REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Abou BekerBelkaid Tlemcen

Département de mathématique

Mémoire de licence en Mathématiques

Option: Probabilité. Statistiques

Intitulé :

Variables et vecteurs aléatoires gaussiens

Présenté par :

- M^{lle}. Naila KARAOUZENE

Encadré par :

- M^{r}. F. Boukhari

Année universitaire : 2012- 2013

Remercîment

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, Le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé la volonté et la patience pour mener à terme ce travaille.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée.

Je tiens à témoigner m profondes gratitudes à mon encadreur Monsieur F.Boukhari pour son soutien constant tout a long de la préparation de ce travaille .Je le remercie de m'avoir encadré et proposé un sujet aussi intéressant et pour toute ses efforts envers nous pendant toute l'année.

Enfin je remercie toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de ce mémoire

Table des matières

Introduction

Le concept de variable aléatoire formalise la notion de grandeur variant selon le résultat d'un tirage ou d'une expérience aléatoire le concept de probabilité, quant à lui, formalise et quantifie le sentiment d'incertitude vis-à-vis de l'évènement.

La définition moderne d'une v. a ne peut être exposé rigoureusement sans faire appel à la théorie de la mesure et l'intégration au sens de Lebesgue.

L'objectif de ce mémoire est de s'intéressé a des variables aléatoires gaussiennes et aux vecteurs gaussiens, Au premier chapitre on rappelle quelques définitions concernant les variables aléatoires et l'espace de probabilité .le second chapitre, est consacré à la généralisation en dimension $n>=2$ *, nous parlerons de vecteurs aléatoires plutôt que de variables. Nous insisterons sur les vecteurs gaussiens se réduit souvent à des considérations d'algèbre linéaire. Cette propriété confère a ces vecteurs un statut particulier. Nous utiliserons dans ce chapitre la notion matricielle afin d'alléger certaines écritures .Le troisième chapitre est consacré pour la projection des vecteurs gaussiens et pour cela on annonça un théorème important celui de Cochran.*

Enfin le dernier chapitre représente des exemples concernant les vecteurs gaussiens.

Chapitre 1

---

1. **Quelques rappels sur les variables aléatoires :**
2. **1.1. Définitions :**

- Un **espace de probabilité** est la donnée d'une probabilité a tout évènement formellement, c'est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ formé d'un ensemble Ω, d'une tribu ou σ-algèbre tel que $\mathcal{A}$ sur Ω et d'une mesure *P* sur cette σ-algèbre tel que *P*(Ω) = 1.
- Une **variable aléatoire réelle** est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, ou une partie de $\mathbb{R}$; c'est une fonction définie depuis l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de Ω vers E, toute fonction mesurable X de Ω vers E.

Cette condition de mesurabilité de X assure que l'image réciproque par X de tout élément B de la tribu E possède une probabilité et permet ainsi de définir, sur $(E, \mathcal{E})$, une mesure de probabilité, notée $\mathbb{P}_X$, par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}\left(X \in B\right).$$

La mesure $\mathbb{P}_X$ est l'image, par l'application *X*, de la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

La **fonction de répartition** d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la fonction F qui à tout réel x associe

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]).$$

Propositions : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X a les propriétés caractéristiques suivantes :

- F_X est croissante ;

- Elle est partout continue à droite ;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$

Preuve :

Le point 1 découle de la propriété de croissance des mesures de probabilité

$$\{x \leq y\} \Rightarrow \{]-\infty, x] \subset]-\infty, y]\} \Rightarrow \{\mathbb{P}_X(]-\infty, x]) \leq \mathbb{P}_X(]-\infty, y])\}.$$

Comme F_X est une fonction monotone, le point 2 se réduit à montrer que

1. $$\lim_n F_X\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = F_X(x),$$

Ou encore, équivalemment,

$$\lim_n \mathbb{P}_X\left(\left]-\infty, x + \tfrac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]).$$

