**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**Université de ABU BAKR BELKAID Tlemcen**

**Département de mathématiques**

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de licence en mathématique

# SUITES DE PICARD ET DE KRASNOSELSKI : APPLICATIONS AUX PROBLEMES DU POINT FIXE

---

## Option : équations différentielles

Présenté par :

**M. OUNADJELA Djalal**

**Mlle. RAHOU Hadjar**

Sous la direction du professeur M. **Mohammed DERHAB**

**Année universitaire : 2012/2013**

# Remerciements

Nous remercions les professeurs M. YEBDRI, M. DERHAB, M. DIB, M. BOUGUIMA, M. MEBKHOUT, M. BOUKLI ainsi que le vide-doyen le professeur M. ZERGA pour leurs soutiens, contributions, conseils et services

# Table de matières

# Introduction

On s’intéresse dans ce travail à différents théorèmes d’existences des points fixes et au rôle des suites de Picard et de Krasnoselski dans l’approximation de ces points fixes et en particulier ceux des équations non-linéaires. On donnera aussi un lien avec la méthode « toile d’araignée » qui décrit les phénomènes d’équilibre en économie mathématique.

**Note**

Une grande partie des résultats de ce travail se trouvent dans [9].

# Chapitre 1

# Théorèmes d'existence

**Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 1**

Toute fonction continue $f: [a, b] \to [a, b]$ possède au moins un point fixe.

**Preuve**

Puisque $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors $f(a) - a \geq 0$ et $f(b) - b \leq 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction continue $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ change de signe quand $x$ varie de $a$ vers $b$ donc il existe au moins un point $c$ dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$.

**Remarques**

Nous donnons quelques remarques concernant les hypothèses du théorème du point fixe de Brouwer sur l'axe des réels.

(i) Si un point fixe dans $[a, b]$ existe pour une fonction continue $f: [a, b] \to [a, b]$, ce point n'est pas nécessairement unique. En effet, tout point $x \in [a, b]$ est un point fixe pour la fonction $f: [a, b] \to [a, b]$ définie par $f(x) = x$.

(ii) la condition que $f$ soit définie sur une partie fermée de $\mathbb{R}$ est nécessaire pour l'existence d'un point fixe. Par exemple, si $f: [0, 1) \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = (1 + x)/2$, alors $f$ applique $[0, 1)$ dans lui-même, et $f$ est continue. Toutefois, $f$ n'a pas de point fixe dans $[0, 1)$.

(iii) la condition que $f$ soit définie sur un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ est essentielle pour l'existence d'un point fixe. Par exemple, si $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x + x^{-1}$, alors $f$ applique $[1,\infty)$ dans lui-même, $f$ est continue, mais $f$ n'a pas de point fixe dans $[\,1,\infty)$.

(iv) la condition que $f$ soit définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est essentielle pour l'existence d'un point fixe. Par exemple, si $D = [-2,-1] \cup [1,2]$ et $f: D \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = -x$, alors $f$ applique $D$ en lui-même, $f$ est continue, mais a $f$ pas de point fixe dans $D$.

(v) la condition que $f$ soit continue est essentielle pour l'existence d'un point fixe. Par exemple soit la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1\ si & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 0\ si & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Alors cette fonction telle qu'elle est définie n'admet aucun point fixe.

**<u>Théorème du point fixe de Knaster</u>**

Dans cette section on montre que la propriété du point fixe établie dans le théorème de Brouwer reste valable si l'hypothèse de continuité est remplacée par celle que la fonction $f: [a,b] \to [a,b]$ soit non-décroissante.

**<u>Théorème 1</u>**

Soit $f: [a,b] \to [a,b]$ une fonction non décroissante.

Alors,

(i) $f$ possède au moins un point fixe,

(ii) il existe une fonction décroissante $f: [a,b] \to [a,b]$ sans points fixes.

**<u>Preuve</u>**

(i) Posons

$$A = \{a \leq x \leq b, f\,(x) \geq x\}$$

et $x_0 = \sup A$.

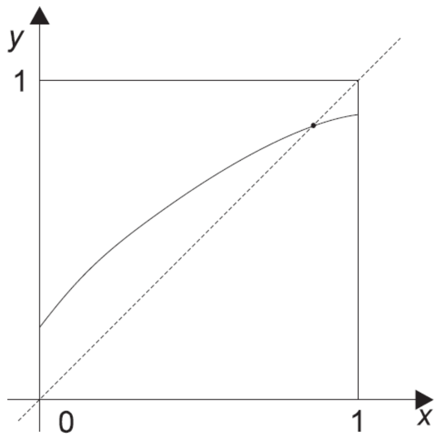


Fig. 2. Théorème du point fixe de Knaster

Considérons les deux cas suivants :

Cas 1: $x_0 \in A$. Par définition de $x_0$, il s'ensuit que $f(x_0) \geq x_0$. Si $f(x_0) = x_0$, alors la preuve est terminée. Sinon, on raisonne par l'absurde et supposons que $f(x_0) > x_0$. Par définition de $x_0$, on obtient $f(x) < x, \forall x > x_0$.

D'autre part, pour tout $x_0 < x < f(x_0)$, nous avons $x > f(x) \geq f(x_0)$, ce qui est une contradiction puisque $x \in (x_0, f(x_0))$, donc, $x < f(x_0)$. Il s'ensuit que l'hypothèse $f(x_0) > x_0$ est fausse, alors $f$ admet un point fixe.

Cas 2: $x_0 \notin A$. Nous montrons que, en fait, il est impossible d'avoir $x_0 \notin A$, alors $x_0 \in A$, ce qui réduit le problème au Cas 1.

$x_0 \notin A$ c'est-à-dire $f(x_0) < x_0$ (1)

Comme $x_0 = \sup A$ , alors il existe une suite $x_n \to x_0, x_n < x_0$, telle que

$x_n \in$ A.

Comme $f$ est croissante, alors $f(x_n) \leq f(x_0)$ .

Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(x_0)$ (2)

D'après (1) et (2), on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) < x_0 \quad (3)$$

D'autre part comme $(x_n)_n \subset A$ $, alors \ f(x_n) \geq x_n$.

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \qquad (4)$$

Et ceci est en contradiction avec (3).

(ii) Considérons la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2} & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Alors $f$: $[0,1] \to [0,1]$ est décroissante, mais n'admet aucun point fixe.

Un contre-exemple est représenté dans la figure 3.

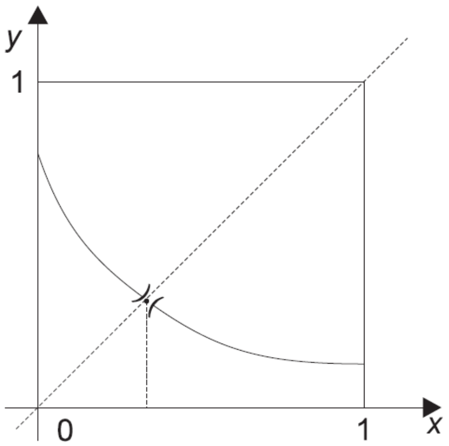


Fig. 3. Théorème du point fixe de KNASTER échoue pour les fonctions décroissantes

Nous montrons dans ce qui suit quelques propriétés élémentaires du point fixe pour les fonctions réelles.

**Proposition 1**

Soit $f$: $[0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Notons $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ $(n\, fois)$ et supposons qu'il existe un entier

$m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

**Preuve**

$f$ est bijective, car si $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $g = f^{m-1}$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id$.

La fonction $f$ est donc strictement croissante (puisque f est continue et $f(0) = 0, f(1) = 1$).

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in (0,1)$ tel que $f(x) > x$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n(x) = (f^{n-1} \circ f)(x) = f^{n-1}(f(x))$$

Par hypothèse

$$f^{n-1}\big(f(x)\big) > f^{n-1}(x)$$

Par suite on en déduit par itérations que

$$f^n(x) > f^{n-1}(x) > \cdots > x$$

Pour $n = m$, on aboutit à une contradiction. Un argument similaire montre que le cas $f(x) < x$ (pour un certain $x$) n'est pas possible.

**Proposition 2**

Soient $a, b$ deux nombres réels avec $a < b$ et considérons une fonction continue $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

(i) Si $[a,b] \subset f([a,b])$, alors $f$ admet un point fixe.

