République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr Belkaid,Tlemcen

Faculté des sciences
Département de mathématiques

Thèse de Doctorat Es sciences
Mathématiques

Option**: Géométrie Différentielle**

Présentée par

BENALLAL Hafida

Sous le thème :

« Sur les Immersions Minimales et les Applications F-Harmoniques »

Soutenue le **23 Juin 2013** devant le jury composé de :

Directeur de thèse	Mr.Mohammed Benalili	Prof. Univ. de Tlemcen
Président de jury	Mr.S.Mohammed Bouguima	Prof. Univ. de Tlemcen
Examinateurs	Mr.Mohammed Bekkar	Prof. Univ. d'Es-senia,Oran
	Mr.Hacen Dib	Prof. Univ. de Tlemcen
	Mr.Noureddine Rahmani	Prof. UST, Oran

http://www.univ-tlemcen.dz

Remerciements

Je suis extrêmement reconnaissante envers Mr.Mohammed Benalili, professeur à l'université de Tlemcen, pour m'avoir fait confiance en m'offrant l'opportunité de préparer cette thèse. Je le remercie également pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé.

Je tiens à témoigner ma gratitude à Mr.Sidi Mohammed Bouguima, professeur à l'université de Tlemcen, d'avoir accepté d'examiner mon travail et de présider mon jury de thèse, ainsi qu'à Mr. Hacen Dib professeur à l'université de Tlemcen, Mr. Mohammed Bekkar professeur à l'université d'Es-senia et Mr. Noureddine Rahmani professeur à l'université d'USTO, d'avoir accepté de faire partie de ce jury en tant qu'examinateurs et pour l'attention qu'ils ont portée à ce manuscrit.

Je remercie enfin ma famille pour m'avoir toujours soutenu durant mes études.

Hafida Benallal

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse se place dans le cadre de la géométrie riemannienne et concerne en particulier les immersions minimales et les applications F-harmoniques, il porte sur les deux thèmes suivants:

Nous donnons dans la première partie, des conditions qui interdissent l'existence d'immersions minimales entre une variété source admettant une p-forme parallèle non triviale et une variété but riemannienne à courbure sectionnelle constante strictement négative. Dans la deuxième partie nous nous intéressons à l'étude de quelques propriétés des applications F-harmoniques définies sur une variété riemannienne compacte et à valeurs dans la sphère euclidienne. Ces dernières sont des points critiques de la fonctionnelle F-énergie. Nous obtenons des résultats sur l'indice de Morse des applications F-harmoniques par variation des fonctionnelles énergies le long des champs de vecteurs conformes.

Mots-clefs. Immersions minimales, Courbure de Ricci, Opérateur de Dirac, Variété conformément plate, Application F-harmonique, Indice de Morse, Tenseur d'énergie-impulsion.

Abstract

In this thesis we study minimal immersions and F-harmonic maps.

Part 1 is devoted to prove that there is no minimal isometric immersions of a riemannian m-dimensional manifold M with $m \geq 3$ endowed with a non zero parallel p-form, into a riemannian manifold N with constant strictly negative sectional curvature.

In part 2, we deal with F-harmonic maps, we investigate estimates of the Morse index for F-harmonic maps into round spheres. Next we obtain that these latter are global maxima of their energy-functional along the conformal group of the sphere.

Keywords. Minimal immersions, Ricci curvature, Dirac operator, Conformally flat manifold, F-harmonic maps, Morse index, Stress-energy tensor.

Table des Matières

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier quelques propriétés des immersions minimales et des applications F-harmoniques entres variétés riemanniennes. Le manuscrit est organisé comme suit: dans un premier chapitre on rappelle les notions de géométrie nécéssaires à la compréhension de notre travail. Le deuxième chapitre concerne un résultat de non existence d'immersion minimale. Dans le troisième chapitre on obtient l'estimation de l'indice de Morse d'une classe d'applications F-harmoniques et on donne au dernier paragraphe un résultat global exprimant qu'une large classe d'applications F-harmoniques sont des maximas de la fonctionnelle F-énergie.

A. El Soufi et R.Petit avaient montré dans ([25]) la non existence d'immersion isométrique minimale entre une variété riemannienne M admet une 2-forme parallèle non nulle, et une autre variété riemannienne N à courbure isotrope strictement négative. Ce résultat généralise ceux obtenus auparavant par Dajczer-Rodrigez ([14]) et El Soufi ([19]) dans le cas où M est une variété Kählérienne. Dans cette thèse nous donnons un résultat de non existence dans un contexte plus général que celui obtenu dans ([25]) par A. El Soufi et R.Petit. Plus précisément nous établissons le théorème suivant:

Théorème 0.1 *Soit M une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$ et soit N une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante strictement négative. Si M admet une p-forme parallèle α non nulle ($p \geq 2$), alors il n'existe aucune immersion isométrique minimale ϕ de M dans N.*

La preuve s'appuie essentiellement sur la formule de Bochner-Weitzenböck relative au p-formes et qui s'écrit:

$$\left|D\left(\alpha.d\phi\right)\right|^2 = m^2 \left|H\right|^2 \left|\alpha\right|^2 + 4\left\langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\right\rangle + 4R_\phi(\alpha)$$

où : D est l'opérateur de Dirac agissant sur les formes différentielles, H est la courbure moyenne de l'immersion ϕ, $\nabla^*\nabla$ est l'opérateur de Laplace et

$$R_\phi(\alpha) = \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{i,j,k=1}^{m} R^N_{ikjk}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} - \frac{p-1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p}\right)$$

où R^Nest le tenseur de courbure de N.

Des résultats similaires sont obtenus pour les applications pluriharmoniques.

Définition 0.1 *Pour toute p-forme parallèle α on dira qu'une application ϕ de M dans N est α-pluriharmonique si*

$$D\,(\alpha.d\phi) = (-1)^p\,\alpha.D\,(d\phi)$$

Pour un point fixe $x \in N$, on note par $\mu(x)$ et $\lambda(x)$ la plus petite et la plus grande valeur propre du tenseur de Ricci au point x, et considérons les fonctions suivantes:

$$\pi(x) = \begin{cases} (n-1)m\mu(x) - (m+(n-2)p)\lambda(x) & \text{si} \quad m-2p<0 \\ 2(n-1)\mu(x) - n\lambda(x) & \text{si} \quad m-2p \geq 0 \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} (n-1)m\lambda(x) - (m+(n-2)p)\mu(x) & \text{si} \quad m-2p<0 \\ 2(n-1)\lambda(x) - n\mu(x) & \text{si} \quad m-2p \geq 0 \end{cases}$$

Théorème 0.2 *Soient M une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$ et N une variété riemannienne conformément plate:*

a) *si la fonction π est strictement positive ou la fonction ν est strictement négative et si la variété M admet une p-forme parallèle non nulle α $(p \geq 2)$, alors il n'existe aucune immersion α-pluriharmonique de M dans N.*

b) *si la fonction ν et non positive et si M admet une p-forme parallèle non nulle α $(p \geq 2)$, alors toute immersion minimale isométrique de M dans N est α-pluriharmonique.*

Théorème 0.3 *Soient M une variété riemannienne compacte de dimension $m \geq 3$ et N une variété riemannienne conformément plate telle que la fonction π est non négative et strictement positive en au moins un point, alors pour toute p-forme harmonique α non nulle sur M avec $p \geq 2$, il n'existe aucune immersion α-pluriharmonique de M dans N.*

Théorème 0.4 *Soit M une variété riemannienne compacte conformément plate de dimension $m \geq 4$ et supposons que la fonction π est non négative et strictement positive en au moins un point, alors le nombre de Betti $b_p(M) = 0$.*

Théorème 0.5 *Soient M une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$ et N une variété riemannienne conformément plate et supposons que la fonction $\nu(x)$ est strictement négative, si M admet une p-forme parallèle non nulle α $(p \geq 2)$, alors il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans N.*

En 1964, J.Eells et J.H.Sampson avaient introduit la notion des applications harmoniques qui sont par définition les points critiques de la fonctionnelle énergie

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |d\phi|^2\,dv_g$$

M. Ara avait introduit une classe d'applications dite F-harmoniques ([1], [2], [3]) c'est celle des applications où $F : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une fonction de classe C^1 telle que $F'(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \infty[$. Ces applications sont les points critiques de la fonctionnelle F-énergie

$$E_F(\phi) = \int_M F\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) dv_g$$

et contiennent les applications harmoniques et p-harmoniques.

L'étude des immersions minimales et des applications harmoniques porte essentiellement sur l'existence, la nonexistence et la stabilité de ces dernières. Plusieurs auteurs avaient étudié l'indice de Morse des immersions minimales et des applications harmoniques d'une variété riemannienne compacte dans la sphère euclidienne S^n; ce dernier mesure le degré d'instabilité de ces applications harmoniques (cf. [8], [17], [37]). Cet invariant, que l'on note $Ind(\phi)$, représente la dimension des espaces maximaux des variations pour lesquelles ϕ correspond à un maximum local de la fonctionnelle énergie dans le cas des applications harmoniques et la fonctionnelle volume dans le cas des immersions minimales .

Les premiers résultats portant sur la stabilité et l'indice de Morse des applications harmoniques dans les sphères ont été obtenus par R.Smith ([39]) où il avait calculé en particulier l'indice de l'identité de S^n. Ce calcul a été généralisé par P. Leung dans ([30]), il avait montré que toute application harmonique non constante ϕ d'une variété compacte (M, g) dans une sphère $S^n (n \geq 3)$ vérifie: $Ind(\phi) \geq 1$. Ce dernier résultat a été ensuite amélioré par A. El soufi dans ([22]), il avait montré que pour toute application harmonique ϕ définie sur une variété riemannienne compacte (M, g) à valeurs dans la sphère S^n telle que:

i) le tenseur d'énergie-impulsion $S_g(M)$ de ϕ est positif en tout point et défini positif en au moins un point de M.

ii) $S_g(M)$ est positif en tout point de M, ϕ est une immersion et $\phi(M)$ ne coïncide pas avec une sphère totalement géodésique de S^n.

Alors l'indice de Morse de ϕ vérifie : $Ind_E(\phi) \geq n + 1$.

Il avait montré aussi, que pour toute application harmonique à tenseur d'énergie-impulsion positif de (M, g) dans S^n, on a: $E_g(\phi) \geq E_g(\gamma \circ \phi)$, où γ est un difféomorphisme conforme de la sphère euclidienne S^n.

Le cas où la variété source est une sphère canonique S^m de dimension m avait été étudié par le même auteur dans ([23]) , où il montre que parmi toutes les applications harmoniques non constantes définies sur S^m, l'identité I de S^m possède l'indice le plus petit. Autrement dit, pour tout $\phi : S^m \to (N, h)$ harmonique non constante, avec $m \geq 3$, on a

$$Ind_E(\phi) \geq Ind_E(I) = m + 1$$

Noter que Eells et Lemaire avaient obtenus dans ([16]) la minoration

$$Ind_E(\phi) \geq 1 + rang(\phi)$$

Dans un autre travail (cf.[21]) A. El soufi et A. Jeune avaient étendu les estimations et le calcul de l'indice de Morse à des applications p-harmoniques, où $p \in [2, +\infty[$. Il avaient traité notamment le cas de l'application identité, ainsi que celui des applications entre les sphères euclidiennes. Comme premier résultat, ils avaient montré que si (M, g) est une variété compacte orientable de dimension m, alors, pour tout $p \geq m$, l'identité I_M de M minimise la fonctionnelle p-énergie

$$E_p(\phi) = \frac{1}{p} \int_M |d\phi|^p \, dv_g$$

sur l'ensemble des applications de degré non nul de M dans M. En particulier I_M est p-stable pour tout $p \geq m$.

Notre contribution dans ce domaine consiste en des résultats qui généralise une partie de l'estimation de l'indice de Morse obtenue par El soufi dans ([21], [23]) pour les applications harmoniques et p-harmoniques aux applications F-harmoniques.

Nous montrons, que toute application F-harmonique à tenseur de F-énergie-impulsion défini positif d'une variété riemannienne compacte (M, g) dans S^n vérifie: $Ind_F(\phi) \geq n + 1$. Nous traitons aussi, comme exemples, le cas de l'application identité, ainsi que celui des homothéties. Ensuite nous donnons un résultat global i.e. pour une large classe de fonctions $F : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, les applications F-harmoniques sont des maximums globaux pour les fonctionnelles F-énergies. Nous avons introduit une nouvelle notion de tenseurs de F-énergie-impulsion qui étend celle de tenseur d'énergie-impulsion et qui est différente de celle introduite par M. Ara pour les fonctionnelles F-énergie.

Chapitre 1

Notions préliminaires de géométrie riemannienne

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions classiques de géométrie riemannienne nécéssaires à la compréhension de notre travail.

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m, on note par ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g. Désignons par $\Gamma(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^∞ définis sur M.

Définition 1.1 *1. Soient X, Y, Z , W quatre champs de vecteurs de $\Gamma(M)$.*

La courbure de Riemann R est l'application bilinéaire antisymétrique de $\Gamma(M)\times\Gamma(M)$ dans $Hom\,(\Gamma(M), \Gamma(M))$, définie par

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

On appelle tenseur de courbure de Riemann de g le champ de tenseur C^∞ quatre fois covariants défini par

$$R(X, Y, Z, W) = g\,(X, R(Z, W)Y) = R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l$$

dans une carte locale; R_{ijkl} sont les composantes du tenseur de courbure.

***2.** La courbure de Ricci de g est le champs de tenseur C^∞, deux fois covariants, obtenu en contractant par g le tenseur de courbure de Riemann de g de la manière suivante*

$$Ric_{ij} = g^{kl} R_{kilj}$$

où g^{kl} sont les composantes de g^{-1}.

***3.** La courbure scalaire de g est la trace du tenseur de Ricci, noté $scal_g$. Dans une carte locale*

$$scal_g = g^{ij} Ric_{ij}$$

Soient X un champ de vecteurs et ω une 1-forme. Dans un système de coordonées locales, rappelons les formules de permutation des dérivées covariantes suivantes

$$\nabla_{ij}X^l - \nabla_{ji}X^l = R^l_{kij}X^k \quad \text{et } \nabla_{ij}\omega_l - \nabla_{ji}\omega_l = -R^k_{lij}\omega_k$$

où $R^l_{kij} = g^{lm}R_{mkij.}$

Définition 1.2 *On appelle opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus généralement Laplacien, l'opérateur Δ_g défini sur toute fonction C^2 sur M (à valeur réelle) par*

$$\Delta_g(\phi) = -div(grad\phi) = -trace(\nabla(\nabla\phi)).$$

Si $g_{ij}(x)$ sont les coordonnées de la métrique dans une carte locale $(x_i)_{i=1..m}$, on peut alors exprimer explicitement le laplacien comme un opérateur différentiel d'ordre 2 par la formule suivante:

Proposition 1.1 *Dans les coordonnées (x_i), le laplacien s'écrit*

$$\Delta_g = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x_j})$$

où $g^{ij}(x)$ désigne l'inverse de la matrice $g_{ij}(x)$ et $\sqrt{g}$ la racine du déterminant de g_{ij}.

1.1 Algèbre de Clifford

Une algèbre de Clifford est une algèbre associative unitaire qui est engendrée par un espace vectoriel V muni d'une forme quadratique Q.

L'algèbre de Clifford $CL(V, Q)$ est l'algèbre engendrée par V soumise à la condition

$$v^2 = Q(v) \quad \forall v \in V$$

où le produit v^2 est pris à l'intérieur de l'algèbre. Si la caractéristique du corps de base K n'est pas 2, alors on peut ré-écrire cette identité fondamentale sous la forme:

$$uv + vu = 2\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V$$

où

$$\langle u, v\rangle = (Q(u+v) - Q(u) - Q(v))/2$$

est la forme bilinéaire symétrique associée à Q.

Remarque 1.1 *Les algèbres de Clifford sont directement liées aux algèbres extérieures. En effet, si $Q = 0$ alors l'algèbre de Clifford $Cl(V, Q)$ est simplement l'algèbre extérieur $\Lambda(V)$.*

Pour Q différent de zéro, il existe un isomorphisme canonique linéaire entre $\Lambda(V)$ et $Cl(V, Q)$, c-à-d qu'ils sont naturelement isomorphes comme espaces vectoriels mais avec des multiplications différentes.

Définition 1.3 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie muni d'une forme quadratique Q, on note $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V i.e:*

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i} = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus ...$$

où $\otimes$ est la multiplication dans $T(V)$. Soit I l'ideal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - Q(x).1$, $x \in V$ et 1 désigne l'unité de l'algèbre. le quotient

$$Cl(V, Q) = T(V)/I = T(V)/(x \otimes x - Q(x).1)$$

est appelé algèbre de Clifford sur V associé à Q.

1.1.1 Base et dimension:

Si la dimension de V est n et $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de V, alors l'ensemble

$$\begin{aligned} & \{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k}/1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n \text{ et } 0 \leq k \leq n\} \\ = \; & \{1, e_1, .., e_n, e_1e_2, .., e_{n-1}e_n, .., e_1...e_n\} \end{aligned}$$

est une base de $Cl(V, Q)$.

Pour chaque valeur de k, il existe C_n^k éléments de la base, donc, la dimension totale de l'algèbre de Clifford est

$$\dim Cl(V, Q) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Si la caractéristique n'est pas 2 et si la forme quadratique Q est non dégénérée, il existe alors un ensemble de bases privilégiées pour V: les bases orthogonales.

Une base orthogonale est telle que

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \;\text{ si } i \neq j \text{ et } e_i^2 = 1$$

où $\langle ., . \rangle$ est la forme bilinéaire symétrique associée à Q. L'identité de Clifford fondamentalle implique que pour une base orthogonale:

$$e_ie_j = -e_je_i \quad i \neq j$$

Remarque 1.2 *En géométrie différentielle, on utilise courament les notions d'algèbre extérieure pour définir par exemple le fibré vectoriel des formes différentielles sur une variété différentielle.*

Dans le cas d'une variété riemannienne , les espaces tangents sont munis d'une forme quadratique naturelle induite par la métrique. Ainsi, on peut définir un "fibré vectoriel de Clifford" en analogie avec le fibré vectoriel extérieur.

1.1.2 La multiplication de Clifford sur les formes:

Soit $\Omega(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p(M)$ l'espace des formes différentielles sur M.

Définition 1.4 *Soit X un champ de vecteurs sur M. Le produit intérieur ou produit contracté d'une p-forme ω sur M par le champ X est l'application linéaire*

$$i_X : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

définie par: $\forall X_1, X_2, ..., X_{p-1}$ champs de vecteurs sur M

$$i_X\omega(X_1, X_2, ..., X_{p-1}) = \omega(X, X_1, X_2, ..., X_{p-1})$$

Sur $\Omega(M)$, on définit la multiplication de Clifford, notée $\theta.\omega$, par: pour $\theta \in \Omega^1(M)$ et $\omega \in \Omega^p(M)$

$$\begin{aligned} \theta.\omega &= \theta \wedge \omega - i_{\theta^\sharp}\omega \\ \omega.\theta &= (-1)^p(\theta \wedge \omega + i_{\theta^\sharp}\omega) \end{aligned}$$

où $\theta^\sharp$ désigne le champ de vecteur associé à la 1-forme θ c-à-d: $\theta(v) = g(\theta^\sharp, v)$. Et $i_{\theta^\sharp}$ le produit intérieur par $\theta^\sharp$

L'opérateur de Dirac agissant sur les formes est l'opérateur

$$\begin{aligned} D &: \Omega(M) \to \Omega(M) \\ D(\omega) &= \sum_{i=1}^{m} \theta^i.\nabla_{e_i}\omega \end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{i\leq m}$ est un repère orthonormé local de M et $\{\theta^i\}_{i\leq m}$ est le repère dual de $\{e_i\}_{i\leq m}$.

Proposition 1.2 *([34]) Dans un repère $\{e_i\}_{i\leq m}$ et son repère dual $\{\theta^i\}_{i\leq m}$,on a*

$$\begin{aligned} d\omega &= \theta^i \wedge \nabla_{e_i}\omega \\ \delta\omega &= -i_{(\theta^i)^\sharp}\nabla_{e_i}\omega \end{aligned}$$

où d et δ désignent respectivement la différentielle et la codifférentielle extérieures.

De cette proposition; on aura

$$D = d + \delta$$

ainsi

$$D^2 = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d = \Delta$$

c'est l'opérateur de Laplace-Hodge.

Théorème 1.1 *([34]) Dans un repère $\{e_i\}$ et son repère dual $\{\theta^i\}$, on a*

$$D^2\omega = \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \theta^i.\theta^j.R(e_i,e_j)\omega$$

$$= \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} R(e_i,e_j)\omega.\theta^j.\theta^i.$$

où R est le tenseur de courbure de M

Preuve:

$$\begin{aligned} D^2\omega &= \sum_{i,j=1}^{m} \theta^i.\theta^j.\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \\ &= \sum_{i=1}^{m} \theta^i.\theta^i.\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \sum_{i\neq j} \theta^i.\theta^j.\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \end{aligned}$$

et puisque $\theta^i.\theta^i = 1$ et $\theta^i.\theta^j = -\theta^j.\theta^i$, on aura

$$\begin{aligned} D^2\omega &= -\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \sum_{i<j} \theta^i.\theta^j.\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\omega - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \sum_{i<j} \theta^i.\theta^j.R(e_i,e_j)\omega \\ &= -\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \theta^i.\theta^j.R(e_i,e_j)\omega \end{aligned}$$

or

$$\nabla^*\nabla = -\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}$$

donc

$$D^2\omega = \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \theta^i.\theta^j.R(e_i,e_j)\omega$$

■

On note par $[.,.]$ le commutateur défini par: pour deux formes différentielles ω_1 et ω_2 on a

$$[\omega_1,\omega_2] = \omega_1.\omega_2 - \omega_2.\omega_1$$

Ainsi la formule de Weitzenböck est donnée par le corollaire suivant

Corollaire 1.1 *Dans un repère* $\{e_i\}$ *et son repère dual* $\{\theta^i\}$*, on a*

$$D^2\omega = \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\omega\right]$$

Preuve: On a

$$D^2\omega = \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\theta^i.\theta^j.R(e_i,e_j)\omega \tag{1.1}$$

Et

$$D^2\omega = \nabla^*\nabla\omega - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}R(e_i,e_j)\omega.\theta^i.\theta^j \tag{1.2}$$

en ajoutant 1.1 à 1.2, et divison par 2, on obtient

$$\begin{aligned} D^2\omega &= \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\theta^i.\theta^j.R(e_i,e_j)\omega - R(e_i,e_j)\omega.\theta^i.\theta^j\right) \\ &= \nabla^*\nabla\omega + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\omega\right] \end{aligned}$$

■

Lemme 1.1 *([34]) Dans un repère* $\{e_i\}$ *et son repère dual* $\{\theta^i\}$*, on a*

$$\begin{aligned} R(X,Y)\omega &= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m} g\left(R(X,Y)\,e_i, e_j\right)\left(\theta^i.\theta^j.\omega - \theta^j.\theta^i.\omega\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m} g\left(R(X,Y)\,e_i, e_j\right)\left[\theta^i.\theta^j, \omega\right] \end{aligned}$$

1.2 Variétés conformément plates

1.2.1 Courbure de Weyl

Définition 1.5 *Etant donnée* (M,g) *une variété riemannienne de dimension* $m \geq 3$*, la courbure de Weyl de* g*, notée* $Weyl_g$*, est le* C^∞*-champ de tenseur quatre fois covariants sur* M *défini par*

$$Weyl_g = R_g - \frac{1}{m-2}Ric_g \odot g + \frac{scal_g}{2(m-1)(m-2)}g \odot g$$

où R_g*,* Ric_g *et* $scal_g$ *désignent respectivement les courbures de Riemann, de Ricci et la courbure scalaire de* g *et* $\odot$ *est le produit de Kulkarni-Nomizu défini par: pour* h*,* k *deux tenseurs 2 fois covariants et symétriques et pour tous* X*,* Y*,* Z*,* $W \in TM$

$$k \odot h(X,Y,Z,W) = h(X,Z)k(Y,W) + h(Y,W)k(X,Z) - h(X,W)k(Y,Z) - h(Y,Z)k(X,W)$$

Les composantes W_{ijkl} de $Weyl_g$ dans une carte sont alors données par la relation

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{m-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &\quad + \frac{scal}{(m-1)(m-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \end{aligned}$$

1.2.2 Classe conforme d'une métrique:

Définition 1.6 *Soit (M, g) une variété riemannienne, la classe conforme de g, notée $[g]$, est l'ensemble des métriques riemanniennes sur M qui s'écrivent sous la forme $\tilde{g} = fg$ où $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle strictement positive de classe C^∞.*

On pourra encore écrire que

$$[g] = \{e^u g, u \in C^\infty(M)\}$$

Le résultat suivant montre aussi que $Weyl_g$ est aussi un invariant conforme;

Proposition 1.3 *Si $\tilde{g} = e^u g$, $u \in C^\infty(M)$, sont deux métriques conformes sur M, leurs courbure de Weyl satisfait l'identité*

$$Weyl_{\tilde{g}} = e^u Weyl_g$$

On définit maintenant ce que l'on entend par variété conformément plate

Définition 1.7 *Une variété (M, g) est dite conformément plate si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert V de x, et il existe une métrique $\tilde{g} \in [g]$ tels que $R_{\tilde{g}} = 0$ sur V.*

La nullité de la courbure de Riemann entraîne donc la nullité de la courbure de Weyl.

