UNIVERSITÉ DE TLEMCEN
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Equations différentielles ordinaires et applications.

Mémoire de licence (L.M.D)

Option : Équations différentielle ordinaires.
Session 2012-2013.

Présenté par : **Achouri Ismail et Benkhaled Redouane.**

Sous la direction de : Dr. Maliki Youssef

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Le problème de Cauchy général **7**
2.1 Solutions maximales et globales. 9
2.2 Existence et unicité locale 11
2.3 Solutions maximales 14
2.4 Existence globale 17
2.5 Dépendance par rapport aux données initiales 19

3 Equations linéaires **25**
3.1 Existence globale 25
3.2 Résolvante 27
3.2.1 Cas des équations linéaires autonomes 28
3.2.2 Cas des équations linéaires en dimension finie 29
3.3 Formule de Duhamel 30

4 Applications **33**
4.1 Mécanique 33
4.2 Dynamique des Populations 34
4.3 Electricité 35
4.4 Météorologie 36

Chapitre 1

Introduction

Lors de l'étude des phénomènes dans la nature, les solutions de plusieurs problèmes de la Physique, de la Chimie et de la Biologie ou d'autres sciences, sont rarement exprimables sous forme d'une relation directe entre les grandeurs décrivant l'un ou l'autre processus évolutif. Cependant, dans la plupart des cas, on peut parvenir à établir une relation entre les grandeurs (fonctions) et les vitesses de leur changement c'est-à-dire on peut parvenir à trouver des équations dans lesquelles des fonctions inconnues entrent sous le signe de dérivée. Ces équations sont dites équations diffé rentielles.

Depuis Isaac Newton , les équations différentielles jouent un rô le essentiel pour la modélisation de systèmes physiques, mé caniques, chimiques, biologiques ou économiques et une part prépond érante des phénomènes modélisés par les mathématiques le sont par des équations différentielles.
Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équations différentielles ordinaires. De telles équations apparaissent chaque fois que l'on veut décrire l'évolution déterministe d'un système au cours du temps : systèmes de points matériels, réactions chimiques, problèmes d'évolution de population, de diffusion d'épidémies, bref chaque fois que l'on étudie la dépendence d'un système par rapport à une variable.
Ce mémoire présente une introduction à la théories classique des equations différen-

tielles ordinaires, pour des fondements de cette théorie on peut consulter les ouvrages et [2] et [1], un exposé moderne est présenté dans [3]. Le chapitre 2 est consacré à l'étude des problèmes d'existence, d'unicité de solution du problème de Cauchy et sa dépendance de la condition initiale. Dans le chapitre 3, on étudie les équations différentielles linéaires à coefficients constants, on verra que les solutions s'expriment à l'aide de l'exponentielle de matrice. Dans le chapitre 4 on présente quelques applications.

Chapitre 2

Le problème de Cauchy général

dans ce chapitre, on étudie les problèmes d'existence et d'unicité locale et globale d'un problème de Cauchy. on commence par donner quelques définitions.
Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, X un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $U_1, ...U_k$ des ouvert de X.

Définition 2.1 *Une équation différentielle sur l'espace de Banach X est une équation de la forme*

$$H(t, y, y', ..., y^{(k)}) = 0$$

où k est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation, H est une fonction donnée de $(k+2)$ variables supposée régulières sur $I \times U \times_1 U_2 \times ... \times U_k$, y est la fonction inconnue de I dans l'espace de Banach X et $y, y', ..., y^{(k)}$ sont ses dérivées successives.
Plus précisément le problème est de trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $y : t \longmapsto y(t)$ derivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre k et vérifiant l'équation

$$\forall t \in I, H(t, y, y', ..., y^{(k)}) = 0$$

cette équation est de forme très générale,on pratique,on préférera travailler avec des équations plus particulières dites du type explicite, pour lesquelles il existe une fonction G régulière sur $I \times U \times U_1 \times ... \times U_{(k-1)}$ tel que

$$y^{(k)} = G(t, y, y', ..., y^{(k-1)})$$

Une première remarque est qu'une équation du type ci-dessus peut se ramener à une équation d'ordre 1, en effet

$$H(t, y, y', ..., y^{(k)}) = 0 \iff y^{(k)} = G(t, y, y', ..., y^{(k-1)})$$

faiseent le chengement de variable suivant

$$\begin{cases} x = y' \\ x' = y'' \\ \vdots \\ x^{(k-1)} = y^{(k)} \end{cases}$$

alors

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ G(t, y, y', ..., y^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

Soit $f : I \times U \to X$ une application continue, U un ouvert de X On considère l'équation différentielle :

$$u' = f(t, u) \tag{2.1}$$

Définition 2.2 *Une solution u de* (2.1) *est une fonction $u \in C^1$ sur un intervalle $J \subset I$ et à valeurs dans U, dont la dérivée vérifie $u' = f(t, u)$ pour tout $t \in J$.*

Sans la donnée de conditions initiales, il est impossible de définir la notion de solution d'un système différentiel du premier ordre, c'est pourquoi on introduit un problème standard qui est le problème de Cauchy.

Définition 2.3 *On appelle condition initiale de l'equation* (2.1) *une valeur $(t_0, u_0) \in I \times U$ tel que la solution cherchée u satisfit à la condition $u(t_0) = u_0$.*

Définition 2.4 (Problème de Cauchy) *L'équation différentielle* (2.1) *avec une condition initiale s'appelle problème de Cauchy qui s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Résoudre le problème de Cauchy (localement) revient à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction u de classe C^1 sur J satisfaisant (2).