(ii) Supposons qu'il existe un intervalle fermé $I' \subset f([a,b])$. Alors $I' = f(J)$, où $J$ est un intervalle fermé contenu dans $[a,b]$.

(iii) Supposons qu'il existe $n$ intervalles fermés $I_0 \ldots, I_{n-1}$ contenus dans $[a,b]$ tel que pour tout $0 \leq k \leq n-2$, $I_{k+1} \subset f(I_k)$ et $I_0 \subset f(I_{n-1})$. Alors $f^n$ possède un point fixe $(f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f)$.

**Preuve**

Soient $a$ et $b$ deux réels avec $a < b$ $et$ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(i) Posons $f([a,b]) = [m, M]$ ; (car l'image par une fonction continue d'un intervalle compact est un intervalle compact).

Et soit $x_m, x_M \in [a,b]$ tels que,

$f(x_m) = m \leq a \leq x_m$ et $f(x_M) = M \geq b \geq x_M$.

Il est clair que la fonction $f(x) - x$ est continue (la différence de deux fonctions continues, est une fonction continue). On a aussi les inégalités suivantes

$f(x_m) - x_m \leq 0$ et $f(x_M) - x_M \geq 0$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) - x = 0$. Et ceci implique que $f(x_0) = x_0$ et que $f$ possède au moins un point fixe sur $[a, b]$.

(ii) Soit $I^{'}$ un intervalle fermé tel que $I^{'} \subset f([a, b])$ . Montrons alors qu'il existe un intervalle fermé $J$ tel que $I^{'} = f(J)\ et\ J \subset [a, b]$.

Posons $I' = [c, d]$ , et considérons $u, v \in I'$ tels que $f\ (u) = c\ et\ f\ (v) = d$.

Supposons, sans perte de généralité, que $u \leq v$.

Considérons l'ensemble $A$ définie par,

$$A = \{x \in [u, v], f\ (x) = c\}$$

On a,

$A \neq \emptyset$ car $\in A$ .

$A$ est borné car $A \subset [u, v]$.

$A$ est fermé car il est l'image réciproque par $f$ d'un ensemble fermé c'est-à-dire $A = f^{-1}(\{c\})$.

Par suite $A$ est un compact non vide, donc il existe un $\alpha = max\,\{x; x \in A\}$ et, en outre, $\alpha \in A$.

De même, l'ensemble $B = \{x \in [\alpha, v], f\ (x) = d\}$ possède un point minimal $\beta$. Alors $f\ (\alpha) = c \leq f(x) \leq f\ (\beta) = d$ donc $f([\alpha, \beta]) \subset [c, d]$, et pour tout $x \in (\alpha, \beta)$, nous avons $f\ (x) \neq c\ et\ f\ (x) \neq d$.

Montrons que $[c, d] \subset f([\alpha, \beta])$.

Soit $y = [c, d]$,

Alors,

$$y - c = y - f(\alpha) \geq 0 \text{ ,}$$

et $\quad y - d = y - f(\beta) \leq 0$ .

D’après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x^* \in [\alpha, \beta]$ tel que $y = f(x^*)$ .

c’est-à-dire $\quad y \in f([\alpha, \beta])$

Par suite $[c, d] \subset f((\alpha, \beta))$ .

Il en résulte que $I' = f(J)$, où $J = [\alpha, \beta]$ .

(iii) supposons qu’il existe $n$ intervalles fermés $I_0, \dots, I_{n-1}$ dans $[a, b]$, tels que ;

$$0 \leq k \leq n-2, I_{k+1} \subset f(I_k), I_0 \subset f(I_{n-1}),$$

il s'ensuit, par (ii) qu'il existe un intervalle fermé $J_{n-1} \subset I_{n-1}$ tel que

$$I_0 = f(J_{n-1}).$$

Mais $\quad J_{n-1} \subset I_{n-1} \subset f(I_{n-2})$.

Ainsi, encore une fois par (ii), il existe un intervalle fermé ,

$$J_{n-2} \subset I_{n-2}$$

tel que $\quad J_{n-1} = f(J_{n-2})$.

Ainsi, nous obtenons $n$ intervalles fermés $J_0 \dots, J_{n-1}$ de telle sorte que $J_k \subset I_k$, pour tous $0 \leq k \leq n-1$ et $J_{k+1} = f(J_k)$ pour tout $0 \leq k \leq n-2$ et donc $\quad I_0 = f(J_{n-1}) = \cdots = f^n(J_0)$.

Par conséquent, $J_0$ est inclus dans son image par la $n$ième itération $f^n$ c’est-à-dire $J_0 \subset I_0 = f^n(J_0)$. De (i) on en déduit que $f^n$ possède un point fixe dans $J_0$.

**<u>Proposition 3</u>**

Supposons que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ quand $x \neq y$. Alors, il existe un certain $\xi$ dans $[-\infty, +\infty]$ tel que, pour tout réel $x$, $f^n(x) \to \xi$ quand $n \to \infty$.

**<u>Preuve</u>**

On suppose d'abord que $f$ admet un point fixe, disons $\xi$, dans $\mathbb{R}$.

Par l'absurde supposons qu'il existe deux points fixe de $f$ sur $\mathbb{R}$ ,$\xi_1$ et $\xi_2$ tel que
$f(\xi_1) = \xi_1$ et $f(\xi_2) = \xi_2$.

Alors on a ;

$$|\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| < |\xi_1 - \xi_2|,$$

ce qui est absurde, et par suite le point fixe est nécessairement unique.

On peut supposer que $\xi = 0$ (car on peut toujours se ramener toujours au cas équivalent de la fonction $g(y) = f(y + \xi) - \xi$ qui admet 0 comme point fixe si et seulement si $f$ admet $\xi$ comme point fixe), ce qui implique que $|f(x)| < |x|$ pour tout $x$ non nul.

On en déduit que ,

$$|x| > |f(x)| > |(f \circ f)(x))| = |f^2(x)| > \cdots > |\underbrace{(f \circ \ldots \circ f}_{n\ fois})(x) \ldots)| = |f^n(x)| > \cdots$$

Donc, pour tout $x$, la suite $|f^n(x)|$ est décroissante.

Donc, converge vers un nombre non négatif $\mu(x)$.

Montrons que $\mu(x) = 0$ pour tout $x$. Alors supposons maintenant que $x$ est tel que $\mu(x) > 0$. Alors $f$ envoie $\mu(x)$ et $-\mu(x)$ vers les points $y_1$ et $y_2$, par exemple, où $|y_j| < |\mu(x)|$ pour tout $j$. Ainsi, comme $f$ est continue, il existe des voisinages ouverts de $\pm\,\mu(x)$ qui sont envoyés par $f$ dans l'intervalle ouvert $I = (-\mu\,(x), \mu\,(x))$ qui contient $y_1$ et $y_2$. Cela implique que, pour $n$ suffisamment grand, $f^n(x)$ se trouve dans $I$ (car f est contractante) ce qui contredit le fait que $|f^n(x)| \geq \mu\,(x)$ pour tout $n$ c'est-à-dire $f^n(x)$ est toujours en dehors de $I$. Ainsi, pour tout $x$, $\mu\,(x) = 0$ et $f^n(x) \to 0$.

Supposons maintenant que $f$ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f(x) - x$ est continue et non nulle dans $\mathbb{R}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) > x$ pour tout $x$ ou $f(x) < x$ pour tout $x$. Nous pouvons supposer que $f(x) > x$ pour tout $x$, vu qu'un argument similaire s'applique pour l'autres cas. Maintenant, la suite $f^n(x)$ est strictement croissante, donc converge vers une certain $\xi$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. En outre, $\xi \notin \mathbb{R}$, car si non $\xi$ serait un point fixe de $f$. Ainsi $f^n(x) \to +\infty$ pour tout $x$.

Nous concluons cet article avec la propriété élémentaire suivante, qui est due à MW Botsko [3].

**Proposition 4**

Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une fonction telle que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in [0,1]$. Alors l'ensemble des points fixes de $f$ est soit un singleton ou un intervalle.

**Preuve**

Soit, $F = \{x \in [0,1], f(x) = x\}$.

On a $F \neq \emptyset$, d'après le théorème du point fixe de Bouwer.

