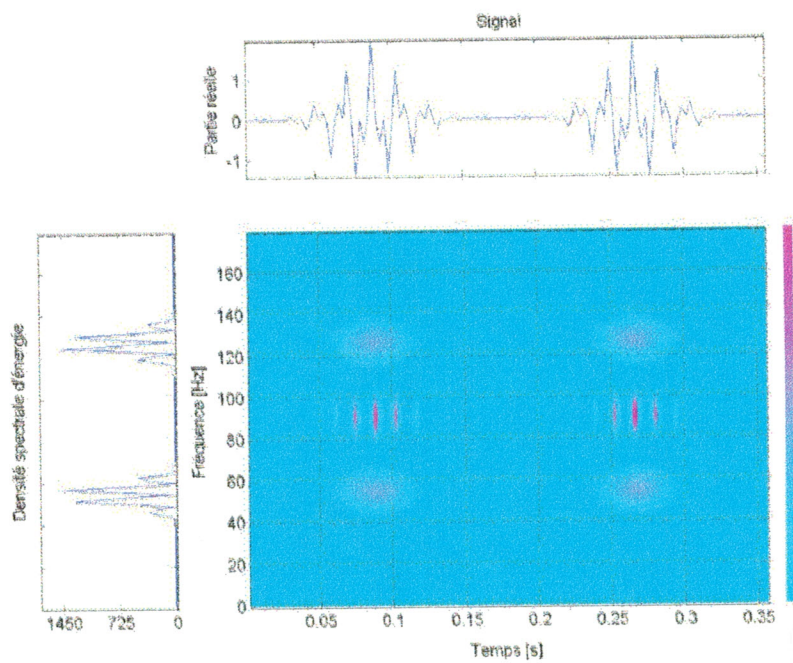


Figure.2.21 : DPWV d'un signal composé de quatre atomes gaussiens, atténuation des termes d'interférences oscillant parallèlement à l'axe des fréquences

### 5.3 Discrétisation de la DWV [AFGL96]

Si on réécrit la DWV sous la forme suivante :

$$W_x(t, \nu) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) x^*(t-\tau) e^{-i4\pi\nu\tau} d\tau \quad \text{For.2.72}$$

et on échantillonne le signal  $x(t)$  à une cadence  $T_e$  :  $x[n] = x(nT_e)$  alors, une version discrète possible de la DWV est donnée par :

$$W_x(n, \nu) = 2T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+k] x^*[n-k] e^{-i4\pi\nu k} \quad \text{For.2.73}$$

Mais cette expression est périodique de période  $1/2T_e$ , alors qu'une transformée de Fourier du signal  $x$  est de période  $1/T_e$ . On peut donc avoir un *repliement spectral*, surtout si  $x$  est à valeurs réelles et échantillonné à la fréquence de Nyquist (fréquence minimum de Shannon).

Une première solution à ce problème est de sur-échantillonner le signal (réel) d'un facteur au moins égal à deux par rapport à la fréquence de Nyquist.

La deuxième solution consiste à utiliser le *signal analytique* (voir annexe A), qui permet de supprimer les fréquences négatives et par conséquent réduire la bande fréquentielle utile du signal à la moitié. Cette dernière solution présente un autre avantage dans le contexte de la réduction des termes d'interférences.

### 5.4 Réduction des termes d'interférences [FLA98]

On a vu précédemment que les termes d'interférences générés par la DWV perturbent l'interprétation visuelle de l'image temps-fréquence. On va présenter dans ce qui suit deux solutions possibles pour remédier à ce problème.

#### 5.4.1 Utilisation du signal analytique

Puisque le nombre de termes d'interférences est d'autant plus grand que le nombre des composantes en interaction est grand, la première façon d'éviter une prolifération excessive de ces termes est de réduire autant que possible la redondance de la représentation à partir de laquelle la distribution est calculée.

Si on considère la DWV sous sa forme fréquentielle (For.2.56), alors le nombre des termes d'interférences mis en jeu dépend du nombre de composantes que contient le spectre  $X(\nu)$ . Dans le cas où le signal analysé est à valeurs réelles, la symétrie hermétique du spectre impose de prendre en compte deux fois plus de composantes fréquentielles que le signal n'en comporte dans les fréquences positives. Si le signal analysé est par exemple somme de trois fréquences (positives), il en résultera quinze termes d'interférences. Comme l'information portée par les fréquences négatives du spectre est redondante à celle associée aux fréquences positives ; il est évidemment plus avantageux de supprimer ces fréquences négatives en utilisant le *signal analytique* (voir annexe A). Dans ce cas là, seulement les composantes physiquement significatives contenues dans les fréquences positives qui interfèrent. Dans l'exemple précédant, le nombre de termes d'interférences se trouve alors ramené à trois au lieu de quinze, ce qui bien sûr accroît la lisibilité de l'image temps-fréquence.

#### 5.4.2 Lissage : Distribution Pseudo-Wigner-Ville Lissée (DPWVL)

On a vu que les termes d'interférences ont une structure oscillante, alors que les termes individuels du signal sont d'une nature plus régulière : cette différence de comportement suggère assez naturellement de réduire l'importance de ces termes par une opération de *lissage* dans le plan temps-fréquence par une fonction  $\pi(t, \nu)$ , cela revient à remplacer la DWV par une version lissée.

$$C_x(t, \nu, \pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(s-t, \xi-\nu) W_x(s, \xi) ds d\xi \quad \text{For.2.74}$$

Un cas intéressant est celui du lissage séparable :  $\pi(t, \nu) = g(t)H(-\nu)$  ceci permet d'effectuer un double lissage : temporel et fréquentiel, mais de façon indépendante, le premier est contrôlé par la fenêtre  $g(t)$ , le deuxième est contrôlé par la fenêtre  $h(t)$  ( $H(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $h(t)$ ). La représentation correspondante est appelée *Distribution pseudo-Wigner-Ville lissée* (DPWVL) et s'écrit :

$$PWL_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(s-t) x(s+\tau/2) x^*(s-\tau/2) ds \right] e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad \text{For.2.75}$$

Notons que si aucun lissage temporel est appliqué, c'est-à-dire si  $g(t) = \delta(t)$  on retrouve la définition de la distribution pseudo-Wigner-Ville (For.2.71).

### 5.4.3 Exemple 6 : DPWVL [AFGL96]

Dans cet exemple on va prendre un signal  $x(t)$  composé d'une sinusoïde complexe et d'un atome gaussien translaté en temps et en fréquence :

$$x(t) = e^{i2\pi\nu_0 t} + e^{-\frac{1}{2}(t-b)^2} e^{i2\pi\nu_1 t} \quad \text{For.2.76}$$

En calculant la DWV de  $x(t)$ , on peut remarquer dans la figure 2.22 la présence de termes d'interférences, dont la direction d'oscillation est parallèle à l'axe temporel, comme nous avons vu précédemment (figure 2.21), la DPWV est incapable d'atténuer ce type d'interférence (figure 2.23), par contre l'utilisation de la DPWVL fournit une considérable atténuation de ces termes (figure 2.24).

En résumé, la DPWV utilise une fenêtre à court terme dont l'effet est d'opérer un lissage fréquentiel qui permet d'atténuer les interférences entre des composantes distantes en temps, par contre l'utilisation de la DPWVL introduit un lissage supplémentaire en temps permet de réduire les interférences entre des composantes décalées en fréquence.

Notons en fin que si l'utilisation d'un lissage séparable permet de mieux contrôler la réduction des termes d'interférences, c'est en général au détriment de certaines propriétés théoriques (conservation des supports, propriété de distributions marginales...). Cependant, du fait de la séparabilité, l'introduction d'un lissage selon une variable n'affecte que les propriétés relatives à cette variable. Mais dès que le lissage séparable est appliqué simultanément en temps et en fréquence les propriétés mentionnées disparaissent complètement.

## 5.5 Utilité des termes d'interférences [FLA98]

S'il est vrai que les termes d'interférences réduisent généralement la lisibilité d'une image temps-fréquence et qu'il est en ce sens souhaitable de s'en débarrasser, il est non moins vrai que ces mêmes termes d'interférences sont partie intégrante de la distribution et qu'ils sont porteurs d'une information pouvant, dans certains cas ou d'un certain point de vue, les rendre utiles. Un exemple de l'information contenue dans les termes d'interférences est l'*information de phase*. En effet, à la différence du spectrogramme (voir le paragraphe 4.5) qui, par opération de module carré, perd les informations de phase contenues dans une transformée de Fourier à court terme, la distribution de Wigner-Ville est une quantité réelle

dont on peut considérer qu'elle code ces informations de phase dans ses termes d'interférences.

L'utilité des termes d'interférences peut paraître aussi importante lorsqu'on veut restituer le signal original à partir de sa DWV, dont on sait que leur présence est nécessaire à une reconstruction complète.



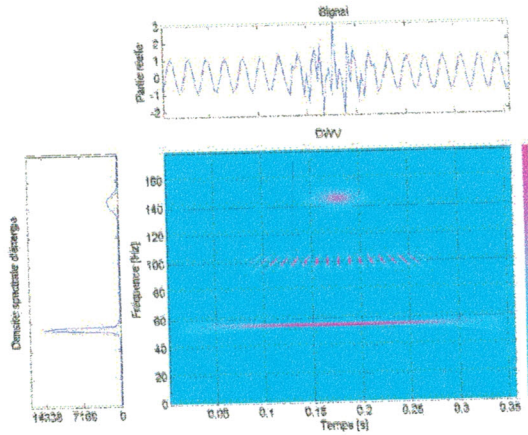


Figure.2.22 : DWV d'un signal composé d'une sinusoïde complexe et d'un atome Gaussien, présence de termes d'interférences entre ces deux composantes

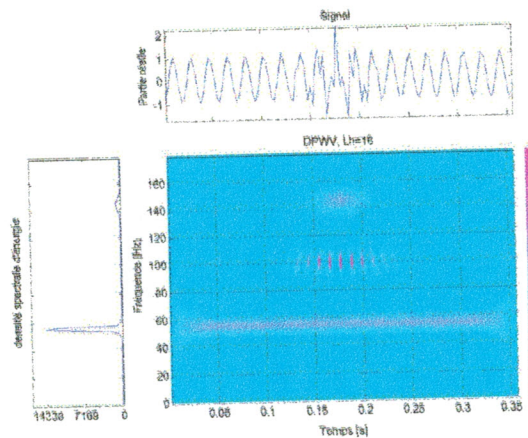


Figure.2.23 : DPWV du signal précédent, le lissage fréquentiel effectué par la DPWV dégrade la résolution fréquentielle sans aucune atténuation des termes d'interférences

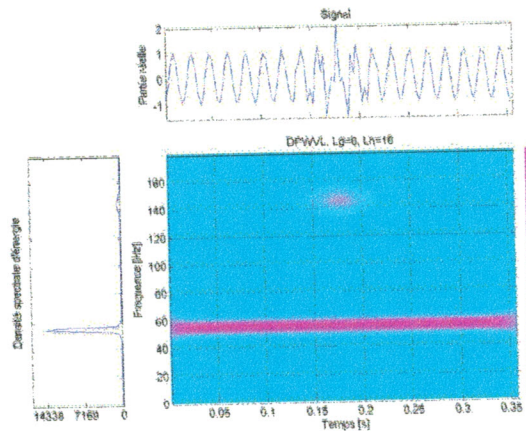


Figure.2.24 : DPWVL du signal précédent, le lissage temporel effectué par la DPWVL a réduit considérablement les termes d'interférences

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue un ensemble de méthodes de représentation temps-fréquence et temps-échelle. La transformée de Fourier qui est à l'origine de toutes ces représentations a été abordée en premier lieu dont la présentation a permis de montrer à la fois son importance et surtout son insuffisance pour le traitement des signaux non stationnaires. Nous avons ensuite défini le concept temps-fréquence en étudiant la transformée de Fourier à court terme (TFCT), celle-ci consiste à fournir un spectre instantané prélevé par une fenêtre temporelle, malheureusement la longueur fixe de cette fenêtre rend cette transformée inappropriée pour les signaux contenant à la fois de hautes et basses fréquences. L'utilisation de la transformée en ondelettes (représentation temps-échelle) vient pour résoudre ce problème. Nous avons étudié deux versions : la transformée en ondelettes continue (TOC) qui fournit une meilleure lisibilité mais elle est plus redondante, et la transformée en ondelettes discrète (TOD) qui vise à réduire ou supprimer la redondance de la TOC pour accélérer la vitesse du calcul. Nous avons également étudié la décomposition en paquets d'ondelettes qui est une généralisation du principe de la transformée en ondelettes discrète. La prise en compte de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence donne lieu à une nouvelle famille de représentations : les distributions d'énergie. La dernière partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude de la distribution de Wigner-Ville (DWV) qui est la transformation la plus connue de cette famille, elle possède de nombreuses propriétés intéressantes mais, les termes d'interférences qu'elle engendre brouille la lisibilité de l'image temps-fréquence résultante, nous avons montré que cette limitation peut être affranchie par un lissage temps-fréquence convenable mais ceci au détriment de certaines propriétés souhaitables. Cependant, ces termes d'interférences peuvent apporter un supplément d'information utile si la qualité de lisibilité n'est pas un facteur déterminant. Toujours dans ce chapitre nous avons illustré comment obtenir une distribution d'énergie en partant d'une décomposition en paquets d'ondelettes, il s'agit de prendre le module carré de cette représentation pour obtenir une forme quadratique permettant de représenter l'énergie du signal traité.

# Chapitre 3

Classification dans le plan  
temps-fréquence

Parmi tous les signaux auxquels il est confronté, l'être humain doit extraire l'information significative, et dans certains cas prendre une décision. Par exemple, un portier entend une voix dans l'interphone : « ouvrez, c'est moi » Doit-il ouvrir ? Oui, mais uniquement s'il a reconnu la voix. Un mécanicien écoute le cliquetis inhabituel d'un moteur, est-ce un signal précédant une panne ? Quelle panne ? Un cardiologue examine le résultat d'un électrocardiogramme d'effort. Faut-il traiter le patient ? De quelle pathologie est-il atteint ? Tous ces problèmes relèvent, directement ou non, d'une seule problématique : la classification des signaux [DAV00].

## 1 Méthodes de classification

On distingue généralement deux modes de classification : la classification aveugle ou non supervisée, et la classification supervisée. La première consiste à répartir un ensemble de données en classes, mais sans apprentissage. La seconde, qui nous intéresse ici, passe par une étape d'apprentissage. Nous nous plaçons dans le contexte supervisé, pour deux raisons principales : [DAV00]

- La plupart des problèmes concrets de classification consistent à automatiser une procédure existante qui fait intervenir un expert, aussi un ensemble d'apprentissage est souvent disponible ;
- Les taux d'erreur de classification obtenus dans le cas supervisé sont plus faibles que dans le cas non supervisé, car l'information sur le problème est plus riche. En pratique, la classification non supervisée est réservée aux cas où aucune information préalable n'est disponible où lorsque cette information est susceptible de varier.

Dans la plus part des cas la classification supervisée vise à donner une bonne prédiction des classes a priori (le *diagnostic*), mais dans certains cas l'*interprétation* des classes est importante, soit parce que le problème décisionnel est secondaire, soit pour favoriser la mise en œuvre de prise de décision hybride où la classification n'est qu'une aide au diagnostic. Selon cette vision on peut distinguer trois grandes familles de méthodes de classification supervisée [GOV03].

- 1) Les méthodes statistiques qui sont les plus anciennes et traitent souvent les deux aspects : diagnostic et interprétation, mais elles exigent une connaissance parfaite de toute la statistique des données à classer (apprentissage bayésien). Dans le cas

des signaux physiques, ces informations ne sont généralement pas suffisamment connues (absence de modèle, densités de probabilité inconnues, . . .). On doit alors appliquer une classification non-paramétrique.

- 2) Les méthodes non paramétriques qui privilégient le diagnostic, elles visent uniquement à construire une fonction de décision, de type « boîte noire », induisant le minimum d'erreurs de classification ( réseaux de neurones, méthodes SVM (Support Vector Machines), méthode de k plus proches voisins, méthode de plus proche représentant,....etc.). Pour construire une procédure de classification, ces méthodes n'utilisent pas de modèle statistique des signaux, elles s'appuient uniquement sur un ensemble de signaux dit *ensemble d'apprentissage*.
- 3) Les méthodes d'arbres de décision qui privilégient l'interprétation des classes et favorisent le dialogue homme-machine.

Dans ce mémoire nous avons choisi de s'intéresser aux méthodes non paramétriques où le problème peut s'énoncer ainsi : nous disposons d'un ensemble de signaux (ensemble d'apprentissage) dont on sait qu'ils sont liés à un phénomène physique donné. Cet ensemble a été expertisé, c'est-à-dire qu'une personne expérimentée a réparti les signaux en différentes classes : par exemple, la classe des signaux ECG normaux, celle des signaux ECG pathologiques présentant un battement de type ventriculaire prématuré, ... etc. La problématique consiste alors à ranger un nouveau signal, inconnu, dans la bonne classe.  
[DAV00]

## 2 Formulation d'une procédure de classification supervisée

### 2.1 Notations

Nous adoptons ici certaines notations qui nous aident par la suite à bien comprendre les différentes opérations mises en jeu dans une procédure de classification supervisée.

Un classificateur est une fonction  $c$  qui à chaque signal d'entrée  $x$  fait correspondre une classe  $y$ .

$$\begin{aligned} c : X &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow y = c(x) \end{aligned}$$

For.3.1

où :  $X \subset R^n$  : Espace de représentation initiale des signaux à classer.

$Y = \{1, 2, \dots, L\}$  : Espace de réponse où  $L$  est le nombre de classes considérées.

En pratique, dans une procédure de classification la relation établie par la fonction  $c$  entre un signal d'entrée  $x$  et sa classe correspondante  $y$  n'est pas directe. La fonction  $c$  comporte généralement trois opérations intermédiaires.

$$X \xrightarrow{r} E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{d} Y \quad \text{For.3.2}$$

- $r$  : Transformation permet de représenter les signaux d'entrée dans un nouvel espace plus discriminant.

$$\begin{aligned} r : X &\rightarrow E \\ x &\rightarrow e = r(x) \end{aligned} \quad \text{For.3.3}$$

- $g$  : Extraction des paramètres pertinents.

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow F \\ e &\rightarrow f = g(e) \end{aligned} \quad \text{For.3.4}$$

- $d$  : Décision

$$\begin{aligned} d : F &\rightarrow Y \\ f &\rightarrow y = d(f) \end{aligned} \quad \text{For.3.5}$$

Avec  $E$  : Espace transformé (l'espace temps-fréquence par exemple)

$F$  : Espace des descripteurs pertinents, sa dimension est généralement plus réduite que celle de l'espace initiale  $X$

$X^{(y)} = \{x \in X : c(x) = y\}$  : Ensemble des signaux d'entrée ayant comme classe  $y$

$x_i^{(y)}$  : indique que  $x_i$  est un signal de la classe  $y$ . La même notation sera utilisée dans les espaces  $E$  et  $F$ , c'est-à-dire que :  $e_i^{(y)}$  et  $f_i^{(y)}$ .

$N_y$  : Nombre de signaux constituant la classe  $y$

$T = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$  : Ensemble d'apprentissage constitué de  $N$  couples  $(x, y)$  dont

$x$  est un signal d'entrée,  $y$  sa classe correspondante et  $N = \sum_{y=1}^L N_y$

Donc l'ensemble  $X^{(y)}$  peut être écrite de la façon suivante :  $X^{(y)} = \{x_1^{(y)}, x_2^{(y)}, \dots, x_{N_y}^{(y)}\}$

$T'$  : Ensemble de test indépendant de  $T$  tirée au hasard de l'ensemble de données disponibles tel que  $T \cap T' = \emptyset$ . Cet ensemble est utilisé pour évaluer les performances du classifieur.

Un algorithme de classification est constitué : [DAV00]

- 1) d'un *espace de représentation* des signaux.
- 2) d'une *règle de décision* qui affecte un signal  $x_i^{(y)}$  à sa classe correspondante  $y$ .
- 3) d'un outil de comparaison que nous appellerons *distance*, à l'aide de laquelle la décision sera prise.

## 2.2 Espace de représentation discriminant

L'espace de représentation doit être discriminant, c'est-à-dire dans lequel les caractéristiques communes aux signaux d'une même classe sont peu visibles, mais où les dissemblances entre signaux de classes différentes sont évidentes. [DAV00].

D'après ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, il apparaît évident qu'une description conjointe des signaux en temps et en fréquence offre par rapport aux descriptions unidimensionnelles en temps ou en fréquence seulement une meilleure structuration de l'information contenue dans le signal, ce qui permet pour un problème de classification (notamment si les signaux à classer sont non stationnaires), d'avoir un espace de représentation plus discriminant entre les différentes classes. Dans le contexte de notre travail s'intéressant à la classification des signaux électrocardiogramme (ECG) qui sont de nature non stationnaire, nous allons utiliser des représentations temps-fréquence qui font partie de la classe de distribution d'énergie. Ce choix va mettre en jeu un troisième paramètre important pour la discrimination des signaux : l'énergie. Ainsi on obtient un espace de représentation pertinent qui rend compte à la fois de l'énergie, du temps et de la fréquence.

Les distributions d'énergie temps-fréquence ou temps-échelle sont vues comme des distributions de probabilité. Cette interprétation est très utile de point de vue traitement, mais elle se heurte à la limite suivante : certaines représentations pouvant être négatives (Distribution de Wigner-Ville par exemple). Cela s'oppose aux axiomes de la statistique qui stipulent qu'une probabilité est toujours positive [DAV00]. Pour s'affranchir de cette

limitation, une des solutions possibles consiste à rendre positif la distribution par un traitement approprié.

## 2.3 Règles de décision

Les procédures de classification dans le plan temps-fréquence consistent généralement à comparer à l'aide de distances, tout signal inconnu  $x$  à un certain nombre de signaux (*prototypes*) qui représentent d'une façon donnée l'ensemble des classes d'apprentissage  $T$ . L'affectation d'un signal  $x$  à une classe  $y$  est effectuée en suivant une règle de décision. Il faut comprendre ici la notion de *distance* au sens large, comme une mesure de similarité ou de dissemblance entre deux signaux [VIN03].

### 2.3.1 Règle du plus proche représentant [DAV00]

Une distance  $D$  étant choisie, il est nécessaire de déterminer un élément représentant  $f^{(y)}$  pour chaque classe de signaux  $y$  à partir de l'ensemble d'apprentissage  $T$ .  $f^{(y)}$  pourra être :

1. Le barycentre (au sens de la distance  $D$  choisie) de  $F^{(y)}$ , c'est-à-dire :

$$\hat{f}^{(y)} = \arg \min_{f \in F} \sum_{i=1}^{N_y} [D(f_i^{(y)}, f)]^2 \quad \text{For.3.6}$$

2. La moyenne des éléments de  $F^{(y)}$  appelée aussi *centroïde* :

$$\hat{f}^{(y)} = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} f_i^{(y)} \quad \text{For.3.7}$$

3. L'élément d'apprentissage le plus proche du barycentre de  $F^{(y)}$  au sens de  $D$  :

$$\hat{f}^{(y)} = f_{j_0}^{(y)} \quad \text{où } j_0 = \arg \min_{j \in [1, \dots, N_y]} \sum_{i=1}^{N_y} [D(f_i^{(y)}, f_j^{(y)})]^2 \quad \text{For.3.8}$$

Dans notre cas, nous choisissons comme représentant de classe, le centroïde (2), parce qu'il s'apparente à une estimation du spectre temps-fréquence.



La règle du plus proche représentant affecte un signal inconnu, appartenant à l'ensemble de test  $T'$  à la classe  $y_0$  dont le centroïde est le plus proche (au sens de la distance choisie).

$$x \text{ affecté à } y_0 \Leftrightarrow y_0 = \underset{y \in Y}{\operatorname{arg\,min}} D(f, \hat{f}^{(y)}) \quad \text{For.3.9}$$

avec  $f = g(r(x))$  où  $r$  et  $g$  sont les deux fonctions définies dans le paragraphe 2.1

La figure.3.1 illustre graphiquement ce principe. L'élément à classer (représenté par une croix) est affecté à la classe des ronds, car le représentant de celle-ci (le cercle blanc) est plus proche que le représentant de la classe des carrés (le carré évidé).

