Table des Matières

Introduction generale sur les distributions

les distributions sont des fonctions généralisées elles ont été introduit pour modéliser des phénomènes pour lesquels les fonctions classiques ne sont pas pratiques à utiliser.

En fait, il y a plusieurs raisons pour introduire les distributions (des raisons purement physiques et des raisons plus mathématiques)

Considérant l'exemple d'un signal physique d'une très grande intensité sur une très petite région de l'espace(par exemple une charge électrique concentrée au voisinage d'un point)

Supposons que la quantité totale de la charge est égale à 1, elle est modélisée par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \in [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ sinon } n \quad \text{n assez grand non determinées} \end{cases}$$

Le physicien P. Dirac a introduit la fonction appelée "fonction" de Dirac delta défini par : $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

1)$\delta(0) = +\infty$

2)$\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$

3)$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\ dx = 1$

Dirac considère cette fonction de Dirac comme lim $f(x)$ quand $x \to +\infty$, mais l'existence d'une telle fonction contredit la théorie d'intégration au sens de Lebesgue car :

$\delta(x) = 0, \forall x \neq 0 \Rightarrow \delta = 0$ pp sur $\mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\ dx = 0$ ce qui contredit

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$$

D'où la nécessité d'introduire une limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ qui sorte du cadre usuel des fonctions classiques , cette limite sera une distribution.

Considérant un autre exemple : la mesure relativement courante comme la température d'un fil rectiligne en un point donné.

Il est évident que cette mesure n'est pas réalisable parfaitement en un point , une mesure réaliste consisterait à tenir compte des températures au voisinage du point considéré x_0, selon une fonction de sensibilité ϕ_0 de telle sorte que pour une fonction de répartition $T(x)$ de la température le long de la barre on ait :

$$T_0 = \int T(x)\phi_0(x)\ dx$$

en un autre point x_1, on aurait

$$T_1 = \int T(x)\phi_1(x)\ dx$$

où $T, \phi_0, \phi_1, ...$fonctions assez reguliéres.

d'où l'ecriture

$$< T, \phi > \ = \int T(x)\phi(x)\ dx \tag{1}$$

$si\ x \rightarrow T(x)\phi(x)$ est Lebesgue integrable, l'écriture (1) mais en général en physique (1) est singulière

D'où l'idée de ne garder que l'indispensable de (1) en considérant un ensemble de fonctions ϕ représentant de manière coherente toutes les mesures d'une grandeur physique donnée qu'il est possible d'effectuer.

L'ensemble de ses fonctions s'appelle. "$fonction\ test$" ou fonction d'essai et la mesure de la grandeur physique T est alors représentée par $< T, \phi >$ indépendamment de la forme intégrale de cette expression..

L'ensemble des grandeurs T "mesurables" par les fonctions tests s'appelle alors ensemble des distributions.

Cet ensemble doit avoir un minimum de propriétés :

1/ il doit être un espace vectoriel des fonctions.

2/ il doit être un ensemble de formes linéaires sur l'espace vectoriel des fonctions.

3/ le résultat de la mesure de T par ϕ est$< T, \phi >$...

Dans ce memoire nous commencons par rappeler les notions essentiels sur les distributions puis nous presentons des resultats d'existence et d'unicité de solution des EDO dans le cadre des distributions et nous terminons par les resultats d'existence et d'unicité de solution pour les EDO continus par morceaux ,ce travail s'inspire essentiellement de la these" S.Trenn"

Chapitre 1

.

1.0.1 Quelques rappels sur les distributions

Définition 1.0.2 *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$*
On defini les fonctions tests $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ sont supposées de classe C^∞ et nulles en dehors d'un intervalle borné .
L'ensemble de ces fonctions est noté par $D(.\Omega)$

Définition 1.0.3 *Une distribution T sur Ω est une application*

$$\begin{array}{ccc} T & : & D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi & \to & T(\varphi) \end{array}$$

tel que
i/T est linéaire i.e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$
$T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) =.\alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$

ii/pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une constante c>0 et $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|T(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha|=0}^{k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \ \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega)$$

où $\partial^\alpha \varphi(x)$ designe le dérivée d'ordre α de φ
$D_k(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tel que supp$\varphi \subset K\}$ ou suppφ designe le support deφ.

Définition 1.0.4 *soit k un entier naturel, une distribution T surΩ est dite d'ordre inférieur ou égal à k si pour tout compact $A \subset \Omega$, il existe $c > 0$ telle que:*
$|T(\varphi)| \leq c \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in D_k(\Omega)$

Définition 1.0.5 *l'espace vectoriel des distributions sur* Ω *est noté* $D'(\Omega)$

Cette notation est justifiée par le fait qu'une distribution est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$*ie* $D'(\Omega)$ *est dual de* $D(\Omega)$

Remarque 1.0.6 *L'espace des distributions* $D'(\Omega)$ *est aussi un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$*, on a en particulier*

$$T = 0 \Leftrightarrow < T, \varphi >= 0, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

i.e qu'une quantité physique et nulle ssi n'importe quelle mesure représentée par φ *est nulle.*

L'ensemble des distributions d'ordre inférieur ou égal à k *est noté par* $D'^k(\Omega)$.