Puisque $f$ est continue, il s'ensuit que $F$ est compact. Soit $a$ le plus petit nombre dans $F$ et $b$ le plus grand nombre de $F$ (comme F est compact $a$ *et* $b$ existent). Il en résulte que $F \subset [a,b]$. Fixons arbitrairement un $x_0 \in [a,b]$. Puisque $a$ est un point fixe de $f$, nous avons ;

$$f(x_0) - a \leq |f(x_0) - a| = |f(x_0) - f(a)| \leq x_0 - a.$$

Par conséquent,

$$f(x_0) \leq x_0.$$

De même,

$$b - f(x_0) \leq |b - f(x_0)| = |f(b) - f(x_0)| \leq b - x_0,$$

ce qui montre que $f(x_0) \geq x_0$.

Il s'ensuit que $f(x_0) = x_0$, où $x_0$ est un point fixe de $f$.

Ainsi, $F = [a,b]$.

# Chapitre 2

# Approximation des points fixes

Nous avons vu que si $f\colon [a,b] \to [a,b]$ est une fonction continue alors $f$ doit avoir au moins un point fixe, qui est un point $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$. Une question naturelle dans les applications est de fournir un algorithme pour trouver (ou approcher) ce point. Une méthode de recherche d'un tel point fixe est par approximations successives. Cette technique est due au mathématicien français Emile Picard (1856-1941) et a été présentée dans son ouvrage classique sur l'analyse [8]. Plus précisément, si $x_1 \in [a,b]$ est choisi arbitrairement, on définit $x_{n+1} = f(x_n)$ et la suite résultante $(x_n)_{n\geq 1}$ est appelée la suite d'approximations successives de $f$ (ou une suite de Picard pour la fonction $f$). Si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un certain $x$, alors un argument directe fondé sur la continuité de $f$ montre que $x$ est un point fixe de $f$. En effet,

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

La méthode habituelle pour montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'approximations successives converge est de montrer qu'elle satisfait le critère de convergence de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $k \geq N$, nous avons $|x_j - x_k| < \varepsilon$. La prochaine proposition affirme qu'il suffit de poser $j = k + 1$ dans le critère de Cauchy.

**Proposition 5**

Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Soit $x_1$ un point dans $[a,b]$ et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ représentant la suite d'approximations successives qui en résulte. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un point fixe de $f$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

**Preuve**

Il est clair que $\lim_{n \to \infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un point fixe.

Supposons maintenant que :

$$\lim_{n \to \infty}(x_{n+1} - x_n) = 0 \qquad (1)$$

et que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ soit divergente.

Comme $[a, b]$ est compact, il existe deux sous-suites de $(x_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\xi_1 \neq \xi_2$ respectivement (voir corollaire 1). Nous pouvons supposer que $\xi_1 < \xi_2$. Il suffit de montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in (\xi_{1,}\xi_2)$ ce qui n'est pas dans le cas général. Supposons que ce n'est pas le cas, il y a donc un certain $x^* \in (\xi_{1,}\xi_2)$ tel que $f(x^*) \neq x^*$. Comme $f$ est continue ,il existe un $\delta > 0$ tel que $[x^* - \delta, x^* + \delta] \subset (\xi_1, \xi_2)$ et $f(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$ si $\tilde{x} \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ . Supposons que $\tilde{x} - f(\tilde{x}) > 0$ (la preuve dans l'autre cas étant analogue) et d'après (1) on peut choisir un nombre $N \in \mathbb{N}$ de telle sorte que,

$$|f^n(x) - f^{n+1}(x)| < \delta \text{ pour } n > N.$$

Comme $\xi_2$ est un point d'accumulation, il existe un nombre entier positif $n > N$ tel que $f^n(x) > x^*$.

Soit $n_0$ le plus petit des entiers naturels $n$ vérifiant les deux inégalités précédentes.

Alors, clairement, on a

$$f^{n_0-1}(x) < x^* < f^{n_0}(x)$$

et comme $f^{n_0}(x) - f^{n_0-1}(x) < \delta$,

ceci implique que $f^{n_0}(x) - x^* < f^{n_0}(x) - f^{n_0-1}(x) < \delta$ .

Donc $f^{n_0}(x) \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ .

De ce fait nous devons avoir $f^{n_0-1}(x) - f(f^{n_0-1}(x)) > 0$ .

Alors $f^{n_0-1}(x) - f^{n_0}(x) > 0$ et donc $f^{n_0}(x) < f^{n_0-1}(x) < x^*$ . Une contradiction.

Le résultat suivant est dû à HG Barone [2] et a été établi en 1939.

**Théorème 2**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels tels que la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 0}$ converge vers zéro. Alors, l'ensemble des points d'accumulation de $(a_n)_{n\geq 0}$ est un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$, éventuellement dégénéré.

**Preuve**

Posons $\ell_- \coloneqq \liminf_{n\to\infty} x_n$ , $\ell_+ \coloneqq \limsup_{n\to\infty} x_n$ et puisque $\ell_-, \ell_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ choisissons un $a \in (\ell_-, \ell_+)$.

Par définition de $\ell_-$, il existe un $x_{n_1} < a$.

Soit $n_2$ le plus petit entier plus grand que $n_1$ tel que $x_{n_2} > a$ (l'existence de $n_2$ est donnée par la définition de $\ell_+$).

Ainsi, $x_{n_2-1} \leq a < x_{n_2}$.

Comme $\ell_- < a$, il existe un entier positif $n_3 > n_2$ tels que $x_{n_3} < a$.

Ensuite, par définition de $\ell_+$, il existe un entier $n_4 > n_3$ tels que $x_{n_4} > a$.

Si $n_4$ désigne le plus petit entier ayant ces propriétés.

Alors $x_{n_4-1} \leq a < x_{n_4}$.

De cette façon, nous construisons une suite croissante de nombres positifs $(n_{2k})_{k\geq 1}$ telle que,

Pour tout$k \geq 1$, $x_{n_{2k}-1} \leq a < x_{n_{2k}}$.

En utilisant l'hypothèse, nous en déduisons que les suite $(x_{n_{2k}-1})_{k\geq 1}$ et $(x_{n_{2k}})_{k\geq 1}$ convergent vers $a$, donc $a$ est un point d'accumulation. Donc l'intervalle fermé, éventuellement dégénéré, qu'on recherche est bien $[\ell_-, \ell_+]$

Le résultat de convergence suivant a été établi par BP Hillam [6] en 1976.

**Théorème 3**

Soit $f$: $[a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Considérons la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 \in [a, b]$ et, pour tout entier positif $n$, $x_n = f(x_{n-1})$. Alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 0}$ converge vers zéro.

**Preuve**

Supposons que la suite des approximations successives $(x_n)_{n \geq 0}$ vérifie $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$. Avec les mêmes notations que la preuve précédente, supposons que $\ell_- < \ell_+$. La première partie de la preuve de précédente combinée avec la continuité de $f$ implique que $a = f(a)$ pour tout $a \in (\ell_-, \ell_+)$, car comme $a$ est un point d'accumulation il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ de $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_{n_k} \rightarrow a$ quand $k \rightarrow +\infty$ or d'après l'hypothèse on a,

$$f(x_{n_k}) - x_{n_k} = x_{n_k+1} - x_{n_k} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty,$$

et l'assertion découle par passage à la limite.

Mais en outre cela contredit notre hypothèse $\ell_- < \ell_+$.

En effet, choisissons $\ell_- < c < d < \ell_+$ et un nombre $0 < \varepsilon < \frac{d-c}{3}$.

Comme $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$, il existe $N_\varepsilon$ tel que,

pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a $-\varepsilon < x_{n+1} - x_n < \varepsilon$.

Soit, $N_2 > N_1 > N_\varepsilon$ tels que $x_{N_1} < c < d < x_{N_2}$.

Notre choix de $\varepsilon$ implique qu'il existe un entier $n \in (N_1, N_2)$ tel que $a := x_n \in (c, d)$ sinon on aura pour tout $n \in (N_1, N_2)$ soit $|x_n - x_{N_1}| > d - c$ soit $|x_{N_2} - x_n| > d - c$ en particulier on aura soit $|x_{N_1+1} - x_{N_1}| > d - c > \varepsilon$ soit $|x_{N_2} - x_{N_2-1}| > d - c > \varepsilon$ ce qui donne une contradiction.

Par suite on a $x_{n+1} = f(a) = a$, $x_{n+2} = a$, et ainsi de suite.