Mais les boréliens $]-\infty, x + \frac{1}{n}]$ forment une suite décroissante, et

$$\bigcap_{n \geq 1} \left]-\infty, x + \tfrac{1}{n}\right] =]-\infty, x],$$

donc le point 2 est une conséquence des axiomes des probabilités. Comme F_X est monotone, le point 3 se réduit à montrer que

$$\lim_n F_X(-n) = 0.$$

Ceci est encore une conséquence des axiomes des probabilités, puisque

$$\bigcap_{n \geq 1}]-\infty, -n] = \emptyset.$$

Le point 4 découle, de la même manière, de

$$\bigcup_{n \geq 1}]-\infty, n] = \mathbb{R}.$$

Densité d'une v.a.r :

Une variable continue possède souvent une fonction de répartition continue en tout point et dérivable par morceaux. Il est alors commode de la dériver pour obtenir la densité de probabilité, vérifiant :

$$p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(x)$$

Qui est définie et à valeurs positives (ou nulles) sur $]-\infty, +\infty[$, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

Espérance d'une v.a.r :

Soit Xune variable aléatoire de l'espace probabilisé$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$vers l'espace mesurable $(F, \mathcal{F})$.

Si $(F, \mathcal{F})$est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,i.e. dans le cas où X est une variable aléatoire réelle, l'espérance de X, si elle existe, est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\mathbb{R} x\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x).$$

- Si Xest une variable aléatoire absolument continue, de densité de probabilité$f_X$par rapport à une mesure σ-finie μsur $(F, \mathcal{F})$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} x f_X(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

- Si Xest une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble dénombrable$S \subset F$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in S} x\mathbb{P}_X(\{x\}).$$

C'est notamment le cas quand Sest fini. En notant ses valeurs $x_1, \dots, x_n$et $p_1, \dots, p_n$ les probabilités correspondantes, l'espérance devient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

La **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire réelle X est la fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}$par

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] + i\ \mathbb{E}\left[\sin(tX)\right].\end{aligned}$$

Si cette variable aléatoire possède une densité, disons fX, alors

$$\phi_X(t) = \int_\mathbb{R} f_X(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x.$$

Covariance entre deux v.a.r :

On nomme covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y, et on note cov(X,Y) (ou parfois σ_{XY}) la valeur :

$$\mathrm{cov}(X,Y) \equiv \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

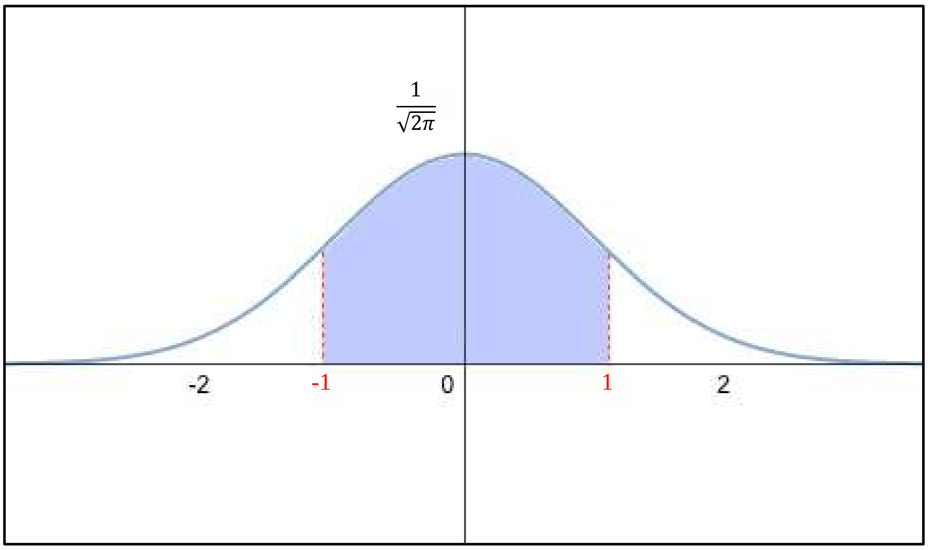
1.2 La loi de gauss et ses dérivés :

Définitions : (Loi de gausse centré réduite)

On dit que N est une variable a gaussienne centré réduite (N ~ N(0,1)) lorsque N est une v.a.r.c de densité :

$$f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

La figure suivante représente la densité de la loi normale de paramétré 0 et 1.



