الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid جامعة أبي بكر بلقايد
Tlemcen Algérie تلمسان الجزائر

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de

Magister en Mathématiques

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS

THÈME

INVERSIBILITÈ DE LA FONCTION EXPONENTIELLE D'UN CHAMP DE VECTEURS

Présenté par : *Mr MOULAY KHATIR ISMAIL*

soutenu le : 23 JUIN 2014

Devant le jury composé de :

Président:	**Mr M. Messirdi**	MCA à l'Université de Tlemcen
Examinateurs:	**Mr N. Rahmani**	Professeur à l'USTO Oran
	Mme S.Rahmani	Professeur à l'USTO Oran
	Mr Y. Maliki	MCA à l'Université de Tlemcen
Rapporteur:	**Mr A.LANSARI**	MCA à l'Université de Tlemcen

Année Universitaire: 2013/2014

Table des Matières

Introduction

La théorie des groupes de Lie et algèbres de Lie infinis a été développée par H.Omori,J.Milnor et autres, et récemment par A. Kriegel et P. Michor en appliquant le concept des groupes de Lie régulier qui est plus simple et plus général que celui introduit par Omori.Ces idées ont étés utiliseés par le Professeur Andrzej Zajtz dans ses articles (cf:[19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]) pour développer les calculs sur les groupes de difféomorphismes à un paramètre dans les espaces de Frêchet de dimension infinie .

L'inversibilité de la fonction exponentielle a été étudiée par N.Kopell (1970) et M.I.Bryn (1974) qui ont donné des résultats négatifs et par J.Palis ,S.Smale (1969) ,J.Grabowski (1988) et A.Zajtz (2001) qui ont donné des résultats positifs.

Nous allons prolonger ces résultats pour des $X-$flots qui opérent doucement sur un espace de Frêchet.

Dans l'espace de Banach des fonctions continues,muni de la norme de la convergence uniforme l'opérateur adjoint et en général les opérateurs de la dérivée de Lie, ne sont pas continus (bornés). Pour cette raison nos résultats sont formulés dans les espaces de Frêchet.

Soient M une variété compacte Riemannienne,$\chi(M) = \Gamma(TM)$ l'espace des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M . Le groupe $Diff(M)$ de tous les difféomorphismes sur M de classe C^∞ posséde la structure d'un groupe de Frêchet de dimension infinie.

On pose

$$D = D(M) \subset Diff^\infty(M)$$

le groupe des difféomorphismes f de classe C^∞ de M ,telles que $f - id$ et toutes ses dérivées sont globalement bornées .

Le champ de vecteurs $X \in \chi(M)$ génère un flot

$$\phi_t = \exp tX, t \in \mathbb{R}$$

de classe C^∞ qui opère doucement sur D tel que:

$$\phi_t' = D\phi \cdot X = X \circ \phi_t$$

Problème: On cherche pour tout f dans D ,l'existence de X dans $\chi(M)$ tel que

$$f = \exp X$$

Voici l'essentiel du contenu des différents chapitres:

Dans le premier chapitre,on a donné des rappels sur les espaces de Frêchet et leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre on définit les propriétés de la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs en particulier :

1) Sa X-dérivation,

2) Son développement en série entière au voisinage de zéro,

3) Le développement en série de Fourier.

Dans le troisième chapitre on applique le Théorème de Nash-Moser des fonctions implicites pour définir l'inversibilité de la fonction exponentielle.

Enfin dans le quatrième chapitre, les caractéristiques des opérateurs adjoints permettent de définir la stabilité douce de degré r et de base b dans les espaces de Frêchet de certains systèmes dynamiques.

Notations

$\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$$\chi = \left\{ X = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ tel que les } a_i \text{ sont des fonctions de classe } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R}^n \right\}$$

$D\left(M\right) = \{f$ difféomorphisme de classe C^{∞}sur M dans $\mathbb{R}^n / \left(f \ - id\right)$ est globalement bornée et ses dérivées$\}$

$ad_X\left(Y\right) = [X, Y]$ pour tous champs de vecteurs X, Y dans χ.

En coordonnées pour

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ Y = \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

alors

$$ad_X\left(Y\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_j\left(x\right) \frac{\partial b_i\left(x\right)}{\partial x_j} - b_j\left(x\right) \frac{\partial a_i\left(x\right)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$(\chi, [,])$ est une algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$.

χ_0^k la sous-algèbre de Lie de Fréchet de χ des germes k-plats à l'origine.

$$\chi_0^k = \left\{ \begin{array}{c} X \in \chi \text{ vérifions } \forall m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n, \exists \delta_m > 0,\ \exists M_m > 0 \text{ tel que } \forall \|x\| \leq \delta_m \text{ on ait} \\ \begin{cases} \|D^m X\left(x\right)\| \leq M_m \|x\|^{k-m} & \forall |m| = 0, ..., k-1 \\ \|D^m X\left(x\right)\| \leq M_m & \forall |m| \geq k \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

χ_0^{∞} la sous-algèbre de Lie de χ des germes infiniment plats à l'origine

$$\chi_0^\infty = \left\{ \begin{array}{c} X \in \chi \text{ vérifions } \forall m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n, \exists \delta_m > 0,\ \exists M_m > 0 \\ \text{tel que } \forall \|x\| \leq \delta_m \text{ on ait } \|D^m X(x)\| \leq M_m \|x\|^k \ ,\ \forall k > 0 \end{array} \right\}$$

$\phi_t = \exp tX$ désigne le groupe à un paramètre t engendré par un champ de vecteurs X alors son système dynamique sera

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X \circ \phi_t(x) \\ \phi_0(x) = x \end{array} \right.$$

et ses difféomorphismes adjoints pour un champ de vecteurs Y seront:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\phi_t)_* Y(x) = (D_x\phi_t.Y)\left(\phi_t^{-1}(x)\right) \\ (\phi_t)^* Y(x) = (D_x\phi_t)^{-1}(x).Y(\phi_t(x)) \end{array} \right.$$

$\sigma(L)$ le spectre de l'opérateur L.

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - L) \text{ n'est pas inversibe}\}$$

$\rho(L)$ l'ensenble résolvant de l'opérateur L.

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - L) \text{ est inversibe}\}$$

$R(\lambda : L)$ c'est la résolvante de l'opérateur L.

$$R(\lambda : L) = (\lambda I - L)^{-1} \ , \forall \lambda \in \rho(L)$$

$\Sigma(B)$l'espace des **suites exponentiellement décroissantes** dans un espace de Banach B

$$\Sigma(B) = \left\{ (f_k)_k \ / \ f_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , f_k \in B \text{ et } \sum_{k \geq 0} e^{nk} \|f_k\|_B < +\infty \right\}$$

sur lequel on définit une famille de semi normes :

$$\|\{f_k\}\|_n = \sum_{k \geq 0} e^{nk} \|f_k\|_B$$

Chapitre 1

Espace de Frêchet doux et propriétés.

1.1 Espace de Frêchet gradué

1.1.1 Espace de Frêchet

Définitions

Définition 1.1 *(cf : [11]) i) Un espace vectoriel topologique **localement convexe** E est un espace vectoriel dont la topologie est définie par une famille filtrante de semi-normes ($\|.\|_i$, $i \in I$) où I est une famille filtrante .*

*ii) Cette topologie est **séparée** si et seulement si :*

$$\|f\|_i = 0 \ , \ \forall i \in I \Rightarrow \qquad f = 0 \ , \ \forall f \in E$$

*iii) Elle est **métrisable** si et seulement si elle est définie par une collection **dénombrable** I de semi-normes ($\|.\|_i$, $i \in I$)*

Définition 1.2 *(cf : [11]) **Un espace de Frêchet** est un espace vectoriel topologique, localle-ment convexe,séparé métrisable et complet*

Exemples

Exemple 1.1 *(cf : [11]) Tout espace de Banach est un* ***espace de Frêchet*** *(la collection de semi- normes contient une seule norme).*

Exemple 1.2 *(cf : [11]) Soit* $\mathbb{R}^\infty$ *l'espace vectoriel des suites* $\{a_j\}$ *de nombres réels; si on pose*

$$\|\{a_j\}\|_n = \sum_{j=0}^{n} |a_j| \ , \ n = 0, 1, 2...$$

alors $\mathbb{R}^\infty$ *muni de cette graduation de semi-normes* $\|.\|_n$ *, est un* ***espace de Frêchet****.*

Exemple 1.3 *(cf : [11]) Soit* $C^\infty([a,b])$ *l'espace vectoriel des fonctions de classes* C^∞ *sur* $[a,b]$*.*

Si on pose

$$\|f\|_n = \sum_{j=0}^{n} \sup_{a\leq x\leq b} \left|D^j f \ (x)\right|$$

alors $C^\infty([a,b])$ *muni de cette collection de semi-normes est un* ***espace de Frêchet.***

Exemple 1.4 *(cf : [11]) Soit G l'espace de Schwartz, qui est l'espace vectoriel des fonctions de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiants:*

$$G = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \, /\!\!\!\forall p \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \exists C_p > 0 \ \text{vérifiant} \ \|D^\alpha f \ (x)\| \left(1 + \|x\|^2\right)^p \leq C_p \right\} \tag{1.1}$$

G est aussi l'espace des fonctions infiniment plates, de même c'est un espace où la transformée de Fourier existe ainsi que son inverse.

On définit sur G une graduation de semi-normes comme suit:

$$\|f\|_r = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{k+|\alpha|\leq r} \|D^\alpha f(x)\| \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{k}{2}} \tag{1.2}$$

G muni de cette graduation de semi-normes $\|.\|_r$ *, est un* ***espace de Frêchet****.*

Exemple 1.5 *(cf : [11])Soit E l'espace des champs de vecteurs X de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$E = \left\{ X \text{ tel que } \begin{array}{c} \forall r,k \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \forall \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \end{array} \ \exists M_r > 0 \text{ vérifiant } \|D^{\alpha} X\| \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{k}{2}} \leq M_r \right\} \tag{1.3}$$

si on définit sur E une collection de semi- normes

$$\|X\|_r = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha|+k \leq r} \|D^{\alpha} X(x)\| \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{k}{2}} \tag{1.4}$$

alors $(E, \|.\|_r)$ *est un* ***espace de Frêchet.***

Exemple 1.6 *(cf : [11]) Soit $G = Diff(M)$ le groupe des difféomorphismes de classes C^{∞} sur une variété riemanniene compacte M l'espace G modellé sur l'espace des champs de vecteurs a une structure d'****espace de Frêchet****.*

Contre exemple

Soit $C_c(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à support compact.

Pour toute fonction strictement positive $\rho : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{+*}$, on définit la collection des semi-normes comme suit:

$$\|f\|_{\rho} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(x) |f(x)|$$

$C_c(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel topologique complet, locallement convexe, séparé, mais **n'est pas un espace de Frêchet** car cette collection de semi-normes n'est pas dénombrable et donc l'espace $C_c(\mathbb{R})$ n'est pas métrisable (cf : [11]).

1.1.2 Propriétés des espaces de Frêchet

Propriétés

1. Si un **espace de Frêchet** admet une norme, alors toutes les **semi-normes** de la collection qui définissent sa topologie, peuvent être considérées comme **normes** (en ajoutant cette norme aux semi-normes).

2. Un sous-espace fermé d'un **espace de Frêchet** est aussi un **espace de Frêchet.**

3. La **somme directe** de deux **espaces de Frêchet** est un **espace de Frêchet.**

4. Si un espace de Frêchet admet **une norme**, alors tout **sous-espace fermé** admet une norme aussi.

5. **L'espace dual** d'un espace de Frêchet **n'est pas un espace de Frêchet**, s'il n'est pas lui même un espace de Banach.

Preuve: : $(cf : [11])$ ■

Formules d'interpolation de Hamilton

1. Soit M est une variété Riemannienne compacte et soient f , $g \in C^{\infty}(M)$ alors:

   1)
   $$\|f\|_m^{n-1} \leq c\,\|f\|_n^{m-1} . \|f\|_l^{n-m} \ \ , l \leq m \leq n \tag{1.5}$$

   2)Si (i,j) vérifient $(i,j) = t\,(k,l) + (1-t)\,(m,n)$ pour $0 \leq t \leq 1$ alors

   $$\|f\|_i \, \|g\|_j \leq c\,(\|f\|_k \, \|g\|_l + \|f\|_m \, \|g\|_n) \tag{1.6}$$

   3)
   $$\|f.g\|_n \leq c\,(\|f\|_n \, \|g\|_0 + \|f\|_0 \, \|g\|_n) \tag{1.7}$$

   4) pour tout $n \geq 1$

   $$\|D^n\,(f \circ g)\|_0 \leq c_n \, \|g\|_1^{n-1} \, (\|f\|_n \, \|g\|_1 + \|f\|_1 \, \|g\|_n) \tag{1.8}$$

   5)Notons $B_r = B\,(O,r)$ la boule de rayon r fermée dans $\mathbb{R}^n$.Soit f un difféomorphisme de classe C^{∞} de B_{r_1}dans B_{r_2} et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|f(x) - x\|_1 \leq \varepsilon$, pour tout $x \in B_{r_1}$ alors f^{-1} est de classe C^{∞} de B_{r_2} dans B_{r_1} et on a l'estimation suivante

   $$\left\|f^{-1}\right\|_n \leq c_n\,(\|f\|_n + 1) \ \ , \forall n \geq 1 \tag{1.9}$$

6)$\forall B \subset M$

$$\left\| D^k(f^*X) \right\|^B \leq c \left\| f \right\|_1^{k-1} \left(\left\| f^{-1} \right\|_{k+1} \left\| f \right\|_1 + \left\| f^{-1} \right\|_2 \left\| f \right\|_k \right)^B \left\| X \right\|_k^{f(B)} \tag{1.10}$$

Preuve: : (cf : [11]) ■

1.1.3 Espace de Frêchet gradué

Définition 1.3 *Soit* $(E \quad , \|.\|_n)$ *un espace de Frêchet où* $\{\|.\|_n, n \in J\}$*est une famille dénombrable de semi-normes*

i)Une ***graduation*** *sur un espace de Frêchet* E *est une collection de semi-normes* $\{\|.\|_n \ , n \in \mathbb{N}\}$*qui est croissante , c'est à dire* $\|f\|_0 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq ....,$

ii)Un ***espace de Frêchet gradué*** *est un espace muni d'une graduation de semi-normes qui définie sa topologie.*

Exemple 1.7 *(cf : [11])Soit* $\Sigma(B)$ *l'espace des* ***suites exponentiellement décroissantes*** *dans un espace de Banach* B*,c'est à dire* $\lim_{n\to 0} e^{nk} \|f_n\|_B = 0$*;* $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Sigma(B) = \left\{ (f_k)_k \ / \ f_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , f_k \in B \ \ et \ \sum_{k \geq 0} e^{nk} \|f_k\|_B < +\infty \right\}$$

On définit sur $\Sigma(B)$ *une famille de semi normes :*

$$\|\{f_k\}\|_n = \sum_{k\geq 0} e^{nk} \|f_k\|_B$$

On montre que cette collection est une graduation et induit une topologie sur $\Sigma(B)$ *.Donc* $\sum(B)$ *est un* ***espace de Frêchet gradué****.*

1.2 Espace de Frêchet doux

1.2.1 Equivalence douce de deux graduations

Définition 1.4 *On dit que deux graduations* $\{\|.\|_n\}, \{\|.\|'_n\}$ *sont* ***doucement équivalentes de degré*** r ***et de base*** b *si pour tout* $n \geq b$

$$\|f\|_n \leq C_n \|f\|'_{n\,+\,r} \;\; et \;\; \|f\|'_n \leq C'_n \|f\|_{n\,+r}$$

où C_n *et* C'_n *des constantes qui peuvent dépendre de* n.

1.2.2 Applications douces

Application linéaire douce

Définition 1.5 *i) Soient* F *et* G *deux espaces gradués .On dit que l'application linéaire*

$$L : U \subseteq F \to G$$

satisfait une ***estimation douce*** *de degré* r *et de base* b *si et seulement si pour tout* $f \in U$

$$\forall r > 0, \exists b > 0, \exists C_r > 0 \diagup \forall n \geq b$$

on ait:

$$\|L(f)\|_n \leq C_r \|f\|_{n\,+r} \tag{1.11}$$

ii) On dit que L *est* ***application linéaire douce*** *si elle satisfait à une estimation douce.*

Exemple 1.8 *Soit* L *une application définie comme suit*

$$L : \sum(B) \to \sum(B)$$

telle que

$$L(f_k)_k = \;(Lf_k)_k = (\exp(rk)\, f_k\;)_k$$

et

$$\|\{f_k\}\|_n = \sum_{k\geq 0} e^{nk} \|f_k\|_B$$

*L est **douce***

$$\|(Lf_k)_k\|_n \leq \|(f_k)_k\|_{n+r}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\|(Lf_k)_k\|_n &= \|\{\exp(rk) f_k\}\|_n = \sum_{k\geq o} \exp(nk) \|(Lf_k)_k\|_B \\
&= \sum_{k\geq o} \exp(nk) \cdot \|\exp(r\ k) f_k\|_B \\
&\leq \sum_{k\geq o} \|f\ _k\|_B \cdot \exp(n + r\ )k \\
\|(Lf_k)_k\|_n &\leq \|\{f_k\}\|_{n\ +r}
\end{aligned}$$

Application non linéaire douce

Définition 1.6 *SoientF et G deux espaces de Frêchet gradués, et $L : U \subseteq F \to G$ une application non linéaire.*

*i) On dit que L satisfait à une **estimation douce** de degré r et de base b*

Si pour tout $f \in U$

$$\forall r > 0, \exists\ b > 0, \exists\ C_r > 0 \diagup \forall n \geq b$$

on ait

$$\|L(f)\|_n \leq C_r \left(1 + \|f\|_{n\ +r}\right)$$

*ii) On dit que L est une **application non linéaire douce** si L satisfait à une estimation douce.*

Exemple 1.9 *Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ sur une variété compacte M, on définit l'opérateur adjoint f_* sur l'espace des champs de vecteurs sur M par :*

$$f_*X = (D\ f\ .X) \circ f^{\ -1}$$

L'opérateur adjoint f_* est doux de degré 0 et de base 0 sur l'espace des champs de vecteurs sur M.