Définition 1.0.7 *a/ une fonction* f *est dite localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle borné fini,on note par* L^1_{loc}*. l'ensemble de ces fonctions .*

b/à toute fonction localement intégrable, on associe la distribution définie par

$$< T_f, \varphi >: \quad = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\ dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

soient deux fonctions localement intégrables f et g p.p sur $\mathbb{R}$ tel que $f = g$ p.p sur $\mathbb{R}$ alors $T_f = T_g$.

on a aussi le resultat important

Théorème 1.0.8 $T_f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ *pp sur* $\mathbb{R}^n$

Définition 1.0.9

Une distribution T est dite régulière si elle est associée à une fonction localement intégrable f.

Exemple 1.0.10 ***(distribution de Heaviside)***
La fonction de Heaviside est donnée par

$$H : x \rightarrow \begin{cases} 0 \ si\ x < 0 \\ 1 \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On définit la distribution de Heaviside qui est réguliere par :

$$< H, \varphi > \quad = \int\limits_{\mathbb{R}_+} 1\varphi(t)\ dt \quad , \text{ elle est de support } \mathbb{R}_+$$

Définition 1.0.11 *toute distribution qui n'est pas régulière est dite non régulière.*

Remarque 1.0.12 ***(distribution de Dirac)***
Elle est à l'origine de la théorie des distributions ,on note :

$$< \delta, \varphi >= \varphi(0)$$

On utilise aussi ses translatées définies par:

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

Exemple 1.0.13 ***(distribution valeur principal)***
La fonction $x \to f(x) = \frac{1}{x}$ *n'est pas localement intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car sinon on prend* $0 \in [a, b]$ *compact de* $\mathbb{R}$ *.on a*

$$\int_a^0 \frac{dx}{x} + \int_0^b \frac{dx}{x} \quad \text{qui} \quad \text{diverge}$$

Cependant on lui associe une distribution appelée valeur principal de $\frac{1}{x}$ *notée* $vp(\frac{1}{x})$ *pout tout* $\varphi \in D(\Omega)$ *,on pose:*

$$vp(\frac{1}{x}) : D(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$x \to < vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

la $vp(\frac{1}{x})$ *est exactement d'ordre 1, elle n'est pas d'ordre 0.*

Définition 1.0.14 ***(distribution d'ordre infini)***
soit T *l'application définie par*

$$\begin{array}{ccc} T & : & D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ c & \to & T(\varphi) \end{array}$$

avec $T(\varphi) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \varphi^{(j)}(j)$.

Définition 1.0.15 ***(la partie fini de $\frac{1}{x^2}$)***
On définit une distribution à partir de la fonction

$$x \rightarrow \begin{cases} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x^2} \ si \ \ |x| > \varepsilon \\ f_\varepsilon(x) = 0 \ si \ x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

comme $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + ...$

pour tout $\varepsilon > 0$ on a:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x^2} dx &= -2 + 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \\ et \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{x\varphi'(0)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{x\varphi'(0)}{x^2} dx &= 0 \end{aligned}$$

La partie divergente de $< \widetilde{f}, \varphi > = 2\frac{\varphi'(0)}{\varepsilon}$
on peut donc définir la distribution de $\frac{1}{x^2}$ comme limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ de $\widetilde{f}_\varepsilon$ moins sa partie divergente i.e:

$$< pf(\frac{1}{x^2}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

1.0.16 Support d'une distribution

On introduit pour les distributions une notion de support qui est aussi la notion du support pour les fonctions classiques .
1)soit $T \in D'(\Omega)$ et soit ω un ouvert de Ω, on dit que T est nulle dans ω si $T(\varphi) = 0$ Pour tout élément $T \in D_\omega(\Omega)$, on peut écrire

$$< T, \varphi >= 0 \ \forall \varphi \in D(\Omega) \text{ tel que supp}(\varphi) \subset \Omega$$

on a la propriété suivante qui nous dit qu'une fonction f est nulle p.p sur un ensemble ssi elle est nulle comme distribution sur ce meme ensemble .

Proposition 1.0.17 *soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors:*

$$f = 0 \text{ pp sur } \Omega \Leftrightarrow T_f = 0 \text{ sur } \Omega$$

Exemple 1.0.18 *$T_H = 0$ sur tout ouvert $\Omega \subset]-\infty, 0[$ avec $T_H := \langle H, \varphi \rangle$.*

2)soit $T \in D'(\Omega)$; le support de T (qu'on note suppT) est par définition le complémentaire du plus grand ouvert ou T est nulle.

Exemple 1.0.19 *soit $a \in \mathbb{R}^n$,alors supp $(\delta_a) = \{a\}$*

1.0.20 Convergence dans $D'(\Omega)$

Définition 1.0.21 *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,T une distribution sur Ω et $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de distribution sur Ω, on dit que T_j converge vers T quand $j \to +\infty$ au sens des distributions ssi :*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), < T_j, \varphi > \underset{j\to+\infty}{\to} < T, \varphi >$$

Théorème 1.0.22 *si T_j est une suite de distributions sur Ω telle que $T_j \to T$ quand $j \to +\infty$*

$\forall \varphi \in D(\Omega)$ alors

$$< T, \varphi >= \lim_{j\to+\infty} < T_j, \varphi >$$

Remarque 1.0.23 *si cette distribution limite T existe alors elle est unique.Du point de vue expérimental, cette limite au sens des distributions veut dire que pour j suffisament grand, la mesure par ϕ de T_j donne pratiquement la même valeur que celle de T et il n'est plus possible de distinguer expérimentalement ces deux distributions.*

suite de fonctions de convergentes vers δ

Proposition 1.0.24 *Soit*$\{f_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions positives intégrables tels que* $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) = 1$ *et* $f_n(x) = 0$ *en dehors de* $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *Alors la suite des distributions régulières définies par* f_n *tend vers* δ *quand* $n \to +\infty$

Théorème 1.0.25 *Soit* f *une fonction intégrable tel que* $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 1$ *et soit* $\varepsilon > 0$ *, on définit la distribution régulière* $f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon})$

alors $f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to+0}{\to} f$ au sens des distributions.

