

République Algérienne Démocratique et Populaire

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

Mémoire pour obtenir le diplôme de

Master

Option : **Systèmes Dynamiques et Applications**

**Analyse mathématique d'un modèle épidémiologique
SIRC : cas de la grippe A H1N1**

Présenté par :

M^{elle} **GHAOUZI HALIMA**

Le 02 juillet 2014 devant le jury composé de :

| | | | |
|----------------------------------|--------|---------------|--------------|
| M ^{me} . D.Hadj Slimen. | PR | Univ. TLEMCEN | Encadreur |
| Mr. T.Touaoula. | PR | Univ. TLEMCEN | Président |
| M ^{elle} .C.Benosman. | M.C(A) | Univ. TLEMCEN | Examinatrice |

Année Universitaire 2013 ~ 2014

REMERCIEMENTS

J'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour témoigner ma reconnaissance envers sa grande générosité.

Je tiens à remercier sincèrement Madame D. Hadj Slimane qui en tant que mon encadreur, s'est toujours montrée à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire.

.Je remercie Mademoiselle C. Benosmand d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Merci à mes professeurs et enseignants en particulier, à Monsieur T. Touaoula.

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents.

Surtout à ma mère qui a toujours été là pour moi.

A mes chères sœurs et mes chers frères.

A toute ma famille.

A mes amis.

A tous les professeurs qui ont assuré ma formation.

Analyse mathématique de modèle
épidémiologique SIRC:cas de la grippe A
H1N1

Ghaouzi Halima

Table des Matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Présentation de la grippe A H1N1 | 3 |
| 1.1 Définition de la grippe | 3 |
| 1.2 Virus de la grippe | 3 |
| 1.3 La grippe A(H1N1) | 4 |
| 1.4 Les symptômes de la maladie | 5 |
| 1.5 Différence entre vaccin et antiviraux | 5 |
| 1.6 Modèle SIRC pour la grippe A H1N1 | 6 |
| 1.7 Identification des paramètres de modèle(1.1) | 6 |
| 2 Etude du modèle SIRC de la grippe A H1N1 | 8 |
| 2.1 Quelques rappels sur l'existence et l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires | 8 |
| 2.2 Etude d'existence et d'unicité et la positivité de la solution de modèle SIRC | 9 |
| 3 Etude du modèle SIRC de la grippe A H1N1 avec contrôle | 21 |
| 3.1 Rappels sur l'existence et l'unicité de la solution des système de contrôle | 21 |
| 3.2 Modèle SIRC de la grippe A H1N1 avec contrôle | 22 |
| 3.3 Rappels sur l'étude de l'existence d'un contrôle optimale | 24 |
| 3.4 Application au modèle SIRC de la grippe A H1N1 | 25 |
| Conclusion | 29 |

Introduction

dans ce mémoire, on s'intéresse au modèle SIRC de la grippe A H1N1, dans le premier chapitre, on présente les caractéristiques de cette maladie puis le modèle SIRC qui la représente; Dans le deuxième chapitre on'étudie ce modèle(existence, unicité et la positivité de la solution); Dans le troisième chapitre un contrôle est introduit dans le modèle et une analyse d'existence du solution de problème de contrôle optimal. Ce modèle de contrôle optimal représente l'effet du traitement et du vaccin sur l'évolution de la maladie.

Chapitre 1

Présentation de la grippe A H1N1

Dans ce chapitre nous rappelons tout d'abord quelques notions qui nous permettront par la suite de comprendre l'évolution de la grippe A H1N1

1.1 Définition de la grippe

L'influenza ou la grippe est une maladie respiratoire commune pour les virus de la grippe qui sont de trois grands types A,B,C; la différence entre ces virus est liée aux deux protéines qui constituent leurs enveloppes, les trois types de virus n'ont pas le même pouvoir pathogène en particulier le type C n'entraîne pas d'épidémie chez l'homme.

1.2 Virus de la grippe

Le virus responsable de la grippe est un virus à ARN simple brin, son génome est segmenté en sept ou huit fragments.

Les virus A, B disposent de huit fragments d'ARN, le virus C ne compte que sept fragments. Sur son enveloppe externe, il porte ces deux déterminants antigéniques principaux HxNx mais il contient d'autres éléments (voir la figure 1) qui sont:

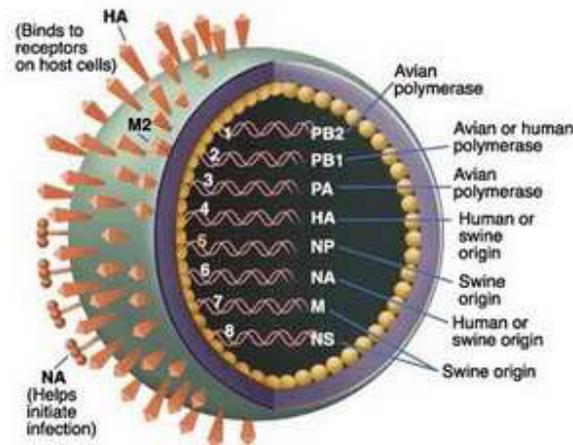


FIGURE 1 – Virus de la grippe

H:hémagglutinine est une protéine regroupant des structures tubulaires et des structures globulaires qui permet l'amarrage du virus sur la cellule et en détermine la virulence, H se divise en deux structures HA1:structure globulaire, HA2 structure tubulaire; le HA1 se fixe sur la cellule cible et le HA2 reste accrochée au virus.

N:neuraminidase qui libère le virus à l'intérieur de la cellule.

A l'intérieur de la particule virale, huit ou sept nucléocapsides de symétrie hélicoïdale résultant, chacune, de l'association d'une molécule d'ARN et de nombreuses molécules de nucléoprotéine, Cette nucléoprotéine fait partie des antigènes internes et c'est elle qui détermine le type viral A, B, C.