### 2.3.2 Règle des k plus proches voisins

Le principe de cet algorithme de classification est très simple : on choisit une distance  $D$  et un entier  $k$ . Pour tout signal de test  $x \in T'$ , l'algorithme recherche dans l'ensemble d'apprentissage  $T$  les  $k$  signaux les plus proches de  $x$  au sens de la distance  $D$ , et attribue à  $x$  la classe qui est la plus fréquente parmi ces  $k$  voisins. Le fait de considérer, dans le cas général,  $k$  voisins, plutôt que l'unique voisin le plus proche permet une certaine robustesse aux erreurs de classification [VIN03]. La figure.3.1 résume graphiquement cette technique.

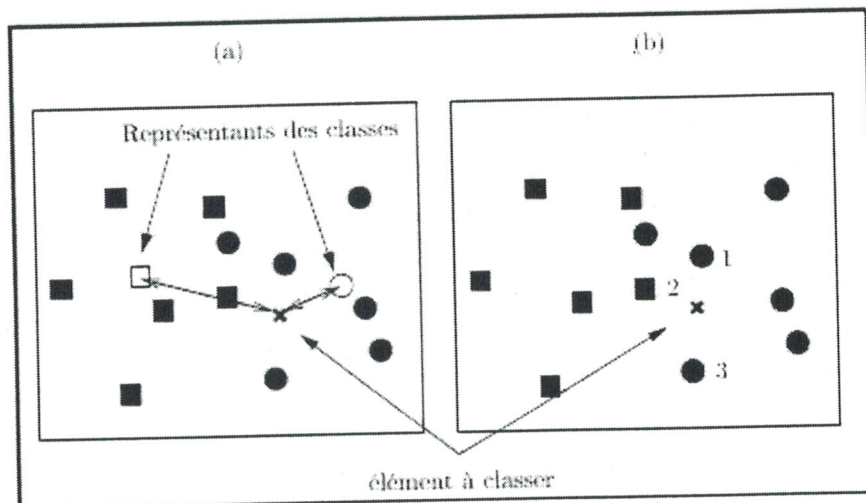


Figure 3.1 : Règles de décision pour la classification de l'élément inconnu  $x$  dans la classe des ronds, (a) Règle du plus proche représentant. (b) Règle des 3 plus proches voisins : les numéros désignent les éléments de l'apprentissage dans l'ordre croissant des distances.

Le choix du nombre  $k$  de voisins est primordial, une bonne stratégie simple à réaliser, consiste à le choisir de sorte à minimiser le taux d'erreur

Pour être efficace et fournir des règles de décisions stables, la méthode des  $k$  plus proches voisins exige une taille de l'ensemble d'apprentissage importante, mais de ce fait, la méthode de base peut s'avérer lente car la recherche des plus proches voisins d'un échantillon dans une grande base de données est coûteuse.

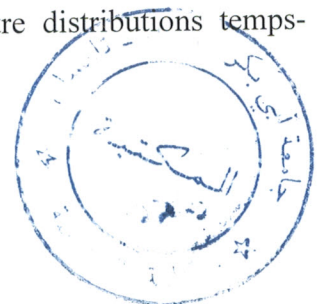
## 2.4 Les distances temps-fréquence

Comme nous venons de le voir, la prise de décision dans le plan temps-fréquence requiert une distance adaptée à cet espace de représentation. Les distances utilisées pour comparer les représentations temps-fréquence peuvent être regroupées en trois familles : [DAV00].

- 1) Les distances à caractère général pour la décision (distances  $L_q$ , distance par corrélation, distance de Mahalanobis);
- 2) Les distances destinées à comparer des densités de probabilité (dans le chapitre précédent, nous avons indiqué que les représentations temps-fréquence admettent une interprétation en termes de distribution de probabilité). Elles sont regroupées sous le nom de  $\varphi$ -divergences. Elles nécessitent une normalisation des représentations temps-fréquence.
- 3) Les distances spectrales, reprenant une partie des distances  $L_q$  mais sur des représentations temps-fréquence normalisées.

La normalisation visant à rendre la représentation temps-fréquence positive et unitaire, se révèle plus robuste que d'autres techniques comme la mise à zéro des termes négatifs (qui supprime une partie de l'information).

La pertinence d'une distance particulière est liée à sa capacité à discriminer des représentations temps-fréquence de signaux de classes différentes, c'est-à-dire des signaux dont l'énergie est localisée de diverses façons dans le plan temps-fréquence. Cela signifie qu'une bonne distance doit indiquer le degré de ressemblance entre distributions temps-fréquence.



### 3 Extraction des paramètres discriminants

Dans les paragraphes précédents nous avons traité le plan temps-fréquence comme un tout indivisible où toutes les coordonnées ont la même importance, ceci pose essentiellement deux problèmes

- 1) Un coût de calcul élevé dû à la dimensionnalité importante du plan temps-fréquence.
- 2) Le taux d'erreur de classification obtenu à partir de cette dimension n'est pas optimal.

Pour remédier à ces deux inconvénients, la solution consiste à utiliser les spécificités des distributions temps-fréquence pour extraire des paramètres discriminants, réduisant ainsi fortement la dimension de l'espace de représentation à partir duquel la décision sera prise. La méthode de sélection de ces paramètres dépend de la distribution temps-fréquence avec laquelle les signaux à classer sont représentés.

Dans ce mémoire, pour classifier des signaux ECG, nous allons examiner deux types de distribution d'énergie, la première est celle déduite des paquets d'ondelettes (voir le paragraphe 4.5 chapitre 2) dont le paramètre de fréquence est substitué par un paramètre équivalent : l'échelle, La distribution produite est une représentation temps-échelle. La deuxième est la distribution de Wigner Ville (voir le paragraphe 5.1, chapitre 2), Cette dernière fait partie de la classe de Cohen qui regroupe les distributions d'énergie de type temps-fréquence. On résume dans les deux paragraphes suivants les grandes étapes à suivre afin de pouvoir extraire ces paramètres discriminants, et ceci pour chacune des deux distributions.

#### 3.1 Paquets d'ondelettes

La procédure de classification partant de la décomposition en paquets d'ondelettes est basée essentiellement sur l'algorithme LDB (Local Discriminant Basis) développé par Saito et Coifman [SAI94], qui permet de sélectionner la base de paquets d'ondelettes la plus discriminante pour les différentes classes d'apprentissage. Une présentation détaillée de cet algorithme est donnée dans l'annexe C, on se contente ici de mettre l'accent sur les phases permettant l'extraction des paramètres discriminants. En effet, cette extraction se fait sur deux étapes

- 1) Parmi la collection de bases offerte par la décomposition en paquets d'ondelettes, on extrait la base la plus discriminante, appelée base LDB.
- 2) Parmi les coordonnées de cette base, on extrait les premières coordonnées les plus discriminantes.

Après avoir élaboré une carte d'énergie (voir annexe C) pour chaque classe d'apprentissage ; la première étape donnant la meilleure base discriminante (LDB), consiste essentiellement à faire une série de comparaisons entre ces cartes au niveau des nœuds de l'arbre binaire fournie par la décomposition en paquets d'ondelettes, ces comparaisons s'effectuent à l'aide d'une distance capable de mesurer la divergence entre différents signaux (Saito et Coifman ont choisi la distance de Kullback-Leibler).

Dans la deuxième étape, en utilisant la même distance choisie dans la première étape, on peut mesurer la discrimination apportée par chaque coordonnée de la base LDB, ensuite on ordonne ces coordonnées suivant leur puissance de discrimination et enfin on ne retient qu'un nombre restreint de points qui correspondent aux coordonnées les plus discriminantes. Ainsi avec ces coordonnées on pourra construire un classifieur dans un espace de dimension réduite tout en préservant l'information pertinente qu'on cherche à exploiter.

## 3.2 Distribution de Wigner-Ville

L'extraction de paramètres discriminants dans le cas de la distribution de Wigner-Ville est basée sur le calcul du *contraste de Fisher*. Avant d'exposer la démarche à suivre pour mener à bien cette extraction, on donne d'abord la définition du contraste de Fisher dans le plan temps-fréquence :

### 3.2.1 Contraste de Fisher [DAV00].

En utilisant les notations du paragraphe 2.1 nous pouvons définir le contraste de Fisher  $K_{Fisher}(t, \nu)$  tel que l'espace  $E$  dans ce cas représente l'espace temps-fréquence et la fonction  $r$  s'identifie à la transformation de Wigner-Ville, c'est-à-dire :  $r(x) = W_x(t, \nu)$

$$K_{Fisher}(t, \nu) = \frac{\sum_{y=1}^L \sum_{\substack{z=1 \\ z \neq y}}^L \left| W^{(y)}(t, \nu) - W^{(z)}(t, \nu) \right|^2}{\sum_{y=1}^L \left( \overline{W^{(y)}(t, \nu)} \right)^2} \quad \text{For.3.10}$$

où  $W^{(y)}(t, \nu)$  est la moyenne des distributions de Wigner-Ville des signaux d'apprentissage correspondant à la classe  $y$  pour la coordonnée  $(t, \nu)$ , telle que :

$$W^{(y)}(t, \nu) = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} W_{x_i}^{(y)}(t, \nu) \quad \text{For.3.11}$$

et  $\overline{W^{(y)}(t, \nu)}$  est la variance :

$$\overline{W^{(y)}(t, \nu)} = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \left( W_{x_i}^{(y)}(t, \nu) - W^{(y)}(t, \nu) \right)^2 \quad \text{For.3.12}$$

En calculant le contraste de Fisher pour tous les coordonnées  $u$  du plan temps-fréquence, on obtient ce que l'on appelle une *carte du contraste* du plan temps-fréquence, une valeur faible de  $K_{Fisher}(t, \nu)$  correspond à une coordonnée de l'espace peu discriminant; et une valeur élevée de  $K_{Fisher}(t, \nu)$  indique une coordonnée permettant de bien distinguer les classes. D'un autre point de vue, l'obtention d'une valeur élevée de  $K_{Fisher}(t, \nu)$  nécessite que : [DAV00]

- Les éléments moyens de chaque classe doivent être aussi éloignés que possible (le numérateur de (For.3.10) s'augmente).
- La distance moyenne des éléments d'une classe à leur élément moyen soit aussi petite que possible (le dénominateur de (For.3.10) se diminue).

### 3.2.2 Sélection des paramètres discriminants

La sélection des paramètres discriminants du plan temps-fréquence à partir des distributions de Wigner-Ville des signaux d'apprentissage peut être résumée dans les points suivants :

- 1) Calculer la carte du contraste de Fisher ( $K_{Fisher}$ ) des classes d'apprentissage dans le plan temps-fréquence.
- 2) Fixer un nombre  $M$  de coordonnées à considérer.
- 3) Déterminer les  $M$  coordonnées  $\{(t_1, \nu_1), (t_2, \nu_2), \dots, (t_M, \nu_M)\}$  de plus fort contraste (les coordonnées les plus discriminantes MDC).

Puisque ces  $M$  coordonnées sont censés capables de résumer l'information du plan temps-fréquence qui décrit les dissemblances entre les différentes classes d'apprentissage, nous pouvons réduire la dimension du problème en construisant notre classificateur dans le sous-espace réduit, engendré par les  $M$  coordonnées. Notons cependant qu'un trop faible nombre de signaux d'apprentissage ne permet pas une bonne estimation du contraste  $K_{Fisher}$ .

#### 4 Recherche de la procédure de classification optimale

Les travaux de Flandrin [VIN95] montrent que le choix de la représentation temps-fréquence est un paramètre crucial qu'il faut savoir choisir de la meilleure façon possible, pour augmenter les performances de classification. Ces performances seront mesurées en fonction du taux de classification réalisé par le classifieur sur un ensemble de test.

Pour les représentations de type paquets d'ondelettes (distributions temps-échelle) cette optimisation consiste à rechercher de façon heuristique la meilleure ondelette mère à utiliser pour avoir les meilleures performances possibles, dans le cadre de distributions d'énergie on se limite aux ondelettes orthogonales à support compact pour vérifier la conservation d'énergie, On trouve dans l'annexe B une présentation succincte des principales familles d'ondelettes vérifiant cette propriété.

On peut faire la même chose pour les représentations temps-fréquence qui constituent la classe de Cohen. Si nous choisissons par exemple la distribution pseudo Wigner-Ville lissé (DPWVL), définie par deux fenêtres de pondération  $f$  et  $g$ ; le problème d'optimisation consiste alors à déterminer les longueurs  $L_h$  et  $L_g$  des deux fenêtres, qui donnent le meilleur taux de classification. A cet égard plusieurs fenêtres peuvent être examinées, et pour chacune d'elles on évalue la DPWVL avec différentes combinaisons  $(L_h, L_g)$ . Une présentation des différentes fenêtres utilisées dans ce travail se trouve dans l'annexe D.

Un autre moyen possible pour améliorer les performances de classification dans le plan temps-fréquence consiste à changer la distance utilisée, car un choix arbitraire de la distance n'est pas toujours adapté à la nature des signaux à classer. On peut modifier également la règle de décision (plus proche représentant, K plus proche voisins, analyse discriminante linéaire ...) et retenir celle qui se prête mieux au problème considéré. Donc, la recherche empirique d'une procédure de classification passe par le choix heuristique d'un espace de représentation, d'une distance et d'une règle de décision.

## 5 Conclusion

Ce chapitre a présenté brièvement les concepts fondamentaux de la classification supervisée dans le plan temps-fréquence. Le manque de la connaissance parfaite du modèle statistique des données à classer conduit souvent à choisir des méthodes empiriques basées sur la disposition d'un ensemble de données d'apprentissage. Dans ce contexte, un algorithme de classification est constitué généralement d'une certaine représentation temps-fréquence qui doit être discriminante pour les classes d'apprentissage et d'une règle de décision qui affecte un individu à une classe à l'aide d'une fonction discriminante (généralement une distance). Les performances de tels algorithmes sont liées fortement au choix du triplet (représentation, règle de décision, distance), ce qui implique évidemment une optimisation, celle-ci peut se faire de façon heuristique en recherchant dans un ensemble fini le triplet donnant le meilleur taux de classification.

Dans le chapitre suivant nous allons étudier la possibilité de classer les signaux ECG dans le plan temps-fréquence (et temps-échelle) en utilisant les concepts de classification que nous venons d'exposer. Les résultats obtenus seront discutés et interprétés en vue de mieux connaître les limitations ou les avantages des différents choix pris lors de la conception de la procédure de classification.

# Chapitre 4

Etude de la distribution d'énergie  
temps-fréquence du signal ECG



## 1 Introduction

On s'est contenté dans les trois premiers chapitres de présenter les éléments nécessaires constituant l'arrière plan théorique du notre travail, à savoir : le signal électrocardiogramme : l'objet de cette étude et les distributions d'énergie temps-fréquence comme méthode d'analyse ainsi que les éléments relatifs à la classification dans le plan temps-fréquence. Le présent chapitre est consacré au coté applicatif de ce travail : l'étude de la distribution d'énergie temps-fréquence du signal électrocardiogramme (ECG) en vue d'une classification de pathologies.

*L'électrocardiogramme* (ECG) est l'examen le plus couramment pratiqué pour l'analyse des arythmies cardiaques. Très souvent, l'ECG est complété par un examen similaire d'une durée de 24 heures appelé « Holter », permettant la détection des arythmies qui n'apparaissent pas nécessairement au cours des quelques secondes de l'enregistrement ECG. L'étape importante dans l'identification d'une arythmie est la classification des battements cardiaques, cependant la classification de plus de 100 000 battements (correspondant à un enregistrement Holter) est une tâche très coûteuse en temps et nécessite plus d'expérience et d'attention, d'où la nécessité de développer une procédure de classification automatique.

Plusieurs approches ont été utilisées pour mettre en œuvre de telle procédure et comme nous l'avons indiqué à l'introduction, ces approches se caractérisent par le choix de descripteurs avec lesquels on représente les signaux et par la méthode de classification utilisée. Nous proposons au cours de ce chapitre une approche basée sur l'utilisation des distributions d'énergie temps-fréquence et temps-échelle comme descripteurs de signaux et la règle du plus proche représentant (voir chapitre 3) comme méthode de classification. Nous commençons d'abord par décrire la nature des données utilisées ainsi que le conditionnement suivant lequel elles seront traitées, nous discutons ensuite les considérations et les choix que nous avons fait pour mettre en œuvre la procédure de classification. Les résultats obtenus seront présentés, interprétés et comparés et ceci pour les différents schémas de classification choisis.

## 2 Description des données

Les signaux ECG utilisés ont été choisis au hasard de la base de données MIT-BIH Arrhythmia Database, qui comporte 48 enregistrements ECG, chacun est réalisé suivant deux dérivations (dénnotées A et B) pendant une durée de 30min. Ces enregistrements sont filtrés par un filtre passe bande (0.1-100 Hz) et échantillonnés à une fréquence  $f_e = 360 \text{ Hz}$ . On trouve dans l'annexe E une description plus détaillée de la base de données MIT-BIH.

Parmi les 14 cas pathologiques traités dans la base MIT-BIH on s'intéresse au cas des battements ventriculaires prématurés (premature ventricular contraction : PVC) qui revêt une importance clinique particulière. La prise en charge de ce type de battements, lorsqu'ils apparaissent en grand nombre a beaucoup évolué au cours de la dernière décennie, surtout dans le cadre de l'identification des patients à risque de mort subite rythmique.

Tous les classificateurs qui seront étudiés par la suite sont destinés à la classification de deux types de battements : les battements normaux (notés NOR) et les battements ventriculaires prématurés (notés PVC).

Pour mettre en œuvre notre procédure de classification nous avons construit trois ensembles de signaux à partir de la base MIT-BIH, la dérivation choisie (dérivation A) correspond soit à la dérivation frontale D2 soit à la dérivation précordiale V5. Ces ensembles sont définis comme suit:

EA : Ensemble d'Apprentissage, à partir duquel on forme les prototypes qui représentent les classes à discriminer. Il est formé à partir de 31 enregistrements.

ETR : Ensemble de Test Réduit, sur lequel on fait la recherche heuristique du couple (représentation, distance D) conduisant au taux optimal de classification. Il est formé à partir de 30 enregistrements.

ETE : Ensemble de Test Etendu, permettant de mesurer la capacité de généralisation de la procédure que nous avons testée sur l'ensemble ETR. Il regroupe tous les battements de type NOR et PVC de la base MIT-BIH, exceptés ceux qui sont utilisés dans EA (47 enregistrements ont été utilisés).

Pour le choix des signaux constituant les ensembles EA et ETR nous avons essayé d'utiliser des battements de tous les enregistrements de la base de données MIT-BIH, ce choix est fait tel que les enregistrements utilisés dans l'ensemble de test ETR soient dans leur majorité différents à ceux utilisés dans l'ensemble d'apprentissage EA mais sans avoir des ensembles de tailles importantes, cela permet de garantir :

- Une bonne description statistique des classes considérées.
- Un temps de calcul aussi réduit que possible.
- Une bonne évaluation des performances de classification.

Le tableau 4.1 de la page suivante met en évidence la constitution des trois ensembles comparée à celle de la base MIT-BIH.

### 3 Prétraitement

Comme nous l'avons indiqué dans le premier chapitre, l'enregistrement du signal ECG est généralement entaché de différents bruits (électromyogramme, ondulation de la ligne de base, interférences du secteur 50Hz,...). La suppression de ces bruits nécessite une opération de filtrage, les signaux de la base MIT-BIH sont déjà traités par un filtre passe bande (0.1-100 Hz), ce filtre ne suffit pas pour éliminer toutes les sortes de bruits (comme l'ondulation de la ligne de base par exemple), toutefois, on a choisi de se contenter de la qualité de ce filtrage qui n'est pas très puissant et ceci pour deux raisons :

- 1) Il n'est pas dans notre intention de développer un filtre puissant pour le traitement des signaux ECG.
- 2) On va montrer plus tard qu'il y a une possibilité de réduire considérablement l'effet du bruit sur les performances de classification sans filtrer les signaux à classer

La détection des ondes (P, QRS et T) du signal ECG est une étape essentielle et préliminaire pour passer à la classification des battements cardiaques. Cependant, ce problème ne sera pas traité dans cette étude et par conséquent l'identification des pics R nécessaires à l'extraction des battements va se faire en utilisant les labels d'annotations fournis avec la base de données MIT-BIH. Ainsi, chaque battement cardiaque sera représenté par un segment de 100 points, en prenant le point correspondant au pic R plus 49 points et 50 points respectivement à gauche et à droite de R. Ils sont centrés ensuite en soustrayant la valeur moyenne.

Enreg MIT-BIH	MIT-BIH		EA		ETR		ETE	
	NOR (40enr)	PVC (37enr)	NOR (20enr)	PVC (11enr)	NOR (19enr)	PVC (11enr)	NOR (40enr)	PVC (37enr)
100	2239	1	14	0	0	0	2223	1
101	1860	0	15	0	0	0	1844	0
102	99	4	0	0	0	0	99	4
103	2082	0	17	0	0	0	2064	0
104	163	2	16	0	0	0	147	2
105	2526	41	13	0	0	0	2512	41
106	1507	520	15	20	0	0	1492	500
107	0	59	0	10	0	0	0	49
108	1740	16	14	0	0	0	1725	16
109	0	38	0	0	0	10	0	38
111	0	1	0	0	0	0	0	1
112	2537	0	15	0	0	0	2520	0
113	1789	0	16	0	0	0	1771	0
114	1820	43	0	0	15	20	1820	43
115	1953	0	0	0	14	0	1951	0
116	2302	109	0	20	17	0	2301	89
117	1534	0	0	0	14	0	1532	0
118	0	16	0	0	0	10	0	16
119	1543	444	0	0	20	20	1543	444
121	1861	1	0	0	15	0	1859	1
122	2476	0	0	0	14	0	2474	0
123	1515	3	0	0	16	0	1514	3
124	0	47	0	10	0	0	0	37
200	1743	826	15	20	0	0	1727	806
201	1625	198	14	0	0	0	1610	198
202	2061	19	17	0	0	0	2043	19
203	2529	444	13	20	0	0	2515	424
205	2571	71	16	0	0	0	2554	71
207	0	105	0	0	0	20	0	105
208	1586	992	15	0	0	20	1570	992
209	2621	1	14	0	0	0	2605	1
210	2423	194	16	0	0	20	2405	194
212	923	0	15	0	0	0	907	0
213	2641	220	0	20	20	0	2639	200
214	0	256	0	0	0	20	0	256
215	3196	164	0	20	14	0	3194	144
217	244	162	0	20	17	0	244	142
219	2082	64	0	0	14	20	2082	64
220	1954	0	0	0	20	0	1952	0
221	2031	396	0	20	15	0	2030	376
222	2062	0	0	0	14	0	2060	0
223	2029	473	0	0	17	20	2028	473
228	1688	362	0	0	14	20	1687	362
230	2255	1	0	0	15	0	2253	1
231	314	2	15	0	0	0	299	2
232	0	0	0	0	0	0	0	0
233	2230	831	15	20	0	0	2214	810
234	2700	3	0	0	15	0	2699	3
Total	75054	7129	300	200	300	200	74708	6928

Tab. 4.1 : Constitution des trois ensembles EA, ETR et ETE à partir de la base de données MIT-BIH (dérivation A), (enreg : enregistrement)

Une représentation graphique des deux types de battements NOR et PVC est donnée par la figure 4.1. La variabilité morphologique des battements est clairement visible. On remarque aussi dans le cas normal l'existence de complexes QRS inversés, l'apparition de tels complexes dépend de la dérivation utilisée et des conditions d'enregistrement et elle ne constitue aucun signe de pathologie cardiaque, mais d'un point de vue traitement du signal ce type de battement peut poser certains problèmes. Dans le cadre de la classification automatique des battements, les complexes inversés ont un impact néfaste sur deux propriétés fortement souhaitables en classification, d'un coté ils augmentent la dispersion intra-classe et de l'autre coté ils diminuent la divergence interclasse. Il convient aussi de rappeler que le tracé d'un battement PVC est caractérisé par deux propriétés : l'onde R n'est pas précédé d'une onde P et la durée du complexe QRS est supérieur à celle d'un complexe QRS normal. Notons que dans la figure 4.1 (a : cas des battements normaux) l'onde P est présente pour certains tracée mais elle n'apparaît pas clairement à cause de la superposition des tracées, par contre pour d'autre tracées elle est soit tronquée soit complètement absente du segment choisi (100 points), cette dernière situation est une conséquence normale de la variabilité de la fréquence cardiaque.