Rappelons qu'une fonction f est dite de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$ si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k. Le premier théorème qu'on démontre concerne la régularité des solutions de (2.1)

Théorème 2.1 *si $f : D \subset \mathbb{R} \times U \to X$ est de classe C^k alors toute solution ϕ de l'équation différentielle* (2.1) *est de classe C^{k+1}*

Preuve. Pour k fixé supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$ soit de classe $C^k(D)$, comme $\phi : I \to U$ est solution de (2.1) c'est à dire $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, donc ϕ' est de classe C^K, ce qui signifie que ϕ est de classe C^{k+1}. ∎

2.1 Solutions maximales et globales.

Avant de donner les théorèmes d'existence des solutions, il est bon de préciser quelle type de solutions qu'on recherche. Pour cela, on introduit les définitions suivantes :

Définition 2.5 *soient $\phi : I \to U$ et $\widetilde{\phi} : \widetilde{I} \to \widetilde{U}$ deux solutions de l'équation différentielle* (2.1). *On dit que $\widetilde{\phi}$ est un prolongement de ϕ si : $I \subset \widetilde{I}$ et $\widetilde{\phi}(t) = \phi(t)$ pour tout $t \in I$.*

Définition 2.6 *Une solution $\phi : I \to U$ de* (2.1) *est dite maximale si ϕ n'admet pas de prolongement $\widetilde{\phi}$ avec I contenu strictement dans $\widetilde{I}$.*

Définition 2.7 *Une solution $\phi : I \to U$ de* (2.1) *est dite globale si ϕ est finie sur l'intervalle I tout entier*

Remark 2.2 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Définition 2.8 (Equation intégrale du problème de Cauchy) *Le problème de Cauchy peut se mettre sous une forme équivalante donnée par le théorème suivant :*

Théorème 2.3 *Supposons que $f : I \times U \to X$ soit une application continue, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U ouvert connexe non vide d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach et (t_0, u_0)un point fixé de $I \times U$ et u une fonction définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ qui contient t_0,alors u est solution du problème de Cauchy (2.2) sur J si et seulement si*

1. *pour tout $t \in J, (t, u(t)) \in I \times U$*
2. *u est continue sur J*
3. *pour tout $t \in J$*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

Preuve. Soit $u : J \to U$ une fonction continue sur un intervalle ouvert J qui contient t_0 et est tell que $\{(t, u(t))/t \in J\} \subset I \times U$.
Supposons que u est une solution du problème de Cauchy (2.2) , alors u est dérivable sur J et vérifie :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

En intégrant les deus membres de t_o à t, on obtient pour tout $t \in J$,

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds,$$

ce qui donne, en remplaçant $u(t_o)$ par u_o

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \text{ pour tout } t \in J.$$

Inversement, supposons que pour tout $t \in J$, u vérifie

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \tag{2.3}$$

alors, d'après la continuité de u et f, donc la derivabilté de la fonction $t \to f(t, u(t)$,on obtient

$$u'(t) = f(t, u(t)), \text{ pour tout } t \in J, \tag{2.4}$$

de plus u vérifie $u(t_o) = u_o$ ce qui signifie que u est solution du problème (2.2) ■

2.2 Existence et unicité locale

Dans cette section, on va étudier l'unicité de solution locale. La condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Cauchy-Lipschitz que si f soit localement lipschitzienne (par rapport à la deuxième variable) alors l'unicité de solution est assurée. Pour cela, on aura besoin du lemme de Gronwall qui est un outil très important dans l'étude.

Lemme 2.1 (Gronwall) *Soit* $u \in C([0,T];\mathbb{R}^+$. *Supposons qui'il existe des fonctions* a *et* $b \in C([0,T];\mathbb{R}^+$ *telles que*

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau \textit{ pour tout, } t \in [0,T]$$

alors

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t b(\tau)a(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau \textit{ pour tout } t \in [0,T].$$

Preuve. La seule astuce consiste à majorer l'intégrale du second membre.Posons

$$v(t) = \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau,$$

alors par hypothèse on obtient

$$v'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)(b(t) + v(t)),$$

ce qui donne, en multipliant les deux membres par $e^{-\int_0^t a(s)ds}$,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t a(s)ds}v(t)\right) \leq e^{-\int_0^t a(s)ds}a(t)b(t),$$

d'ou par intégration des deux membres de 0 à τ (noter que $v(o) = 0$ par définition),

$$e^{-\int_0^\tau a(s)ds}v(\tau) \leq \int_0^\tau e^{-\int_0^t a(s)ds}a(t)b(t)dt,$$

donc,

$$v(\tau) \leq \int_0^\tau e^{\int_0^\tau a(s)ds}e^{-\int_0^t a(s)ds}a(t)b(t)dt = \int_0^\tau e^{\int_t^\tau a(s)ds}a(t)b(t)dt,$$

ce qui implique, en changeant τ par t, que

$$v(t) \leq \int_0^t e^{\int_\tau^t a(s)ds} a(\tau)b(\tau)d\tau \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

■

On peut donner une autre version de l'inégalité obtenue, en intégrant par parties le seconde membre de l'inégalité (2.2)

$$u(t) \leq b(0)e^{\int_0^t a(s)ds} - 1 + \int_0^t b'(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds} d\tau, \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

En particulier, si b est constante, on obtient simplement :

$$u(t) \leq b\ e^{\int_0^t a(s)ds}$$

Théorème 2.4 (Cauchy-Lipschitz) *On suppose que la fonction f soit continue sur $I \times U$ et localement lipschtzienne par apport à la deuxième variable, où I est un ouvert de $\mathbb{R}$ et U ouvert connexe non vide d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Alors, quel que soit $(t_0, u_0) \in I \times U$, il existe $\tau > 0$ et une unique solution $u \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; U)$ du problème*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \textit{pour tout } t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau].$$

Preuve. son perte de généralité, on considère l'intervalle $[t_0, t_+]$ avec $t_+ = t_0 + \tau > t_0$ le cas de l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ s'en déduisant par un changement de variable de la forme $t \longmapsto \alpha(t_0 - t)$.