Il est alors clair que si (M, g) est conformément plate, $Weyl_g = 0$ sur M. La condition est aussi suffisante, du moins à partir de la dimension 4:

Théorème 1.2 *([27]) Une variété riemannienne (M, g) de dimension $m \geq 4$ est conformément plate si et seulement si sa courbure de Weyl est nulle en tout point de M.*

1.3 Applications harmoniques :

1.3.1 Définitions générales:

Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniènnes de dimensions m et n respectivement.

Pour toute application ϕ de M dans N, on désigne par $\Gamma(\phi)$ l'espace des champs de vecteurs le long de ϕ c'est-à-dire les sections du fibré image réciproque $\phi^{-1}TN$ induit sur M par ϕ à partir du fibré tangent de N.

On définit la densité d'énergie de ϕ pour les métriques g et h par:

$$e(\phi)(x) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(\phi(x))\frac{\partial\phi^i(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi^j(x)}{\partial x^\beta}$$

dans des coordonnées locales $(x_1, x_2, ..., x_m)$ de M. Considérons la différentielle de ϕ

$$d\phi = \frac{\partial\phi^i}{\partial x^\alpha}dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial\phi^i}$$

une section du fibré $T^*M \otimes \phi^{-1}TN$, et pour les connexions de Levi-Civita, on aura

$$\nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha}\partial\phi^i = \nabla^N_{\frac{\partial\phi^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi^j}}\frac{\partial}{\partial\phi^i} = \frac{\partial\phi^j}{\partial x^\alpha}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial\phi^k}$$

où Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel de N et $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial\phi^i}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\phi^i}$, ce ci implique

$$\begin{aligned} e(\phi)(x) &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right\rangle_{\phi^{-1}TN} \\ &= \frac{1}{2}\langle d\phi, d\phi\rangle_{T^*M\otimes\phi^{-1}TN} \\ &= \frac{1}{2}\|d\phi\|^2 = \frac{1}{2}\sum_i |d\phi_i|^2 \end{aligned}$$

Définition 1.8 *On appelle énergie de ϕ la quantité*

$$E_g(\phi) = \int_M e_g(\phi)dv_g$$

où $dv_g = \sqrt{g}dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^m$ est l'élément volume riemannien associé à g.

Lemme 1.2 *([29]) l'équation d'Euler-Lagrange de E_g est*

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\phi^i) + g^{\alpha\beta}(x)\Gamma^i_{jk}(\phi(x))\frac{\partial\phi^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi^k}{\partial x^\beta} = 0$$

Définition 1.9 *Les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange sont appelées applications harmoniques.*

Pour avoir une interprétation intrinsèque de l'équation d'Euler-Lagrange, on donne ψ un champ de vecteurs le long de ϕ c-à-d une section du fibré $\phi^{-1}TN$. En coordonnées locales $\psi = \psi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial \phi^i}$.

ψ induit une variation de ϕ donnée par

$$\phi_t(x) = \exp_{\phi(x)}(t\psi(x))$$

Nous allons calculer $\dfrac{d}{dt}E_g(\phi_t)\mid_{t=0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_g(\phi_t)\quad\mid\quad{}_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_M \frac{d}{dt}\langle d\phi_t, d\phi_t\rangle \mid_{t=0} dv_g \\
&= \int_M \left\langle d\phi, \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial t} d\phi_t \mid_{t=0}\right\rangle dv_g
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial t} d\phi_t &= \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial t} \frac{\partial \phi^i_t}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial \phi^i} \otimes dx^\alpha \\
&= \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \phi^i_t}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \phi^i}\right) \otimes dx^\alpha \text{ (car } \frac{\partial}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \text{ commute} \\
&\qquad\qquad \text{et } \nabla \text{ sans torsion)}
\end{aligned}$$

donc

$$\nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial t} d\phi_t \mid_{t=0} = \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha}\left(\psi^i(x)\frac{\partial}{\partial \phi^i}\right) \otimes dx^\alpha = d\psi$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_g(\phi_t)\quad\mid\quad{}_{t=0} &= \int_M \langle d\phi, d\psi\rangle \, dv_g \\
&= \int_M \left\langle d\phi, \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha}\psi \otimes dx^\alpha\right\rangle dv_g \\
&= -\int_M \left\langle \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha} d\phi, \psi \otimes dx^\alpha\right\rangle dv_g \\
&= -\int_M \left\langle trace_g \nabla^{\phi^{-1}TN} d\phi, \psi\right\rangle dv_g
\end{aligned}$$

on note par $\tau_g(\phi) = trace\nabla^\phi d\phi$. C'est le champ de tension de ϕ.

Ainsi l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit intrinséquement comme étant :

$$\tau_g(\phi) = 0$$

Définition 1.10 *La fonction ϕ est harmonique si et seulement si $\tau_g(\phi) = 0$, c-à-d ϕ est un point critique de la fonctionnelle énergie.*

1.3.2 Les applications F-harmoniques:

On désigne par $F : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une application de classe C^2 telle que $F'(t) > 0$ $\forall t \in [0,+\infty[$.

On définit la fonctionnelle F-énergie par

$$E_F(\phi) = \int_M F\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) dv_g$$

où $\dfrac{|d\phi|^2}{2}$ est la densité d'énergie.

Soit $(\phi_t)_t$ une famille des applications différentiables avec $\dfrac{d}{dt}\phi_t \mid_{t=0}= \psi$ et $\phi_0 = \phi$. La première variation de $E_F(\phi)$ dans la direction du champ ψ est

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_F(\phi_t) \quad | \quad {}_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_M F\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right) |_{t=0}\, dv_g \\
&= \int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle d\phi, \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial t} d\phi_t \mid_{t=0}\right\rangle dv_g \\
&= \int_M \left\langle \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha}\psi \otimes dx^\alpha, F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi \right\rangle dv_g \\
&= -\int_M \left\langle \psi \otimes dx^\alpha, \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\partial x^\alpha}\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi\right)\right\rangle dv_g \\
&= -\int_M \left\langle \psi, trace_g \nabla^{\phi^{-1}TN}\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi\right)\right\rangle dv_g
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt}E_F(\phi_t) \mid_{t=0}== -\int_M \langle \psi, \tau_F(\phi)\rangle\, dv_g \tag{1.3}$$

où

$$\tau_F(\phi) = trace_g \nabla^{\phi^{-1}TN}\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi\right)$$

est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle F-énergie E_F.

Définition 1.11 *ϕ est dite F-harmonique si et seulement si $\tau_F(\phi) = 0$, i.e ϕ est un point critique de E_F.*

Chapitre 2

Résultats de non existence d'immersions minimales

Nous montrerons dans ce chapitre qu'il n'existe aucune immersion isométrique minimale d'une variété M admettant une p-forme parallèle non nulle dans une variété N à courbure sectionnelle constante strictement négative. Nous nous intéressons dans la suite à l'analyse de quelques résultats de non existence des applications α-pluriharmoniques lorsque N est conformément plate.

Le résultat principal que nous obtenons dans cette partie, peut être comparer avec un résultat dû à J.H Sampson suivant lequel il n'existe pas d'application harmonique non triviale d'une variété kählérienne compacte de dimension au moins 4 dans un espace hyperbolique ([36]) et aussi du théorème 4.6 D_1 dans ([26]) qui est un théorème de rigidité pour les applications harmoniques d'une variété compacte admettant une p-forme parallèle dans un espace à opérateur de courbure non positif.

Rappelons qu'une immersion $\phi : M \to N$ est minimale si pour tout $x \in M$ et tout $\eta \in (T_xM)^{\perp}$ la courbure moyenne dans la direction η est nulle.

2.1 Lemmes fondamentaux

Dans ce qui suit (M, g) et (N, h) désignerons deux variétés riemanniennes connexes de dimensions respectives $m \geq 3, n \geq 4$, ϕ une application différentiable de M dans N et pour $p \geq 1$: $\Omega^p(M)$ l'espace des p-formes extérieures sur M. On désignera par ∇ la connexion canonique associée à la métrique riemannienne de TM.

Définition 2.1 *Une p-forme $\alpha \in \Omega^p(M)$ est dite harmonique si:*

$$D\alpha = d\alpha + \delta\alpha = 0$$

où D est l'opérateur de Dirac.

Rappelons la formule magique de Weitzenböck

$$D^2\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\alpha\right] \tag{2.1}$$

où $\{e_i\}_{i\leq m}$est un repère orthonormé locale de M et $\{\theta_i\}_{i\leq m}$ est le repère dual de $\{e_i\}_{i\leq m}$.

À partir de cette dernière formule, on obtient par un calcul direct:([34])

$$\begin{aligned}\left\langle D^2\alpha,\alpha\right\rangle &= \langle\Delta\alpha,\alpha\rangle\\ &= \langle\nabla^*\nabla\alpha,\alpha\rangle + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\alpha\right],\alpha\right\rangle\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour toutes deux p-formes α_1 et α_2, si ω est une 2-forme on a ([34])

$$\langle[\omega,\alpha_1],\alpha_2\rangle = -\langle\alpha_1,[\omega,\alpha_2]\rangle$$

ce-ci implique

$$\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\alpha\right],\alpha\right\rangle = -\left\langle R(e_i,e_j)\alpha,\left[\theta^i.\theta^j,\alpha\right]\right\rangle$$

en déduit grace au lemme 1.1

$$\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\alpha\right],\alpha\right\rangle = -\frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{m}\langle R(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle\left\langle\left[\theta^k.\theta^l,\alpha\right],\left[\theta^i.\theta^j,\alpha\right]\right\rangle$$

D'autre part, en utilisant les propriétés du produit intérieur, il vient:

$$\left[\theta^k.\theta^l,\alpha\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k,l\in\{i_1,...,i_p\}\\ 0 & \text{si } k,l\notin\{i_1,...,i_p\}\\ 2\theta^k.\theta^l.\alpha & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\alpha\right], \alpha\right\rangle\\
= &-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R_{ijkl}\left\langle\left[\theta^k.\theta^l,\alpha\right],\left[\theta^i.\theta^j,\alpha\right]\right\rangle\\
= &-\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R_{ijkl}\left\langle\theta^k.\theta^l.\alpha,\theta^i.\theta^j.\alpha\right\rangle\\
= &-(\sum_{i,j,l=1}^{m} R_{ijil}\left\langle\theta^i.\theta^l.\alpha,\theta^i.\theta^j.\alpha\right\rangle+\sum_{i,j,k=1}^{m} R_{ijki}\left\langle\theta^k.\theta^i.\alpha,\theta^i.\theta^j.\alpha\right\rangle\\
&+\sum_{i,j,l=1}^{m} R_{ijjl}\left\langle\theta^j.\theta^l.\alpha,\theta^i.\theta^j.\alpha\right\rangle+\sum_{i,j,k=1}^{m} R_{ijkj}\left\langle\theta^k.\theta^j.\alpha,\theta^i.\theta^j.\alpha\right\rangle\\
&+2\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R_{ijkl}\left\langle\theta^k.\theta^l.\alpha,\theta^i.\theta^j.\alpha\right\rangle)
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne sachant que pour tout deux p-formes α,β on a le produit scalair local: $\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{1}{p!}\alpha^{i_1\dots i_p}\beta_{i_1\dots i_p}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R(e_i,e_j)\alpha\right], \alpha\right\rangle\\
= &-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R_{ijkl}\left\langle\left[\theta^k.\theta^l,\alpha\right],\left[\theta^i.\theta^j,\alpha\right]\right\rangle\\
= &-\left(\sum_{i,j=1}^{m}-4Ric_{ij}\frac{1}{(p-1)!}\alpha^i_{i_2\dots i_p}\alpha^j_{i_2\dots i_p}+2\sum_{i,j,k,l=1}^{m}R_{ijkl}\frac{1}{(p-2)!}\alpha^{ij}_{i_3\dots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\dots,i_p}\right)\\
= &\frac{4}{(p-1)!}\left(\sum_{i,j=1}^{m}Ric_{ij}\alpha^i_{i_2\dots i_p}\alpha^j_{i_2\dots i_p}-\frac{p-1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{m}R_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\dots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\dots,i_p}\right)
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\langle\Delta\alpha,\alpha\rangle = &\langle\nabla^*\nabla\alpha,\alpha\rangle\\
&+\frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{i,j=1}^{m}Ric_{ij}\alpha^i_{i_2\dots i_p}\alpha^j_{i_2\dots i_p}-\frac{p-1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{m}R_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\dots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\dots,i_p}\right)
\end{aligned}$$

où Ric désigne la courbure d Ricci de M.

La première étape dans la preuve des résultat est :

Lemme 2.1 *Soit ϕ une application de M dans N, si $\alpha \in \Omega^p(M)$ $(p \geq 2)$ est une p-forme harmonique , alors pour tous champs de vecteurs $X_1, ..., X_p \in TM$ on a*

$$\begin{aligned} & \left(D\left(\alpha.d\phi\right) - (-1)^p \alpha.D(d\phi)\right)(X_1, ..., X_p) \\ = \;& 2(-1)^p \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \nabla d\phi \left(\left(i_{X_p} \circ ... \circ \hat{\imath}_{X_j} \circ ... i_{X_1} \alpha \right)^{\sharp}, X_j \right) \end{aligned}$$

où $\hat{\imath}_{X_j}$ signifie que i_{X_j} ne figure pas.

Preuve: Soient $x \in M$ et $\{e_i\}_{i \leq m}$ un repère orthonormé local au voisinage de x , on a

$$\begin{aligned} D(\alpha.d\phi) &= \sum_{i \leq m} \theta_i.\nabla_{e_i}(\alpha.d\phi) \\ &= \sum_{i \leq m} (\theta_i.(\nabla_{e_i}\alpha).d\phi + \theta_i.\alpha.(\nabla_{e_i} d\phi) \\ &= (D\alpha).d\phi + \sum_{i \leq m} \theta_i.\alpha.(\nabla_{e_i} d\phi) \end{aligned}$$

puisque α est harmonique $(D\alpha = 0)$

$$D(\alpha.d\phi) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i.\alpha.(\nabla_{e_i} d\phi)$$

D'autre part

$$\theta_i.\alpha = \theta_i \wedge \alpha - i(e_i)\alpha \quad \text{et } \alpha.\theta_i = (-1)^p \theta_i \wedge \alpha + (-1)^p i(e_i)\alpha$$

on en déduit

$$\begin{aligned} (-1)^p \alpha.\theta_i &= \theta_i \wedge \alpha + i(e_i)\alpha \\ &= \theta_i.\alpha + 2i(e_i)\alpha \end{aligned}$$

ainsi

$$\theta_i.\alpha = (-1)^p \alpha.\theta_i - 2i(e_i)\alpha$$

et par suite

$$\begin{aligned} D(\alpha.d\phi) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^p \alpha.\theta_i.(\nabla_{e_i} d\phi) - 2 \sum_{i=1}^{m} i(e_i)\alpha.(\nabla_{e_i} d\phi) \\ &= (-1)^p \alpha.D(d\phi) - 2 \sum_{i=1}^{m} i(e_i)\alpha.(\nabla_{e_i} d\phi) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} D(\alpha.d\phi) &= (-1)^p\alpha.D(d\phi) + 2(-1)^p\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}d\phi)\wedge(i(e_i)\alpha) \\ &\quad +2(-1)^p\sum_{i=1}^{m} i(\nabla_{e_i}d\phi)(i(e_i)\alpha) \end{aligned}$$

comme la hessienne est symétrique, nous obtenons

$$\begin{aligned} i(\nabla_{e_i}d\phi)(i(e_i)\alpha) &= \langle\nabla_{e_i}d\phi, e_j\rangle\,\alpha(e_i,e_j,...) \\ &= Hess\phi(e_i,e_j)\alpha(e_i,e_j,...) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p\alpha.D(d\phi) + 2(-1)^p\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}d\phi)\wedge(i(e_i)\alpha) \tag{2.2}$$

Soit maitenant $X_1, X_2, ..., X_p$ p champs de vecteurs de TM, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}\left((\nabla_{e_i}d\phi)\wedge(i(e_i)\alpha)\right)(X_1,X_2,...,X_p) \\ = &\sum_{i=1}^{m}(\nabla d\phi(e_i,X_1)\alpha\,(e_i,X_2,...,X_p) - \nabla d\phi(e_i,X_2)\alpha\,(e_i,X_1,X_3,...,X_p) \\ &+\nabla d\phi(e_i,X_3)\alpha\,(e_i,X_1,X_2,X_4,...,X_p)+...) \\ = &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}(\nabla d\phi(e_i,X_j)\alpha\left(e_i,X_1,...,\hat{X}_j,...,X_p\right) \\ = &\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}\nabla d\phi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha\left(e_i,X_1,...,\hat{X}_j,...,X_p\right)e_i, X_j\right) \end{aligned}$$

Posons

$$\left(i_{X_p}\circ i_{X_{p-1}}\circ...\circ i_{X_1}\alpha\right)^\sharp = \sum_{i=1}^{m}\alpha\left(e_i,X_1,...,\hat{X}_j,...,X_p\right)e_i$$

il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}\left((\nabla_{e_i}d\phi)\wedge(i(e_i)\alpha)\right)(X_1,X_2,...,X_p) \\ = &\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}\nabla d\phi\left(\left(i_{X_p}\circ i_{X_{p-1}}\circ...\circ i_{X_1}\alpha\right)^\sharp, X_j\right) \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} & D(\alpha.d\phi)(X_1, X_2, ..., X_p) - (-1)^p(\alpha.D(d\phi))(X_1, X_2, ..., X_p) \\ = \; & 2(-1)^p \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}\nabla d\phi \left(\left(i_{X_p} \circ i_{X_{p-1}} \circ ... \circ i_{X_1}\alpha\right)^{\sharp}, X_j \right) \end{aligned}$$

■

Les résultats de ce chapitre sont fondés sur l'équation suivante

Lemme 2.2 *Si ϕ est une immersion isométrique de M dans N alors, pour toute p-forme harmonique α de M $(p \geq 2)$ et tout $x \in M$, on a*

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4 \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle + 4R_\phi(\alpha) \tag{2.3}$$

où H est le vecteur courbure moyenne de ϕ (c'est-à-dire $H = \frac{1}{m}trace(\nabla d\phi)$), $\nabla^*\nabla$ est le laplacien brut de M, et où, dans une base orthonormée $\{e_i\}_{i\leq m}$ de T_xM

$$R_\phi(\alpha) = \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{i,j,k=1}^{m} R^N_{ikjk}\alpha^i_{i_2...i_p}\alpha^{ji_2...i_p} - \frac{p-1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3...i_p}\alpha^{kli_3...i_p}\right)$$

Preuve: Sachant que $d\phi$ est fermée en tant que 1-forme à valeurs dans ϕ^*TN, on a

$$D(d\phi) = (\delta + d)(d\phi) = \delta d\phi$$

de plus

$$\begin{aligned} \delta d\phi &= -i(e_i)\nabla_{e_i} d\phi \\ &= -trace\nabla d\phi = -mH \end{aligned}$$

on peut donc ré-écrire (2.2) sous la forme

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^{p+1}mH\alpha + 2(-1)^p\sum_{i=1}^{m} i(e_i)\beta \wedge i(e_i)\alpha$$

où $\beta = \nabla d\phi$

En considérant la norme de $D(\alpha.d\phi)$, on obtient

$$\begin{aligned} |D(\alpha.d\phi)|^2 &= m^2 |H|^2 |\alpha|^2 - 4mH\left\langle \alpha, \sum_{i=1}^{m} i(e_i)\beta \wedge i(e_i)\alpha \right\rangle \\ &\quad +4\sum_{i,j=1}^{m} \langle i(e_i)\beta \wedge i(e_i)\alpha, i(e_j)\beta \wedge i(e_j)\alpha\rangle \end{aligned}$$

évaluons

$$\begin{aligned}
&\left\langle \alpha, \sum_{i=1}^{m} i(e_i)\beta \wedge i(e_i)\alpha \right\rangle \\
=& \left\langle \alpha, \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} \beta(e_i, e_{i_l})(-1)^{l-1}\alpha\left(e_i, e_{i_1}, ..., \hat{e}_{i_l}, ..., e_{i_p}\right) \right\rangle \\
=& \frac{1}{p!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} \alpha(e_{i_1}, ..., e_{i_p})\beta(e_i, e_{i_l})(-1)^{l-1}\alpha\left(e_i, e_{i_1}, ..., \hat{e}_{i_l}, ..., e_{i_p}\right) \\
=& \frac{1}{p!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1}\beta(e_i, e_{i_l})\alpha(e_{i_1}, ..., e_{i_p})\alpha\left(e_i, e_{i_1}, ..., \hat{e}_{i_l}, ..., e_{i_p}\right)
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{m} \langle i(e_i)\beta \wedge i(e_i)\alpha, i(e_j)\beta \wedge i(e_j)\alpha \rangle \\
=& \frac{1}{p!}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p} (-1)^{k-1}\beta(e_i, e_{i_k})\alpha\left(e_i, e_{i_1}, ..., \hat{e}_{i_k}, ..., e_{i_p}\right) \times \\
& (-1)^{l-1}\beta(e_j, e_{i_l})\alpha\left(e_i, e_{i_1}, ..., \hat{e}_{i_l}, ..., e_{i_p}\right) \\
=& \frac{1}{p!}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p} (-1)^{k+l-2}\beta_{ii_k}\beta_{ji_l}\alpha_{i_1...i...i_p}\alpha^{i_1...j...i_p}
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
|D(\alpha.d\phi)|^2 &= m^2|H|^2|\alpha|^2 - \frac{4}{p!}mH\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}\beta_{ii_l}\alpha_{i_1...i_p}\alpha^{ii_1...\hat{i}_l..i_p} \\
&+\frac{4}{p!}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p}(-1)^{k+l-2}\beta_{ii_k}\beta_{ji_l}\alpha_{i_1...i...i_p}\alpha^{i_1...j...i_p} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

d'autre part la formule de Weitzenböck (2.1) pour une p-forme harmonique

$$\langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle + \langle R(\alpha), \alpha\rangle = 0 \qquad (2.5)$$

où

$$\langle R(\alpha), \alpha\rangle = \frac{1}{(p-1)!}\left[\sum_{i,j=1}^{m} Ric_{ij}\alpha^{i}_{i_2...i_p}\alpha^{j}_{i_2...i_p} - \frac{p-1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^M_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3...i_p}\alpha^{kl}_{i_3...i_p}\right]$$

Par ailleurs les équations de Gauss s'écrivent pour tous X, Y, Z, W

$$R^M(X,Y,Z,W) = R^N(X,Y,Z,W) + \langle \beta(X,Z), \beta(Y,W)\rangle - \langle \beta(X,W), \beta(Y,Z)\rangle$$

nous obtenons donc

$$Ric_M(X,Y) = \sum_{q=1}^{m} R^N(X,e_q,Y,e_q) + m\,\langle H, \beta(X,Y)\rangle - \sum_{q=1}^{m} \langle \beta(X,e_q), \beta(Y,e_q)\rangle$$

en substituant dans (2.5), il vient

$$\begin{aligned} \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle &= -\frac{1}{(p-1)!}[\left(\sum_{q=1}^{m} R^N_{iqjq} + mH\beta_{ij} - \sum_{q=1}^{m} \beta_{iq}\beta_{jq}\right)\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &\quad -\frac{p-1}{2}\left(R^N_{ijkl} + \beta_{ik}\beta_{jl} - \beta_{il}\beta_{jk}\right)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\ldots i_p}] \end{aligned} \tag{2.6}$$

on améliore (2.4)

$$\begin{aligned} &|D(\alpha.d\phi)|^2 \\ =\;& m^2|H|^2|\alpha|^2 - \frac{4}{(p-1)!}mH\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &+\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{ii_1}\beta_{ji_1}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &+\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}\beta_{ii_1}\beta_{ji_l}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_1\ldots\hat{i}_l\ldots i_p} \\ =\;& m^2|H|^2|\alpha|^2 - \frac{4}{(p-1)!}mH\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &+\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{ii_1}\beta_{ji_1}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &+\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{ii_1}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\left(\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}\beta_{ji_l}\alpha^{ji_1\ldots\hat{i}_l\ldots i_p}\right) \\ =\;& m^2|H|^2|\alpha|^2 - \frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m}\left(mH\beta_{ij} - \beta_{ii_1}\beta_{ji_1}\right)\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &+\frac{4}{2(p-2)!}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\beta_{ii_1}\beta_{ji_2} - \beta_{ii_2}\beta_{ji_1}\right)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{i_1i_2\ldots i_p} \end{aligned}$$

(2.6) devient alors

$$\begin{aligned}\langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle &= -\frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} R^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} + \frac{1}{2(p-2)!}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\ldots i_p} \\ &\quad +\frac{1}{4}\left|D(\alpha.d\phi)\right|^2 - \frac{1}{4}m^2\left|H\right|^2\left|\alpha\right|^2\end{aligned}$$

ou encore

$$\left|D(\alpha.d\phi)\right|^2 = m^2\left|H\right|^2\left|\alpha\right|^2 + 4\left\langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\right\rangle + 4R_\phi(\alpha)$$

où

$$R_\phi(\alpha) = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} R^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} - \frac{1}{2(p-2)!}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kl}_{i_3\ldots i_p} \tag{2.7}$$

■

2.2 Résultats de non existence

On noterons par $P_p(M) = \{\alpha \in \Omega^p(M) : \nabla\alpha = 0\}$ l'espace des p-formes parallèles sur M.