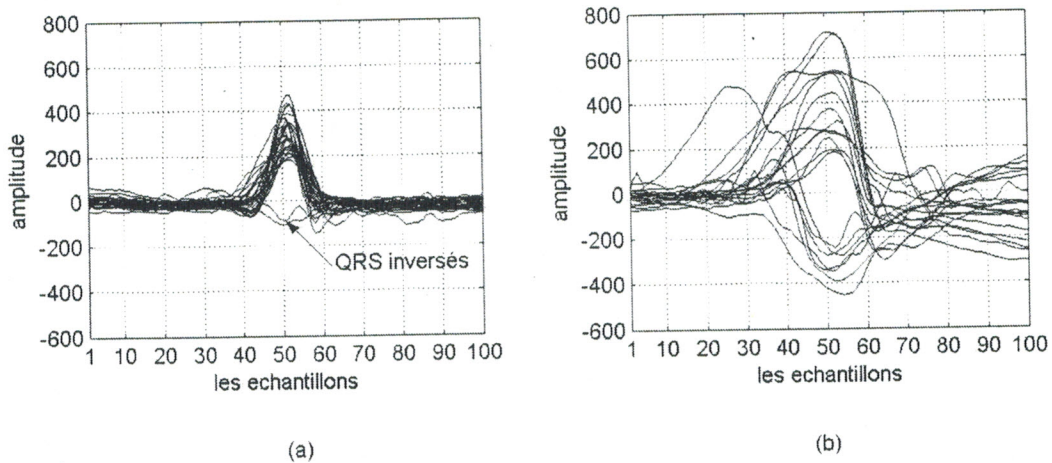


Figure 4.1 : Exemples de battements sélectionnés de l'ensemble EA. (a) : NOR, (b) : PVC

## 4 Classification des battements cardiaques par utilisation des paquets d'ondelettes

Les méthodes de classification utilisant les paquets d'ondelettes comme moyen de description des signaux s'appuient essentiellement sur l'utilisation de l'algorithme de la base discriminante locale (Local Discriminant Basis : LDB) qui a été développé en 1994 par Saito et Coifman (voir annexe C). Le principe de cet algorithme consiste à rechercher la base de paquets d'ondelettes (dénotee LDB) qui fournit la plus grande divergence entre les différentes classes à séparer. Après avoir déterminé cette base, les signaux sont représentés suivant ses coordonnées et délivrés à un classificateur (réseaux de neurones, analyse discriminante linéaire, k plus proche voisins...) pour prédire leurs classes d'appartenance. La réduction de dimensionnalité du problème est possible en représentant les signaux sur un nombre restreint de coordonnées : les premières coordonnées les plus discriminantes de la base LDB.

Dans cette section nous allons suivre cette méthodologie pour classifier les battements cardiaques NOR et PVC décrites dans les paragraphes précédents. Plusieurs points relatifs à la classification seront discutés : apprentissage, taux de classification, capacité de généralisation, robustesse vis-à-vis du bruit et bien d'autres.

### 4.1 Phase d'apprentissage

La phase d'apprentissage permet de déterminer la base LDB et les coordonnées les plus discriminantes de cette base (dénotees par MDC : Most Discriminant Coordinates) qui permet la réduction de la dimensionnalité du problème.

La figure 4.2 illustre les différentes étapes de cette opération. A partir de l'ensemble d'apprentissage EA on construit pour chaque classe de signaux une carte d'énergie temps-échelle (voir l'annexe C), ceci requiert le choix de l'ondelette analysante utilisée pour décomposer les signaux en paquets d'ondelettes. Ces cartes d'énergie ( $\Gamma^{(NOR)}$  et  $\Gamma^{(PVC)}$ ) résument en un sens donné la statistique des classes correspondantes. Le principe de l'algorithme LDB consiste à manipuler ces cartes d'énergie comme étant représentants de leurs classes et recherche en partant de ces représentants la base de paquet d'ondelettes (LDB) qui donne la plus grande divergence entre ces cartes d'énergie. Cette divergence est estimée en utilisant une mesure de distance D.

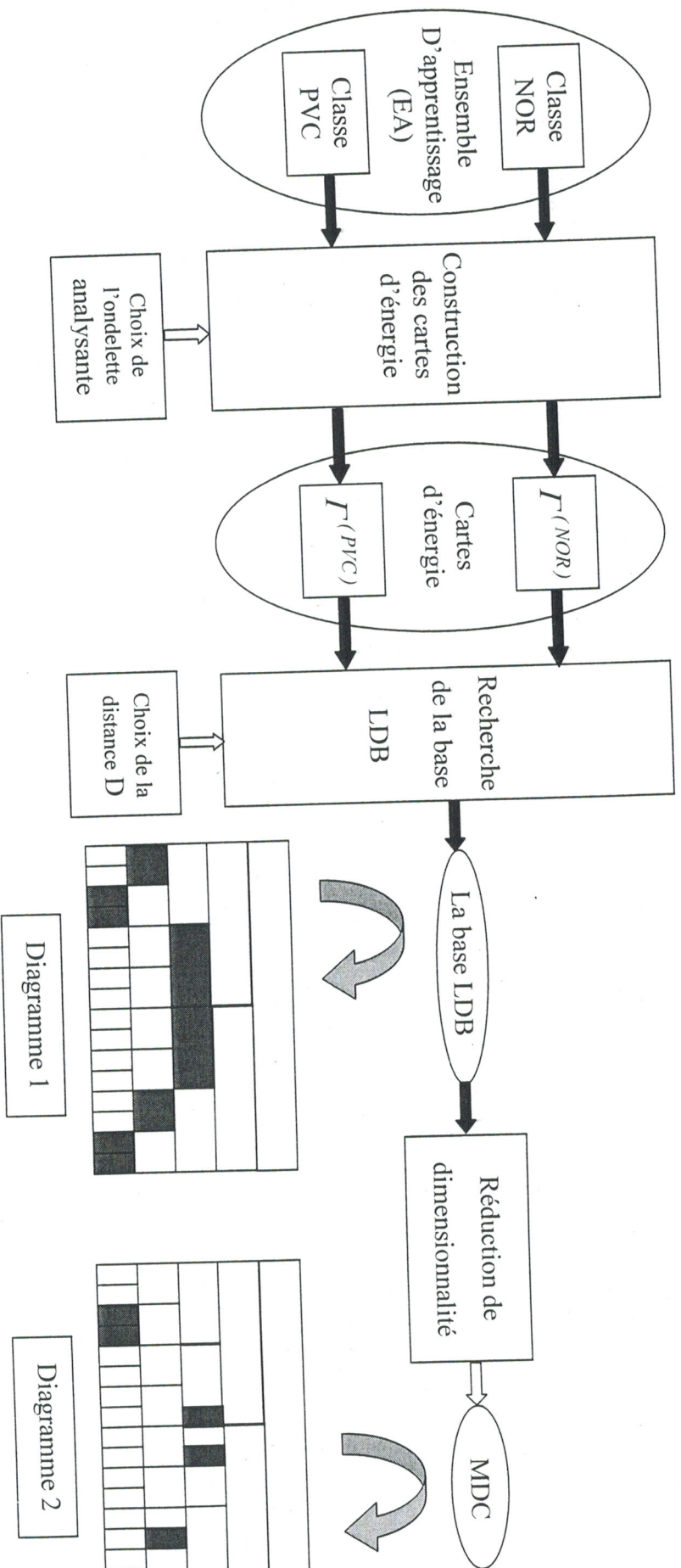


Figure 4.2 : Phase d'apprentissage

La réduction de la dimensionnalité du problème est faite en évaluant sur les mêmes cartes d'énergie la puissance de discrimination de chaque coordonnée de la base LDB ensuite nous gardons les premières coordonnées les plus discriminantes (MDC) pour construire notre classificateur. Cette réduction est fortement souhaitable aussi bien pour l'utilisation finale du classificateur que pour son optimisation. La localisation de la base LDB et des coordonnées MDC dans le plan temps-échelle sont illustrées respectivement par les diagrammes 1 et 2 de la figure 4.2, cet exemple correspond à un signal  $x \in R^{16}$ .

## 4.2 Phase de test

La phase de test permet d'évaluer les performances de notre classificateur sur un ensemble de signaux expertisés. Dans notre cas il s'agit en premier lieu d'évaluer le taux de classification sur l'ensemble ETR. La figure 4.3 illustre les étapes mises en jeu dans la procédure de test. Pour chaque signal B de l'ensemble de test nous construisons la distribution d'énergie normalisée correspondante (voir l'annexe C) et on retient de cette distribution les coefficients ( $\Gamma_{(MDC)}^{(B)}$ ) correspondant aux coordonnées MDC déterminées dans la phase d'apprentissage, ces coefficients sont présentés au classificateur, qui est dans notre cas basé sur la règle du plus proche représentant. Cette règle de décision nécessite le choix d'une distance et la définition d'un représentant (prototype) pour chaque classe d'apprentissage, on a choisi de représenter chaque classe par les coefficients correspondant aux coordonnées MDC de sa carte d'énergie calculée dans la phase d'apprentissage, c'est-à-dire,  $\Gamma_{(MDC)}^{(NOR)}$  et  $\Gamma_{(MDC)}^{(PVC)}$ . La décision est prise en affectant le battement B à la classe dont le représentant est le plus proche au descripteur du battement  $\Gamma_{(MDC)}^{(B)}$  (au sens de la distance choisie), c'est-à-dire :

$$B \text{ affecté à la classe } NOR \Leftrightarrow NOR = \underset{\text{classe}}{\operatorname{arg\,min}} D(\Gamma_{(MDC)}^{(B)}, \Gamma_{(MDC)}^{(\text{classe})}) \quad \text{For.4.1}$$

On dit que le battement B est bien classé si la classe fournie par le classificateur est la même que celle attendue. Le taux de classification global est calculé après avoir évalué la réponse du classificateur vis-à-vis de tous les signaux de l'ensemble de test, il est exprimé en pourcentage et calculé comme suit:

$$TC = \frac{N_{rec} \cdot 100}{N} \quad \text{For.4.2}$$

où  $N_{rec}$  est le nombre de signaux de test bien classés et  $N$  est le nombre total des signaux constituant l'ensemble de test.



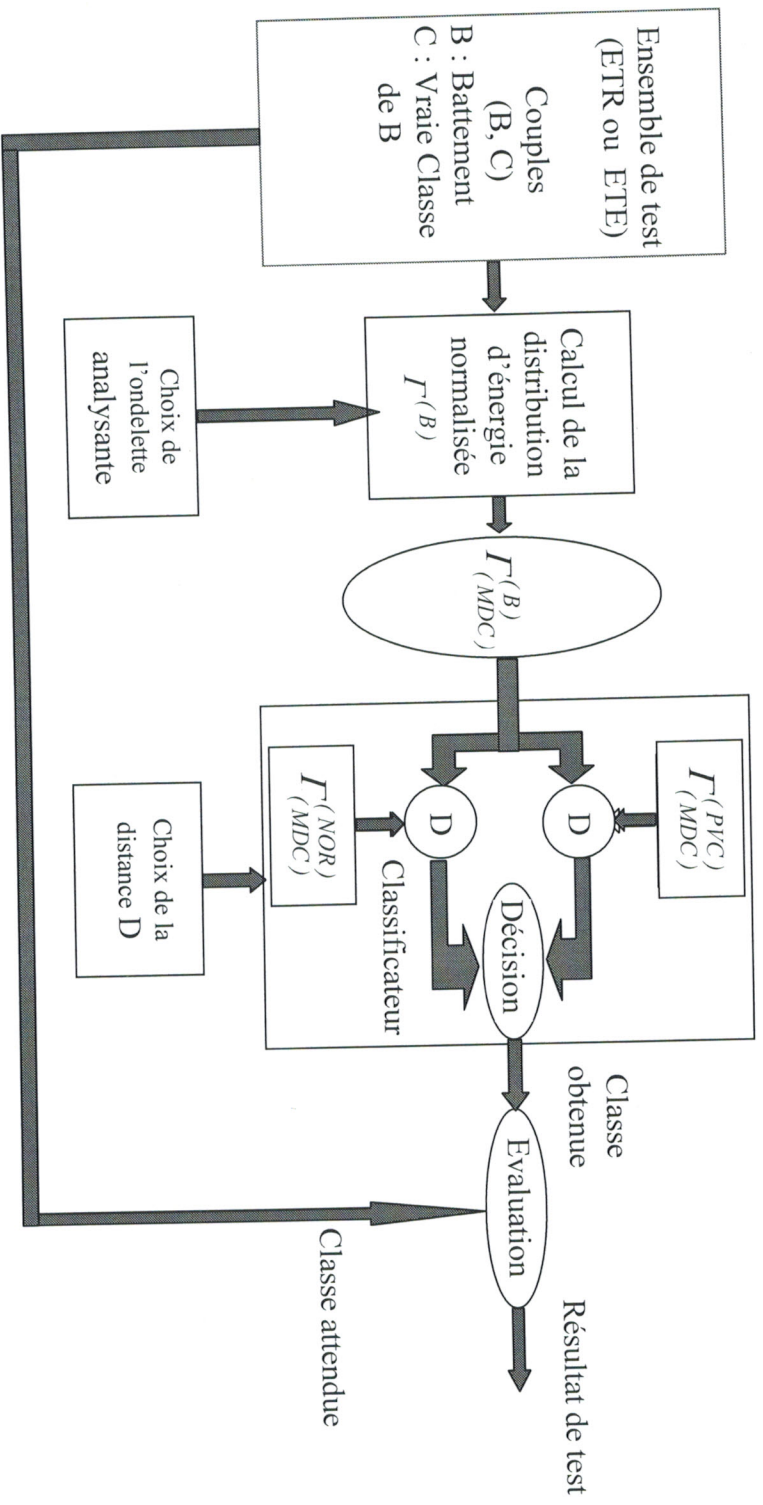


Figure 4.3 : Phase de test

### 4.3 Choix de l'ondelette analysante et de la distance D

Pour vérifier la propriété de conservation d'énergie dans le plan temps-échelle le choix de l'ondelette analysante doit être limité aux familles d'ondelettes orthonormales. Nous avons choisi dans cette étude d'utiliser les ondelettes suivantes :

- Les ondelettes de Daubechies (db1 à db15).
- Les Coiflets (coif1 à coif5).
- Les Symlets (sym2 à sym8).

Une description générale de ces ondelettes est donnée dans l'annexe B.

La figure 4.4 présente quelques exemples de distribution d'énergie en utilisant la décomposition en paquets d'ondelettes. Nous remarquons très bien que le spectre d'un battement de type NOR occupe une bande de fréquence plus large que celle occupée dans le spectre d'un battement de type PVC.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que le choix de la distance D n'est pas unique et plusieurs types de distances sont disponibles. On définit dans ce qui suit les trois distances que nous avons étudié.

Soit  $p$  et  $q$  deux séquences non négatives telles que  $\sum_i p(i) = \sum_i q(i) = 1$

1) Distance quadratique ( $Q$ )

$$Q(p, q) = \sum_i (p(i) - q(i))^2 \quad \text{For.4.3}$$

2) Entropie relative ou distance de Kullback-Leibler ou encore ( $I$ -divergence)

$$I(p, q) = \sum_i p(i) \log\left(\frac{p(i)}{q(i)}\right) \quad \text{For.4.4}$$

avec les conventions suivantes :  $\log 0 = -\infty$ ,  $\log\left(\frac{x}{0}\right) = +\infty$ , pour  $x > 0$ ,  $0.(\pm\infty) = 0$ .

3) Entropie relative symétrique ou ( $J$ -divergence)

$$J(p, q) = I(p, q) + I(q, p) \quad \text{For.4.5}$$

Les distances 1 et 3 sont symétrique, c'est-à-dire,  $D(p, q) = D(q, p)$  par contre la distance 2 est asymétrique

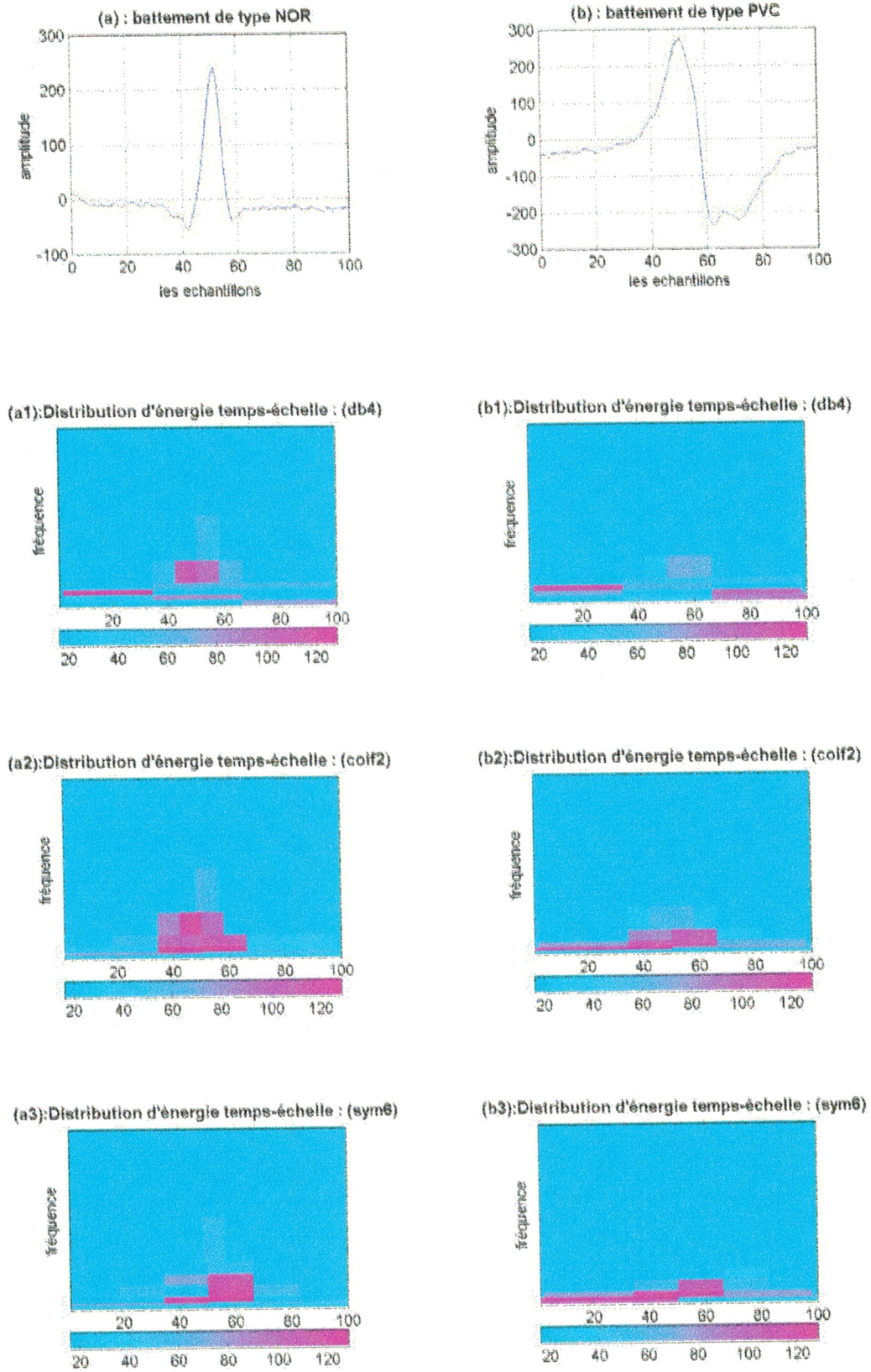


Figure 4.4 : Exemples de distributions d'énergie temps-échelle en utilisant les paquets d'ondelettes db4, coif2 et sym6

Il est important de noter que l'ondelette analysante et la distance utilisées dans la phase de test doivent être les mêmes que celles utilisées dans la phase d'apprentissage pour déterminer les coordonnées MDC et les cartes d'énergie  $\Gamma^{(NOR)}$  et  $\Gamma^{(PVC)}$ .

### Remarque sur la normalisation

Les deux dernières distances  $I$  et  $J$  sont à l'origine destinées pour la comparaison des distributions de probabilité, il est nécessaire donc de normaliser les représentations temps-fréquence ou temps-échelle utilisées, pour les rendre positives et d'intégrale unitaire [DAV00].

## 4.4 Résultats et Discussions

Les résultats que nous allons présenter dans cette section sont tous obtenus en suivant la procédure de classification définie ci-dessus.

### 4.4.1 Recherche de la procédure de classification optimale

La disposition de plusieurs familles d'ondelettes et de différents choix de distances nous conduit naturellement à rechercher le couple (ondelette, distance) qui donne les meilleures performances de classification. Malheureusement il n'existe pas de méthode systématique pour mener cette recherche, la solution passe donc par le choix heuristique du couple optimal (ondelette, distance), pris dans la gamme que nous avons définie dans le paragraphe 4.3. Afin d'accélérer les calculs induits par cette recherche, les taux de classification ont été évalués sur l'ensemble de test réduit (ETR : 500 éléments).

Les expérimentations faites nous ont conduit à choisir le nombre de coordonnées MDC égal à 10, la figure 4.5 illustre cette situation, le taux de classification (évalué sur l'ensemble d'apprentissage : EA) reste pratiquement inchangé après le coefficient 10.

Compte tenu de ces choix, les performances seront données en terme de taux de classification. Les tableaux 4.2 et 4.3 regroupent respectivement les performances obtenues en utilisant la distance quadratique et l'entropie relative symétrique. Une ondelette optimale est déterminée pour chaque distance.

Ces résultats montrent l'importance du choix du couple (ondelette, distance). La meilleure performance a été trouvée par le couple (db13, entropie relative symétrique) dont le partitionnement (clustering) des signaux de l'ensemble ETR réalisé suivant les deux premiers coefficients MDC est donné par la figure 4.6. On remarque bien l'existence de deux régions celle qui regroupe les battements NOR et celle qui regroupe les battements PVC.