En effet : en utulisant les formules d'interpolations de Hamilton et en vertus de (1.7) ,(1.8),(1.9) , et comme f est un difféomorphisme de classe C^∞ sur une variété M compacte ,$\|f\|_n \leq C$, et comme c'est une graduation ,on obtient:

$$\begin{aligned}
\|f_*X\|_n &= \left\|(D\ f\ .X)\circ f^{\ -1}\right\|_n \\
&\leq \left\|f^{-1}\right\|_1^{n-1}\left(\|D\ f\ .X\|_n\left\|f^{-1}\right\|_1 + \|D\ f\ .X\|_1\cdot\left\|f^{-1}\right\|_n\right) \\
&\leq \left\|f^{-1}\right\|_1^{n-1}\left[\left(\|D\ f\ \|_n\|X\|_0 + \|D\ f\ \|_0\|X\|_n\right)\left\|f^{-1}\right\|_1 + \left(\|D\ f\ \|_1\|X\|_0 + \|D\ f\ \|_0\|X\|_1\right)\left\|f^{-1}\right\|_n\right] \\
&\leq (1+\|f\|_1)^{n-1}\left[\left(\|\ f\ \|_{n+1}\|X\|_0 + \|f\ \|_1\|X\|_n\right)(1+\|f\|_1) + \left(\|\ f\ \|_2\|X\|_0 + \|f\ \|_1\|X\|_1\right)(1+\|f\| \right. \\
&\leq (1+\|f\|_1)^{n-1}\left[\|\ f\ \|_{n+1}\|X\|_n(1+\|f\|_n) + \|\ f\ \|_2\|X\|_1(1+\|f\|_n)\right] \\
&\leq (1+\|f\|_1)^{n-1}(1+\|f\|_n)\|\ f\ \|_{n+1}\|X\|_n \\
&\leq (1+\|f\|_n)^n\|f\|_{n+1}\|X\|_n
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante C telle que

$$\|f_*X\| \leq C\|X\|_n$$

Exemple 1.10 *(cf : [11]) Les fonctions continues sur un espace de Banach dans un espace de Banach de dimension finie sont douces*

1.2.3 Isomorphisme doux

Définition 1.7 *On dit que L est un **isomorphisme doux** si L est un isomorphisme linéaire et L est doux ainsi que L^{-1}.*

Proposition 1.1 *La **composition** des applications linéaires douces est douce, c'est-à-dire si L_1 satisfait une estimation douce de degré r et de base b et L_2 satisfait une estimation douce de degré s et de base $d = b + r$ alors $L_1 \circ L_2$satisfait une estimation douce de degré $r + s$ et de base b pour tout $n \geq b$*

$$\|(L_1 \circ L_2)f\|_n \leq C\|f\|_{n+r+s}$$

Preuve: Pour tout $f \in U$ on a

$$\forall r > 0 \ , \exists \ b > 0, \exists \ c_r > 0 / \forall n \geq b, \|L_1 f\|_n \leq C_r \|f\|_{n \ +r}$$

et

$$\forall s > 0, \exists d > 0, \exists c_s > 0 / \forall m \geq b, \|L_2 f\|_m \leq C_s \|f\|_{m+s}$$

si on pose

$$d = b + r \ , m = r + s \text{ et } C = C_r \ \cdot C_s$$

alors on aura les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} \|(L_1 \ \circ L_2) f\|_n &\leq C_r \|L_2 \ f\|_{n \ +r} \\ &\leq C_r \ \cdot C_s \|f\|_{n \ +r \ +s} \\ &\leq C \|f\|_{n \ +r \ +s} \end{aligned}$$

■

1.2.4 Espace de Frêchet doux

Définition

Définition 1.8 *Soient F et G deux espaces de Frêchet gradués.*

*i) On dit que F est un s**ommant direct doux** de G si on trouve deux applications linéaires douces $l : F \to G$ et $m : G \to F$ telles que la composition $m \circ l : F \to F$ soit l'identité ,c'est à dire*

$$m \circ l = id_F \tag{1.12}$$

*ii) On dit qu'un espace de Frêchet gradué est **doux** s'il est sommant direct de l'espace $\sum(B)$ des suites exponentiellement décroissantes dans un Banach B.*

$$E \xrightarrow{l} \textstyle\sum(B) \xrightarrow{m} E \quad \text{où } m \circ l = id_E$$

Exemples

Exemple 1.11 *(cf : [11]) Soit M une variété compacte avec bord alors l'espace*

$$\chi_0^\infty(M) = \{f \in C^\infty(M) \text{ tel que } j^r f \ |_{\partial M} = 0, \forall r \ \geq 0\} \tag{1.13}$$

*est un espace de Frêchet **doux***

Exemple 1.12 *(cf : [11])L'espace vectoriel $\varkappa_c^\infty$ des champs de vecteurs à support compact fixé dans $\mathbb{R}^n$ qui sont infiniment plats est un espace de Frêchet **doux***

1.2.5 Résolvante et spectre

Définitions

Soit L un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $\boldsymbol{\gamma}_t$ sur l'espace de Frêchet E.c'est à dire $L = \frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}_t\big|_{t=0}$

i) On définit le spectre de l'opérateur L par:

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - L) \text{ n'est pas inversible}\}$$

ii) On définit l'ensemble résolvant de l'opérateur L par:

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - L) \text{ est inversible}\}$$

iii) Soit $\lambda \in \rho(L)$ on définit la résolvante de l'opérateur L par

$$R(\lambda, L) = (\lambda I - L)^{-1}$$

Proposition 1.2 *Soit D le domaine de convergence de l'intégrale impropre :*

$$R_\lambda(X) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, \boldsymbol{\gamma}_t(X)\, dt \tag{1.14}$$

Alors pour tout $\lambda \in D$ on a :

$$R_\lambda(LX) = L(R_\lambda(X))$$

$$
\begin{aligned}
R_\lambda(\lambda I - L) X &= (\lambda I - L) R_\lambda(X) = X \qquad (1.15)\\
R_\lambda(X) &= (\lambda I - L)^{-1} X = R(\lambda, L)X\\
R(\lambda, L)(LX) &= L\left[R(\lambda, L)X\right]
\end{aligned}
$$

Preuve: 1) Montrons:

$$R_\lambda(LX) = L(R_\lambda(X))$$

$$
\begin{aligned}
R_\lambda(LX) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\boldsymbol{\gamma}_t(LX)\,dt\\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\boldsymbol{\gamma}_t\left(\left.\frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}_s(X)\right|_{s=0}\right) dt
\end{aligned}
$$

puisque on pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ on a la convergence simple de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\boldsymbol{\gamma}_t dt$ et convergence uniforme de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}_s(X)\right)\boldsymbol{\gamma}_t(X)\,dt$ on a

$$
\begin{aligned}
R_\lambda(LX) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\left(\left.\frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}_{t+s}(X)\right|_{s=0}\right) dt\\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\left(\left.\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{\gamma}_\tau(X)\right|_{\tau=t}\right) dt \quad \text{où } \tau = t+s\\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}_t(X)\right) dt\\
&= \left[e^{-\lambda t}\boldsymbol{\gamma}_t(X)\right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\boldsymbol{\gamma}_t(X)\,dt\\
&= -X + \lambda \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\boldsymbol{\gamma}_t(X)\,dt\\
&= \lambda R_\lambda(X) - X
\end{aligned}
$$

2) Montrons que

$$R_\lambda (\lambda I - L) X = (\lambda I - L) R_\lambda (X) = X$$

Soit $X \in E,\ k > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{\gamma}_h - I}{h} R_\lambda (X) &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} (\boldsymbol{\gamma}_h - I) \exp(-\lambda t) \boldsymbol{\gamma}_t (X)\, dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) (\boldsymbol{\gamma}_h - I) \boldsymbol{\gamma}_t (X)\, dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) (\boldsymbol{\gamma}_h \boldsymbol{\gamma}_t (X) - \boldsymbol{\gamma}_t(X) dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) (\boldsymbol{\gamma}_{t+h} (X)) dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \boldsymbol{\gamma}_t (X)\, dt
\end{aligned}$$

On pose $s = t + h$ d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{\gamma}_h - I}{h} R_\lambda (X) &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} \exp(-\lambda(s-h)) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds \\
&= \frac{\exp(\lambda h)}{h} \int_h^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds \\
&= \frac{\exp(\lambda h)}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds - \frac{\exp(\lambda h)}{h} \int_0^{h} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds \\
&= \frac{\exp(\lambda h) - 1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds - \frac{\exp(\lambda h)}{h} \int_0^{h} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h - I}{h} R_\lambda (X) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(\lambda h) - 1}{h} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) \boldsymbol{\gamma}_s (X)\, ds$$

donc on a d'une part:

$$LR_\lambda\left(X\right) = \lambda R_\lambda\left(X\right)$$

et si on pose $\eta = \frac{s}{h}$ on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_0^h \exp\left(-\lambda s\right)\boldsymbol{\gamma}_s\left(X\right)ds &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp\left(\lambda h\right)}{h}\int_0^1 \exp\left(-\lambda\eta h\right)\boldsymbol{\gamma}_{\eta h}\left(X\right)hd\eta \\
&= \lim_{h\to 0}\exp\left(\lambda h\right)\int_0^1 \exp\left(-\lambda\eta h\right)\boldsymbol{\gamma}_{\eta h}\left(X\right)d\eta \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \exp\left((1-\eta)\lambda h\right)\boldsymbol{\gamma}_{\eta h}\left(X\right)d\eta \\
&= \int_0^1 \lim_{h\to 0}\exp\left((1-\eta)\lambda h\right)\boldsymbol{\gamma}_{\eta h}\left(X\right)d\eta \\
&= \int_0^1 X d\eta \\
&= X
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\lambda R_\lambda\left(X\right) - X &= \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{\gamma}_h - I}{h}R_\lambda\left(X\right) \\
&= \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_t}{dt}\right|_{t=0} R_\lambda(X) \\
&= LR_\lambda\left(X\right)
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$LR_\lambda\left(X\right) = \lambda R_\lambda\left(X\right) - X = R_\lambda\left(LX\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
X &= R_\lambda\left(\lambda X\right) - R_\lambda\left(LX\right) \\
&= R_\lambda\left(\lambda I - L\right)\left(X\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} R_\lambda(X) &= (\lambda I - L)^{-1} X \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\boldsymbol{\gamma}_t(X)\,dt \end{aligned}$$

Par la même méthode Pazy a montrer la proposition suivante.(cf : [17]) ■

Proposition 1.3 *Soit*

$$B_\lambda(t)\,X = \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\boldsymbol{\gamma}_s(X)\,ds \tag{1.16}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $X \in \chi(M)$ *alors :*

$$(\lambda I - L)\,B_\lambda(t)\,X = B_\lambda(t)\,(\lambda I - L)\,X = e^{\lambda t}X - \boldsymbol{\gamma}_t(X)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} (\lambda I - L)\int_0^t e^{(t-s)\lambda}\boldsymbol{\gamma}_s(X)\,ds &= \int_0^t e_s^{(t-s)\lambda}\boldsymbol{\gamma}_s((\lambda I - L)\,X)\,ds \\ &= \lambda B_\lambda(t)\,X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\boldsymbol{\gamma}_s\left(\left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_\tau}{d\tau}\right|_{\tau=0}\right)Xds \\ &= \lambda B_\lambda(t)\,X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_{\tau+s}}{d\tau}\right|_{\tau=0}Xds \\ &= \lambda B_\lambda(t)\,X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\frac{d\boldsymbol{\gamma}_s}{ds}Xds \\ &= \lambda B_\lambda(t)\,X - \left[e^{(t-s)\lambda}\boldsymbol{\gamma}_s X\right]_0^t + \lambda\int_0^t e^{(t-s)\lambda}\boldsymbol{\gamma}_s Xds \\ &= \lambda B_\lambda(t)\,X - \left[\boldsymbol{\gamma}_\tau(X) - e^{\lambda t}X\right] - \lambda B_\lambda(t)\,X \\ &= e^{\lambda t}X - \boldsymbol{\gamma}_\tau(X) \end{aligned}$$

■

1.3 Opérateur d'onde

1.3.1 Générateur infinitésimal

Définition

Définition 1.9 *Soit E un espace de Frêchet, on définit une famille d'opérateurs $(\boldsymbol{\gamma}_t)_t$ linéaires continus sur E.*

La famille $(\boldsymbol{\gamma}_t)_t$ est ***un semi-groupe (resp: un groupe)*** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} i)\ \boldsymbol{\gamma}_0 = I \ (I \text{ c'est l'opérateur identité sur } E\ ) \\ ii)\ \boldsymbol{\gamma}_{s+t} = \boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}_s \text{ pour tout } t, s \geq 0 \ (\text{resp } t, s \in \mathbb{R}) \\ iii)\ LX = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{\boldsymbol{\gamma}_t(X) - X}{t} = \left.\dfrac{d^+ \boldsymbol{\gamma}_t(X)}{dt}\right|_{t=0^+} \text{ existe et est finie pour tout } X \in E \end{cases} \tag{1.17}$$

L'opérateur linéaire $L : E \to E$ ainsi défini est ***le générateur infinitésimal*** *associé à ce semi-groupe $(\boldsymbol{\gamma}_t)_t$ sur l'espace de Frêchet E.*

Proposition 1.4 *1)* $L\boldsymbol{\gamma}_t = \boldsymbol{\gamma}_t L$ *2)* $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}_t = L\boldsymbol{\gamma}_t$

Preuve: Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a:

1)

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{\gamma}_t(x) &= \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_s}{ds}\right|_{s=0} \cdot \boldsymbol{\gamma}_t(x) \\ &= \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_{s+t}}{dt}(x)\right|_{s=0} \\ &= \boldsymbol{\gamma}_t \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_s}{ds}(x)\right|_{s=0} \\ &= \boldsymbol{\gamma}_t \cdot L(x) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{\gamma}_t(x) &= \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_{s+t}}{dt}(x)\right|_{s=0} \\ &= \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_\tau}{d\tau}(x) \cdot \frac{d\tau}{d\tau}\right|_{\tau=t} \quad \text{où } \tau = s+t \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}_\tau}{d\tau}(x) = L\boldsymbol{\gamma}_t(x)$$

■

Exemples

Exemple 1.13 *ad_{-X} est un **générateur infinitésimal** sur E du semi-groupe $(\phi_t)_*$ à un paramétre t ,où $\phi_t(x) = (\exp tX)(x)$ est solution du système dynamique*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X \circ \phi_t(x) \\ \qquad \phi_0(x) = x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \tag{1.18}$$

et

$$(\phi_t)_* Y = (D\phi_t \cdot Y) \circ \phi_t^{-1} \ , \forall Y \in E, \ \forall t \geq 0 \tag{1.19}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left((\phi_t)_* Y\right)(x) &= \frac{d}{dt}\left[D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right)\right] \cdot Y\left(\phi_{-t}(x)\right) + D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot \frac{d}{dt}\left[Y\left(\phi_{-t}(x)\right)\right] \\
&= D_x X\left(\phi_t \circ \phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-t}(x)\right) - \\
&\quad D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D_y Y\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot X \circ \phi_{-t}(x) \\
&= D_x X(x)\left(D\phi_t \cdot Y\right)\left(\phi_{-t}(x)\right) - \left(D\phi_t \cdot DY \cdot X\right)\left(\phi_{-t}(x)\right) \\
\frac{d}{dt}\left((\phi_t)_* Y\right)(x) &= D_x X(x) \cdot \left((\phi_t)_* Y\right)(x) - \left((\phi_t)_* X\right)(x) \cdot D_y Y(y) \\
&= \left[(\phi_t)_* \cdot ad_{-X}(Y)\right](x)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\left((\phi_t)_* Y\right)(x)\right|_{t=0^+} &= \left.\left(DX(x)\left(D\phi_t \cdot Y\right)\left(\phi_{-t}(x)\right) - \left(D\phi_t \cdot DY \cdot X\right)\left(\phi_{-t}(x)\right)\right)\right|_{t=0^+} \\
&= Y(x) \cdot DX(x) - X(x) \cdot DY(x) \\
&= [Y, X](x) = ad_{-X}(Y)(x)
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement on montre que ad_X *est un* ***générateur infinitésimal*** *du semi-groupe* $(\phi_t)^*$ *à un paramétre* t *sur* E*, où*

$$(\phi_t)^* Y = (D\phi_t)^{-1} \cdot (Y \circ \phi_t) \ , \forall Y \in E, \ \forall t \geq 0$$

Exemple 1.14 *Soit* $G = Diff(M)$ *le groupe des difféomorphismes de classes* C^∞ *sur une variété compacte riemannienne* M *, d'après Hamilton (cf :* [11]*), il a la structure d'un groupe de Frêchet de dimension infinie .*

Soit $\phi \in Diff\,(M)$ *et* $Y \in E$*, on définit les* ***opérateurs adjoints****:*

$$Ad_\phi : Y \to Ad_\phi\,(Y) = (\phi_* - I)\,Y \circ \phi \tag{1.20}$$

où

$$\phi_* = (D\phi \cdot Y) \circ \phi^{-1} \tag{1.21}$$

et pour tout $f \in G$

$$A_\phi : f \to A_\phi\,(f) = f^{-1} \cdot \phi \circ f \tag{1.22}$$

Alors $Ad_\phi\,(Y)$ *est un générateur infinitésimal du groupe à un paramétre* t *,* $(A_\phi\,(\exp\,(tY)))_t$

En effet:

Soit $\psi_t = \exp\,(tY)$ *le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs* Y *solution du système dynamique*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_t\,(x) = Y \circ \psi_t\,(x) \\ \psi_0\,(x) = x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$$

on a

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt} A_\phi\,(\psi_t)\right|_{t=0^+} &= \left.\frac{d}{dt}\left(\psi_t^{-1} \cdot \phi \circ \psi_t\right)\right|_{t=0^+} = -Y \circ \phi + D\phi \cdot Y \\ &= \Big((D\phi \cdot Y) \circ \phi^{-1} - Y\Big) \circ \phi \\ &= (\phi_* - I)\,Y \circ \phi \\ &= Ad_\phi\,(Y) \end{aligned}$$

d'où on déduit:

$$Ad_{\phi}(Y) = \left.\frac{d}{dt}A_{\phi}(\psi_t)\right|_{t=0^+}$$

1.3.2 Opérateur d'onde

Définition

Soient X et $Y = X + Z$ deux champs de vecteurs, Z étant une perturbation associée au champ de vecteurs X.