Le premier résultat que nous obtenons est un résultat de non existence qui s'énonce comme suit

Théorème 2.1 *Soit M une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$, et soit N une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante strictement négative, si M admet une p-forme parallèle non nulle ($p \geq 2$), alors, il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans N.*

Preuve: Si la courbure sectionnelle de N est constante, on a alors:

$$R^N_{ijkl} = c\left(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}\right)\ ,\ \ c = \text{constante}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} R^N_{ikjk} &= c\sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}h_{kk} - h_{ik}h_{kj}\right) \\ &= mch_{ij} - c\sum_{k=1}^{m} h_{ik}h_{kj} \\ &= (m-1)ch_{ij}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{(p-1)!}c(m-1)h_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\
&\quad -\frac{1}{2(p-2)!}c\left(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}\right)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}c(m-1)\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ii_2\ldots i_p} \\
&\quad -\frac{1}{2(p-2)!}c\left(\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{iji_3\ldots i_p}-\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{jii_3\ldots i_p}\right) \\
&= \frac{1}{(p-1)!}c(m-1)\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ii_2\ldots i_p}-\frac{1}{(p-2)!}c\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{iji_3\ldots i_p} \\
&= \frac{p!}{(p-1)!}c(m-1)\left|\alpha\right|^2-\frac{p!}{(p-2)!}c\left|\alpha\right|^2 \\
&= pc(m-p)\left|\alpha\right|^2
\end{aligned}$$

et comme $c<0$ et $2\leq p<m$, il vient

$$R_\phi(\alpha)=pc(m-p)\left|\alpha\right|^2<0$$

par conséquent

$$m^2\left|H\right|^2\left|\alpha\right|^2\geq -4R_\phi(\alpha)$$

ainsi

$$m^2\left|H\right|^2\left|\alpha\right|^2>0$$

ce-ci implique que $H\neq 0$, donc ϕ n'est pas minimale. ■

La suite des résultat utilise le lemme suivant

Lemme 2.3 *Soit W^N_{ijkl} le tenseur de Weyl de la variété but N. La quantité $R_\phi(\alpha)$ s'écrit comme suit*

$$\begin{aligned}
R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{(p-1)!}W^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p}-\frac{1}{2(p-2)!}W^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\
&\quad +\frac{m-2p}{(n-2)(p-1)!}R^N_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p}-\frac{(m-p)p}{(n-2)(n-1)}scal_h\left|\alpha\right|^2 \\
&\quad +\frac{p}{n-2}R^N_{qq}\left|\alpha\right|^2
\end{aligned}$$

où $scal_h$ désigne la courbure scalaire de N.

Preuve: Le tenseur de courbure s'exprime en fonction du tenseur de Weyl comme suit

$$\begin{aligned} R^N_{ijkl} &= W^N_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(R^N_{ik}h_{jl} + R^N_{jl}h_{ik} - R^N_{il}h_{jk} - R^N_{jk}h_{il}\right) \\ &\quad -\frac{scal_h}{(n-1)(n-2)}\left(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}\right) \\ &= W^N_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(R^N_{ik}\delta^j_l + R^N_{jl}\delta^i_k - R^N_{il}\delta^j_k - R^N_{jk}\delta^i_l\right) \\ &\quad -\frac{scal_h}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k\right) \end{aligned}$$

la relation (2.7) devient

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} R^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\ &\quad -\frac{1}{2(p-2)!}\sum_{i,j,k,l=1}^{m}(W^N_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(R^N_{ik}\delta^j_l + R^N_{jl}\delta^i_k - R^N_{il}\delta^j_k - R^N_{jk}\delta^i_l\right) \\ &\quad -\frac{scal_h}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k\right))\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \end{aligned}$$

par ailleurs

$$\begin{aligned} &\left(R^N_{ik}\delta^j_l + R^N_{jl}\delta^i_k - R^N_{il}\delta^j_k - R^N_{jk}\delta^i_l\right)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &= 2\left(R^N_{ik}\alpha_{iji_3\ldots i_p}\alpha^{kji_3\ldots i_p} + R^N_{jl}\alpha_{iji_3\ldots i_p}\alpha^{ili_3\ldots i_p}\right) \\ &= 2\left(R^N_{ik}\alpha_{iji_3\ldots i_p}\alpha^{kji_3\ldots i_p} + R^N_{il}\alpha_{jii_3\ldots i_p}\alpha^{jli_3\ldots i_p}\right) \\ &= 4R^N_{ik}\alpha_{iji_3\ldots i_p}\alpha^{kji_3\ldots i_p} \end{aligned}$$

et

$$\left(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k\right))\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{i_3\ldots i_p}_{kl} = 2p!\,|\alpha|^2$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} R^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\
= & \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{i,j,q=1}^{m} W^N_{iqjq} + \frac{1}{n-2}\left(R^N_{ij}\delta^q_q + R^N_{qq}\delta^i_j - R^N_{iq}\delta^q_j - R^N_{qj}\delta^q_i\right)\right)\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\
& -\frac{1}{(p-1)!}\frac{scal_h}{(n-1)(n-2)}\sum_{i,j,q=1}^{m}\left(\delta^i_j\delta^q_q - \delta^q_i\delta^j_q\right)\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\
= & \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} W^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} + \frac{(m-2)}{(n-2)(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m} R^N_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\
& +\frac{p!}{(p-1)!(n-2)}\sum_{q=1}^{m} R^N_{qq}\left|\alpha\right|^2 - \frac{(m-1)}{(n-2)(n-1)}\frac{p!}{(p-1)!}scal_h\left|\alpha\right|^2 \\
= & \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} W^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} + \frac{(m-2)}{(n-2)(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m} R^N_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\
& +\frac{p}{(n-2)}\sum_{q=1}^{m} R^N_{qq}\left|\alpha\right|^2 - \frac{p(m-1)}{(n-2)(n-1)}scal_h\left|\alpha\right|^2
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
R_\phi(\alpha) = & \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} W^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} + \frac{p}{n-2}\sum_{q=1}^{m} R^N_{qq}\left|\alpha\right|^2 \\
& +\frac{(m-2)}{(n-2)(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m} R^N_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} - \frac{p(m-1)}{(n-1)(n-2)}scal_h\left|\alpha\right|^2 \\
& -\frac{1}{2(p-2)!}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} W^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_2\ldots i_p}\alpha^{kl}_{i_2\ldots i_p} - \frac{2}{(n-2)(p-2)!}\sum_{i,j,k=1}^{m} R^N_{ik}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kj}_{i_3\ldots i_p} \\
& +\frac{p(p-1)}{(n-1)(n-2)}scal_h\left|\alpha\right|^2
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
R_\phi(\alpha) = & \frac{1}{(p-1)!}\sum_{i,j,q=1}^{m} W^N_{iqjq}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} - \frac{1}{2(p-2)!}\sum_{i,j,k,l=1}^{m} W^N_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_2\ldots i_p}\alpha^{kl}_{i_2\ldots i_p} \\
& +\frac{p}{n-2}\sum_{q=1}^{m} R^N_{qq}\left|\alpha\right|^2 + \frac{(m-2p)}{(n-2)(p-1)!}\sum_{i,j=1}^{m} R^N_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p} \\
& -\frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)}scal_h\left|\alpha\right|^2
\end{aligned}
$$

■

Définition 2.2 *Pour toute p-forme harmonique α, on dira qu'une application ϕ de M dans N est α-pluriharmonique si*

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p \alpha.D(d\phi)$$

Pour un point $x \in N$, on note par $\mu(x)$ et $\lambda(x)$ la plus petite et la plus grande valeur propre du tenseur de Ricci au point x.

On introduit les fonctions suivantes

$$\pi(x) = \begin{cases} (n-1)m\mu(x) - (m+(n-2)p)\,\lambda(x) & \text{si } m-2p<0 \\ 2(n-1)\mu(x) - n\lambda(x) & \text{si } m-2p \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\nu(x) = \begin{cases} (n-1)m\lambda(x) - (m+(n-2)p)\,\mu(x) & \text{si } m-2p<0 \\ 2(n-1)\lambda(x) - n\mu(x) & \text{si } m-2p \geq 0 \end{cases}$$

où $n = \dim N$

Nous obtenons

Théorème 2.2 *Soit M une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$, et soit N une variété riemannienne conformément plate*

a) *si la fonction π est strictement positive ou la fonction ν est strictement négative et si la variété source M admet une p-forme parallèle α $(p \geq 2)$ non nulle, alors il n'existe aucune immersion α-pluriharmonique de M dans N.*

b) *si la fonction ν est non positive et si M admet une p-forme parallèle α non nulle $(p \geq 2)$, alors toute immersion minimale isométrique de M dans N est α-pluriharmonique .*

Preuve: Si α est parallèle, alors l'équation (2.3) s'écrit

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha)$$

a) nous distinguons deux cas:

i) si $m - 2p \geq 0$ c'est-à-dire $2p \leq m$. On a

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha)(x) \;\; &= \;\; \left(\frac{m-2p}{(n-2)(p-1)!} R^N_{ij} \alpha^i_{i_2 \ldots i_p} \alpha^j_{i_2 \ldots i_p} \right)(x) \\ & \quad - \frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)} scal_h \, |\alpha(x)|^2 + \frac{p}{(n-2)} R^N_{qq} \, |\alpha(x)|^2 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left(R^N_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^j_{i_2\ldots i_p}\right)(x) &= \gamma(x)\left(\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\right)(x)\\ &= \gamma(x)p!\left|\alpha(x)\right|^2\end{aligned}$$

où $\gamma(x)$ est une valeur propre de Ricc_N. Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}R_\phi(\alpha)(x) &\geq \frac{m-2p}{(n-2)(p-1)!}\mu(x)p!\left|\alpha(x)\right|^2 - \frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)}n\lambda(x)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &\quad +\frac{pm}{(n-2)}\mu(x)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &= \frac{p(m-p)}{(n-2)(n-1)}\left(2(n-1)\mu(x)-n\lambda(x)\right)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &= \frac{p(m-p)}{(n-2)(n-1)}\pi(x)\left|\alpha(x)\right|^2\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}R_\phi(\alpha)(x) &\leq \frac{m-2p}{(n-2)(p-1)!}\lambda(x)p!\left|\alpha(x)\right|^2 - \frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)}n\mu(x)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &\quad +\frac{pm}{(n-2)}\lambda(x)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &= \frac{p(m-p)}{(n-2)(n-1)}\left(2(n-1)\lambda(x)-n\mu(x)\right)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &= \frac{p(m-p)}{(n-2)(n-1)}\nu(x)\left|\alpha(x)\right|^2\end{aligned}$$

ii) si $m-2p<0$ c'est-à-dire $2p>m$. On a

$$\begin{aligned}R_\phi(\alpha)(x) &\leq \frac{(m-2p)\,p}{(n-2)}\mu(x)\left|\alpha(x)\right|^2 - \frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)}n\mu(x)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &\quad +\frac{pm}{(n-2)}\lambda(x)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &= \frac{p}{(n-2)(n-1)}\left((n-1)m\lambda(x)-(m+(n-2)p)\mu(x)\right)\left|\alpha(x)\right|^2\\ &= \frac{p\left|\alpha(x)\right|^2}{(n-2)(n-1)}\nu(x)\end{aligned}$$

de ces trois inégalités, on déduit immédiatement:

$$\begin{aligned}\text{si } \pi(x) &> 0 \text{ (ou } \nu(x)<0)\\ \text{alors } R_\phi(\alpha)(x) &> 0 \text{ (ou } R_\phi(\alpha)(x)<0\text{)}\end{aligned}$$

et par suite

$$D(\alpha.d\phi) \neq -mH\alpha = \alpha.D(d\phi)$$

c'est-à-dire ϕ n'est pas α-pluriharmonique.

b) si $\nu(x)$ est non positive, alors $R_\phi(\alpha)(x) \leq 0$. Ce-ci implique

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 \leq m^2 |H|^2 |\alpha|^2$$

et comme ϕ est minimale, il en résulte

$$D(\alpha.d\phi) = 0 = (-1)^p \alpha.D(d\phi)$$

ainsi, ϕ est α-pluriharmonique. ■

Théorème 2.3 *Soient M une variété riemannienne compacte de dimension $m \geq 3$, et N une variété riemannienne conformément plate telle que la fonction π soit non négative et strictement positive en au moins un point. Alors, pour toute p-forme harmonique α non nulle sur M $(p \geq 2)$, il n'existe aucune immersion isométrique α-pluriharmonique de M dans N.*

Preuve: Si ϕ est une immersion isométrique α-pluriharmonique de M dans N, alors

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p \alpha.D(d\phi) = (-1)^{p+1} mH\alpha$$

l'équation (2.3) devient

$$\langle \nabla^* \nabla \alpha, \alpha \rangle + R_\phi(\alpha) = 0$$

en intégrant cette dernière formule sur M, on obtient

$$\int_M |\nabla \alpha|^2 dv_g + \int_M R_\phi(\alpha) dv_g = 0$$

puisque par hypothèse $R_\phi(\alpha)(x) > 0$, nous avons le résultat. ■

Théorème 2.4 *Soit M une variété riemannienne compacte conformément plate de dimension $m \geq 4$, et supposons que la fonction π est non négative et strictement positive en au moins un point , alors le nombre de Betti $b_p(M) = 0$.*

Preuve: Rappelons que $b_p(M)$ est défini comme étant la dimension de l'espace des p-formes harmoniques sur M.

Soit $\phi = I : M \to M$.

L'application identité d'une variété riemannienne est toujours α-pluriharmonique, quelle que soit la p-forme α.

Supposons que $b_p(M) \neq 0$, c-à-d il existe au moins une p-forme α harmonique non nulle. Comme dans la preuve du téorème 2.3, on a

$$\int_M |\nabla \alpha|^2 dv_g + \int_M R_I(\alpha) dv_g = 0$$

puisque par hypothèse $R_I(\alpha)$ est non négative et non identiquement nulle, alors α est nulle et par suite $b_p(M) = 0$. ■

Théorème 2.5 *Soient M une variété riemannienne compacte de dimension $m \geq 3$, et N une variété riemannienne conformément plate. Supposons que la fonction $\nu(x)$ est strictement négative.*

Si M admet une p-forme parallèle α non nulle ($p \geq 2$), alors il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans N.

Preuve: Si $\alpha \in P_p(M)$, l'équation (2.3) s'écrit

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha)$$

ce-ci implique

$$m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha) \geq 0$$

donc

$$m^2 |H|^2 |\alpha|^2 \geq -4R_\phi(\alpha)$$

d'après le lemme 2.3, les hypothèses faites sur la variété N entraînent que

$$R_\phi(\alpha)(x) < 0$$

d'où

$$m^2 |H|^2 |\alpha|^2 > 0$$

Ainsi la courbure moyenne $H \neq 0$, et par suite ϕ n'est pas minimale. ■

Chapitre 3

Quelques propriétés des applications F-harmoniques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'estimation de l'indice de Morse des applications F-harmoniques à valeurs dans des sphères. Les résultats que nous obtenons généralisent en partie ceux obtenus pour les applications harmoniques et p-harmoniques dans [21] et [23].

3.1 Préliminaires:

Soient (M, g) une variété riemanniènne compacte de dimension $m \geq 2$ et S^n la sphère unité de dimension $n \geq 2$ munie de la métrique canonique can induite par le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pour une application $\phi : (M, g) \to (S^n, can)$, on définit la fonctionnelle F-énergie par

$$E_F(\phi) = \int_M F\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) dv_g$$

où $F : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une application de classe C^2 telle que $F'(t) > 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ et $\dfrac{|d\phi|^2}{2}$ est la densité d'énergie donné par

$$e_g(\phi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{|d\phi(e_i)|^2}{2}$$

où $\{e_i\}_{i \leq m}$ une base orthonormée de M et dv_g l'élément de volume riemannien associé à g.

On note par ∇^M et ∇^{S^n} les connexions de Levi-Civita sur M et S^n respectivement. Soit $\phi^{-1}TS^n$ le fibré vectoriel engendré par ϕ sur M et $\Gamma(\phi^{-1}TS^n)$ l'espace de toutes les sections sur $\phi^{-1}TS^n$.

∇^ϕ désigne la connexion sur $\phi^{-1}TS^n$ définie par

$$\nabla^\phi_X Y = \nabla^{S^n}_{\phi_* X} Y$$

où X est un vecteur tangent de M et Y une section de $\phi^{-1}TS^n$.

Soit v un champ de vecteurs sur S^n et (γ^v_t) le flot des difféomorphismes engendré par v sur S^n, c'est à dire

$$\gamma^v_0 = id \text{ et } \frac{d}{dt}\gamma^v_t \mid_{t=0} = v(\gamma^v_t).$$

Désignons par $\phi_t = \gamma^v_t \circ \phi$ le flot engendré par v le long de l'application ϕ.

Rappelons que ϕ est dite F-harmonique si son tenseur de tension

$$\tau_F(\phi) = trace_g \nabla^\phi \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi \right) = 0$$

c-à-d ϕ est un point critique de la fonctionnelle F-énergie E_F.

La variation seconde de E_F dans la direction de v est alors

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t) \mid_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_M \frac{d}{dt}F\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\mid_{t=0} dv_g \\
&= \int_M \frac{d}{dt}\left[F'\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi_{\partial t} d\phi_t, d\phi_t\right\rangle\right]\mid_{t=0} dv_g \\
&= \int_M \frac{d}{dt}\left[F'\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi_{e_i}\frac{\partial \phi_t}{\partial t}e_i, d\phi_t\right\rangle\right]\mid_{t=0} dv_g \\
&= \int_M \left[F''\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi_{\partial t} d\phi_t, d\phi_t\right\rangle\left\langle \nabla^\phi_{e_i}\frac{\partial \phi_t}{\partial t}e_i, d\phi_t\right\rangle\right]\mid_{t=0} dv_g \\
&+ \int_M \left[F'\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi_{\partial t}\nabla^\phi_{e_i}\frac{\partial \phi_t}{\partial t}e_i, d\phi_t\right\rangle\right]\mid_{t=0} dv_g \\
&+ \int_M \left[F'\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi_{e_i}\frac{\partial \phi_t}{\partial t}e_i, \nabla^\phi_{\partial t} d\phi_t\right\rangle\right]\mid_{t=0} dv_g \\
&= \int_M \left[F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi v, d\phi\right\rangle^2 + F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left|\nabla^\phi v\right|^2\right] dv_g \\
&- \int_M \left\langle \nabla^\phi_{\partial t}\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\mid_{t=0}, trace_g \nabla^\phi\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)d\phi\right)\right\rangle dv_g \\
&- \int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\sum_{i=1}^m \left\langle R^{S^n}(v, d\phi(e_i))d\phi(e_i), v\right\rangle dv_g
\end{aligned}$$

et comme ϕ est F-harmonique ($\tau_F(\phi) = 0$), on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} E_F(\phi_t) \quad | \quad {}_{t=0} &= \int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) \left\langle \nabla^\phi v, d\phi \right\rangle^2 dv_g \\ &+ \int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) \left[\left|\nabla^\phi v\right|^2 - \sum_{i=1}^m \left\langle R^{S^n}(v, d\phi(e_i)) d\phi(e_i), v \right\rangle \right] dv_g \end{aligned}$$

L'espace C des champs conformes de S^n est la somme directe de l'espace K des champs de Killing et de l'espace

$$A = \left\{ \bar{v}\text{: le gradient dans } S^n \text{ de la fonction } x \to \langle v, x \rangle \, , \, v \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}$$

Nous allons nous intéresser à la restriction de la fonctionnelle F-énergie E_F à la sous variété $G_n(\phi) = \{\gamma \circ \phi, \gamma \in G(n)\}$ où $G(n)$ est le groupe des difféomorphismes conformes de S^n (Une étude détaillée de ce groupe est faite dans [4]).

Le long de ce chapitre, on considère la variation dans la direction des champs de vecteurs du sous espace $A(\phi) = \{\bar{v} \circ \phi, v \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ de $\Gamma(\phi)$, où $\bar{v}$ est le champ de vecteurs sur S^n obtenu en projetant le champ constant v sur le fibré tangent à S^n. Il s'identifie au champ gradient de la fonction $x \to \langle ., x \rangle$, donné par

$$\bar{v}(y) = v - \langle v, y \rangle \, y$$

pour tout $y \in S^n$.

$\bar{v}$ est un champ de vecteurs conforme sur S^n, et si ϕ est non constante , $A(\phi)$ est de dimension $n + 1$.

3.2 Indice de Morse des applications F-harmoniques

Pour tout champ de vecteurs sur S^n le long de ϕ, on associe la forme quadratique suivante

$$Q_\phi(v) = \frac{d^2}{dt^2} E_F(\phi_t) \, |_{t=0}$$

l'indice de Morse de l'application F-harmonique ϕ est défini comme étant l'entier

$$Ind(\phi) = \sup \{ \dim N, N \subset \Gamma(\phi) \text{ tel que } Q_\phi \text{ soit définie négative sur } N \}$$

où N est un sous espace de $\Gamma(\phi)$.

L'indice de Morse mesure le degré de stabilité de l'application ϕ, elle est stable si

$$Ind(\phi) = 0$$

Soit, maintenant, $S_g^F(\phi)$ le tenseur d'énergie-impulsion défini par

$$S_g^F(\phi) = F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}g - \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\phi^* can$$

pour tout $x \in M$, on pose

$$S_g^{0,F}(\phi) = \inf\left\{S_g^F(\phi)(X,X), X \in T_xM \text{ tel que } g(X,X) = 1\right\}$$

le tenseur $S_g^F(\phi)$ sera dit positif (resp.défini positif) en x si on a

$$S_g^{0,F}(\phi) \geq 0 \left(\text{resp.} S_g^{0,F}(\phi) > 0\right)$$

Remarque 3.1 $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, *avec* $p = 2$ *ou* $p \geq 4$, $S_g^p(\phi)$ *est le tenseur d'énergie-impulsion introduit, respectivement, par Eells et Lemaire pour* $p = 2$ *([16]) et El Soufi pour* $p \geq 4$*([21]).*

Le premier résultat que nous obtenons dans cette direction est le suivant

Théorème 3.1 *Soit* ϕ *une application* F*-harmonique d'une variété riemannienne compacte* M *de dimension* $m \geq 2$ *dans la sphère euclidienne* S^n $(n \geq 2)$*. Supposons que le tenseur d'énergie-impulsion* $S_g^F(\phi)$ *de* ϕ *est défini positif, alors on a:* $Ind(\phi) \geq n+1$*.*

Preuve: Soit $w = \bar{v} \circ \phi \in A(\phi)$ et on pose $\langle v, \phi\rangle = \phi_v$. En tout point $x \in M$, on note respectivement $w^\top(x)$ et $w^\perp(x)$ les projections tangentielle et normale de $w(x)$ sur l'espace $d\phi(T_xM)$ et $d\phi(T_xM)^\perp$.

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ une base orthonormée de T_xM qui diagonalise ϕ^*can et telle que $\{d\phi(e_1), d\phi(e_2), ..., d\phi(e_l)\}$ forme une base de $d\phi(T_xM)$.