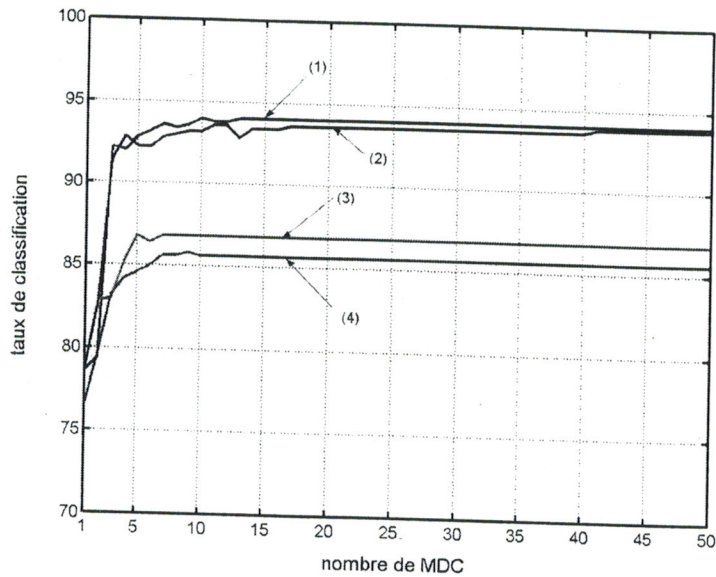


Figure 4.5 : Evolution du taux de classification en fonction du nombre de coordonnées MDC considérés, (1) :coif2, J-divergence, (2) :db13, J-divergence (3) : db13, distance quadratique, (4) : coif2, distance quadratique

Choix de l'ondelette	Taux de Classification (%)		
	NOR	PVC	Total
db6	79.33	95.5	85.8
Optimisé (coif1)	92.33	86	89.8

Tab. 4.2 : Distance quadratique ( $Q$ )

Choix de l'ondelette	Taux de Classification (%)		
	NOR	PVC	Total
db6	87.66	87.50	87.60
Optimisé (db13)	92.33	91.50	92 %

Tab. 4.3 : Entropie relative symétrique (J-divergence)

Choix de l'ondelette	Taux de Classification (%)		
	NOR	PVC	Total
Toutes les ondelettes	100	0	60

Tab. 4.4 : Entropie relative (I-divergence)

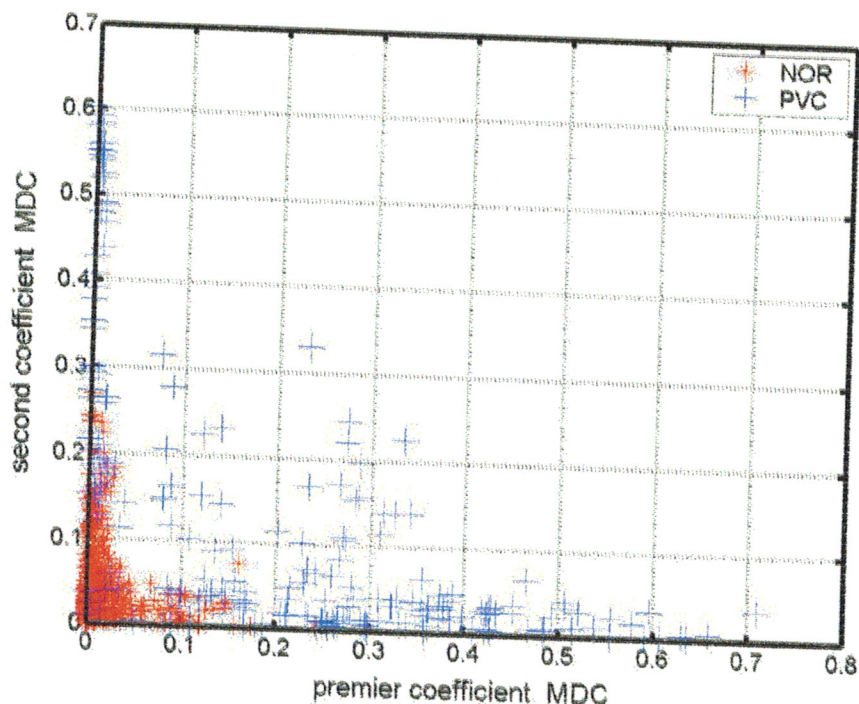


Figure 4.6 : Partitionnement des signaux de l'ensemble ETR  
(db13, entropie relative symétrique)

En comparant les résultats optimaux obtenus par ces deux distances on peut remarquer que le taux de classification optimal réalisé par l'entropie relative symétrique revient à une augmentation en taux de classification des battements PVC. Par contre le taux de classification des battements NOR reste le même que celui trouvé par la distance quadratique.

Les performances obtenues par l'entropie relative (tableau 4.4) ont reflété la nature asymétrique de cette distance: le classificateur a pu reconnaître tous les battements normaux mais en contre partie aucun battement ventriculaire prématuré n'est reconnu.

#### 4.4.2 Capacité de généralisation

Afin d'évaluer la capacité de généralisation de notre approche, la meilleure configuration ainsi obtenue est testée sur l'ensemble de test étendu (ETE : 81636 éléments). Les performances réalisées sont données dans le tableau 4.5 de la page suivante. Une légère diminution en taux de classification est marquée entre le test réduit et le test étendu, ce qui prouve la bonne généralisation du classificateur vis-à-vis de la statistique des classes de battements cardiaques considérées (NOR, PVC).

Enreg	NOR			PVC			TC total (%)
	nombre total	nombre reconnu	T C (%)	nombre total	nombre reconnu	T C (%)	
100	2223	2223	100	1	1	100	100
101	1844	1841	99,84				99,84
102	99	77	77,78	4	3	75	77,67
103	2064	2064	100				100
104	147	146	99,32	2	2	100	99,33
105	2512	2297	91,44	41	8	19,51	90,29
106	1492	1491	99,93	500	453	90,60	97,59
107				49	49	100	100
108	1725	151	8,75	16	9	56,25	9,19
109				38	33	86,84	86,84
111				1	0	0	0
112	2520	2517	99,88				99,88
113	1771	1771	100				100
114	1820	1200	65,93	43	42	97,67	66,67
115	1951	1951	100				100
116	2301	2280	99,09	89	89	100	99,12
117	1532	1531	99,93				99,93
118				16	4	25	25
119	1543	1543	100	444	444	100	100
121	1859	365	19,63	1	0	0	19,62
122	2474	2473	99,96				99,96
123	1514	1514	100	3	3	100	100
124				37	36	97,30	97,30
200	1727	1698	98,32	806	666	82,63	93,33
201	1610	1609	99,94	198	196	98,99	99,83
202	2043	2032	99,46	19	18	94,74	99,42
203	2515	1153	45,84	424	314	74,06	49,91
205	2554	2554	100	71	62	87,32	99,66
207				105	104	99,05	99,05
208	1570	1558	99,24	992	990	99,80	99,45
209	2605	2605	100	1	1	100	100
210	2405	2324	96,63	194	166	85,57	95,81
212	907	907	100				100
213	2639	2639	100	200	196	98	99,86
214				256	174	67,97	67,97
215	3194	3194	100	144	123	85,42	99,37
217	244	137	56,15	142	139	97,89	71,50
219	2082	2038	97,89	64	59	92,19	97,72
220	1952	1952	100				100
221	2030	2028	99,90	376	376	100	99,92
222	2060	2048	99,42				99,42
223	2028	1940	95,67	473	428	90,49	94,68
228	1687	1652	97,92	362	359	99,17	98,15
230	2253	2242	99,51	1	1	100	99,51
231	299	299	100	2	2	100	100
233	2214	1682	75,97	810	783	96,67	81,51
234	2699	2696	99,89	3	3	100	99,89
Total	74708	68422	91,59	6928	6336	91,45	91,57

Tab. 4.5 : Résultats de test sur l'ensemble ETE pour la meilleure configuration obtenue (db13, entropie relative symétrique)

### 4.4.3 Robustesse vis-à-vis du bruit

Il est important aussi d'évaluer la robustesse du classificateur en présence de bruits. Ceci est possible en ajoutant aux signaux à classer un bruit avec différentes valeurs du rapport signal sur bruit (SNR), les signaux résultants seront présentés au classificateur et les performances seront calculées sur l'ensemble (ETR). Le bruit utilisé a été obtenu en filtrant le signal ECG par la transformée en ondelette discrète, ce bruit s'identifie à la somme des deux détails D1 et D2 calculés par l'ondelette db4 [BOT06]. La figure 4.7 illustre l'évolution du taux de classification des signaux bruités en fonction des valeurs de SNR. Le tracé 1 traduit l'évolution du taux de classification évalué en utilisant les 10 premiers coefficients MDC, un faible écart existe pour les faibles valeurs de SNR entre celui-ci et celui donné dans le cas des signaux non bruités (tracé 3).

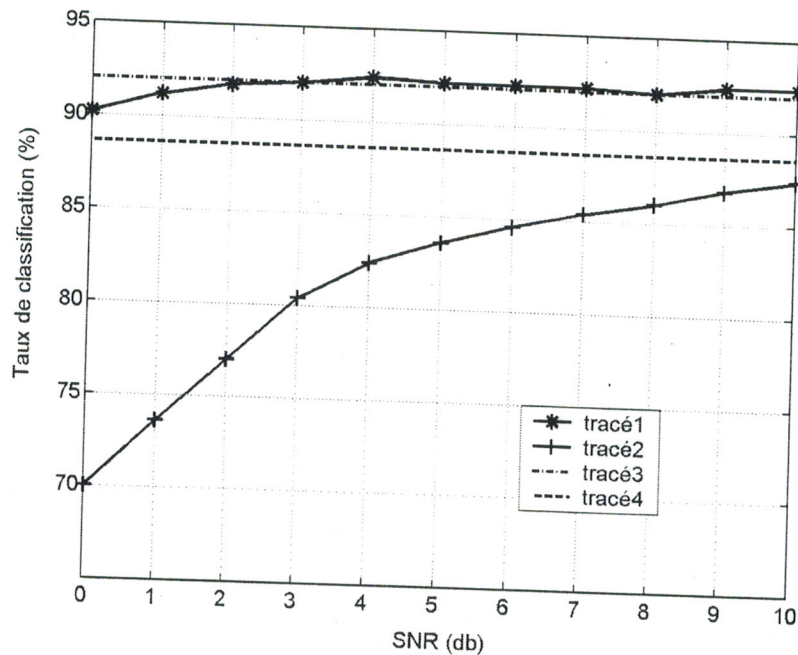


Figure 4.7 : Evolution du taux de classification en fonction du taux SNR  
(ETR, db13, entropie relative symétrique)

L'utilisation des coordonnées les plus discriminantes (MDC) permet en plus de la réduction de dimensionnalité de ne pas prendre en compte lors de la classification les coefficients sensibles au bruit. Ces coefficients sont généralement peu discriminants puisque l'apparition du bruit dans l'enregistrement du signal ECG ne dépend pas du type de battement enregistré. Pour mettre en évidence cette propriété on garde les deux premiers coefficients MDC de l'exemple précédent et on remplace le reste par huit coefficients pris du paquet



d'ondelettes (1,1), ceux-ci sont très peu discriminants et fortement corrélés avec le bruit ajouté, on obtient une évolution de taux de classification (tracé 2 de la figure 4.7) nettement réduit par rapport au taux réalisé pour les signaux non bruités en utilisant les mêmes coefficients (tracé 4).

## 5 Classification des battements cardiaques par utilisation de la distribution de Wigner-Ville

Nous avons vu dans la section précédente que les performances de classification ont été améliorées en optimisant le choix de l'ondelette analysante, donc l'ondelette optimale va donner la distribution d'énergie temps-échelle la plus adéquate à notre problème de classification. Une autre façon pour améliorer ces performances consiste à changer le type de représentation lui-même. Le but de cette section est d'étudier les performances de classification de la procédure décrite précédemment en utilisant la distribution de Wigner-Ville (représentation de type temps-fréquence).

### 5.1 Calcul des cartes d'énergie

Nous avons vu dans le chapitre 2 que la distribution de Wigner-Ville peut prendre des valeurs négatives, pour pouvoir comparer ces distributions par des distances prévues à l'origine pour des distributions de probabilité (l'entropie relative par exemple) une normalisation préalable est nécessaire pour rendre ces distributions positives et d'intégrale unitaire. La suppression des termes négatifs conduit à une perte d'information et sera évitée. A l'usage, il apparaît que la valeur absolue de la représentation temps-fréquence permet une bonne comparaison. Les cartes d'énergie sont donc élaborées comme suit :

- 1) Calculer la distribution de Wigner-Ville normalisée  $\tilde{W}_x(t, \nu)$  pour chaque signal  $x$  de l'ensemble d'apprentissage EA.

$$\tilde{W}_x(t, \nu) = \frac{|W_x(t, \nu)|}{\sum_t \sum_\nu |W_x(t, \nu)|} \quad \text{For.4.6}$$

- 2) Calculer la carte d'énergie temps-fréquence  $\Gamma^{(classe)}$  de chaque classe en prenant la moyenne des distributions normalisées correspondant aux signaux de la classe considérée :

$$\Gamma_{(t,\nu)}^{(NOR)} = W^{(NOR)}(t, \nu) = \frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} \tilde{W}_{x_i}^{(NOR)}(t, \nu) \quad \text{For.4.7}$$

$$\Gamma_{(t,\nu)}^{(PVC)} = W^{(PVC)}(t, \nu) = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} \tilde{W}_{x_i}^{(PVC)}(t, \nu) \quad \text{For.4.8}$$

## 5.2 Extraction des paramètres discriminants

L'extraction des coordonnées les plus discriminantes à partir de ces deux cartes d'énergie se fait en calculant le contraste de Fisher (voir le paragraphe 3.2.1, chapitre 3). Le résultat est un ensemble de coordonnées MDC, c'est-à-dire, les premières coordonnées de plus fort contraste.

Pour classer un battement  $s$  nous calculons d'abord sa distribution de Wigner-Ville normalisée correspondante  $\Gamma^{(s)}$  :

$$\Gamma_{(t,\nu)}^{(s)} = \tilde{W}_s(t, \nu) \quad \text{For.4.9}$$

En utilisant la règle du plus proche représentant dans l'espace réduit aux coordonnées MDC, le battement  $s$  sera classé en comparant les deux distances  $D(\Gamma_{(MDC)}^{(s)}, \Gamma_{(MDC)}^{(NOR)})$  et  $D(\Gamma_{(MDC)}^{(s)}, \Gamma_{(MDC)}^{(PVC)})$ , avec :

$\Gamma_{(MDC)}^{(NOR)}$  Prototype représentant de la classe NOR : Coefficients correspondant aux coordonnées MDC de la carte d'énergie  $\Gamma^{(NOR)}$ .

$\Gamma_{(MDC)}^{(PVC)}$  Prototype représentant de la classe PVC : Coefficients correspondant aux coordonnées MDC de la carte d'énergie  $\Gamma^{(PVC)}$ .

$\Gamma_{(MDC)}^{(s)}$  Coefficients correspondant aux coordonnées MDC de la distribution de Wigner-Ville normalisée du battement  $s$ .

Nous avons vu dans le chapitre 2 que l'inconvénient majeur de la distribution de Wigner-Ville est la présence des termes d'interférences (figure 4.8 a1 et b1) dus à la nature quadratique de la transformation mise en jeu. En utilisant la transformée de Hilbert du signal traité le nombre de ces termes se trouve réduit (figure 4.8 a2 et b2) mais l'importance des termes restants est inchangée. L'utilisation de la distribution pseudo Wigner-Ville lissée (DPWVL) permet de réduire l'importance des termes restants par un choix convenable des deux fenêtres  $h$  et  $g$  et leurs longueurs  $L_h$  et  $L_g$  (figure 4.8 a3 et b3).

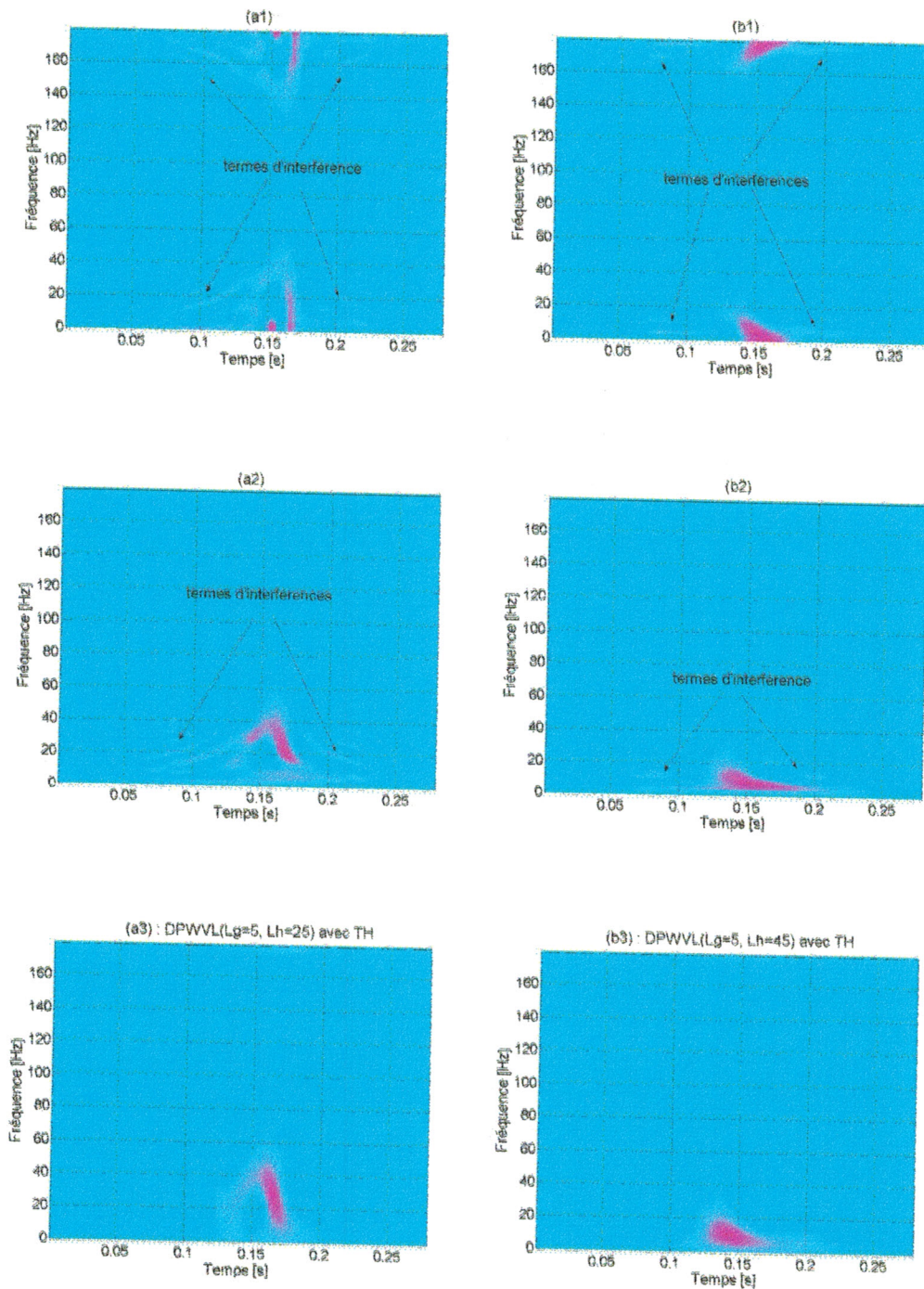


Figure 4.8 : Réduction des termes d'interférence de la DWV par utilisation de la transformée de Hilbert et la DPWVL, les figures a1, a2 et a3 correspondent à un battement de type NOR et les figures b1, b2 et b3 correspondent à un battement de type PVC, le lissage a été fait par la fenêtre de parzen.

Notre but ici consiste à étudier d'un côté les performances de classification qu'elle peut donner l'utilisation de la distribution de Wigner-Ville et d'autre côté l'influence des termes d'interférences sur ces performances.

### 5.3 Résultats et Discussions

#### 5.3.1 Distribution de Wigner-Ville

On présente dans ce qui suit les performances de classification obtenues en utilisant la distribution de Wigner-Ville sans transformée de Hilbert (Tab. 4.6) et avec transformée de Hilbert (Tab. 4.7). Les performances ont été évaluées sur l'ensemble de test réduit (ETR) pour la distance quadratique et l'entropie relative symétrique, les taux indiqués correspondent au premier coefficient MDC.

Distances	Taux de Classification (%)		
	NOR	PVC	Total
<b>Distance quadratique</b>	79,66	84,50	81,60
<b>Entropie relative symétrique</b>	84	81,50	83

Tab. 4.6 : Performances de classification (DWV sans transformée de Hilbert)

Distances	Taux de Classification (%)		
	NOR	PVC	Total
<b>Distance quadratique</b>	87.33	76.50	83
<b>Entropie relative symétrique</b>	89	75	83.4

Tab. 4.7: Performances de classification (DWV avec transformée de Hilbert)

Ces résultats ont montré que l'utilisation de la transformée de Hilbert a donné une légère amélioration du taux de classification total (surtout dans le cas de la distance quadratique). Cette amélioration a été accompagnée par un changement relativement important dans le taux de classification de chaque classe séparément et ceci pour les deux distances utilisées. Donc l'utilisation de la transformée de Hilbert a une influence sur la puissance de discrimination de la représentation temps-fréquence résultante. Cela nous conduit à poser la question suivante : est-ce qu'on peut généraliser ce résultat en précisant que la présence des termes d'interférences dans la distribution de Wigner-Ville a toujours un effet néfaste sur la qualité de classification ? Pour répondre à cette question on va traiter cette

fois-ci la réduction des termes d'interférence en utilisant un lissage temporel et fréquentiel, il s'agit donc d'utiliser la distribution pseudo Wigner-Ville lissée (DPWVL).

### 5.3.2 Recherche de la procédure de classification optimale

L'utilisation de la DPWVL pour réduire les termes d'interférence nécessite un choix convenable des deux fenêtres de lissage (fenêtre de lissage fréquentiel  $h$  et celle du lissage temporel  $g$ ) ainsi que leurs longueurs  $Lh$  et  $Lg$ . La figure 4.9 illustre l'influence des longueurs  $Lh$  et  $Lg$  sur la lisibilité de l'image temps-fréquence produite par la DPWVL. Théoriquement si on prend  $h(t) = 1$  et  $g(t) = \delta(t)$  on retrouve la définition de la DWV non lissée, en pratique une situation proche de celle-ci peut être atteinte en choisissant  $Lh$  très grande et  $Lg$  très petite (voir la figure 4.9, la première image à gauche  $Lh = 85$  et  $Lg = 5$ ).

La recherche de la procédure de classification optimale consiste alors à trouver comme dans le cas des paquets d'ondelettes le couple (représentation, distance) qui donne les meilleures performances. Cela revient à déterminer les cinq paramètres ( $h$ ,  $Lh$ ,  $g$ ,  $Lg$ , distance) conduisant à la meilleure discrimination entre les classes d'apprentissage NOR et PVC. Les tableaux 4.8 et 4.9 reportent respectivement les meilleures performances de classification obtenues sans transformée de Hilbert et avec transformée de Hilbert ; pour chaque cas deux distances (quadratique, entropie relative symétrique) et 16 types de fenêtre (voir l'annexe D) ont été étudiées pour différentes combinaisons ( $Lh$ ,  $Lg$ ). Pour le choix de ces combinaisons on s'est limité au cas où les deux fenêtres  $h$  et  $g$  ont le même type.

Distances	Taux de Classification (%)			Fenêtres h et g
	NOR	PVC	Total	
<b>Distance quadratique</b>	93,33	95	94	h : Dolph, Lh: 11 g : Dolph, Lg: 47
<b>Entropie relative symétrique</b>	95,33	94	94,8	h : Parzen, Lh: 5 g : Parzen, Lg: 69

Tab. 4.8 : Meilleures performances de classification (DPWVL sans TH, ensemble de test ETR)

Distances	Taux de Classification (%)			Fenêtres h et g
	NOR	PVC	Total	
<b>Distance quadratique</b>	98	82,33	91,8	h : Parzen, Lh: 7 g : Parzen, Lg: 83
<b>Entropie relative symétrique</b>	98,33	82,5	92	h : Nutbess, Lh: 5 g : Nutbess, Lg: 65

Tab. 4.9 : Meilleures performances de classification (DPWVL avec TH, ensemble de test ETR)

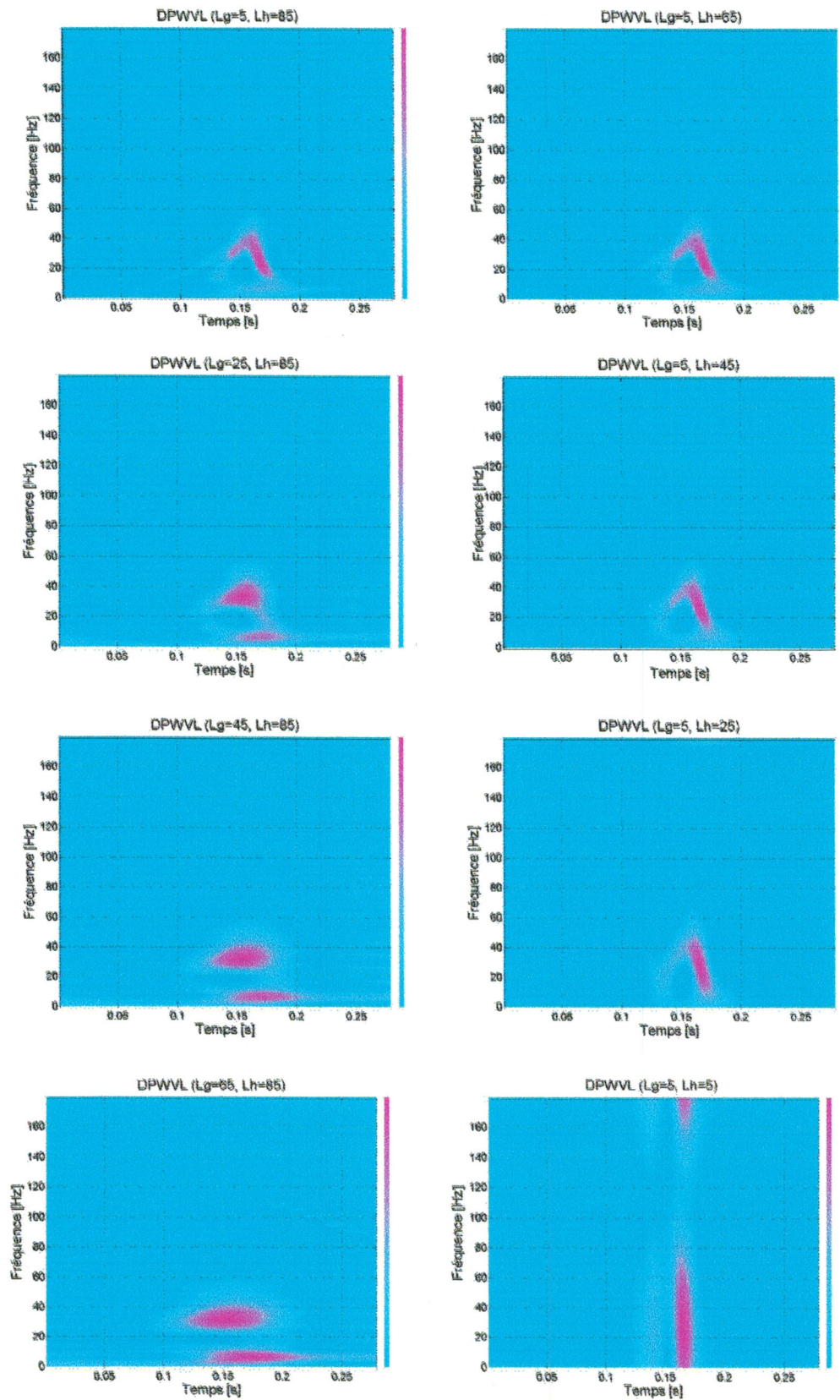


Figure 4.9 : DPWVL d'un battement de type NOR pour différentes longueurs  $L_h$  et  $L_g$ , les images qui sont à gauche illustrent la variation de  $L_g$  avec  $L_h$  constante, celles qui sont à droite illustrent la variation de  $L_h$  avec  $L_g$  constante, la fenêtre utilisée est celle de Parzen pour toutes les images.