On associe respectivement leurs groupes à un paramètre t

$$\left\{\begin{array}{l}\phi_t(x) = (\exp tX)(x) \\ \psi_t(x) = (\exp t(X+Z))(x)\end{array}\right. \tag{1.23}$$

qui sont solutions des systèmes dynamiques

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X \circ \phi_t(x) \\ \phi_0(x) = x\end{array}\right. \tag{1.24}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\psi_t(x) = X \circ \psi_t(x) + Z \circ \psi_t(x) \\ \psi_0(x) = x\end{array}\right. \tag{1.25}$$

Par la méthode de la résolvante, le système (1.23) admet pour solution :

$$\psi_t(x) = \exp t(X+Z)(x) = \phi_t(x) + \int_0^t \phi_{t-s} \circ Z(\psi_s(x))\, ds \tag{1.26}$$

D'où

$$\phi_{-t} \circ \psi_t(x) = x + \int_0^t \phi_{-s}(Z \circ \psi_s(x))\, ds \tag{1.27}$$

On pose:

$$f_t(x) = \phi_{-t} \circ \psi_t(x) \tag{1.28}$$

D'où

$$f_t = id + \int_0^t \phi_{-s}(Z \circ \psi_s)\, ds \tag{1.29}$$

Définition 1.10 *On définit* ***l'opérateur d'ondes*** *par:*

$$f(x) = \lim_{t \to +\infty} f_t(x) = x + \int_0^{+\infty} \phi_{-s} \left(Z \left(\psi_s \left(x \right) \right) \right) ds \tag{1.30}$$

Exemple 1.15 *Soient*

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } Y_1 = X_1 + Z_1 \text{ avec } Z_1 \text{ une perturbation.}$$

on associe respectivement leurs groupes à un paramètre $\phi_t^1 = \exp tX_1$ *et* $\psi_t^1 = \exp tY_1$ *solutions des systèmes dynamique* (1.22) *et* (1.23) *d'où*

$$\begin{cases} \phi_t^1 \left(x \right) = xe^{\alpha t} = \left(x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t} \right) \\ \psi_t^1 \left(x \right) = xe^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha (t-s)} Z_1 \left(\psi_s^1 \left(x \right) \right) ds \end{cases} \tag{1.31}$$

donc

$$f_t \left(x \right) = \phi_{-t}^1 \circ \psi_t^1 \left(x \right) = x + \int_0^t e^{-\alpha s} \cdot Z_1 \circ \psi_s^1 \left(x \right) ds \tag{1.32}$$

Si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(Z_1 \left(\psi_s^1 \left(x \right) \right) \right) ds$ *converge , alors* ***l'opérateur d'onde***

$$f \left(x \right) = \lim_{t \to +\infty} \phi_{-t}^1 \circ \psi_t^1 \left(x \right) = x + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \cdot Z_1 \circ \psi_s^1 \left(x \right) ds \tag{1.33}$$

1.3.3 Propriétés des opérateurs d'ondes

Proposition 1 *Soient les opérateurs d'ondes*

$$\begin{aligned} f_t &= \phi_{-t} \circ \psi_t \text{ avec } f = \lim_{t \to +\infty} f_t \\ g_t &= \psi_{-t} \circ \phi_t \text{ avec } g = \lim_{t \to +\infty} g_t \end{aligned} \tag{1.34}$$

alors

1)

$$\phi_{-t} \circ f \circ \psi_t = f \quad \text{et} \quad \psi_{-t} \circ g \circ \phi_t = g \tag{1.35}$$

2) Si de plus f est inversible, alors

$$X = f_* (X + Z) \tag{1.36}$$

3)

$$f_t' = \big(D\phi_{-t}.Z\big) \circ \psi_t \tag{1.37}$$

4)

$$\begin{cases} f_t'(x) = (\phi_t^* \cdot Z)(f_t(x)) \\ f_0(x) = x \end{cases} \tag{1.38}$$

$$\begin{cases} g_t'(x) = -\left(\Psi_{t_*} \cdot Z\right) \circ g_t(x) \\ g_0(x) = x \end{cases} \tag{1.39}$$

5)

$$f_t \circ g_t = g_t \circ f_t \tag{1.40}$$

f_t et g_t sont inversibles et $(f_t)^{-1} = g_t$

6)

$$f_t = Id + \int_0^t (D \exp(-sX).Z) \circ \exp(s(X+Z))\, ds \tag{1.41}$$

$$g_t = Id - \int_0^t (D \exp(-s(X+Z)).Z) \circ \exp(sX)\, ds \tag{1.42}$$

7) Si ces intégrales convergent lorsque t tend vers $+\infty$, alors

$$f = Id + \int_0^{+\infty} (D \exp(-sX).Z) \circ \exp(s(X+Z))\, ds \tag{1.43}$$

$$g = Id - \int_0^{+\infty} (D \exp(-s(X+Z)).Z) \circ \exp(sX)\, ds \tag{1.44}$$

Preuve: 1) On a

$$\begin{aligned} \phi_{-t} \circ f \circ \psi_t &= \lim_{s \to +\infty} \phi_{-t} \left(\phi_{-s} \circ \psi_s\right) \psi_t = \lim_{s \to +\infty} \phi_{-(t+s)\circ} \psi_{(t+s)} \\ &= \lim_{\tau \to +\infty} \phi_{-\tau} \circ \psi_\tau = f \end{aligned}$$

et

$$\psi_{-t} \circ g \circ \phi_t = \lim_{s \to +\infty} \psi_{-t} \left(\psi_{-s} \circ \phi_s \right) \phi_t = \lim_{s \to +\infty} \psi_{-(t+s)} \circ \phi_{(t+s)} = g$$

2) Si f est inversible, comme

$$f = \phi_{-t} \circ f \circ \psi_t$$

donc

$$f \circ \psi_t \circ f^{-1} = \phi_t \Rightarrow \frac{d\phi_t}{dt} = Df \left(\psi_t \circ f^{-1} \right) \frac{d\psi_t}{dt} \left(f^{-1} \right)$$

et

$$\begin{aligned} X &= \lim_{t \to 0} \frac{d\phi_t}{dt} = Df \left(\psi_0 \circ f^{-1} \right) \left. \frac{d\psi_t}{dt} \right|_{t=0} \left(f^{-1} \right) \\ &= Df \left(f^{-1} \right) . (X + Z) \left(f^{-1} \right) = f_* (X + Z) \end{aligned}$$

d'où

$$X = f_* (X + Z)$$

3) Comme $\phi_t (x) = (\exp tX) (x)$ alors

$$\frac{d\phi_t}{dt} (x) = D[(\exp tX) (x)].X = D\phi_t.X = X \circ \phi_t \tag{1.45}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$f_t (x) = \phi_{-t} \circ \psi_t (x) = \phi (-t, \psi (t, x))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t}{\partial t} (x) &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} (-t, \psi (t, x)) + \frac{\partial \phi}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{où } y = \psi (t, x) \\ &= -X \circ \phi (-t, \psi (t, x)) + D_y \phi (-t, y) . (X + Z) \circ \psi (t, x) \\ &= -X \circ \phi_{-t} \circ \psi_t (x) + D_y \phi_{-t} \circ \psi_t (x) .X \circ \psi_t (x) + D_y \phi_{-t} \circ \psi_t (x) .Z \circ \psi_t (x) \\ &= -X \circ \phi_{-t} \circ \psi_t (x) + \left(D\phi_{-t}.X \right) \circ \psi_t (x) + \left(D\phi_{-t}.Z \right) \circ \psi_t (x) \\ &= -X \circ \phi_{-t} \circ \psi_t (x) + X \circ \phi_{-t} \circ \psi_t (x) + \left(D\phi_{-t}.Z \right) \circ \psi_t (x) \\ &= \left(D\phi_{-t}.Z \right) \circ \psi_t (x) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) = \big(D\phi_{-t}.Z\big) \circ \psi_t(x) = \Big(\big(D\phi_{-t}.Z\big) \circ \phi_t\Big) \circ f_t(x) = \phi_t^* \cdot Z\left(f_t(x)\right) \tag{1.46}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$g_t = \psi_{-t}\left(\phi_t(x)\right) = \psi\left(-t, \phi(t,x)\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_t}{\partial t}(x) &= -\frac{\partial \psi}{\partial t}\left(-t, \phi(t,x)\right) + \frac{\partial \psi}{dz}.\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{où } z = \phi(t,x) \\
&= -(X+Z) \circ \psi\left(-t, \phi(t,x)\right) + D\psi(-t,z).X \circ \phi(t,x) \\
&= -(X+Z) \circ \psi_{-t} \circ \phi_t(x) + \left(D\Psi_{-t}.X\right) \circ \phi_t(x) \\
&= -D\psi_{-t}(X+Z) \circ \phi_t(x) + D\psi_{-t}(X) \circ \phi_t(x) \\
&= -D\psi_{-t}(Z) \circ \phi_t(x)
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\psi_{-t} = \exp[-t(X+Y)]$$

$$-\frac{d\psi_{-t}}{dt} = (X+Z) \circ \psi_{-t}(x) = D\psi_{-t}.(X+Z)$$

$$(X+Z) \circ \psi_{-t}(x) = D\psi_{-t}.(X+Z) \Rightarrow X \circ \psi_{-t}(x) + Z \circ \psi_{-t}(x) = D\psi_{-t}.X + D\psi_{-t}.Z$$

On remplace dans l'équation de g_t :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_t}{\partial t}(x) &= -(X+Z) \circ \psi_{-t} \circ \phi_t(x) + \big(D\psi_{-t}.X\big) \circ \phi_t(x) \\
&= -(X+Z) \circ \psi_{-t} \circ \phi_t(x) + (X+Z) \circ \psi_{-t} \circ \phi_t(x) - \big(D\psi_{-t}.Z\big) \circ \phi_t(x) \\
&= -\big(D\psi_{-t}.Z\big) \circ \phi_t(x) \\
&= -\big(D\psi_{-t}.Z\big) \circ \psi_t \circ g_t(x) \\
&= -(\psi_{-t*} \cdot Z) g_t(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$g_t' = -\big(D\psi_{-t}.Z\big) \circ \phi_t \tag{1.47}$$

5)

$$\begin{aligned} g_t \circ f_t &= \psi_{-t} \circ \phi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_t = Id \\ f_t \circ g_t &= \phi_{-t} \circ \psi_t \circ \psi_{-t} \circ \phi_t = Id \end{aligned}$$

d'où

$$f_t \circ g_t = g_t \circ f_t = Id$$

i.e: f_t et g_t sont inversibles et $(f_t)^{-1} = g_t$ (respt $f_t = (g_t)^{-1}$)

Par passage à la limite $\lim_{t\to+\infty} f_t = f$ donc f est inversible i.e $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$

6) On intègre les équations (1.44) et (1.45) sur l'interval $[0, t]$

$$f_t - Id = \int_0^t (D\exp(-sX).Z) \circ \exp(s(X+Z))\, ds$$

donc

$$f_t = Id + \int_0^t (D\exp(-sX).Z) \circ \exp(s(X+Z))\, ds$$

et

$$g_t = Id - \int_0^t D\exp(-s(X+Z)).Z \circ \exp(sX)\, ds$$

7) Comme ses intégrales convergent lorsque t tend vers $+\infty$ alors on passe à la limite d'où :

$$\begin{aligned} f &= \lim_{t\to+\infty} f_t = Id + \int_0^{+\infty} (D\exp(-sX).Z) \circ \exp(s(X+Z))\, ds \\ g &= \lim_{t\to+\infty} g_t = Id - \int_0^{+\infty} (D\exp(-s(X+Z)).Z) \circ \exp(sX)\, ds \end{aligned}$$

■

1.3.4 Absorbant positif et négatif

Définition

Définition 1.11 *Un sous ensemble fermé $\hbar \subset \mathbb{R}^n$ est dit un **absorbant positif** du flot ϕ_t si et seulement si pour tout compact K dans $\mathbb{R}^n$ il existe une constante $t_K > 0$ tel que $\phi_t(K) \subset \hbar$ pour tout $t \geq t_K$.*

Définition 1.12 *Un sous ensemble fermé $N \subset \mathbb{R}^n$ est un* ***absorbant négatif*** *du flot ϕ_t si pour tout compact K dans $\mathbb{R}^n$ il existe une constante $t_K > 0$ tel que $\phi_{-t}(K) \subset N$ pour tout $t \geq t_K$.*

Exemples

Exemple 1.16 *Soit le champ de vecteurs*

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.48}$$

avec tous les α_i sont de même signe alors le flot $\exp(tX_1)$ admet un absorbant positif et un absorbant négatif .

En effet

1)Soit K un compact et $x \in K$ alors il existe $\rho > 0$ tel que $\min_{x \in K} \|x\| = \rho$

i) Si $0 < a \leq \alpha_i \leq b$ et $\hbar\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \geq \rho\}$

Le groupe à un paramètre ϕ_t^1 associé au champ de vecteurs X_1.

$$\phi_t^1(x) = \exp(tX_1)(x) = xe^{\alpha t} \tag{1.49}$$

d'où $\forall t > 0$

$$\left\|\phi_t^1(x)\right\| \geq \|x\| \exp(at) \geq \|x\| \geq \rho \Rightarrow \phi_t^1(x) \in \hbar\rho$$

alors $\hbar\rho$ est un absorbant positif

ii) $a \leq \alpha_i \leq b < 0$

$$\left\|\phi_{-t}^1(x)\right\| = \|x \exp(-\alpha t)\| \geq \|x\| \exp(-bt) \geq \|x\| \geq \rho \Rightarrow \phi_{-t}^1(x) \in \hbar\rho$$

alors $\hbar\rho$ est un absorbant négatif .

2)Soit K un compact et $x \in K$ alors il existe $\rho > 0$ tel que $\max_{x \in K} \|x\| = \rho$

i) Soit $0 < a \leq \alpha_i \leq b$ et $\hbar'_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \rho\}$

$$\left\|\phi_{-t}^1(x)\right\| \leq \|x\| \exp(-at) \leq \|x\| \leq \rho \Rightarrow \phi_{-t}^1(x) \in \hbar'_\rho$$

alors $\hbar'_\rho$ est un absorbant négatif

ii) $a \leq \alpha_i \leq b < 0$

$$\left\|\phi_t^1(x)\right\| = \|x \exp(\alpha t)\| \leq \|x\| \exp(bt) \leq \|x\| \leq \rho \ \Rightarrow \phi_t^1(x) \in \hbar'_\rho$$

alors $\hbar'_\rho$ est un absorbant positif

Exemple 1.17 *Soit le champ de vecteurs*

$$X_3 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i x_i + \beta_i x^{1+m_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ où } \alpha_i < 0, \beta_i \leq 0 \text{ et } m_i \text{ des entiers naturels paires.} \quad (1.50)$$

d'où

$$\phi_{-t}^3(x) = xe^{\alpha t}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}x^m\left(1 - e^{\alpha m t}\right)\right)^{\frac{-1}{m}} \quad (1.51)$$

par le même raisonnement on montre que $\phi_{-t}^3(x)$ *admet un absorbant négatif (resp positif)*

Chapitre 2

Propriétés de la fonction $\exp$ d'un champ de vecteurs

2.1 Fonction exponentielle d'un champ de vecteurs

Soit M une variété compacte, on note par $Diff(M)$ le groupe des difféomorphismes de classes C^∞ sur M et par $\chi(M)$ l'espace des champs de vecteurs de classes C^∞ sur M.