Remarque 1.0.26 *on voit alors d'après ces deux derniers resultats qu'il est possible d'approcher une distribution aussi singulière que* δ *par des distributions trés" régulières" par dilatation, on dit que* $D(\Omega)$ *est dense dans* $D^{'}(\Omega)$.

1.0.27 Multiplication des distributions par des fonctions

Il n'est pas possible de définir le produit de deux distributions quelconque entre elles (sauf pour quelques cas particuliers)

C'est un des points"faible" de la théorie des distributions et ceci limite leur utilisation à un certain cadre de travail.

1) *pour* $f \in L^1_{loc}(\Omega), \Omega$.ouvert de $\mathbb{R}^n$
et $g \in C^\infty$ on a $(gf)(x) = g(x).f(x)$
et $\forall\varphi \in D(\Omega) : \int\limits_{\Omega}(gf)\varphi = \int\limits_{\Omega} f(g\varphi)$

2)$\forall\varphi \in D(\Omega) < gT, \varphi >=< T, g\varphi >$

1.0.28 Opérations élémentaires sur les distributions

Soient f et g deux fonctions localement intégrables et $\varphi \in D(\Omega)$ on a

1) $< f + g, \varphi >=< f, \varphi > + < g, \varphi >$
2) $< \lambda f, \varphi >= \lambda < f, \varphi >, \forall\lambda \in \mathbb{C}$
3) $< \mu f, \varphi >=< f, \mu\varphi >, \forall\mu$ fonction C^∞
et pour utiliser ces résultats, on définit pour deux distributions T_1 et T_2
4) $< T_1 + T_2, \varphi >=< T_1, \varphi > + < T_2, \varphi >$
5) $< \lambda T_1, \varphi >= \lambda < T_1, \varphi >$,$\forall\lambda \in \mathbb{C}$
6) $< \mu T_1, \varphi >=< T_1, \mu\varphi >, \forall\mu$ fonction C^∞

Exemple 1.0.29 *pour* $\alpha \in C^\infty : \alpha\delta = \alpha(0)\delta$

1.0.30 dérivation des distributions

C'est une opération qui est possible autant de fois que l'on veut sur les distributions. on a pour :

1)$f \in C^\infty(I)$ et I un ouvert de $\mathbb{R}^n$,$\forall\ \varphi \in D(I)$

$$< f', \varphi >= \int f'\varphi = -\int f\varphi' = - < f, \varphi' >$$

(On obtient cette propriété par l'intégration par parties.)

2)si $f \in C^\infty(\Omega)$,Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a :

$\forall f \in D(\Omega)$ $\int(\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int f(\partial^\alpha \varphi)$

$\forall \varphi \in D(\Omega)$ $< \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < f, \partial^\alpha \varphi >$

Exemple 1.0.31 *calculons la dérivée au sens des distributions de*

$$H(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ 1 \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

on a $\forall \varphi \in D(\Omega)$:

$< (T_H)', \varphi >= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\ dx = \varphi(0)$

$\Rightarrow (T_H)' = \delta$

ie $H' = \delta$ *au sens des distributuions*

En suivant le meme type de calculs :

2)$< (\ln(x))', \varphi >=< vp(\frac{1}{x}), \varphi >$

3) $< (vp(\frac{1}{x}))', \varphi >= - < pf(\frac{1}{x^2}), \varphi >$

4) $< (\delta)', \varphi >= -\varphi'(0)$

Théorème 1.0.32 ***: formule des sauts :***

Soit $f \in C^1$ par morceaux, on suppose pour simplifier qu'elle a une seule discontinuite en un point a alors on a :

$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sigma_a\delta_a.$

ou δ_a designe le saut fini de la fonction f au point a

i.e $\delta_a := \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+}[f(a+\varepsilon) - f(a-\varepsilon)]$

et $T_{\{f'\}}$ designe la distribution réguliere associée a la fonction définie par $x \to f'(x)$

la generalisation est immediate au cas ou f admet N sauts aux points $a_i, i = 1, ..., N$ on a :

où δ_{a_i} designe le saut de f au point $a_i, i = 1, ..., N$
$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}$.
où δ_{a_i} designe le saut de f au point $a_i, i = 1, ..., N$

On remarque que toute distribution peut etre derivée et , pour les fonctions derivables par morceaux possedant des sauts , la dérivée comporte des distributions de Dirac.