La démonstration du théorème se fait en quatre étapes, la première consiste à choisir ce qu'on appelle parfois un cylindre de sécurité

$$C(t_+, R) = [t_0, t_+] \times \overline{B}(u_0, R) \subset I \times U$$

avec $t_+ > t_0 > 0$ et $\overline{B}(u_0, R)$ est la boule fermée de centre u_0 et de rayon R. Comme f est continue, elle est bornée sur le compact $C(t_+, R)$, disons par une constante M. D'autre part, on a également une constante de Lipschitz L pour laquelle

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x - y\| \qquad \text{pour tous } t \in [t_0, t_+], x \text{ et } y \in \overline{B}, (u_0, R)$$

comme on l'a déjà noté, une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))d\tau$$

on cherche donc la solution comme limite de la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u(t_o), u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u_n(\tau))d\tau.$$

La deuxième étape consiste à vérifier que pour t_+ assez proche de t_0, la suite (u_n) est bien définie dans $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$. En effet, la fonction u_0 constante et est bien à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$ et si u_n est continue sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$, alors u_{n+1} est bien définie et de plus :

$$\|u_{n+1}(t) - u_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u_n(\tau))\| d\tau \leq (t_+ - t_0)M,$$

donc, si on choisie le t_+ de telle sorte que

$$(t_+ - t_0)M \leq R,$$

alors u^{n+1} est aussi à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$.
La troisième étape consiste à montrer que pour $t_+ \to t_0$, la suite u_n est de Cauchy et donc convergente dans l'espace de Banach $C([t_0, t_+]; X)$.
Pour $n \geq 1$ on a,

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u_n(\tau)) - f(\tau, u_{n-1}(\tau))\| d\tau \leq (t_+ - t_0)L \sup_{[t_0, t_+]} \|u_n - u_{n-1}\|,$$

donc, si t_+ est tel que

$$(t_+ - t_0)L \leq \frac{1}{2},$$

alors par récurrence on obtient

$$\sup_{[t_0, t_+]} \|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{1}{2^n} \sup_{[t_0, t_+]} \|u_1 - u_0\|,$$

et donc la suite u_n est de Cauchy.
La dernière étape consiste à vérifier que la limite u de la suite u_n est solution de notre problème. Cela se déduit par passage à la limite dans l'égalité

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u_n(\tau))d\tau$$

ce qui donne

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))d\tau$$

qui signifie que u est solution de classe C^1 par régularité des solutions.Ceci achève la preuve de l'existence d'une solution.
Pour l'unicité, on applique le lemme de Gronwall. Supposons q'il existe deux solutions du même problème de Cauchy, u et v sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$, alors

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= u(t_0) - v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u(\tau))\right) d\tau \\ &\leq \|u(t_0) - v(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, u(\tau))\| \, d\tau. \end{aligned}$$

Posons $w(t) = ||u(t) - v(t)||, b(t) = ||u(t_o) - v(t_o)||$ et $a(t) = L$, alors on obtient

$$w(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)w(\tau)d\tau,$$

par le lemme de Gronwall, on obtient

$$w(t) \leq b(t) + \int_{0}^{t} a(\tau)b(\tau)e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds}d\tau,$$

mais, puisque $w(t) \geq 0$ et $u(t_o) = v(t_o)$, c'eat à dire $b(t) = o$, alors $w(t) = 0$ et donc $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_+]$ $\blacksquare$

2.3 Solutions maximales

En pratique, il est important de connaître le plus grand intervalle $J \subset \mathbb{R}$ pour lequel la conclusion du théorème précédent soit vraie. On considère l'équation différentielle (2.1) définie au début de ce chapitre. Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation (**??**) définie respectivement sur des intervalles J_1 et $J_2 \subset I$. On a le résultat suivant

Lemme 2.2 *Soit f une fonction continue sur $I \times U$ et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. S'il existe un temps $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors u_1 et u_2 coincident sur $J_1 \cap J_2$ et définissent un ensemble de solution sur $J_1 \cup J_2$.*

Preuve. Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation (2.1), on suppose que u_1 est définie sur $J_1 \subset I$ et u_2 est définie sur $J_2 \subset I$. On suppose qu'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$.
Posons $E = \{t \in J_1 \cap J_2, u_1(t) = u_2(t)\}$, l'ensemble E n'est vide, car $t_0 \in E$ (voir que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$). E est fermé, car c'est l'image réciproque d'un fermé $\{0\}$ par une application continue qui est $u_1 - u_2$.
De plus E est ouvert, en effet, soit t_* un point quelconque de E, comme $t_* \in E$, alors $u_1(t_*) = u_2(t_*)$.
Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_*) = \alpha \end{cases} \text{ou } \alpha = u_1(t_*) = u_2(t_*) \ , \tag{2.5}$$

Comme f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, d'après le théorème précédent le problème de Cauchy (2.5) admet une unique solution définie dans $[t_* - h, t_* + h] \subset J_1 \cap J_2$, $h > 0$, mais comme u_1 et u_2 sont deux solutions de (2.5), alors par unicité on a :$u_1(t) = u_2(t)$, pour tout $t \in [t_* - h, t_* + h]$, c'est à dire que $[t_* - h, t_* + h \subset E$, d'où quelque soit $t_* \in E$, il exist un voisinage de t_*, $V_{t_*} = [t_* - h, t_* + h]$ tel que $V_{t_*} \subset E$, donc E est ouvert. Par connexité $E = J_1 \cap J_2$.
De plus, u_1, u_2 définissent un ensemble de solution sur $J_1 \cup J_2$ car la fonction u définie par :