$Diff(M)$ et $\chi(M)$ ont une structure d'espace de Frêchet doux et $\chi(M)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $Diff(M)$.(cf : [11])

2.1.1 Définition

Définition 2.1 *(cf : [19]) Tout champ de vecteurs X génère un groupe global à un paramètre $t \mapsto \phi_t = \exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$; solution du système dynamique*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X \circ \phi_t(x) \\ \phi_0(x) = x \end{cases} \tag{2.1}$$

On définit la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs X , notée $\exp X$ par l'application

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad \chi(M) \times \mathbb{R} \to Diff(M) \\ (X,t) \quad &\longmapsto \quad F_t(X) = \exp tX \end{aligned} \tag{2.2}$$

telle que

$$\begin{aligned} \exp tX \quad &: \quad M \to \mathbb{R}^n \\ x \quad &\longmapsto \quad (\exp(tX))(x) = \phi_t(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

où ϕ_t *est le* X*-flot.*

D'où la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs

$$\exp X \quad : \quad M \to \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

$$x \quad \longmapsto \quad (\exp(X))(x) = \phi_1(x) = \phi(x) \tag{2.5}$$

2.1.2 Exemple

Exemple 2.1 *1) Soit le champ de vecteurs*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs X *sera*

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= (\exp(tX))(x) = xe^{\alpha t} = \left(x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t}\right) \in \mathbb{R}^n \\ \exp tX &= \sum_{i=1}^{n} x_i e^{\alpha_i t} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour $t = 1$ *on a*

$$(\exp(X))(x) = xe^{\alpha} = (x_1 e^{\alpha_1}, ..., x_n e^{\alpha_n}) \tag{2.7}$$

2) Soit le champ de vecteurs

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.8}$$

le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs X *sera*

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= (\exp(tX))(x) = x + \alpha t = (x_1 + \alpha_1 t, ..., x_n + \alpha_n t) \in \mathbb{R}^n \\ \exp tX &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \alpha_i t) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour $t = 1$ on a

$$\left(\exp\left(X\right)\right)\left(x\right) = x + \alpha = \left(x_1 + \alpha_1, ..., x_n + \alpha_n\right) \tag{2.10}$$

2.2 La X-dérivation de la fonction exp

2.2.1 Dérivée directionnelle

Definitions

Définition 2.2 *(cf : [11]) Soient F et G deux espaces de Frêchet, U un ouvert de F et $P : U \subseteq F \to G$ une application continue .*

*On définie **la dérivée de P en $f \in U$, dans la direction** $h \in F$ par:*

$$DP\left(f\right)h = \lim_{t \to 0} \frac{P\left(f + t\ h\right) - P\left(f\right)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P\left(f + t\ h\right) \tag{2.11}$$

lorsqu'elle existe et $DP\left(f\right) \in \mathcal{L}\left(F, G\right), \forall f \in U$.

*On dit que P **est différentiable en f dans la direction** h*

Définition 2.3 *On dit que P **est de classe** C^1**sur** U si et seulement si :*

1) P est différentiable pour toute f dans U et h dans F

2) $DP : U \subseteq F \to \mathcal{L}\left(F, G\right)$, DP est continue .

Exemples

Exemple 2.2 *Soit f :$[a, b] \sqsubseteq \mathbb{R} \to F$ une courbe paramétrée ,alors*

$$f'\left(t\right) = Df\left(t\right)1$$

Exemple 2.3 *Soit L une application linéaire continue alors L est de classe C^1 et*

$$DL\left(f\right)h = L\left(h\right)$$

*En effet, par **linéarité** on a*

$$L\left(f + th\right) = L\left(f\right) + tL\left(h\right)$$

et donc

$$DL(f)\,h = \lim_{t \to 0} \frac{L(f+th) - L(f)}{t} = L(h)$$

Propriétés de la dérivée directionnelle

1) Soit $P : U \subseteq F \to G$ de classe C^1 et soient $f, h \in U$ tel que $\forall\, t \in \mathbb{R}\ (f \quad + th) \in U$

on pose

$$\varphi(t) = P(f + th) \tag{2.12}$$

alors

i) φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = DP(f + th) \cdot h \tag{2.13}$$

ii)

$$DP\ (f)\ h = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P(f + t\ h) = \varphi^{'}(0) \tag{2.14}$$

iii)

$$P(f + h) = P(f) + \int_0^1 DP(f + t\ h)\, h\ dt \tag{2.15}$$

C'est la formule de **Taylor** d'ordre un, avec un reste sous forme intégrale.

En effet :

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} P(f + t\ h) = DP(f + t\ h)\, h \tag{2.16}$$

d'où(2.12)

Et en intégrant

$$dP(f + t\ h) = DP(f + t\ h)\, hdt \tag{2.17}$$

on aura

$$P(f + h) - P(f) = \int_0^1 DP(f + t\ h)\, h\ dt \tag{2.18}$$

et

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P\left(f+t\ h\right)=DP\ \ (f)\ \ h \tag{2.19}$$

2.2.2 La X-dérivation de la fonction $\exp X = \phi$

Lemme 2.1 *La X-dérivation de ϕ dans la direction $Y \in \chi(M)$ définie par:*

$$D\exp(tX)\,Y=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\exp\left(t\left(X+sY\right)\right) \tag{2.20}$$

est équivalente à

$$D\exp(tX)\,Y=D\left(\exp(tX)\right)\int_{0}^{t}\left(\exp(sX)\right)^{*}Y\,ds$$

et

$$D\exp(tX)\,Y=\int_{0}^{t}\left(\exp(sX)\right)_{*}Y\,ds\circ\exp(tX) \tag{2.21}$$

Preuve: On remarque que:

$$\begin{aligned}
D\exp(-\tau X)\,D\exp(\tau X)\,Y &= D\exp(-\tau X)\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\exp\left(\tau\left(X+sY\right)\right)\\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{0}^{\tau} d\left(\exp(-tX)\circ\exp\left(t(X+sY)\right)\right)\\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{0}^{\tau}\frac{d}{dt}\left[\exp(-tX)\circ\exp t(X+sY)\right]dt
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases} D_t\exp(tX)=X\circ\exp(tX)=\left(D\exp tX\right)\cdot X\\ \exp(0)=id_M\end{cases}$$

On déduit que:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-tX)\circ\exp t(X+sY)\right]=\left(D_t\exp(-tX)\right)\circ\exp t\ \left(X+sY\right)+D\exp(-tX)\cdot D_t\exp t\ \left(X+sY\right)]$$

Donc $\frac{d}{dt}\left[\exp(-tX)\circ\exp t(X+sY)\right] =$

$$\begin{aligned} &= -\left(D\exp(-tX)\right)\cdot X\circ\exp t\ \ (X+sY)+D\exp(-tX)\cdot(X+sY)\circ\exp t\ \ (X+sY)] \\ &= sD\exp(-tX)\cdot Y\circ\exp t\ \ (X+sY)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\exp(-\tau X)\,D\exp(\tau X)\,Y &= \int_0^{\tau} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} sD\exp(-tX)\cdot Y\circ\exp t\ \ (X+sY)\,dt \\ &= \int_0^{\tau} D\exp(-tX)\cdot Y\circ\exp(tX)\,dt = \int_0^{\tau}(\exp(tX))^{*}Y\,dt \end{aligned}$$

D'où

$$D\exp(\tau X)\,Y = D\exp(\tau X)\int_0^{\tau}(\exp(tX))^{*}\,Y\ \,dt$$

Par un même raisonnement on déduit la formule (2.21) ■

Opérateurs moyens adjoints

On pose

$$\begin{aligned} A_t &: \ \ Y\mapsto A_t(Y) = \int_0^t (\phi_s)_{*}\,Y\ \,ds \qquad (2.22)\\ B_t &: \ \ Y\mapsto B_t(Y) = \int_0^t (\phi_s)^{*}\,Y\ \,ds \end{aligned}$$

D'où

$$D\exp(tX)\,Y = A_t(Y)\cdot\exp(tX) \qquad (2.23)$$

Pour X fixé et $t=1$, on introduit des opérateurs moyens adjoints $\tilde{A}$ et $\check{D}$ définis sur $\chi(M)$ par:

$$\tilde{A}(Y) = \int_0^1 (\phi_s)_{*}\,Y\ \,ds \qquad (2.24)$$

et

$$\widetilde{B}(Y) = \int_0^1 (\phi_s)^* Y \; ds \tag{2.25}$$

D'où les propriétés suivantes

Proposition 2.1 *1) La X- dérivation de la fonction exponentielle est formulée par:*

$$D(\exp X) \cdot Y = \tilde{A}Y \circ \exp X \tag{2.26}$$

2) Si $\phi = \exp X$ est inversible alors la dérivée logarithmique de $\phi = \exp X$ est formulée par:

$$Y \mapsto \tilde{A}Y = (D\phi \;.Y) \circ \phi^{-1} \tag{2.27}$$

3)

$$ad_{-X} \circ A_t(Y) = A_t \circ ad_{-X}(Y) = -(I - (\phi_t)_*)Y \tag{2.28}$$

et pour $t = 1$, (2.27) s'écrit

$$ad_{-X} \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ ad_{-X} = I - \phi_* \tag{2.29}$$

Preuve: 1) et 2) Déduction évidente

3) Comme ad_{-X} est un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $t,(\phi_t)_*$ alors

$$\frac{d}{dt}[(\phi_t)_* \cdot Y] = ad_{-X} \circ [(\phi_t)_* \cdot Y] = (\phi_t)_* \circ ad_{-X}(Y)$$

On intègre

$$\int_0^t d((\phi_s)_* \cdot Y) = \int_0^t ad_{-X} \circ [(\phi_s)_* \cdot Y]\, ds = \int_0^t (\phi_s)_* \circ ad_{-X}(Y)\, ds$$

D'où

$$\begin{aligned} [(\phi_s)_* \cdot Y]_0^t &= ad_{-X} \circ \int_0^t [(\phi_s)_* \cdot Y]\, ds = \int_0^t (\phi_s)_* \circ ad_{-X}(Y)\, ds \\ -(I - (\phi_t)_*)\, Y &= ad_{-X} \circ A_t(Y) = A_t \circ ad_{-X}(Y) \end{aligned}$$

$$ad_{-X} \circ A_t(Y) = A_t \circ ad_{-X}(Y) = -(I - (\phi_t)_*)\, Y$$

■

Remarque 2.1 *Les propriétés de l'injectivité et de la surjectivité de la dérivée $D\phi$ coincident avec celles des opérateurs ad $_{-X}$ et $I - \phi_*$.*

2.3 Série entière de la fonction $\exp X$

2.3.1 Formule de Taylor de $\exp X$

Soit X un champ de vecteurs sur M , qui admet un X-flot global $\phi_t = \exp(tX)$, solution du système dynamique

$$\begin{cases} D_t \exp(tX) = X \circ \exp(tX) = (D \exp tX) \cdot X \\ \exp(0) = id_M \end{cases} \tag{2.30}$$

Lemme 2.2 $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall X, Y$ *des champs de vecteurs de classes* C^∞ *sur* M *alors*

$$D_t^k (Y \circ \exp(tX)) = \left(X^{(k)} Y\right) \circ \exp(tX) \tag{2.31}$$

Preuve: On fait un raisonnement par réccurence

Soit

$$\phi_t(x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x), ..., \varphi_n(t,x)) \tag{2.32}$$

Pour $k = 0$, c'est trivial

.Pour $k=1$, démontrons que :

$$D_t\left(Y\circ\exp\left(tX\right)\right)=\left(X^{(1)}Y\right)\circ\exp\left(tX\right) \tag{2.33}$$

Soient X ,Y deux champs de vecteurs tels que: $X=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i},\ Y=\sum_{j=1}^{n}u_j\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$, on a d'une part

$$Y\circ\phi_t=\sum_{j=1}^{n}u_j\left(\phi_t\left(x\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.34}$$

Qui s'écrit en coordonnées

$$Y\circ\phi_t\left(x\right)=\left(u_1(\phi_t\left(x\right)\right),...,u_n\left(\phi_t\left(x\right)\right) \tag{2.35}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_t\left(Y\circ\phi_t\left(x\right)\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t},...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_n}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\phi_t\left(x\right)\right)\frac{\partial u_1}{\partial\varphi_i}\left(\phi_t\left(x\right)\right),...,\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\phi_t\left(x\right)\right)\frac{\partial u_n}{\partial\varphi_i}\left(\phi_t\left(x\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$D_t(Y\circ\exp\left(tX\right))=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\phi_t\left(x\right)\right)\frac{\partial u_j}{\partial\varphi_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

D'autre part on a

$$X.Y=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x\right)\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.36}$$

d'où

$$\left(X.Y\right)\circ\exp\left(tX\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\phi_t\left(x\right)\right)\frac{\partial u_j\left(\phi_t\left(x\right)\right)}{\partial\varphi_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

On déduit

$$D_t\left(Y\circ\exp\left(tX\right)\right)=\left(XY\right)\circ\exp\left(tX\right)=\left(X^{(1)}Y\right)\circ\exp\left(tX\right)$$

Généralisons ce résultat pour $k\in\mathbb{N}$,on a

$$
\begin{aligned}
D_t^{k+1}\left(Y\circ\exp\left(tX\right)\right) &= D_t\left(D_t^k\left(Y\circ\exp\left(tX\right)\right)\right)\\
&= D_t\left(\left(X^{(k)}Y\right)\circ\exp\left(tX\right)\right)\\
&= \left[X.\left(X^{(k)}Y\right)\right]\circ\exp\left(tX\right)\\
&= \left(X^{(k+1)}Y\right)\circ\exp\left(tX\right)
\end{aligned}
$$

■

Remarque 2.2 *Pour $k=1$ l'équation (2.32) s'écrit de la facon suivante:*

$$
\begin{aligned}
D_t\left(Y\circ\exp\left(tX\right)\right)\big|_{t=0} &= \left(X^{(1)}Y\right)\circ\exp\left(tX\right)\Big|_{t=0}\\
&= X^{(1)}Y = X\cdot Y
\end{aligned}
$$

donc X se comporte comme une dérivation.

pour $k\in\mathbb{N}$ on a:

$$
\begin{aligned}
D_t^k\left(Y\circ\exp\left(tX\right)\right)\Big|_{t=0} &= \left(X^{(k)}Y\right)\circ\exp\left(tX\right)\Big|_{t=0}\\
&= X^{(k)}Y
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Théorème 2.1 ***La formule de Taylor*** *de la fonction $F_t\left(X,Y\right)=Y\circ\exp\left(tX\right)$ au voisinage de 0 à l'odre n avec un reste sous forme d'intégrale s'écrit:*

$$
Y\circ\exp\left(tX\right)=Y+tX^{(1)}Y+\frac{t^2}{2!}X^{(2)}Y+...+\frac{t^n}{n!}X^{(n)}Y+\int_0^t\frac{\left(t-s\right)^n}{n!}\left(X^{(n+1)}Y\right)\circ\exp\left(sX\right)ds
\tag{2.38}
$$

pour $t=1$ On a la Formule de Taylor:

$$
Y\circ\exp\left(X\right)=Y+X^{(1)}Y+\frac{1}{2!}X^{(2)}Y+...+\frac{1}{n!}X^{(n)}Y+\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^n}{n!}\left(X^{(n+1)}Y\right)\circ\exp\left(sX\right)ds \tag{2.39}
$$

Preuve: En appliquant la formule de taylor au voisinage de 0 , on a

$$\begin{aligned} Y\circ\exp(tX) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\,D_t^k\left(Y\circ\exp(tX)\right)\Big|_{t=0}+R_n \\ R_n &= \int_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}\left(X^{(n+1)}Y\right)\circ\exp(sX)\,ds \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$Y\circ\exp(tX)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}X^{(k)}Y+R_n \tag{2.41}$$

■

Corollaire 2.1 *1)**Le developpement de Mac-Laurin de*** $\exp tX$ *à l'odre n sera:*

$$\exp tX=id+tX+\frac{t^2}{2!}X^{(1)}X+...+\frac{t^n}{n!}X^{(n-1)}X+\int_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}\left(X^{(n)}X\right)\circ\exp(sX)\,ds \tag{2.42}$$

2) pour $t=1$, *on aura le developpement **de Mac-Laurin de*** $\exp tX$ *à l'odre n*

$$\exp X=id+X+\frac{1}{2!}X^{(1)}X+...+\frac{1}{n!}X^{(n-1)}X+\int_0^1\frac{(1-s)^n}{n!}\left(X^{(n)}X\right)\circ\exp(sX)\,ds \tag{2.43}$$

Preuve: D'après la formule (2.30)

$$\begin{aligned} D_t\exp(tX) &= X\circ\exp(tX) \\ D_t^k\exp(tX) &= X^{(k)}\circ\exp(tX) \end{aligned}$$

d'où pour $Y=X$ on a

$$X\circ\exp(tX)=X+tX^{(1)}X+\frac{t^2}{2!}X^{(2)}X+...+\frac{t^n}{n!}X^{(n)}X+\int_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}\left(X^{(n+1)}X\right)\circ\exp(sX)\,ds$$

Puisque X se comporte comme une dérivation on déduit :

$$\exp tX=id+tX+\frac{t^2}{2!}X^{(1)}X+...+\frac{t^n}{n!}X^{(n-1)}X+\int_0^t\frac{(t-s)^n}{n!}\left(X^{(n)}X\right)\circ\exp(sX)\,ds$$

Pour $t = 1$ on a

$$\exp X = id + X + \frac{1}{2!}X^{(1)}X + ... + \frac{1}{n!}X^{(n-1)}X + \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}\left(X^{(n)}X\right) \circ \exp(sX)\, ds$$

■

2.3.2 Série entière de $\exp X$

Si

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$$

alors la fonction $\exp tX$ est analytique et son développement en série entière au voisinage de 0.

$$\exp tX = id + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} X^{(n-1)}X \tag{2.44}$$

et pour $t = 1$ on aura

$$\exp X = id + \sum_{n \geq 1} \frac{X^{(n-1)}X}{n!} \tag{2.45}$$

2.4 Série de Fourier

2.4.1 Injectivité de la X-dérivation de la fonction $X \mapsto \exp X$

Lemme 2.3 *Les propriétés suivantes sont vraies*

1) Si un espace fermé Ω de $\chi(M)$est invariant par le groupe $(\phi_t)_*$alors il est aussi invariant par les opérateurs ad_{-X} et A_t

2) Si ad_{-X} et A_T sont inversibles alors $I - (\phi_T)_*$ est aussi inversible.

3) $\ker(I - (\phi_T)_*) = \left\{ Y \text{ telle que } Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \text{ et } [Y_k, X] = i\omega k Y_k, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C'est à dire:

Lemme 1 *$Y \in \ker(I - (\phi_T)_*)$ si et seulement si Y_k est un vecteur propre de ad_{-X} ayant pour valeur propre $-i\omega k = \lambda_k$*

4)

$$\ker(I - (\phi_T)_*) = \{Y \text{ telle que } (\phi_T)_* Y \text{ est de periode } T\} \tag{2.46}$$

5) A_T est égale à l'identité sur $\ker(ad_X)$ *et*

$$\ker(I-(\phi_T)_*) = \ker(ad_{-X}) \oplus \ker(A_T) \tag{2.47}$$

Preuve: 1) Soit Ω un sous espace fermé de $\chi(M)$ invariant par le groupe $(\phi_t)_*$ et soit $Y \in \Omega$, comme on a

$$ad_{-X}Y = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}((\phi_t)_* Y) \text{ et } A_T Y = \frac{1}{T}\int_0^T (\phi_s)_* Y ds$$

alors les opérateurs ad_{-X} et A_T restent invariants sur Ω et par conséquent Ω reste invariant par ad_{-X} et A_T.