Ces résultats ont été obtenus en utilisant seulement le premier coefficient MDC. La figure 4.10 représente une justification de ce choix. Elle montre l'évolution du taux de classification évalué sur l'ensemble d'apprentissage EA en fonction du nombre de coefficients MDC considérés pour différentes configurations du classificateur. On remarque bien que le taux de classification reste approximativement inchangé ou peu variable quel que soit le nombre de coefficient MDC considérés. Donc on peut se contenter du premier coefficient parce que la prise en compte de plusieurs coefficients va augmenter le temps de calcul sans améliorer les performances de classification.

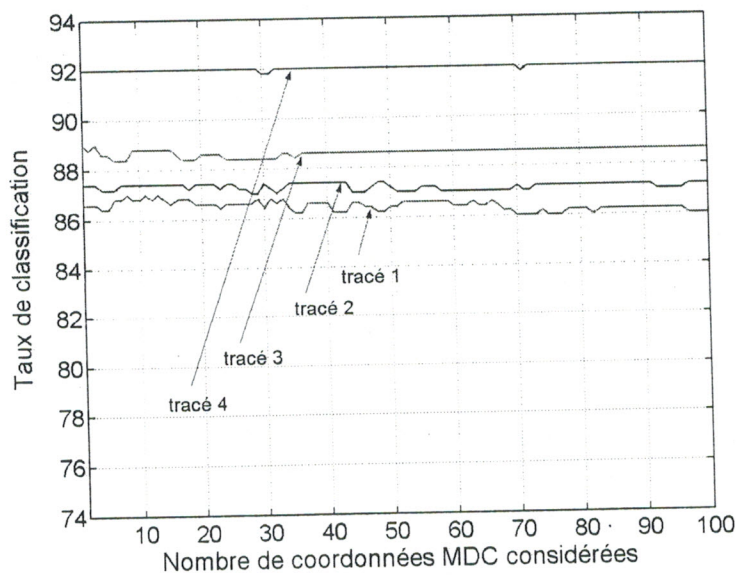


Figure 4.10 : Evolution du taux de classification évalué sur l'ensemble d'apprentissage EA en fonction du nombre de coordonnées MDC considérées,

Tracé1 : (Sans TH, J-divergence, Gauss ( $L_h = 5$ ,  $L_g = 65$ ), ensemble EA),

Tracé2 : (Sans TH, quadratique, Gauss ( $L_h = 5$ ,  $L_g = 65$ ), ensemble EA),

Tracé3 : (avec TH, quadratique, Nutbess ( $L_h = 5$ ,  $L_g = 65$ ), ensemble EA),

Tracé4 : (avec TH, J-divergence, Rect ( $L_h = 5$ ,  $L_g = 65$ ), ensemble EA),

### 5.3.3 Classification ou lisibilité ?

Les performances obtenues en utilisant la DPWVL (qu'elle soit avec ou sans transformée de Hilbert) sont nettement meilleures à celles obtenues par la DWV non lissée. Ceci peut nous conduire à croire que la suppression des termes d'interférences donne toujours une meilleure discrimination entre les classes d'apprentissage, en effet, cette conclusion n'est pas exacte pour deux raisons :

- 1) le lissage qui a donné une meilleure discrimination ne donne pas nécessairement une meilleure lisibilité de l'image temps-fréquence, cette situation est illustrée par l'exemple de la figure 4.11
- 2) La discrimination obtenue par la DPWVL sans transformée de Hilbert est meilleure à celle obtenue avec transformée de Hilbert malgré que cette dernière permet de réduire le nombre des termes d'interférences.

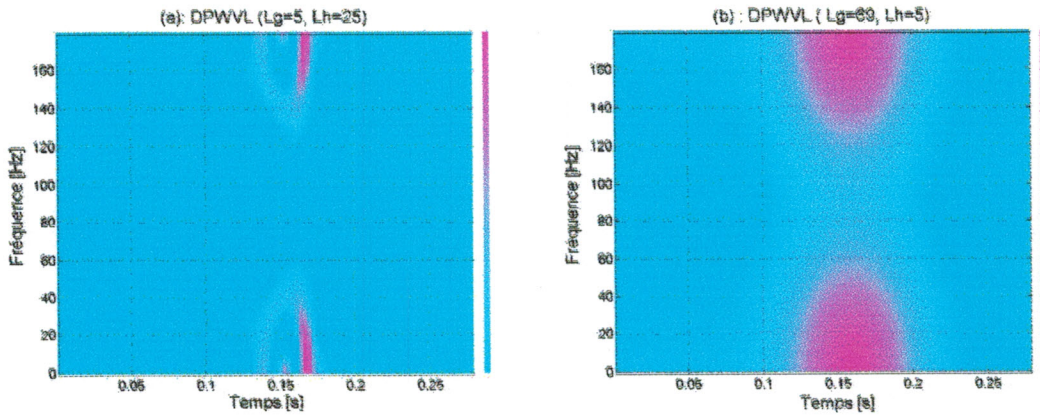


Figure 4.11 : DPWVL d'un battement de type NOR bien classé en utilisant la fenêtre Parzen  
(a) : meilleure lisibilité (image dépourvue des interférences avec une bonne résolution)  
(b) : meilleure discrimination (image avec une mauvaise résolution)

Compte tenu de ces remarques on peut conclure de façon plus générale que le lissage de la DWV est une opération qui permet de transformer la distribution originale pour avoir une meilleure lisibilité de l'image temps-fréquence résultante, l'objectif est donc la suppression des termes d'interférences tout en gardant la meilleure résolution possible. Dans notre contexte, la suppression des termes d'interférences n'est pas un objectif, parce que ces interférences contiennent des informations qui peuvent être discriminantes comme la phase des différentes composantes [FLA98], mais ceci n'empêche pas de mettre à profit cette transformation pour obtenir une distribution plus discriminante. Donc il ne faut pas s'attendre à ce que les interférences disparaissent lorsque le but est la discrimination.

Cependant en pratique, et selon la nature des signaux traités le lissage visant à obtenir une meilleure discrimination, conduit généralement à une suppression partielle ou totale des termes interférences, mais cela doit être compris comme un effet secondaire du choix adopté



### 5.3.4 Capacité de généralisation

L'évaluation des performances de classification sur l'ensemble de test étendu de la meilleure configuration obtenue (DPWVL sans TH, h (Parzen, 5) g (Parzen, 69), entropie relative symétrique) a été effectuée elle aussi avec le premier coefficient MDC. Le tableau 4.10 de la page suivante reporte les taux de classification pour chaque enregistrement et chaque classe.

L'analyse de ces résultats a montré que les faibles taux de classification reportés pour certains enregistrements comme le 102, 108 ou 203 ont pour cause soit des battements NOR de QRS relativement larges ou inversés soit des battements PVC de QRS plus étroit, ceux-ci traduisent la nature non linéaire des données.

### 5.3.5 Robustesse vis-à-vis du bruit

Le test de robustesse vis-à-vis du bruit de la procédure de classification utilisant la DPWVL a été fait de la même manière que celle adoptée dans le cas des paquets d'ondelettes (voir ci-dessus le paragraphe 4.4.3). L'évolution du taux de classification en fonction du rapport signal sur bruit (SNR) est illustrée sur la figure 4.12, ces valeurs correspondent au test des signaux bruités sur l'ensemble ETR en utilisant toujours le premier coefficient MDC. Une nette réduction en taux de classification des signaux bruités (tracé1) est enregistrée par rapport au cas des signaux non bruités (tracé2) et ceci aussi bien pour les faibles valeurs de SNR que pour les fortes valeurs.

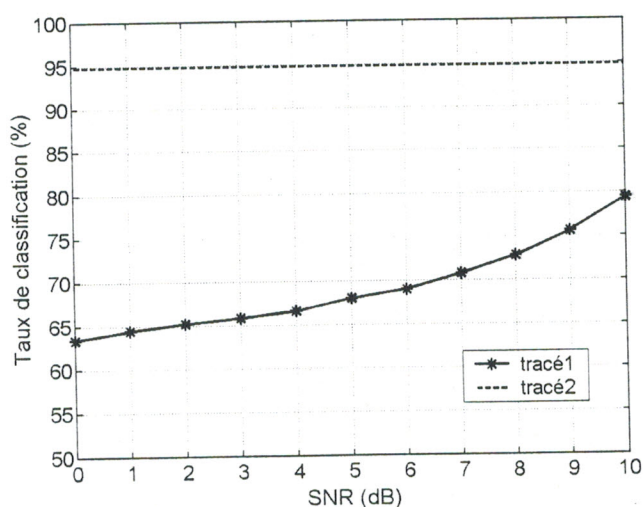


Figure 4.12 : Evolution du taux de classification en fonction du taux SNR (DPWVL sans TH, h (Parzen, 5) g (Parzen, 69), entropie relative symétrique)  
tracé 1 : signaux bruités, tracé 2 : signaux non bruités

Enreg	NOR			PVC			TC total (%)
	nombre total	nombre reconnu	TC (%)	nombre total	nombre reconnu	TC (%)	
100	2223	2223	100	1	1	100	100
101	1844	1840	99,78				99,78
102	99	0	0	4	4	100	3,88
103	2064	2060	99,81				99,81
104	147	97	65,99	2	2	100	66,44
105	2512	1422	56,61	41	37	90,24	57,15
106	1492	1483	99,40	500	487	97,40	98,90
107				49	49	100	100
108	1725	110	6,38	16	9	56,25	6,84
109				38	37	97,37	97,37
111				1	1	100	100
112	2520	2500	99,21				99,21
113	1771	1771	100				100
114	1820	1770	97,25	43	37	86,05	96,99
115	1951	1951	100				100
116	2301	2280	99,09	89	89	100	99,12
117	1532	1529	99,80				99,80
118				16	4	25	25
119	1543	1542	99,93	444	444	100	99,95
121	1859	1448	77,89	1	1	100	77,90
122	2474	2472	99,91				99,92
123	1514	1514	100	3	3	100	100
124				37	37	100	100
200	1727	1619	93,75	806	787	97,64	94,99
201	1610	1607	99,81	198	198	100	99,83
202	2043	2025	99,20	19	19	100	99,13
203	2515	224	8,90	424	351	82,79	19,56
205	2554	2554	100	71	69	97,19	99,92
207				105	105	100	100
208	1570	1537	97,90	992	992	100	98,71
209	2605	2602	99,88	1	1	100	99,88
210	2405	2299	95,59	194	179	92,27	95,34
212	907	904	99,67				99,67
213	2639	1750	66,31	200	200	100	68,69
214				256	237	92,58	92,58
215	3194	3171	99,28	144	139	96,53	99,16
217	244	240	98,36	142	141	99,30	98,70
219	2082	2078	99,80	64	56	87,50	99,44
220	1952	1952	100				100
221	2030	2023	99,65	376	376	100	99,71
222	2060	1994	96,80				96,80
223	2028	2012	99,21	473	459	97,04	98,80
228	1687	1406	83,34	362	362	100	86,29
230	2253	2242	99,51	1	1	100	99,51
231	299	299	100	2	2	100	100
233	2214	2047	92,46	810	800	98,76	94,15
234	2699	2695	99,85	3	3	100	99,85
Total	74708	67292	90,07	6949	6719	96,98	90,66

Tab. 4.10 : Résultats de test sur l'ensemble ETE pour la meilleure configuration obtenue (DPWVL sans TH, h (Parzen, 5) g (Parzen, 69), entropie relative symétrique)

## 6 Interprétations

### 6.1 Limitations

En examinant les résultats obtenus dans sa globalité (paquet d'ondelettes et Wigner - Ville) on peut rendre les raisons conduisant à l'erreur dans la classification à trois facteurs :

- 1) La nature de la décision prise par les règles à base de distances
- 2) La nature des données à classer
- 3) Le choix de l'ensemble d'apprentissage

Le premier facteur est lié à la méthode de classification que nous avons choisi, les deux derniers sont communs pour presque tous les problèmes de classification.

#### 6.1.1 Nature de la décision prise par les règles à base de distances

Il est intéressant dans le contexte de notre travail de mettre en évidence un point lié à la nature de la décision prise par les règles à base de distances et plus particulièrement celle qui est utilisée dans cette étude : règle du plus proche représentant. En général, la valeur de distance mesurée entre deux signaux ne reflète pas nécessairement dans tous les cas le degré de ressemblance morphologique entre eux. Si nous prenons les trois signaux synthétiques de la figure 4.13 et nous calculons la distance quadratique entre le signal à classer et les deux prototypes 1 et 2, on trouve que la règle du plus proche représentant affecte le signal à la classe représentée par le prototype 1 tandis que la morphologie du signal à classer est plus proche à celle du prototype 2. Cette fausse décision a été obtenue aussi pour l'entropie relative et l'entropie relative symétrique.

#### 6.1.2 Nature des données et choix de l'ensemble d'apprentissage

Pour discuter l'influence de ces deux facteurs sur les performances de classification nous allons prendre la configuration optimale obtenue dans le cas des paquets d'ondelette (voir le tableau 4.3 : entropie relative symétrique) et on essaye de comparer la morphologie des signaux de test (ensemble ETR) mal classés par cette configuration à celle des signaux d'apprentissage (ensemble EA) qui sont censés capables de résumer la statistique des signaux à classer. Pour cela nous avons choisi de représenter chaque groupe de signaux par la moyenne des signaux qu'il comporte.

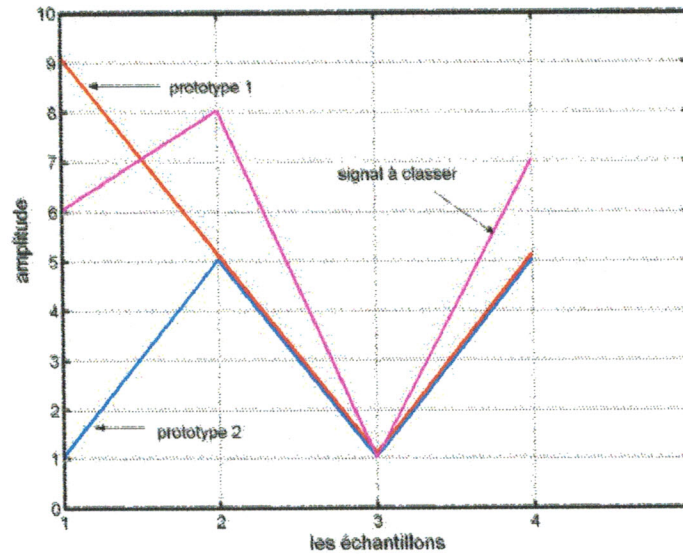
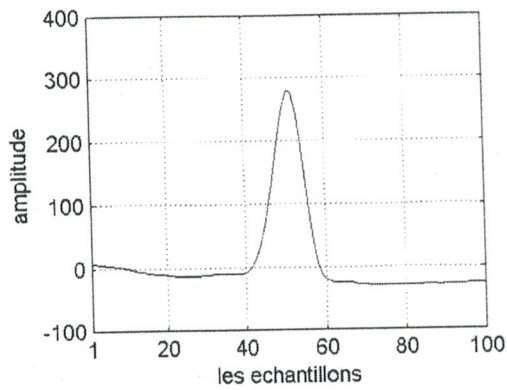


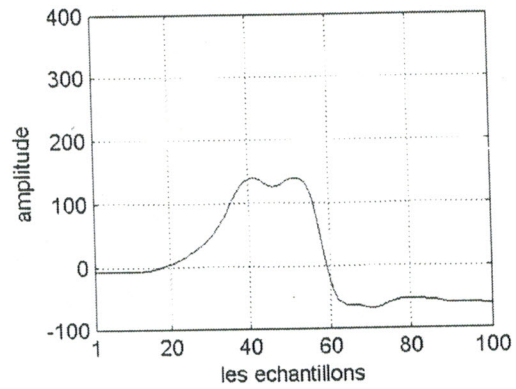
Figure 4.13 : Signaux synthétiques illustrant la limitation des règles de décision à base de distances : le signal à classer est plus proche morphologiquement au prototype 2 mais en terme de distance devient plus proche au prototype 1 qui possède une morphologie différente

La figure 4.14 représente les moyennes correspondantes aux signaux d'apprentissage : signaux de test bien classés et signaux de test mal classés. Il est aisé en regardant ces moyennes de remarquer la ressemblance entre la moyenne des signaux de type NOR qui sont mal classés (a3) et celle qui représente les signaux de type PVC dans l'ensemble d'apprentissage (b1), ainsi que la ressemblance entre la moyenne des signaux de type PVC qui sont mal classés (b3) et celle qui représente les signaux de type NOR dans l'ensemble d'apprentissage (a1). Cette ressemblance qui justifie en grande partie les fausses décisions prises sur la classe d'appartenance des signaux en question, elle peut être produite soit par la nature non linéaire des données à classer (signaux représentés par a3 et b3) soit par un mauvais choix de l'ensemble d'apprentissage ((signaux représentés par a1 et b1)) soit par les deux à la fois. Pour les signaux bien classés qu'ils soient de type NOR (a2) ou de type PVC (b2) nous remarquons bien que leur moyenne se ressemblent à celle qui représente leur classe correspondante dans l'ensemble d'apprentissage (c'est-à-dire : (a2) se ressemblent à (a1) et (b2) à (b1)) ce qui justifie également la bonne classification de ces battements.

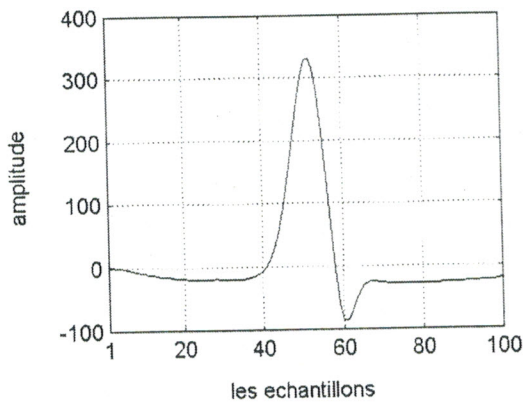
Si la nature des signaux à classer est une donnée qu'on ne peut pas changer, le choix de l'ensemble d'apprentissage et la définition suivant laquelle on construit les prototypes qui représentent les classes d'apprentissage peuvent être améliorés.



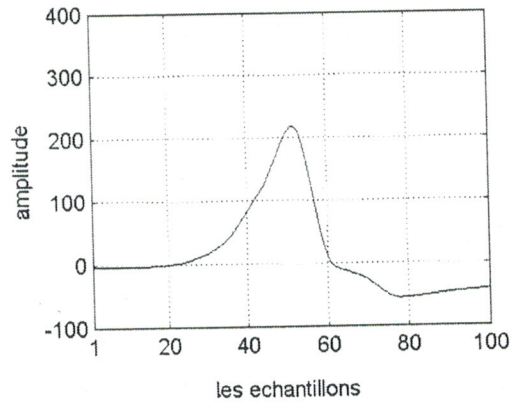
a1) signal moyen des battements NOR de l'ensemble d'apprentissage EA



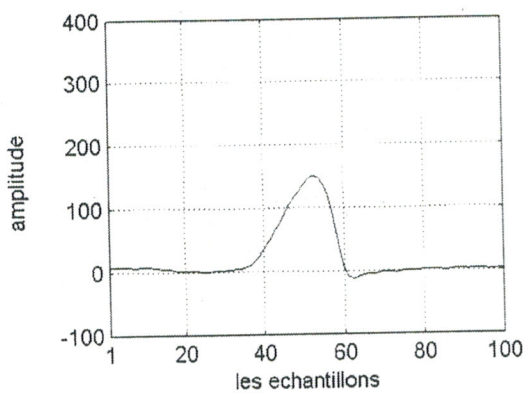
b1) signal moyen des battements PVC de l'ensemble d'apprentissage EA



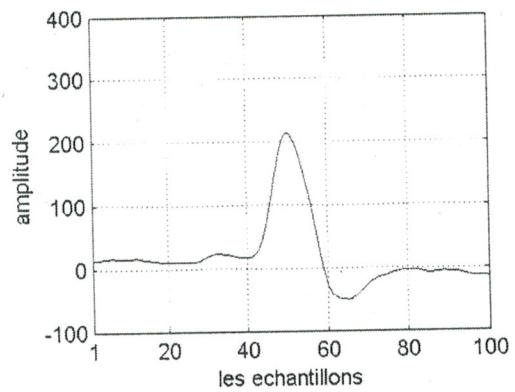
a2) signal moyen des battements NOR bien classés de l'ensemble de test ETR



b2) signal moyen des battements PVC bien classés de l'ensemble de test ETR



a3) signal moyen des battements NOR mal classés de l'ensemble de test ETR



b3) signal moyen des battements PVC mal classés de l'ensemble de test ETR

Figure 4.14 : Moyennes des signaux d'apprentissage (a1 et b1), des signaux de test bien classés (a2 et b2) et, des signaux mal classés (a3 et b3)

## 6.2. Filtrage implicite par paquets d'ondelette

L'approche basée sur l'utilisation des paquets d'ondelettes (représentation de type temps-échelle) pour l'extraction des descripteurs des signaux à classer a permis de concentrer l'énergie du bruit dans une région du plan temps-échelle qui reste pratiquement la même pour les deux classes des signaux considérés. Cette situation est illustrée par la figure 4.15, le tracé en rouge représente la distribution d'énergie du signal non bruité et ceux en bleu représentent les distributions d'énergie des signaux bruités avec des valeurs SNR allant de 0 à 10. Les triangles en vert indiquent les dix coordonnées MDC à partir desquels la classification est réalisée. On remarque très bien que dans les deux cas (NOR et PVC) l'énergie du bruit ajouté est localisée essentiellement dans les nœuds 2, 10 et 9 ceux-ci ne comportent aucun coefficient MDC parce qu'ils représentent la même information (le bruit ajouté), donc, ils sont inutiles de point de vue classification. Cela permet de donner aux performances de classification une forte robustesse vis-à-vis du bruit. On peut dire donc que cette approche de classification permet d'isoler l'effet du bruit sans supprimer le bruit lui-même ce qui correspond à un filtrage implicite.