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), t \in J_1, \\ u_2(t), t \in J_2 \end{cases} \text{est une solution de (2.1) définie sur } J_1 \cup J_2 \ .$$

■ On peut se demander pour quelles raisons une solution de notre problème de Cauchy peut ne pas être définie sur I tout entier. Le théorème suivant montre que l'unique raisons est « l'explosion en temps finis »

Théorème 2.5 *Soit $f \in C(I \times U; X)$ localement lipschtzienne par rapport a la seconde variable et soit u une solution maximale de* (2.1) *définie sur $j =]a, b[$. Si*

$b < \sup I$, alors u sort définitivement de tout compact $K \subset U$ lorsque t tend vers b et si $a > \inf I$, alors u sort définitivement de tout compact $K \subset U$ lorsque t tend vers a. Autrement dit, si $b < \sup I$ ou, $a > \inf I$

$$\lim_{t \to b} \|u(t)\| = +\infty$$

Preuve. Soit u une solution maximale définie sur $j =]a, b[$ et supposons que $b < \sup I$. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(t_n)_n$ tel que $(u(t_n)) \subset K$ compact et

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = b,$$

comme K compact, la suite $(u(t_n))$ est bornée, par suite d'après le théorème de bolzano-weierstasse on peut extraire une sous-suite qu'on l'a note encore $(u(t_n))$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} u(t_n) = l \in K$$

Posons $u_n := u(t_n)$ et choisissons n suffisamment grand tel que $\|u(t_n) - l\| < \delta$ avec δ assez petit, considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_n) = u_n \end{cases}$$

D'après le théorème d'existence et d'unicité de cauchy-lipschitz le problème admet une unique solution définie sur $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ avec $\alpha > 0$, comme

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = b,$$

alors pour n suffisamment grand l'intervalle $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ n'est plus inclus dans $]a, b[$ par suite on peut prolonger la fonction u sur $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ ce qui est en contradiction avec le fait que u est maximale. ■

Lemme 2.3 (Minoration du temps d'existence) *supposons que f soit continue, bornée et Lipschitzienne par rapport à u dans$[\underline{t} - 2\underline{\tau}, \underline{t} + 2\underline{\tau}] \times \overline{B}(\underline{u}, 2R)$pour $\underline{\tau} > 0$ et $R > 0$. Alors il existe $\tau \in]0, \underline{\tau}]$ tel que pour tout$(t_0, u_0) \in [\underline{t} - \underline{\tau}, \underline{t} + \underline{\tau}] \times \overline{B}(\underline{u}, R)$, la solution maximale du problème de Cauchy* (2.2) *soit définie sur un intervalle contenant $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*

Preuve. Il suffit de reprendre la démonstration du théorème de Cauchy- Lipscitz, en effet, la méthode suivie permet de construire une solution dans l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ qui soit à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$, donc à valeurs dans $\overline{B}(\underline{u}, 2R)$

$$u_0 = u_{t_0}, u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u^n(\tau))d\tau.$$

Comme f est bornée on a

$$\|u_{n+1}(t) - u_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u_n(\tau))\| d\tau \leq (t_+ - t_0)M,$$

si on suppose que

$$(t_+ - t_0)M \leq R,$$

alors u_{n+1}est aussi à valeurs dans $\overline{B}(u_0, R)$. Comme f est Lipscitzienne, on aura

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u^n(\tau)) - f(\tau, u_{n-1}(\tau))\| d\tau \leq (t_+ - t_0)L \sup_{[t_0, t_+]} \|u_n - u_{n-1}\|,$$

donc, si par exemple t_+ est tel que

$$(t_+ - t_0)L \leq \frac{1}{2}$$

et donc la suite $(u_n$ est de Cauchy pour tout $\tau > 0$ et inférieur à

$$\min(\underline{\tau}, \frac{R}{M}, \frac{1}{2L})$$

■

La question naturelle est ensuite de savoir à quelle(s) condition(s) une solution maximale est globale ?

2.4 Existence globale

On peut parfois montrer que toutes les solutions maximales sont globales. C'est le cas si la fonction f est définie sur X tout entier et si elle est globalement Lipschitzienne : car alors il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition, ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz.

Théorème 2.6 *on suppose $f \in C(I \times X; X)$ et globalement Lipschitzienne par rapport à u alors, quel que soit $(t_0, u_0) \in I \times X$, il existe un unique $u \in C^1(I, X)$solution de (2)*

Preuve. Si (J, u) est une solution maximale et $a \in J$, on a

$$u(t) = u(a) + \int_a^t f(s; u(s))ds$$

On prend la norme, pour $t > a$ et on utilise l'hypothèse

$$\|u(t)\| \leq \|u(a)\| + \int_a^t k(s)\, \|u(s)\| + \|f(s,0)\|\, ds$$

Supposons que la limite supérieure β de J soit finie et dans I, on a alors

$$\|u(t)\| \leq \left(\|u(a)\| + \int_a^\beta \|f(s,0)\|\, ds\right) + \|u(a)\| + \int_a^t k(s)\, \|u(s)\|\, ds \qquad \forall a \leq t < \beta$$

D'après le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\|u(t)\| \leq \left(\|u(a)\| + \int_a^\beta \|f(s,0)\|\, ds\right) e^{\int_a^\beta k(s)ds} \qquad \forall a \leq t < \beta$$

Ceci montre que la fonction u est bornée au voisinage de la borne β , ce qui contredit le théorème d'explosion en temps fini, donc $\beta \notin I$. ■

Remark 2.7 *L'hypothèse de ce théorème est très forte. En général, il ne s'applique pas à des fonctions f non-linéaires. En revanche, il s'applique aux fonctions f affines, si $b \in C(I; X)$ et $A \in C(I; L(X))$ (où $L(X)$ désigne l'espace des application linéaires continues de X dans X), toutes les solutions maximales de*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t)$$

sont globales.