Propriété : si N ~ N(0,1) alors :

1 – E(N) = 0 et 2var(x) = 1

- Pour l'espérance la fonction à intégrer est impaire d'où E(N) = 0
- Pour la variance E(N) = E^2(N) = 0 donc reste à calculer E(N^2) pour une intégration par partie on obtient : V(N) = 1.

Définition d'une variable aléatoire gaussiennes : X est une gaussiennes l'lorsqu'il existe $N \sim N(m, \sigma^2), m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in [0, +\infty[$ tel que $x = m\pi_\Lambda + \sigma N$.

π_Λ : la v.a constante égale à 1 sur Λ, on note alors $X \sim N(m, \sigma)$.

- Soit $X \sim N(m, \sigma^2)$ alors : $E(x) = m, var(x) = \sigma^2$.

X suit une loi de gauss de paramétre $\sim N(m, \sigma^2)$, sa densité est donné par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Théorème 1 : si $x_1 \sim N(m_1, {\sigma_1}^2)$ sont indépendant, leur somme est gaussienne et $x_1 + x_2 \sim N(m_1 + m_2,\ {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$.

- Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme admis suivant : , $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\rho(x + y < u) = \int \left(\left(\int_{-\infty}^{u} f_y(y - x)\, f_x(x) dy \right) \right) dx$$

- $E(x1, x2) = E(x1) + E(x2) = m_1 + m_2$

$$v\cos(x1 + x2) = vcos(x_1) + vcos(x_2) = {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2$$

On conclue que $x_1 + x_2 \sim N(m_1 + m_2,\ {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2$

On pose : $S = x_1 + x_2$

On montre le résultat pour$m_1 = m_2 = 0$ et $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma$

$$f_s(\Delta) = \int_R f_x(x_1) f_{x_g}(\Delta - x_1) dx_1$$

$$f_s(\Delta) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{1\Delta^2}{2\sigma^2+1}} \int_R e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - \sigma^2\Delta}{\sigma^2+1} \Big/ \sqrt{\sigma^2+1} \right)^2} dx_1$$

$$f_s(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 + 1}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)^2}$$

On conclut que $x_1 + x_2 \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

1.3 Quelques illustres distributions de probabilité issues de N (0,1) :

- la loi du « khi deux » a un degré de liberté χ^2 et par définitionla distribution de probabilité que suit le carrée d'une variables gaussien centrée réduite si N(0,1) alors $N^2 \rightarrow X_1^2$
- les lois de student de Fisher Snedecor :on dit qu'une v.a.r.c est une variable de student a n degrés de liberté l'lorsqu'elle a la même loi que$\frac{N}{\sqrt{x}/n}$, ou N→ $N(0,1)$ et X→ χ^2_nsont supposées indépendantes .
- Xet Y étant des v.a.r indépendantes de lois χ^2_n, χ^2_pon définit par ailleurs la distribution de fishersnedecorF(n,p) comme la loi de quotient $\frac{x/n}{y/p}$
- la loi log normal d'une v.a.r strictement positive X telle que son logarithme (en base) suive une gaussienne ln(X)→ $N(m, \sigma)(m \epsilon R, \sigma \epsilon [0, \infty[\ )$.