## 7. Comparaison

La procédure de classification utilisant la distribution pseudo Wigner-Ville lissée a permis d'obtenir le meilleur taux de classification (94.8%) en partant d'un seul coefficient de l'image temps-fréquence. Mais en contre partie l'utilisation des paquets d'ondelettes a montré une bonne capacité de généralisation vis-à-vis de la statistique des classes considérées, et si nous comparons les performances des deux représentations sur l'ensemble de test étendu qui comporte 81636 battements cardiaques (tableau 4.11) on trouve que l'approche utilisant les paquets d'ondelettes devient la plus performante. De plus, cette dernière est très peu sensible au bruit, ce qui est fortement souhaitable dans les systèmes de classification travaillant dans un environnement clinique où la présence de bruit est une caractéristique commune.

Représentation	Performances évaluées sur l'ensemble de test réduit (500 battements)	Performances évaluées sur l'ensemble de test étendu (81636 battements)
Paquets d'ondelettes	92 %	91,57 %
DPWVL	94.8 %	90,66 %

Tab. 4.11 : Meilleures performances de classification réalisées

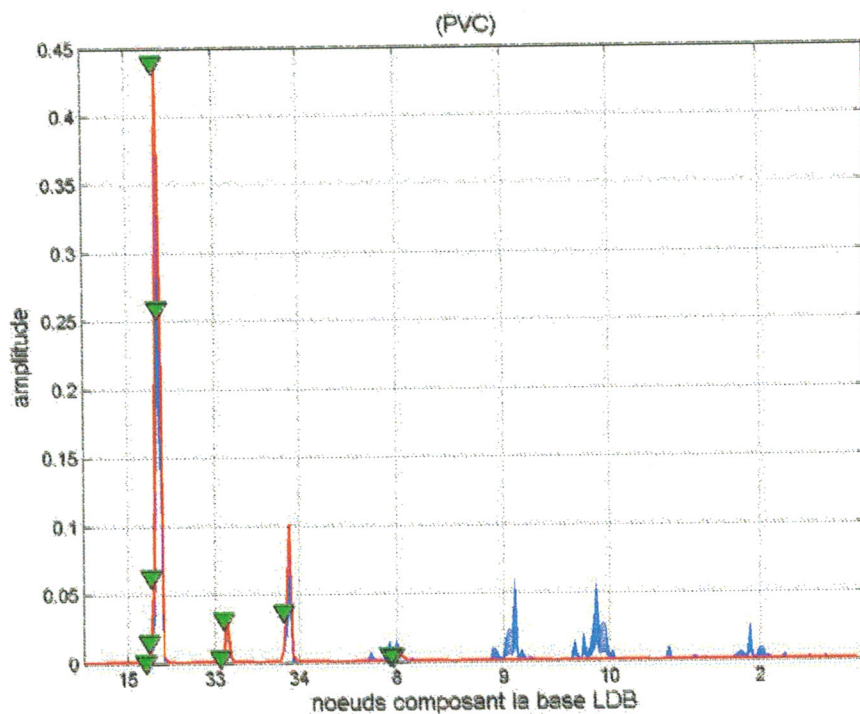
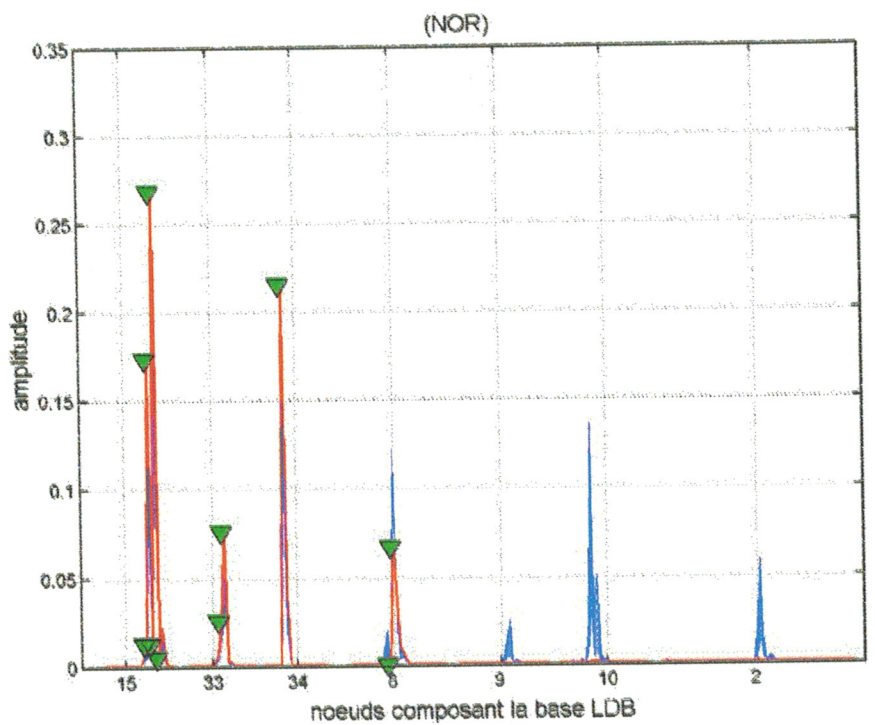


Figure 4.15 : Comparaison entre la distribution d'énergie sans bruit (en rouge) et celles avec bruit (SNR= 0, 1, ... 10) (en bleu)

Pratiquement toutes les expérimentations que nous avons mené (soit avec les paquets d'ondelettes ou avec la distribution de Wigner-Ville) ont montré que la mesure de distance par l'entropie relative symétrique (J-divergence) a toujours donné les meilleurs résultats par rapport aux deux autres distances (entropie relative (I-divergence) et la distance quadratique). Ceci peut être dû au fait que la valeur de l'entropie relative symétrique augmente plus rapidement que la distance quadratique lorsque les distribution sont normalisées (valeurs entre 0,et 1) (voir figure 4.16) ce qui permet d'accentuer les faibles discriminations qui peuvent être parfois déterminantes surtout lorsqu'elles apparaissent en grand nombre. La figure 4.16 montre également l'asymétrie de l'entropie relative :  $I(p, q) \neq I(q, p)$

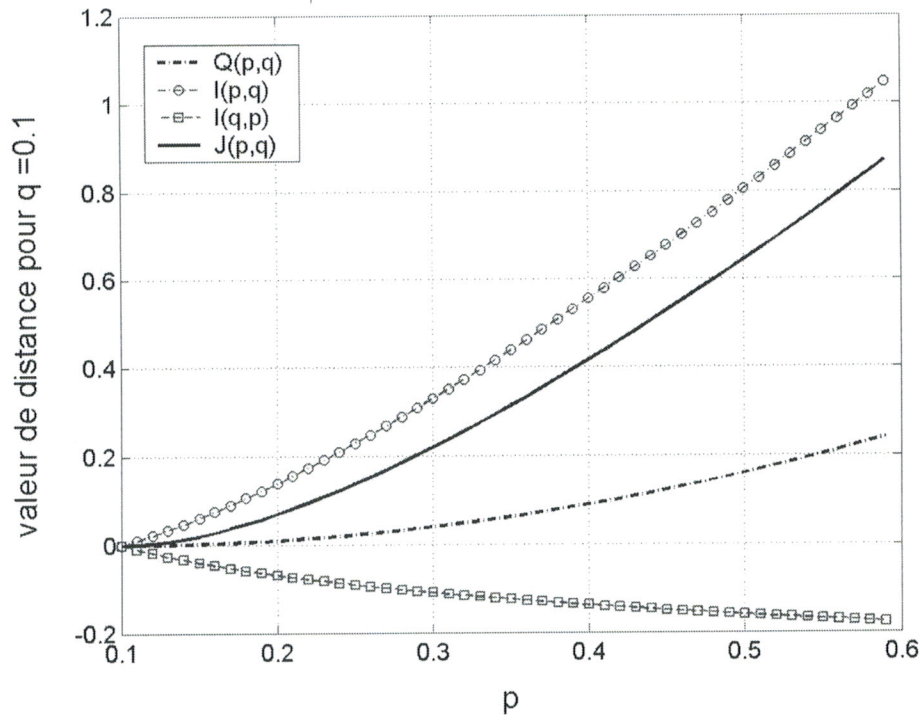


Figure 4.16 : Evolution des distances  $Q$ ,  $I$  et  $J$  entre deux points ( $p$  et  $q$ ) en fonction de l'écart ( $p-q$ )

De plus, nous avons

$$Q(p', q') = Q(p+u, q+u) = Q(p, q) \quad \forall u \in R \quad \text{For.4.10}$$

$$J(p', q') = J(p+u, q+u) \neq J(p, q) \quad \forall u \in R \quad \text{For.4.11}$$

Avec  $p' = p+u$  et  $q' = q+u$ .



C'est-à-dire que la valeur de la distance quadratique  $Q$  ne dépend que de l'écart ( $p-q$ ). Par contre l'entropie relative symétrique  $J$  dépend de l'écart ( $p-q$ ) et des valeurs de  $p$  et  $q$ . La figure 4.17 représente l'évolution des deux distances  $Q$  et  $J$  en fonction du paramètre  $u$  avec un écart fixe ( $p-q = 0.2$ ). On remarque que la distance  $Q$  correspondante à un écart entre deux points de petites amplitudes est plus grande que celle correspondante au même écart aux grandes amplitudes.

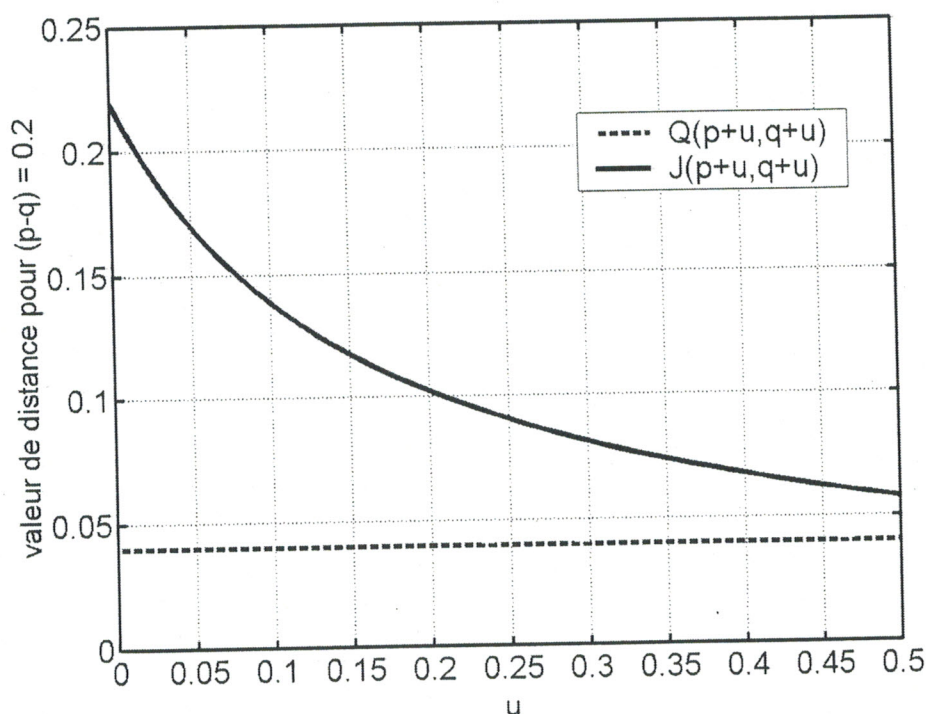


Figure 4.17 : Evolution des distances  $Q$  et  $J$  en fonction du paramètre  $u$  pour un écart ( $p-q$ ) constant

## 8 Remarque sur la programmation

La mise en oeuvre des procédures de classification que nous venons d'exposer dans ce chapitre a été faite en utilisant le langage de calcul technique MATLAB (Version 6.5, Release 13). Le calcul de la Distribution de Wigner-Ville et ses versions a été réalisé par les routines de la boîte à outils temps-fréquence (TFTB : Time-Frequency Toolbox for use with Matlab [AFGL96]).

# Conclusion et perspectives

L'application que nous venons de présenter est une illustration des performances de l'approche basée sur l'utilisation des distributions d'énergie pour la classification des signaux ECG. Dans ce manuscrit, nous avons abordé ce problème en utilisant deux types de représentation : les paquets d'ondelettes (représentation de type temps-échelle) et la distribution de Wigner-Ville (représentation de type temps-fréquence). La méthode de classification utilisée repose sur la règle du plus proche représentant, celle-ci est basée essentiellement sur le choix d'une distance et la représentation des classes d'apprentissage par des prototypes. La recherche empirique de la procédure de classification optimale passe par le choix heuristique d'un espace de représentation et d'une distance, pris dans une certaine gamme.

Les expérimentations menées dans ce contexte ont montré l'importance du choix du couple (représentation, distance). La réduction de dimensionnalité qui a été faite dans le cas des paquets d'ondelettes par l'algorithme LDB a permis d'obtenir à la fois un temps de calcul réduit et un filtrage implicite du bruit affectant le signal ECG. Cette dernière propriété est fortement souhaitable dans les systèmes de classification travaillant dans un environnement clinique où la présence de bruit est une caractéristique commune. Pour la distribution de Wigner-Ville, malgré que la présence des termes d'interférences n'a pas altéré les performances de classification, la capacité de généralisation et la robustesse vis-à-vis du bruit ont été relativement faibles comparés avec celles obtenues par les paquets d'ondelettes.

Quant à la description des signaux ECG et leur classification dans le plan temps-fréquence ou temps-échelle, plusieurs perspectives ou extensions liées à ce travail sont possibles :

- L'utilisation de l'algorithme « New LDB » qui est une variante de l'algorithme LDB original. Dans ce cas, la recherche de la base discriminante locale s'effectue en comparant les densités de probabilité empiriques des classes d'apprentissage.

- La Construction d'une ondelette orthogonale spécifique pour la classification des signaux ECG.
- Pour les solutions de type temps-fréquence nous pouvons étendre la recherche de la représentation optimale pour qu'elle comprenne d'autres distributions de la classe de Cohen. Dans ce cadre plusieurs distributions autres que la distribution de Wigner-Ville peuvent être étudiées : la distribution de Rihaczek, Page-Levin, Born-Jordan, Choi-Williams, Spectrogramme,.....
- Etudier d'autres distances pour la décision : distance de Kolmogorov, de Mahalanobis, de Matusita, de Bhattacharyya et bien d'autres.
- Chercher d'autres définitions de prototypes qui peuvent représenter les classes d'apprentissage d'une manière plus discriminante ou bien changer la règle de décision elle-même : règle du k plus proches voisins par exemple.
- En dehors des méthodes à base de prototypes et distances nous pouvons utiliser les descripteurs issus de notre analyse temps-fréquence pour construire des classificateurs en utilisant par exemple les réseaux de neurones, l'analyse discriminante linéaire...
- Etendre la classification pour qu'elle regroupe tous les cas pathologiques existant dans la base MIT-BIH : nous pouvons adopter le standard recommandé par l'association AAMI (Association for the Advancement of Medical Instrumentation) celui-ci organise la base de données MIT-BIH suivant cinq classes.

# Annexe A

## Rappels mathématiques

### Espace de Hilbert et orthogonalité

Soit  $H$  un espace de Hilbert, c'est-à-dire, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet par rapport à la métrique induite. Soit  $I$  un ensemble d'indices. On appelle système orthogonal une famille  $E = \{e_n : n \in I\}$  d'éléments non nuls de  $H$  telle que le produit scalaire  $\langle e_i, e_j \rangle$  est nul, pour tout  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ . Un système orthonormé est un système orthogonal dans lequel  $\|e_i\|_H = 1$ , pour tout  $i \in I$ . On appelle base orthonormée de  $H$  un système orthonormé  $E$  tel que [MAXI03] :

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \quad \text{For.A1}$$

pour tout  $x \in H$

### L'espace $L^2(\mathbb{R})$ [DAV00]

Un signal est en général une fonction complexe  $x$  de la variable réelle  $t$ :

$$\begin{aligned} x: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow x(t) \end{aligned}$$

Un signal  $x$  est dit d'énergie finie si l'intégrale d'énergie converge

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(u)|^2 du < +\infty \quad \text{For.A2}$$

L'ensemble des signaux d'énergie finie est noté  $L^2(\mathbb{R})$ , et  $E_x$  définit une norme sur cet espace. En outre, on peut définir un produit scalaire sur  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y^*(u) du \quad \text{For.A3}$$

où  $*$  désigne le conjugué complexe, et la norme définie par  $E_x$  est la norme induite par le produit scalaire, c'est-à-dire  $E_x = \langle x, x \rangle$ . Finalement,  $L^2(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel complet pour la norme  $E_x$ . Il s'agit donc d'un espace de Hilbert de signaux continus.

L'espace  $l^2(Z)$  [MAL98]

Dans le cas discret, l'ensemble des signaux discrets d'énergie finie est noté par  $l^2(Z)$  tel que l'énergie  $E_x$  :

$$E_x = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad \text{For.A4}$$

où le produit scalaire entre deux signaux discrets  $x[n]$  et  $y[n]$  est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n] \quad \text{For.A5}$$

et la norme  $l^2$  est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2} \quad \text{For.A6}$$

L'espace  $l^2(Z)$  des signaux discrets d'énergie finie est un espace de Hilbert.

## Transformé de Hilbert et signal analytique [REI97]

Soit  $x$  un signal réel et  $X(\nu) = A(\nu) + i B(\nu)$  sa transformée de Fourier où  $A$  désigne la partie réelle de  $X(\nu)$  et  $B$  sa partie imaginaire, alors

$$B(\nu) = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(u)}{u-\nu} du \quad \text{et} \quad A(\nu) = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(u)}{\nu-u} du \quad \text{For.A7}$$

VP : valeur principale de Cauchy

On dit que  $B$  est la **transformée de Hilbert** de  $A$  et  $A$  la **transformée de Hilbert inverse** de  $B$ , on nomme aussi ces deux relations, *relations de Kramers-Krönig* ou parfois *relations de dispersion*.

On appelle **signal analytique** le signal complexe  $z(t)$  tel que :

$$z(t) = x(t) + i TH\{x(t)\} \quad \text{For.A8}$$

où  $TH\{x(t)\}$  désigne la transformée de Hilbert du signal  $x(t)$ .

Le signal analytique s'obtient à partir du signal réel en forçant à zéro les valeurs du spectre pour les fréquences négatives, ce qui n'altère en rien le contenu informationnel puisque pour un signal réel  $X(-\nu) = X^*(\nu)$ . La troncature des fréquences négatives a pour seul effet de « complexifier » le signal initial [FLA98].

## Stationnarité

Un signal déterministe est dit stationnaire s'il peut être écrit comme somme discrète de sinusoïdes [AFGL96].

pour un signal réel 
$$x(t) = \sum_{k \in N} A_k \cos[2\pi\nu_k t + \phi_k] \quad \text{For.A9}$$

pour un signal complexe 
$$x(t) = \sum_{k \in N} A_k \exp[i(2\pi\nu_k t + \phi_k)] \quad \text{For.A10}$$

Dans le cas d'un signal aléatoire, un signal est dit stationnaire d'ordre deux (ou stationnaire au sens large) si [FLA98] :

- Sa valeur moyenne est indépendante du temps, c'est-à-dire est de la forme

$$E[x(t)] = \mu_x \quad \text{For.A11}$$

avec  $\mu_x$  est une constante et si

- Sa fonction de covariance s'identifie à une fonction de corrélation qui ne dépend que de la différence des instants considérés

$$E[x(t_1)x^*(t_2)] = \gamma_x(t_1 - t_2) \quad \text{For.A12}$$

# Annexe B

## Ondelettes Orthogonales

Nous présentons dans cette annexe les familles d'ondelettes orthogonales à support compact: les Daubechies, les symlets et les Coiflets.

### Ondelettes de Daubechies :

Les ondelettes de Daubechies sont probablement les plus utilisées en ce qui concerne les ondelettes orthogonales. Elles sont à support compact (les filtres  $H$  et  $G$  ont une réponse impulsionnelle finie). Ces ondelettes sont notées  $dbN$ , où  $db$  est le symbole donné pour Daubechies, et  $N$  est le nombre de moments nuls de l'ondelette. Les ondelettes de Daubechies sont supportées sur un intervalle de longueur  $2N-1$ . La figure B1 représente les fonctions d'échelles et ondelettes pour  $N = 1, 4, 6$  et  $13$ .

Les ondelettes à support compact de Daubechies sont particulièrement intéressantes dans la mesure où on peut choisir la régularité voulue en imposant un certain nombre de moments nuls: la régularité augmente avec  $N$ . De plus, étant à support compact, le calcul de la transformée en ondelettes est exacte. Néanmoins ces ondelettes présentent l'inconvénient de ne pas être symétriques. Ceci peut constituer un problème dans certains problèmes comme la détection de frontières [BOU97].

### Symlets :

Les symlets sont des ondelettes de Daubechies construites de telle sorte que la phase de  $H(\nu)$  soit la plus linéaire possible [BRI01]. Le support des symlets est  $2N+1$ . La figure B2, représente les fonctions d'échelle et ondelettes pour  $N = 2$  et  $5$ . Une meilleure symétrie par rapport aux ondelettes de Daubechies peut être remarquée.

## Coiflets :

Pour une application en analyse numérique Coifman a demandé à Daubechies de construire une famille d'ondelettes avec  $N$  moments nuls et un support de taille minimum, et dont la fonction d'échelle vérifie [BRI01]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \phi(t) dt = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N$$

Le résultat est les ondelettes Coiflets dont la taille du support est  $6N-1$  au lieu de  $2N-1$  pour une ondelette de Daubechies. La figure B3, représente les fonctions d'échelle et ondelettes pour  $N = 2$  et  $5$ .

## Paquets d'ondelettes

La figure B4 donne un exemple de fonctions  $W_n$  à partir desquelles les paquets d'ondelettes sont calculés, Le cas illustré par la figure correspond à l'ondelette db2,  $W_0$  correspond à la fonction d'échelle  $\phi$  et  $W_1$  correspond à l'ondelette  $\psi$ . On remarque que les fonctions  $W$  ont le même support :  $[0, 3]$ , par contre la fréquence moyenne de  $W$  varie en fonction de la valeur  $n$ .



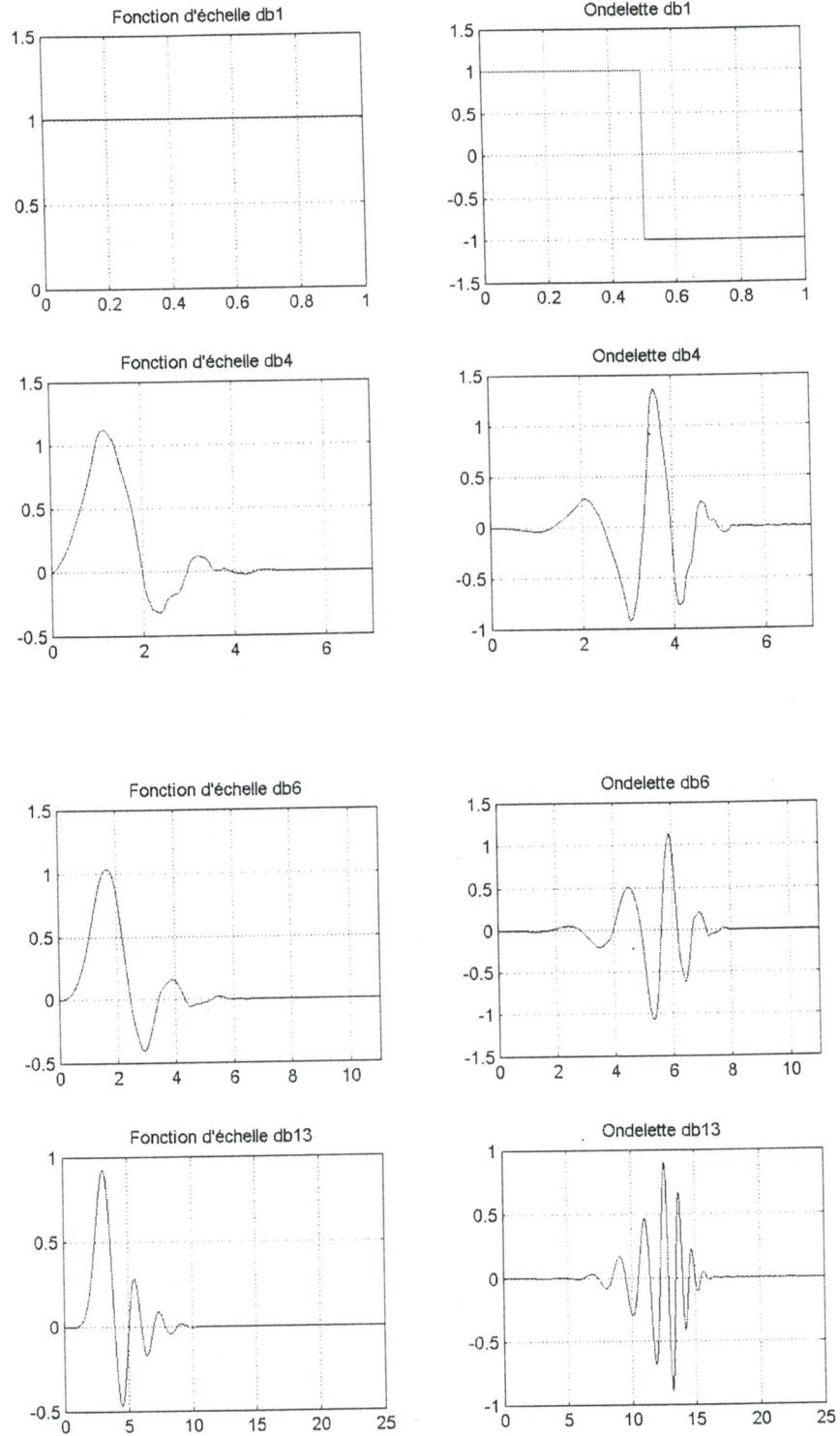


Figure.B1 : Fonctions d'échelles et ondelettes de Daubechies pour  $N = 1, 4, 6, 13$ .