Dans ce travail on s'intéresse particulièrement à la grippe (A H1N1)

1.3 La grippe A(H1N1)

La grippe A H1N1 est une maladie respiratoire aigüe de l'être humain apparue en 2009, la contamination s'effectue principalement :

- par voie aérienne, c'est à dire par l'intermédiaire de la toux, de l'éternuement ou des postillons.

- par le contact rapproché avec une personne infecté par un virus respiratoire.

- par le contact avec des objets touchés et donc contaminés par une personne malade.

le virus peut survivre de 8 à 48 heures à l'air libre selon la nature de la surface sur la quelle il repose, il provoque une épidémie grippale dans les mois qui suivent son apparition.

Devant l'ampleur de l'épidémie, l'OMS a qualifié la situation de pandémie le 11 juin 2009.

Cette maladie est provoquée par un nouveau virus de la grippe A de sous type H1N1, ce virus différent de ceux de la grippe saisonnière (qui est d'origine humaine) contient des gènes de plusieurs virus connus d'origine porcine, aviaire et humaine; le virus A H1N1 ne peut pas être appelé grippe porcine, car c'est une grippe inter humaine, il a en fait une structure très originale en trois parties l'une porcine la deuxième aviaire et la troisième humaine.

1.4 Les symptômes de la maladie

Les symptômes qui peuvent durer jusqu'à une semaine, sont similaires à ceux de la grippe saisonnière et peuvent inclure fièvre, éternuements, mal de gorge, maux de tête, la fièvre est supérieure à 38° pouvant atteindre jusqu'à 40°, perte d'appétit brutale et dans certains cas des vomissements et diarrhées.

En général, le traitement est symptomatique et analogue à ce qui est pratiqué face aux syndromes grippaux et essentiellement à base de paracétamol pour les cas plus sévères, des médicaments antiviraux inhibiteurs de la neuraminidase, l'oseltamivir ou le zanamivir sont efficaces sur ce virus, ils sont prescrits après consultation et diagnostic réalisés par un médecin, et il faut aussi administrer les vaccins pour lutter contre cette maladie.

1.5 Difference entre vaccin et antiviraux

Il y a une grande différence entre les vaccins et les antiviraux

Les antiviraux sont des médicaments employés pour la prévention et le traitement précoce de la grippe, ils doivent être pris rapidement après le début de la maladie et peuvent atténuer les symptômes de la grippe, raccourcir la durée de la maladie et probablement prévenir les complications, les antiviraux réduisent la capacité de reproduction du virus mais n'immunisent pas contre le virus.

Le vaccin est un produit de santé qui provoque l'immunisation du patient en stimulant sa production d'anticorps contre le virus, les vaccins sont le principal outil de prévention de la maladie causée par la grippe comme d'autres infections, ils simulent la production d'anticorps dirigés contre certains des composants du virus de la grippe provoquant ainsi l'immunisation du patient contre la maladie.

1.6 Modèle SIRC pour la grippe A H1N1

Un modèle mathématique défini par un système d'équations différentielles ordinaires qui modélise le mécanisme d'évolution du virus de la grippe A à été donné dans [6] (il est de type SIR) puis amélioré en introduisant une quatrième classe appelé C correspondant aux individus immunisés (totalement ou partiellement), donc le modèle SIRC sans controle donné dans[2], [14] est définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - \mu I(t) - \alpha I(t) \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - \mu R(t) - \delta R(t) \\ \frac{dC}{dt} = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - \mu C(t) - \gamma C(t) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec le condition initial:

$$S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0, C(0) = C_0 \geq 0 \quad (1.2)$$

où

$S(\cdot)$ est la proportion des individus susceptibles, $I(\cdot)$ la proportion des individus infectés, $R(\cdot)$ et la proportion des individus refractaires, $C(\cdot)$ la proportion des individus qui sont totalement ou partiellement immunisées contre la maladie.

1.7 Identification des paramètres de modele(1.1)

Les paramètres suivants caractérisent le modèle(1.1)

β :le taux de transmission de la maladie.

γ :la probabilité des individus ayant une immunité naturelle.

μ :le taux de mortalité qui est égal à le taux de natalité

σ :la probabilité qu'un individu exposé acquière l'immunité.

α :le taux de guérison.

δ :la probabilité qu'un individu immunisé totalement.

Le modèle(1) peut être schématisé par la figure(B)

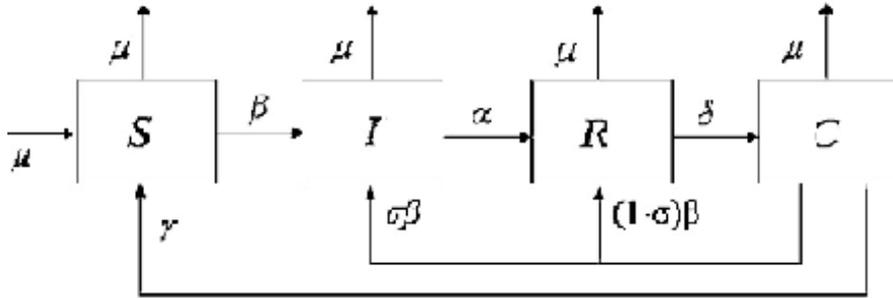


FIGURE B-compartment de modèle SIRC

Chapitre 2

Etude du modèle SIRC de la grippe A H1N1

Dans ce chapitre, nous rappelons en premier lieu quelques notions et résultats sur l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy que nous appliquons en suite au modèle SIRC de la grippe A.

2.1 Quelques rappels sur l'existence et l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires

Soit le système d'équations différentielles ordinaires avec la condition initial x_0 suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ et X est un espace de Banach.