2.5 Dépendance par rapport aux données initiales

Connaissant l'existence et l'unicité des solutions, la question naturelle du point de vue de la modélisation est leur dépendance par rapport aux conditions initiales. Il est très facile de voir que cette dépendance est continue, et même Lipschitzienne.

Lemme 2.4 *On suppose f de classe C^1 sur $I \times U$, où I un ouvert de R et U ouvert X. Soit $(t_0, u_0) \in I \times U$ et $R > 0$ tel que $B(u_0, R) \subset U$. Alors il existe $\tau > 0$ et $c > 0$tel que pour tous v_1 et $v_2 \in \overline{B}(u_0, \frac{R}{2})$, les solutions u_1 et u_2 des problèmes de Cauchy pour l'équation*

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

et les données initiales $u_{i(}t_0) = v_i$ soient définies sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ et vérifient l'estimation :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq c\|v_1 - v_2\|$$

Preuve. En adaptant légèrement la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, on voit que, si M est un borne de f et L une constante de Lipschitz de f sur le cylindre

$$[t_0 - T, t_0 + T] \times B(u_0, R) \subset I \times U,$$

alors pour tout$v \in B(u_0, \frac{R}{2})$ on peut construire une solution du problème de Cauchy de donnée initiale v qui soit à valeurs dans $B(u_0, \frac{R}{2})$ et donc dans $B(u_0, R)$ par l'inégalité triangulaire pour

$$|t - t_0| \leq \min(T, \frac{R}{2M}, \frac{1}{2L}) =: \tau$$

L'estimation de la différence entre deux solutions est une application du lemme de Gronwall à peine plus élaborée que la preuve de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. En faisant la différence des deux relations :

$$u_i(t) = v_i + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u_i(\tau))d\tau$$

,On obtient l'inégalité :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|v_1 - v_2\| + L \int_{t_0}^{t} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds$$

pour $t \geq t_0$, d'où par le lemme de Gronwall :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq e^{Lt} \ \|v_1 - v_2\| \qquad\qquad \text{pour } t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$$

■

Théorème 2.8 ***du flot*** *: On suppose f de classe C^1 sur$I \times U$, où I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U ouvert $\mathbb{R}^n$. Soit $(t_0, u_0) \in I \times U$. Il existe un voisinage $W \times V$de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et une unique application $\phi^{t_0} \in C^1(W \times V; U)$telle que*

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^{t_0}}{\partial t}(t, v) = f(t, \phi^{t_0}(t, v) \ \textit{pour tout} \ (t, v) \in W \times V \\ \phi^{t_0}(t_0, v) = v \ \ \textit{pour tout} \ v \in V \end{cases}$$

La fonction ϕ^{t_0} est appelée flot (local) au point t_0 de l'équation différentielle. En particulier, ce théorème affirme que pour toute donnée initiale v proche de u_0 l'applicationu $:\longmapsto$ $\phi^{t_0}(t, v)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (u'(t) = f(t, u), \qquad \textit{pour tout} \ t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u(t_0) = v, \end{cases}$$

et qu'en plus elle dépend de manière C^1 de v. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira simplement ϕ au lieu de ϕ^{t_0} .La démonstration du théorème du flot repose sur le calcul suivant, formel pour l'instant.Supposons que l'on ait construit ϕ et que l'on puisse dériver l'égalité

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, v) = f(t, \phi(t, v))$$

par rapport à v. Désignons par D la différentiation par rapport aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et soit $\psi(t, v) = D\phi(t, v)$ (par définition, c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, qui s'identifie avec une matrice $n \times n$). Alors, en permutant $\frac{\partial}{\partial t}$ avec D (on suppose les fonctions suffisamment régulières pour pouvoir appliquer le lemme de Schwarz), on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, v) = Df(t, \phi(t, v))\psi(t, v)$$

En supposant ϕ connue, ceci est une équation différentielle linéaire par rapport à $\psi \in \mathbb{R}^{n^2}$ .De plus, en dérivant la relation $\phi(t_0, v) = v$ on obtient la condition initiale $\psi(t_0, v) = I_n$.

Preuve. Pour $v \in V := \overline{B}(u_0, R/2)$ avec $\overline{B}(u_0, R) \subset U$, notons

$$\begin{array}{rcl} \phi(\cdot, v) & : & W := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to \overline{B}(v, R/2) \\ t & \longmapsto & \phi(t, v) = u(t) \end{array}$$

la solution de l'équation différentielle construite dans le lemme (16) pour la donnée initiale v. Alors ϕ est de classe C^1 par rapport à t, et Lipschitzienne par rapport à v avec une constante de Lipschitz uniforme sur $W \times V$. Elle est en particulier continue comme fonction de (t, v). Donc l'application

$$(t, v) \longmapsto Df(t, \phi(t, v))$$

est aussi continue. Par suite, pour tout $v \in V$ l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dM}{dt} = Df(t, \phi(t, v))M$$

admet une solution unique sur W tout entier satisfaisant la condition initiale

$$M(t_0) = I_n.$$

Notons $\chi(t, v) = M(t)$ cette solution à l'instant t.La première étape de la démonstration consiste à montrer que χ dépend continument de (t, v). D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\chi(t, v) - \chi(\tau, w)\| \leq \|\chi(t, v) - \chi(\tau, v)\| + \|\chi(\tau, v) - \chi(\tau, w)\|$$