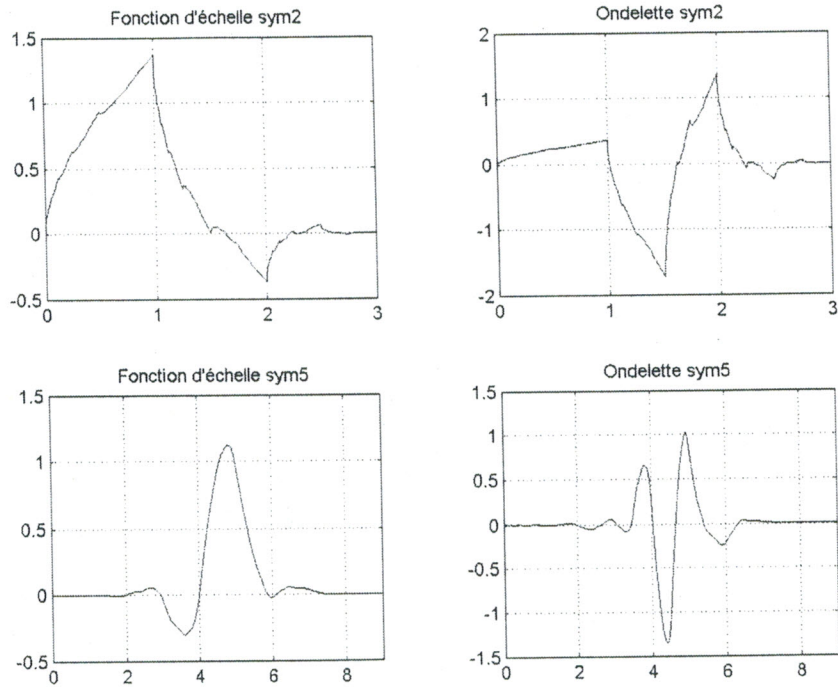


Figure.B2 : Fonctions d'échelles et ondelettes Symlets pour  $N = 2, 5$ .

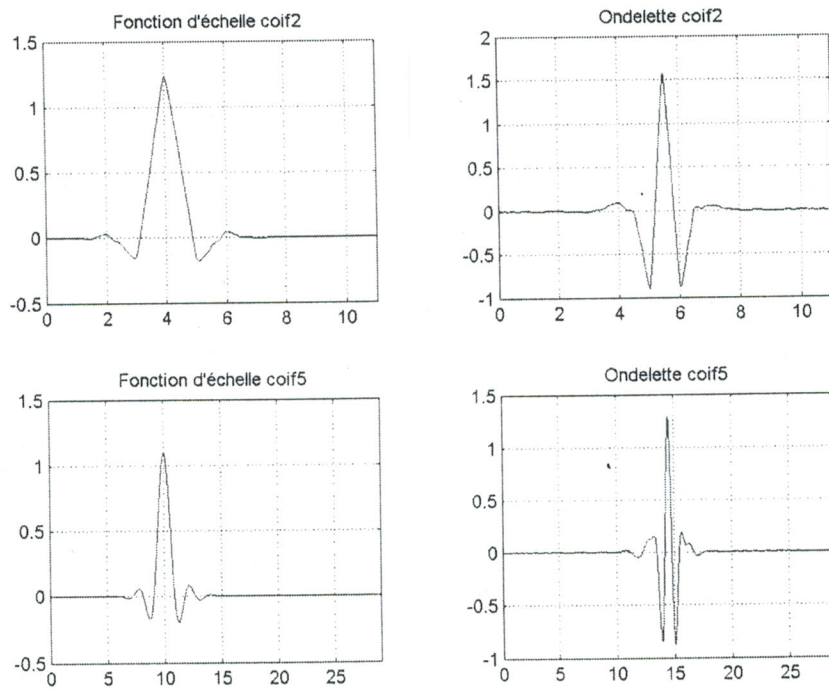


Figure.B3 : Fonctions d'échelles et ondelettes Coiflets pour  $N = 2, 5$ .

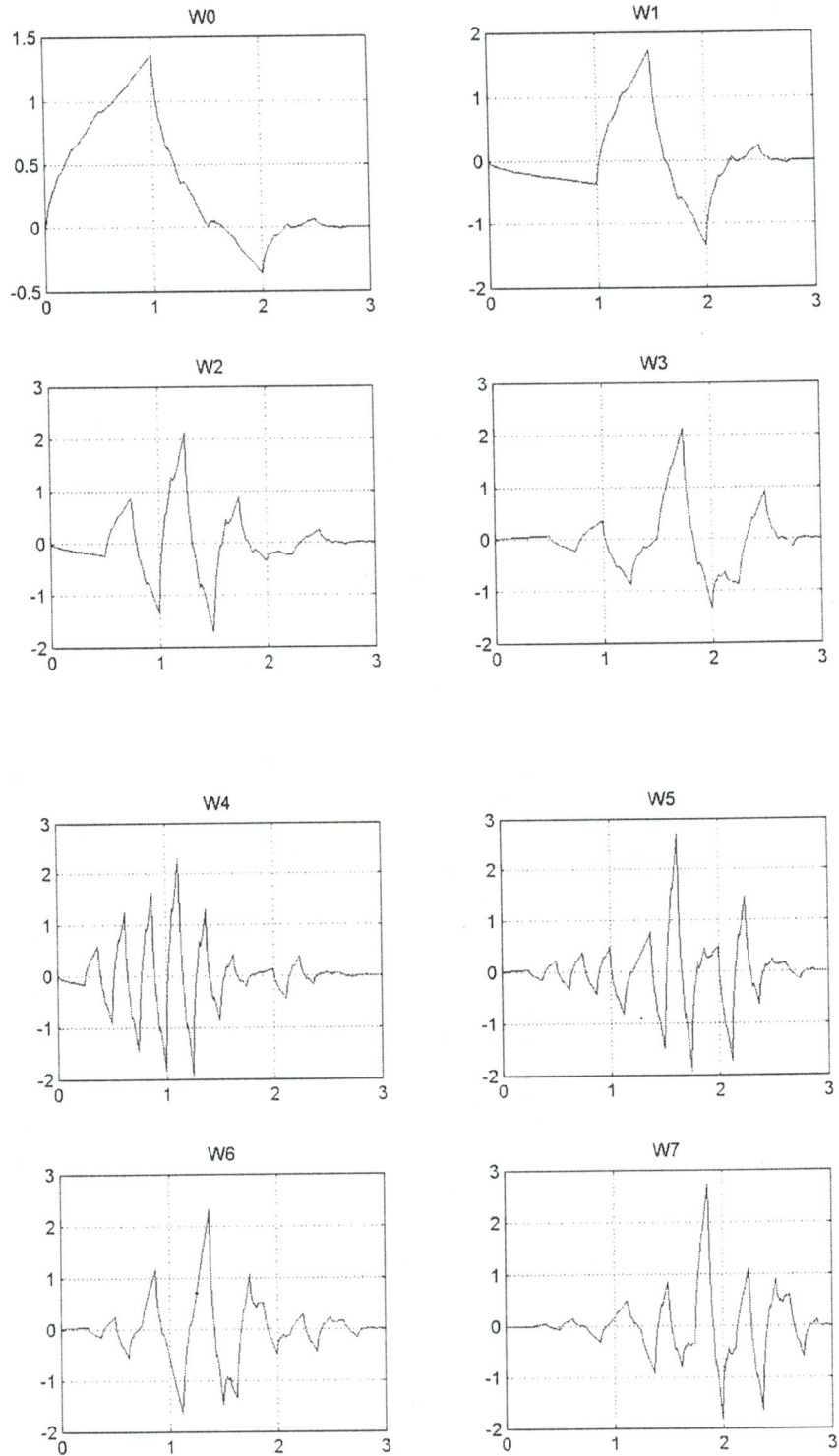


Figure.B4 : Exemple des fonctions  $W_n$  ( $n = 0$  à  $7$ ) construisant les paquets d'ondelettes (ondelette db2)

## Annexe C

### Sélection de la meilleure base de décomposition en paquets d'ondelettes pour la classification supervisée

#### *The Local Discriminant Basis Selection Algorithm: LDB*

La décomposition en paquets d'ondelettes offre une librairie d'ondelettes orthonormales organisée selon une architecture en arbre binaire où chaque nœud de l'arbre représente un sous-espace caractérisé par une localisation temps-fréquence différente.

Dans le cadre de la classification, Saito et Coifman [SAI94] ont introduit l'algorithme de la base discriminante locale LDB (*The Local Discriminant Basis*) dont l'objectif est de trouver la base de paquets d'ondelettes qui maximise la discrimination entre les classes d'apprentissage. Un critère, appelé généralement *distance*, est défini pour mesurer le degré de cette discrimination.

Saito et Coifman ont proposé comme distance l'entropie relative, (appelée aussi distance de Kullback-Leibler ou *I-divergence*). Dans le cas de deux classes celle-ci est définie par :

$$I(p, q) = \sum_{i=1}^n p(i) \log \frac{p(i)}{q(i)} \quad \text{For.C1}$$

Avec  $p$  et  $q$  sont les représentants de deux classes tels que :  $\sum_i p(i) = \sum_i q(i) = 1$

Dans le cas de plusieurs classes, l'entropie relative est calculée en sommant les distances mesurées sur chacun des couples de classes:

$$I(p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(L)}) = \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L I(p^{(i)}, p^{(j)}) \quad \text{For.C2}$$

L'entropie relative est asymétrique, c'est-à-dire:  $I(p, q) \neq I(q, p)$ . Pour certaines applications une mesure symétrique est plus convenable. Dans ce cas on peut utiliser la version symétrique de l'entropie relative appelée *J-divergence* :

$$J(p, q) = I(p, q) + I(q, p) \quad \text{For.C3}$$

On peut utiliser aussi comme critère symétrique la distance quadratique  $Q$  .

$$Q(p, q) = \sum_i (p(i) - q(i))^2 \quad \text{For.C4}$$

Pour plus de détails sur les distances et leurs propriétés théoriques le lecteur peut se référer à [BAS88].

Si l'ensemble d'apprentissage est constitué de  $L$  classes, la formulation de l'algorithme LDB commence par l'élaboration d'une carte d'énergie  $\Gamma^{(l)}$  pour chaque classe d'apprentissage  $l$ , il s'agit d'une table à valeurs réelles spécifiées par le triplet  $(j, m, k)$  :

$$\Gamma_{(j,m,k)}^{(l)} = \frac{\sum_{i=1}^{N_l} \left( x_i^{(l)} w_{j,k,m}^T \right)^2}{\sum_{i=1}^{N_l} \|x_i^{(l)}\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_l} \left( C_{j,m}^{x_i}(k) \right)^2}{\sum_{i=1}^{N_l} \|x_i^{(l)}\|^2} \quad \text{For.C5}$$

Où  $C_{j,m}^{x_i}(k)$  avec  $j=0, \dots, J$ ,  $m=0, \dots, 2^j - 1$ ,  $k=0, \dots, n 2^{-j} - 1$  sont les coefficients de décomposition en paquets d'ondelettes du signal  $x_i^{(l)}$  de la classe  $l$  et  $N_l$  est le nombre de signaux composant cette classe. Nous résumons dans ce qui suit les différentes étapes de l'algorithme LDB.

**Algorithme LDB**

## 1) Choisir

- Une ondelette mère.
- Le niveau maximal de décomposition ( $J$ ).
- Une distance  $D$

2) Construire les cartes d'énergie temps-fréquence  $\Gamma_l$  pour  $l=1, \dots, L$ .3) Mettre  $A_{J,m} = B_{J,m}$  et  $\Delta_{J,m} = D\left(\Gamma_{(J,m,\bullet)}^{(1)}, \Gamma_{(J,m,\bullet)}^{(2)}, \dots, \Gamma_{(J,m,\bullet)}^{(L)}\right)$ 

pour  $m=0, \dots, 2^J - 1$ .

4) Déterminer le meilleur sous-espace  $A_{j,m}$  pour  $j=J-1, \dots, 0$  et  $m=0, \dots, 2^j - 1$ 

en utilisant les règles suivantes :

- Mettre  $\Delta_{j,m} = D\left(\Gamma_{(j,m,\bullet)}^{(1)}, \Gamma_{(j,m,\bullet)}^{(2)}, \dots, \Gamma_{(j,m,\bullet)}^{(L)}\right)$

- Si  $\Delta_{j,m} \geq \Delta_{j+1,2m} + \Delta_{j+1,2m+1}$

- Alors  $A_{j,m} = B_{j,m}$

- Sinon  $A_{j,m} = A_{j+1,2m} \oplus A_{j+1,2m+1}$  et

$$\Delta_{j,m} = \Delta_{j+1,2m} + \Delta_{j+1,2m+1}$$

## 5) Ordonner les coordonnées (ondelettes) de la base obtenue par leur puissance de discrimination.

## 6) Utiliser les premières coordonnées les plus discriminantes notées MDC (Most Discriminant Coordinates) pour construire les classificateurs.

La meilleure base (LDB) est obtenue à la fin de l'étape 4. Afin de réduire la dimensionnalité du problème, les deux dernières étapes (4 et 5) consistent à ne retenir qu'un nombre restreint de fonctions de base (ondelettes), correspondant aux coefficients les plus discriminants.

### Illustration

Les figures ci-dessous illustrent l'algorithme LDB pour une décomposition de niveau 3, dans laquelle chaque nœud est représenté par la valeur du critère sur le sous-espace correspondant, on commence par marquer les nœuds terminaux par un astérisque (figure C1),

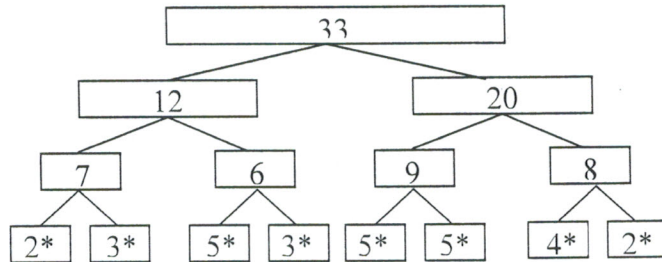


Figure C1 : On calcule le coût de chacun des nœuds et on marque par (\*) les nœuds terminaux

ensuite en partant du bas de l'arbre on compare le coût d'un nœud au coût de ses fils. A chaque fois que le coût (distance interclasses) est maximum au niveau du père on marque celui-ci, dans le cas contraire on ne marque pas le père mais on lui affecte la somme du coût des fils, celle-ci est écrite entre parenthèses dans le nœud père (figure C2).

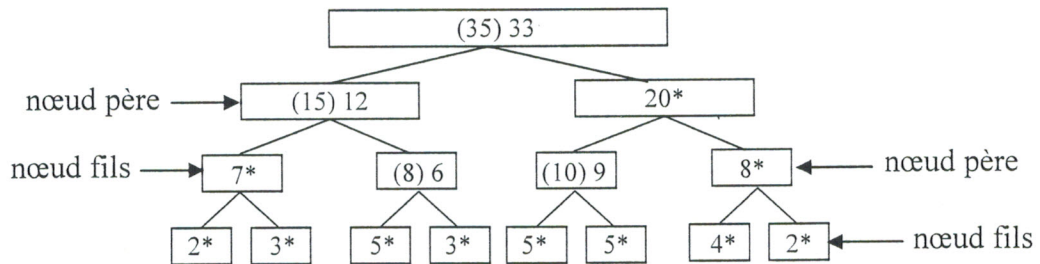


Figure C2 : On marque un nœud si son coût est supérieur à celui de ses fils, sinon on lui attribue la somme du coût de ses fils

Finalement la meilleure base sera définie par les nœuds marqués dont le père n'est pas marqué (figure C3).

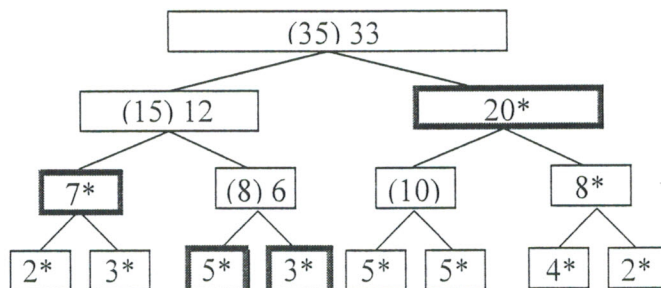


Figure C3 : La base LDB est composée par les nœuds marqués dont le père n'est pas marqué

## Remarque sur la classification

Pour classer un signal  $s$  nous calculons d'abord sa distribution d'énergie normalisée correspondante notée  $\Gamma^{(s)}$  avec la même normalisation utilisée pour les cartes d'énergie  $\Gamma^{(l)}$  c'est-à-dire :

$$\Gamma_{(j,m,k)}^{(s)} = \frac{(s w_{j,k,m}^T)^2}{\|s\|^2} = \frac{(C_{j,m}^s(k))^2}{\|s\|^2} \quad \text{For.C6}$$

La classification se fait ensuite en présentant au classificateur les coefficients de  $\Gamma^{(s)}$  qui correspondent aux coordonnées MDC déterminées par l'algorithme LDB.

Notons enfin, qu'il y a une autre version de l'algorithme LDB connue dans la littérature sous le nom de « New LDB algorithm », celui-ci consiste à estimer la densité de probabilité empirique de chaque classe d'apprentissage pour chaque coordonnée de l'arbre binaire, la recherche de la base discriminante locale s'effectue en comparant les densités de probabilité des classes d'apprentissage [SAI96].



# Annexe D

## Fenêtres de Pondération

De nombreuses fenêtres de pondération (ou d'apodisation) ont été proposées pour l'analyse spectrale. Ces fenêtres sont utilisées pour limiter (tronquer) la durée temporelle du signal à analyser.

En notant  $x(t)$  le signal,  $h(t)$  la fenêtre et  $x_{tr}(t)$  le signal tronqué, on obtient la relation suivante

$$x_{tr}(t) = x(t) h(t) \quad \text{For.D1}$$

ou dans le domaine fréquentiel

$$X_{tr}(\nu) = X(\nu) * H(\nu) \quad \text{For.D2}$$

Idéalement, on aimerait que la troncation du signal en temps ne modifier pas son contenu fréquentiel, c'est-à-dire que  $X_{tr}(\nu) = X(\nu)$ , ce qui suppose que  $H(\nu) = \delta(\nu=0)$ . En pratique, ce n'est pas possible et les fenêtres  $H(\nu)$  présentent un lobe principal de largeur non nulle centré autour de la fréquence nulle et en général des lobes secondaires de hauteurs non nulle (voir figure D1). Le choix d'une fenêtre dépendra du type du signal traité et des objectifs de traitements.

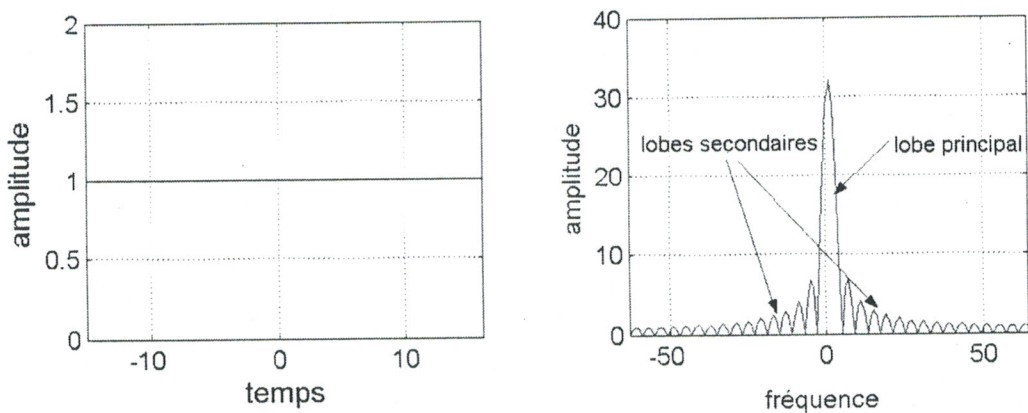


Figure D1 : Fenêtre rectangulaire et son spectre d'amplitude

On peut caractériser une fenêtre par des paramètres tels que :

- La largeur du lobe principal.
- La hauteur maximale des lobes secondaires (quand ils existent).

Ces paramètres influencent respectivement la résolution et la dynamique de l'analyse spectrale. La résolution est la capacité à distinguer deux fréquences proches. La dynamique est la capacité de mesurer deux composantes fréquentielles d'amplitudes très différentes sans que la plus forte ne masque la plus faible [BAU98].

De manière générale, la largeur du lobe principal est inversement proportionnelle à la durée temporelle de la fenêtre.

Les figures D2 et D3 présentent les fenêtres de pondération que nous avons utilisé dans le calcul de la *Distribution Pseudo Wigner-Ville Lissée (DPWVL)* On se contentera ici de donner le tracé de chaque fenêtre dans le domaine temporel. Le lecteur intéressé par plus de détails peut consulter par exemple [MAX00], [BAU98].