2) C'est une conséquence directe de

$$ad_{-X} \circ A_T = A_T \circ ad_{-X} = I - (\phi_T)_*$$

3) Soient

$$Y \in \ker(I-(\phi_T)_*) \text{ et} Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds$$

Alors d'après la formule (1.16) on a :

$$\begin{aligned} B_\lambda(t) X &= \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\phi_s(X) ds \\ (\lambda I - L) B_\lambda(t) X &= B_\lambda(t)(\lambda I - L) X \\ &= e^{\lambda t} X - \phi_t(X) \end{aligned}$$

et puisque

$$e^{\lambda_k T} = e^{Tik\omega} = e^{ikT\frac{2\pi}{T}} = e^{2ik\pi} = 1$$

on aura

$$\begin{aligned}
(ik\omega I - ad_{-X}) Y_k &= (ik\omega I - ad_{-X}) \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-i\omega ks) (\phi_s)_* Y ds \\
&= (\lambda_k I - ad_{-X}) B_{\lambda_k}(T) Y \\
&= B_{\lambda_k}(T) (\lambda_k I - ad_{-X}) Y \\
&= (I - (\phi_T)_*) Y
\end{aligned}$$

$$\lambda_k = i\omega k \text{ et } B_{\lambda_k}(T)(Y) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-\lambda_k s) (\phi_s)_* Y ds$$

d'où d'apres la propriètè (1.16) on a:

$$\begin{aligned}
(ik\omega I - ad_{-X}) Y_k &= (\lambda_k I - ad_{-X}) B_{\lambda_k}(T) Y \\
&= B_{\lambda_k}(T) (\lambda_k I - ad_{-X}) Y \\
&= (I - (\phi_T)_*) Y
\end{aligned}$$

Donc:

$Y \in \ker(I - (\phi_T)_*)$ si et seulement si Y_k est un vecteur propre de ad_{-X} ayant $ik\omega$ pour valeur propre

$$(I - (\phi_T)_*) Y = 0 \Rightarrow (\phi_T)_* Y = Y$$

4)

$$(\phi_T)_* Y = Y \Rightarrow (\phi_t)_* (\phi_T)_* Y = (\phi_t)_* Y$$

or

$$(\phi_t)_* (\phi_T)_* Y = \left(\phi_{t+T}\right)_* Y$$

d'où

$$\left(\phi_{t+T}\right)_* Y = (\phi_t)_* Y \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Donc $(\phi_t)_* Y$ est de période T.

5) Soit $Y \in \ker ad_{-X}$; $\quad [Y,X]=0$ comme

$$\left(A_T \circ ad_{-X}\right)(Y) = \left(I - (\phi_T)_*\right)(Y) = 0$$

d'où

$$(\phi_T)_*(Y) = Y$$

qui veut dire que Y est un point fixe de l'isomorphisme $(\phi_T)_*$, comme

$$A_T Y = \frac{1}{T}\int_0^T (\phi_s)_* Y ds = \frac{1}{T}\int_0^T Y ds = \frac{1}{T}\cdot Y\,[s]_0^T = Y$$

d'où $A_T Y = Y$ c'est à dire $A_T = I_{\ \ker ad_{-X}}$.

Soit $Y \in \ker\left(I - (\phi_T)_*\right)$ comme $(\phi_t)_* Y$ est de période T; la série de Fourier est donnée par:

$$(\phi_t)_* Y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \exp(i\omega k t) \tag{2.48}$$

Avec

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega k s)(\phi_s)_* Y ds \neq 0 \tag{2.49}$$

Or

$$Y_0 = \frac{1}{T}\int_0^T (\phi_s)_* Y ds \Rightarrow A_T Y = T Y_0 \tag{2.50}$$

Donc $Y \in \ker A_T$ si et seulement si $Y_0 = 0$,

d'autre part:

$$ad_{-X}(Y_0) = \left(I - (\phi_T)_*\right) Y = 0 \Rightarrow Y_0 \in \ker(ad_X)$$

Donc

$$\ker\left(I - (\phi_T)_*\right) = \ker ad_{-X} \oplus \ker A_T \qquad (*) \tag{2.51}$$

Puisque ad_{-X} et A sont des opérateurs linéaires fermés sur $\Gamma(TM)$ alors $\ker ad_{-X}$ et $\ker A_T$ sont fermés et ils sont des sous -espaces disjoints donc (2.50) est une somme topologique. ■

2.4.2 Séries de Fourier

Définitions

Définition 2.4 *Soit Y un champ de vecteurs dans l'espace de* ***Frêchet*** $E = \chi(M)$

Soit

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad \mathbb{R} \times E \to Diff(M) \\ (t, Y) \quad &\longmapsto \quad F(t, Y) = F_t(Y) \end{aligned} \tag{2.52}$$

où $F_t(Y)$ est périodique par rapport a t de période T: $F_{t+T}(Y) = F_t(Y)$, $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall Y \in E$. alors

i) Dans le champ complexe , la série de Fourier associée à $F_t(Y)$ est définie par

$$S(t, F_t(Y)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(F_t(Y)) \cdot \exp(i\omega k t) \tag{2.53}$$

avec

$$C_k(F_t(Y)) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-i\omega k s) F_s(Y) \, ds$$

ii) Dans le corps des réels , la série de Fourier est définie par:

$$S(t, F_t(Y)) = \frac{A_0(F_t(Y))}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[A_n(F_t(Y)) \cdot \cos(n \ \omega t) + B_n(F_t(Y)) \cdot \sin(n \ \omega t) \right] \tag{2.54}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} A_n(F_t(Y)) &= \tfrac{2}{T} \int_0^T F_s(Y) \cos(n \ \omega s) \, ds \\ B_n(F_t(Y)) &= \tfrac{2}{T} \int_0^T F_s(Y) \sin(n \ \omega s) \, ds \end{aligned} \right. , \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.55}$$

Définition 2.5 *Conditions de Dirichlet*

$F_t(Y)$ est une fonction qui vérifie les conditions de Dirichlet par rapport à $t \in \mathbb{R}$,pour tout $Y \in E$ si et seulement si

a) $F_t(Y)$ est périodique par rapport a t de période T: $F_{t+T}(Y) = F_t(Y)$, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall Y \in E$.

b) $F_t(Y)$ a un nombre fini de discontinuité de premier espèce par rapport à t, $F_{t+0}(Y)$ et $F_{t-0}(Y)$ existent et sont finies

c) $F_t(Y)$ est uniformément bornée,$\forall Y \in E$.

d) $F_t(Y)$ est dérivable par morceaux par rapport a t , $\frac{d}{dt^+}F_t(Y)$ et $\frac{d}{dt^-}F_t(Y)$ exixstent et sont finies.

Exemple 2.4 *Soit $F_t(Y) = (\phi_t)_* Y$,la série de Fourier associée à cette fonction sera:*

1) Dans le champ des comlexes

$$S(t, (\phi_t)_* Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \exp(i\omega kt) \tag{2.56}$$

avec

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \tag{2.57}$$

2) Dans le corps des réels

$$S(t, (\phi_t)_* Y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(A_n \cos(n\ \omega t) + B_n \sin(n\ \omega t)) \tag{2.58}$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T (\phi_s)_* Y ds \quad , \ A_n = \frac{2}{T}\int_0^T (\phi_s)_* Y \cos(n\ \omega s)\, ds \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_0^T (\phi_s)_* Y \sin(n\ \omega s)\, ds \end{aligned} \tag{2.59}$$

Théorème de Dirichlet *:Si $F_t(Y)$ vérifie les conditions de Dirichlet alors les séries de Fourier associées convergent*

$$\frac{F_{t+0}(Y) + F_{t-0}(Y)}{2} = S(t, F_t(Y)) \tag{2.60}$$

2.4.3 Noyaux de la X- dérivation de la fonction $X \mapsto \exp X$

On prend $\omega = 2\pi$ et $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$.

Théorème 2.2 *La dérivation* $D\exp X$ *est injective si et seulement si les équations suivantes admettent pour solution seulement la solution triviale:*

$$\forall k > 0, \begin{cases} (\phi_t)_* Y_k = Y_k \exp(i\omega kt) \\ [Y_k, X] = i\omega k Y_k \end{cases}, \tag{2.61}$$

Preuve: Comme $Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\phi_{-t}\right)_* Y_k$ avec $Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds$

alors

$$\begin{aligned} \ker(D\exp(X)) &= \left\{ Y \text{ telle que } \int_0^1 (\exp(sX))_* Y ds \circ \exp(X) = 0 \right\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Si et seulement si $D(\exp(X))Y = 0 \Leftrightarrow Y_k = \int_0^1 \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$ ■

Remarque 2.3 Y_k *garde la même valeur sur tout intervale* $[\alpha, \alpha + T]$ $, \forall\ \alpha > 0.$

En effet: par un changement de variable $: s = \tau + T$ *on aura les égalitées suivantes,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\tau+T} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds &= -\frac{1}{T}\int_0^{\alpha} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds + \frac{1}{T}\int_0^{T} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \\
&\quad + \frac{1}{T}\int_T^{\alpha+\tau} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \\
&= -\frac{1}{T}\int_0^{\alpha} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds + \frac{1}{T}\int_0^{T} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \\
&\quad + \frac{1}{T}\int_0^{\alpha} \exp(-i\omega k(\tau+T))\left(\phi_{\tau+T}\right)_* Y d\tau \\
&= -\frac{1}{T}\int_0^{\alpha} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds + \frac{1}{T}\int_0^{T} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \\
&\quad + \frac{\exp(-ik\omega T)}{T}\int_0^{\alpha} \exp(-i\omega k\tau)(\phi_\tau)_* Y d\tau \\
&= \frac{\exp(-ik\omega T)-1}{T}\int_0^{\alpha} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds + \frac{1}{T}\int_0^{T} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T} \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_* Y ds = Y_k
\end{aligned}$$

2.4.4 Relation de Plancherel et de Parseval

Relation de Plancherel

Proposition 2.2 *1) Soit* Y *un champ de vecteurs dans l'espace de frêchet* $E = \chi(M)$

Soient $F_t(Y)$ *et* $G_t(Y)$ *deux fonctions de période* T *qui vérifient les conditions de Dirichlet par rapport à* $t \in \mathbb{R}$ *,pour tout* $Y \in E$

i) Dans le champ complexe , la formule de Plancherel est définie par:

$$\frac{1}{T}\int_0^{T} F_s(Y)\overline{G_s(Y)}ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(F_t(Y)) \cdot \overline{C_n(G_t(Y))} \tag{2.62}$$

avec

$$C_n\left(F_t\left(Y\right)\right) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(-i\omega ns\right) F_s\left(Y\right) ds \tag{2.63}$$

$$C_n\left(G_t\left(Y\right)\right) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(-i\omega ns\right) G_s\left(Y\right) ds$$

ii) Dans le corps des réels , la formule de Plancherel est définie par:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{T}\int_0^T F_t\left(Y\right) G_t(Y)dt \\ =\ & \frac{A_0\left(F_t\left(Y\right)\right)\cdot B_0\left(G_t\left(Y\right)\right)}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(A_n\left(F_t\left(Y\right)\right)\cdot A_n\left(G_t\left(Y\right)\right) + B_n\left(F_t\left(Y\right)\right)\cdot B_n\left(G_t\left(Y\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{2.64}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} A_n\left(F_t\left(Y\right)\right) = \frac{2}{T}\int_0^T F_s\left(Y\right)\cdot\cos\left(n\ \omega s\right) ds \\ B_n\left(F_t\left(Y\right)\right) = \frac{2}{T}\int_0^T F_s\left(Y\right)\cdot\sin\left(n\ \omega s\right) ds \end{array}\right. , \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.65}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} A_n\left(G_t\left(Y\right)\right) = \frac{2}{T}\int_0^T G_s\left(Y\right)\cdot\cos\left(n\ \omega s\right) ds \\ B_n\left(G_t\left(Y\right)\right) = \frac{2}{T}\int_0^T G_s\left(Y\right)\cdot\sin\left(n\ \omega s\right) ds \end{array}\right. , \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.66}$$

Relation de Parseval

Proposition 2.3 *1) Soit Y un champ de vecteurs dans* ***l'espace de Frêchet*** $E = \chi\left(M\right)$

Soit $F_t\left(Y\right)$ une fonction de période T qui vérifie les conditions de Dirichlet par rapport à $t\in\mathbb{R}$ pour tout $Y\in E$

i) Dans le champ complexe , la formule de Parseval est définie par:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|F_t\left(Y\right)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|C_k\left(F_t\left(Y\right)\right)\right|^2 \tag{2.67}$$

avec

$$C_k\left(F_t\left(Y\right)\right)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\exp\left(-i\omega ks\right)F_s\left(Y\right)ds$$

ii) Dans le corps des réels la formule de Parceval est définie par:

$$\frac{2}{T}\int\limits_0^T\left|F_t\left(Y\right)\right|^2dt=\frac{A_0^2}{2}+\sum_{n\geq1}\left[\left(A_n\left(F_t\left(Y\right)\right)^2+\left(B_n\left(F_t\left(Y\right)\right)^2\right]\right. \tag{2.68}$$

Proposition 2.4 *1)Soit $D\subset\mathbb{R}^+$le domaine de convergence de l'intégrale impropre, soit $\mu\in D$*

$$\begin{aligned}R\left(\mu,ad_{-X}\right)Y &= \left(\mu I-ad_{-X}\right)^{-1}Y=\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\mu s\right)\left(\phi_s\right)_*Y\,ds \\ &= \sum_{n\geq0}\exp\left(n(i\omega-\mu)T\right)\int\limits_0^T\exp\left(-\mu s\right)\left(\phi_s\right)_*Y\,ds \\ &= \left(1-\exp\left((i\omega-\mu)T\right)\right)^{-1}\int\limits_0^T\exp\left(-\mu s\right)\left(\phi_s\right)_*Y\,ds\end{aligned} \tag{2.69}$$

2)

$$\begin{aligned}\left(\phi_t\right)_*Y_k &= Y_k\exp\left(i\omega kt\right)\Leftrightarrow\left[Y_k,X\right]=i\omega kY_k\quad,\quad k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow\quad ad_X\left(Y_k\right)=-i\omega kY_k\end{aligned} \tag{2.70}$$

3)

$$\begin{aligned}\left[\left(\phi_t\right)_*Y_k,X\right] &= \frac{d}{dt}\left(\phi_t\right)_*Y_k \\ &= i\omega k\left(\phi_t\right)_*Y_k\quad,\quad k\in\mathbb{Z}\end{aligned} \tag{2.71}$$

2.5 Applications

1)Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} F_t^{'}(Y) = i\omega k \cdot F_t(Y) \\ F_0(Y) = Y_k \end{cases}, \qquad \forall Y \in E, \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.72}$$

qui admet pour solution

$$F_t(Y) = Y_k \exp(i\omega k t) = (\phi_t)_* Y_k \tag{2.73}$$

2) Soit le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} F_t^{"}(Y) + F_t(Y) = G_t(Y) \\ F_{t+T}(Y)^{'} = F_t(Y)^{'} \\ F_{t+T}(Y) = F_t(Y) \end{cases} ,\forall Y \in E, \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.74}$$

on pose

$$C_n(F_t(Y)) = \frac{1}{T}\int_0^T F_t(Y)\, e^{-in\omega t} dt \tag{2.75}$$

alors

$$\begin{aligned} C_n\left(F_t^{"}(Y)\right) &= \frac{1}{T}\int_0^T F_t^{"}(Y)\, e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\left[F_t(Y)^{'} e^{-in\omega t}\right]_0^T + in\omega \int_0^T F_t(Y)^{'} e^{-in\omega t} dt\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(\left[F_T(Y)^{'} - F_0(Y)^{'}\right] + in\omega\left[\left[F_t(Y)\, e^{-in\omega t}\right]_0^T + in\omega \int_0^T F_t(Y)\, e^{-in\omega t} dt\right]\right) \\ &= (in\omega)^2 C_n(F_t(Y)) \\ &= -n^2\omega^2 C_n(F_t(Y)) \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
G_t(Y) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n\left(G_t(Y)\right) e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n\left(F_t^{"}(Y) + F_t(Y)\right) e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[C_n(F_t^{"}(Y)) + C_n(F_t(Y)\right] e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[-n^2\omega^2 C_n(F_t(Y) + C_n(F_t(Y)\right] e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - n^2\omega^2\right) C_n(F_t(Y) e^{in\omega t}
\end{aligned}$$

Donc

$$C_n(G_t(Y)) = \left(1 - n^2\omega^2\right) C_n(F_t(Y)$$

d'où

$$C_n(F_t(Y)) = \frac{C_n(G_t(Y))}{(1 - n^2\omega^2)}$$

$$\begin{aligned}
F_t(Y) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(F_t(Y)) \exp i\omega nt \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(G_t(Y))}{(1 - n^2\omega^2)} \exp i\omega nt \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_s(Y) e^{-in\omega s} ds \cdot \frac{\exp i\omega nt}{1 - n^2\omega^2} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - n^2\omega^2} \int_0^T G_s(Y) e^{-in\omega(s-t)} ds
\end{aligned}$$

finalement ,si on prend

$$G_t(Y) = (\phi_t)_* Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \exp(i\omega kt) \tag{2.76}$$

alors

$$F_t(Y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n((\phi_t)_* Y)}{(1 - n^2\omega^2)} e^{in\omega t} \tag{2.77}$$

d'où la solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{c} F_t\left(Y\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y_n}{\left(1-n^2\omega^2\right)} e^{in\omega t} \\ Y_n = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \exp\left(-i\omega ns\right) \left(\phi_s\right)_* Y ds \end{array} \right. \tag{2.78}$$

Chapitre 3

Inversibilité de la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs par le théorème de Nash-Moser

3.1 Flot borné et flot opérant doucement sur un espace de Frêchet E.

3.1.1 Flot borné

Définition 3.1 *On dit que le flot adjoint $\phi_t^* \, (t \geq 0)$ est uniformément borné (respectivement intégrable) sur un champ de vecteurs X sur M si $X_t = \phi_t^* X$ est borné (respectivement intégrable).*

Définition 3.2 *On dira que ϕ_t^* est uniformément borné par rapport à t sur le sous-espace E de $\chi(M)$ s'il est uniformément borné par rapport à t sur tout champ de vecteurs X de E.*

3.1.2 Absorbant et flot conjugué

Proposition 3.1 *Si le flot ϕ_t admet un absorbant A (positif ou négatif) et f est un difféomorphisme sur M alors $f(A)$ est un absorbant pour le flot conjugué $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$(cf :* [23]

3.1.3 Flot opèrant doucement sur un espace de Frêchet

Définition 3.3 $E = \chi(\mathbb{R}^n)$ *est muni d'un système dénombrable de semi-normes* $\|.\|_k$, $k \geq 0$.