Par conséquent $x_{N_2} = a$, contradiction.

L'assertion inverse est évidente.

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de point fixe dû à Krasnoselski (voir [7]). Nous référons à [5] pour le cadre général correspondant à des fonctions définies sur un sous-ensemble convexe fermé des espaces de Banach strictement convexes.

**Théorème 4**

Soit $f: [a,b] \to [a,b]$ une fonction satisfaisant $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, pour tout $x, y \in [a,b]$. Définissons la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ par $x_1 \in [a,b]$ et, pour tout $n \geq 1, x_{n+1} = [x_n + f(x_n)]/2$. Alors la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers un point fixe de $f$.

**Preuve**

Nous observons qu'il suffit de montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge. Dans ce cas, par la relation de récurrence et la continuité de $f$, il s'ensuit que la limite de $(x_n)_{n \geq 1}$ est un point fixe de $f$. Nous raisonnons par l'absurde et on note $A$ l'ensemble de tous les points limites de $(x_n)_{n \geq 1}$, c'est-à-dire $A: = \{\ell \in [a,b],\ il\ existe\ une\ sous - suite\ (x_{n_k})_{k \geq 1}\ de\ (x_n)_{n \geq 1}\ telle\ que\ x_{n_k} \to \ell\}$.

De notre hypothèse et la compacité de $[a,b]$, on en déduit que $A$ contient au moins deux éléments et est un ensemble fermé. L'ensemble A est fermé car s'il existe une suite de limites $(\ell_n)_n$ dans $A$ qui converge vers un certain $\ell \in [a,b]$ alors on peut trouver une suite de nombre réels $(n_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante telle que $x_{n_k} \in (\ell_k - \frac{1}{k}, \ell_k + \frac{1}{k})$.

La suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ est alors une sous suite de $(x_n)_{n \geq 1}$,

et $|x_{n_k} - \ell| \leq |x_{n_k} - \ell_k| + |\ell_k - \ell| \leq \frac{1}{k} + |\ell_k - \ell| \to 0$ quand $k \to +\infty$.
Donc $\ell$ est bien une limite pour la sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ d'où $\ell \in A$.

Nous divisons la preuve en plusieurs étapes.

(i) Pour tout $\ell \in A$, on a $f(\ell) \neq \ell$.

En effet, supposons que $\ell \in A$ et fixons $\varepsilon > 0$ et $n_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Alors par l'absurde si on a $f(\ell) = \ell$ donc on trouvera facilement que

$$\left|\ell - x_{n_k+1}\right| = \left|\frac{\ell + f(\ell)}{2} - \frac{x_{n_k} + f\left(x_{n_k}\right)}{2}\right| \le \frac{\left|\ell - x_{n_k}\right|}{2} + \frac{\left|f(\ell) - f\left(x_{n_k}\right)\right|}{2}$$

$$\le \frac{|\ell - x_{n_k}|}{2} + \frac{|\ell - x_{n_k}|}{2} = |\ell - x_{n_k}| \le \varepsilon .$$

et ainsi de suite.

Cela montre que $|x_n - \ell| \le \varepsilon$, pour tout $n \ge n_k$.

Donc $(x_n)_{n \ge 1}$ converge vers $\ell$, contradiction.

(ii) Il existe $\ell_0 \in A$ tel que $f(\ell_0) > \ell_0$.

En effet, en argumentant par contradiction, soit $\ell_- = \min_{\ell \in A} \ell$.

Alors $\ell_- \in A$ car $A$ est fermé et $f(\ell_-) \le \ell_-$.

Le cas $f(\ell_-) = \ell_-$ est exclu, par (i).

Mais $f(\ell_-) < \ell_-$ implique que vu qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\ge1}$ convergeant vers $\ell_-$ alors la sous-suite $(x_{n_k+1})_{k\ge1}$ converge vers le nombre $\ell = \frac{[\ell_- + f(\ell_-)]}{2}$ car la fonction $f$ est continue et $x_{n_k+1} = [x_{n_k} + f(x_{n_k})]/2$ et donc $\ell \in A$ par définition de l'ensemble $A$.

Or le fait que $\ell = [\ell_- + f(\ell_-)]/2 < \ell_-$, contredit la définition de $\ell_-$.

Dans ce cas il suffit de prendre $\ell_0 = \ell_-$ .v

(iii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(\ell) - \ell| \ge \varepsilon$, pour tout $\ell \in A$. En effet, sinon, soit $\ell_n \in A$ tel que $|f(\ell_n) - \ell_n| < \varepsilon_n = 1/n$, pour tout $n \ge 1$. Cela implique que tout point limite de $(\ell_n)_{n \ge 1}$ (qui est aussi dans l'ensemble fermé $A$) est un point fixe de la fonction continue $f$. Ceci contredit (i).

(iv) Conclusion. Par (ii) et (iii), il existe un plus grand $\ell_+ \in A$ telle que $f(\ell_+) > \ell_+$ car l'ensemble $B = \{\ell \in A \; tel \; que \; f(\ell) > l\}$ n'est pas vide et contient au moins l'élément $\ell_0$ et pour tout $\ell \in B$ on a forcément $f(\ell) \ge \ell + \varepsilon > l$ par (iii), alors il suffit de prendre $\ell_+ = \sup B \in A$ car $A$ est fermé d'où $\ell_+$ vérifiera $f(\ell_+) \ge \ell_+ + \varepsilon > \ell_+$ par continuité de la fonction $f$. Soit $\ell' = \frac{[\ell_+ + f(\ell_+)]}{2} \in A$ (par un argument similaire que celui dans (iii)) et constatons que $f(\ell_+) > \ell' > \ell_+$ et donc on a que $f(\ell') < \ell'$ par définition de $\ell_+$ et l'exclusion de l'égalité $f(\ell') = \ell'$ par (i). Par (iii), il existe un plus petit $\ell'' \in A$ tel que $\ell'' > \ell_+$ et $f(\ell'') < \ell''$ car l'ensemble $C = \{\ell \in A \; tel \; que \; \ell > \ell_+$ et $f(\ell) < \ell\}$ n'est pas vide et contient au moins l'élément $\ell'$ et pour tout $\ell \in C$ on a forcément $f(\ell) \leq \ell - \varepsilon < l$ par (iii), alors il suffit de prendre $\ell'' = \inf C \in A$ car $A$ est fermé d'où $\ell''$ vérifiera $f(\ell'') \leq \ell'' - \varepsilon < l''$ par continuité de la fonction $f$ et vérifiera aussi $\ell'' > \ell_+$ car l'égalité aboutira à une contradiction avec la définition de $\ell_+$.

Il s'ensuit que $\quad \ell_+ < \ell'' \leq \ell' < f(\ell_+)$.

Notons ensuite que $\quad f(\ell'') < \ell_+$,

car sinon $\ell''' := \frac{[\ell'' + f(\ell'')]}{2} \in A$ satisfaira $\ell_+ < l''' < l''$ ,

et par définition de $\ell_+$ s'ensuit que $f(\ell''') \leq \ell'''$ ,

et celle de $\ell''$ il s'ensuit que $\quad f(\ell''') \geq \ell'''$ .

Donc finalement $\quad f(\ell''') = \ell'''$ et ceci contrairement à (i).

Ainsi $\quad f(\ell'') < \ell_+ < l'' < f(\ell_+)$.

Il s'ensuit que $\quad |f(\ell'') - f(\ell_+)| > |\, l'' - \ell_+|$.

Ceci contredit l'hypothèse que,

$$|f(x) - f(y)| \leq |\, x - y \,|, \text{ pour tout } x, y \in [a, b],$$

et termine la preuve.

**<u>Remarque</u>**

(i) Le schéma d'itération décrit ci-dessus dans la propriété de Krasnoselski ne s'applique pas aux applications continues arbitraires d'un intervalle fermé dans lui-même. En effet, considérons la fonction $f: [0, 1] \to [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ -3x + \frac{3}{2} & si \quad \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ensuite, la suite définie ci-dessus est donnée par $x_{2n} = \frac{1}{2}$ et $x_{2n+1} = \frac{1}{4}$, pour tout $n \geq 1$. Donc, $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente.