Chapitre 2

Première partie :

2-vecteurs aléatoires réels :

2-1-Définition aléatoires réels :

un vecteur aléatoire X réel de dimension d est définie comme étant une variable aléatoire de Ω dans $\mathcal{R}^d$ *(X_1,…X_d)

on définit l'espérance du vecteur X le vecteur déterministe :

$$\mathrm{E(X) = (E(X), \ldots E(Xd))}$$

Et la matrice de covariance de X :

$$\Sigma_x=\begin{bmatrix} \sigma & \cdots & \mathrm{cov}(X,X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X,X) & \cdots & \sigma \end{bmatrix}.$$

Image d'un vecteur aléatoire réel par une application linéaire :

-soit Aune matrice déterministe a m lignes et d colonnes, soit Y=AX le vecteur aléatoire image du vecteur X par l'application linéaire représenté par A : la matrice de covariance et l'espérance sont donnée par :

$$\begin{cases} \text{?}(AX) = Am \\ \Sigma y = A\Sigma x A^{t} \end{cases}$$

Preuve :

Soit A une matrice r×d E(X) = 0_R^d E(AX) = AE(X) = 0

-Σ(AX) = E ((AX) (AX) ^{T})

= E ((A X X^T A^T)

= A E(XX^T) A^T

= AΣxA^T

En générale :

$\Sigma y = \Sigma\ (A(X-E(X)) + AE(X))$

$= A\ \Sigma(X-E(X))\ A^T$

$= A\Sigma x\ A^T$

Propriété :Σ matrice de covariance d'un vecteur aléatoire si et seulement si Σ est symétrique.

Preuve :

-Remarque : si X est tel que les composante X_j sont indépendants alors la matrice de covariance est diagonale.

-Σ matrice de covariance d'un vecteur aléatoire Alors elle est symétrique.

Pour montrer cette implication on a :

Soient $a_1 \ldots a_n$ des réels, calculons la somme dont nous venons de montrer qu'elle est positive, en écrivant la définition D puis de la covariance puis la linéarité de l'espérance :

$- \sum_{i,j\Sigma=1}^{n} a_j D_{ij} a_j = \sum_{i,j=1}^{d} a_I \operatorname{cov}(X_i,X_j)\ a_j$

$= \sum_{i,j=1}^{d} a_j\ E\ ((X_i-E(X_i)\ (X_j-E(X_j))\ a_j$

$=\sum_{i,j=1}^{d} E(a_j\ (X_i-E(X_i)\ a_j\ (X_j-E(X_j))$

$=E\ [\sum_{i,j=1}^{d} a_i(X_i-E(X_i))\ \sum_{i,j=1}^{d} a_j(X_j-E(X_j))$

$=E\ [(\sum_{i,j=1}^{d} a_i\ (X_i-E\ (X_i))\ ^2]$

-La quantité qui nous intéresse est donc l'espérance d'une variable aléatoire positive et intégrable donc un nombre réel positif

--pour montrer qu'une matrice symétrique positive est une matrice de covariance d'un vecteur aléatoire.

-soit R une racine carrée matricielle de Σ X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont indépendantes ,centré et de variance est égale a I_d

Alors : AX est centré de matrice de covariance :

$R\ I_d\ R\ = A\ A^T = \Sigma$

2-2 transformations d'un vecteur aléatoire en vecteur aléatoire centré réduite :

Σxmatrice de covariance symétrique positive, elle peut s »ecrire sous la forme $\Sigma x = \Sigma\ \Sigma^T$

Σ : définie a une transformation orthogonale une solution particulière est $\Sigma = \Sigma_x^{1/2} = D\ L^{1/2}\ D^T$

D : matrice des vecteurs propres normés .

L : matrice diagonale.

$Y = \Sigma^{-1} X$ est vecteur de matrice de covariance égale à l'identité

-transformation de mahalobis, Σx est supposée régulière on prend $\Sigma = \Sigma_x^{1/2}$ $Y = \Sigma^{-1}(X - E(X))$

-Y est alors un vecteur aléatoire centré réduit a composantes non corrélés.