1.1 Produit de convolution

il est utile pour resoudre les equations differentielles, il est defini par:

Soient f et g deux fonctions ,on appelle produit de convolution de f et g on note le produit de convolution par: $f * g$ la fonction $f * g : \Omega \to \mathbb{C}$ definie par :

$(f * g\ )(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x) g(y) dy.$

cet produit de convolution existe en general pp sur $\mathbb{R}^n$

Proposition 1.1.1 *Le produit de convolution est commutatif*

Remarque 1.1.2 *Il est utile d'introduire la convolution aux distributions et comme pour les autres operations ,on veut donner un sens à $T * S$ ou T et S sont deux distributions et en meme temps garder les proprietés des convolutions pour les fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ on pose alors:*

$$\begin{aligned}\langle T_f * T_g, \varphi\rangle = \langle T_{f*g}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - t) g(t) \varphi(x) dx dt\end{aligned}$$

Remarque 1.1.3 *δ est l'element neutre pour la convolution des distributions ,En effet $\forall T \in D'(\mathbb{R}^n) : T * \delta = \delta * T = T$*

c'est un outil important dans la resolution des equations differentielles qui n'existe pas dans le cadre des fonctions usuelles.

D'où l'importance de definir la convolution pour les distributions,on a les proprietes importantes suivantes:

Proposition 1.1.4 *i/$\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$,avec T une distribution sur Ω et $\forall \varphi \in D(\Omega)$*

ii/$T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$ avec T une distribution sur Ω et $\forall \varphi, \psi \in D(\Omega)$

Exemple 1.1.5 ***(exemple appliqué aux EDO)***

l'utile du produit de convolution donne nous le resultat suivant:

si x_0 est solution de l''E.D.O $ay'' + by' + cy = \delta_0$ alors $T = x_0 * \varphi$ est solution de $ay'' + by' + cy = \varphi$ en effet

consédérons un oscillateur initiallement au repos que l'on soumet à une force F(.),son mouvement est modélisé par l'EDO

$$ay" + by' + cy = F(t)$$

on suppose que F est une fonction test (nulle pour $t\langle 0$)

pour calculer le mouvement qui lui est associé on comence par chercher la solusion générale
i.e la réponse impusionnelle solution de $ay" + by' + cy = \delta_0$ notée par X_0;ensuite on calcule $X_0 * F$
on remarque alors que la réponse impusionnelle sert "de matrice"pour l'operateur $Ly = ay" + by' + cy$ qui a une excitation F, le mouvment resultant est donc donné par: $y = V * F$

Définition 1.1.6 ***multiplication de Fuchssteiner***

$$\begin{aligned} \textit{on a} \quad &: \quad \forall F; G \in D_{pwC^\infty} \\ \textit{par definition} \quad M(F,G)' &= \quad : M(F',G) + M(F,G') \\ & \quad\quad \textit{cad la regle de dérivation est vérifiée} \end{aligned}$$

Définition 1.1.7 ***(partie impulsive ,reguliere)***

Soit $t \in \mathbb{R}; D \in D_{pwreg}$ *avec la representation*
$D = f_D + \sum_{t\in T} D_t$
$D[t] := D_{\{t\}} = \left\{\begin{smallmatrix} D_t & si & t\in T \\ 0 & si & t\notin T \end{smallmatrix}\right.$
la partie impulsive est definie par :$D[.] = \sum_{t\in\mathbb{R}} D[t] = \sum_{t\in T} D_t$
la partie reguliere de ; $D \in D_{pwreg}$ *c'est n'importe qu'elle fonction* $D^{reg} \in L^1_{loc}$ *tel que* $D_{reg} = D^{reg} = D - D[.] = f_D$

Proposition 1.1.8 ***(suite des distributions)***

Soit $(D_n) \in D^N$ une suite des distributions tel que $\forall\varphi \in C_0^\infty$.
La suite $(D_n(\varphi)) \in \mathbb{R}^N$ converge, alors

$$D := \varphi \rightarrow \lim_{n\to+\infty} D_n(\varphi) \text{ est un distribution}$$

et (D_n) converge vers D dans le sens :

$$D_n \rightarrow D :\Longleftrightarrow \forall\varphi \in C_0^\infty : \lim_{n\to+\infty} D_n(\varphi) = D(\varphi).$$

dans ce chapitre nous avons introduit la notion des distributions ,ainsi que les definitions et les resultas qui nous permettrons dans le prochain chapitre d'aborder l'etude des E.D.O continues par morceaux au sens des distributions.

Chapitre 2

.

Dans ce chapitre,on s'interesse à l'étude de l'existence des solutions pour les équations différentielles ordinaires continues par morçeaux, reecrites dans le cadre distrubutionnel puis une analyse de ces systémes est donnée.

Dans tout ce qui suit,les notations suivantes sont adoptées:

$$C_0^\infty := \{f \in C^\infty / \text{ supp } f \ \ est\ borné\}$$

$$\begin{aligned}
C^\infty \ &: \ = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \ \ est\ diff érentiable\} \\
D_{reg} \ &: \ = \{f_D / f \in L^1 loc\} \\
D_{reg} \ &\subset \ D \\
D_{pwreg} \ &: \ = \{f_D + \sum_{t \in T} D_t / f \in L^1 loc, T \subset \mathbb{R}\ localement\ finie, \forall t \in T : D_t \in D_{\{t\}}\} \\
D_{pwreg} \ &\subset \ D \\
C_{pw}^\infty \ &: \ = \{\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}} 1_{[t_i, t_{i+1})} \alpha_i / (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in (C^\infty)^{\mathbb{Z}} \{t_i \in \mathbb{R} / i \in \mathbb{Z}\}\ \ localement\ finie, avec\ t_i < t_i \\
C_{pw}^\infty \ &\subseteq \ L^1 loc \\
D_{pwC^\infty} \ &: \ = \{D \in D_{pwreg} / \exists f \in C_{pw}^\infty : D_{reg} = f_D\}
\end{aligned}$$