Le premier terme se majore directement par :

$$\begin{array}{rcl} \|\chi(t, v) - \chi(\tau, v)\| & \leq & |t - \tau| \max\limits_{s \in [\tau, t]} \|Df(s, \phi(s, v))\| \max\limits_{s \in [\tau, t]} \|\chi(s, v)\| \\ & \leq & |t - \tau| a(\tau, t; v) e^{a(\tau, t; v) \max(|\tau|, |t|)} \end{array}$$

par lemme de Gronwall, avec

$$a(\tau, t; v) := \max_{s \in [\tau, t]} \|Df(s, \phi(s, v))\|$$

D'autre part, on peut majorer le second terme grâce au lemme Gronwall.On obtient :

$$\|\chi(\tau, v) - \chi(\tau, w)\| \leq b(\tau; v, w)|\tau| e^{\alpha(\tau; v, w)|\tau|}$$

où

$$b(\tau;v,w) := \|Df(\tau,\phi(\tau,v)) - Df(\tau,\phi(\tau,w))\|$$

$$\alpha(\tau,t;v,w) := \max(\|Df(\tau,\phi(\tau,v))\|, \|Df(\tau,\phi(\tau,w))\|)$$

Par continuité de Df et de ϕ, les fonctions a et α sont localement bornées, tandis que $b(\tau;v,w)$ converge vers 0 lorsque v tend vers w. Donc $\|\chi(t,v) - \chi(\tau,w)\|$ tend vers 0 lorsque (t,v) tend vers (τ,w).

La seconde étape est de montrer que $D\phi(t,v)$ existe et coïncide avec $\chi(t,v)$. Considérons pour cela le taux d'accroissement :

$$\theta(t,h) := \phi(t,v+h) - \phi(t,v)$$

D'après le Lemme (19),

$$\|\theta(t,h)\| \leq C\,\|h\|$$

si v et $v+h$ sont dans V. Et on a par définition de ϕ,

$$\theta(t_0,h) = v+h-v = h$$

Donc

$$\theta(t,h) = h + \int_{t_0}^{t} (f(s,\phi(s,v+h)) - f(s,\phi(s,v)))ds$$

D'autre part, par définition de χ :

$$\chi(t,v)h = \int_{t_0}^{t} Df(s,\phi(s,v))\chi(t,v)hds$$

D'où, par soustraction et inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\|\theta(t,h) - \chi(t,v)h\| \;\leq\; & \int_{t_0}^{t} \|f(s,\phi(s,v+h)) - f(s,\phi(s,v)) - Df(s,\phi(s,v))\cdot\theta(s,h)\|ds \\ & + \int_{t_0}^{t} \|Df(s,\phi(s,v))(\theta(s,h) - \chi(s,v)\cdot h)\|ds\end{aligned}$$

Le premier terme se majore en utilisant le fait que f est de classe C^1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|y-x\| \leq \eta$ entraine

$$\|f(s,x) - f(s,y) - Df(s,y)\cdot(x-y)\| \leq \varepsilon\|x-y\|$$

pour tout $s \in [t_0, t]$. Donc, pour $h \leq \eta/C$, on a

$$\|f(s, \phi(s, v+h)) - f(s, \phi(s, v)) - Df(s, \phi(s, v)) \cdot \theta(s, h)\| \leq \varepsilon Ch$$

d'où pour tout $t \geq t_0$:

$$\|\theta(t, h) - \chi(t, v) \cdot h\| \leq \varepsilon Ch(t - t_0) a(t_0, t; v) \int_{t_0}^{t} \|\theta(s, h)\chi(s, v) \cdot h\| ds$$

avec la même signification pour a que dans la première étape.On appliquant une nouvellefois le lemme de Gronwall, on déduit pour $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$:

$$\|\theta(t, h) - \chi(t, v) \cdot h\| \leq \varepsilon Ch\tau e^{a(t_0 - \tau, t_0 + \tau; v)\tau}$$

Ceci montre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\phi(t, v+h) - \phi(t, v) - \chi(t, v) \cdot h) = 0$$

c'est-à-dire que ϕ est différentiable par rapport à v et $D\phi(t, v) = \chi(t, v)$.

En conclusion, ϕ est continûment dérivable par rapport à t et à v et donc de classe C^1.

En prime, on a montré que la différentielle de ϕ par rapport à v, $D\phi$ est de classe C^1 et solution de l'équation linéaire, appelée équation aux variations :

$$\frac{dM}{dt} = Df(t, \phi(t, v))M$$

avec la condition initiale

$$D\phi(t_0, v) = I_n$$

■

Chapitre 3

Equations linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse exclusivement aux équations différentielles du type

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t) \tag{3.1}$$

avec $b \in C(I; X)$ et $A \in C(I; \mathfrak{L}(X))$, où $\mathfrak{L}(X)$ d ésigne l'espace des application linéaires continues dans l'espace de Banach X. On dit que sont des équations « linéaires » (car $A(t)$ est linéaire) avec « terme source » $b(t)$.

3.1 Existence globale

D'après le théorème (17), les solutions de (6) sont globales.