Le problème de Cauchy associé à (2.1) consiste à trouver une solution $x(\cdot)$ de (2.1)

Théorème 2.1.1 (*Théorème d'existence d'unicité du solution locale*)

Soit $f(t, x)$ continue en t sur $I = [t_0, t_0 + T]$, $T \geq 0$

et $\forall t \in I$, la condition locale de lipshitz en x suivante est satisfaite i.e:

$\exists c, l_f \geq 0$ tel que $\|f(t, x)\| \leq c$, $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l_f \|x_1 - x_2\|$,

$\forall x_1, x_2 \in B_r(x_0)$, $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$

alors

le problème de Cauchy(2.1) admet une solution locale unique sur $[t_0, t_0 + T_1]$ où $T_1 \leq \min\{r/c, 1/l_f, T\}$

Remarque 2.1.2 Si les conditions de théorème précédent sont vérifiées globalement alors le problème (2.1) admet une solution globale unique pour tout $t \in [t_0, t_0 + T], \forall T$ suffisamment grand .

Théorème 2.1.3 Soit $A(\cdot)$ matrice $n \times n$ continue et $g(\cdot)$ continue sur $[t_0, t_0 + T]$

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique sur $[t_0, t_0 + T]$

Nous avons besoin aussi du résultat suivant pour étudier la positivité de la solution

Proposition 2.1.4 Considérons toujours le système(2.1)

où $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$,

et $f(t, x(t)) = (f_1(t, x(t)), \dots, f_n(t, x(t)))$ où $f(t, x(t))$ est définie pour tout $t \geq 0, x(t) \in \mathbb{R}^n$. on suppose que f a la propriété suivante:

(p): la solution de problème(2.1) de valeur initiale

$x(t_0) = x_0$ est unique pour $x_0 \in (\mathbb{R}^+)^n$ fixée, $t_0 \geq 0$ de plus,

pour tout $j = 1, \dots, n, t \geq 0, f_j(t, x) \geq 0, \forall x \in (\mathbb{R}^+)^n, x_j = 0, t \geq 0$

Alors

$x(t) \in (\mathbb{R}^+)^n$ pour tout $t \geq t_0 \geq 0$.

2.2 Etude d'existence et d'unicité et la positivité de la solution de modèle SIRC

Soit $N(\cdot)$ le nombre total de la population tel que:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) + C(t)$$

Alors on a:

$$N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) + C'(t), \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

on remplace $S'(t), I'(t), R'(t), C'(t)$ du modèle(1.1) dans(2.2), on trouve

$$\begin{aligned}
N'(t) &= \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) + \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) \\
&\quad - \mu I(t) - \alpha I(t) + (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - \mu R(t) - \delta R(t) \\
&\quad + \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - \mu C(t) - \gamma C(t) \\
N'(t) &= \mu - \mu S(t) - \mu I(t) - \mu R(t) - \mu R(t)
\end{aligned}$$

$$N'(t) = \mu - \mu N(t) \tag{2.3}$$

utilisons la méthode du facteur intégrant pour trouver $N(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}
N'(t) + \mu N(t) &= \mu \\
\Rightarrow N'(t)e^{\mu t} + \mu N(t)e^{\mu t} &= \mu e^{\mu t} \\
\Rightarrow (N'(s)e^{\mu s})' &= \mu e^{\mu s}
\end{aligned}$$

En intégrons entre t_0 et t (en prenant $t_0 = 0$ pour simplifier les calculs), on a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t (N(s)e^{\mu s})' ds &= \int_0^t \mu e^{\mu s} ds \\
\Rightarrow N(t)e^{\mu t} - N(0) &= [e^{\mu s}]_0^t \\
\Rightarrow N(t) &= N(0)e^{-\mu t} - e^{-\mu t} + 1 \\
\Rightarrow N(t) &= (N(0) - 1)e^{-\mu t} + 1
\end{aligned}$$

avec

$$N(0) = (S(0) + I(0) + R(0) + C(0)) \geq 0$$

on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1 \quad (2.4)$$

soit donc l'ensemble:

$$E = \{(S(t), I(t), R(t), C(t)) \in \mathbb{R}^4, \text{tel que}$$

$$S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, C(t) \geq 0$$

$$S(t) + I(t) + R(t) + C(t) \leq 1, \forall t \geq 0 \quad \}$$

– Montrons que E est positivement invariante pour le modèle(1.1):

Appliquons pour cela la proposition(2.1.4), on a

$$\cdot I'(t) = \beta S(t)I(t) + \sigma\beta C(t)I(t) - \mu I(t) - \alpha I(t)$$

$$I'(t) = (\beta S(t) + \sigma\beta C(t) - \mu - \alpha)I(t)$$

et donc

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = (\beta S(t) + \sigma\beta C(t) - \mu - \alpha)$$

(2.5)

intégrons entre 0 et t l'équation(2.5)

$$(2.5) \Rightarrow \int_0^t \frac{I'(s)}{I(s)} ds = \int_0^t (\beta S(s) + \sigma\beta C(s) - \mu - \alpha) ds$$

$$\Rightarrow [\ln I(s)]_0^t = \int_0^t (\beta S(s) + \sigma\beta C(s) - \mu - \alpha) ds$$

$$\Rightarrow \ln \frac{I(t)}{I(0)} = \int_0^t (\beta S(s) + \sigma\beta C(s) - \mu - \alpha) ds$$

$$\Rightarrow I(t) = I(0) \exp \left[\int_0^t (\beta S(s) + \sigma\beta C(s) - \mu - \alpha) ds \right]$$

$$\Rightarrow I(t) \geq 0 \text{ car } I(0) = I_0 \geq 0, \forall t \geq 0$$

$$S'(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t)$$

on prend dans un premier temps $S(t) = 0$,
et posons $C(t) \geq 0$, on trouve $\forall t \geq 0$:

$$S'(t) = \mu - \gamma C(t) \Rightarrow S'(t) \geq 0, \forall t \geq 0$$

alors

$$S(t) \geq 0, \forall t \geq 0$$

Considerons maintenant l'expression de $R(\cdot)$, on a

$$R'(t) = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - \mu R(t) - \delta R(t)$$

on prend $R(t) = 0$ et posons que $C(t) \geq 0$, on trouve:

$$R'(t) = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t)$$

$$R'(t) \geq 0 \Rightarrow R(t) \geq 0, \forall t \geq 0.$$

Considerons maintenant l'expression de $C(\cdot)$, on a

$$C'(t) = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - \mu C(t) - \gamma C(t)$$

on prend $C(t) = 0$, on trouve

$$C'(t) = \delta R(t) \geq 0, \forall t \geq 0$$

$$\text{alors } C(t) \geq 0, \forall t \geq 0$$

alors finalement

$$\forall t \geq 0, S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, C(t) \geq 0$$

conclusion

Le cadrant E est positivement invariant de plus on suppose que $N_0 < 1$,
d'autre part et d'après le résultat (2.4) on a

$$S(t) + I(t) + R(t) + C(t) \leq 1, \forall t \geq 0,$$

on conclut que les états $S(\cdot), I(\cdot), R(\cdot), C(\cdot)$ sont bornés i.e

$\exists k_i > 0, i = 1, \dots, 4$ t.q $S(t) \leq k_1, I(t) \leq k_2, R(t) \leq k_3, C(t) \leq k_4, \forall t \geq 0$

-Existence du solution de modèle(1.1)

Ecrivant le modèle(1.1) sous forme matricielle, on trouve:

$$\begin{pmatrix} S'(t) \\ I'(t) \\ R'(t) \\ C'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -(\mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -(\mu + \gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \\ C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu - \beta S(t)I(t) \\ \beta S(t)I(t) + \sigma\beta C(t)I(t) \\ (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) \\ -\beta C(t)I(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} S(0) \\ I(0) \\ R(0) \\ C(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \text{ fixés}$$

on pose

$$X(t) := \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \\ C(t) \end{pmatrix}$$

le modèle(1.1) devient:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -(\mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -(\mu + \gamma) \end{pmatrix}$$

et

$$F(x(t)) = \begin{pmatrix} \mu - \beta S(t)I(t) \\ \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) \\ (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) \\ -\beta C(t)I(t) \end{pmatrix}$$

Soit la fonction $G(t, X)$

$$G : I \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(t, X) \rightarrow G(t, X) = AX(t) + F(X(t))$$

Pour montrer l'existence de la solution de problème du Cauchy(1.1) dans l'espace de Banach B des fonctions absolument continues définies sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R}^4 muni de la norme de la convergence uniforme $\|X\| = \sup_{t \in I} |X(t)|$ $I \subset \mathbb{R}^+$.

montrons tout d'abord que la fonction $G(t, X)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à X i.e

$$\forall X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}^4, \|G(t, X_1) - G(t, X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|, k > 0$$

Remarquons que $G(t, X)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}^4$ et montrons que $G(t, X)$ est localement lipchitzienne par rapport à X

$$\begin{aligned} \|G(t, X_1) - G(t, X_2)\| &= \|AX_1(t) + F(X_1(t)) - AX_2(t) + F(X_2(t))\| \\ &= \|A(X_1(t) - X_2(t)) + F(X_1(t)) - F(X_2(t))\| \\ &\leq \|A(X_1(t) - X_2(t))\| + \|F(X_1(t)) - F(X_2(t))\| \end{aligned}$$

$$\|G(t, X_1) - G(t, X_2)\| \leq \|A\| \|X_1(t) - X_2(t)\| + \|F(X_1(t)) - F(X_2(t))\| \quad (2.6)$$

on calcule $\|F(X_1(t)) - F(X_2(t))\|$:

ona

$$F(t, X_1(t)) = \begin{pmatrix} \mu - \beta S_1(t)I_1(t) \\ \beta S_1(t)I_1(t) + \sigma\beta C_1(t)I_1(t) \\ (1 - \sigma)\beta C_1(t)I_1(t) \\ -\beta C_1(t)I_1(t) \end{pmatrix}$$

et

$$F(t, X_2(t)) = \begin{pmatrix} \mu - \beta S_2(t)I_2(t) \\ \beta S_2(t)I_2(t) + \sigma\beta C_2(t)I_2(t) \\ (1 - \sigma)\beta C_2(t)I_2(t) \\ -\beta C_2(t)I_2(t) \end{pmatrix}$$

on fait la difference entre $F(t, X_1(t))$ et $F(t, X_2(t))$ on trouve:

$$\begin{aligned} F(t, X_1(t)) - F(t, X_2(t)) &= \begin{pmatrix} \mu - \beta S_1(t)I_1(t) - \mu + \beta S_2(t)I_2(t) \\ \beta S_1(t)I_1(t) + \sigma\beta C_1(t)I_1(t) - \beta S_2(t)I_2(t) - \sigma\beta C_2(t)I_2(t) \\ (1 - \sigma)\beta C_1(t)I_1(t) - (1 - \sigma)\beta C_2(t)I_2(t) \\ -\beta C_1(t)I_1(t) + \beta C_2(t)I_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta(S_1(t)I_1(t) - S_2(t)I_2(t)) \\ -\beta(S_1(t)I_1(t) - S_2(t)I_2(t)) + \sigma\beta(C_1(t)I_1(t) - C_2(t)I_2(t)) \\ (1 - \sigma)\beta(C_1(t)I_1(t) - C_2(t)I_2(t)) \\ -\beta(C_1(t)I_1(t) - C_2(t)I_2(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F(t, X_1(t)) - F(t, X_2(t))\| &= |-\beta(S_1(t)I_1(t) - S_2(t)I_2(t))| + |-\beta(S_1(t)I_1(t) - S_2(t)I_2(t)) \\
&\quad + \sigma\beta(C_1(t)I_1(t) - C_2(t)I_2(t))| + |(1 - \sigma)\beta C_1(t)I_1(t) \\
&\quad - (1 - \sigma)\beta C_2(t)I_2(t)| + |-\beta(C_1(t)I_1(t) - C_2(t)I_2(t))| \\
&= |-\beta S_1(t)I_1(t) + \beta S_1(t)I_2(t) - \beta S_1(t)I_2(t) + \beta S_2(t)I_2(t)| + \\
&\quad |\beta S_1(t)I_1(t) + \beta S_2(t)I_1(t) - \beta S_2(t)I_1(t) + \sigma\beta C_1(t)I_1(t) \\
&\quad + \sigma\beta C_1(t)I_2(t) - \sigma\beta C_1(t)I_2(t) - \beta S_2(t)I_2(t) - \sigma\beta C_2(t)I_2(t)| \\
&\quad + |(1 - \sigma)\beta C_1(t)I_1(t) + (1 - \sigma)\beta C_1(t)I_2(t) \\
&\quad - (1 - \sigma)\beta C_1(t)I_2(t) - (1 - \sigma)\beta C_2(t)I_2(t)| + |-\beta C_1(t)I_1(t) \\
&\quad + \beta C_2(t)I_1(t) + \beta C_2(t)I_1(t) - \beta C_2(t)I_1(t)| \\
&= |-\beta S_1(t)(I_1(t) - I_2(t)) - \beta I_2(t)(S_1(t) - S_2(t))| + \\
&\quad |\beta I_1(t)(S_1(t) - S_2(t)) + \beta S_2(t)(I_1(t) - I_2(t)) + \\
&\quad \sigma\beta C_1(t)(I_1(t) - I_2(t)) + \sigma\beta I_2(t)(C_1(t) - C_2(t))| + \\
&\quad |(1 - \sigma)\beta C_1(t)(I_1(t) - I_2(t)) + (1 - \sigma)\beta I_2(t)(C_1(t) - C_2(t))| \\
&\quad |-\beta I_1(t)(C_1(t) - C_2(t)) - \beta C_2(t)(I_1(t) - I_2(t))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |-\beta S_2(t)(I_1(t) - I_2(t))| + |\beta I_2(t)(S_1(t) - S_2(t))| \\
&\quad |\beta I_1(t)(S_1(t) - S_2(t))| + |\beta S_2(t)(I_1(t) - I_2(t))| \\
&\quad + |\sigma\beta C_1(t)(I_1(t) - I_2(t))| + |\sigma\beta I_2(t)(C_1(t) - C_2(t))| \\
&\quad + |(1 - \sigma)\beta C_1(t)(I_1(t) - I_2(t))| + |(1 - \sigma)\beta I_2(t) \\
&\quad * (C_1(t) - C_2(t))| + |\beta I_1(t)(C_1(t) - C_2(t))| \\
&\quad + |\beta C_2(t)(I_1(t) - I_2(t))| \\
&\leq |\beta S_2(t)| |I_1(t) - I_2(t)| + |\beta I_2(t)| |S_1(t) - S_2(t)| \\
&\quad + |\beta I_1(t)| |S_1(t) - S_2(t)| + |\beta S_2(t)| |I_1(t) - I_2(t)| \\
&\quad + |\sigma\beta C_1(t)| |I_1(t) - I_2(t)| + |\sigma\beta I_2(t)| |C_1(t) - C_2(t)| \\
&\quad + |(1 - \sigma)\beta C_1(t)| |I_1(t) - I_2(t)| + |(1 - \sigma)\beta I_2(t)| \\
&\quad * |C_1(t) - C_2(t)| \\
&\quad + |\beta I_1(t)| |C_1(t) - C_2(t)| + |\beta C_2(t)| |I_1(t) - I_2(t)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta k_1 |I_1(t) - I_2(t)| + \beta k_2' |S_1(t) - S_2(t)| \\
&\quad + \beta k_2 |(S_1(t) - S_2(t))| + \beta k_1' |I_1(t) - I_2(t)| \\
&\quad + \sigma \beta k_4 |I_1(t) - I_2(t)| + \sigma \beta k_2' |C_1(t) - C_2(t)| \\
&\quad + (1 - \sigma) \beta k_4 |I_1(t) - I_2(t)| + \\
&\quad (1 - \sigma) \beta k_2' |C_1(t) - C_2(t)| + \\
&\quad \beta k_2 |C_1(t) - C_2(t)| + \beta k_4' |I_1(t) - I_2(t)| \\
&\leq (\beta k_1 + \sigma \beta k_4 + \beta k_1' + (1 - \sigma) \beta k_4 + \beta k_4') |I_1(t) - I_2(t)| \\
&\quad + (\beta k_2' + \beta k_2) |(S_1(t) - S_2(t))| \\
&\quad + (\sigma \beta k_2' + (1 - \sigma) \beta k_2' + \beta k_2) |C_1(t) - C_2(t)| \\
&\leq c_1 |I_1(t) - I_2(t)| + c_2 |(S_1(t) - S_2(t))| \\
&\quad + c_3 |C_1(t) - C_2(t)| + 0 |R_1(t) - R_2(t)|
\end{aligned}$$

avec

$$c_1 = (\beta k_1 + \sigma \beta k_4 + \beta k_1' + (1 - \sigma) \beta k_4 + \beta k_4'),$$