2.1 la regularité des distributions DAE(Differential Algebraic Equation)

Définition 2.1.1 *une distribution DAE est donnée par*

$$E\dot{x} = Ax + f \tag{2}$$

où $E, A \in (D_{pwC^\infty})^{m\times n}$ *et* $f \in (D^\infty_{pwC^\infty})^n$*, pour* $(n,m) \in \mathbb{N}$ *avec* $(E,A) \in \sum^{m\times n}$ *avec* f *non lineaire et* $\sum^{m\times n}$ *est l'ensemble des matrices a coefficient constant de dimenssion m*n*

Définition 2.1.2 *(solutions des distributions DAEt et ITP(Initial Trajectory Problems))*

considérons une distribution DAE où $(E,A) \in \sum^{m\times n}$ avec f non lineaire

i/une solution globale de (2) est une distrubution réguliére par morçeaux tel que (2) soit verifiée.

ii/une distrubution réguliére par morçeaux $x \in (D_{pwC^\infty})^n$ est appellée une solution locale de (2) sur l'intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ ssi $(E\dot{x})_J = (Ax+f)_J$

iii/une distribution reguliére par morceaux notée $x \in (D_{pwC^\infty})^n$ est appellée une solution ITP avec une condition initiale $x_0 \in (D_{pwC^\infty})^n$ et un temps initial $t_0 \in, \mathbb{R}$ *si* x verifie le probléme avec la condition initial(ITP) donné par:

$$\begin{aligned} (E\dot{x})_{[t_0,\infty)} &= (Ax+f)_{[t_0,\infty)}...() \\ avec\ x(-\infty,t_0) &= \overset{0}{x}(-\infty,t_0) \end{aligned} \tag{3}$$

c'est à dire x est une solution locale du (2) sur $[t_0,+\infty)$ qui coincide avec la condition initiale $\overset{0}{x}$ sur $(-\infty,t_0)$.

Définition 2.1.3 ***(intégrale d'une DAE)***

$(E,A) \in \sum^{m\times n}$ est appelle DAE reguliére ssi $\forall f$ non homogéne,$\forall t_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall \overset{0}{x} \in (D_{pwC^\infty})^n$ le systéme a une seule solution

Exemple 2.1.4 *(non régulérité)*

Il existe différents cas pour les quels une DAE est non réguliére:

i/solution non unique déterminée par condition initiale par exemple:

$$[1,0]\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = [0,0]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + f \qquad X \in \mathbb{R}^2$$

ii/la solution n'existe pas pour n'importe qu'elle fonction f non lineaire par exemple $f = \binom{f_1}{f_2}$ et

$$[1,0]\dot{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}$$

la solution existe juste pour $f_2 = 0$

Proposition 2.1.5 *soit* $(E, A) \in \sum^{m\times n}$, *(E,A) est une DAE réguliére ssi* $\forall x_0 \in (D_{C^\infty})^n, t_0 \in \mathbb{R}, \forall f$ *non homogéne la DAE suivante a une seule solution(globale)*

$$E_{itp}\dot{x} = A_{itp}x + f_{itp} \tag{4}$$

où

$$E_{itp} = E_{[t_0,\infty)}, A_{itp} = I_{(-\infty,t_0)} + A_{[t_0,+\infty)} \;\; et \;\; f_{itp} = -\overset{0}{x}_{(-\infty,t_0)} + f_{[t_0,+\infty)}$$

Démonstration :

$$\begin{array}{rcl} \forall F, G & \in & D_{pwC^\infty} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \;\; (FG)_{[t_0,+\infty)} = F_{[t_0,\infty)}G \\ x \;\text{ est }\; \textit{solution de } (4) \;\text{ ssi }\; (E_{itp}\;\dot{x})_{(-\infty,t_0)} & = & (A_{itp}x)_{(-\infty,t_0)} + (f_{itp})_{(-\infty,t_0)} \\ (E_{itp}\;\dot{x})_{(t_0,+\infty)} & = & (A_{i+p}x)_{[t_0,\infty)}) + (f_{itp})_{(t_0,+\infty)} \\ E_{[t_0,\infty)}\dot{x} & = & A_{[t_0,\infty)}x + f_{(t_0,+\infty)} \\ (E\dot{x})_{[t_0,+\infty)} & = & (Ax+f)_{[t_0,+\infty)} \\ & \Longleftrightarrow & \textit{donc } x \textit{ est la solution de } l'ITP(3) \end{array}$$