Théorème 3.1 *Pour $b \in C(I; X)$ et $A \in C(I; \mathfrak{L}(X))$, quel que soit $(t_0, u_0) \in I \times X$, il existe une unique fonction $u \in C^1(I; X)$ solution de (6) telle que $u(t_0) = u_0$.On peut aussi donner une démonstration de ce théorème en faisant appel au théorème de point fixe suivant :*

Théorème 3.2 *Soit T un opérateur sur un espace de Banach dont une puissance est contractante. Alors T admet un point fixe unique.*

Preuve. (**théo 22**)Ce résultat est une conséquence facile du théorème de point fixe de Banach-Picard. Par hypothèse, il existe un entier k tel que T^k soit contractant et donc admette un point fixe unique u. Alors

$$T^k(T(u)) = T(T^k(u)) = T(u)$$

Donc $T(u)$ est aussi un point fixe de T^k. A cause de l'unicité de ce point fixe on a ainsi $T(u) = u$. De plus, tout point fixe de T étant évidemment un point fixe de T^k, u est l'unique point fixe de T. ■

Preuve. (**théo 21**)Pour résoudre le problème de Cauchy de donnée « initiale» $u(t_0) = u_0$ on cherche u tel que

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds$$

c'est-à-dire de façon équivalente

$$u(t) = v(t) + u_0 \ \text{ avec } \ v(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)(v(s) + u_0) + b(s))ds$$

Pour simplifier, on suppose (sans perte de généralité, il suffit de translater toutes les fonctions en jeu) $t_0 = 0$. Soient α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $[\alpha, \beta] \subset I$. Définissons alors l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T & : & C([\alpha,\beta];X) \longrightarrow C([\alpha,\beta];X) \\ v & \longmapsto & Tv; Tv(t) = \displaystyle\int_0^t (A(s)(v(s) + u_0) + b(s))ds \end{array}$$

Quels que soient v et w dans $C([\alpha, \beta]; X)$ on a

$$Tv(t) - Tw(t) = \int_0^t A(s)(v(s) - w(s))ds$$

et donc

$$\|Tv(t) - Tw(t)\| \leq Ct \max_{s\in[0,t]} \|v - w\|, \qquad \text{avec } C := \max_{s\in[\alpha,\beta]} \|A(s)\|$$

Montrons par récurrence que

$$\|T^n v(t) - T^n w(t)\| \leq C^n \frac{t^n}{n!} \max_{s\in[0,t]} \|v - w\|$$

pour tout $t \in [0, t]$. C'est vrai à l'ordre 1 comme on vient de le voir. Supposons l'inégalitévraie à l'ordre n. Alors

$$\begin{aligned}
\|T^{n+1}v(t) - T^{n+1}w(t)\| &= \|T(T^n v(t)) - T(T^n w(t))\| \\
&\leq C \int_0^t \|T^n v(t) - T^n w(t)\| ds \\
&\leq C \max_{s\in[0,t]} \|v - w\| \int_0^t C^n \frac{s^n}{n!} ds
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. En évaluant l'intégrale on obtient immédiatement l'inégalité à l'ordre $n + 1$:

$$\|T^{n+1}v(t) - T^{n+1}w(t)\| \leq C^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \|v - w\|$$

Par conséquent, on a

$$\|T^n v - T^n w \leq \|C^n \frac{(\beta - \alpha)^n}{n!} \|v - w\|$$

quels que soient v et w. Donc T^n est contractant pour n assez grand et d'après le théorème (22), T admet un point fixe unique. ■

3.2 Résolvante

Considérons l'équation différentielle linéaire dans $\mathfrak{L}(X)$:

$$\frac{dM}{dt} = A(t) \cdot M \tag{3.2}$$

D'après le théorème (21), ses solutions maximales sont globales.
Définition : On appelle résolvante de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = A(t) \cdot u$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} R & : & I \times I \longrightarrow \mathfrak{L}(X) \\ (t, t_0) & \longmapsto & R(t, t_0) \end{array}$$

où $t \longmapsto R(t, t_0)$ est la solution du problème de Cauchy pour (7) avec la condition initiale $R(t_0, t_0) = I_X$.

On observe que pour tout $u_0 \in X$, l'applicationu : $t \longmapsto R(t, t_0)u_0$ est la solution du problème de Cauchy pour (6) et la condition initiale $u(t_0) = u_0$. Autrement dit, le flot de (6) est donne par

$$\phi^{t_0}(t, u_0) = R(t, t_0)u_0$$

Par construction, R est continument différentiable par rapport à t. De plus, le lemme (19) (application simple du lemme de Gronwall) montre que R est Lipschitzienne par rapport à t_0. Donc en particulier, R est une fonction continue de (t, t_0) Comme l'ensemble des isomorphismes de $\mathfrak{L}(X)$ est un ouvert et $R(t_0, t_0) = I_X$ est trivialement un isomorphisme, $R(t, t_0)$ est un isomorphisme pour tout t voisin de t_0. En fait, ceci est vrai pour tout $t \in I$,comme conséquence de la :

Proposition 3.3 *La résolvante est telle que* $\bullet R(t, s) \circ R(s, t_0) = R(t, t_0)$ *quels que soient* $t, s, t_0 \in I$. $\bullet$ *Pour tout* $(t, t_0) \in I \times I$, $R(t, t_0)$ *est un isomorphisme, d'inverse* $R(t_0, t)$.*De plus, R est continûment différentiable comme fonction de deux variables, et ses dérivées partielles satisfont*

$$\frac{dR}{dt}(t, s) = A(t) \circ R(t, s) \;\; et \;\; \frac{dR}{ds}(t, s) = -R(t, s) \circ A(s)$$

Remark 3.4 *En général, on ne connaît pas explicitement la résolvante.*

3.2.1 Cas des équations linéaires autonomes

Si A est indépendant de t, la résolvante de (1) s'exprime à l'aide de l'exponentielle, dont on rappelle la

Définition 3.1 *Pour tout $A \in \mathfrak{L}(X)$,*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

(La série ci-dessus est normalement convergente dans $\mathfrak{L}(X)$.)