$$c_2 = (\beta k_2' + \beta k_2),$$

$$c_3 = (\sigma \beta k_2' + (1 - \sigma) \beta k_2' + \beta k_2),$$

$$c_4 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\| F(t, X_1(t)) - F(t, X_2(t)) \| &\leq \max(c_1, c_2, c_3, c_4) \sup_{t \in I} |I_1(t) - I_2(t)| \\
&\quad + \max(c_1, c_2, c_3, c_4) \sup_{t \in I} |(S_1(t) - S_2(t))| \\
&\quad + \max(c_1, c_2, c_3, c_4) \sup_{t \in I} |C_1(t) - C_2(t)| \\
&\quad + \max(c_1, c_2, c_3, c_4) \sup_{t \in I} |R_1(t) - R_2(t)| \\
&\leq \max(c_1, c_2, c_3, c_4) \sup_{t \in I} [|I_1(t) - I_2(t)| \\
&\quad + |(S_1(t) - S_2(t))| + |C_1(t) - C_2(t)| \\
&\quad + |R_1(t) - R_2(t)|]
\end{aligned}$$

et donc on obtient:

$$\|F(t, X_1(t)) - F(t, X_2(t))\| \leq M \|X_1(t) - X_2(t)\|, M \geq 0, \forall t \geq 0 \quad (2.7)$$

Alors la relation(2.6) et(2.7) donne:

$$\begin{aligned}
\|G(t, X_1) - G(t, X_2)\| &\leq \|A\| \|(X_1(t) - X_2(t))\| + M \|X_1(t) - X_2(t)\| \\
&\leq \max(\|A\|, M) \|X_1(t) - X_2(t)\| \\
&\leq M_1 \|X_1(t) - X_2(t)\|
\end{aligned}$$

avec $M_1 = (\max(\|A\|, M) < \infty)$

Alors $G(t, X(t))$ est localement lipschizienne par rapport à la second variable donc le modèle (1.1) admet une solution locale sur B

conclusion:

le modèle(1.1)admet une solution unique locale, bornée sur B alors le modèle(1.1)admet une solution globale sur B

Chapitre 3

Etude du modèle SIRC de la grippe A H1N1 avec contrôle

3.1 Rappels sur l'existence et l'unicité de la solution des système de contrôle

pour les systèmes de controle généraux donnés par

$$\begin{cases} X' = f(t, X(t), u(t)) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où f défini sur $I \times V \times U$, $I \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ pour rester dans un cadre très général, il suffit de supposer que

chaque controle $u(\cdot)$ considéré la fonction $F : (t, X) \rightarrow f(t, X(t), u(t))$ vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy lipshitz.

Remarquons que en fonction de la classe de contrôle considérée ces hypothèses permet être plus ou moins difficiles

à vérifier, mais on peut donner des hypothèses moins générales, mais suffisantes dans la majorité des cas

les hypothèses sont:

1) la fonction f est de classe C^1 sur $I \times U \times V$. et

2) l'ensemble des contrôles est inclus dans $L_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$

et dans ce cas, on aura que les hypothèses du théorème de Cauchy lipshitz sont vérifiées et $\forall u(\cdot)$ fixé,

il existe une solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = f(t, X(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

3.2 Modèle SIRC de la grippe A H1N1 avec contrôle

Introduisons le contrôle dans le modèle SIRC et étudions l'effet de ce contrôle noté $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ sur l'évolution de la maladie et cherchons le contrôle optimal noté

$$U^*(t) = \begin{pmatrix} u^*(t) \\ v^*(t) \end{pmatrix}$$

correspondant de ce modèle et on pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) - g(S(t), u(t)) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) - h(I(t), v(t)) \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - \mu R(t) - \delta R(t) + g(S(t), u(t)) + h(I(t), v(t)) \\ \frac{dC}{dt} = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec la condition initial(1.2) et les condition de bornitude sur le contrôle

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \\ v_{\min} \leq v(t) \leq v_{\max} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

les fonctions $g(S(\cdot), u(\cdot))$ et $h(I(\cdot), v(\cdot))$ représentent les actions d'effort de contrôle(par exemple le vaccin,le traitement,...)

on pose

$$g(S(t), u(t)) = \rho_1 S(t)u(t), \rho_1 \geq 0.$$

$$h(I(t), v(t)) = \rho_2 I(t)v(t), \rho_2 \geq 0.$$

le modèle(3.1) se réécrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) - \rho_1 S(t)u(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) - \rho_2 I(t)v(t) \\ \frac{dR}{dt} = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - \mu R(t) - \delta R(t) \\ \quad + \rho_1 S(t)u(t) + \rho_2 I(t)v(t) \\ \frac{dC}{dt} = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

pour montrer l'existence de solution de modèle(3.3) on suit le même principe d'étude d'existence de solution de modèle *SIRC* sans contrôle .

on écrit le modèle sous forme matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} X'(t) = G(t, X(t), U(t)) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right.$$

avec

$$G(t, X(t), U(t)) = \begin{pmatrix} -\mu - \rho_1 u(t) & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -(\mu + \alpha) - \rho_2 v(t) & 0 & 0 \\ \rho_1 u(t) & \rho_2 v(t) + \alpha & -(\mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -(\mu + \gamma) \end{pmatrix} X(t) + F(X(t))$$

où

$$F(X(t)) = \begin{pmatrix} \mu - \beta S(t)I(t) \\ \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) \\ (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) \\ -\beta C(t)I(t) \end{pmatrix}$$

alors $G(t, x(t), u(t))$ vérifié les hypothèse de théorème de Cauchy lipshitz et d'après ce qui procède le modèle(3.3) admet une solution positive sur B

3.3 Rappels sur l'étude de l'existence d'un contrôle optimale

considérons le système de contrôle suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $u(t)$ le contrôle et $x(t)$ l'état du système

le problème de contrôle optimale consiste à chercher un contrôle $u(t)$ et la variable d'état associée $x(\cdot)$ qui minimise ou maximise la fonction objective J tel que

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.5)$$

avec les fonctions $L \in C^1$ sur $I \times U \times V$ et f continue sur V

Soit M_0 et M_1 deux sous ensembles de V .

Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solutions de:

$$\begin{cases} x'_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)) \\ x_u(t_0) \in M_0, x_u(T) \in M_1 \\ \text{minimisant la fonction } J(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

On dit que le problème de contrôle optimal est à temps final non fixé si T est libre.

Définition 3.3.1 Soit $T > 0$, l'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé initialisé à x_0 est l'application

$$E_T : \begin{array}{l} U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \rightarrow x_u(t) \end{array}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, cette application associe à un contrôle u admissible, le point de la trajectoire associée à $u(\cdot)$ [13]

Définition 3.3.2 Soit $u(\cdot)$ un contrôle défini sur $I = [0, T]$ tel que la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ issue de $x(0) = x_0$ est définie sur I .

On dit que le contrôle $u(\cdot)$ est singulier sur I si la différentielle au sens de Fréchet de E_T n'est pas surjective sinon on dit qu'il est régulier [13]

Proposition 3.3.3 Soit $u(\cdot)$ un contrôle singulier sur $[0, T]$ pour le système(3.4) et $x(\cdot)$ la trajectoire singulier associée, alors il existe une application absolument continue $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ appelée vecteur adjoint, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$ tel que :

$$\begin{cases} \lambda'_i(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), \lambda(t), u(t))}{\partial x_i} & i = 1 \dots n \\ \frac{\partial H(t, x(t), \lambda(t), u(t))}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

où H est l'hamiltonienne du système(3.4) donne par:

$$H(t, x(t), \lambda(t), u(t)) = \lambda_0 L(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, x(t), u(t)),$$

avec $\lambda_0 = 0$) les multiplicateurs de lagrange., [13]

Théorème 3.3.4 principe de maximum de pontrygin(P.M.P) supposons que f et $g \in C^1/t, x, u$ est convexe en u , supposons que $u^*(t)$ et le contrôle optimale pour le problème(3.5) et soit $x^*(t)$ l'état associé et $\lambda(t)$ une fonction différentielle continue avec $\lambda(t) \geq 0, \forall t$. supposons que $\forall t_0 \leq t \leq t_f$,

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0$$

Alors

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

3.4 Application au modèle SIRC de la grippe A H1N1

on définit la fonction suivant:

$$\begin{aligned} J(x(t), u(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt & (3.6) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [\alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t) + \frac{1}{2} \tau_1 u^2(t) + \frac{1}{2} \tau_2 v^2(t)] dt \end{aligned}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \tau_1, \tau_2 \geq 0$$

considérons le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\min_u J(t, x, u) = \min_u \int_{t_0}^{t_f} [\alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t) + \frac{1}{2}\tau_1 u^2(t) + \frac{1}{2}\tau_2 v^2(t)] dt \\
S'(t) = \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) - \rho_1 S(t)u(t) \\
I'(t) = \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) - \rho_2 I(t)v(t) \\
R'(t) = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) - (\mu + \delta)I(t) + \alpha I(t) + \rho_2 S(t)u(t) \\
\quad + \rho_2 I(t)v(t) \\
C'(t) = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t) \\
S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, C(0) = C_0 \\
u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, v_{\min} \leq v(t) \leq v_{\max}
\end{array} \right. \quad (3.7)$$

L'objectif est à déterminer la meilleure stratégie pour minimiser le nombre des individus susceptibles et les individus infectés et le meilleur contrôle permettant d'effectuer ceci, on définit le Hamiltonien par:

$$\begin{aligned}
H(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0) &= \lambda_0 [\alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t) + \frac{1}{2}\tau_1 u^2(t) + \frac{1}{2}\tau_2 v^2(t)] \\
&+ \lambda_1(t) [\mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) - \rho_1 S(t)u(t)] \\
&+ \lambda_2(t) [\beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) - \rho_2 I(t)v(t)] \\
&+ \lambda_3(t) [\beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) - \rho_2 I(t)v(t) \\
&\quad + \rho_2 I(t)v(t)] \\
&+ \lambda_4(t) [\delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t)]
\end{aligned}$$

Remarque $\lambda_0 = 0$ est un cas critique

· si $\lambda_0 = 1$

on calcule les équations adjoint: $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3, \lambda_4(t)$ tel que