■

Théorème 2.1.6 *(condition necessaire pour qu'une DAE soit réguliére)*

Si$(E, A) \in \sum^{m\times n}$ est réguliére alors $m = n$

Proposition 2.1.7 *(condition suffisante pour la régularité d'une DAE)*

Soit $n \in \mathbb{N}$:
i/ Si $(E_0, A_0), (E_1, A_1) \in \Sigma^{n\times n}$ sont DAE réguliéres alors

$$(E_0(-\infty, t_1) + E_1(t_1, +\infty), A_0(-\infty, t_1) + A_1(t_1, +\infty))$$

est aussi une DAE réguliére $\forall t_1 \in \mathbb{R}$.
ii/ Si $(E_i, A_i) \in \Sigma^{n\times n}$, $i \in \mathbb{N}$ une famille de DAE regulieres et $\{t_i \in \mathbb{R}/i \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble localement fini alors $\left(\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} E_{i_{[t_i,t_{i+1})}}, \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} A_{i_{[t_i,t_{i+1})}}\right)$ est aussi une DAE régulière.
iii/ Si $(E, A) \in \sum^{n\times n}$ est une DAE réguliére alors $(E + E_t, A + A_t)$ est aussi une DAE régulière pour tout $E_t, A_t \in (D_{\{t\}})^{n\times n}, t \in \mathbb{R}$.
iv/ Si $(E, A) \in \Sigma^{n\times n}$ est une DAE régulière alors $\left(E + \widetilde{E}[.], A + \tilde{A}[.]\right)$ est aussi une DAE réguliére $\forall \widetilde{E}, \tilde{A} \in \widetilde{D}_{pwc^\infty}$.

Corollaire 2.1.8 *$(E,A) \in \sum^{n\times n}$ est DAE réguliére ssi (E^{reg}, A^{reg}) est une DAE réguliére.*

Théorème 2.1.9 (*Condition nécéssaire de régularité*)

Considérons une DAE régulière $(E,A) \in \sum^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$.

i/On défini la derivée d'ordre p de cette (E,A) par la matrice bloc $M^p \in \left(\left(D_{pwc^\infty}\right)^{n\times n}\right)((p+1)\times(p+2))$

ou chaque bloc est défini par : pour $i = 1$ jusqu'a $p+1$ et $j = 1$ jusqu'a $p+2$. on a:

$$(M^p)_{i,j} = \binom{i-1}{j-2} E^{(i-j+1)} - \binom{i-1}{j-2} A^{(i-j)}$$

avec la convention $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{-k} = \binom{n}{n+k} = 0$ pour $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ c.a.d.

$$M^p = \begin{bmatrix} -A & E & & & \\ -A' & E' - A & E & & \\ -A & E'' - 2A & 2E' - A & & \\ . & . & & & \\ . & . & & & \\ . & . & & & \\ -A^{(p)} & E^{(p)} - pA^{(p-1)} & pE^{(p-1)} - \binom{p}{2}A^{(p-2)} & ... & E \end{bmatrix}$$

alors $M^p(t+)$ et $M^p(t-)$ ont un rang maximal $\forall p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.

ii/ On défini l'impulsion d'ordre $p \times q$, $p, q \in \mathbb{N}$, par la matrice bloc $N^{p,q} \in \left(\left(D_{pwc^\infty}\right)^{n\times n}\right)^{(p+2)\times(q+2)}$

ou , pour $i = 1$ jusqu'a $p+1$ et $j = 1$ jusqu'a $q+1$., on a:

$$(N^{p,q})_{i,j} = (-1)^i \binom{j-1}{j-i} E^{(j-i)} - \binom{j-2}{j-i-1} A^{(j-i-1)}$$

avec la convention que :

$$\binom{0}{k} = \binom{-1}{k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

c.a.d

$$N^{p,q} = \begin{bmatrix} E & E' - A & E'' - A' & ... & E^{(p)} - A^{(p-1)} \\ & -E & -2E' - A & ... & -qE^{(p-1)} + (q-1)A^{(p-2)} \\ & & . & . & . \\ & & . & . & . \\ & & (-1)^p E & ... & (-1)^p \left(\binom{p}{p} E^{q-p} - \binom{q-1}{q-p-1} A^{q-p-1}\right) \end{bmatrix}$$

alors $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tq $N^{p,q}(t+)$ a un rang maximale.
et on note (t+)=(t,+∞)

2.2 Equations Differentielles Ordinaires continues par morceaux au sens des distributions

une DAE $(E, A) \in \sum^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$ est appellée EDO continues par morceaux au sens des distributions si E est inversible sur D_{pwc^∞}, une EDO continues par morceaux au sens des distributions est dite sous forme standard ssi $E = I$.

Considérons une distribution $(E, A) \in \sum^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$
avec f non lineaire $f \in D_{pwc^\infty}$, alors x est la solution de

$$E\dot{x} = Ax + f$$

ssi x est la solution de

$$\dot{x} = Ax + f \tag{5}$$

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une solution similaire à la solution classique en EDO i.e exactement on montre que s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tq $A\,[.]_{(-\infty,t_0)} = 0$, alors il existe une matrice transitive Φ_{t_0} et un opérateur linéaire Ψ_{t_0} telle que chaque solution x de l'EDO au sens des distributions (5) s'écrit comme:

$$x = \Phi_{t_0}x_0 + \Psi_{t_0}(f)\ \ ,\ \ \text{avec } x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Lemme 2.2.1 *(solution fondamental d'une EDO continues par morceaux au sens des distributio*
soit $\hat{A} \in (C^\infty_{pw})^{n*n}, n \in \mathbb{N}$,alors $\forall t_0 \in \mathbb{R}$;il existe une matrice unique $\varphi(.,t_0) \in C^\infty_{pw}$ qui est absolument continue et verifie les proprietes suivantes :

a)$\varphi(.,t_0)' = \hat{A}\varphi(.,t_0)$ pp et $\varphi(t_0,t_0) = I$
b) $\forall\ s,t,t_0 \in \mathbb{R}, \varphi(s,t_0) = \varphi(s,t)\varphi(t,t_0)$
c) $\varphi(.,t_0)$ est inversible sur $(C^\infty_{pw})^{n*n}$ et
$\forall\ t,t_0 \in \mathbb{R}, \varphi(t,t_0)^{-1} = \varphi(t_0,t)$.

la matrice $\varphi(.,t_0)$ est appellé solution fondamentale de l'EDO classique $\dot{x} = \hat{A}x$.