_loi d'un vecteur aléatoire :

On dira que le vecteur X admet une densité si la loi de P_x admet une densité par rapport a la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ on ecrira dans ce cas :

$P(X \epsilon B) = \int f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$

La loi de la coordonnée X(loi marginale) est alors

$$f_x(x) = \int f(x_1 .. x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

un vecteur aléatoire a aussi une fonction de répartition

$$F_X(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n) .$$

Fonction caractéristique : on appelle fonction caractéristique du vecteur aléatoire

$X = {}^T(X1 \ldots X_n)$ la fonction a valeurs complexe définie par :

$\forall\, t \epsilon \mathbb{R} \qquad \phi x(t) = \int e^{i \sum_{k=1}^{n} tk\, xk} fx(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$

2-3 indépendances :

Deux vecteurs sont indépendants si et seulement si la probabilité que ces vecteurs prennent une valeur donnée est égale au produit que chaque vecteur prenne une valeur donnée

Proposition : les variables $X_1 \ldots X_n$sont indépendantes si et seulement si la fonction caractéristique du vecteur $X = (X_1 \ldots X_n)^T$ est le produit des fonctions caractéristiques des coordonnées.

$\forall\, t \epsilon \mathbb{R} \qquad \phi x(t_1 \ldots t_d) = \phi x_1(t_1) \ldots \phi x_d(t_d)$

Preuve : supposons que $X_1 \ldots X_d$ sont indépendantes

$$\begin{aligned} \phi x(t_1, \ldots t_d) &= E[e^{i \sum_{k=1}^{d} tk\, xk}] \\ &= E[\textstyle\prod_{k=1}^{d} e^{itk\, xk}] \\ &= \textstyle\prod_{k=1}^{d} E[e^{itk\, xk}] \qquad \text{par indépendance} \end{aligned}$$

$=\prod_{k=1}^{d} \phi x\,(t_k)$.

Pour la réciproque il suffit d'observer que ϕx caractérise la loi de X

Proposition2-3-2 :

Si X est une v.a.r a valeur dans $\mathbb{R}^d$ et si a $\in\mathbb{R}^m$ et si A est une matrice $m \times d$ ona :

$\forall\, u \in \mathbb{R}^m \phi_{a+AX}\,(u) = e^{i<a,u>}\phi_x\,(A^T u)$.

-si X et Y sont deux variables indépendantes a valeur dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de la somme de X et Y est donnée par :

$$\phi_{X+Y} = \phi_X\,\phi_Y\,.$$

Preuve : $\forall\, u \in \mathbb{R}^m$

1-

$$\phi_{AX+a}(u) = E[\,e^{i<u,AX+a>}]$$

$$= E(e^{i<u,b>+i<u,AX>})$$

$$= E(e^{i<a,b>}e^{i<u,AX>})$$

$$= e^{i<u,a>}\,E\,(\,e^{i<u,Ax>})$$

$$= e^{i<a,u>}E\,(e^{i<A^t u,X>}\,)$$

$$= e^{i<a,u>}\phi_X\,(A^t u\,)$$

2-

X,Y indépendants on a :

$$\phi_{X+Y}(u) = E\,(e^{iu(X+Y)})$$

$$= E(e^{iuX}\,e^{iuY})$$

$$= E(\,e^{iuX})\,E(e^{iuY})$$

$$= \phi_X(u).\,\phi_Y\,(u).$$

Vecteurs aléatoires gaussiens

Deuxième partie :

3-vecteurs aléatoires gaussiens :

3-1 la loi $N(O,I_d)$:

- On dit que $X=(X_1,\ldots,X_d)^T \rightarrow N(o,I_d)$ lorsque les X_j (j E [1,d] suivant indépendamment des lois gaussiennes centrées réduites N(0,1) .
  Propriétés1. $X \rightarrow n(0, I_d)$ admet une densité f_x :