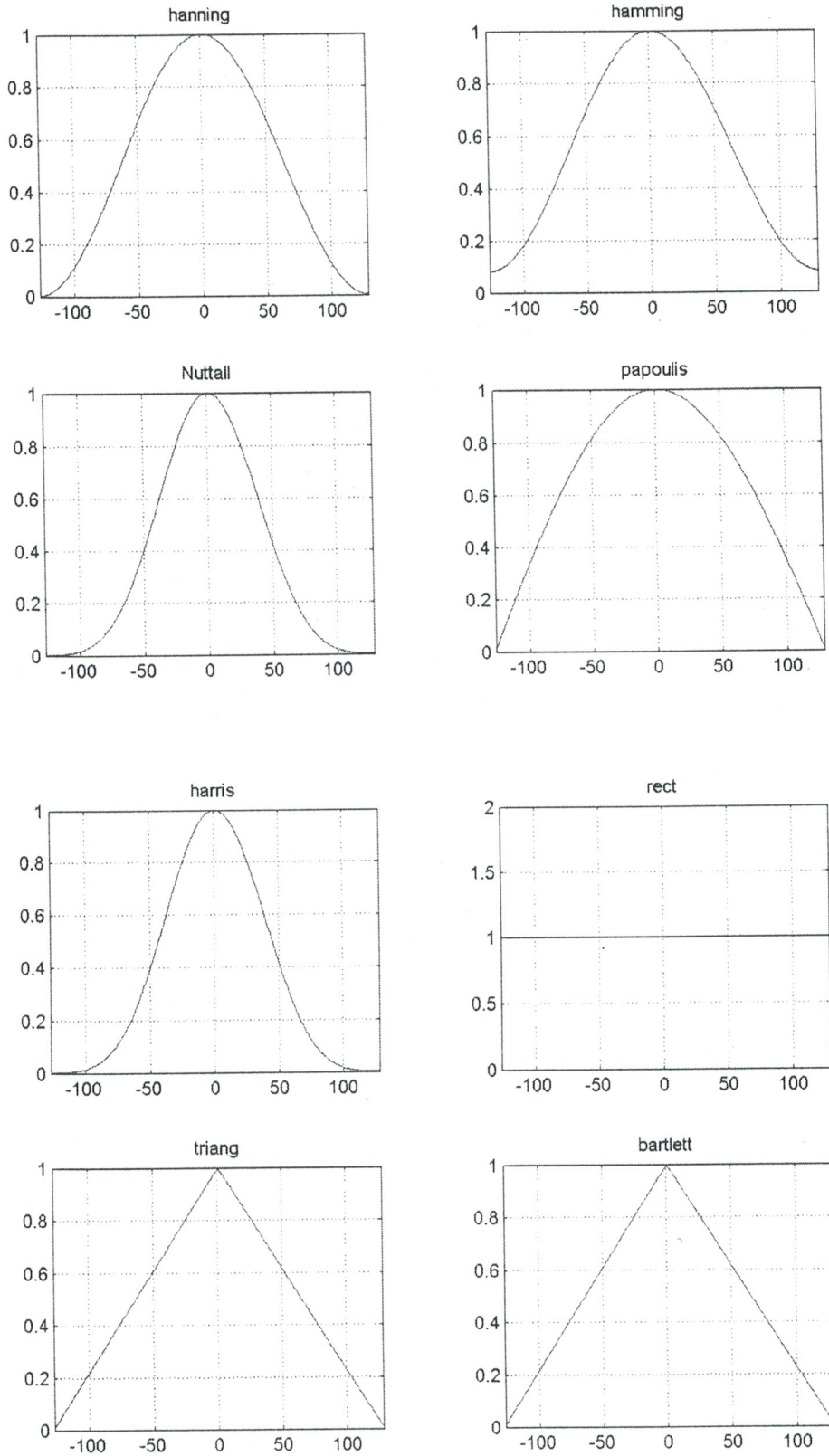


Figure D2 : Fenêtres de pondération représentées sur 256 points

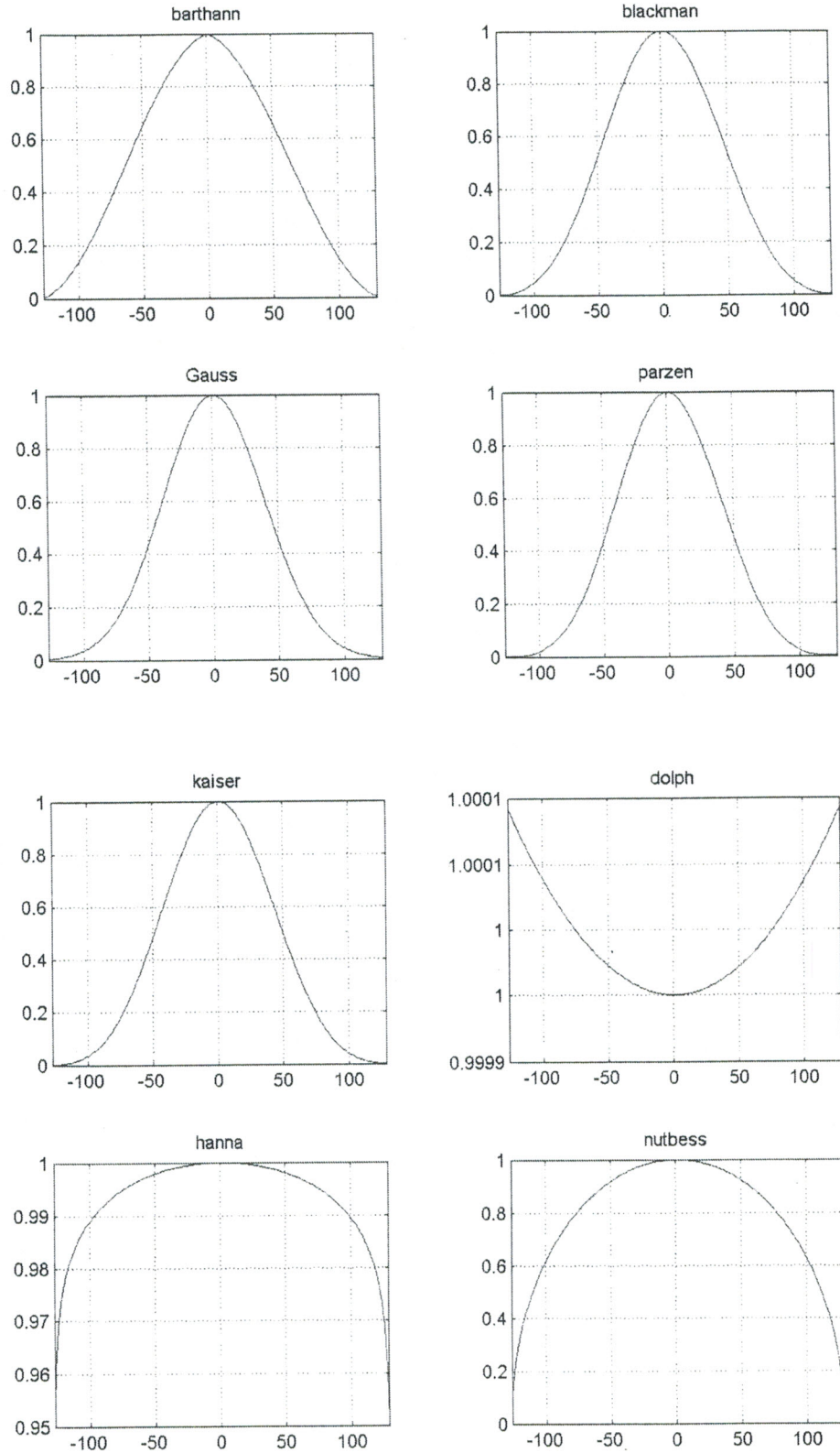


Figure D3 : Fenêtres de pondération représentées sur 256 points

# Annexe E

## Base de données MIT-BIH

Depuis 1975, les laboratoires de l'hôpital de Beth Israël à Boston et MIT ont réalisé une base de données MIT-BIH (*Massachusetts Institute of Technology-Beth Israel Hospital Arrhythmia Laboratory*), qui a été commencée à être distribuée en 1980. Cette base de données contient 48 enregistrements extraits d'une demi-heure des enregistrements ambulatoires à deux voies d'ECG, obtenus à partir de 47 sujets étudiés par le laboratoire d'arythmie de BIH entre 1975 et 1979. Vingt-trois enregistrements ont été choisis au hasard d'un ensemble de 4000 enregistrements ambulatoires de vingt-quatre heures d'ECG rassemblés d'une population mélangée des patients hospitalisés (60%) et des patients non hospitalisés (40%) (les séries 100), les vingt-cinq enregistrements restants ont été choisis parmi les mêmes enregistrements mais qui mis en considération des arythmies rarement observées qui ont une signification clinique (les séries 200). Les enregistrements ont été échantillonnés à une fréquence  $f_e = 360 \text{ Hz}$  avec une résolution de 11 bits sur une gamme de 10mV. Deux cardiologues ou plus ont indépendamment annoté chaque enregistrement, environ 110.000 annotations ont été incluses avec la base de données. [CHI05]

Les tableaux E1, E2 et E3 donnent une description plus détaillée de la base MIT-BIH. Les notations des battements données dans le tableau E1 sont celles utilisées dans la base MIT-BIH et celles adoptées par AAMI (Association for the Advancement of Medical Instrumentation) [CHA04].

MIT	AAMI	Type de battement
N	NOR	battement normal (normal beat).
V	PVC	battement ventriculaire prématuré (premature ventricular contraction).
A	AP	battement auriculaire prématuré (atrial premature beat).
a	Aap	battement auriculaire prématuré aberré (aberrated atrial premature beat).
L	LBBB	battement de bloc de branche gauche (left bundle branch block beat).
R	RBBB	battement de bloc de branche droit (right bundle branch block beat).
P	P	battement ectopique (paced beat).
f	FPN	fusion de battements P et N (fusion of paced and normal beat).
F	FVN	fusion de battements V et N (fusion of ventricular and normal beat).
j	NE	battement nodal (ou jonctionnel) échappé (nodal (junctional) escape beat).
J	NP	battement nodal (ou jonctionnel) prématuré (nodal (junctional) premature beat).
E	VE	battement ventriculaire échappé (ventricular escape beat).
S	SP	battement supraventriculaire prématuré (supraventricular premature beat).
e	AE	battement auriculaire échappé (atrial escape beat).
Q	U	battement non classé (unclassified beat).

Tab E1 : L'ensemble des battements cardiaques contenus dans la base MIT-BIH et leurs notations correspondantes [MIT92]

Enreg \ Cas	NOR	PVC	AP	aAP	NP	SP	AE	NE	VE	fPN	fVN	LBBB	RBB	P	U	total
100	2239	1	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2273
101	1860	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1865
102	99	4	0	0	0	0	0	0	0	56	0	0	0	2028	0	2187
103	2082	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2084
104	163	2	0	0	0	0	0	0	0	666	0	0	0	1380	18	2229
105	2526	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	2572
106	1507	520	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2027
107	0	59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2078	0	2137
108	1740	16	4	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	1763
109	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2492	0	0	0	2532
111	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2123	0	0	0	2124
112	2537	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2539
113	1789	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1795
114	1820	43	10	0	2	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1879
115	1953	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1953
116	2302	109	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2412
117	1534	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1535
118	0	16	96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2166	0	0	2278
119	1543	444	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1987
121	1861	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1863
122	2476	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2476
123	1515	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1518
124	0	47	2	0	29	0	0	5	0	0	5	0	1531	0	0	1619
200	1743	826	30	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2601
201	1625	198	30	97	1	0	0	10	0	0	2	0	0	0	0	1963
202	2061	19	36	19	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2136
203	2529	444	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4	2980
205	2571	71	3	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	2656
207	0	105	107	0	0	0	0	0	105	0	0	1457	86	0	0	1860
208	1586	992	0	0	0	2	0	0	0	0	373	0	0	0	2	2955
209	2621	1	382	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3004
210	2423	194	0	22	0	0	0	0	1	0	10	0	0	0	0	2650
212	923	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1825	0	0	2748
213	2641	220	25	3	0	0	0	0	0	0	362	0	0	0	0	3251
214	0	256	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2002	0	0	2	2261
215	3196	164	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3363
217	244	162	0	0	0	0	0	0	0	260	0	0	0	1542	0	2208
219	2082	64	7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2154
220	1954	0	94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2048
221	2031	396	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2427
222	2062	0	208	0	1	0	0	212	0	0	0	0	0	0	0	2483
223	2029	473	72	1	0	0	16	0	0	0	14	0	0	0	0	2605
228	1688	362	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2053
230	2255	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2256
231	314	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1254	0	0	1571
232	0	0	1382	0	0	0	0	1	0	0	0	0	397	0	0	1780
233	2230	831	7	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	3079
234	2700	3	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2753
<b>Total</b>	<b>75054</b>	<b>7129</b>	<b>2544</b>	<b>150</b>	<b>83</b>	<b>2</b>	<b>16</b>	<b>229</b>	<b>106</b>	<b>982</b>	<b>803</b>	<b>8074</b>	<b>7259</b>	<b>7028</b>	<b>33</b>	<b>109492</b>

Tab E2 : Constitution des enregistrements de la base MIT-BIH [MIT92]

Enregistrements	Dérivations		Sexe	Age
100	D2	V5	Masculin	69
101	D2	V1	Féminin	75
102	V5	V2	Féminin	84
103	D2	V2	Masculin	non enregistré
104	V5	V2	Féminin	66
105	D2	V1	Féminin	73
106	D2	V1	Féminin	24
107	D2	V1	Masculin	63
108	D2	V1	Féminin	87
109	D2	V1	Masculin	64
111	D2	V1	Féminin	47
112	D2	V1	Masculin	54
113	D2	V1	Féminin	24
114	V5	D2	Féminin	72
115	D2	V1	Féminin	39
116	D2	V1	Masculin	68
117	D2	V2	Masculin	69
118	D2	V1	Masculin	69
119	D2	V1	Féminin	51
121	D2	V1	Féminin	83
122	D2	V1	Masculin	51
123	D2	V5	Féminin	63
124	D2	V4	Masculin	77
200	D2	V1	Masculin	64
201	D2	V1	Masculin	68
202	D2	V1	Masculin	68
203	D2	V1	Masculin	43
205	D2	V1	Masculin	59
207	D2	V1	Féminin	89
208	D2	V1	Féminin	23
209	D2	V1	Masculin	62
210	D2	V1	Masculin	89
212	D2	V1	Féminin	32
213	D2	V1	Masculin	61
214	D2	V1	Masculin	53
215	D2	V1	Masculin	81
217	D2	V1	Masculin	65
219	D2	V1	Masculin	non enregistré
220	D2	V1	Féminin	87
221	D2	V1	Masculin	83
222	D2	V1	Féminin	84
223	D2	V1	Masculin	73
228	D2	V1	Féminin	80
230	D2	V1	Masculin	32
231	D2	V1	Féminin	72
232	D2	V1	Féminin	76
233	D2	V1	Masculin	57
234	D2	V1	Féminin	56

Tab E3 : Dérivation, sexe et age correspondant à chaque enregistrement de la base MIT-BIH [MIT92]



# Bibliographie

- [AFGL96] F Auger, P. Flandrin, P. Gonçalvès, O. Lemoine. *Time-Frequency toolbox for use with Matlab*, Tutorial, GdR-PRC ISIS, 1996.
- [ASS96] S. ASSOUS, A. ZIAR, *Etude et réalisation d'une carte d'acquisition du signal électrocardiogramme ECG*, Mémoire d'ingénieur, Université de Tlemcen, 1996.
- [BAS88] M. Basseville, *Distance measures for signal processing and pattern recognition*, Rapport de recherche, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rennes, France, 1988.
- [BAU98] G. Baudoin et J.-F. Bercher, *Eléments de traitement du signal*, Ecole Supérieure d'ingénieurs en Electrotechnique et Electronique, 1998.
- [BEN] BENAMMAR, *Electrocardiographie*, polycopié, Sans date
- [BOT90] M. Boutaa, *Analyse et quantification de la corrélation du rythme cardiaque avec les différentes composantes temporelles et fréquentielles du signal ECG*, Thèse en cours, Université de Tlemcen, 2006.
- [BOU97] E. B. Bouchereau, *Analyse d'images par transformées en ondelettes : Application aux images sismiques*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble1, 1997.
- [BRI01] M. Brishoual, *Reconstruction de données : Application à la dosimétrie des radiotéléphones*, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 2001.
- [CHA04] P. de Chazal , M. O'Dwyer et R. B. Reilly, *Automatic classification of heartbeats using ECG morphology and heartbeat interval features*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 51, July. 2004.
- [CHI05] M. A. Chikh, *Analyse du signal ECG par les réseaux de neurones et la logique floue : Application à la reconnaissance des battements ventriculaires prématurés*, Thèse de Doctorat d'état, Université de Tlemcen, 2005.
- [COH00] A. COHEN. *Wavelet methods in Numerical Analysis*, volume VII of *Handbook of Numerical Analysis*. P.G.Ciarlet and J.L.Lions eds, Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [COI92] R. R. Coifman, M. V. Wickerhauser, *Entropy based algorithms for best basis selection*, *IEEE transaction on information theory*, 38(2): 713-778, 1992.

- [DAU92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [DAV00] M. Davy, *Noyaux optimisés pour la classification dans le plan temps-fréquence : Application au diagnostic d'enceintes acoustiques*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2000.
- [DBF03] J. Demaeyer, M. Bebronne, S. Forthomme, *Les ondelettes*, Polycopié, 2003.
- [DEB97] M. E. DEBAKEY et A. M. GOTTO, *Le coeur en action*, Institut d'édition Sanofi~Synthelabo, (1997).
- [DEN02] C. Denis, *Physiologie du coeur*, 2002.
- [DUB04] R. Dubois, *Application des nouvelles méthodes d'apprentissage à la détection précoce d'anomalies en électrocardiographie*, Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 2004.
- [DUM01] J. Dumas, *l'Analyse temps-fréquence*, Polycopié, 01dB-STELL (Groupe MVI technologies), 2001.
- [FIN] D. FINALY, C. NUGENT, P. MCCULLAGH, J. LOPEZ, N. BLACK, *Electrocardiogram Analysis: The role of Technology*, Medical Informatics Research Group, University of Ulster at Jordanstown. Sans date.
- [FLA98] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, Hermes, 1998.
- [FRO04] T. Froese, *Classification of ECG signals using discrete wavelet transforms*, Rapport tech, University of reading, 2004
- [GAI00] P. Gaillot, *Ondelettes continues en sciences de la terre : Méthodes et application*, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse III, 2000.
- [GAS00] C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et Application : Filtrage, Calcul numérique et Ondelettes*, Dunod, Paris, 2000.
- [GOV03] G. Govaert, *Analyse de données*, Série de traitement du signal et de l'image, sous la direction de F. Castanié et H. Maître, Hermes, 2003.
- [HAD97] Z. Hadj-Slimane, *Analyse du signal électrocardiogramme ECG en vue d'aide au diagnostique de cas pathologiques*, Mémoire de magister, Université de Tlemcen, 1997.
- [HED04] N. Hedeili, *Classification des arythmies cardiaques par l'analyse a composante principale et les réseaux de neurone*, Mémoire de magister, Université de Tlemcen, 2004.
- [HIT99] E. Hitti, *Sélection d'un banc optimal de filtres à partir d'une décomposition en paquets d'ondelettes : Application à la détection de sauts de fréquences dans des signaux multicomposantes*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1999.

- [HTML1] *Les dérivations d'un électrocardiogramme*. Aide à la Lecture et l'Interprétation des ECG. Site Web, [en ligne].  
<http://foulon.chez-alice.fr/Alie%202.000/DATAS/MODULE1/derivECG.htm>
- [HTML2] *L'électrocardiogramme*, Sémiologie et Pathologie Cardiovasculaires, site web, [enligne].  
[www-sante.ujf-grenoble.fr/sante/CardioCD/cardio/chapitre/301.htm](http://www-sante.ujf-grenoble.fr/sante/CardioCD/cardio/chapitre/301.htm)
- [HTML3] *Troubles du rythme et de la conduction*, Sémiologie et Pathologie Cardiovasculaires, site web, [en ligne].  
[www-sante.ujf-grenoble.fr/sante/CardioCD/cardio/chapitre/406.htm](http://www-sante.ujf-grenoble.fr/sante/CardioCD/cardio/chapitre/406.htm)
- [HTU93] Y. H. Hu, W. J. Tompkins, J. L. Urrusti, et V. X. Afonso, *Applications of artificial neural networks for ECG signal detection and classification*, *J. Electrocardiol.*, vol. 26, pp. 66–73, 1993.
- [HPT97] Y. H. Hu, S. Palreddy, et W. J. Tompkins, *A patient-adaptable ECG beat classifier using a mixture of experts approach*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 44, pp. 891–900, Sept. 1997.
- [KRI03] G. Krishna Prasad et J. S. Sahambi, *Classification of ECG Arrhythmias using multi-resolution analysis and neural networks*, *IEEE*, 2003.
- [LAG00] M. Lagerholm, C. Peterson, G. Braccini, L. Edenbrandt, et L. Sornmo, *Clustering ECG complexes using hermite functions and self-organizing maps*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 47, pp. 838–848, July 2000.
- [LAR03] C. La Rota, *Analyse de l'activité électriques multi-sites du cortex auditif chez le cobaye*, Thèse de Doctorat, Université de Joseph Fourier, 2003.
- [LCA04] O. Le Cadet, *Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images : Application à l'imagerie médicale et au tatouage d'image*, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [LPA03] R. Le page, *Rappel sur les ondelettes*, Polycopié, 2003
- [MAL89] S. MALLAT. *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$* , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69–88, 1989.
- [MAL98] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1999.
- [MAN01] A. Manoury, *Tatouage d'images numériques par paquets d'ondelettes*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2001.
- [MAX00] J. MAX, *Méthodes et techniques de traitement du signal*, Dunod, Paris, 2000.
- [MAXI03] V. Maxim, *Restauration de signaux bruités observés sur des plans d'expérience aléatoires*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, 2003.

- [MIT92] MIT BIH Arrhythmia Database Directory. Third edition, Harvard MIT Division of Health Sciences and technology, Biomed. Eng. Center. 1992.
- [MMOP01] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim et J-M. Poggi, *Wavelet toolbox for use with matlab*, User' guide, Version 2.1, The Math Works Corporation, 2001.
- [OSO01] S. Osowski et T. L. Linh, *ECG beat recognition using fuzzy hybrid neural network*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 48, pp. 1265–1271, Nov. 2001.
- [PIC95] B. Picinbono, *Signaux aléatoires : tome1*, Dunod, Paris, 1995.
- [QUA01] L. Quarta, *une introduction élémentaire à la théorie des ondelettes*, Document web, Université de Mons-Hainaul, 2001.
- [REI97] H. Reinhard, *Eléments de mathématiques du signal (tome1 : signaux déterministes)*, Dunod, 1997.
- [SAI94] N.Saito, R. R.Coifman, *Local discriminant bases*, *Mathematical Imaging in signal and image Processing II*, Pro. SPIE Vol.2303, 1994.
- [SAI96] N.Saito, R. R.Coifman, *Improved local discriminant bases using empirical probability density estimation*, *ASA Statistical Computing Proceedings*, Amer. Statist. Assoc., 1996.
- [SEG82] B.SEGUY, *Dossiers médico-chirurgicaux de l'infirmière: Anatomie*, deuxième partie»,Edition MALOINE, (1982).
- [SEN95] L. Senhadji, G. Carrault, J. J. Bellanger, et G. Passariello, *Comparing wavelet transforms for recognizing cardiac patterns*, *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.*, vol. 14, pp. 167–173, Mar.–Apr. 1995.
- [SZD] A. Sostaric, D.Zazula, C. Doncarli, *Feature extraction using wavelet packets*, Polycopié, Institut de recherche en cybernétique de Nantes, Sans date
- [VIN95] I. Vincent, *Classification de signaux non-stationnaires*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1995.
- [VIN03] P. Vincent, *Modèles à noyaux à structure locale*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal, 2003.
- [YEA90] T. H. Yeap, F. Johnson, et M. Rachniowski, *ECG beat classification by a neural network*, dans *Proc. Annu. Int. Conf. IEEE Engineering Medicine and Biology Soc.*, 1990, pp. 1457–1458.

# Résumé

L'électrocardiogramme (ECG) est un signal physiologique qui permet d'explorer l'activité électrique du cœur en enregistrant les courants d'actions cardiaques transmis à la surface du corps, c'est l'examen le plus couramment pratiqué pour le diagnostic des infections cardiaques. L'étude que décrit ce mémoire porte sur la caractérisation des signaux ECG par des distributions d'énergie temps-fréquence et temps-échelle en vue de les classer automatiquement suivant les pathologies qu'ils présentent. Deux types de distributions ont été étudiés, la première est construite à partir des coefficients des paquets d'ondelettes (temps-échelle), la seconde est la distribution de Wigner-Ville (temps-fréquence). Pour évaluer la pertinence de telles représentations nous avons mis en œuvre une procédure de classification basée sur l'application de la règle du plus proche représentant, celle-ci requiert le choix d'une mesure de distance et la définition d'un représentant pour chaque classe d'apprentissage. Deux classes de signaux ECG ont été étudiées : celle des battements normaux (NOR) et celle des battements ventriculaires prématurés (PVC).

Les expérimentations menées dans le cadre de cette étude ont montré l'importance du choix du couple (représentation, distance) pour optimiser les performances de classification. La réduction de dimensionnalité qui a été faite dans le cas des paquets d'ondelettes par l'algorithme LDB a permis d'obtenir à la fois un temps de calcul réduit et un filtrage implicite du bruit affectant le signal ECG. Cette dernière propriété est fortement souhaitable dans les systèmes de classification travaillant dans un environnement clinique où la présence de bruit est une caractéristique commune. Quant à la distribution de Wigner-Ville, malgré que la présence des termes d'interférences n'a pas altéré les performances de classification, la capacité de généralisation et la robustesse vis-à-vis du bruit ont été relativement faibles comparés avec celles obtenues par les paquets d'ondelettes.