(ii) Le théorème du point fixe de Banach affirme que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f: [a, \infty) \to [a, \infty)$) est une application telle que pour un certain $k$ dans $(0, 1)$ et tous $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, alors l'itération $f^n = f \circ \ldots \circ f$ ($n$ termes) de $f$ converge vers un (unique) point fixe $\xi$ de $f$. Ce théorème peut être accompagné d'un exemple pour montrer que l'inégalité ne peut pas être remplacée par la condition plus faible $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. L'exemple le plus commun de ce type est $f(x) = x + 1/x$ agissant sur $[1, \infty)$. Alors, $f(x) > x$, de sorte que $f$ n'a pas de points fixes. En outre, pour tout $x$, la suite $x, f(x), f^2(x) \ldots$ est strictement croissante et doit donc converger dans l'espace $[-\infty, +\infty]$. En fait, $f^n(x) \to +\infty$, sinon $f^n(x) \to a$ pour un certains $a$ réel, et alors $f(f^n(x)) \to f(a)$ (car $f$ est continue) de sorte que $f(a) = a$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, on définit $f(+\infty)$ pour être $+\infty$ et on en déduit que cet exemple n'est plus un contre-exemple. La propriété suivante clarifie ces idées et fournit un élémentaire, mais intéressant, adjoint au théorème du point fixe de Banach. Nous venons de souligner qu'une application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$ est appelée fonction contractante.

**<u>Définition</u>**

On dit qu'une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfait à la condition de Lipschitz avec une constante $L > 0$ si pour tout $x$ et $y$ dans $[a, b]$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

**<u>Propriétés</u>**

(i) Une fonction qui satisfait une condition de Lipschitz est clairement continue. Car pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a$ dans $[a, b]$ on a donc pour tout $x$ dans $[a, b]$ tel que $|a - x| < \varepsilon/L$, $|f(a) - f(x)| \leq \varepsilon$

(ii) Géométriquement, si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfait la condition de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$, alors pour tous $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, l'inégalité $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq L$ indique que la pente de l'arc reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sur le graphe de $f$ est bornée par $L$.

En utilisant le fait que la droite réelle est totalement ordonnée, le théorème plus général qui suit avec preuve beaucoup plus élémentaire est possible.

**<u>Proposition 6</u>**

Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction qui satisfait une condition de Lipschitz avec constante $L$. Soit $x_1$ dans $[a,b]$ arbitraire et considérons la suite $(x_n)$ définie par $x_{n+1} = (1 - \lambda)\, x_n + \lambda f(x_n)$ où $\lambda = 1/(L + 1)$ .Alors $(x_n)_{\, n \geq 1}$ converge de façon monotone vers un point $z$ dans $[a,b]$, où $f(z) = z$.

**<u>Preuve</u>**

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $f(x_n) \neq x_n$ pour tout $n$. Supposons que $f(x_1) > x_1$ et soit $p$ le premier point supérieur $x_1$ tel que $f\,(p) = p$.

Comme $f\,(x_1) > x_1$ et $f(b) \leq b$, la continuité de $f$ implique qu'un tel point existe.

Ensuite, nous prouvons affirmer l'assertion suivante.

Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < p$ , et $f\,(x_i) > x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ , alors $f(x_{n+1}) > x_{n+1}$ et $x_{n+1} < p$.

En effet, supposons $p < x_{n+1}$,

alors $\quad x_n < p < x_{n+1}$,

donc $\quad 0 < p - x_n < x_{n+1} - x_n = \lambda\, (f(x_n) - x_n)$.

Ainsi ,

$$0 < \frac{1}{\lambda} |x_n - p\,| = (L + 1)|x_n - p\,| < |f(x_n) - x_n|$$

$$\leq |\, f(x_n) - f(p)| + |p - x_n|.$$

Il s'ensuit que $\quad L|\, x_n - p\,| < |f(x_n) - f(p)|$,

ce qui contredit le fait que $f$ est une fonction Lipchitzienne avec constante de Lipschitz $L$.

Ainsi par le choix de , $x_{n+1} < p$ et $f(x_{n+1}) > x_{n+1}$ et l'assertion est prouvée. En utilisant l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que $x_n < x_{n+1} < p$ pour tout entier $n$. Comme une suite monotone bornée converge, $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers un point $z$. Par l'inégalité triangulaire,

il s'ensuit que ,

$$|z - f(z)| \leq |z - x_n| + |x_n - f(x_n)| + |f(x_n) - f(z)| =$$

$$|z - x_n| + \frac{1}{\lambda}|x_{n+1} - x_n| + |f(x_n) - f(z)|.$$

Comme le terme du coté droit de l'inégalité tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, nous concluons que $f(z) = z$ d'où $z$ est un point fixe de $f$ et $z = p$ par définition de $p$. Si $f(x_1) < x_1$ un argument similaire s'appliquera.

Appliquant un argument un peu plus sophistiqué, on peut permettre à $\lambda$ soit d'être n'importe quel nombre inférieure à $2/(L+1)$, mais la suite résultante $(x_n)_{n \geq 1}$ peut ne pas converger de façon monotone.

Le dernier résultat est bien possible comme le montre l'exemple suivant :

**<u>Exemple</u>**

Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{L-1}{2L}, \\ -Lx + \frac{1}{2}(L+1), & \frac{L-1}{2L} \leq x \leq \frac{L+1}{2L}, \\ 0, & \frac{L+1}{2L} < x \leq 1. \end{cases}$$

où $L > 1$ est arbitraire. Notez que $f$ satisfait une condition de Lipschitz avec une constante $L$. Soit $\lambda = 2/(L+1)$ et posons $x_1 = (L-1)/2L$. Ensuite, $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda f(x_1) = (L+1)/2L$, $x_3 = (1-\lambda)x_2 + \lambda f(x_2) = (L-1)/2L$, etc

# Chapitre 3

# Applications en mathématiques économiques

## Suites de Picard par rapport au modèle toile d'araignée et analyse qualitative des marchés

Nous commençons avec l'interprétation géométrique élémentaire suivante de la méthode Picard. Tout d'abord, prenons un point $A(x_1, f(x_1))$ de la courbe $y = f(x)$. Ensuite, considérons le point $B_1(f(x_1), f(x_1))$ sur la diagonale $y = x$ et ensuite, projetons le point $B_1$ verticalement sur la courbe $y = f(x)$ pour obtenir un point $A_2(f(x_2), f(x_2))$. Encore une fois, projetons $A_2$ horizontalement à $B_2$ sur $y = x$ et ensuite, projetons $B_2$ verticalement sur $y = f(x)$ pour obtenir $A_3$ $(x_3, f(x_3))$. Ce processus peut être répété plusieurs fois. Souvent, il sera tisser une toile d'araignée, dans laquelle le point fixe de $f$, c'est-à-dire le point d'intersection de la courbe $y = f(x)$ et la diagonale $y = x$, est piégé. En fait, un tel piégeage survient si les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont plus petites (en valeur absolue) que la pente de la ligne diagonale $y = x$. La situation décrite ci-dessus est illustré dans la figure 4.

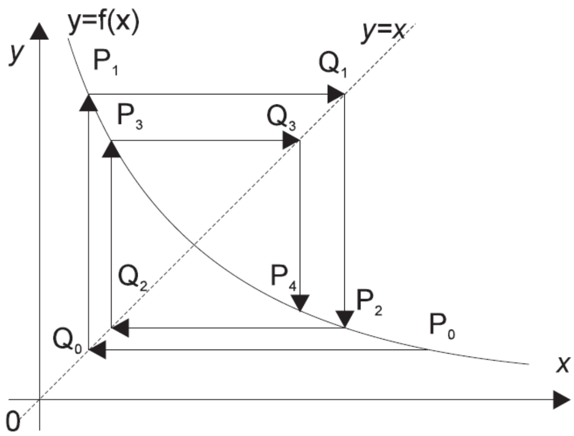

Fig. 4. Suite de Picard convergeant vers un point fixe.

Lorsque la condition sur la pente n'est pas respectée, alors les points $A_1, A_2, \ldots$ peuvent tendre vers un point fixe. Ce cas est illustré dans la figure 5.