Si $F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2} \neq 0$, alors on a au point x:

$$\left|w^\top(x)\right|^2 = \sum_{i=1}^{l} |d\phi(e_i)|^{-2}\langle w(x), d\phi(e_i)\rangle^2$$

d'autre part, pour $i \leq l$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi(e_i)|^2 \\
=\ &\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)can(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\
=\ &\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)(\phi^*can)(e_i, e_i) \\
=\ &F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2} - S_g^F(\phi)(x)(e_i, e_i)
\end{aligned}$$

ce-ci implique

$$\begin{aligned}
&\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi(e_i)|^2 \\
\leq\ & F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}-S_g^{0,F}(\phi)(x)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
&\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}-S_g^{0,F}(\phi)(x)\right)\left|w^{\top}(x)\right|^2 \\
\geq\ & \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\sum_{i=1}^{l}\langle w(x),d\phi(e_i)\rangle^2
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\langle w(x),d\phi(e_i)\rangle^2 &= \langle v,d\phi(e_i)\rangle^2 \\
&= |d\phi_v(e_i)|^2
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}-S_g^{0,F}(\phi)(x)\right)\left|w^{\top}(x)\right|^2 \\
\geq\ & \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi_v(x)|^2
\end{aligned}$$

En tenant compte de (3.1), il vient donc

$$\begin{aligned}
&\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi_v(x)|^2-\frac{|d\phi|^2}{2}F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|w(x)|^2 \\
\leq\ & -\frac{|d\phi|^2}{2}F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left|w^{\perp}(x)\right|^2-S_g^{0,F}(\phi)(x)\left|w^{\top}(x)\right|^2 \\
\leq\ & -S_g^{0,F}(\phi)(x)\left|w^{\perp}(x)\right|^2-S_g^{0,F}(\phi)(x)\left|w^{\top}(x)\right|^2
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi_v(x)|^2-\frac{|d\phi|^2}{2}F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|w(x)|^2 \\
&\qquad\leq -S_g^{0,F}(\phi)(x)\,|w(x)|^2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La formule de la variation seconde peut s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t) \quad | \quad {}_{t=0} = &\int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi w, d\phi\right\rangle^2 dv_g \\ &+\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left[\left|\nabla^\phi w\right|^2 - \sum_{i=1}^m \left\langle R^{S^n}(w, d\phi(e_i))d\phi(e_i), w\right\rangle\right] dv_g \\ = &\int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle \nabla^\phi w, d\phi\right\rangle^2 dv_g \\ &+\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left[\left|\nabla^\phi w\right|^2 - |d\phi|^2|w|^2 + |d\phi_v|^2\right] dv_g\end{aligned}$$

et puisque

$$\left|\nabla^\phi w\right|^2 = \left|\nabla^\phi\left(\bar{v}\circ\phi\right)\right|^2 = |d\phi_v|^2$$

et

$$\left\langle \nabla^\phi w, d\phi\right\rangle^2 = |d\phi_v|^2|d\phi|^2$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t) \quad | \quad {}_{t=0} = &\int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi_v|^2|d\phi|^2 dv_g \\ &+2\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi_v|^2 dv_g - \int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2|w|^2 dv_g\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t) \quad | \quad {}_{t=0} = 2&\int_M \left[\left(F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2} + F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi_v|^2\right. \\ &\left. -\frac{|d\phi|^2}{2}F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|w|^2\right] dv_g \qquad (3.3)\end{aligned}$$

en tenant compte de (3.2), (3.3) devient

$$\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t)\ |_{t=0} \leq -2\int_M S_g^{0,F}(\phi)\,|w|^2\, dv_g$$

et comme $S_g^{0,F}$ est supposé défini positif, on en déduit que la forme Q_F est définie négative sur $A(\phi)$.

Et par suite

$$Ind(\phi) \geq n+1$$

■

3.3 Indice des applications F-harmoniques particulières:

3.3.1 La stabilité de l'application identité:

Le travail dans ce paragraphe est basé sur la méthode utilisée dans [21] pour étudier la stabilité de l'application identité.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, nous considérons l'application identité I de M qui est évidemment F-harmonique.

La formule de la variation seconde de I peut s'écrire comme suit:

$$Q_I^F(v) = F''(\frac{m}{2}) \sum_{i=1}^{m} \int_M \left\langle \nabla_{e_i}^M v, e_i \right\rangle^2 dv_g + F'\left(\frac{m}{2}\right) \int_M \left[\left|\nabla^M v\right|^2 - Ric_M(v,v)\right] dv_g \tag{3.4}$$

car $|dI|^2 = m$, où m est la dimension de M et où Ric_M et la courbure de Ricci de (M, g) .

Si L_v désigne la dérivée de Lie dans la direction de v, la formule de Yano ([43]) donne

$$\int_M \left[\left|\nabla^M v\right|^2 - Ric_M(v,v)\right] dv_g = \int_M \left[\frac{1}{2}\left|L_v g\right|^2 - (\operatorname{div} v)^2\right] dv_g \tag{3.5}$$

où $\operatorname{div} v$ est la divergence de v. D'autre part, dans une base orthonormée $\{e_i\}$ qui diagonalise $L_v g$ sur M, on a (cf.[21]):

$$\left|L_v g\right|^2 = \sum_i \left(\left(L_v g\right)(e_i, e_i)\right)^2 = 4 \sum_i \left\langle \nabla_{e_i}^M v, e_i \right\rangle^2$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy, on déduit

$$\left|L_v g\right|^2 \geq \frac{4}{m} (\operatorname{div} v)^2$$

il en découle que

$$Q_I^F(v) \geq \frac{1}{m}\left(F''(\frac{m}{2}) + (2-m)\, F'\left(\frac{m}{2}\right)\right) \int_M (\operatorname{div} v)^2 dv_g$$

Nous déduisons la proposition suivante

Proposition 3.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $m \geq 3$, supposons que*

$$F''(\frac{m}{2}) + (2-m)\, F'\left(\frac{m}{2}\right) \geq 0 \tag{3.6}$$

L'application identité I sur M est F-stable.

Exemple 3.1 *La fonction*

$$F(t) = \frac{1}{m-2}\left(\exp(m-2)t\right) - ct$$

avec $0 \leq c < \dfrac{1}{m-2}$, *remplit la condition (3.6)*

3.3.2 L'indice de Morse de l'identité:

on désigne par C et K l'espace des champs de vecteurs conformes et l'espace des champs de vecteurs de Killing respectivement sur M.

Proposition 3.2 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $m \geq 3$*, supposons que*

$$(m-2)\, F'\left(\frac{m}{2}\right) - F''(\frac{m}{2}) > 0 \tag{3.7}$$

alors

$$Ind_F(I) \geq \dim(C/K)$$

Preuve: Le report de (3.5) dans (3.4) donne

$$Q_I^F(v) = F''(\frac{m}{2}) \sum_{i=1}^{m} \int_M \left\langle \nabla_{e_i}^M v, e_i \right\rangle^2 dv_g + F'\left(\frac{m}{2}\right) \int_M \left[\frac{1}{2}\,|L_v g|^2 - (\operatorname{div} v)^2\right] dv_g \tag{3.8}$$

De plus, si le champ de vecteurs v sur M est conforme, alors (cf.preuve du théorème 2 [21])

$$L_v g = -\frac{2}{m}\,(\operatorname{div} v)\, g \tag{3.9}$$

(3.8) devient

$$Q_I^F(v) = \left(\frac{1}{m} F''(\frac{m}{2}) + \frac{2-m}{m} F'\left(\frac{m}{2}\right)\right) \int_M (\operatorname{div} v)^2\, dv_g$$

si $(m-2)\, F'\left(\dfrac{m}{2}\right) - F''(\dfrac{m}{2}) > 0$, alors

$$Q_I^F(v) \leq 0$$

où l'égalité $Q_I^F(v) = 0$ a lieu si et seulement si $\operatorname{div} v = 0$, ce qui implique d'après (3.9), que v est un champ de vecteurs de Killing.

On en déduit que

$$Q_I^F(v) < 0$$

sur le complémentaire orthogonal C'de K dans C et donc que

$$Ind_F(I) \geq \dim C' = \dim(C/K)$$

■

Exemple 3.2 *La fonction*

$$F(t) = \frac{1}{m-2}(\exp(m-2)t) + ct$$

où c est une constante strictement positive, satisfait la condition (3.7).

3.3.3 L'indice des applications homothétiques:

Soit $\phi : (M, g) \to (N, h)$ une application homothétique, c'est-à-dire $\phi^* h = k^2 g$ où $k \in \mathbb{R}$

Il est claire que $|d\phi|^2 = mk^2$, où $m = \dim M$.

Dans ce cas, la F-tension $\tau_F(\phi)$ est proportionnelle à la courbure moyenne de ϕ. En effet

$$\begin{aligned}
\tau_F(\phi) &= trace_g \nabla^\phi \left(F' \left(\frac{|d\phi|^2}{2} \right) d\phi \right) \\
&= F' \left(\frac{|d\phi|^2}{2} \right) trace_g \nabla^\phi d\phi + d\phi \nabla F' \left(\frac{|d\phi|^2}{2} \right) \\
&= F' \left(\frac{mk^2}{2} \right) trace_g \nabla^\phi d\phi + d\phi \nabla F' \left(\frac{mk^2}{2} \right) \\
&= F' \left(\frac{mk^2}{2} \right) trace_g \nabla^\phi d\phi
\end{aligned}$$

il en résulte que ϕ est F-harmonique si et seulement si ϕ est minimale.

Proposition 3.3 *Soit $\phi : (M, g) \to (N, h)$ une application homothétique F-harmonique, on a alors*

$$Ind_F(\phi) \geq Ind_F(I)$$

où I est l'identité de M.

Preuve: Comme ϕ est une homothétie, la formule de la variation seconde de ϕ dans la direction du champ de vecteurs v, s'écrit alors

$$\begin{aligned}
Q^F_\phi(v) &= F'' \left(\frac{mk^2}{2} \right) \int_M \left\langle \nabla^\phi v, d\phi \right\rangle^2 dv_g \qquad (3.10) \\
&\quad + F' \left(\frac{mk^2}{2} \right) \int_M \left[\left| \nabla^\phi v \right|^2 - \sum_{i=1}^m \left\langle R^N(v, d\phi(e_i)) d\phi(e_i), v \right\rangle \right] dv_g
\end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est une base orthonormée sur M.

Notons $\Gamma^T(\phi)$ le sous espace de $\Gamma(\phi)$ formé des champs $d\phi(X)$, où X est un champ de vecteurs sur M. La restriction de Q_ϕ^I à $\Gamma^T(\phi)$, où I est l'identité sur M, est donnée par (voir lemme 2.5 [23])

$$Q_\phi^I(d\phi(X)) = k^2 Q_I^I(X) \tag{3.11}$$

où k est la constante telle que $\phi^* h = k^2 g$.

Comme ϕ est homothétique, la forme $\nabla^\phi d\phi$ prend ses valeurs dans le fibré normal de ϕ, et on a

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_X^\phi d\phi(Y), d\phi(Z)\right\rangle &= \left\langle \left(\nabla^\phi d\phi\right)(X,Y), d\phi(Z)\right\rangle + \left\langle d\phi\left(\nabla_X^M Y\right), d\phi(Z)\right\rangle \\ &= 0 + k^2\left\langle \nabla_X^M Y, Z\right\rangle \end{aligned} \tag{3.12}$$

En substituant (3.11) et (3.12) dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} Q_\phi^F(d\phi(X)) &= F''\left(\frac{mk^2}{2}\right)k^2\int_M \left\langle \nabla_{e_i}^M X, e_i\right\rangle^2 dv_g + F'\left(\frac{mk^2}{2}\right)k^2 Q_I^I(X) \\ &= k^2\left[F''\left(\frac{mk^2}{2}\right)\int_M \left\langle \nabla_{e_i}^M X, e_i\right\rangle^2 dv_g \right.\\ &\quad \left. +F'\left(\frac{mk^2}{2}\right)\int_M \left[\left|\nabla^M X\right|^2 - Ric_M(X,X)\right] dv_g\right] \\ &= k^2 Q_I^F(X)\end{aligned}$$

d'où

$$Ind_F(\phi) \geq Ind_F(I)$$

■

Nous déduisons des propositions 3.2 et 3.3 le

Corollaire 3.1 *Soit $\phi : (M,g) \to (N,h)$ une application homothétique F-harmonique, on suppose que*

$$(m-2)\,F'\left(\frac{m}{2}\right) - F''\left(\frac{m}{2}\right) > 0$$

où $m = \dim M \geq 3$. Alors

$$Ind_F(\phi) \geq \dim(C/K)$$

Notons qu'on peut déduire une estimation de l'indice des applications homothétiques F-harmoniques du théorème 3.1

Considérons $\phi : (M,g) \to (S^n, can)$ une application homothétique c-à-d $\phi^* can = k^2 g$, $k \in \mathbb{R}$, où S^n désigne la sphère euclidienne de dimension n munie de la métrique canonique can.

Le tenseur de F-énergie-impulsion peut s'écrire

$$\begin{aligned} S_g^F(\phi) &= F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}g - \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{m}g \\ &= \left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) - \frac{|d\phi|^2}{2m}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi|^2\, g \end{aligned}$$

il en découle que si

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) - \frac{|d\phi|^2}{2m}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) > 0$$

alors $S_g^F(\phi)$ est défini positif.

Une conséquence du théorème 3.1, est la

Proposition 3.4 *Soit ϕ une application homothétique F-harmonique définie sur une variété riemannienne compacte (M,g) à valeurs dans la sphère euclidienne S^n, supposons que*

$$(m-2)\,F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) - |d\phi|^2\,F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) > 0 \tag{3.13}$$

alors

$$Ind_F(\phi) \geq n+1$$

Exemple 3.3 *La condition (3.13) est vérifiée par la fonction*

$$F(t) = \frac{m^2}{m-2}\left(\exp\frac{m-2}{m^2}t\right)$$

avec $m \geq 3$, pour les applications homothétiques $\phi : (M,g) \to (S^n, can)$ où $k^2 < m$.

Remarque 3.2 *L'espace des champs de vecteurs conformes sur la sphère euclidienne S^n est de dimension $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ et celle de l'espace des champs de vecteurs de Killing égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$, donc*

$$\dim(C/K) = n+1$$

on retrouve ainsi le résultat donné par le corollaire 3.1.

3.4 Applications F-harmoniques comme maximums globaux

Pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, on désigne par $(\gamma_t^v)_{t\in\mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre de difféomorphisme conforme de S^n engendré par le champ $\bar{v}$ obtenu en projetant v sur TS^n.

On note α_t la fonction telle que $(\gamma_t^v)^* can = \alpha_t^2 can$, où can est la métrique canonique de S^n.L'expression de α_t est donnée par ([23])

$$\alpha_t = \frac{|v|}{sht\phi_v + |v|\, cht} \tag{3.14}$$

où

$$\phi_v(x) = \langle v, \phi(x)\rangle$$

Rappelons que le tenseur d'énergie-impulsion de ϕ, $S_g^F(\phi)$, est donné par

$$S_g^F(\phi) = F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2} g - \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + \frac{|d\phi|^2}{2} F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\phi^* can$$

Exemple 3.4 *1) Si $F(t) = t$ alors*

$$F'(t) = 1, F''(t) = 0$$

et

$$S_g^F(\phi) = \frac{|d\phi|^2}{2} g - \phi^* can$$

2) Dans le cas où $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, avec $p \geq 4$,

$$F'(t) = (2t)^{\frac{p}{2}-1}, F''(t) = (p-2)(2t)^{\frac{p}{2}-2}$$

et

$$\begin{aligned} S_g^F(\phi) &= \frac{1}{2}|d\phi|^p g - \frac{p}{2}|d\phi|^{p-2}\phi^* can \\ &= \frac{p}{2}\left(\frac{1}{p}|d\phi|^p g - |d\phi|^{p-2}\phi^* can\right) \end{aligned}$$

Définition 3.1 *On dit qu'une fonction $F : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ de classe C^2 est admissible si elle satisfait la condition suivante*

$$B = \left(\frac{F''\left(\alpha_t^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\alpha_t^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right)} \alpha_t^2 \circ \phi - \frac{F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} \right) \phi_v \geq 0$$

et si le tenseur d'énergie-impulsion $S_g^F(\phi)$ de ϕ vérifie

$$S_g^F(\gamma_t^v \circ \phi) \geq \alpha_t^4 \circ \phi . S_g^F(\phi)$$

où γ_t est le groupe à un paramètre de difféomorphisme conforme de S^n engendré par le champ $\bar{v}$ et α_t la fonction donnée par la formule (3.14).

Exemple 3.5 *La fonction $F(t) = \dfrac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, pour $p = 2$, $p \geq 4$ et $t \geq 0$ est admissible. En effet*

On a

$$B = 0$$

et pour tout difféomorphisme γ_t sur S^n

$$S_g^F(\gamma_t^v \circ \phi) = \frac{1}{2} \left| d(\gamma_t \circ \phi) \right|^p g - \frac{p}{2} \left| d(\gamma_t^v \circ \phi) \right|^{p-2} (\gamma_t^v \circ \phi)^* can$$

et comme, dans un repère orthonormé local $\{e_i\}_i$ de M,

$$\begin{aligned} \left| d(\gamma_t^v \circ \phi) \right|^2 &= \sum_i \left| d\gamma_t^v d\phi(e_i) \right|^2 \\ &= \alpha_t^2 \circ \phi . \left| d\phi \right|^2 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} S_g^F(\gamma_t^v \circ \phi) &= \alpha_t^p \circ \phi . \left(\frac{1}{2} \left| d\phi \right|^p g - \frac{p}{2} \left| d\phi \right|^{p-2} \phi^* can \right) \\ &= \alpha_t^p \circ \phi . S_g^F(\phi) \end{aligned}$$

Exemple 3.6 *La fonction*

$$F(t) = 1 + at - \exp(-t)$$

définie sur $[0, +\infty[$ où a est une constante positive vérifie $a = \min\limits_{x \in M} \exp(-\left| d\phi \right|^2)$, est admissible si la fonction ϕ_v est non négative.

La formule B s'écrit

$$B = \left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{\exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{a + \exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)} + \frac{\exp\left(-\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{a + \exp\left(-\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} \right) \phi_v$$

Posons $u = \alpha_t^2 \circ \phi \in \left]0,1\right]$ *et considérons la fonction*

$$\varphi(u) = -u \frac{\exp\left(-u\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{a + \exp\left(-u\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} + \frac{\exp\left(-\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{a + \exp\left(-\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}$$

on obtient par dérivation

$$\varphi'(u) = \left(\left(\frac{|d\phi|^2}{2}u - 1\right) a - \exp\left(-u\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) \frac{\exp\left(-u\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{\left(a + \exp\left(-u\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)^2}$$

Il est clair que $\varphi'(u) \leq 0$, *ce qui entraîne que* φ *est décroissante sur* $\left]0,1\right]$. *C'est-à-dire*

$$\varphi(u) \geq \varphi(1) = 0$$

et comme $\phi_v \geq 0$, *alors*

$$B \geq 0$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
S_g^F(\gamma_t^v \circ \phi)(X,X) &= \left(a + \exp\left(-\frac{|d(\gamma_t^v \circ \phi)|^2}{2}\right)\right) \frac{|d(\gamma_t^v \circ \phi)|^2}{2} g(X,X) \\
&\quad - \left[\left(a + \exp\left(-\frac{|d(\gamma_t^v \circ \phi)|^2}{2}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{|d(\gamma_t^v \circ \phi)|^2}{2} \exp\left(-\frac{|d(\gamma_t^v \circ \phi)|^2}{2}\right)\right] (\gamma_t^v \circ \phi)^* can(X,X) \\
&= \alpha_t^2 \circ \phi \left(a + \exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2}\right)\right) \frac{|d\phi|^2}{2} g(X,X) \\
&\quad - \alpha_t^2 \circ \phi \left(a + \exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) \phi^* can(X,X) \\
&\quad + \alpha_t^4 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2} \exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) \phi^* can(X,X) \\
&= \alpha_t^2 \circ \phi \left(a + \exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2}\right)\right) \left[\frac{|d\phi)|^2}{2} g(X,X) - \phi^* can(X,X)\right] \\
&\quad + \alpha_t^4 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2} \exp\left(-\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) \phi^* can(X,X) \\
&\geq \alpha_t^4 \circ \phi . S_g^F(\phi)(X,X)
\end{aligned}$$

où X *est un champ de vecteurs sur* M.

Un autre exemple des fonctions admissibles est donné par

Exemple 3.7

$$F(t) = (1+2t)^\alpha, \ avec \ \alpha \in]0,1[$$

Notons que la F-énergie dans ce cas est la fonctionnelle α-énergie de Sacks-Uhlenbeck ([35]).

En fait

$$\begin{aligned} B &= 2(\alpha-1)\left(\frac{1}{1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2}\alpha_t^2\circ\phi - \frac{1}{1+|d\phi|^2}\right)\phi_v \\ &= \frac{2(\alpha-1)\left(\alpha_t^2\circ\phi-1\right)}{\left(1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2\right)\left(1+|d\phi|^2\right)}\phi_v \end{aligned}$$

si $\phi_v \geq 0$, alors

$$\alpha_t\circ\phi = \frac{|v|}{sht\phi_v + |v|\,cht} \leq 1$$

et on obtient

$$B \geq 0$$

De plus, pour un champ de vcteurs X sur M, on a

$$\begin{aligned} S_g^F(\gamma_t^v\circ\phi)(X,X) &= 2\alpha(1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2)^{\alpha-1}\alpha_t^2\circ\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}g(X,X) \\ &\quad - \left[2\alpha\left(1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2\right)^{\alpha-1}\alpha_t^2\circ\phi\right]\phi^*can(X,X) \\ &\quad -4\alpha(\alpha-1)(1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2)^{\alpha-2}\frac{|d\phi|^2}{2}.\alpha_t^4\circ\phi.\phi^*can(X,X) \\ &= 2\alpha(1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2)^{\alpha-1}\alpha_t^2\circ\phi\left[\frac{|d\phi|^2}{2}g(X,X)-\phi^*can(X,X)\right] \\ &\quad +4\alpha(1-\alpha)(1+\alpha_t^2\circ\phi.\,|d\phi|^2)^{\alpha-2}\alpha_t^4\circ\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}.\phi^*can(X,X) \end{aligned}$$

En tenant compte de la positivité de $S_g^F(\phi)$ et le fait que $\phi_v \geq 0$, on peut conclure que

$$S_g^F(\gamma_t^v\circ\phi) \geq \alpha_t^4\circ\phi.S_g^F(\phi)$$

Remarque 3.3 *Si, par exemple, $\phi(M)$ est contenue dans la demi-sphère positive*

$$S^{n^+} = \{x \in S^n : \langle x, v\rangle \geq 0\}$$

alors ϕ_v est non négative.

Nous énoncerons:

Théorème 3.2 *Soit $F : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction admissible et soit ϕ une application F-harmonique d'une variété riemannienne compacte M de dimension $m \geq 2$ dans la sphère euclidienne $S^n (n \geq 2)$. Supposons que le tenseur de F-énergie-impulsion $S_g^F(\phi)$ de ϕ est positif (resp.défini positif). Alors pour tout difféomorphisme conforme γ sur S^n on a*

$$E_F(\gamma \circ \phi) \leq E_F(\phi) \quad (resp.\ E_F(\gamma \circ \phi) < E_F(\phi)\ )$$

La preuve de ce résultat nécéssite les lemmes suivants

Lemme 3.1 *Soient $\phi : (M, g) \to (N, h)$ une application différentiable et γ un difféomorphisme conforme de (N, h), alors la F-tension de l'application $\gamma \circ \phi$, est donnée par:*

$$\begin{aligned} & \tau_F(\gamma \circ \phi) \\ = \ & 2\alpha^{-1} \circ \phi . F'\left(\alpha^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\gamma \left(d\phi\left(grad\alpha \circ \phi\right) - \frac{|d\phi|^2}{2}\left(grad\alpha \circ \phi\right)\right) \\ & + f d\gamma\left(\tau_F(\phi)\right) + d\gamma\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi(gradf)\right) \end{aligned}$$

où

$$f = \frac{F'\left(\alpha^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}$$

et

$$\gamma^* h = \alpha^2 h$$

Preuve: Pour tout $x \in M$, $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ est un repère orthonormé au voisinage de x

$$
\begin{aligned}
& \tau_F(\gamma \circ \phi) \\
= \; & trace_g \left(\nabla \left(F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) d(\gamma \circ \phi) \right) \right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{m} \left[\nabla_{e_i}^{(\gamma \circ \phi)^{-1}TN} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) d(\gamma \circ \phi)(e_i) \right] \\
& - \sum_{i=1}^{m} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) d(\gamma \circ \phi) \nabla_{e_i}^{M} e_i \\
= \; & \sum_{i=1}^{m} \left[\nabla_{e_i}^{(\gamma \circ \phi)^{-1}TN} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) d(\gamma \circ \phi)(e_i) \right] \\
& + \sum_{i=1}^{m} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) \nabla_{e_i}^{N} d(\gamma \circ \phi)(e_i) - \sum_{i=1}^{m} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) d(\gamma \circ \phi) \nabla_{e_i}^{M} e_i \\
= \; & \sum_{i=1}^{m} d(\gamma \circ \phi) \left[\nabla_{e_i}^{(\gamma \circ \phi)^{-1}TN} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) (e_i) - F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) \nabla_{e_i}^{M} e_i \right] \\
& + \sum_{i=1}^{m} F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) \nabla_{e_i}^{N} d(\gamma \circ \phi)(e_i) \\
= \; & d(\gamma \circ \phi) \left(\nabla F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) \right) + F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right) trace_g \left(\nabla d(\gamma \circ \phi) \right)
\end{aligned}
$$

où $\nabla F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right)$ est le gradient de $F' \left(\frac{|d(\gamma \circ \phi)|^2}{2} \right)$ dans M.