On dit que le flot adjoint $\phi_t^* = (\exp tX)^*, X \in E$ *opère doucement sur l'espace de Frêchet* E*, dans un ensemble* Ω *où* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *, si pour tout entier* $k \geq 0$ *il existe un entier* $l_k \geq k$ *et une fonction* $\nu_k(t, x)$ *continue, définie sur* $[0, \infty[\times \Omega$ *tel que pour tout* x *dans tout compact* K *de* Ω *on ait:*

$$\left\| D^k \left((\exp tX)^* .Y \right)(x) \right\|^K \leq \nu_k(t, x) \cdot \|Y\|_{l_k} \quad , \forall t \geq 0 \ , \forall Y \in E \quad , \forall x \in K \subseteq \Omega \tag{3.1}$$

avec

$$\int_0^{+\infty} v_k(t, x)\, dt \quad \text{converge uniformément par rapport à } x \text{ dans tout compact de } \Omega \tag{3.2}$$

Remarque 3.1 $(\exp tX)^*$*peut être remplacée par* $(\exp tX)_* = (\exp(-tX))^*$.

3.1.4 Exemples

Exemple 3.1 *Soit un champ de vecteurs* $X_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *dans l'espace de Frêchet , il génère un groupe à un paramètre* t

$$(\exp(tX_0))(x) = x + \alpha t = (x_1 + \alpha_1 t, ..., x_n + \alpha_n t) \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

Alors pour tout Y *dans* E *on a*

$$\begin{aligned} (\exp tX_0)^* Y(x) &= Y \circ \phi_t^0(x) = Y(x_1 + \alpha_1 t, ..., x_n + \alpha_n t) \\ (\exp tX_0)_* Y(x) &= Y \circ \phi_{-t}^0(x) = Y(x_1 - \alpha_1 t, ..., x_n - \alpha_n t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

On pose

$$y=\phi_{-t}^{0}\left(x\right)=\left(\exp\left(-tX_{0}\right)\right)\left(x\right)\ \ et\ D_{x}^{\beta}\left(\phi_{t}^{0}\right)_{*}Y\left(x\right)=D_{y}^{\beta}Y\left(y\right) \tag{3.5}$$

Soit K *un compact de* $\mathbb{R}^{n}$ *,on a*

$$\begin{aligned}\left\|D_{x}^{\beta}\left(\phi_{t}^{0}\right)_{*}Y\left(x\right)\right\|^{K} &= \left\|D_{y}^{\beta}Y(y)\right\|^{K}\\ &\leq C_{0}\left\|Y\right\|_{|\beta|}^{\phi_{-t}^{0}(K)}\leq C_{1}\left\|Y\right\|_{|\beta|+2}^{\phi_{-t}^{0}(K)}\cdot\frac{1}{1+\left\|y\right\|^{2}},\forall x\in K\end{aligned}$$

comme

$$\|y\|=\left\|\left(\phi_{t}^{0}\right)_{*}(x)\right\|=\|x-\alpha t\|\geq\left||t|\,\|\alpha\|-\|x\|\right|$$

$$\left\|D_{x}^{\beta}\left(\phi_{t}^{0}\right)_{*}Y\left(x\right)\right\|^{K}\leq C_{2}\left\|Y\right\|_{|\beta|+2}^{\phi_{-t}^{0}(K)}\cdot\frac{1}{1+\left(t\left\|\alpha\right\|-\left\|x\right\|\right)^{2}}$$

comme pour ϕ_{-t}^{0} *il existe un absorbant* A *on déduit* $\phi_{-t}^{0}\left(K\right)\subset A,\forall t>0.$

$$\left\|D_{x}^{\beta}\left(\phi_{t}^{0}\right)_{*}Y\left(x\right)\right\|^{K}\leq C_{2}\left\|Y\right\|_{|\beta|+2}^{A}\cdot\frac{1}{1+\left(t\left\|\alpha\right\|-\left\|x\right\|\right)^{2}}$$

$$\leq\nu_{\beta}\left(t,x\right)\cdot\left\|Y\right\|_{|\beta|+2}^{A}\ où\ \ \nu_{\beta}\left(t,x\right)=\frac{C_{2}}{1+\left(t\left\|\alpha\right\|-\left\|x\right\|\right)^{2}}$$

Donc

$$\left\|D_{x}^{\beta}\left(\phi_{t}^{0}\right)_{*}Y\left(x\right)\right\|^{K}\leq\nu_{\beta}\left(t,x\right)\cdot\left\|Y\right\|_{l_{\beta}}^{A}\quad où\ l_{\beta}\ =\ |\beta|+2$$

comme x *est dans* K *alors il existe* $a\in K$ *tel que*

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\nu_{\beta}\left(t,x\right)dt &= \int_{0}^{+\infty}\frac{C_{2}}{1+\left(t\left\|\alpha\right\|-\left\|x\right\|\right)^{2}}dt\\ &\leq \int_{0}^{+\infty}\frac{C_{3}}{1+\left(t\left\|\alpha\right\|-\left\|a\right\|\right)^{2}}dt\end{aligned}$$

puisque l'intégrale impropre du premier espèce $\int_{0}^{+\infty}\frac{C_{3}}{1+(t\|\alpha\|-\|a\|)^{2}}dt$ *converge , l'integrale* $\int_{0}^{+\infty}\nu_{\beta}\left(t,x\right)dt$ *est normalement convergente et par suite elle est uniformément convergente pour tout* x *dans* K

Par le même raisonnement on déduit:

$$\left\|D_{x}^{\beta}\left(\phi_{t}^{0}\right)^{*}Y\left(x\right)\right\|^{K}\leq\nu_{\beta}'\left(t,x\right)\cdot\left\|Y\right\|_{l_{\beta}'}^{A}\ \ où\ l_{\beta}'\ =\ |\beta|+2 \tag{3.6}$$

où $\int_0^{+\infty} \nu'_k(t,x)\,dt$ *est uniformément convergente pour tout* x *dans* K *.*

Exemple 3.2 *Soit un champ de vecteurs* $X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *dans l'espace de Frêchet* E *:*

$$X_1(x) = Cx = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

X_1 *génère un groupe à un paramètre* $t : \exp tX_1$ *:*

$$\exp tX_1(x) = xe^{\alpha t} = \left(x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t}\right) = e^{Ct}\ x \tag{3.8}$$

Soient K *un compact dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $Y = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ *un champ de vecteurs dans* E, *et* $t \geq t_0 > 0$.

Si $\alpha_i \in [a,b] \subset \mathbb{R}^-$ *on a:*

$$\begin{aligned} (\exp tX_1)_*(Y)(x) &= e^{Ct} \cdot Y(\exp -tX_1)(x) \\ (\exp tX_1)^*(Y)(x) &= e^{-Ct} \cdot Y(\exp tX_1)(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

posons $y = \exp(-tX_1)(x)$ *pour tout* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ *où* $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n$ *et* $\forall v \in \mathbb{R}^n$, *on a :*

$$D_x^\beta (\exp tX_1)_* Y.v^\beta = e^{(C-\alpha\beta)t} \cdot D_y^\beta Y(y)\, v^\beta \text{ où } \alpha\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

D'où

$$\begin{aligned} \left\| D_x^\beta (\exp tX_1)_* Y(x) \right\|^K &\leq \exp t(b - |\beta|\, a) \cdot \left\| D_y^\beta Y(y) \right\|^K \\ &\leq C_1 \exp t(b - |\beta|\, a) \cdot \|Y\|_{|\beta|}^{\exp(-tX_1)(K)} \end{aligned}$$

Comme pour $\exp(-tX_1)$ *il existe un absorbant* A *,*$\exp(-tX_1)(K) \subset A, \forall t > 0$.

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^{\beta} (\exp tX_1)_* Y(x) \right\|^{K} &\leq C_2 \exp t (b - |\beta| a) \cdot \|Y\|_{|\beta|+k}^{\exp(-tX_1)(K)} \cdot \sup_{x \in K} \frac{1}{\left(1 + \|y\|^2\right)^{\frac{k}{2}}} \\
&\leq C_2 \exp t (b - |\beta| a) \cdot \|Y\|_{|\beta|+k}^{A} \cdot \sup_{x \in K} \frac{1}{\left(1 + \|xe^{-\alpha t}\|^2\right)^{\frac{k}{2}}} \ ,k = |\beta| \left[\frac{a}{b}\right] + 1 > 0 \\
&\leq C_3 \exp(bt) \cdot \|Y\|_{|\beta|+k}^{A}
\end{aligned}$$

donc

$$\left\| D_x^{\beta} (\exp tX_1)_* Y \right\|^{K} \leq C_3 \exp(bt) \cdot \|Y\|_{|\beta|+k}^{A}$$

posons $\nu_{\beta}(t,x) = C_3 \exp(bt)$ *on aura*

$$\left\| D_x^{\beta} (\exp tX_1)_* Y(x) \right\|^{K} \leq \nu_{\beta}(t,x) \cdot \|Y\|_{l_\beta}^{A} \ \text{ où } l_\beta = |\beta| + k$$

Comme $b < 0$ *,l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \nu_k(t,x)\, dt = C_3 \int_0^{+\infty} \exp(bt)\, dt$$

est convergente uniformément pour tout x *dans* K *.*

Par le même raisonnement pour $(\exp tX_1)^*(Y)(x)$ *donne*

$$\left\| D_x^{\beta} (\exp tX_1)^* Y(x) \right\|^{K} \leq \nu'_{\beta}(t,x) \cdot \|Y\|_{l'_\beta}^{A} \qquad \text{où } l'_\beta = |\beta| + k' \tag{3.10}$$

et $\int_0^{+\infty} \nu_\beta(t,x)\, dt$ *est convergente uniformément pour tout* x *dans* K

3.1.5 Propriétés usuelles

Lemme 3.1 *Soit* $f_t \in D(M)$*;c'est à dire toutes les dérivées de* f_t *sont uniformément bornées* $\forall t$ *; telle que* f_t^* *préserve* E*. si* ϕ_t^* *opère doucement sur* E *alors* $\psi_t^* = f_t^* \circ \phi_t^*$ *opère doucement sur* E

Preuve: Montrons que $(\phi_t \circ f_t)^*$ opére doucement ,c'est à dire: $]0, +\infty[\times \Omega$

Soit $k \geq 0$, , et K compact de Ω alors, $\forall t \geq 0$, , $\forall Z \in E$,$\forall x \in K$

$$\|\psi_t^* Z\|_k^K \leq \|(\phi_t \circ f_t)^* Z\|_k^K \leq \nu_k(t\ ,x) \|Z\|_{l_k}$$

$$\begin{aligned} \|(\phi_t \circ f_t)^* Z\|_k^K &\leq \|f_t^* \circ \phi_t^*(Z)\|_k^K \\ &\leq \|f_t^*[\phi_t^*(Z)]\|_k^K \end{aligned}$$

Posons $\acute{Y}(t) = \phi_t^*(Z)$ et utilisons les estimations de Hamilton(1.4),(1.5),on obtient:

$$\begin{aligned} \|D^k f_{t*}\acute{Y}(t)\| &= \|D^k \left(Df_t.\acute{Y}(t)\right) \circ f_t^{-1}\| \\ &\leq C_1 \|f_t^{-1}\|_1^{k-1} \left(\|f_t^{-1}\|_1 \|Df_t.\acute{Y}(t)\|_k + \|Df_t.\acute{Y}(t)\|_1 \|f_t^{-1}\|_k\right) \\ &\leq C_1 \|f_t^{-1}\|_1^{k-1} \left\{ \begin{array}{l} C_2 \|f_t^{-1}\|_1 \left(\|f_t\|_{k+1} \|\acute{Y}(t)\|_0 + \|f_t\|_1 \|\acute{Y}(t)\|_k\right) \\ +C_3 \|f_t^{-1}\|_k \left(\|f_t\|_2 \|\acute{Y}(t)\|_0 + \|f_t\|_1 \|\acute{Y}(t)\|_1\right) \end{array} \right\} \\ &\leq C_4 \|f_t^{-1}\|_1^{k-1} \left(\|f_t^{-1}\|_1 \|f_t\|_{k+1} + \|f_t^{-1}\|_k \|f_t\|_2\right) \|\acute{Y}(t)\|_k \end{aligned}$$

Puisque tous les $\|f_t\|_k$ sont indépendants de t (d'apres (1.39-45)) et

$$\|f_t^{-1}\|_k \leq C(1 + \|f_t\|_k)$$

on a

$$\|D^k f_{t*}\acute{Y}(t)\|^K \leq C \|\acute{Y}(t)\|_k$$

Donc

$$\|\psi_t^* Z\|_k^K \leq \|f_t^*[\phi_t^*(Z)]\|_k^K \leq C \|\phi_t^*(Z)\|_k$$

Come ϕ_t^* opére doucement sur E ,il existe $\nu_k(t\ ,x)$ telle que

$$\|\phi_t^*(Z)\|_k^K \leq \nu_k(t\ ,x) \|Z\|_{l_k}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|(\phi_t \circ f_t)^* Z\right\|_k^K &\leq C \left\|\phi_t^*(Z)\right\|_k \\ &\leq C\nu_k(t\ ,x)\left\|Z\right\|_{l_k} \\ \left\|\psi_t^* Z\right\|_k^K &\leq \nu_k'(t\ ,x)\left\|Z\right\|_{l_k}\end{aligned}$$

où

$$\int_0^{+\infty} \nu_k'(t\ ,x)\, dt \text{ converge uniformément pour tout } x \text{ dans } K \subseteq\ \Omega$$

■

Lemme 3.2 , *Soient $Z \in E$ et $\psi_t = \exp t(X+Z)$ tels que $f_t = \phi_{-t} \circ \psi_t \in D(M)$,supposons que ϕ_t^* opère doucement sur E et que f_t^* préserve E, alors ψ_t^* opère doucement sur E.*

Preuve: Conséquence directe du lemme précédent ,puisque $f_t = \phi_{-t} \circ \psi_t$ entraine $\psi_t = \phi_t \circ f_t$, .