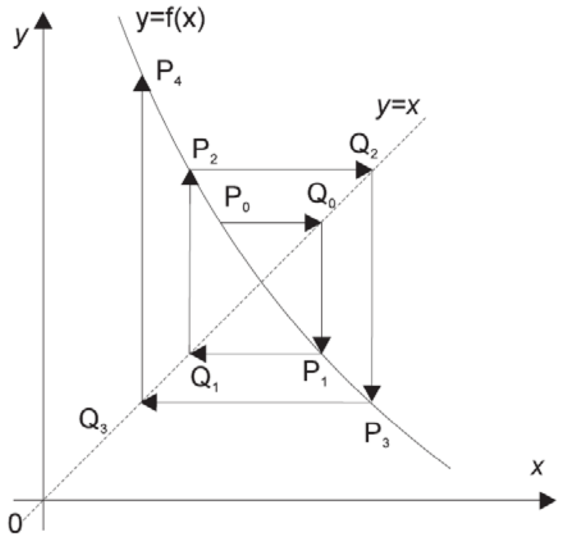


Fig. 5. Suite de Picard divergeant hors du point fixe.

Dans l'économie mathématique, le comportement décrit dans la figure 4 correspond à la convergence vers un point d'équilibre, tandis que le cadre décrit dans la figure 5 décrit la divergence hors l'équilibre.

Une condition suffisante pour la convergence d'une suite de Picard, qui est un analogue formel de la condition géométrique sur les pentes mentionnées ci-dessus, est indiquée dans le résultat suivant, qui est également désigné comme le théorème de convergence de Picard.

**Théorème 5**

Soit $f: [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et dérivable sur $(a, b)$, avec $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors $f$ a un unique point fixe. En outre, toute suite de Picard pour f est convergente et converge vers l'unique point fixe de $f$.

Tout d''abord on va démontrer le lemme suivant :

**Lemme 1**

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ alors la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si toutes les sous-suites convergentes de $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite.

**Preuve**

Il est clair que si $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente alors toute les sous-suites convergentes de $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite. Démontrons maintenant l'implication inverse.

Par l'absurde supposons que toutes les sous-suites convergentes de $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite et que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ diverge. Mais puisque la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est bornée donc elle possède au moins une valeur d'adhérence $x$. Donc en particulier on peur affirmer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers $x$ et ceci veut dire qu'il existe un voisinage ouvert $V$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le fermé $\mathbb{R}^n \backslash V$ contient un nombre infini des éléments de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ notons par $x_{n_k}$ ces éléments tel que la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ soit strictement croissante. On a donc une sous-suite $(x_{n_k})_{n \geq 1}$ de $(x_n)_{n \geq 1}$ qui est bornée et donc contient au moins une sous-suite convergente vers un point $x'$ dans le fermé $\mathbb{R}^n \backslash V$ mais d'après l'hypothèse on a $x' = x$ donc $x'$ est dans $V$. Contradiction. Donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente

**Remarque**

Le lemme précédent peut être généralisé sans difficulté à des espaces métriques complets. Il en découle aussi le résultat suivant

**Corollaire 1**

Une suite bornée $(x_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathbb{R}^n$ diverge si et seulement si $(x_n)_{n \geq 1}$ possède au moins deux points d'accumulation.

Ce corollaire n'est que la contraposée du lemme précédent.

**Preuve du théorème 5**

Nous observons tout d'abord que le théorème du point fixe de Brouwer implique que $f$ possède au moins un point fixe. Ensuite, en supposant que $f$ a deux points fixes $x^*$ et $x_*$, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $\xi \in (a,b)$ tel que $|x^* - x_*| = |f(x^*) - f(x_*)| = |f'(\xi)| \cdot |x^* - x_*| < |x^* - x_*|$, une contradiction. Ainsi, $f$ a un unique point fixe.

Nous rappelons que la condition $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in (a,b)$ est essentielle pour l'unicité d'un point fixe. Par exemple, si $f: [a,b] \to [a,b]$ est définie par $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$ pour tout $x \in [a,b]$ et tous les points de $[a, b]$ est un point fixe de $f$.

Nous montrons dans ce qui suit que la suite de Picard correspondante convergence. Soit $x^*$ représentant le point fixe de $f$. Considérons arbitrairement $x_1 \in [a,b]$ et soit $(x_n)_{n \geq 1} \subset$ [a, b] la suite de Picard pour $f$ avec son point initial $x_1$. Cela signifie que $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$. Fixons un entier $n \geq 1$. Ainsi, par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n$ entre $x_n$ et $x^*$ tel que $x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) = f'(\xi_n)(x_n - x^*)$. Ceci implique que $|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$. Ensuite, nous montrons que $x_n \to x^*$ quand $n \to \infty$. Comme $(x_n)_{n \geq 1}$ est bornée, il suffit de montrer que chaque sous-suite convergente de $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers $x^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ une sous-suite de $(x_n)_{n \geq 1}$ convergente vers $x$. Alors $|x_{n_{k+1}} - x^*| \leq |x_{n_k+1} - x^*| \leq |x_{n_k} - x^*|$. Mais $|x_{n_{k+1}} - x^*| \to |x - x^*|$ et $|x_{n_{k+1}} - x^*| = |f(x_{n_k}) - f(x^*)| \to |f(x) - f(x^*)|$, lorsque $k \to \infty$. Il s'ensuit que $|f(x) - f(x^*)| = |x - x^*|$. Maintenant, si $x \neq x^*$, alors par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in (a,b)$ tel que $|x - x^*| = |f(x) - f(x^*)| = |f'(\xi)| \cdot |x - x^*| < |x - x^*|$, ce qui est une contradiction. Ceci prouve que $x = x^*$.

**<u>Remarque</u>**

Si la condition $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in (a,b)$ n'est pas satisfaite, alors $f$ peut encore avoir un unique point fixe $x^*$, mais la suite de Picard $(x_n)_{n \geq 1}$ avec le point initial $x_1 \neq x^*$ peut ne pas converger vers $x^*$.

**<u>Exemple</u>**

Soit $f: [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = -x$. Alors $f$ est différentiable, $|f'(x)| = 1$ pour tout $x \in [-1,1]$, et $x^* = 0$ est l'unique point fixe de $f$. Si $x_1 \neq 0$, alors la suite de Picard correspondante est $x_1, -x_1, x_1, -x_1, \ldots$, Qui oscille entre $x_1$ et $-x_1$ et n'atteint jamais le point fixe. En termes géométriques, la toile d'araignée que nous espérons tisser retrace seulement le même carré plusieurs fois.

Lorsque les hypothèses du théorème de convergence de Picard sont satisfaites, une suite de Picard pour $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$ avec $x_1 \in [a,b]$ arbitraire comme point de départ, converge vers un point fixe de $f$. Il est naturel de s'attendre à ce que, si $x_1$ est plus proche du point fixe, le taux de convergence sera meilleur. Un point fixe de $f$ ne réside pas seulement dans l'image de $f$ mais aussi dans l'image des itérations $f \circ f, f \circ f \circ f$, et ainsi de suite. Ainsi, si $\mathcal{R}_n$ est l'image de la $nième$ composée $f \circ \ldots \circ f$ ($n$ fois), alors un point fixe est dans chaque $\mathcal{R}_n$. Si un seul point appartient à $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$, alors nous avons trouvé notre point fixe. En fait, la méthode de Picard ne change pas en commençant par n'importe quel $x_1 \in [a,b]$ et compte tenu de l'image de $x_1$ sous la $nième$ composée $f \circ \ldots \circ f$.

**Exemple**

Si $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ est définie par $f(x) = \frac{x+1}{4}$, alors la $nième$ itération de $f$ est donnée par $f \circ \ldots \circ f\ (n \text{ fois})(x) = \frac{3x + 4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$ et $\mathcal{R}_n = \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right), \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{4^n})\right]$.

Ainsi, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n = \{\frac{1}{3}\}$, d'où $\frac{1}{3}$ est le point fixe de $f$. En général, il n'est pas commode de déterminer les images $\mathcal{R}_n$ pour tout $n$. Donc, il est plus simple d'utiliser la méthode de Picard, mais cet outil sera plus efficace si les observations ci-dessus sont utilisées, dans une certaine mesure, dans le choix du point initial.