Puisque γ est un difféomorphisme conforme sur N, il en résulte

$$
\tau_F(\gamma \circ \phi) = F' \left(\alpha^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2} \right) \tau_g(\gamma \circ \phi) + d(\gamma \circ \phi) \left(\nabla F' \left(\alpha^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2} \right) \right)
$$

d'autre part, $\tau_g(\gamma \circ \phi)$ est donné par

$$
\begin{aligned}
\tau_g(\gamma \circ \phi) &= \sum_{i=1}^{m} \left[\nabla_{e_i}^{(\gamma \circ \phi)^{-1}TN} d(\gamma \circ \phi)(e_i) - d(\gamma \circ \phi) \left(\nabla_{e_i}^{M} e_i \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\nabla_{e_i}^{\gamma^{-1}TN} d\gamma \right) d\phi(e_i) + d\gamma \left(\nabla_{e_i}^{\phi} d\phi(e_i) \right) - d\gamma \circ d\phi \left(\nabla_{e_i}^{M} e_i \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\nabla_{e_i}^{\gamma^{-1}TN} d\gamma \right) d\phi(e_i) + d\gamma \sum_{i=1}^{m} \left(\nabla_{e_i}^{\phi} d\phi(e_i) - d\phi \left(\nabla_{e_i}^{M} e_i \right) \right) \\
&= trace_g \nabla^{\gamma} d\gamma(d\phi, d\phi) + d\gamma \tau_g(\phi)
\end{aligned}
$$

il en déduit

$$\begin{aligned}
\tau_F(\gamma\circ\phi) &= F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)[trace_g\nabla^\gamma d\gamma(d\phi,d\phi)+d\gamma\tau_g(\phi)] \\
&\quad +d(\gamma\circ\phi)\left(\nabla F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) \\
&= F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left[trace_g\nabla^\gamma d\gamma(d\phi,d\phi)+\frac{1}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}d\gamma\tau_F(\phi)\right] \\
&\quad -\frac{F'\left(\alpha^2\circ\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}d\gamma.d\phi\left(\nabla F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) \\
&\quad +d(\gamma\circ\phi)\left(\nabla F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Posons $f=\dfrac{F'\left(\alpha^2\circ\phi\dfrac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\dfrac{|d\phi|^2}{2}\right)}$, le gradient de f est donné par

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\nabla F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)-F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\nabla F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\nabla F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}-\frac{F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2}\nabla F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

il en découle

$$\tau_F(\gamma\circ\phi)=F'\left(\alpha^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)trace_g\nabla^\gamma d\gamma(d\phi,d\phi)+fd\gamma\tau_F(\phi)+F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)d(\gamma\circ\phi)(\nabla f) \tag{3.15}$$

Si l'on note $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita sur $(N, \gamma^* h)$ et puisque

$$\gamma : (N, \gamma^* h) \to (N, h)$$

est un difféomorphisme isométrique, on a alors pour tous X, Y champs de vecteurs de N

$$\nabla^N_{d\gamma(X)} d\gamma(Y) = d\gamma(\tilde{\nabla}_X Y)$$

et donc

$$\left(\nabla^{\gamma^{-1}TN} d\gamma\right)(X, Y) = d\gamma(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla^N_X Y)$$

Or, l'effet d'un changement conforme de la métrique sur la connexion de Levi-Civita est donné par ([21])

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla^N_X Y = \alpha^{-1}\left(\langle X, \nabla\alpha\rangle Y + \langle Y, \nabla\alpha\rangle X - \langle Y, X\rangle \nabla\alpha\right)$$

$\nabla\alpha$ est le gradient de α pour la métrique h.

on en déduit

$$\begin{aligned}
trace_g \nabla^\gamma d\gamma(d\phi, d\phi) &= \sum_{i=1}^m \left(\nabla^{\gamma^{-1}TN} d\gamma\right)(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^m d\gamma(\tilde{\nabla}_{d\phi(e_i)} d\phi(e_i) - \nabla^N_{d\phi(e_i)} d\phi(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^m d\gamma.\alpha^{-1} \circ \phi \left(\langle d\phi(e_i), (\nabla\alpha)\circ\phi\rangle d\phi(e_i)\right. \\
&\quad \left. + \langle d\phi(e_i), (\nabla\alpha)\circ\phi\rangle d\phi(e_i) - |d\phi(e_i)|^2 (\nabla\alpha)\circ\phi\right) \\
&= 2d\gamma.\alpha^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\langle (\nabla\alpha)\circ\phi, d\phi(e_i)\rangle d\phi(e_i) - \frac{|d\phi(e_i)|^2}{2}(\nabla\alpha)\circ\phi\right)
\end{aligned}$$

ainsi

$$trace_g \nabla^\gamma d\gamma(d\phi, d\phi) = 2\alpha^{-1} \circ \phi . d\gamma \left(d\phi \nabla(\alpha\circ\phi) - \frac{|d\phi|^2}{2}(\nabla\alpha)\circ\phi\right) \tag{3.16}$$

finalement, le report de (3.16) dans (3.15) donne

$$\begin{aligned}
\tau_F(\gamma\circ\phi) &= 2\alpha^{-1}\circ\phi . F'\left(\alpha^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\gamma \left(d\phi\nabla(\alpha\circ\phi) - \frac{|d\phi|^2}{2}(\nabla\alpha)\circ\phi\right) \\
&\quad + f d\gamma(\tau_F(\phi)) + F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\gamma \circ d\phi(\nabla f)
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2 *Soit ϕ une application F-harmonique d'une variété riemannienne (M,g) de dimension $m \geq 2$ à valeurs dans la sphère euclidienne (S^n, can). Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_F(\gamma_t^v \circ \phi)\mid_{t=t_0} &= -2\frac{sht_0}{|v|}\int_M \alpha_{t_0}^3 \circ \phi . F'\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(\frac{|d\phi|^2}{2}|\bar{v}\circ\phi|^2 - |d\phi_v|^2\right) dv_g \\ &\quad - \int_M \alpha_{t_0}^2 \circ \phi . F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi\left(\nabla f_{t_0}\right), \bar{v}\circ\phi\rangle\, dv_g\end{aligned}$$

où $f_{t_0} = \dfrac{F'\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \dfrac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\dfrac{|d\phi|^2}{2}\right)}$, $\gamma_{t_0}^* can = \alpha_{t_0}^2 can$

Et

$$\alpha_{t_0} = \frac{|v|}{sht_0\phi_v + |v|\, cht_0}$$

Preuve: La formule de la variation première (1.3) de la fonctionnelle F-énergie donne

$$\frac{d}{dt}E_F(\gamma_t^v \circ \phi)\mid_{t=t_0} = -\int_M \left\langle \tau_F(\gamma_{t_0}^v \circ \phi), \bar{v}\circ\left(\gamma_{t_0}^v \circ \phi\right)\right\rangle dv_g$$

et comme ϕ est F-harmonique, le lemme 3.1 nous donne

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_F(\gamma_t^v \circ \phi)\mid_{t=t_0} \\ = & -\int_M 2\alpha_{t_0}^{-1}\circ\phi . F'\left(\alpha_{t_0}^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(\gamma_{t_0}^v\right)^*\left\langle d\phi\nabla(\alpha_{t_0}\circ\phi) - \frac{|d\phi|^2}{2}\left(\nabla\alpha_{t_0}\right)\circ\phi, \bar{v}\circ\phi\right\rangle dv_g \\ & -\int_M \left(\gamma_{t_0}^v\right)^*\left\langle F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi(\nabla f_{t_0}), \bar{v}\circ\phi\right\rangle dv_g \\ = & -\int_M 2\alpha_{t_0}\circ\phi . F'\left(\alpha_{t_0}^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle d\phi\nabla(\alpha_{t_0}\circ\phi) - \frac{|d\phi|^2}{2}\left(\nabla\alpha_{t_0}\right)\circ\phi, \bar{v}\circ\phi\right\rangle dv_g \\ & -\int_M \alpha_{t_0}^2\circ\phi\left\langle F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi(\nabla f_{t_0}), \bar{v}\circ\phi\right\rangle dv_g\end{aligned}$$

d'autre part, on a (cf.[21])

$$\begin{aligned}\nabla\alpha_{t_0} &= -\frac{|v|\, sht_0\bar{v}}{\left(sht_0\phi_v + |v|\, cht_0\right)^2} \\ &= -\frac{\left(\alpha_{t_0}\right)^2}{|v|} sht_0\bar{v}\end{aligned}$$

il en découle que

$$\langle(\nabla\alpha_{t_0})\circ\phi,\bar{v}\circ\phi\rangle=-\frac{(\alpha_{t_0})^2}{|v|}sht_0\,|\bar{v}\circ\phi|^2$$

Et pour une base orthogonale $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ de M, on a

$$\begin{aligned}\langle d\phi\nabla(\alpha_{t_0}\circ\phi),\bar{v}\circ\phi\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\langle\langle(\nabla\alpha_{t_0})\circ\phi,d\phi(e_i)\rangle\,d\phi(e_i),\bar{v}\circ\phi\rangle\\ &= -\frac{sht_0}{|v|}\,(\alpha_{t_0}\circ\phi)^2\sum_{i=1}^{m}\langle\bar{v}\circ\phi,d\phi(e_i)\rangle^2\\ &= -\frac{sht_0}{|v|}\,(\alpha_{t_0}\circ\phi)^2\,|d\phi_v|^2\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_F(\gamma_t^v\circ\phi)\,|_{t=t_0}\\ =\;&-2\frac{sht_0}{|v|}\int_M\alpha_{t_0}^3\circ\phi.F'\left(\alpha_{t_0}^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\,|\bar{v}\circ\phi|^2-|d\phi_v|^2\right)dv_g\\ &-\int_M\alpha_{t_0}^2\circ\phi F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi(\nabla f_{t_0}),\bar{v}\circ\phi\rangle\,dv_g\end{aligned}$$

■

On pose

$$g(t)=\int_M\alpha_t^2\circ\phi.F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi(\nabla f_t),\bar{v}\circ\phi\rangle\,dv_g$$

Lemme 3.3

$$\begin{aligned}g(t)\;&=\;-\frac{sht}{|v|}\int_M\alpha_t^5\circ\phi.F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2\,|d\phi_v|^2\,dv_g\\ &+\int_M\alpha_t^2\circ\phi.\left(F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\alpha_t^2\circ\phi-\frac{F'\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\\ &\times\frac{\phi_v}{|v|}\,|d\phi|^2\,dv_g\end{aligned}$$

Preuve: Calculons le gradient de f_t

$$\nabla f_t = \frac{1}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2}\left[F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\alpha_t\circ\phi.\,|d\phi|^2.\nabla\left(\alpha_t\circ\phi\right)\right.$$

$$\left.+F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\alpha_t^2\circ\phi\left\langle\nabla d\phi,d\phi\right\rangle\right]$$

$$-\frac{1}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2}\left[F'\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle\nabla d\phi,d\phi\right\rangle\right]$$

$$= \frac{F''\left(\alpha_t^2\circ\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}\alpha_t\circ\phi.\,|d\phi|^2.\nabla\left(\alpha_t\circ\phi\right)$$

$$+\left(\frac{F''\left(\alpha_t^2\circ\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}\alpha_t^2\circ\phi-\frac{F'\left(\alpha_t^2\circ\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\left\langle\nabla d\phi,d\phi\right\rangle$$

d'où

$$g(t)$$

$$= \int_M \alpha_t^3\circ\phi.F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\alpha_t\circ\phi\right)\right),\bar{v}\circ\phi\right\rangle dv_g$$

$$+\int_M \alpha_t^2\circ\phi.\left(F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\alpha_t^2\circ\phi-\frac{F'\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)$$

$$\times\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right),\bar{v}\circ\phi\right\rangle dv_g$$

Soit $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ une base orthonormée de T_xM diagonalise ϕ^*can, on a

$$\begin{aligned}\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right),\bar{v}\circ\phi\right\rangle &= \left\langle\nabla_{e_i}d\phi,d\phi\right\rangle\left\langle\bar{v}\circ\phi,d\phi(e_j)\right\rangle\left\langle d\phi(e_i),d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= \left\langle\nabla_{e_i}d\phi,d\phi\right\rangle\left\langle\bar{v}\circ\phi,d\phi(e_j)\right\rangle\phi^*can(e_i,e_j)\\ &= \left\langle\nabla_{\bar{v}\circ\phi}d\phi(e_j),d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= \left\langle\nabla_{d\phi(e_j)}\bar{v}\circ\phi,d\phi(e_j)\right\rangle+\left\langle\left[\bar{v}\circ\phi,d\phi(e_j)\right],d\phi(e_j)\right\rangle\end{aligned}$$

or, du fait que

$$\begin{aligned}-2\left\langle\left[\bar{v}\circ\phi,d\phi(e_j)\right],d\phi(e_j)\right\rangle &= -2\left\langle L_{\bar{v}\circ\phi}d\phi(e_j),d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= L_{\bar{v}\circ\phi}\left\langle d\phi(e_j),d\phi(e_j)\right\rangle\end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned}\langle [\bar{v}\circ\phi, d\phi(e_j)], d\phi(e_j)\rangle &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\,\gamma_t^*\,|d\phi(e_j)|^2\\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\,\alpha_t^2\,|d\phi(e_j)|^2\end{aligned}$$

En tenant compte de (3.14), on obtient

$$\langle [\bar{v}\circ\phi, d\phi(e_j)], d\phi(e_j)\rangle = \frac{\phi_v}{|v|}\,|d\phi|^2$$

on peut, donc, conclure

$$\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right), \bar{v}\circ\phi\right\rangle = \frac{\phi_v}{|v|}\,|d\phi|^2 + \left\langle \nabla_{d\phi(e_j)}\bar{v}\circ\phi, d\phi(e_j)\right\rangle$$

de plus

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_{d\phi(e_j)}\bar{v}\circ\phi, d\phi(e_j)\right\rangle &= \nabla_{e_j}\langle \bar{v}\circ\phi, d\phi(e_j)\rangle - \left\langle \bar{v}\circ\phi, \nabla_{e_j}d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= \nabla_{e_j}\langle \bar{v}\circ\phi, d\phi(e_j)\rangle - \left\langle \bar{v}\circ\phi, \nabla_{e_j}d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= \nabla_{e_j}\langle v, d\phi(e_j)\rangle - \left\langle \bar{v}\circ\phi, \nabla_{e_j}d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= \left\langle v, \nabla_{e_j}d\phi(e_j)\right\rangle - \left\langle \bar{v}\circ\phi, \nabla_{e_j}d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= \left\langle v-\bar{v}\circ\phi, \nabla_{e_j}d\phi(e_j)\right\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

il en découle

$$\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right), \bar{v}\circ\phi\right\rangle = \frac{\phi_v}{|v|}\,|d\phi|^2$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}g(t) &= -\frac{sht}{|v|}\int_M \alpha_t^5\circ\phi.F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2\,|d\phi_v|^2\,dv_g\\ &\quad+\int_M \alpha_t^2\circ\phi.\left(F''\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\alpha_t^2\circ\phi - \frac{F'\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\\ &\quad\times\frac{\phi_v}{|v|}\,|d\phi|^2\,dv_g\end{aligned}$$

■

De la formule du lemme 3.3, on déduit que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_F(\gamma_t^v\circ\phi)\,|_{t=t_0}\\ &= -2\frac{sht_0}{|v|}\int_M \alpha_{t_0}^3\circ\phi.F'\left(\alpha_{t_0}^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\,|\bar{v}\circ\phi|^2 - |d\phi_v|^2\right)dv_g - g(t_0)\end{aligned}$$

Dans la suite, on pose

$$\varphi(t_0) = 2\frac{sht_0}{|v|}\int_M \alpha_{t_0}^3 \circ \phi . F'\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(|d\phi_v|^2 - \frac{|d\phi|^2}{2}|\bar{v}\circ\phi|^2\right) dv_g$$
$$-\int_M \alpha_{t_0}^3 \circ \phi . F''\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2 \langle d\phi \nabla(\alpha_{t_0}\circ\phi), \bar{v}\circ\phi\rangle\, dv_g$$

et comme

$$\langle d\phi \nabla(\alpha_{t_0}\circ\phi), \bar{v}\circ\phi\rangle = -\frac{sht_0}{|v|}(\alpha_{t_0}\circ\phi)^2 |d\phi_v|^2$$

on a bien

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) \quad = \quad & 2\frac{sht_0}{|v|}\int_M \alpha_{t_0}^3 \circ \phi . \left[F'\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(|d\phi_v|^2 - \frac{|d\phi|^2}{2}|\bar{v}\circ\phi|^2\right)\right. \\ & \left. +\alpha_{t_0}^2 \circ \phi . F''\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}|d\phi_v|^2\right] dv_g\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \varphi(t_0) \\ = \quad & 2\frac{sht_0}{|v|}\int_M \alpha_{t_0}^3 \circ \phi . \left[\left(F'\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) + \alpha_{t_0}^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2} . F''\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi_v|^2\right. \\ & \left. -F'\left(\alpha_{t_0}^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}|\bar{v}\circ\phi|^2\right] dv_g \\ = \quad & -2\frac{sht_0}{|v|}\int_M \alpha_{t_0}\circ\phi . S_g^F(\gamma_{t_0}^v\circ\phi) dv_g\end{aligned}$$

Preuve: (Du théorème 3.2)

Rappelons que (cf.[18]), pour tout difféomorphisme conforme γ de S^n, il existe une isométrie $r \in O(n+1)$, un réel $t \geq 0$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ tels qu'on ait: $\gamma = r \circ \gamma_t^v$, il suffit donc de considérer γ_t^v avec $t \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$.

D'autre part on a

$$\frac{d}{dt}E_F(\gamma_t^v\circ\phi) = \varphi(t) + \chi(t)$$

avec

$$\begin{aligned}\chi(t) \quad = \quad & -\int_M \alpha_t^2 \circ \phi . \left(F''\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\alpha_t^2\circ\phi - \frac{F'\left(\alpha_t^2\circ\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) \\ & \times\frac{\phi_v}{|v|}|d\phi|^2\, dv_g\end{aligned}$$

Et puisque la fonction F est admissible, on déduit que $\chi(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$.

Or, le tenseur d'énergie-impulsion $S_g^F(\gamma \circ \phi) = S_g^F(\gamma_t \circ \phi)$ de $\gamma \circ \phi$ est positif (resp. défini positif) par hypothèse, et

$$\begin{aligned}
S_g^F(\gamma_t \circ \phi) &= F'\left(\frac{|d(\gamma_t \circ \phi)|^2}{2}\right)\frac{|d(\gamma_t \circ \phi)|^2}{2} g \\
&\quad - \left[F'\left(\frac{|d(\gamma_t \circ \phi)|^2}{2}\right) + \frac{|d(\gamma_t \circ \phi)|^2}{2} F''\left(\frac{|d(\gamma_t \circ \phi)|^2}{2}\right)\right](\gamma_t \circ \phi)^* can \\
&= \alpha_t^2 \circ \phi \left[F'\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2}\right)\frac{|d\phi)|^2}{2} g - \left(F'\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2} F''\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\phi^* can\right]
\end{aligned}$$

donc le tenseur

$$F'\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2}\right)\frac{|d\phi)|^2}{2} g - \left[F'\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2}\right) + \alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi)|^2}{2} F''\left(\alpha_t^2 \circ \phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right]\phi^* can$$

est positif (resp. défini positif). Par conséquent $\varphi(t) \leq 0$ (resp.$\varphi(t) < 0$) pour tout $t \geq 0$.

Ce qui entraîne que la fonction $t \mapsto E_F(\gamma_t^v \circ \phi)$ est décroissante (resp. sticte-ment décroissante) sur $\mathbb{R}^+$ et donc qu'on a

$$E_F(\gamma_t^v \circ \phi) \leq E_F(\phi) \;\; (\text{resp. } E_F(\gamma_t^v \circ \phi) < E_F(\phi))$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Or, on a (cf.[18])

$$G(n) = \{r \circ \gamma_t^v, r \in O(n+1), v \in S^n, t \in [0, +\infty[\} .$$

On en déduit que, pour tout $\gamma = r \circ \gamma_t^v \in G(n)$, on a

$$\begin{aligned}
E_F(\gamma \circ \phi) &= E_F(r \circ \gamma_t^v \circ \phi) \\
&= E_F(\gamma_t^v \circ \phi) \\
&\leq E_F(\phi) \;\; (\text{resp. } E_F(\gamma \circ \phi) < E_F(\phi))
\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] M. Ara, Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. 22 (1999), 243-263.

[2] M. Ara, Stability of F-harmonic maps into pinched manifolds, Hiroshima Math. J. 31 (2000), 171-181.

[3] M. Ara, Instability and nonexistence theorem for F-harmonic maps, Illinois J. Math. 45 (2), (2001), 657-679.

[4] A.F. Beardon: The geometry of discrete groupe. Graduate texts in mathematics, 91.Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983

[5] M. Benalili; H. Benallal, Nonexistence results of minimal immersions, Mediterr.J. of math. 2 (2005), 471-481.

[6] M. Benalili; H. Benallal, Some properties of F-harmonic maps, Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 34, No.1 (2013), 29-35.

[7] M. Benalili; H. Benallal, F-harmonic maps as global maxima (Ricerche mat. Doi 10-1007/s1158-012-0140-6 Published online 13 dec. 2012).

[8] P. Biard; J. Eells, A conservaion law for harmonic maps, Lecture in Math. 894 (1981), 1-25.

[9] R.W. Brockett; P.C. Park, Kinematic dexterity of robotic mechanism, Inter. J. Robotics Res., 13 (1994), 1-15.

[10] J.Carlson; D. Toledo, Harmonic maps of kähler manifolds to locally symetric spaces, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Mah. 69 (1989), 173-201.

[11] L.F. Cheung, P. F. Leung, Some results on stable p-harmonic maps, Glasgow. Math. J. 36 (1994), 77-80.

[12] K. Corlette, Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry, Ann. of Mah. (2) 135 (no.1) (1992), 165-182.

[13] N. Course, f-harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target, New York J. Math., 13 (2007), 423-435.

[14] M. Dajcer; L. Rodriguez, Rigidity of real kähker submanifolds, Duke Math. J. 53 (no.1) (1986), 211-220.

[15] Y. J. Dai; M. Shoji; M. Urakawa, Harmonic maps into Lie groups and homogeneous spaces, Dffer. Geom. Appl., 7 (1997), 143-160.

[16] J. Eells; L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, C.B.M.S. Regional conf. Series 50, AMS Providence (1983).

[17] J. Eells; L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1-68.

[18] A. El Soufi, S. Ilias, Immersions minimales, première valur propre du Laplacien et volume conforme, Math. Annalen 275 (1986), 257-267

[19] A.El Soufi, Géométrie des sous-variétés admettant une structure kählérienne ou un second nombre de Betti non nul, Congré de géométrie d'Oran, 1989.

[20] A. El Soufi, S. Ilias, Une inégalité du type "Reilly" pour les sous variétés de l'espace hyperbolique, Commentarii Mathematici Helvetici, 67 (1992), 167-181.

[21] A. El Soufi, A. Jeune, Indice de Morse des applications p-harmonique, C.R.A.S. 315, Série I (1992), 1189-1192.

[22] A. El Soufi, Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conforme de la shpère, Compositio Math. Vol.85, (1993), 281-298.

[23] A. El Soufi, Indice de Morse des applications harmoniques de la sphère, Compositio Math. Vol. 95 (1995), 343-362.

[24] A. El Soufi; R. Petit, Applications harmoniques, applications pluriharmoniques et l'existence de 2-formes parallèles non nulles, Commentarii Math. Helv. 73 (1998), 1-21.

[25] A. El Soufi; R. Petit, Immersions minimales, et immersions pluriharmoniques entre variétés riemanniennes: résultat de non existence et de rigidité, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 50 (no.1) (2000), 235-256.

[26] M. Gromov; P. Pansu, Rigidity of latices: An introduction, in: Geometric Topology: Recent Developments, Montecatini Terme, 1990, P. de Bartolomeis, F. Tricerri, eds., Lecture Notes in Mathematics, Springer 1504, 1991.

[27] E. Hebey, Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés, Diderot Editeur, Arts et Sciences 1997.

[28] G.Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinesse Ann. Math., 7a (1986), 388-402; the English translation, Note di matematica, 28, (2009), 209-232.

[29] J. Jost, Riemannian geometry and geometric analysis, Springer Verlag, New York, ,2002.

[30] P.F. Leung, On the stability of harmonic maps, Lecture Notes in Math. 949 (1982), 122-129.

[31] J.C. Liu, Liouville theorem os stable F-harmonic maps for compact convex hypersurfaces, Hiroshima Math. J. 36 (2006), 221-234.

[32] A. Lichnerowicz, Géometrie des groupes de transformaions, Travaux et recherches Mathématiques III, Dunod, Paris, 1958.

[33] S. Maeta, The second variational formula of the k-energy and k-harmonic curves, arXiv: 1008.3700 V1 (2010).

[34] P.Petersen, Riemannian geometry, Springer Verlag, New York, 1998.

[35] J. Sacks ; K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, Ann. of Math., 113 (1981), 1-24.

[36] J.H. Sampson, Application of harmonic maps to kähler geometry, Contemp. Math. 49 (1986), 125-133.

[37] J. Simons, Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105

[38] Y.T. Siu, The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact kähler manifolds, Ann. of Math. 112 (1980), 73-111.

[39] R.T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc.Am. Math. Soc.47 (1975), 229-236.

[40] H. Takeuchi, Stability and Liouville theorems of p-harmonic maps, Japan. J. Math. 17 (2) (1991), 317-332.