■

Lemme 3.3 *Soient X et Y des champs de vecteurs dans E où $\phi_{t_*} = \exp(tX)_*$ alors*

$$\left(\phi_{t_*}\right)^m Y(x) = (\phi_{mt})_* Y(x) = -\left(\phi_{-mt}\right)^* Y(x),\ \forall m\ \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

Preuve: On fait un raisonnement par recurrence sur m

Pour $m = 0, 1$ c'est trivial

Pour $m = 2$, posons :$Z_1(x) = \left(\phi_{t_*}\right) Y(x)$

On a d'une part:

$$\begin{aligned}\left(\phi_{t_*}\right)^2 Y(x) &= \left(\phi_{t_*}\right)\left[\left(\phi_{t_*}\right) Y(x)\right] = \left(\phi_{t_*}\right) Z_1(x) \\ &= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot Z_1\left(\phi_{-t_*}(x)\right) \\ &= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_t\left(\phi_{-t} \circ \phi_{-t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-t} \circ \phi_{-t}(x)\right) \\ &= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_t\left(\phi_{-2t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-2t}(x)\right)\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{2t_*}\right) Y(x) &= D\phi_{2t}\left(\phi_{-2t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-2t}(x)\right) \\
&= D\left[\phi_t \circ \phi_t\left(\phi_{-2t}(x)\right)\right] \cdot Y\left(\phi_{-2t}(x)\right) \\
&= D\phi_t\left[\phi_t \circ \left(\phi_{-2t}(x)\right)\right] \cdot D\phi_t\left(\phi_{-2t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-2t}(x)\right) \\
&= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_t\left(\phi_{-2t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-2t}(x)\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\phi_{t_*}\right)^2 Y(x) = \left(\phi_{2t_*}\right) Y(x)$$

Supposons que la formule est vraie à l'ordre m et montrons qu'elle est vraie à l'odre $m+1$

On a d'une part:

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{t_*}\right)^{m+1} Y(x) &= \left(\phi_{t_*}\right)\left[\left(\phi_{t_*}^m\right) Y(x)\right] = \left(\phi_{t_*}\right)\left[\left(\phi_{mt_*}\right) Y(x)\right] \\
&= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot \left[\left(\phi_{mt_*}\right) Y\left(\phi_{-t_*}(x)\right)\right] \\
&= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_{mt}\left(\phi_{-mt} \circ \phi_{-t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-mt} \circ \phi_{-t}(x)\right) \\
&= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_{mt}\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right)
\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{(m+1)t_*}\right) Y(x) &= D\phi_{(m+1)t}\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \\
&= D\left[\phi_t \circ \phi_{mt}\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right)\right] \cdot Y\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \\
&= D\phi_t\left[\phi_{mt} \circ \left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right)\right] \cdot D\phi_{mt}\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \\
&= D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_{mt}\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-(m+1)t}(x)\right)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\left(\phi_{t_*}\right)^m Y(x) = \left(\phi_{mt_*}\right) Y(x)$$

■

Exemple 3.3 *Soit un champ de vecteurs:* $X_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *dans l'espace de Frêchet , il génère* *un groupe à un paramètre t*

$$\phi_t(x) = (\exp(tX_0))(x) = x + \alpha t = (x_1 + \alpha_1 t, ..., x_n + \alpha_n t) \in \mathbb{R}^n \tag{3.12}$$

alors pour tout Y dans E on a

$$(\phi_t)_* Y(x) = Y \circ \phi_{-t}(x) = Y(x - \alpha t) = Y(x_1 - \alpha_1 t, ..., x_n - \alpha_n t) \tag{3.13}$$

Posons

$$Z_1(x) = (\phi_t)_* Y(x) = Y(x - \alpha t) = Y\left(\phi_{-t}(x)\right)$$

donc

$$Z_2(x) = (\phi_t)_*^2 Y(x) = (\phi_t)_* Z_1(x) = Y\left(\phi_{-t}\left(\phi_{-t}(x)\right)\right) = Y\left(\phi_{-2t}(x)\right)$$

de même

$$Z_3(x) = (\phi_t)_*^3 Y(x) = (\phi_t)_* Z_2(x) = Y\left(\phi_{-2t}\left(\phi_{-t}(x)\right)\right) = Y\left(\phi_{-3t}(x)\right)$$

Par réccurence on aura

$$Z_m(x) = (\phi_t)_*^m Y(x) = (\phi_t)_* Z_{m-1}(x) = Y\left(\phi_{-mt}(x)\right)$$

Donc

$$\left(\phi_{t_*}\right)^m \cdot Y(x) = Y \circ \phi_{-mt}(x) = (\phi_{mt})_* \cdot Y(x) \text{ .pour tout } m \text{ dans } \mathbb{N}$$

Exemple 3.4 *Soit un champ de vecteurs : $X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ dans l'espace de Frêchet , il génère un groupe à un paramètre t*

$$\phi_t(x) = (\exp tX_1)(x) = xe^{\alpha t} = \left(x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t}\right) \tag{3.14}$$

alors pour tout champ de vecteurs $Y = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in E$, *et pour tout* $t \geq t_0 > 0$,*on a*

$$(\phi_t)_* Y = \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\alpha_j t} u_j \left(\phi_{-t}(x) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3.15}$$

$$(\phi_t)_*(Y)(x) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 & & & 0 \\ 0 & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & 0 \\ 0 & & & 0 & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1\left(\phi_{-t}(x)\right) \\ \\ \\ \\ u_n\left(\phi_{-t}(x)\right) \end{bmatrix}$$

posons

$$A(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 & & & 0 \\ 0 & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & 0 \\ 0 & & & 0 & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

et

$$Z_1(x) = (\phi_t)_*(Y)(x) = A(t) \cdot Y\left(\phi_{-t}(x)\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_2(x) &= \left[(\phi_t)_*\right]^2 Y(x) = (\phi_t)_* Z_1(x) \\ &= A(t) \cdot Z_1\left(\phi_{-t}(x)\right) \\ &= [A(t)]^2 \cdot Y\left(\phi_{-t}\left(\phi_{-t}(x)\right)\right) \\ &= [A(t)]^2 \cdot Y\left(\phi_{-2t}(x)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_2(x) &= \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot Y\left(\phi_{-t}\left(\phi_{-t}\left(x\right)\right)\right) \\
&= \begin{bmatrix} e^{2\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{2\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot Y\left(\phi_{-2t}\left(x\right)\right) == A(2t) \cdot Y\left(\phi_{-2t}\left(x\right)\right)
\end{aligned}
$$

de même

$$
\begin{aligned}
Z_3(x) &= \left(\phi_t\right)_*^3 Y\left(x\right) = \left(\phi_t\right)_* Z_2(x) \\
&= \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot Z_2\left(\phi_{-t}\left(x\right)\right) \\
&= \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{2\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot Y\left(\phi_{-2t}\left(\phi_{-t}\left(x\right)\right)\right) \\
&= \begin{bmatrix} e^{3\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{3\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot Y\left(\phi_{-3t}\left(x\right)\right) \\
&= A(3t) \cdot Y\left(\phi_{-3t}\left(x\right)\right)
\end{aligned}
$$

Par recurence on aura:

$$
\begin{aligned}
\left(\phi_t\right)_*^m Y(x) &= \begin{bmatrix} e^{m\alpha_1 t} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & e^{m\alpha_n t} \end{bmatrix} \cdot Y\left(\phi_{-mt}(x)\right) \\
&= A(mt) \cdot Y\left(\phi_{-mt}(x)\right) = \left(\phi_{mt}\right)_* Y(x) \quad \textit{pour tout } m \textit{ dans } \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

3.2 Propriétés de la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs

Soit la fonction P définie comme suit:

$$P : Z \in U \subset E \to P(Z) = \exp(X + Z) \circ \exp(-X) \in G \subset D(\mathbb{R}^n) \tag{3.17}$$

3.2.1 La fonction exponentielle d'un champ de vecteurs est douce

Lemme 3.4 *i) Si $f_t - id$ est uniformément bornée alors $g_{-t} - Id$ est uniformément bornée*

ii) La fonction

$$P \ : Z \to P(Z) = \exp(X + Z) \circ \exp(-X) \tag{3.18}$$

est douce

Preuve: i)

$$g_t = (f_t)^{-1} = \left(\phi_{-t} \circ \psi_t\right)^{-1} = \psi_{-t} \circ \phi_t \Rightarrow g_{-t} = (f_{-t})^{-1} = \psi_t \circ \phi_{-t}$$

d'apres la formule (1.37)

$$
\begin{aligned}
g'_t &= -\left(D\psi_{-t}.Z\right) \circ \phi_t \\
g'_{-t} &= (D\psi_t.Z) \circ \phi_{-t} = (D\psi_t.Z) \circ \psi_{-t} \circ g_{-t} \\
g'_{-t} &= ((\psi_t)_*.Z) \circ g_{-t}
\end{aligned}
$$

$$g_{-t} = Id + \int_0^t (\psi_{s*}.Z) \circ g_{-s} ds$$

comme ψ_{t*}opére doucement sur E il existe $C_3(t) > 0$ telle que

$$\|(\psi_{t*} \cdot Z) \circ g_{-t}\|_k^K \leq C_3(t) \|Z\|_{k+r}^{g_{-t}(K)}$$

du fait que g_{-t} est uniformément bornée on a $g_{-t}(K) \subset A$

Il en découle il existe $C_4(t) > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\|(\psi_{t*} \cdot Z) \circ g_{-t}\|_k^K &\leq C_3(t) \|Z\|_{k+r}^{g_{-t}(K)} \\
&\leq C_4(t) \|Z\|_{k+r}^A \text{ tel que} \int\limits_0^{+\infty} C_4(t)dt \text{ converge}
\end{aligned}$$

$$\|g_{-t} - Id\|_k^K \leq \int_0^t \|(\psi_{s*}.Z) \circ g_{-s}\|_k^K ds \leq \|Z\|_{k+r}^A \int\limits_0^t C_4(s)ds$$

ii) Pour $t = 1$ on écrit

$$\begin{aligned}
(f_{-1})^{-1} &= \psi \circ \phi^{-1} = \exp(X + Z) \circ \exp(-X) = P(Z) = g_{-1} \\
\|g_{-t} - Id\|_k^K &\leq \int_0^t \|(\psi_{s*}.Z) \circ g_{-s}\|_k^K ds \leq \|Z\|_{k+r}^A \int\limits_0^t C_3(t)dt \\
\|g_{-1}\|_k^K &\leq C_4 + \int_0^1 \|(\psi_{s*}.Z) \circ g_{-s}\|_k^K ds \leq C_4 + \|Z\|_{k+r}^A \int\limits_0^1 C_3(t)dt \\
\|P(Z)\|_k^K &\leq C_5 \left(1 + \|Z\|_{k+r}^A\right)
\end{aligned}$$

$$\|P(Z)\|_k \leq C_5 \left(1 + \|Z\|_{k+r}^A\right)$$

donc P est douce. ■

3.2.2 Surjectivité de la dérivée de la fonction exponentielle

a) Calcul de $(D_Z P)\, Y$

La fonction $X \mapsto \exp X$ est de classe C^∞, la dérivée de $\exp(X+Z)$ en Z pour X fixé dans la direction de Y est donnée par

$$\begin{aligned} D_Z\left(\exp\left(X+Z\right)\right)\cdot Y &= D\exp\left(X+Z\right)\cdot \int_0^1 \left[\exp\left(t\left(X+Z\right)\right)\right]^* Y\,dt \\ &= \int_0^1 \left[\exp\left(t\left(X+Z\right)\right)\right]_* Y\,dt \circ \exp\left(X+Z\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

On a

$$P(Z) = \psi \circ \phi^{-1} = \widetilde{g} \tag{3.20}$$

donc

$$\begin{aligned} D_Z P.Y &= \int_0^1 \left(\psi_t\right)_* Y\,dt \circ \psi \circ \phi^{-1} \\ &= \int_0^1 \left(\psi_t\right)_* Y\,dt \circ P(Z) \end{aligned}$$

on pose

$$W = \int_0^1 \left(\psi_t\right)_* Y\,dt \in E$$

donc

$$D_Z P.Y = DP(Z).Y = W \circ P(Z)$$

b) Surjectivité de $D_Z P.Y$

Lemme 3.5 ***l'application*** DP ***est surjective***

Preuve: La dérivée de P par rapport à Z dans la direction de $Y \in F$ est définie par :

$$(D_Z P)\, Y = \int_0^1 \left(\psi_s\right)_* Y\,ds \circ \left(\psi \circ \phi_{-1}\right) \in T_{\widetilde{g}} G \tag{3.21}$$

où $\psi_t = \exp t\,(X+Z)$ et T_gG est l'espace tangent de G au point g.

On pose

$$W = \int_0^1 (\psi_s)_* \, Y ds \tag{3.22}$$

d'où

$$D_Z PY = W \circ g_{-1} = W \circ P(Z) \tag{3.23}$$

On a

$$D_Z P : F \rightarrow T_{\widetilde{g}} G = E \circ \widetilde{g} \ \subset G \ \text{ tel que } \ \widetilde{f} \ = (D_Z P)Y = W \circ \widetilde{g}$$

Si $I - (\psi_t)_*$ (resp $I - (\psi_t)^*$)est inversible sur $j_0^k E$ alors la solution de l'équation

$$(D_Z P)Y = W \circ \widetilde{g} \ = \widetilde{f}$$

est donnée par

$$Y = (D_Z P)^{-1} (\widetilde{f}\ ) = VP(Z, \widetilde{f}\ ) = ad_{X+Z} \, (I - \psi_*)^{-1} \, W$$

respectivement.

$$Y = ad_{-(X+Z)} \, (I - \psi^*)^{-1} \, W$$

On doit résoudre l'équation suivante:

$$D_Z \exp{(X+Z)} \exp{(-X)} \, .Y = W \circ \widetilde{g} \tag{3.24}$$

Comme

$$ad_{X+Z} \, (\psi_t)_* \, Y = (\psi_t)_* \, ad_{X+Z} Y = -\frac{d}{dt} \, (\psi_t)_* \, Y \tag{3.25}$$

alors on intègre

$$ad_{X+Z} \int_0^1 (\psi_t)_* \, Y dt = \int_0^1 ad_{X+Z} \, (\psi_t)_* \, Y dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt} \, (\psi_t)_* \, Y dt = (I - \psi_*) \, Y$$

donc

$$ad_{X+Z} \tilde{A} Y = \tilde{A} ad_{X+Z} Y = (I - \psi_*) \, Y = ad_{X+Z} W$$

Puisque $(I - \Psi_*)$ est inversible alors la solution de cette équation sera

$$Y = ad_{X+Z} (I - \psi_*)^{-1} W \tag{3.26}$$

car

$$\begin{aligned} D_Z \exp(X+Z) \exp(-X).Y &= \tilde{A} Y \circ \widetilde{g} = \tilde{A} \left(ad_{X+Z} (I - \psi_*)^{-1} W \right) \circ \widetilde{g} \\ &= \left(\tilde{A} ad_{X+Z} \right) (I - \psi_*)^{-1} W \circ \widetilde{g} \\ &= (I - \psi_*) (I - \psi_*)^{-1} W \circ \widetilde{g} = W \circ \widetilde{g} \end{aligned}$$

■

3.2.3 Propriété de l'inverse à droite de la dérivée de la fonction exponentielle

a) Existence de l'inverse à droite $VP(Y)$

Lemme 3.6 *Soient E un espace de Frêchet doux ;$f_t = \phi_{-t} \circ \psi_t$ uniformément infiniment bornée par rapport à t,*

Si ϕ_t^*(resp $(\phi_t)_*$) opère doucement sur E alors ψ_t^* (resp ψ_{t*}) opère doucement sur E et $\psi^* - I$ est doucement inversible sur E

Preuve: Montrons que les séries suivantes convergent

$$\begin{aligned} (I - \psi_t^*)^{-1} Y(x) &= \sum_{m \geq 0} \psi_{mt}^* Y(x) \\ &= -\sum_{m \geq 0} \left(\psi_{-mt} \right)_* Y(x) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Supposons que ϕ_t^* (resp ϕ_{-t}^*) opère doucement sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,nous savons que si ϕ_t^*(resp $(\phi_t)_*$) opère doucement sur Ω alors ψ_t^* (resp ψ_{t*}) opère aussi doucement sur Ω

Puisque f_t est infiniment uniformément bornée sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alors ,soit K un compact de Ω

$$\begin{aligned}
\|\psi_{mt}^* Y\|_k^K &= \left\| (Df_{mt})^{-1} . (\phi_{mt}^* Y) \circ f_{mt} \right\| \\
&= \|f_{mt}^* \circ \phi_{mt}^* Y\|_k^K \leq C_0 \|(\phi_{mt}^* Y) \circ f_{mt}\|_k^K \\
&\leq C_1 \|\phi_{mt}^* Y\|_k^{f_{mt}(K)}
\end{aligned}$$

Puisque $\|f_t(x) - x\| \leq \varepsilon$ dans Ω alors $f_t(\Omega) \subset \Omega + B_\varepsilon = E^\epsilon$, $\forall t \geq 0$.

Donc

$$\|\psi_{mt}^* Y\|_k^\Omega \leq C_2 \|\phi_{mt}^* Y\|_k^{E^\epsilon} \tag{3.28}$$

Comme ϕ_t^* opère doucement sur E ,on a

$$\|\psi_t^* Y\|_k^\Omega \leq C_2 \|\phi_t^* Y\|_k^{E^\epsilon} \leq C_3(t) \|Y\|_{k+r}^{E^\epsilon} \text{ tel que } \int_0^{+\infty} C_3(t) dt \text{ converge} \tag{3.29}$$

et donc

$$\|\psi_{mt}^* Y\|_k^\Omega \leq C_3(mt) \|Y\|_{k+r}^{E^\epsilon} \text{ tel que } \int_0^{+\infty} C_3(mt) dt \text{ converge } , \forall m \geq 0 \tag{3.30}$$

D'après le critère de comparaison d'une série avec son intégrale,

$$\sum_{m \geq 0} C_3(mt) \text{ converge}$$

or

$$\sum_{m \geq 0} \|\psi_{mt}^* Y\|_k^\Omega \leq \|Y\|_{k+r}^{E^\epsilon} \sum_{m \geq 0} C_3(mt) \tag{3.31}$$

et d'après le critère de Weirestrass, on déduit que la série

$$\sum_{m \geq 0} \psi_{mt}^* Y(x) \text{ converge normalement sur } \Omega$$

par suite il existe une constante $C_1' > 0$ telle que

$$\sum_{m \geq 0} \|\psi_{mt}^* Y\|_k^\Omega \leq C_1' \|Y\|_{k+r}^\Omega$$

donc

$$\left\|(\psi_t^* - I)^{-1} Y\right\|_k \leq \sum_{m \geq 0} \|\psi_{mt}^* Y\|_k^\Omega \leq C_1' \|Y\|_{k+r}^\Omega$$

D'où $\psi_t^* - I$ est douce

D'un autre coté $\psi^* - I$ est inversible car

$$(\psi_t^* - I)\left(\sum_{m \geq 0} \psi_{mt}^* Y(x)\right) = \sum_{m \geq 1} \psi_{mt}^* Y(x) - \sum_{m \geq 0} \psi_{mt}^* Y(x) = Y(x) = \left(\sum_{m \geq 0} \psi_{mt}^* Y(x)\right)(\psi_t^* - I) \tag{3.32}$$

Par un même raisonnement on montre que $(\psi_t)_* - I$ est douce et inversible ■

b) L'inverse à droite $VP(Y)$ est doux

Lemme 3.7 ***La famille des inverses*** $VP : j_0^k E \times G \rightarrow F$ ***est une application régulière douce .***