Lemme 3.1 *Pour tout $A \in \mathfrak{L}(X)$ l'application $t \longmapsto e^{At}$ est continûment dérivable (et même de classe C^∞), et*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

Le lemme (19) montre que la résolvante de l'équation différentielle linéaire autonome

$$\frac{du}{dt} = Au$$

est donnée par

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}$$

3.2.2 Cas des équations linéaires en dimension finie

Dimension 1. Les équations différentielles (d'ordre 1) linéaires scalaires, pour lesquelles $X = \mathbb{R}$, se résolvent explicitement : la résolvante de

$$\frac{du}{dt} = a(t)u$$

où l'inconnue u est à valeurs réelles et $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue est donnée par

$$R(t,s) = e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}$$

Dimension 2 et plus. Il est tentant de généraliser la formule précédente. Cependant, si les matrices $A(t)$ (ou les endomorphismes) ne commutent pas deux à deux, une telle formule (que l'on se garde volontairement d'écrire) est fausse : ceci est lié au fait que e^{A+B} n'est pas le produit de e^A et e^B lorsque les matrices A et B ne commutent pas.

Tout ce que l'on peut dire est que la résolvante est liée à une base de solutions.

Proposition 3.5 *Soit $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue, et $R : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvante de*

$$\frac{du}{dt} = Au \tag{3.3}$$

c'est-à-dire que pout tout $(t,s) \in I \times I$,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = A(t)R(t,s) \text{ et } R(s,s) = I_n$$

Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors les applications $t \longmapsto R(t,t_0)e_i$ (pour $i \in \{1,\ldots,n\}$) forment une famille indépendante de solutions de (*). Inversement, si $u_1,\ldots,u_n$ est une famille indépendante de solutions de (*), soit $B : t \in I \longmapsto B(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont $u_1(t),\ldots,u_n(t)$. Alors la résolvante de (*) est donnée par

$$R(t,s) = B(t)B(s)^{-1}$$

Preuve. : La première partie découle de la définition et du proposition III.1, qui montre que $R(t,s) \in GL_n(\mathbb{R})$. La preuve de la seconde partie consiste simplement à remarquer que l'application $t \longmapsto B(t)B(s)^{-1}$est solution du même problème de Cauchy que $t \longmapsto R(t,s)$. ■

3.3 Formule de Duhamel

Ce paragraphe est consacré à un résultat très facile à démontrer et néanmoins fondamental.

Il exprime le principe de superposition bien connu selon lequel : la solution générale d'uneéquation linéaire avec terme source est donnée par la solution générale de l'équation homogène. Plus une solution

particulière de l'équation avec terme source.

Proposition 3.6 ***Formule de Duhamel*** *Soit $A \in C(I;\mathfrak{L}(X))$ et R la résolvante de l'équation différentielle homogène :*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

Soit $b \in C(I;X)$ et ϕ^{t_0}le flot en $t_0 \in I$ de l'équation

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t)$$

Alors pour tout $(t,v) \in I \times X$,

$$\phi^{t_0}(t,v) = R(t,t_0) \cdot v + \int_{t_0}^{t} R(t,s) \cdot b(s)ds$$

Preuve. On vérifie par un calcul facile que l'application

$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} R(t,s) \cdot b(s)ds$$

est solution de l'équation avec le terme source b. Comme $t \longmapsto R(t,t_0) \cdot v$ est solution del'équation homogène, la somme des deux est, par linéarité, solution de l'équation avec termesource. De plus elle vaut v à $t = t_0$. Donc c'est l'unique solution cherchée.
■

Chapitre 4

Applications

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun a plusieurs disciplines ou sous-disciplines, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

4.1 Mécanique

La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrits

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

où x désigne la position de la particule, $\dot{x}$ sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et ou f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x , est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse a un instant origine : $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ .Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de 2 équations du 1er ordre. En effet, introduisons la vitesse $v \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

Le plan(x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases.Dans le cas particulier ou $f$ne dépend pas de x c'est-à-dire $f = f(v, t)$ dans le cas des mouvements dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse : $\dot{v} = f(v, t)$peut être résolue indépendamment de x. On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$ si par contre f ne dépend que de x c'est-à-dire $f = f(x)$, l'équation obtenue, en divisant les deux équations différentielles, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

On obtient donc encore une équation différentielle du 1er ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$.Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie).

4.2 Dynamique des Populations

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$\begin{cases} \dot{N} = bN - dN \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Lorsque $b = 0$, on reconnait dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas ou $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (Modèle logistique) qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha N(1 - \frac{N}{k}) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

où α et k sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = k$.

4.3 Electricité

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut etre décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Et les différentes lois de l'éctricité montrent que cet état est régi par un système d'équation différentielles. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C, le comportement de la résistance étant régi parla loi d'Ohm généralisée :

$$U_R = F(I\ _R)$$

on a les équations différentielles :

$$\begin{cases} L\frac{dI_L}{dt} = U_L \\ \\ C\frac{dU_C}{dt} = I_C \end{cases}$$

assorties des relations

$$U_C = U_L + U_R, \quad I_R = I_L = -I_C$$

Notez qu'il y a de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple :

$$\begin{cases} L\frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ \\ \quad C\frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Dans le cas particulier ou $F(x) = x3 - x$, ce système est connu sous le nom d'équation de Van der Pol.

4.4 Météorologie

Les équations qui permettent de modéliser l'évolution des différents paramètres-météorologiques (température, humidité, pression, etc...) sont très complexes. Un système très simple mais qui permet de retrouver plusieurs des caractéristiques de ces équations a été proposé par Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires en dimension 3

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{array} \right.$$

Bibliographie

[1] Coddington E-.A et Livinson L. Theory of Ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1995.

[2] Rienhard.H, Equations différentielles, fondements et applications. Dunod, Paris,1982.

[3] G.Teschi, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, AMS, 2012, 364 pages.