[41] Y.L. Xin, Some results on stable harmonic maps, Duke Math. J. 47 (3) (1980), 609-613.

[42] W. Shaobo, The first variation formula for k-harmonic mapping, Journal of jiangxi university, Vol. 13, No.1, 1989.

[43] K. Yano, On harmonic and Killing vector fields. Ann. math. 55 (1952) 38-45.

الملخص

ندرس في هذه الأطروحة الغمر الأدنى و التطبيقات F- التوافقية.

نثبت في الجزء الأول عدم وجود غمر أدنى متساوي القياس معرف على صيغ ريما نية مزودة بشكل تفاضلي مواز غير معدوم من الدرجة p، في صيغ ريما نية ذات انحناء قطاعات مستمر سلبي تماما. في الجزء الثاني ندرس التطبيقات F-التوافقية، و نعالج تقديرات مؤشر مورس للتطبيقات F-التوافقية الكروية كما نثبت أنها تمثل حد أعلى لتغيرات دالة طاقتها على الزمرة المطابقة للكرة.

الكلمات المفتاحية : الغمر الأدنى، انحناء ريشي، عامل ديراك، الصيغ السطحية تطابقا، التطبيق التوافقي، مؤشر مورس، توتر الطاقة و الضغط .

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse se place dans le cadre de la géométrie riemannienne et concerne en particulier les immersions minimales et les applications F-harmoniques.

Nous donnons dans la première partie, des conditions qui interdissent l'existence d'immersions minimales entre une variété source admettant une p-forme parallèle non triviale et une variété but riemannienne à courbure sectionnelle constante strictement négative. Dans la deuxième partie nous nous intéressons à l'étude de quelques propriétés des applications F-harmoniques définies sur une variété riemannienne compacte et à valeurs dans la sphère euclidienne. Ces dernières sont des points critiques de la fonctionnelle F-énergie. Nous obtenons des résultats sur l'indice de Morse des applications F-harmoniques par variation des fonctionnelles énergies le long des champs de vecteurs conformes.

Mots-Clefs : Immersions minimales, Courbure de Ricci, Opérateur de Dirac, Variété conformément plate, Applications F-harmoniques, Indice de Morse, Tenseur d'énergie-impulsion.

Abstract

In this thesis we study minimal immersions and F-harmonic maps.

Part 1 is devoted to prove that there is no minimal isometric immersions of a riemannian m-dimensional manifold M with m≥3 endwed with non zero parallel p-form, into a riemannian manifold N with constant strictly negative sectional curvature. In part 2, we deal with F-harmonic maps, we investigate estimates of the Morse index for F-harmonic maps into round spheres. Next We obtain that these latter are global maxima of their energy- functional along the conformal group of the sphere.

Keywords. Minimal immersions, Ricci curvature, Dirac operator, Conformally flat manifold, F-harmonic maps, Morse index, Stress-energy tensor.

Résumé

Résumé de thèse de Doctorat de Melle Hafida Benallal "Sur les immersions minimales et les applications F-harmoniques".

Dans cette thèse nous nous intéressons à la non existence d'immersions isométriques minimales et à l'estimation de l'indice de Morse des applications dites F-harmoniques sphériques qui sont des généralisations des applications harmoniques.

Notre thèse est divisée en deux parties indépendantes.

1. Chapitre I: Préliminaires de géométrie riemannienne

Ce chapitre est introductif , il rappelle les rudiments de la géométrie riemannienne qui facilitent la compréhension des résultats obtenus dans cette thèse.

2. Chapitre II: Résultats de non existence d'immersions minimales

Dans cette partie, nous donnons des conditions qui interdissent l'existence d'immersions isométriques minimales entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) dans le cas où la variété source (M, g) admet une p-forme parallèle non triviale.

Les résultats sont donnés par des théorèmes s'appuient principalement sur la formule de *Weitzenböck* pour D^2 relative aux p-formes où D est l'opérateur de Dirac, et sur une extension de cette formule:

$$(1) \qquad |D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4 \langle \nabla^* \nabla \alpha, \alpha \rangle + 4R_\phi(\alpha)$$

où $\phi : M \to N$ une immersion isométrique, $m = \dim M$, H est la courbure moyenne, α une p-forme harmonique et

$$R_\phi(\alpha) = \frac{1}{(p-1)!} \left(\sum_{i,j,k=1}^{m} R^N_{ikjk} \alpha^i_{i_2 \ldots i_p} \alpha^{j i_2 \ldots i_p} - \frac{p-1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^N_{ijkl} \alpha^{ij}_{i_3 \ldots i_p} \alpha^{kl i_3 \ldots i_p} \right)$$

Le premier résultat de non existence est une généralisation de celui dû à A.Elsoufi et R.Petit dans le cas où la variété N a une courbure isotrope strictement négative. On établit donc le théorème suivant

Théorème .1. *Soit M une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$, et soit N une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante strictement négative, si M admet une p-forme parallèle non nulle ($p \geq 2$), alors, il n'existe aucune immersion isométrique minimale de M dans N.*

Dans la suite du travail, on s'intéresse à l'analyse de quelques résultats faisant intervenir des restriction géométriques sur la variété but, cette dernière sera conformément plate.

Après avoir exprimer la formule (1) en fonction du tenseur de Weyl, nous montrons, sous quelques hypothèses sur la courbure de Ricci de N, qu'il n'existe aucune immersion isométrique α-pluriharmonique entre M et N.

Notons que ϕ est α-pluriharmonique si

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p \alpha.D(d\phi)$$

3. Chapitre III: Quelues propriétées des applications F-harmoniques

Nous nous intéressons aux points critiques dits applications F-harmoniques de la fonctionnelle F-énergie

$$E_F = \int_M F\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) dv_g$$

définie sur l'espace des applications différentiables d'une variété riemannienne compacte (M, g) à valeur dans la sphère euclidienne (S^n, can), où

$$F : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\text{ telleque } F'(t) > 0 \text{ pourtout } t \in [0, +\infty[$$

Une bonne partie des résultats porte sur l'indice de Morse des applications F-harmoniques. Cet invariant, noté $Ind_F(\phi)$, représente la dimension des espaces maximaux de variations pour lesquelles ϕ correspond à un maximum local strict de la fonctionnelle énergie.

On considère la variation dans la direction des champs de vecteurs du sous espace $A(\phi)$

$$A(\phi) = \left\{\bar{v} \circ \phi, v \in \mathbb{R}^{n+1}\right\}$$

où $\bar{v}$ est le champ de vecteurs sur S^n obtenu en projetant le champ constant v sur le fibré tangent à S^n, pour lesquels on associe la forme quadratique suivante

$$\begin{aligned} Q_\phi(v) &= \frac{d^2}{dt^2} E_F(\phi_t)\mid_{t=0} = \int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) \left\langle \nabla^\phi v, d\phi \right\rangle^2 dv_g \\ &+ \int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) \left[\left|\nabla^\phi v\right|^2 - \sum_{i=1}^{m} \left\langle R^{S^n}(v, d\phi(e_i)) d\phi(e_i), v \right\rangle \right] dv_g \end{aligned}$$

∇^ϕ désigne la connexion sur $\phi^{-1}TN$ et $\{e_i\}_{i\leq m}$ une base orthonormées de M.

Le premier résultat est donné par

Théorème .2. *soit ϕ une application F-harmonique d'une variété riemannienne compacte M de dimension $m \geq 2$ dans la sphère euclidienne S^n $(n \geq 2)$. Supposons que le tenseur d'énergie-impulsion $S_g^F(\phi)$ de ϕ est défini positif, alors on a: $Ind(\phi) \geq n+1$.*

Nous traitons dans la suite le cas de l'application identité, ainsi que celui des applications homothétiques .

Le dernier paragraphe est consacré à l'étude d'un résultat global. Nous montrons que, si F est admissible et sous une hypothèse de positivité sur le tenseur de F-énergie-impulsion de ϕ, on a

$$E_F(\gamma \circ \phi) \leq E_F(\phi)$$

pour tout difféomorphisme conforme γ de S^n

Notons que F est dite admissible si elle satisfait la condition suivante

$$B = \left(\frac{F''\left(\alpha_t^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\alpha_t^2 \circ \phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right)} \alpha_t^2 \circ \phi - \frac{F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} \right) \phi_v \geq 0$$

où $\phi_v = \langle v, \phi \rangle$ et α_t désigne la fonction telle que

$$(\gamma_t^v)^* can = \alpha_t^2 can$$

et si le tenseur d'énergie-impulsion $S_g^F(\phi)$ de ϕ vérifie

$$S_g^F(\gamma_t^v \circ \phi) \geq \alpha_t^4 \circ \phi . S_g^F(\phi)$$

Articles

Mediterr. j. math. 2 (2005), 471–481
1660-5446/040471-11, DOI 10.1007/s00009-005-0059-1

Mediterranean Journal
of Mathematics

Nonexistence Results of Minimal Immersions

Mohammed Benalili and Hafida Benallal

Abstract. Let M be a Riemannian m-dimensional manifold with $m \geq 3$, endowed with non zero parallel p-form. We prove that there is no minimal isometric immersions of M in a Riemannian manifold N with constant strictly negative sectional curvature. Next we show that, under the conform flatness of the manifold N and some assumptions on the Ricci curvature of N, there is no α-pluriharmonic isometric immersion.

Mathematics Subject Classification (2000). 53C42.

Keywords. Minimal immersion, Ricci curvature, Dirac operator, conformally flat manifold.

1. Introduction

A result due to A.EL-Soufi and R.Petit ([4]) shows the non existence of minimal isometric immersions between a Riemannian manifold M endowed with a non zero parallel 2-form and a Riemannian manifold N with an isotropic strictly negative curvature. This latter is more general than those obtained before by Dajczer-Rodriguez ([3]), and El-Soufi ([5]) in the case where M is a Kählerian manifold. In the context of α-pluriharmonic maps, A. El-Soufi and R.Petit have established the following results [4]:

a) *if the isotropic curvature of N is strictly positive or strictly negative, there exits no α-pluriharmonic isometric immersion from M to N;*
b) *if the isotropic curvature of N is not positive, then any minimal isometric immersion from M to N is α-pluriharmonic.*

In this paper we give non existence results of minimal (or α-plurihamonic) isometric immersion between a source manifold admitting a non zero parallel p-form ($p > 1$) and a target manifold with strictly negative sectional curvature. We consider the case where the target manifold is conformally flat with some conditions on the Ricci curvature.

2. Fundamental lemmas

Throughout this paper (M, g) and (N, g') denote two connected Riemannian manifolds of dimensions respectively $m \geq 3$, $n \geq 4$, ϕ a differentiable map from M to N and for $p \geq 1$, $\Omega^p(M)$ denotes the space of exterior p-forms on M. A repeated index implicitly denotes a sum over that index.

If $\{E_i\}_{1\leq i\leq m}$ is an orthonormal frame of the tangent space T_xM at x to M and $\{\theta_i\}_{i\leq m}$ the associated coframe, the left Clifford multiplication is given as follows: for any $\theta \in \Omega^1(M)$ and any p-form $\omega \in \Omega^p(M)$

$$\theta.\omega = \theta \wedge \omega - i(\theta^\sharp)\omega.$$

The right Clifford multiplication is given by

$$\omega.\theta = (-1)^p(\theta \wedge \omega + i(\theta^\sharp)\omega),$$

where $\theta^\sharp$ denotes the vector field associated canonically to the 1-form θ and $i(\theta^\sharp)$ the interior product by $\theta^\sharp$ ([9]).

The Dirac operator D acting on the differential forms is given as $D = d + \delta$ where d and δ are respectively the exterior differential and codifferential. In terms of Clifford multiplication the Dirac operator reads

$$D = \sum_{1\leq i\leq m} \theta_i.\nabla_{E_i} .$$

A p-form $\alpha \in \Omega^p(M)$ is said harmonic if $D\alpha = 0$ (i.e $d\alpha = \delta\alpha = 0$). If $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_p}\theta^{i_1}\ldots\ \theta^{i_p}$ is the local expression of a p-form α, the Weitzenböck formula reads

$$D^2\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\theta^i.\theta^j, R\left(E_i, E_j\right)\alpha\right], \tag{2.1}$$

where $R\left(.,.\right)$ is the tensor curvature on M, and $[.,.]$ is the commutator i.e. for any two differential forms $\omega_1$and ω_2, one has $[\omega_1, \omega_2] = \omega_1.\omega_2 - \omega_2.\omega_1$.

By the Weitzenböck formula and a direct calculation we obtain the following formula([9])

$$\langle\Delta\alpha, \alpha\rangle = \langle\nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R\left(E_i, E_j\right)\alpha\right], \alpha\right\rangle.$$

On the other hand

$$\begin{aligned}\left\langle\left[\theta^i.\theta^j, R\left(E_i, E_j\right)\alpha\right], \alpha\right\rangle &= -\left\langle R\left(E_i, E_j\right)\alpha, \left[\theta^i.\theta^j, \alpha\right]\right\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{m}\left\langle R\left(E_i, E_j\right)E_k, E_l\right\rangle.\left\langle\left[\theta^k.\theta^l, \alpha\right], \left[\theta^i.\theta^j, \alpha\right]\right\rangle\end{aligned}$$

and since

$$\left[\theta^k.\theta^l, \alpha\right] = \begin{cases} 0, & \text{if } k, l \in \{i_1...i_p\}, \\ 0, & \text{if } k, l \notin \{i_1...i_p\}, \\ 2\theta^k.\theta^l.\alpha, & \text{elsewhere,}\end{cases}$$

then

$$\sum_{k,l=1}^{m} \langle R(E_i, E_j) E_k, E_l \rangle . \left\langle \left[\theta^k.\theta^l, \alpha\right], \left[\theta^i.\theta^j, \alpha\right] \right\rangle$$

$$= \frac{-16}{(p-1)!} \left(\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} \alpha^i_{i_2 \dots i_p} \alpha^j_{i_2 \dots i_p} - \frac{(p-1)}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{m} R_{ijkl} \alpha^{ij}_{i_3 .. i_p} \alpha^{kl}_{i_3 \dots i_p} \right)$$

which, knowing that for any two p-forms α, β, we have the local inner product $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{p!} \alpha^{i_1 \dots i_p} \beta_{i_1 \dots i_p}$, gives us

$$\begin{aligned} \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = {} & \langle \nabla^* \nabla \alpha, \alpha \rangle \\ & + \frac{1}{(p-1)!} \left[\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} \alpha^i_{i_2 \dots i_p} \alpha^j_{i_2 \dots i_p} - \frac{p-1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{m} R_{ijkl} \alpha^{ij}_{i_3 .. i_p} \alpha^{kl}_{i_3 \dots i_p} \right]. \end{aligned}$$

Lemma 2.1. *Let ϕ be a mapping from M to N, if $\alpha \in \Omega^p(M)$ is a harmonic p-form $(p > 1)$, then for any vector fields $X_1, ..., X_p \in TM$, one has*

$$\begin{aligned} & (D(\alpha.d\phi) - (-1)^p \alpha.D(d\phi))(X_1, ..., X_p) \\ & \qquad = 2(-1)^p \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \nabla d\phi((i_{X_p} \circ ... \circ \widehat{i}_{X_j} \circ ... \circ i_{X_1} \alpha)^\sharp), X_j), \end{aligned}$$

where $\widehat{i}_{X_j}$ means that i_{X_j} does not appear.

Proof. Let $\{E_i\}_{i \le m}$ be a local orthonormal frame in a neighborhood of a point $x \in M$, we have

$$\begin{aligned} D(\alpha.d\phi) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i.\nabla_{E_i}(\alpha.d\phi) & = \sum_{i=1}^{m} \theta_i.((\nabla_{E_i}\alpha).d\phi + \alpha.(\nabla_{E_i} d\phi)) \\ & = (D\alpha).d\phi + \sum_{i=1}^{m} \theta_i.\alpha.\nabla_{E_i} d\phi, \end{aligned}$$

so, since α is harmonic,

$$D(\alpha.d\phi) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i.\alpha.\nabla_{E_i} d\phi. \tag{2.2}$$

Taking account of the Clifford multiplication, the relation (2.2) becomes

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p \alpha.D(d\phi) - 2 \sum_{i=1}^{m} i(E_i)\alpha.(\nabla_{E_i} d\phi)$$

or

$$\begin{aligned} D(\alpha.d\phi) = {} & (-1)^p \alpha.D(d\phi) + 2(-1)^p \sum_{i=1}^{m} \nabla_{E_i} d\phi \wedge i(E_i)\alpha \\ & + 2(-1)^p \textstyle\sum_{i=1}^{m} i\left(\nabla_{E_i} d\phi\right)\left(i(E_i)\alpha\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Now since the Hessian is symmetric, we obtain

$$\begin{aligned} i\left(\nabla_{E_i} d\phi\right)\left(i(E_i)\alpha\right) &= \left\langle \nabla_{E_i} d\phi, E_j\right\rangle \alpha(E_i, E_j, \dots) \\ &= Hess(\phi)(E_i, E_j)\alpha(E_i, E_j, \dots) = 0, \end{aligned}$$

so

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p \alpha.D(d\phi) + 2(-1)^p \sum_{i=1}^{m} \nabla_{E_i} d\phi \wedge i(E_i)\alpha$$

or

$$\begin{aligned} &D(\alpha.d\phi)(X_1, \dots, X_p) - (-1)^p (\alpha.D(d\phi))(X_1, \dots, X_p) \\ &\quad = 2(-1)^p \textstyle\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \nabla d\phi((i_{X_p} \circ \dots \circ \widehat{i}_{X_j} \circ \dots \circ i_{X_1}\alpha)^{\sharp}, X_j). \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

Lemma 2.2. *If ϕ is an isometric immersion from M in N, then for any harmonic p-form α on M ($p > 1$) and $x \in M$ one gets*

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4 \langle \nabla^* \nabla \alpha, \alpha \rangle + 4R_\phi(\alpha),$$

where H is the mean curvature of ϕ (i.e. $H = \frac{1}{m} trace(\nabla d\phi)$), $\nabla^*\nabla$ the Laplacian operator on M and

$$R_\phi(\alpha) = \frac{1}{(p-1)!} \left(\sum_{i,j,k=1}^{m} R'_{ikjk} \alpha^{i}_{i_2 \dots i_p} \alpha^{j i_2 \dots i_p} - \frac{p-1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{m} R'_{ijkl} \alpha^{ij}_{i_3 \dots i_p} \alpha^{kl i_3 \dots i_p} \right)$$

in an orthonormal basis $\{E_i\}_{1 \le i \le m}$ of $T_x M$.

Proof. Since $d\phi$ is a closed 1-form with values in $\phi^* TM$ one gets

$$D(d\phi) = \delta d\phi = -mH,$$

and we can rewrite (2.4) as

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^{p+1} mH\alpha + 2(-1)^p \sum_i i(E_i)h \wedge i(E_i)\alpha,$$

where $h = \nabla d\phi$. Considering the norm of $D(\alpha.d\phi)$ one obtains

$$\begin{aligned} |D(\alpha.d\phi)|^2 = \; & m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4(-1)^{2p+1} mH \left\langle \alpha, \textstyle\sum_{i=1}^m i(E_i)h \wedge i(E_i)\alpha \right\rangle \\ & + 4 \sum_{i,j=1}^{m} \langle i(E_i)h \wedge i(E_i)\alpha, i(E_j)h \wedge i(E_j)\alpha \rangle \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\left\langle \alpha, \sum_{i=1}^{m} i(E_i)h \wedge i(E_i)\alpha \right\rangle \\ &\quad = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \sum_{l=1}^{p} h(E_i, E_{i_l}) (-1)^{l-1} \alpha(E_i, E_{i_1}, \dots, \widehat{E}_{i_l}, \dots, E_{i_p}) \\ &\quad = \frac{1}{p!} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1} h(E_i, E_{i_l}) \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}) \alpha(E_i, E_{i_1}, \dots, \widehat{E}_{i_l}, \dots, E_{i_p}). \end{aligned}$$

In the same manner

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{m} \langle i(E_i)h \wedge i(E_i)\alpha, i(E_j)h \wedge i(E_j)\alpha\rangle \\
&\quad = \frac{1}{p!}\sum_{i,j,k,l}(-1)^{k-1}h(E_i,E_{i_k})\alpha(E_i,E_{i_1},\dots,\widehat{E}_{i_k},\dots,E_{i_p})(-1)^{l-1}h(E_j,E_{i_l}) \\
&\quad\quad \times\alpha(E_j,E_{i_1},\dots,\widehat{E}_{i_l},\dots,E_{i_p}) \\
&\quad = \frac{1}{p!}\sum_{i,j,k,l}(-1)^{k+l-2}h_{ii_k}h_{ji_l}\alpha_{i_1\dots i\dots i_p}\alpha^{i_1\dots j\dots i_p}
\end{aligned}$$

where $1 \leq i,j \leq m$ and $1 \leq k,l \leq p$. Consequently

$$\begin{aligned}
|D(\alpha.d\phi)|^2 = &\ m^2\,|H|^2\,|\alpha|^2 - 4mH\frac{1}{p!}\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}h_{ii_l}\alpha_{i_1\dots i_p}\alpha^{ii_1\dots\widehat{i}_l\dots i_p} \\
&+\frac{4}{p!}\sum_{i,j,k,l}(-1)^{k+l-2}h_{ii_k}h_{ji_l}\alpha_{i_1\dots i\dots i_p}\alpha^{i_1\dots j\dots i_p}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

The Weitzenböck formula (2.1) for a harmonic p-form α gives

$$\langle\nabla^*\nabla\alpha,\alpha\rangle + \langle R(\alpha),\alpha\rangle = 0, \tag{2.6}$$

where

$$\langle R(\alpha),\alpha\rangle = \frac{1}{(p-1)!}\left[R_{ij}\alpha^{i}_{i_2\dots i_p}\alpha^{ji_2\dots i_p} - \frac{p-1}{2}R_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\dots i_p}\alpha^{kli_3\dots i_p}\right].$$

On the other hand the Gauss equations write for any vector fields X, Y, Z, W

$$R(X,Y,Z,W) = R'(X,Y,Z,W) + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$

and we get

$$Ric(X,Y) = \sum_{j=1}^{m} R'(X,E_j,Y,E_j) + m\,\langle H, h(X,Y)\rangle - \sum_{j=1}^{m}\langle h(X,E_j), h(Y,E_j)\rangle\,.$$

Substituting in (2.6), we obtain

$$\begin{aligned}
\langle\nabla^*\nabla\alpha,\alpha\rangle = &\ -\frac{1}{(p-1)!}[\left(\sum_{j=1}^{m}R'_{kjlj} + mHh_{kl} - \sum_{j=1}^{m}h_{kj}h_{lj}\right)\alpha^{k}_{i_2\dots i_p}\alpha^{li_2\dots i_p} \\
&-\frac{p-1}{2}\left(R'_{klmn} + h_{km}h_{ln} - h_{kn}h_{lm}\right)\alpha^{kl}_{i_3\dots i_p}\alpha^{mni_3\dots i_p}].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

We improve (2.5):

$$\begin{aligned}
|D(\alpha.d\phi)|^2 &= m^2 |H|^2 |\alpha|^2 - 4mH\frac{1}{(p-1)!}h_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\
&\quad +\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j} h_{ii_1}h_{ji_1}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\
&\quad +\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j,l}(-1)^{l-1}h_{ii_1}h_{ji_l}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_1..\widehat{i}_l\ldots i_p} \\
&= m^2 |H|^2 |\alpha|^2 - 4mH\frac{1}{(p-1)!}h_{ij}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\
&\quad +\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j} h_{ii_1}h_{ji_1}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\
&\quad +\frac{4}{(p-1)!}\sum_{i,j} h_{ii_1}\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\left(\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}h_{ji_l}\alpha^j_{i_1..\widehat{i}_l\ldots i_p}\right) \\
&= m^2 |H|^2 |\alpha|^2 - \frac{4}{(p-1)!}((mHh_{ij} - h_{ii_1}h_{ji_1})\alpha^i_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\
&\quad -\frac{p-1}{2}(h_{ii_1}h_{ji_2} - h_{ii_2}h_{ji_1})\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{i_1i_2\ldots i_p}).
\end{aligned}$$

where $1 \le i,j \le m$ and $1 \le l \le p$. Then equality (2.7) becomes

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle = -\frac{1}{(p-1)!}\sum_{j,k,l=1}^{m} R'_{kjlj}\alpha^k_{i_2\ldots i_p}\alpha^{li_2\ldots i_p} \\
&\quad +\frac{1}{2(p-2)!}\sum_{k,l,m,n=1}^{m} R'_{klmn}\alpha^{kl}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{mni_3\ldots i_p} + \frac{1}{4}|D(\alpha.d\phi)|^2 - \frac{1}{4}m^2|H|^2|\alpha|^2,
\end{aligned}$$

or

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2|H|^2|\alpha|^2 + 4\langle\nabla^*\nabla\alpha,\alpha\rangle + 4R_\phi(\alpha),$$

where

$$\begin{aligned}
R_\phi(\alpha) = &\quad \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j,k,l=1}^{m} R'_{kjlj}\alpha^k_{i_2\ldots i_p}\alpha^{li_2\ldots i_p} \\
&-\frac{1}{2(p-2)!}\sum_{k,l,m,n=1}^{m} R'_{klmn}\alpha^{kl}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{mni_3\ldots i_p}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

□

3. Nonexistence results

Let $P_p(M) = \{\alpha \in \Omega^p(M) : \nabla\alpha = 0\}$ be the space of parallel p-forms on M. We state the following theorem which could be compared with the result of J.H.Sampson which asserts that there is no harmonic application from a Kählerian manifold of real dimension ≥ 4 in a hyperbolic space [10], and also with Theorem 4.6 D_1in [6] which is a rigidity theorem for harmonic mappings from a compact

Riemannian manifold admitting a parallel p-form in a space with non positive curvature operator.