Preuve: on a

$$Y = (D_Z P)^{-1} (\widetilde{f}) = VP(Z, \widetilde{f}) = ad_{X+Z} (I - \psi_*)^{-1} W \tag{3.33}$$

avec

$$\widetilde{f} = W \circ \widetilde{g} \Longrightarrow W = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}^{-1}$$

comme $g_t = \psi_t \circ \phi_{-t}$ alors $(g_t)^{-1} = \phi_t \circ \psi_{-t}$ d'où

$$W = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}^{-1} = \widetilde{f} \circ \phi \circ \psi_{-1} \tag{3.34}$$

et

$$\begin{aligned} Y &= (D_Z P)^{-1} (\widetilde{f}) = ad_{X+Z} (I - \psi_*)^{-1} \widetilde{f} \circ \phi \circ \psi_{-1} \\ Y &= (D_Z P)^{-1} (W) = ad_{X+Z} (I - \psi_*)^{-1} W \end{aligned} \tag{3.35}$$

D'après les formules d'interpolations de Hamilton ,on déduit qu'il existe des constantes $C_k > 0$ telles que

$$\|Y\|_r^K = \left\|ad_{X+Z} (I - \psi_*)^{-1} W\right\|_r^K \leq C_0 \left\|(I - \psi_*)^{-1} W\right\|_{r+1}^K$$

$$\left\|(I-\psi_*)^{-1}\widetilde{f}\circ\widetilde{g}^{-1}\right\|_{r+1}\leq C_1\left\|\phi\circ\psi_{-1}\right\|_1^r\left(\left\|(I-\psi_*)^{-1}\widetilde{f}\right\|_r\left\|\phi\circ\psi_{-1}\right\|_1+\left\|(I-\psi_*)^{-1}\widetilde{f}\right\|_1\left\|\phi\circ\psi_{-1}\right\|_r\right)$$

$$\left\|(I-\psi_*)^{-1}\widetilde{f}\right\|_{r+1}\leq C_2\left(\left\|(I-\psi_*)^{-1}\right\|_{r+1}\left\|\widetilde{f}\right\|_0+\left\|(I-\psi_*)^{-1}\right\|_0\left\|\widetilde{f}\right\|_{r+1}\right)$$

$$\left\|(I-\psi_*)^{-1}\right\|_{r+1}\leq C_3\left(1+\|I-\psi_*\|_{r+1}\right)$$

d'où

$$\|Y\|_r^K=\|VP\,(Z)\,(W)\|_r^K\leq C_4\,\|W\|_{r+1}^K$$

donc $VP: U\times G\to F$ est une application douce ■

3.3 Inversibilité de la fonction exponentielle par le théorème de Nash-Moser

Théorème 3.1 *(cf : [11])Soient F et G deux espaces de Frêchet doux et $P: U\subseteq F\to G$ une application douce C^∞Supposons que DP est surjective et que la famille des inverses à droites $VP: U\times G\to F$ est douce et de classe C^∞ ,alors P est locallement surjective, de plus dans un voisinage de tout point , P admet un inverse à droite doux et de classe C^∞.*

Corollaire 3.1 *Soit $X_0\in E$, et $P: Z\in U\subset E\subset\!\!\to P(Z)=\exp\left(X_0+Z\right)\circ\exp\left(-X_0\right)\in G$*

P est localement surjective

P admet un inverse à droite doux et de classe C^∞

Preuve: Appliquons les théorème de Nash-Moser:

Toutes les hypothéses de Nash-Moser sont remplies par les propriétés de la fonction exponentielle , alors P admet un inverse à droite doux et de classe C^∞ ■

Chapitre 4

Applications

4.1 Stabilité douce de degré r et de base b sur un espace de Frêchet

Définition 4.1 *Soit Y un champ de vecteurs dans l'espace de Frêchet $E = \chi(M)$*

Soit

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R} \times E \to Diff(M) \\ (t, Y) & \longmapsto & F(t, Y) = F_t(Y) \text{ tel que } F_t(0) = 0 \end{array} \tag{4.1}$$

La fonction $F_t(Y)$ est doucement stable de degré r et de base b, à l'origine O dans l'espace de Frêchet E si et seulement si $\forall K \subset \mathbb{R}^n, (0 \in K), \ \forall Y \in E, \ \forall n \geq b$, il existe deux fonctions Θ et Ξ vérifions

$$\|F_t(Y)\|_n^K \leq \Theta(t).\Xi\left(\|Y\|_{n+r}^K\right) \tag{4.2}$$

où Ξ est une fonction définie continue monotone croissante sur $[0, \delta]$ et telle que $\Xi(0) = 0$. et Θ est une fonction définie continue monotone décroissante pour tout $t \geq t_0$ et telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \Theta(t) = 0$.

Proposition 4.1 *Soient les systèmes dynamiques suivants:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\phi_t)_* Y = ad_{-X}((\phi_t)_* Y) \\ (\phi_t)_* Y|_{t=0} = Y \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\phi_t)^* Y = ad_X((\phi_t)^* Y) \\ (\phi_t)^* Y|_{t=0} = Y \end{cases} \tag{4.4}$$

où Y est un champ de vecteurs dans l'espace de Frêchet $E = \chi(M)$ et $(\phi_t)_*$ opère doucement sur E de degré r et de base b alors l'origine 0 est un point d'équilibre doucement stable de degré r et de base b pour le flot $\phi_{t*}Y$.

Preuve: Comme $(\phi_t)_*$ opère doucement sur E de degré r et de base b, il existe alors un entier $l_k = k + r \geq k$ et une fonction $C_k(t, x)$ continue, positive définie sur $]0, +\infty[\times\Omega$ telle que

$$\|(\phi_t)_* Y(x)\|_k^\Omega \leq C_k(t,x) \|Y\|_{l_k}, \ t > 0, k \geq 0 \text{ pour tout } Y \in E, \ k \geq b \tag{4.5}$$

et

$$\int_0^{+\infty} C_k(t,x)\, dt \text{ converge uniformément, } \forall x \in \Omega$$

Pour x fixé dans Ω, posons $\Theta(t) = C_k(t,x)$ et $\Xi(x) = x$,$\forall x > 0$ alors Ξ est une fonction continue définie monotone croissante sur $[0, \delta]$ telle que $\Xi(0) = 0$ et $\Theta(t) = C_k(t,x)$ tel que $\int_0^{+\infty} C_k(t,x)\, dt$ converge uniformement, $\forall x \in \Omega$ donc $\Theta(t)$ est une fonction définie continue monotone décroissante pour tout $t \geq 0$ et telle que $\lim_{t\to+\infty} \Theta(t) = 0$ (condition nécessaire pour la convergence des intégrales impropres du 1^{er} espèce).

D'apres la définition le système dynamique est stable au voisinage de 0

Le même raisonnement pour le deuxième système ∎

4.2 Surjectivité locale de l'opérateur ad_X par un difféomorphisme adjoint sur χ_0^∞

Soit un germe X localement lipschitzien sur U ayant pour flot ϕ_t et soit un autre germe$Z$ sur U , on pose $Y_t = (\phi_t)_* Z,\ Y_0 = Z$

alors

$$\frac{d}{dt} Y_t = [Y_t, X] = ad_X (Y_t) \tag{4.6}$$

et par intégration on obtient

$$Y_t = Z + \left[\int_0^t Y_s ds, X \right] \tag{4.7}$$

Si la variable t varie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$; alors on remplace le germe X par un autre germe $f_* X$ où f est une fonction de classe C^∞ à support compact dans le voisinage U vérifiant

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur un voisinage de l'origine } 0 \\ \quad 0 \ \text{ sur } U - \{0\} \end{cases} \tag{4.8}$$

Lemme 4.1 *i)* $\lim\limits_{t \to +\infty} Y_t = 0.$

ii) $Y(x) = \int\limits_0^{+\infty} Y_t(x) dt$ *converge et* Y *est de classe* C^∞ *au voisinage de* 0

La solution Y *de l'équation* $Z = [X, Y]$ *est donnée par*

$$Y = -(ad_X)^{-1} Z = \int_0^{+\infty} (\phi_t)_* Z dt \tag{4.9}$$

Preuve: On peut trouver ce résultat par la méthode de la résolvante dans l'espace de Frêchet E :

$$\begin{aligned} R(\lambda, ad_X) Z &= (\lambda I - ad_X)^{-1} Z \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\phi_t)_* Z dt \ \ , \ \forall X, Z \in E \text{ et } \forall \operatorname{Re} \lambda > 0 \end{aligned}$$

comme cette intégrale converge uniformément sur E et si l'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} (\phi_t)_* Zdt$ converge dans E alors en faisant tendre λ vers 0 on obtient

$$Y = -(ad_X)^{-1} Z = \int\limits_{0}^{+\infty} (\phi_t)_* Zdt$$

■

Exemple 4.1 *Soit le champ de vecteurs* $X_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *qui engendre un groupe à un paramétre* t

$$\begin{aligned} \phi_t^1(x) &= \left(\phi_{1,1}(t,x), ..., \phi_{1,n}(t,x)\right) \\ &= \left(x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t}\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Soit $Z \in X_0^\infty$ *un champ de vecteurs infiniment plat au voisinage de* 0

$$Z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.11}$$

il existe un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi_0^\infty \\ &= -(ad_{X_1})^{-1} Z = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\phi_t^1\right)_* Zdt \end{aligned} \tag{4.12}$$

qui est solution de l'équation

$$Z = ad_{X_1}(Y) = [X_1, Y] \tag{4.13}$$

en coordonnées ,on écrit

$$u_i(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{0}^{+\infty} ((\phi_t^1)_* Z)_i dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha_i t} \cdot f_i\left(x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t}\right) dt \tag{4.14}$$

Exemple 4.2 *Soit le champ de vecteurs* $X_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{1+mi} \frac{\partial}{\partial x_i}$ *avec* $m_i > 0$ *alors il engendre un groupe à un paramètre* t

$$\phi_t^2(x) = \left(\phi_{2,1}(t,x), ..., \phi_{2,n}(t,x)\right) \tag{4.15}$$

avec

$$\phi_{2i}(t,x) = \left(x_i^{-mi} - \beta_i m_i t\right)^{-\frac{1}{m_i}} \tag{4.16}$$

soit Z *un champ de vecteurs dans* χ_0^{∞},

$$Z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

il existe un champ de vecteurs

$$Y = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = -\left(ad_{X_2}\right)^{-1}(Z) = \int_0^{+\infty} \left(\phi_t^2\right)_* Z dt \tag{4.17}$$

solution de l'équation

$$Z = ad_{X_2}(Y) = [X_2, Y] \tag{4.18}$$

en coordonnées s'écrit:

$$u_i(x_1, ..., x_n) = \int_0^{+\infty} ((\phi_t^2)_* X)_i dt = \int_0^{+\infty} \left(1 + \beta_i m_i t \ x_i^{mi}\right)^{1+\frac{1}{m_i}} f_i\left(\phi_{-t}^2(x)\right) dt \tag{4.19}$$

Bibliographie

[1] Arnold.V.Chapitres suplémentaires sur les équations différentielles ordinaires. Ed; Mir (Moscou)1980

[2] Benalili .M,Linearization of vector fields and embedding of diffeomorphisme in flows via Nash-Moser theorem ,Journal of Geometry and Physics61(2011)62-76

[3] Benalili .M, et A. Lansari, Ideals of finite codimention in contact Lie algebra, Journal of Lie theory vol11,n°1(2001), p129-134.

[4] Benalili .M, et A. Lansari, Une propriété des idéaux de codimension finie des algèbres de Lie de champs de vecteurs ,Journal of Lie Theory Volume **15,1** (2005) 13-25.

[5] Benalili .M, et A. Lansari, Spectral properties of the adjoint operators and applications ,Lobachevskii Journal of mathematics Vol. **18** (2005), 33-51.

[6] Benalili .M, et A. Lansari, Global Stability of Dynamic Systems of high Order SIGMA journal Vol **3** (2007),21pages.

[7] Bourbaki. N, Elément de mathématiques. Fasicule XXVI. Groupes et algèbres de Lie, Hermann(Paris 1971)

[8] Brezis.H, Analyse fonctionnelle. Masson et cie, Paris 1983

[9] Dunford. N, J.Schawartz. Linear operator. Part I, Inter Science, New York 1958.

[10] Hahn.W,Stability of motion ,Springer-Verlag,New York ,1967

[11] Hamilton.R.S ,The inverse function theorem of Nash and Moser .Bull.Amer Math.soc.7 (1982), 65-222.

[12] Nelson.E,Topics in dynamics,I.Flows,Princeton Univ Press,Princeton,(1969)

[13] Lansari.A, Idéaux de codimension finie en algèbre de Lie de champs de vecteurs Demenstration mathematica Vol xxv No3 1992

[14] Lansari. A, Stabilité dynamique globale d'ordre superieur et proprietés spectrales des opérateurs adjoints,DThèse de doctora d'ETAT soutenue à l'Universitée d'Oran (Octobre 2004).

[15] Reinhard.H, Equations différentielles Gauthier .Villars(1982)

[16] Palis,J.Vector fileds generate few diffeomorphisms,Bull,Amer Math,Soc,80,30(1974),503-505.

[17] Pazy. A, Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[18] Pursell. L.E, Shanks. M. E ,The Lie algebra of smooth manifolds, Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954) 468-472.

[19] Zajtz. A, Calculus of flows on convenient manifolds Archivum math ,32,4(1996),335-372

[20] Zajtz. A, Gorowski. On a class of linear differential operators of first order with singular point. Rocznik WSP Krakow. Prace matematycyne 189(1997),129-140.

[21] Zajtz. A,Global version of a Sternberg linearisation theorem, Prace mathemathycyne ,204(2000),265-269.

[22] Zajtz. A.Embedding diffeomorphisms in a smooth flow.Trudy of international conference.Invariant methods on manifolds with structuresl of geometrical analysis and mathematical physics,Moskou (2001).77-90

[23] Zajtz.A, On the Global Conjugacy of Smooth Flows, Proc. Inst. Math. NAS Ukr. 30 (2000) 465–472.

[24] Zajtz.A, Some division theorems for vector fields,ann.Polon,Math.58(1993),19-28.

[25] Chicone.C, R. Swanson, Linearization via the Lie derivative, Electron. J. Differ. Equ. Monogr. 02 (2000).

[26] Grobman.D, Homeomorphisms of systems of differential equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 128 (1959) 880–881.

[27] Hartman.P, A lemma in the theory of structural stability of differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) 610–620.

[28] Hartman.P, On the local linearization of differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 568–573.

[29] Sell.G, Smooth linearization near a fixed point, Amer. J. Math. 107 (1985) 1035–1091.

[30] Koppel.N, Commuting diffeomorphisms of the circle, in: Sixth Brazilian Math. Colloq., 1970, pp. 18–22.

[31] Sternberg.S, On the structure of local homomorphisms of Euclidean n-spaces. II., Amer. J. Math. 80 (1958) 623–631.

[32] Grabowski.J, Free subgroups of diffeomorphism groups, Fund. Math. 131 (1988) 103–121.

[33] Grabowski.J, Derivative of the exponential mapping for infinite dimensional Lie groups, Ann. Global Anal. Geom. 11 (1993) 213–220.

[34] Wintner .E,Bounded matrices and linear differential equations, Amer.J Math. 79(1957), 139-151.

Résumé :

L'inversibilité de la fonction exponentielle a été étudiée par N.Kopell (1970) et M.I.Bryn (1974) qui ont donné des résultats négatifs et par J.Palis ,S.Smale (1969) ,J.Grabowski (1988) et A.Zajtz (2001) qui ont donné des résultats positifs. On a prolongè ces résultats pour des X-flots qui opèrent doucement sur un espace de Frêchet.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Dans le premier chapitre,on a donné des rappels sur les espaces de Frêchet et leurs propriétés. Dans le deuxième chapitre on définit les propriétés de la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs ,en particulier : sa X-dérivation, son développement en série entière au voisinage de zéro, le développement en série de Fourier. Dans le troisième chapitre on applique le Théorème de Nash-Moser des fonctions implicites pour définir l'inversibilité de la fonction exponentielle.Enfin dans le quatrième chapitre, les caractéristiques des opérateurs adjoints permettent de définir:la stabilité douce de degré r et de base b dans les espaces de Frêchet de certains systèmes dynamiques. Les idéaux de codimensions finies dans les espaces de Frêchet ayant une structure hyperbolique.

Motes clés : Espaces de Frêchet, champ de vecteurs, structure hyperbolique

Nash-Moser,X-dérivation,stabilité douce de degré r et de base b, système dynamique.

Abstract:

The invertibility of the exponential function was studied by N.Kopell (1970) and M.I.Bryn (1974) which gave negative results and J.Palis, S.Smale (1969) J.Grabowski (1988) and A . Zajtz (2001) which gave positive results. We extended these results to the X-Flows which operate smoothly on a Fréchet space.

This thesis is divided into four chapters. In the first chapter, we gave reminders on Frechet spaces and their properties. In the second chapter we define the properties of the exponential function of a vector field , in particular: Its X-derivation ,its series expansion around zero, its development in Fourier series. In the third chapter the Nash-Moser theorem of implicit function is applied to define the invertibility of the exponential function. Finally, in the fourth chapter, the characteristics of adjoint operators allow us to define: Tame stability of degree r and base b in Frechet spaces of certain dynamical systems,The ideals of finite codimension in Fréchet spaces having a hyperbolic structure.

Key words: Fréchet spaces, vector field, Nash-Moser, X-derivative, tame stability of degree r and base b, dynamic system, hyperbolic structure.

ملخص: تم دراسة الدالة العكسية للدالة الأسية لتدفق الأشعة من قبلN.Kopel (1970) وM.I. Bryn (1974) الذين أعطوا نتائج سلبية وJ.Palis، S.Smale (1969) J.Grabowski (1988) وA.Zajtz (2001) الذين أعطوا نتائج إيجابية . في هذه الدراسة قمنا بتمديد هذه النتائج إلى X-تدفق التي تعمل بسلاسة على فضاء Frêchet

الكلمات الرئيسية : فضاءFréchet ، الدالة الأسية ، X -اشتقاق لتدفق الأشعة ، الاستقرار: درجة r وقاعدة b ، نظام ديناميكي والبناء القطعي ,Nash-Moser .