Le théorème de convergence de Picard a été étendu dans [4] pour un cadre qui apparait souvent en économie mathématique. Ceci correspond au modèle « toile d'araignée » qui concerne l'analyse qualitative des marchés dans lesquels les ajustements de l'offre ont un temps de retard et les ajustements de la demande se produisent sans délai. Nous décrivons brièvement dans ce qui suit le modèle « toile d'araignée » et on conclut avec le théorème de la « toile d'araignée », qui est une généralisation du théorème 5. Soit $s(p)$ la quantité totale du produit que les vendeurs sont prêts à fournir à un prix d'un niveau donné $p > 0$. Supposons que la fonction de demande $d(p)$ représente la quantité totale du produit que les clients sont prêts à acheter à un prix d'un niveau donné $p$. La situation décrite dans le résultat suivant correspond au prix convergeant vers un prix d'équilibre et il est décrit par les économistes comme un "équilibre stable". Ceci signifie que si une petite perturbation parasite se produit dans le marché, éventuellement le prix convergera à nouveau vers un certains prix d'équilibre. Le même résultat montre que la perturbation doit être suffisamment grande pour faire bouger l'équilibre. Une telle perturbation pourrait être une crise, sécheresse, ou grande récession.

**Théorème 6**

(Théorème de la « Toile d'araignée ») Soit $s$ et $d$ deux fonctions réelles d'une variable réelle $p > 0$, et supposons que les graphes de $s$ et $d$ se coupent au point $(p^*, q^*)$ où $q^* > 0$. Soit $I$ un intervalle fermé centré en $p^*$ sur lequel les fonctions $s$ et $d$ ont des dérivées non-nulles continues et de mêmes signes. Définissons deux suites $(p_n)$ et $(q_n)$ en prenant pour $p_0$ un élément quelconque de $I$, $q_n = s(p_{n-1})$ et $p_n = d^{-1}(q_n)$ pour tout $n \geq 1$. Supposons que $|s'(p)| < |d'(p)|$ pour tout $p$ dans $I$. Alors $\lim_{n \to \infty} p_n = p^*$ et $\lim_{n \to \infty} q_n = q^*$.

**Preuve**

Les fonctions s et d sont dérivables et ont des dérivées non-nulles sur $I$ et de mêmes signes, donc ces deux fonctions sont continues et strictement monotones sur $I$ avec le même type de monotonie, donc ce sont des bijections de $I$ vers $s(I)$ et de $I$ vers $d(I)$ respectivement.

Si $s$ et $d$ sont toutes les deux croissantes alors on a bien $0 < s'(r) < d'(r)$ pour tout $r$ dans $I$. Donc $d'(r) - s'(r) > 0$ pour tout $r$ dans $I$. En intégrant de $p^*$ à $p > p^*$ en trouvera que $d(p) - d(p^*) - s(p) + s(p^*) > 0$ et puisque $s(p^*) = d(p^*) = q^*$ on aura $d(p) > s(p)$ pour tout $p > p^*$ dans $I$. Or on sait déjà que $d(p^*) = s(p^*) > s(p)$ car $s$ est strictement croissante. Il s'ensuit par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction bijective $d$ qu'il existe pour chaque $p > p^*$ dans $I$ un unique $r \in (p^*, p)$ tel que $d(r) = s(p)$. Inversement et par des arguments similaires on trouvera que $d(p) < s(p)$ pour tout $p < p^*$ dans $I$, et du fait que $d(p^*) = s(p^*) > s(p)$ on en déduit par le même argument l'existence pour chaque $p < p^*$ dans $I$ d'un unique $r \in (p, p^*)$ tel que $d(r) = s(p)$. Il s'ensuit que $d(p) \neq s(p)$ pour tout $p \in I \setminus \{p^*\}$ et comme $d(p^*) = s(p^*)$ on en déduit que $s(I) \subset d(I)$ d'où $(d^{-1} \circ s)(I) \subset I$. Le cas où $s$ et $d$ sont toutes les deux strictement décroissantes se traite de la même façon.

Puisque $p_0 \in I$, $q_n = s(p_{n-1})$ et $p_n = d^{-1}(q_n)$ pour tout $n \geq 1$ on a alors $q_n = d(p_n) = s(p_{n-1})$ donc $p_n = d^{-1}(s(q_{n-1}))$ pour tout $n \geq 1$ d'où la suite $(p_n)_n$ est dans $I$ donc elle est bien définie. Il en résulte que la suite $(q_n)_n$ est dans $s(I)$ donc elle est bien définie aussi.

Par l'absurde supposons qu'il existe un point $p^{**} \in I$ tel que $\lim_{n \to \infty} p_n = p^{**}$ et un certain $q^{**} \in s(I)$ tel que $\lim_{n \to \infty} q_n = q^{**}$. Or on a d'après les hypothèses du théorème la relation $q_n = s(p_{n-1}) = d(p_n)$, et donc par la continuité de $s$ et $d$ et par passage à la limite on trouve que $p^{**}$ et $q^{**}$ vérifient $s(p^{**}) = d(p^{**}) = q^{**}$, donc $p^{**} = p^*$ et $q^{**} = q^*$ d'où d'après l'unicité du point d'intersection on a l'unicité des limites des suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ pour tout $p_0 \in I$.

Démontrons maintenant l'existence des deux limites. Vu la continuité de la fonction $d^{-1}$ il suffit de démontrer que $\lim_{n \to \infty} q_n = q^*$.

Sans perte de généralité on peut supposer $p_0 \neq p^*$. Alors on a pour tout $n \geq 1$ $|q_n - q^*| = |d(p_n) - d(p^*)| = |s(p_{n-1}) - s(p^*)|$, or d'après le théorème des accroissements finis généralisé on a $(d(p_n) - d(p^*))s^{'}(c_n) = (s(p_n) - s(p^*))d^{'}(c_n)$ pour un certain $c_n$ dans $(p^*, p_n)$ ou $(p_n, p^*)$. Il en résulte que $|q_n - q^*| = |(s(p_{n-1}) - s(p^*)| = |(s(p_n) - s(p^*)| \left|\frac{d^{'}(c_n)}{s^{'}(c_n)}\right| = |q_{n+1} - q^*| \left|\frac{d^{'}(c_n)}{s^{'}(c_n)}\right|$, donc d'après l'hypothèse que $1 < \frac{|d^{'}(p)|}{|s^{'}(p)|}$ pour tout $p$ dans $I$, on en déduit que $|q_{n+1} - q^*| < |q_n - q^*|$ pour tout $n \geq 1$. Donc pour tout $n \geq 1$ on a $|q_n - q^*| < |q_1 - q^*|$ et on en déduit que la suite $(q_n)_n$ est bornée quelque soit $p_0 \in I$. Alors d'après le lemme 1 pour prouver que $(q_n)_n$ converge il suffit de prouver que toute sous-suite convergente $\left(q_{n_k}\right)_k$ de $(q_n)_n$ converge vers $q^*$. Soit $\left(q_{n_k}\right)_k$ une sous-suite de $(q_n)_n$ et soit $q$ sa limite. On a $\left|q_{n_{k+1}} - q^*\right| < \left|q_{n_k+1} - q^*\right| < \left|q_{n_k} - q^*\right|$ alors $\left|q_{n_k+1} - q^*\right| \to |q - q^*|$ quand $k \to +\infty$. Mais $\left|q_{n_k+1} - q^*\right| = \left|s \circ d^{-1}(q_{n_k}) - s \circ d^{-1}(q^*)\right| \to |s \circ d^{-1}(q) - s \circ d^{-1}(q^*)|$ quand $k \to +\infty$ d'où $|s \circ d^{-1}(q) - s \circ d^{-1}(q^*)| = |q - q^*|$ or d'après le théorème des accroissements finis on a $|s \circ d^{-1}(q) - s \circ d^{-1}(q^*)| = |q - q^*||s^{'}(d^{-1}(c))(d^{-1})'(c)| = |q - q^*| \left|\frac{s^{'}(d^{-1}(c))}{d^{'}(d^{-1}(c))}\right|$ pour un certain $c \in (q^*, q)$ ou $c \in (q, q^*)$ ce qui est absurde sauf si $q = q^*$, ce qui achève la démonstration.