$$\begin{aligned}
 \lambda_1'(t) &= -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial S(t)} \\
 &= -[\alpha_1 - \mu\lambda_1(t) - \beta I(t)\lambda_1(t) - \rho_1 u(t)\lambda_1(t) \\
 &\quad + \beta I(t)\lambda_2(t) + \rho_1 u(t)\lambda_3(t)] \\
 &= -[\alpha_1 - \lambda_1(t)(\beta I(t) + \mu - \rho_1 u(t)) \\
 &\quad + \beta I(t)\lambda_2(t) + \rho_1 u(t)\lambda_3(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_2'(t) &= -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial I(t)} \\
 &= -[\alpha_2 - \beta S(t)\lambda_1(t) + \beta S(t)\lambda_2(t) + \sigma\beta C_2(t)\lambda_2(t) + \\
 &\quad -(\mu + \alpha)\lambda_2(t) - \rho_2 v(t)\lambda_2(t) + (1 - \sigma)\beta C(t)\lambda_3(t) \\
 &\quad - \beta C(t)\lambda_4(t) + \alpha\lambda_3(t) + \rho_2 v(t)\lambda_3(t)] \\
 &= -[\alpha_2 - \beta S(t)\lambda_1(t) + (\beta S(t) + \sigma\beta C(t) - (\mu + \alpha) - \rho_2 v(t))\lambda_2(t) \\
 &\quad + ((1 - \sigma)\beta C(t) + \alpha + \rho_2 v(t))\lambda_3(t) - \beta C(t)\lambda_4(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_3'(t) &= -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial R(t)} \\
 &= -[-(\mu + \delta)\lambda_3(t) + \delta\lambda_4(t)] \\
 &= (\mu + \delta)\lambda_3(t) - \delta\lambda_4(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4'(t) &= -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial C(t)} \\
&= -[\gamma\lambda_1(t) + \sigma\beta I(t)\lambda_2(t) + (1 - \sigma)\beta I(t)\lambda_3(t) \\
&\quad -\beta I(t)\lambda_4(t) - (\mu + \gamma)\lambda_4(t)] \\
&= -\gamma\lambda_1(t) - \sigma\beta I(t)\lambda_2(t) - (1 - \sigma)\beta I(t)\lambda_3(t) \\
&\quad +(\beta I(t) + (\mu + \gamma))\lambda_4(t)
\end{aligned}$$

condition d'optimalité se ramene à:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = 0 &\Rightarrow \tau_1 u(t) - \lambda_1(t)\rho_1 S(t) + \lambda_3(t)\rho_1 S(t) = 0 \\
&\Rightarrow u(t) = \frac{\rho_1 S(t)}{\tau_1}(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(t, x(t), v(t), \lambda(t))}{\partial v} = 0 &\Rightarrow \tau_2 v(t) - \lambda_2(t)\rho_2 I(t) + \lambda_3(t)\rho_2 I(t) = 0 \\
&\Rightarrow v(t) = \frac{\rho_2 I(t)}{\tau_2}(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))
\end{aligned}$$

si on suppose que

$$\begin{aligned}
u_{\min} &= v_{\min} \\
u_{\max} &= v_{\max}
\end{aligned}$$

donc si

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} \leq 0$$

alors le meilleur cōntrole sera

$$u(t) = 0$$

si

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} \geq 0$$

alors le meilleur cōntrole sera

$$u(t) = 0.9$$

alors

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{si } \frac{\rho_1 S(t)}{\tau_1}(\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) \leq u_{\min} \\ \frac{\rho_1 S(t)}{\tau_1}(\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) & \text{si } u_{\min} \leq \frac{\rho_1 S(t)}{\tau_1}(\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) \leq u_{\max} \\ u_{\max} & \text{si } \frac{\rho_1 S(t)}{\tau_1}(\lambda_1^*(t) - \lambda_3^*(t)) \geq u_{\max} \end{cases}$$

et même pour $v(t)$

$$v^*(t) = \begin{cases} v_{\min} & \text{si } \frac{\rho_2 I(t)}{\tau_2}(\lambda_2^*(t) - \lambda_3^*(t)) \leq v_{\min} \\ \frac{\rho_2 I(t)}{\tau_2}(\lambda_2(t) - \lambda_3(t)) & \text{si } v_{\min} \leq \frac{\rho_2 I(t)}{\tau_2}(\lambda_2^*(t) - \lambda_3^*(t)) \leq v_{\max} \\ v_{\max} & \text{si } \frac{\rho_2 I(t)}{\tau_2}(\lambda_2(t) - \lambda_3(t)) \geq v_{\max} \end{cases}$$

Il reste à déterminer $\lambda_i(\cdot)$.

En générale, pour ce type de situation, des méthodes numériques et des résultats de simulation sont appliqué pour trouver la meilleure manière d'approcher le contrôle optimal dans ce cas pour plus de détails voir[3],[5]

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une analyse de modèle mathématique qui modélise l'évolution de la grippe A H1N1, il est sous la forme SIRC.

Une étude d'existence et l'unicité de la solution est détaillée pour le système avec ou sans controle.

Bibliographie

- [1] H. Hethcote, M. Zhién, L. Shengbing, Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases, *Mathematical Biosciences* 180 (2002) 141–160.
- [2] R. Casagrandi, L. Bolzoni, S.A. Levin, V. Andreasen, The SIRCmodel and influenza A, *Mathematical Biosciences* 200 (2006) 152–169.
- [3] C. Castilho, Optimal control of an epidemic through educational campaign, *Electronic Journal of Differential Equations* 125 (2006) 1–11.
- [4] E. Verriest, F. Delmotte, M. Egerstedt, Control of epidemics by vaccination, *Proceedings of the American Control Conference* 2 (2005) 985–990.
- [5] H. Behncke, Optimal control of deterministic epidemics, *Optimal Control, Applications and Methods* 21 (2000) 269–285.
- [6] D. Iacoviello, G. Liuzzi, Fixed/free final time SIR epidemic models with multiple controls, *International Journal of Simulation and Modelling* 7 (2008) 81–92.
- [7] C. Pease, An evolutionary epidemiological mechanism, with applications to type A influenza, *Theoretical Population Biology* 31 (1987) 422–452.
- [8] G. Birkhoff, G.C.C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [9] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, John Wiley and Sons, UK, 1987.
- [10] P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, London, 1981.

- [11] R. Battiti, First and second order methods for learning: between steepest descent and Newton's method, *Neural Computation* 4 (1992) 141–166.
- [12] S. Lenhart, J.T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*, Mathematical and Computational Biology Series, Chapman & Hall/CRC, London, UK, 2007
- [13] Emmanuel Trélat *Contrôle optimal Notes de cours Master de Mathématiques*, Université d'Orléans 2007/2008
- [14] Daniela Iacoviello, Nicolino Stasiob *Optimal control for SIRC epidemic outbreak*