Lemme 2.2.2 *(unicite de la solution triviale)* soit $t_0 \in \mathbb{R}, A \in (D_{pwC^\infty})^n, n \in \mathbb{N}$ et tel que $A[.]_{(-\infty,t_0)} = 0$ alors la seule solution qui existe est la solution triviale $x = 0$,elle verifie

$$\dot{x} = Ax, x(t_0-) = 0$$

Remarque 2.2.3 *(impulsion dans le passé)*

si la condition $A[.]_{(-\infty,t_0)} = 0$ n'est pas verifiée alors dans le cas general l'affirmation du lemme (2.2.2) n'est .pas vrai

on peut ceci regarder juste pour $\dot{x} = -\delta_0 x$, cette equation differentielle elle a comme solution $x = c1_{(-\infty,0)}, c \in \mathbb{R}$, donc pour $t_0 \rangle 0$, on a

la condition $x(t_0-) = 0$ n'implique pas $x = 0$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}, A \in (D_{pwC^\infty})^{n*n}, n \in \mathbb{N}$, on suppose que $A[\cdot]_{(-\infty,t_0)} = 0$

soit $\varphi(., t_0) \in (C^\infty_{pw})^{n*n}$ une solution fondamentale pour l'EDO classique $\dot{x} = A^{reg}x$. (definie dans le lemme (2.2.1))

Alors:

$$\Phi_{t_0,0} := \varphi(., t_0)_D$$

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi_{t0,i+1} := \varphi(., t_0)_D + \varphi(., t_0) \int_{t_0} \varphi(., t_0)^{-1} A[.]\ \Phi_{t,i}$, et pour $f \in (D_{pwC^\infty})^n$, on definit l'operateur

$\Psi_{t_0,0}(f) := \varphi(., t_0) \int_{t_0} \varphi(., t_0)^{-1} f;$

$\forall i \in \mathbb{N}, \Psi_{t_0,i+1}(f) := \varphi(., t_0) \int_{t_0} \varphi(., t_0)^{-1}(f + A[.]\Psi_{t_0,i}(f)).$

Alors,

$$\Phi_{t_0} := \lim_{\tau \to +\infty} \Phi_{t0,i} \in (D_{pwC^\infty})^{n\times n}$$

et

$$\Psi_{t_0} : (D_{pwC^\infty})^n \to (D_{pwC^\infty})^n : f \to \lim \Psi_{t_0,i}(f).$$

2.3 Solution pour une Equations Differentielles Ordinaires continues par morceaux au sens des distributions

Théorème 2.3.1 *Supposons qu'il existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *avec* $A\,[.]_{(-\infty,t_0)} = 0$

Soit la matrice $\Phi_{t_0} \in (D_{pwc^\infty})^{n\times n}$ et l'opérateur linéaire

$$\Psi_{t_0} : (D_{pwc^\infty})^n \to (D_{pwc^\infty})^n$$

donné dans le corollaire (2.2.4).

x$\in (D_{pwc^\infty})^n$ est la solution de (5) si il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec

$$x = \Phi_{t_0} x_0 + \Psi_{t_0}(f) . \tag{6}$$

De plus: la matrice Φ_{t_0} et l'opérateur Ψ_{t_0} ont les propriétés suivantes:
i/ $\Phi_{t_0}(t_{0^-}) = I$
ii/ $\frac{d_D}{dt}\Phi_{t_0} = A\Phi_{t_0}$
iii/ $\Psi_{t_0}(f)(t_{0^-}) = 0$
iv/ $\frac{d_D}{dt}(\Psi_{t_0}(f)) = A\Psi_{t_0}(f) + f$
on particulier x donnée par (6) est la seule solution de (5) avec la condition $x(t_{0^-}) = x_0$.

Démonstration : 1 ere étape: ■

i/ On a $A[.]_{(-\infty,t_0)} = 0$ d'aprés le corrolaire (2.2.4) et $\Phi(.,t_0)$ c'est la matrice fondamentale pour l'EDO classique

$$\dot{x} = A^{reg}x$$

(d'aprés le lemme (2.2.2)) donc

$$\Phi_{t_0}(t_{0^-}) = \Phi(t_0,t_0) = I.$$

ii/ Pour $i \in \mathbb{N}$ et Φ_{t_0} (donnée dans le corollaire (2.2.4)) le produit de Fuchssteiner $(M3)$ on a:

$$\varphi(.,t_0)' = A^{reg}(\varphi(.,t_0)) \quad pp$$

alors;

$$\begin{aligned}
\frac{d_D}{dt}\Phi_{t_0,i+1} &= (\varphi(.,t_0)_D)' + \left(\varphi(.,t_0)\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1}A[.]\,\Phi_{t_0,i}\right)' \\
&= A^{reg}\varphi(.,t_0)_D + A^{reg}\varphi(.,t_0)_D\left(\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1}A[.]\,\Phi_{t_0,i} + \varphi(.,t_0)\varphi(.,t_0)^{-1}A[.]\,\Phi_{t_0,i}\right) \\
&= A^{reg}(\varphi(.,t_0)_D + \varphi(.,t_0)_D)\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1}A[.]\,\Phi_{t_0,i} + A[.]\,\Phi_{t_0,i} \\
&= A^{reg}\Phi_{t_0,i+1} + A[.]\,\Phi_{t_0,i}
\end{aligned}$$