**Remarques**

(i) La condition que $s'$ et $d'$ sont de même signe n'était pas mentionnée dans l'énoncé du théorème 6 de la version originale de l'article. Cette condition se trouve nécessaire pour permettre d'avoir $s(I) \subset d(I)$ et elle trouve justification à cause du contre-exemple suivant qui fait tomber le théorème 6 original en défaut :

Posons $d(p) = \frac{p^2}{2} + \frac{p}{4} + \frac{1}{4}$ et $s(p) = -\frac{3}{8}p^2 - \frac{3}{16}p + \frac{11}{16}$, $p \in [0,1] = I$

On a dans ce cas $d^{'}(p) = p + \frac{1}{4} > 0$ et $s^{'}(p) = -\frac{3}{4}\left(p + \frac{1}{4}\right) < 0$ pour tout $p \in [0,1]$. Et on a bien $|s^{'}(p)| = \frac{3}{4}|d^{'}(p)| < |d^{'}(p)|$. En posant $p^* = q^* = \frac{1}{2} > 0$ on aura bien $d(p^*) = s(p^*) = q^*$. Donc toutes les conditions de la version originale du théorème 6 sont satisfaites. En revanche on a $d([0,1]) = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ et $s([0,1]) = \left[\frac{1}{8}, \frac{11}{16}\right]$ donc $s(I) \not\subset d(I)$. En prenant $p_0 = 1$ on aura $q_1 = s(p_0) = \frac{1}{8}$ mais $p_1 = d^{-1}(q_1) = d^{-1}(\frac{1}{8})$ n'est pas défini car $\frac{1}{8} \notin \left[\frac{1}{4}, 1\right] = d(I)$.

(ii) Pour avoir $s(I) \subset d(I)$ on pouvait omettre la condition $s'$ et $d'$ sont de même signe et la remplacer par les deux conditions suivantes :

1. $I$ doit être un intervalle fermé borné (c'est-à-dire compact) centré en $p^*$.
2. $|s^{'}(p)| < \min_{r \in I}|d^{'}(r)|$ pour tout $p \in I$.

En effet, puisque $I$ est compact, $|d^{'}|$ est continue et $|d^{'}(p)| > 0$ pour tout $p \in I$ donc le minimum de la fonction $|d^{'}|$ est atteint et on a bien $\min_{r \in I}|d^{'}(r)| > 0$. On en déduit que la deuxième condition peut être vérifiée en même temps que la condition $|s^{'}(p)| > 0$ pour tout $p \in I$. On sait que $s^{'}$ et $d^{'}$ ne changent pas de signe alors on a les deux cas suivants :

- Soit $s^{'}$ et $d^{'}$ sont de même signe, mais dans ce cas la démonstration est déjà faite.
- Soit $s^{'}$ et $d^{'}$ sont de signes opposés.

Pour le deuxième cas, posons $S_{p^*}$ la fonction symétrie par rapport à l'axe $p = p^*$. Puisque $I$ est un intervalle compact centré en $p^*$ il est de la forme $[p^* - \delta, p^* + \delta]$ avec $\delta \geq 0$. Donc $S_{p^*}(I) = I$. Posons $\tilde{d} : I \to \mathbb{R}$ tel que $\tilde{d}(p) = d(S_{p^*}(p))$. Alors on a bien $\tilde{d}(I) = d(I)$ et $\tilde{d}(p) = d(2p^* - p)$ donc

$\tilde{d}'(p) = -d'(2p^* - p)$. C'est-à-dire $\tilde{d}^{'}$ et $d^{'}$ sont de signes opposés. Et puisque $s^{'}$ et $d^{'}$ sont de signes opposés alors $s^{'}$ et $\tilde{d}^{'}$ sont de même signe. En plus on a $|s^{'}(p)| < \min_{r\in I}|d^{'}(r)|$ pour tout $p \in I$. En particulier pour $r = 2p^* - p \in I$ on a $|s^{'}(p)| < \min_{r\in I}|d^{'}(r)| \leq |d^{'}(2p^* - p)| = \left|\tilde{d}'(p)\right|$ pour tout $p \in I$. Donc d'après le résultat déjà établi on a $s(I) \subset \tilde{d}(I) = d(I)$, ce qui achève la démonstration.

(iii) La condition que $p^*, q^* > 0$ n'est pas nécessaire car elle n'a pas été utilisée dans la démonstration.
(iv) La condition $s^{'}$ ne change pas de signe n'est pas essentiel. En effet posons $t, u : I \to \mathbb{R}$ tel que $t(p^*) = u(p^*) = q^*$ et $t'(p) = -u'(p) = |s'(p)|$ pour tout $p \in I$ ($t$ est donc une fonction croissante et $u$ une fonction décroissante) donc $u'(p) \leq s'(p) \leq t'(p)$. Alors on a par intégration entre $p^*$ et $p > p^* \in I$ que $u(p) - q^* \leq s(p) - q^* \leq t(p) - q^*$ et par intégration entre $p^*$ et $p < p^* \in I$ que $u(p) - q^* \geq s(p) - q^* \geq t(p) - q^*$ . Donc pour $p > p^* \in I$ on a $u(p) \leq s(p) \leq t(p)$ et d'autre part pour $p < p^* \in I$ on a $u(p) \geq s(p) \geq t(p)$, c'est-à-dire que $s(p)$ est entre $u(p)$ et $t(p)$ quelque soit $p \in I$. Or puisque $|t'(p)| = |u'(p)| = |s'(p)| < |d'(p)|$ on a bien d'après notre résultat (qu'on a démontré sans utiliser le fait que $|s'(p)| > 0$) que $t(I) \subset d(I)$ et $u(I) \subset d(I)$ c'est-à-dire $u(p), t(p) \in d(I)$ pour tout $p \in I$. Mais puisque $d(I)$ est un intervalle il s'ensuit que $s(p) \in d(I)$ pour tout $p \in I$. Ce qui achève la démonstration.

# Références

[1] K. ALLAB, Eléments d'analyse, théorème des accroissements finis généralisé, 175-176.
[2] H.G. Barone, Limit points of sequences and their transforms by methods of summability, Duke Math. J. 5 (1939). 740–752.
[3] M.W. Botsko, Problem Q982, Mathematics Magazine 81 (2008), p. 304.
[4] E.H. Davis, Cauchy and economic cobwebs, Mathematics Magazine 53 (1980), 171–173.
[5] M. Edelstein, A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 509–510.
[6] B.P. Hillam, A characterization of the convergence of successive approximations, Amer. Math. Monthly 83 (1976), p. 273.
[7] M.A. Krasnoselski, Two remarks on the method of successive approximations, Math. Nauk (N. S.) 10 (1955), 123–127.
[8] E. Picard, Traité d'Analyse, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
[9] Teodora–Liliana T. Radulescu and Vicentiu D. Radulescu, Picard and Krasnoselski sequences: applications to fixed point problems1 ,GAZETA MATEMATICA SERIA A ANUL XXVIII(CVII) Nr. 3 – 4/ 2010.

**Résumé**
On s’intéresse dans ce travail à différents théorèmes d’existences des points fixes et au rôle des suites de Picard et de Krasnoselski dans l’approximation de ces points fixes et en particulier ceux des équations non-linéaires. On donnera aussi un lien avec la méthode « toile d’araignée » qui décrit les phénomènes d’équilibre en économie mathématique.

**Mots clés** Point fixe, théorème du point fixe de Brouwer, théorème du point fixe de Knaster, approximations successives, suite de Picard, suite de Krasnoselski, méthode « toile d’araignée ».

**Abstract**
We are concerned, in this work, with different fixed points existence theorems and the role of Picard and Krasnoselski sequences in the approximation of these fixed points particularly those of nonlinear equations. We also give a connection with the cobweb method that describes equilibrium phenomena in mathematical economics.

**Keywords** fixed point; Brouwer fixed point theorem; Knaster fixed point theorem; successive approximation; Picard sequence; Krasnoselski sequence; cobweb method.

**ملخص**
سنهتم في هذا العمل بعدة مبرهنات خاصة بوجود النقاط الثابتة وكذلك دور متتاليات "بيكار" و"كراسنوسالسكي" في تقريب هذه النقاط وبالأخص تلك المتعلقة بالمعادلات اللاخطية. سنقدم أيضا صلة مع طريقة "شبكة العنكبوت" التي تصف ظواهر الاتزان في الرياضيات الاقتصادية.

**الكلمات المفتاحية** نقاط ثابتة, مبرهنة النقاط الثابتة ل"بروير", مبرهنة النقاط الثابتة ل"كناستر", التقريب المتعاقب, متتالية "بيكار", متتالية " كراسنوسالسكي ", طريقة " شبكة العنكبوت".