Theorem 3.1. *Let M be a Riemannian manifold of dimension $m \geq 3$, and N be a Riemannian manifold with constant strictly negative sectional curvature. If M admits a non zero parallel p-form α where $p > 1$ then there is no minimal isometric immersion from M into N.*

Proof. We have

$$R'_{ijkl} = c(g'_{ik}g'_{jl} - g'_{il}g'_{jk}), \qquad c = \text{constant};$$

then

$$\sum_{k=1}^{m} R'_{ikjk} = c\sum_{k=1}^{m}(g'_{ij}g'_{kk} - g'_{ik}g'_{kj}) \ = mcg'_{ij} - c\sum_{k=1}^{m} g'_{ik}g'_{kj} = c(m-1)g'_{ij},$$

which leads to

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) \ &= \ \frac{1}{(p-1)!}c(m-1)g'_{ij}\alpha^{i}_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ji_2\ldots i_p} \\ &\quad -\frac{1}{2(p-2)!}c(g'_{ik}g'_{jl} - g'_{il}g'_{jk})\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &= \ \frac{1}{(p-1)!}c(m-1)\alpha^{i}_{i_2\ldots i_p}\alpha^{ii_2\ldots i_p} - \frac{1}{2(p-2)!}2c\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{iji_3\ldots i_p} \\ &= \ \frac{1}{(p-1)!}c(m-1)\left|\alpha\right|^2 p! - \frac{1}{(p-2)!}c\left|\alpha\right|^2 p! = cp(m-p)\left|\alpha\right|^2. \end{aligned}$$

Since $c < 0$ and $2 \leq p < m$, we get

$$R_\phi(\alpha) = cp(m-p)\left|\alpha\right|^2 < 0$$

and then

$$m^2\left|H\right|^2\left|\alpha\right|^2 \geq -4R_\phi(\alpha)$$

so

$$m^2\left|H\right|^2\left|\alpha\right|^2 > 0.$$

This implies that $H \neq 0$ and thus ϕ is not minimal. □

Lemma 3.2. *Let W'_{ijkl} be the Weyl tensor of the target manifold N. The quantity $R_\phi(\alpha)$ writes as*

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) = \ &\frac{1}{(p-1)!}W'_{kjlj}\alpha^{k}_{i_2\ldots i_p}\alpha^{l\,i_2\ldots i_p} - \frac{1}{2(p-2)!}W'_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &+\frac{m-2p}{(n-2)(p-1)!}R'_{kl}\alpha^{k}_{i_2\ldots i_p}\alpha^{l\,i_2\ldots i_p} - \frac{(m-p)p}{(n-1)(n-2)}scal_{g'}\left|\alpha\right|^2 \\ &+\frac{p}{n-2}R'_{jj}\left|\alpha\right|^2. \end{aligned}$$

where $scal_{g'}$ denotes the scalar curvature of N.

Proof. The curvature tensor is related to the Weyl tensor by (see for instance [7])

$$\begin{aligned} R'_{ijkl} &= W'_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R'_{ik}g'_{jl} + R'_{jl}g'_{ik} - R'_{il}g'_{jk} - R'_{jk}g'_{il}) \\ &\quad - \frac{scal_{g'}}{(n-1)(n-2)}(g'_{ik}g'_{jl} - g'_{il}g'_{jk}) \\ &= W'_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R'_{ik}\delta^l_j + R'_{jl}\delta^k_i - R'_{il}\delta^k_j - R'_{jk}\delta^l_i) \\ &\quad - \frac{scal_{g'}}{(n-1)(n-2)}(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j) \end{aligned}$$

and the relation (2.8) becomes

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j,k,l=1}^{m} R'_{kjlj}\alpha^k_{i_2\ldots i_p}\alpha^{li_2\ldots i_p} - \frac{1}{2(p-2)!}[W'_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(R'_{ik}\delta^l_j + R'_{jl}\delta^k_i - R'_{il}\delta^k_j - R'_{jk}\delta^l_i)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &\quad - \frac{scal_{g'}}{(n-1)(n-2)}(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{i_3\ldots i_p}_{kl}]. \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned} &(R'_{ik}\delta^l_j + R'_{jl}\delta^k_i - R'_{il}\delta^k_j - R'_{jk}\delta^l_i)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &\quad = 2(R'_{ik}\alpha_{iji_3\ldots i_p}\alpha^{kji_3\ldots i_p} + R'_{jl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p}) = 4R'_{ik}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kji_3\ldots i_p}, \end{aligned}$$

and

$$(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j)\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{i_3\ldots i_p}_{kl} = 2p!\,|\alpha|^2.$$

Consequently

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) = &\frac{1}{(p-1)!}W'_{kjlj}\alpha^k_{i_2\ldots i_p}\alpha^{l\,i_2\ldots i_p} - \frac{1}{2(p-2)!}W'_{ijkl}\alpha^{ij}_{i_3\ldots i_p}\alpha^{kli_3\ldots i_p} \\ &+ \frac{m-2p}{(n-2)(p-1)!}R'_{kl}\alpha^k_{i_2\ldots i_p}\alpha^{l\,i_2\ldots i_p} - \frac{(m-p)p}{(n-1)(n-2)}scal_{g'}\,|\alpha|^2 \\ &+ \frac{p}{n-2}R'_{jj}\,|\alpha|^2. \end{aligned}$$

□

Definition 3.3. For any parallel $p-$form α, a map ϕ from M in N is said α-pluriharmonic if

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p\,\alpha.D(d\phi).$$

For any fixed $x \in N$, we denote by $\mu(x)$ and $\lambda(x)$ the least and the greatest eigenvalue of the Ricci tensor at the point x and we introduce the following functions:

$$\pi(x) = \begin{cases} (n-1)m\mu(x) - (m+(n-2)p)\lambda(x) & \text{if } m-2p<0, \\ 2(n-1)\mu(x) - n\lambda(x), & \text{if } m-2p\geq 0, \end{cases}$$

and

$$\upsilon(x) = \begin{cases} (n-1)m\lambda(x) - (m+(n-2)p)\mu(x), & \text{if } m-2p<0, \\ 2(n-1)\lambda(x) - n\mu(x), & \text{if } m-2p\geq 0, \end{cases}$$

where $n = \dim(N)$.

Theorem 3.4. *Let M be a Riemannian manifold of dimension $m \geq 3$, and N be a conformally flat Riemannian manifold.*

a) *If the functions π or υ (introduced above) are the first strictly positive or the second strictly negative and if the source manifold M admits a non zero parallel p-form α with $p > 1$, then there is no isometric α-pluriharmonic immersion from M in N.*

b) *If the function υ is non positive and if the manifold M admits a non zero parallel p-form α with $p > 1$, then any isometric minimal immersion from M in N is α-pluriharmonic.*

Proof. For any $\alpha \in P_p(M)$ the equation in Lemma 2.2 reads

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 = m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha).$$

a) We have two cases:

i) if $m - 2p \geq 0$, then a simple computation leads to

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha)(x) &\geq \frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)}(2(n-1)\mu(x) - n\lambda(x))\,|\alpha(x)|^2 \\ &= \frac{p(m-p)\,|\alpha(x)|^2}{(n-1)(n-2)}\pi(x) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha)(x) &\leq \frac{p(m-p)}{(n-1)(n-2)}(2(n-1)\lambda(x) - n\mu(x))\,|\alpha(x)|^2 \\ &= \frac{p(m-p)\,|\alpha(x)|^2}{(n-1)(n-2)}\upsilon(x). \end{aligned}$$

ii) if $m - 2p < 0$, we have

$$R_\phi(\alpha)(x) \leq \frac{p\,|\alpha(x)|^2}{(n-1)(n-2)}\upsilon(x);$$

consequently

$$D(\alpha.d\phi) \neq -mH\alpha = \alpha.D(d\phi),$$

and so ϕ is not α-pluriharmonic.

b) If $\upsilon(x) \leq 0$ then $R_\phi(\alpha) \leq 0$ and we get

$$|D(\alpha.d\phi)|^2 \leq m^2 |H|^2 |\alpha|^2 ,$$

but if ϕ is minimal

$$D(\alpha.d\phi) = 0 = (-1)^p \alpha.D(d\phi),$$

that is ϕ is α-pluriharmonic □

Theorem 3.5. *Let M be a Riemannian compact manifold of dimension $m \geq 3$ and N a conformally flat Riemannian manifold such that the function π is non negative and strictly positive at least at a point. Then for any non zero harmonic p-form α on M with $p > 1$, there is no isometric α-pluriharmonic immersion from M in N.*

Proof. If ϕ is an isometric α-pluriharmonic immersion from M into N, then

$$D(\alpha.d\phi) = (-1)^p \alpha.D(d\phi) = (-1)^{p+1} mH\alpha.$$

The equation of Lemma 2.2 becomes

$$\langle \nabla^* \nabla \alpha, \alpha \rangle + R_\phi(\alpha) = 0, \tag{3.1}$$

and by integrating this latter over the compact manifold M we get

$$\int_M |\nabla \alpha|^2 \, dv_g + \int_M R_\phi(\alpha) dv_g = 0.$$

Now since $R_\phi(\alpha)$ is nonnegative and is strictly positive at least at a point, we have the desired result. □

Theorem 3.6. *Let M be a Riemannian compact conformally flat manifold of dimension $m \geq 4$ and the function π is assumed nonnegative and strictly positive at least at a point, then $b_p(M) = 0$.*

Proof. If $b_p(M) \neq 0$, there is a nonzero harmonic p-form α, and since the identity I is α-pluriharmonic, one has

$$\int_M |\nabla \alpha|^2 \, dv_g + \int_M R_I(\alpha) dv_g = 0.$$

And because $R_I(\alpha)$ is nonnegative and nonzero then α is zero and $b_p(M) = 0$. □

Theorem 3.7. *Let M be a Riemannian manifold of dimension $m \geq 3$ and N be a Riemannian conformally flat manifold with the function υ assumed to be strictly negative. Moreover, if the manifold M admits a nonzero parallel $p-$form α with $p > 1$, then there exists no minimal isometric immersion from M into N.*

Proof. If $\alpha \in P_p(M)$, the equation in Lemma 2.2 is written as

$$m^2 |H|^2 |\alpha|^2 + 4R_\phi(\alpha) \geq 0,$$

so

$$m^2 |H|^2 |\alpha|^2 \geq -4R_\phi(\alpha),$$

and by Lemma 3.2 the hypothesis on N means that $R_\phi(\alpha) < 0$, hence

$$m^2 |H|^2 |\alpha|^2 > 0,$$

so the mean curvature $H \neq 0$, and then ϕ is not minimal. □

References

[1] J. Carlson and D. Toledo, *Harmonic maps of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **69** (1989), 173–201.

[2] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. of Math. (2) **135** (no.1) (1992), 165-182.

[3] M. Dajczer and L. Rodriguez, *Rigidity of real kähler submanifolds*, Duke Math. J. **53** (no. 1) (1986), 211–220.

[4] A. El Soufi and R. Petit, *Immersions minimales et immersions pluriharmoniques entre variétés riemannienne: résultats de non existence et de rigidité*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **50** (no. 1) (2000), 235–256.

[5] A. El Soufi, *Géométrie des sous-variété admettant une stucture kählérienne ou un second membre de Betti non nul*, Congrés de géométrie d'Oran, 1989.

[6] M. Gromov and P. Pansu, *Rigidity of lattices: An introduction*, in: Geometric Topology: Recent Developments, Montecatini Terme, 1990, P.de Bartolomeis, F. Tricerri, eds., Lecture Notes in Mathematics, Springer 1504, 1991.

[7] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés*, Diderot Editeur, Arts et Sciences 1997.

[8] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et recherches Mathématiques III, Dunod, Paris, 1958.

[9] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Springer Verlag, New York, 1998.

[10] J. H. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, Contemp. Math. **49** (1986), 125–133.

[11] Y. T. Siu, *The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. **112** (1980), 73–111.

Mohammed Benalili and Hafida Benallal
Departement of Mathematics
Faculty of Sciences
University of Tlemcen
BP119 Tlemcen
Algeria
e-mail: m_benalili@mail.univ-tlemcen.dz
hafedabenallal@yahoo.fr

Received: June 19, 2005
Revised: October 6, 2005
Accepted: November 3, 2005

ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2013, Vol. 34, No. 1, pp. 29–35. © Pleiades Publishing, Ltd., 2013.

Some Properties of F-Harmonic Maps

Mohammed Benalili* and Hafida Benallal**

(Submitted by P. N. Ivanshin)

Dept. of Mathematics, Faculté des Sciences, Université Abou-Belkaïd, Tlemcen

Received February 6, 2012; in final form, April 19, 2012

Abstract—In this note, we investigate estimates of the Morse index for F-harmonic maps into spheres, our results extend partially those obtained in ([14]) and ([15]) for harmonic and p-harmonic maps.

DOI: 10.1134/S1995080213010022

Keywords and phrases: *F-harmonic maps, Morse index.*

1. INTRODUCTION

Harmonic maps have been studied first by J. Eells and J.H. Sampson in the sixties and since then many works were done (see [4, 9, 13, 16, 17, 21]) to cite a few of them. Extensions to notions of p-harmonic, biharmonic, F-harmonic and f-harmonic maps were introduced and similar research has been carried out (see [1, 2, 3, 5, 12, 15, 18, 20]). Harmonic maps were applied to broad areas in sciences and engineering including the robot mechanics (see [6, 8]).

The Morse index for harmonic maps, p-harmonic maps, as well as biharmonic maps, into a standard unit Euclidean sphere S^n has been widely considered (see [12, 14, 15]).

In this paper for a C^2-function $F : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ such that $F'(t) > 0$ on $t \in]0, +\infty[$, we consider the Morse index for F-harmonic maps into spheres. Our results generalize partial estimates of the Morse index obtained in ([14]) and ([15]) for harmonic and p-harmonic maps.

Let (M, g) be a compact Riemannian manifold of dimension $m \geq 2$, S^n the unit n-dimensional Euclidean sphere with $n \geq 2$ endowed with the canonical metric can induced by the inner product of R^{n+1}.

For a C^1- application $\phi : (M, g) \longrightarrow (S^n, can)$, we define the F-energy functional by,

$$E_F(\phi) = \int_M F\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) dv_g$$

where $\frac{|d\phi|^2}{2}$ denotes the energy density given by

$$\frac{|d\phi|^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} |d\phi(e_i)|^2$$

and where $\{e_i\}$ is an orthonormal basis on $T_x\, M$ and dv_g is the Riemannian measure associated to g on M.

Let $\phi^{-1}TS^n$ be the pullback vector fiber bundle of TS^n, $\Gamma\left(\phi^{-1}TS^n\right)$ the space of sections on $\phi^{-1}TS^n$ and denote by ∇^M, ∇^{S^n} and $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita connections on TM, $T\,S^n$ and $\phi^{-1}TS^n$ respectively. $\tilde{\nabla}$ is defined by

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla^{S^n}_{\phi_* X} Y$$

*E-mail: m_benalili@mail.univ-tlemcen.dz
**E-mail: h_benallal@mail.univ-tlemcen.dz

where $X \in TM$ and $Y \in \Gamma\left(\phi^{-1}TS^n\right)$.

Let v be a vector field on S^n and $(\phi_t^v)_t$ the flow of diffeomorphisms induced by v on S^n i.e.

$$\phi_0^v = \phi, \quad \left.\frac{d}{dt}\phi_t^v\right|_{t=0} = v.$$

The first variation formula of $E_F(\phi)$ is given by

$$\left.\frac{d}{dt}E_F(\phi_t)\right|_{t=0} = \int_M F'\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\left.\langle \nabla_{\partial t} d\phi_t, d\phi_t\rangle\right|_{t=0} dv_g = -\int_M \langle v, \tau_F(\phi)\rangle\, dv_g$$

where $\tau_F(\phi) = trace_g \nabla\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)d\phi\right)$ denotes the Euler-Lagrange equation of the F-energy functional E_F. Remark that if $|d\phi|_{\phi^{-1}TN}$ is constant then ϕ is harmonic if and only if ϕ is F-harmonic.

Definition 1. *ϕ is called F-harmonic if and only if $\tau_F(\phi) = 0$ i.e. ϕ is a critical point of F-energy functional E_F.*

The second variation of E_F is given as

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t)\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_M \frac{d}{dt}F\left.\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\right|_{t=0} dv_g$$

$$= \int_M \left[F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle \nabla v, d\phi_t\rangle^2 + F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|\nabla v|^2\right] dv_g$$

$$-\int_M \left\langle \nabla_{\partial t}\left.\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\right|_{t=0}, trace_g \nabla\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)d\phi\right)\right\rangle dv_g$$

$$-\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\sum_{i=1}^m \left\langle R^{S^n}\left(v, d\phi(e_i)\right)d\phi(e_i), v\right\rangle dv_g$$

and since ϕ is F-harmonic, $\tau_F(\phi) = 0$, then

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t)\right|_{t=0} = \int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle \nabla v, d\phi\rangle^2 dv_g$$

$$+\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left[|\nabla v|^2 - \sum_{i=1}^m \left\langle R^{S^n}\left(v, d\phi(e_i)\right)d\phi(e_i), v\right\rangle\right] dv_g. \tag{1.1}$$

Along this paper we consider variation in directions of vector fields of the subspace $\pounds(\phi)$ of $\Gamma(\phi^{-1}TS^n)$ defined by

$$\pounds(\phi) = \left\{\bar{v}\circ\phi, v \in \mathbb{R}^{n+1}\right\},$$

where $\bar{v}$ is a vector field on S^n given by $\bar{v}(y) = v - \langle v, y\rangle y$ for any $y \in S^n$; it is known that $\bar{v}$ is a conformal vector field on S^n. Obviously, if ϕ is not constant, $\pounds(\phi)$ is of dimension $n+1$.

2. MORSE INDEX FOR F-HARMONIC APPLICATION

For any vector field v on S^n along ϕ, we associate the quadratic form

$$Q_\phi^F(v) = \left.\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t)\right|_{t=0}.$$

The Morse index of the F-harmonic map is defined as the positive integer

$$Ind_F(\phi) = \sup\left\{\dim N, N \subset \Gamma(\phi) \text{ such that } Q_\phi^F(v) \text{ negative defined on } N\right\}$$

where N is a subspace of $\Gamma(\phi)$. The Morse index measures the degree of the instability of ϕ which is called F-stable if $Ind_F(\phi)=0$. Let also $S_g^F(\phi)$ be the F-stress-energy tensor defined by

$$S_g^F(\phi)=F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2 g-2\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\phi^*can. \tag{2.1}$$

For $x\in M$, we put

$$S_g^{o,F}(\phi)=\inf\left\{S_g^F(\phi)(X,X),\quad X\in T_xM \ \text{ such that } \ g(X,X)=1\right\}.$$

The tensor $S_g^F(\phi)$ will be called positive (resp. positive defined) at x if $S_g^{o,F}(\phi)\geq 0$ (resp. $S_g^{o,F}(\phi)>0$).

Remark 1. $F(t)=\frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, *with* $p\in[2,+\infty[$, $S_g^p(\phi)$ *is the stress-energy tensor introduced by Eells and Lemaire for* $p=2$ *([9])or El Soufi for* $p\geq 2$, *([13]).*

In this note we state the following result

Theorem 1. *Let ϕ be an F-harmonic map from a compact $m-$Riemannian manifold (M,g) $(m\geq 2)$ into the Euclidean sphere S^n $(n\geq 2)$. Suppose that the F-stress-energy tensor $S_g^F(\phi)$ of ϕ is positive defined. Then the Morse index of ϕ, $Ind_F(\phi)\geq n+1$.*

Proof. Let $w=\bar{v}\circ\phi\in\pounds(\phi)$ and put $\langle v,\phi\rangle=\phi_v$. For any point $x\in M$, we denote respectively by $w^T(x)$ and $w^\perp(x)$ the tangential and normal components of the vector $w(x)$ on the spaces $d\phi(T_xM)$ and $d\phi(T_xM)^\perp$. Let also $\{e_1,\dots,e_m\}$ an orthonormal basis of T_xM which diagonalizes ϕ^*can and such that $\{d\phi(e_1),d\phi(e_2),\dots,d\phi(e_l)\}$ forms a basis of $d\phi(T_xM)$.

If $\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\neq 0$ at the point x, then

$$\left|\overline{w}^T(x)\right|^2=\sum_{i=1}^{l}|d\phi(e_i)|^{-2}\langle\overline{w}(x),d\phi(e_i)\rangle^2$$

on the other hand, for any $i\leq l$, we have

$$\begin{aligned}2\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi(e_i)|^2&=|d\phi|^2F'\left(\frac{|d\phi(x)|^2}{2}\right)\\ -S_g^F(\phi)(x)(e_i,e_i)&\leq|d\phi|^2F'\left(\frac{|d\phi(x)|^2}{2}\right)-S_g^{o,F}(\phi)(x)\end{aligned} \tag{2.2}$$

so

$$\begin{aligned}&\left(|d\phi|^2F'\left(\frac{|d\phi(x)|^2}{2}\right)-S_g^{o,F}(\phi)(x)\right)\left|\overline{w}^T(x)\right|^2\\ &\geq 2\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\sum_{i=1}^{l}\langle\overline{w}(x),d\phi(e_i)\rangle^2\end{aligned}$$

and since,

$$\langle\overline{w}(x),d\phi(e_i)\rangle^2=\langle v-\langle v,\phi\rangle\phi,d\phi(e_i)\rangle^2=\langle v,d\phi(e_i)\rangle^2=|d\phi_v(e_i)|^2$$

we get

$$\left(|d\phi|^2F'(\frac{|d\phi(x)|^2}{2})-S_g^{o,F}(\phi)(x)\right)\left|w^T(x)\right|^2\geq 2\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi_v(x)|^2.$$

Now, taking into account (2.2), we infer that

$$2\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi_v(x)|^2-|d\phi|^2F'\left(\frac{|d\phi(x)|^2}{2}\right)|\overline{v}|^2$$

$$\leq -\left|d\phi\right|^2 F'(\frac{\left|d\phi(x)\right|^2}{2})\left|\overline{w}^N(x)\right| - S_g^{o,F}(\phi)(x)\left|\overline{v}^T(x)\right|^2 \leq -S_g^{o,F}(\phi)(x)\left|\overline{w}(x)\right|^2 \tag{2.3}$$

Now the second variation writes as

$$\frac{d^2}{dt^2}E_F(\phi_t)\Big|_{t=0} = \int_M F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle\nabla\overline{w}, d\phi\rangle^2\, dv_g$$

$$+\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left[|\nabla\overline{w}|^2 - |d\phi|^2|\overline{w}|^2 + |d\phi_v|^2\right]dv_g.$$

Consequently, we have

$$Q_\phi^F(v) = 2\int_M\left(\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi_v|^2\, dv_g - \int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2|\overline{w}|^2\, dv_g$$

and taking account of the inequality (2.3), we get that

$$Q_\phi^F(v) \leq -2\int_M S_g^{0,F}(\phi)\,|\overline{v}|^2\, dv_g.$$

Finally since $S_g^{0,F}(\phi)$ is positive defined, it follows that Q_F is negative defined on $\pounds(\phi)$. Hence

$$Ind_F(\phi) \geq n+1.$$

□

3. MORSE INDEX OF PARTICULAR F-HARMONIC MAPS

3.1. Stability of the Identity Map

In this section we borrow ideas from [12] to show the stability of the identity map. Let (M,g) be a compact manifold and consider the identity I on M which is obviously F-harmonic, the second variation formula of I writes as

$$Q_I^F(v) = F''\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{i=1}^m\int_M\langle\nabla_{e_i}v, e_i\rangle^2\, dv_g + F'\left(\frac{m}{2}\right)\int_M\left[|\nabla v|^2 - Ric_M(v,v)\right]dv_g. \tag{3.1}$$

If L_v denotes the Lie derivative in the direction of v, the Yano's formula [22] leads to

$$\int_M\left[|\nabla v|^2 - Ric_M(v,v)\right]dv_g = \int_M\left[\frac{1}{2}|L_v g|^2 - (div(v))^2\right]dv_g. \tag{3.2}$$

Now if $(e_i)_i$ is an orthonormal basis on M which diagonalizes $L_v g$ we obtain as in [12] that

$$|L_v g|^2 \geq \frac{4}{m}(div(v))^2 \tag{3.3}$$

therefore by (3.1), (3.2) and (3.3) we infer that

$$Q_I^F(v) \geq \left(F''\left(\frac{m}{2}\right) + (2-m)/mF'\left(\frac{m}{2}\right)\right)\int_M div(v)^2 dv_g. \tag{3.4}$$

We deduce the following proposition:

Proposition 1. *Let (M,g) be a compact Riemannian manifold of dimension $m \geq 3$. Suppose that*

$$F''\left(\frac{m}{2}\right) + (2-m)/mF'\left(\frac{m}{2}\right) \geq 0. \tag{3.5}$$

The identity map I on M is F-stable.