En passant à la limite qand $i \to +\infty$ dans les deux membres et on appliquant la proposition (1.1.8) on a:

$$\forall \xi \in C_0^\infty, \exists N \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : \Phi_{t_0,i}(\xi) = \Phi_{t_0}(\xi)$$

De meme pour

$$\Phi_{t_0,i+1}(\xi) = \Phi_{t_0}(\xi)$$

donc on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{d_D}{dt}\Phi_{t_0} &= A^{reg}\Phi_{t_0} + A\left[.\right]\Phi_{t_0} \\ &= A\Phi_{t_0} \end{aligned}$$

car

$$A = A^{reg} + A\left[.\right]$$

iii/ Par définition

$$\left(\int_{t_0} D\right)(t_{0^-}) = 0$$

Pour distribution régulière par morceaux $D \in D_{pwc^\infty}$ quand on multiplier a gauche par une fonction régulière par morceaux la propriété reste la meme donc pour

$\forall i \in \mathbb{N}, f \in (D_{pwc^\infty})^n$ et $\Psi_{t_0,i}(f)$

$$\begin{aligned} \Psi_{t_0,i}(f) &= \varphi(.,t_0)\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1}\left(f + A\left[.\right]\Psi_{t_0,i-1}(f)\right) \\ &= \varphi(.,t_0)\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1} f \end{aligned}$$

donc

$$\Psi_{t_0,i} = 0$$

car

$$\left(\int_{t_0}\varphi(.;t_0)f\right)(-\infty;t_0) = 0$$

de plus

$$\Psi_{t_0}(f)(-\infty,t_0) = (\Psi_{t_0,i}(f))(-\infty,t_0)$$

alors

$$\Psi_{t_0}(f)(-\infty,t_0) = \Psi_{t_0,i}(f)(-\infty,t_0) = 0$$

iv/ pour $\Psi_{t_0,i}(f)$ definie dans le corollaire (2.2.4)

et $f \in D_{pwc^\infty}$ et $i \in \mathbb{N}$, appliquant la regle du produit de la multiplication de Fuchssteiner on a :

$$\varphi(.,t_0)' = A^{reg}\varphi(.,t_0)pp$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \frac{d_D}{dt}(\Psi_{t_0,i+1}(f)) &= (\varphi(.,t_0)_D\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1}\left(f + A\left[.\right]\Psi_{t_0,i}(f)\right))' \\ &= A^{reg}\varphi(.,t_0)_D\int_{t_0}\varphi(.,t_0)^{-1}\left(f + A\left[.\right]\Psi_{t_0,i}(f)\right) + \varphi(.,t_0)\varphi(.,t_0)^{-1}(f + A[. \\ &= A^{reg}\Psi_{t_0,i+1}(f) + f + A\left[.\right]\Psi_{t_0,i}(f) \end{aligned}$$

on passe a la limite quand $i \to +\infty$ et on applique la proposition (1.1.8) on trouve :

$$\Psi_{t_0,i}(f) = \Psi_{t_0}(f)$$

et

$$\Psi_{t_0,i+1}(f) = \Psi_{t_0}(f)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d_D}{dt}\Psi_{t_0,i+1}(f) &= A^{reg}\Psi_{t_0}(f) + f + A[.]\,\Psi_{t_0}(f) \\ &= A\Psi_{t_0}(f) + f \qquad car A = A^{reg} + A[.] \end{aligned}$$

2^{eme}etape
on a x donnée par (5) verifie :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\Phi_{t_0}x_0 + \Psi_{t_0}(f))' = A\Phi_{t_0}x_0 + A\Psi_{t_0}(f) + f \\ &= A(\Phi_{t_0}x_0 + \Psi_{t_0}(f)) + f \\ &= Ax + f \end{aligned}$$

c a d x est une solution de (5)
3^{eme}*etape*
Montrons que toute solution donnée par (6) est unique
Supposons que $\xi \in (D_{pwc^\infty})^n$ est une autre solution de (5) et soit

$$x = \Phi_{t_0}\xi(t_0-) + \Psi_{t_0}(f)$$

il faut montrer que $\xi = x$ ou encore que

$$e := \xi - x = 0$$

or on a :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\xi} - \dot{x} = A\xi + f - Ax - f \\ &= A(\xi - x) = Ae \end{aligned}$$

donc verifie

$$\dot{e} = Ae$$

et

$$e(-\infty, t_0) = \xi(-\infty, t_0) - x(-\infty, t_0) = 0$$

d'aprés le lemme avec(2.2.2) $\dot{e} = Ae$ et $e(-\infty, t_0) = 0$
donne que $e = 0$ est la seule solution de ce probleme
D'où l'unicité de la solution.

(cqfd)