$\forall$ x $\in \mathbb{R}^d$ $f_x(x) = (2\pi)^{-d/2}\, e^{-1/2} \sum_{t=1}^{d} x^2 j = (2\pi)^{-d/2} - e^{-1/2 x.x}$

Preuve :

$$f_x(x) = \prod_{j=1}^{d} f_{xj}(xj) \text{ indépendance des } x_j$$

Donc :

$$f_x(x) = \prod_{j=1}^{d} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-1/2x^2j} \text{ (les } x_j \text{ étant gaussiens par définition)}$$

D'où :

$$f_x(x) = (2\pi)^{-d/2}\, e^{-1/2} e^{\frac{-1}{2} \sum_{i=1}^{d} x^2 j}$$

propriétés 2 : $x \backsim N(O, I_d)$ admet pour fonction de densité ϕ_x

$$\forall\, u \in \mathfrak{R}^d\ \phi_x(u) = e^{-\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2} u^2 j}$$

Preuve :

$$\phi_x(u) = E\left[e^{i \sum_{j=1}^{d} ujXj} \right]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} E(e^{iujXj}) \text{(par indépendance des } X_j)$$

Alors : $\phi_x(u) = \prod_{i=1}^{d} e^{-\frac{1}{2} u^2 j}$

$= e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} u^2 j}$.

3-2 trois définitions des vecteurs gaussiens

Définition 1 : (par projections uni variées).

X est un vecteur gaussien d- dimensionnel si toute combinaison linéaire de ses composantes $< a.x >_R{}^d = a^t.\, X = \sum_{u=1}^{d} ajxj$ (a $\in \mathbb{R}^d$)

Suit une loi gaussienne .

Définition 2 : (par fonction caractéristique) .

X est un vecteur gaussien d- dimensionnel si sa fonction caractéristique ϕ_x s'écrit sous la forme

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^d, \phi(u) = e^{i<m,u>Rd \frac{-1}{2} <u,Su>Rd}$$

Avec m $\in \mathcal{R}^{d}$ et s $\in \mathcal{M}_{d}$ ® une matrice symétrique positive.

Définition 3 : (par transformation affine) :

X est un vecteur gaussien d- dimensionnel s'il un vecteur m $\in \mathbb{R}$ est une matrice A $\in \mathcal{M}_{d}(\mathbb{R})$ telle que X= m + AN (égalité en loi)

Où N $\sim$N(O,I_d) .

Il y a équivalence entre les 3 définitions.

Preuve de l'équivalence des trois définitions :

(1) $\Rightarrow$ (2) :

X satisfaisant la (1) m sa moyenne et $\sum$ sa matrice de covariance calculons sa fonction caractéristique soit u $\in \mathbb{R}^{d}$: $\phi_x(u) = E[e^{i<u,x>\mathbb{R}^{d}}]$
Par ailleurs
$Y = < u,x > est\ gaussiene\ donc\ Y \sim N(< u,m > R^{d} \frac{-1}{2} < u, \sum u > \mathbb{R}^{d})$
Enfin : $\phi_x(u) = e^{i<u,m>R^{d}\frac{-1}{2}<u,\sum u>R^{d}}$.

Conclusion :

Ce mémoire est consacré à l'étude des vecteurs aléatoires gaussiens qui sont associé aux lois gaussiennes multi-variés, et de ce fait jouent un rôle important en probabilité et en statistique.

Ils apparaissent naturellement comme des objets limites.

Référence :

[1] Jean-Baptiste. Théorème de cochran et application en statistiques, 2006

[2] Laurent carraro .introduction à la régression Ecole nationale supérieure des mines de Saint-Etienne.

[3] Laurent carraro. Probabilités et statistique .école nationale supérieure des Mines de saint -Etienne, mars 2003.

[4] Anatoli Juditsky .vecteurs aléatoires, loi normale multi variée université Joseph Fourier.

[6] Gilbert saporta .probabilité, analyse des données et statistique .Edition Technip 2006