Remark 2. *$F(t) = m/(m-2)e^{(m-2)/m} - t$, fulfills the condition (3.5).*

3.2. Morse Index of the Identity Map

Now we are interested by the identity map I on M. Let C and K denote the space of conformal vector fields and the space of Killing vector fields on M respectively.

Proposition 2. *Let (M,g) be a compact m-dimensional manifold $(m \geq 3)$. Suppose that*

$$\frac{m-2}{m}F'\left(\frac{m}{2}\right) - F''\left(\frac{m}{2}\right) > 0 \tag{3.6}$$

then $Ind_F\,(I) \geq \dim\,(C/K)$.

Proof. Plugging (3.1) in (3.2), we get

$$Q_I^F\,(v) = F''\left(\frac{m}{2}\right)\int_M div\,(v)^2\,dv_g + F'\left(\frac{m}{2}\right)\int_M \left[\frac{1}{2}\,|L_v g|^2 - div\,(v)^2\right] dv_g \tag{3.7}$$

and if v is a conformal vector field on M then (see the proof of Theorem 2 in [15])

$$L_v g = -\frac{2}{m}div(v)g \tag{3.8}$$

where $m = \dim(M)$. So (3.7) becomes

$$Q_I^F\,(v) = \left(F''\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{2-m}{m}F'\left(\frac{m}{2}\right)\right)\int_M div\,(v)^2\,dv_g.$$

If $\frac{m-2}{m}F'\left(\frac{m}{2}\right) - F''\left(\frac{m}{2}\right) > 0$, then

$$Q_I^F\,(v) \leq 0.$$

The equality holds if $div(v) = 0$ which means by (3.8) that v is a Killing vector field. Then on the quotient space C/K, we have

$$Q_I^F\,(v) < 0$$

i.e.

$$Ind_F\,(I) \geq \dim(C/K).$$

□

Remark 3. $F(t) = \frac{m}{m-2}e^{\frac{m-2}{m}t} + Ct$*, where $C > 0$ is a constant, fulfills the condition (3.6).*

3.3. Morse Index of the Homothetic Map

Let $\phi : (M,g) \to (N,h)$ be a homothetic map i.e. $\phi^* h = k^2 g$ where $k \in R$. Clearly $|d\phi|_h^2 = mk^2$, where $m = \dim(M)$, in that case the F-tension $\tau_F\,(\phi)$ is proportional to the mean curvature of ϕ so ϕ is F-harmonic if and only if ϕ is minimal immersion.

Proposition 3. *Let $\phi : (M,g) \to (N,h)$ be an F-harmonic homothetic map. Then we have*

$$Ind_F\,(\phi) \geq Ind_F\,(I)$$

where I is the identiy map of M.

Proof. The second variation of ϕ in direction of a vector field v reduces to

$$Q_\phi^F\,(v) = F''\left(\frac{mk^2}{2}\right)\int_M \langle \nabla v, d\phi\rangle^2_{\phi^{-1}-TN}\,dv_g$$

$$+ F'\left(\frac{mk^2}{2}\right)\int_M \left[|\nabla v|^2 - \sum_{i=1}^m \left\langle R^N\left(v, d\phi\left(e_i\right)\right) d\phi\left(e_i\right), v\right\rangle\right] dv_g \tag{3.9}$$

where $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ is an orthonormal basis on M. Let $\Gamma^T(\phi)$ the subspace of $\Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$, consisting of vector fields on N of the form $d\phi(X)$ where X is a vector field on M. The restriction of Q^I_ϕ to $\Gamma^T(\phi)$, where I is the identity map on M, is given by (see Lemma 2.5 [15])

$$Q^I_\phi(d\phi(X)) = k^2 Q^I_I(X). \tag{3.10}$$

As in [15] and since $\nabla d\phi$ takes its value in the normal fiber bundle of N, we get

$$\langle \nabla_X d\phi(Y), d\phi(Z)\rangle = \langle (\nabla d\phi)(X,Y), d\phi(Z)\rangle + \langle d\phi(\nabla_X Y), d\phi(Z)\rangle = k^2\langle \nabla_X Y, Z\rangle. \tag{3.11}$$

Replacing (3.11) and (3.10) in (3.9) we deduce that

$$Q^F_\phi(d\phi(X)) = F''\left(\frac{mk^2}{2}\right)k^2\int_M \langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle^2 dv_g + F'\left(\frac{mk^2}{2}\right)k^2 Q^I_I(X) = k^2 Q^F_I(X).$$

□

Propositions (2) and (3) lead to

Corollary 1. *Let $\phi : (M,g)\to(N,h)$ be an F-harmonic homothetic map. Suppose that*

$$\frac{m-2}{m}F'\left(\frac{m}{2}\right) - F''\left(\frac{m}{2}\right) > 0$$

where $m = \dim(M)\geq 3$.

Then

$$Ind_F(\phi)\geq \dim(C/K).$$

We can deduce an estimation to the F-index of an homothetic F-harmonic from Theorem 1.

Consider $\phi : (M,g)\to(S^n, can)$ an homothetic map i.e. $\phi^* can = k^2 g$, $k\in R$; where S^n denotes the unit Euclidean n-dimensional sphere endowed with the canonical metric *can*. The F-stress-energy tensor given by (2.1) writes

$$\begin{aligned} S^F_g(\phi) &= F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)|d\phi|^2 g - 2\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{m}g \\ &= \left(\left(1-\frac{2}{m}\right)F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) - \frac{|d\phi|^2}{m}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi|^2 g. \end{aligned}$$

So $S^F_g(\phi)$ will be positive defined if $\left(1-\frac{2}{m}\right)F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) - \frac{|d\phi|^2}{m}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) > 0$. As a consequence of Theorem 1, we have

Proposition 4. *Let ϕ be an homothetic F-harmonic map from a compact $m-$Riemannian manifold (M,g) $(m\geq 3)$ into the Euclidean sphere S^n. Suppose that*

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) - \frac{|d\phi|^2}{m}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) > 0. \tag{3.12}$$

Then the Morse index of ϕ, $Ind_F(\phi)\geq n+1$.

Remark 4. *The function $F(t) = \frac{m^2}{m-2}e^{\frac{m-2}{m^2}t}$, with $m\geq 3$ fulfills the condition (3.12) for homothetic maps $\phi : (M,g)\to(S^n, can)$ i.e. $\phi^* can = k^2 g$ provided that $k^2 < m$.*

Remark 5. *The space C of conformal vector fields on the unit Euclidean sphere S^n is of dimension $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ and that of Killing vector fields K is of dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Then $\dim(C/K) = n+1$. So we recover the result given by Corollary 1.*

REFERENCES

1. M. Ara, Kodai Math. J. **22**, 243 (1999).
2. M. Ara, Hiroshima Math. J. **31**, 171 (2000).
3. M. Ara, Illinois J. Math. **45** (2), 657 (2001).
4. P. Biard and J. Eells, Lecture in Math. **894**, 1 (1981).
5. L. F. Cheung and P. F. Leung, Glasgow Math. J. **36**, 77 (1994).
6. R. W. Brockett and P. C. Park, Intern. J. Robotics Res. **13**, 1 (1994).
7. N. Course, New York J. Math. **13**, 423 (2007).
8. Y. J. Dai, M. Shoji, and H.Urakawa, Differ. Geom. Appl. **7**, 143 (1997).
9. J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps,* (C.B.M.S. Regional Conf. Series 50, AMS Providence, 1983).
10. A. El Soufi and S. Ilias, Math. Annalen **275**, 257 (1986).
11. A. El Soufi and S. Ilias, Commentarii Mathematici Helvetici **67**, 167 (1992).
12. A. El Soufi and A. Lejeune, C.R.A.S. **315**, Serie I, 1189 (1992).
13. A. El Soufi, Compositio Math. **85**, 281 (1993).
14. A. El Soufi, Compositio Math. **95**, 343 (1995).
15. A. El Soufi and A. Lejeune, Annales de l'I.H.P., Analyse Non Linéaire **13**(2), 229 (1996).
16. A. El Soufi and R. Petit, Commentarii Math. Helv. **73**, 11 (1998).
17. P. F. Leung,*On the stability of harmonic maps* (Lecture Notes in Math. 949, 1982)
18. J. C. Liu, Hiroshima Math. J. **36**, 221 (2006).
19. J. Sacks and K. Uhlenbeck, Ann. of Math. **113**, 1 (1981).
20. H. Takeuchi, Japan. J. Math. **17** (2), 317 (1991).
21. Y. L. Xin, Duke Math. J. **47** (3), 609 (1980).
22. K. Yano, Ann. Math. **55**, 38 (1952).

Ricerche di Matematica manuscript No.
(will be inserted by the editor)

F-harmonic maps as global maxima

Mohammed Benalili · Hafida Benallal

Received: date / Accepted: date

Abstract In this note, we show that some F-harmonic maps into spheres are global maxima of the variations of their energy functional on the conformal group of the sphere. Our result extends partially those obtained in [17] and [19] for harmonic and p-harmonic maps.

Mathematics Subject Classification (2000) Primary 58E20, 53C43.

Keywords F-harmonic maps– Stress-energy tensor –F-tension.

1 Introduction

Harmonic maps have been studied first by J. Eells and J.H.Sampson in the sixties and since then many articles have appeared (see [6], [13], [17], [20], [21], [25]) to cite a few of them. Extensions to the notions of p-harmonic, biharmonic, F-harmonic and f-harmonic maps were introduced and similar research has been carried out (see [1], [2], [3], [7], [16], [19], [22], [24]). Harmonic maps were applied to broad areas in sciences and engineering including the robot mechanics (see [5], [8], [9]).

In this paper for a C^2-function $F : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ such that $F'(t) > 0$ on $t \in]0, +\infty[$, we look for sufficient conditions which present F-harmonic maps into spheres as global maxima of the energy functional. Our result extends similar results obtained in [18] and [19] for harmonic and p-harmonic maps.

Let (M, g) and S^n be, respectively, a compact Riemannian manifold of dimension $m \geq 2$ and the unit n-dimensional Euclidean sphere with $n \geq 2$ endowed with the canonical metric can induced by the inner product of R^{n+1}.

Dept. Mathematics, Faculty of Sciences
University Abou-Bekr Belkaid Tlemecn, Algeria
E-mail: m_benalili@mail.univ-tlemcen.dz

For a C^1- application $\phi : (M, g) \longrightarrow (S^n, can)$, we define the F-energy functional by

$$E_F(\phi) = \int_M F\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) dv_g,$$

where $\frac{|d\phi|^2}{2}$ denotes the energy density given by

$$\frac{|d\phi|^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} |d\phi(e_i)|^2$$

and where $\{e_i\}$ is an orthonormal basis on the tangent space T_xM and dv_g is the Riemannian measure associated to g on M.

Let $\phi^{-1}TS^n$and $\Gamma\left(\phi^{-1}TS^n\right)$ be, respectively, the pullback vector fiber bundle of TS^n and the space of sections on $\phi^{-1}TS^n$. Denote by ∇^M, $\nabla^{S^n}$and ∇, respectively, the Levi-Civita connections on: TM, $T\,S^n$ and $\phi^{-1}TS^n$. Recall that ∇ is defined by

$$\nabla_X Y = \nabla^{S^n}_{\phi_* X} Y$$

where $X \in TM$ and $Y \in \Gamma\left(\phi^{-1}TS^n\right)$.

Let v be a vector field on S^n and denote by $(\gamma^v_t)_t$ the flow of diffeomorphisms induced by v on S^n i.e.

$$\gamma^v_0 = id\ , \quad \frac{d}{dt}\gamma^v_{t\ t=0} = v\left(\gamma^v_t\right).$$

Denote by $\phi_t = \gamma^v_t o\phi$ the flow generated by v along the map ϕ. The first variation formula of $E_F(\phi)$ is given by

$$\frac{d}{dt}E_F(\phi_t)\mid_{t=0} = \int_M F'\left(\frac{|d\phi_t|^2}{2}\right)\langle\nabla_{\partial t} d\phi_t, d\phi_t\rangle\mid_{t=0} dv_g$$

$$= -\int_M \langle v, \tau_F(\phi)\rangle\, dv_g$$

where $\tau_F(\phi) = trace_g \nabla\left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)d\phi\right)$ is the F-tension.

Definition 1 ϕ is said F-harmonic if and only if $\tau_F(\phi) = 0$ i.e. ϕ is a critical point of the F-energy functional E_F.

Let $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ and set $\bar{v}(y) = v - \langle v, y\rangle\, y$ for any $y \in S^n$. It is known that $\bar{v}$ is a conformal vector field on S^n i.e. $\left(\gamma^v_t\right)^* can = \alpha_t^2 can$ where $\left(\gamma^v_t\right)_t$ denotes the flow induced by the vector field $\bar{v}$. The expression of α_t is given in [17] by

$$\alpha_t = \frac{|v|}{|v|\, cht + \phi_v sht}. \tag{1}$$

where $\phi_v(x) = \langle v, \phi(x)\rangle$ and $\langle ., .\rangle$ the inner product on the Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$. Denote by $\pounds(\phi)$ the subspace of $\Gamma(\phi^{-1}TS^n)$ given by

$$\pounds(\phi) = \left\{\bar{v}\circ\phi, v \in \mathbb{R}^{n+1}\right\}.$$

Obviously, if ϕ is not constant, $\pounds(\phi)$ is of dimension $n+1$.

2 F-harmonic maps as global maxima

For any $\overline{v} \in \pounds(\phi)$, we denote by $(\gamma_t^v)_{t\in R}$ the one parameter group of conformal diffeomorphisms on S^n induced by the vector $\bar{v}$. For a C^2-function $F : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ such that $F'(t) > 0$ in $]0,+\infty[$.

Now we introduce the following tensor field

$$S_g^F(\phi) = F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}g$$

$$-\left[F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)+\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right]\phi^*can.$$

For $x \in M$, we set

$$S_g^{o,F}(\phi)(x) = \inf\left\{S_{g,v}^F(\phi)(X,X),\ X \in T_xM \text{ such that } g(X,X)=1\right\}.$$

The tensor $S_g^F(\phi)(x)$ will be said positive (resp. positive defined) at x if $S_g^{o,F}(\phi)(x) \geq 0$ (resp. $S_g^{o,F}(\phi)(x) > 0$).

Example 1 For $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, with $p = 2$ or $p \geq 4$, $S_g^p(\phi)$ is the stress-energy tensor introduced, respectively, by Eells and Lemaire for $p = 2$ [12] and modulo a multiplied positive constant by El Soufi for $p \geq 4$ [16], so we may call $S_g^F(\phi)$ the stress-energy tensor of ϕ.

Indeed if $F(t) = t$ then $F\prime(t) = 1$, $F''(t) = 0$ and

$$S_g^F(\phi) = \frac{|d\phi|^2}{2}g - \phi^*can.$$

In the case $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, with $p \geq 4$, $F\prime(t) = (2t)^{\frac{p}{2}-1}$, $F''(t) = (p-2)(2t)^{\frac{p}{2}-2}$ and

$$S_g^F(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^p g - \frac{p}{2}|d\phi|^{p-2}\phi^*can = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{p}|d\phi|^p g - |d\phi|^{p-2}\phi^*can\right)$$

The function F is called admissible if F satisfies

$$B = \left(\frac{F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}\alpha_t^2 o\phi - \frac{F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}\right)\phi_v \geq 0$$

and the stress-energy tensor $S_g^F(\phi)$ of ϕ fulfills

$$S_g^F(\gamma_t o\phi) \geq \alpha_t^2 o\phi.S_g^F(\phi)$$

where γ_t is the one parameter group of conformal transformations induced by the vector field $\overline{v}$ (defined above) on the euclidean sphere S^n and α_t is given by (1).

The function $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$ for $p = 2$ and $p \geq 4$ and $t \geq 0$ is admissible.

Indeed, for $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$ we have $B = 0$ and for any conformal diffeomorphism γ on the euclidean sphere, we have

$$S_g^F(\gamma o\phi) = \frac{1}{2}|d(\gamma_t o\phi)|^p g - \frac{p}{2}|d(\gamma_t o\phi)|^{p-2}\phi^* can$$

so if we let $|d(\gamma_t o\phi)|^2 = \alpha_t^2 o\phi.|d\phi|^2$, we get

$$S_g^F(\gamma_t o\phi) = \alpha_t^2 o\phi.\left(\frac{1}{2}|d\phi|^p g - \frac{p}{2}|d\phi|^{p-2}\phi^* can\right)$$

$$= \alpha_t^2 o\phi.S_g^F(\phi).$$

The $F(t) = 1 + at - e^{-t}$, for $t \in [0, +\infty[$ where $a = \max_{x\in M}\frac{|d\phi|^2}{2}$ is admissible provided that the conformal diffeomorphism on the euclidean sphere S^n is contracting that means that the function ϕ_v given in the expression of (1) is nonnegative.

Indeed, we have

$$B = \left(-.\alpha_t^2 o\phi\frac{e^{-\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}}}{a + e^{-\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}}} + \frac{e^{-\frac{|d\phi|^2}{2}}}{a + e^{-\frac{|d\phi|^2}{2}}}\right)\phi_v$$

Putting $u = \alpha_t^2 o\phi \in]0, 1]$, we consider the function $\varphi(u) = -.u\frac{e^{-u\frac{|d\phi|^2}{2}}}{a+e^{-u\frac{|d\phi|^2}{2}}} + \frac{e^{-\frac{|d\phi|^2}{2}}}{a+e^{-\frac{|d\phi|^2}{2}}}$,we get

$$\varphi'(u) = \left(\frac{|d\phi|^2}{2}u - a - e^{-|d\phi|^2 u}\right)\frac{e^{-\frac{|d\phi|^2}{2}}}{\left(a + e^{-\frac{|d\phi|^2}{2}u}\right)^2}$$

and it is obvious that $\varphi'(u) \leq 0$, hence φ is a decreasing function on $]0, 1]$ i.e. $\varphi(u) \geq \varphi(1) = 0$. Consequently $B \geq 0$.

Now

$$S_g^F(\gamma_t o\phi)(X;X) = \left(a + e^{-\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}}\right)\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}g(X,X)$$

$$-\left[\left(a + e^{-\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}}\right) - \frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}e^{-\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}}\right](\gamma_t o\phi)^* can(X,X).$$

$$= \alpha_t^2 o\phi\left(a + e^{-\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}g(X,X)$$

$$-\alpha_t^2 o\phi\left[\left(a + e^{-\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}}\right) - \alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}e^{-\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}}\right]\phi^* can(X,X)$$

$$= \alpha_t^2 o\phi \left(a + e^{-\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}} \right) \left[\frac{1}{2} |d\phi|^2 g(X,X) - \phi^* can(X,X) \right]$$
$$+ \alpha_t^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2} e^{-\alpha_t^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}} \phi^* can(X,X).$$

An other example is the following function $F(t) = (1+2t)^{\alpha}$ where $0 < \alpha < 1$, the F-energy is the α-energy of Sacks-Uhlenbeck (see [23]). In fact

$$B = (\alpha - 1) \left(\frac{1}{1 + \alpha_t^2 o\phi . |d\phi|^2} \alpha_t^2 o\phi - \frac{1}{1 + |d\phi|^2} \right) \phi_v$$
$$= \frac{(\alpha - 1)\left(\alpha_t^2 o\phi - 1\right)}{\left(1 + \alpha_t^2 o\phi . |d\phi|^2\right)\left(1 + |d\phi|^2\right)} \phi_v \geq 0$$

provided that $\phi_v \geq 0$.

And for vector field X on M, we have

$$S_g^F (\gamma_t o\phi)(X;X) = 2\alpha \left(1 + \alpha_t^2 o\phi |d\phi|^2\right)^{\alpha-1} \alpha_t^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2} g(X,X) -$$
$$\left[2\alpha \left(1 + \alpha_t^2 o\phi |d\phi|^2\right)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\left(1 + \alpha_t^2 o\phi |d\phi|^2\right)^{\alpha-2} \alpha_t^2 o\phi \right] \alpha_t^2 o\phi . \phi^* can(X,X)$$
$$= \left[2\alpha \left(1 + \alpha_t^2 o\phi |d\phi|^2\right)^{\alpha-1} \alpha_t^2 o\phi \left(\frac{|d\phi|^2}{2} g(X,X) - \phi^* can(X,X) \right) + \right.$$
$$\left. 4\alpha(1-\alpha)\left(1 + \alpha_t^2 o\phi |d\phi|^2\right)^{\alpha-2} \alpha_t^2 o\phi . \phi^* can(X,X) \right]$$

and taking account of the positivity of the stress-energy tensor of ϕ and the fact that $\phi_v \geq 0$, we infer that

$$S_g^F (\gamma_t o\phi)(X,X) \geq \alpha_t^4 o\phi . S_g^F \phi (X,X).$$

Remark 1 $\phi_v \geq 0$ occurs for example if $\phi(M)$ is included in the positive half-sphere $S^{n+} = \{x \in S^n : \langle x, v \rangle \geq 0\}$.

In this section we state the following result

Theorem 1 *Let $F : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ be an admissible function and ϕ be an F-harmonic map from a compact m-Riemannian manifold (M,g) $(m \geq 2)$ into the Euclidean sphere S^n $(n \geq 2)$. Then for any conformal diffeomorphism γ on S^n, $E_F(\gamma o\phi) \leq E_F(\phi)$ (resp. $E_F(\gamma o\phi) < E_F(\phi)$) provided that the stress-energy tensor $S_g^F(\phi)$ is positive (respectively positive defined).*

Remark 2 In case $F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$, $p = 2$ or $p \geq 4$ the condition $\phi_v \geq 0$ is not needed since $B = 0$, so our result recover the ones by El-Soufi in [16] and [18].

To prove Theorem 1, we need the following lemmas

Lemma 1 *Let $\phi : (M, g) \to (N, h)$ be a smooth map and γ be a conformal diffeomorphism on N, then the F-tension of the map $\gamma o \phi$, is given by*

$$\tau_F(\gamma o\phi) = 2\alpha^{-1} o\phi . F'(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}) d\gamma \left(d\phi_v - \frac{|d\phi|^2}{2} \nabla \alpha o \phi \right)$$

$$+ f d\gamma (\tau_F(\phi)) + d\gamma \left(F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\phi (\nabla f) \right).$$

where $f = \dfrac{F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}$ *and* $\gamma^* can = \alpha^2 can$.

Proof We follow closely the proof in ([19]).

$$\tau_F(\gamma o\phi) = trace_g \nabla \left(F'\left(\frac{|d(\gamma o\phi)|^2}{2}\right) d(\gamma o\phi) \right) = F'\left(\frac{|d(\gamma o\phi)|^2}{2}\right) trace(\nabla d(\gamma o\phi))$$

$$+ d(\gamma o\phi) \left(\nabla F'\left(\frac{|d(\gamma o\phi)|^2}{2}\right) \right)$$

where $\nabla F'\left(\frac{|d(\gamma o\phi)|^2}{2}\right)$ is the gradient of $F'\left(\frac{|d(\gamma o\phi)|^2}{2}\right)$ in M.

Since γ is a conformal diffeomorphism on S^n, we have

$$\tau_F(\gamma o\phi) = F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) \tau(\gamma o\phi) + d(\gamma o\phi)\left(\nabla F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)$$

$$= F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) (trace_g \nabla^\gamma d\gamma (d\phi, d\phi) + d\gamma.\tau(\phi)) + d(\gamma o\phi) \left(\nabla F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)$$

$$= F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right) \left(trace_g \nabla^\gamma d\gamma (d\phi, d\phi) + \frac{1}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} d\gamma (\tau_F(\phi)) \right)$$

$$- \frac{F'(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} d(\gamma o\phi) \left(\nabla F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) + d(\gamma o\phi)\left(\nabla F'\left(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right).$$

Putting $f = \frac{F'(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}$ we get

$$\tau_F(\gamma o\phi) = F'(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}) trace_g \nabla^\gamma d\gamma (d\phi, d\phi) + f d\gamma (\tau_F(\phi))$$

$$+ F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d(\gamma o\phi)(\nabla f).$$

Now since $\gamma : (N, \gamma^* can) \to (N, can)$ is an isometry then, if $\widetilde{\nabla}$ denotes the connection corresponding to $\gamma^* can$, we have

$$\nabla^\gamma d\gamma(X,Y) = d\gamma\left(\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right)$$

and since (see [19])

$$\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha^{-1}\left(\langle X, \nabla\alpha\rangle Y + \langle Y, \nabla\alpha\rangle X - \langle X, Y\rangle \nabla\alpha\right)$$

we obtain

$$trace_g \nabla^\gamma d\gamma\left(d\phi, d\phi\right) = 2\alpha^{-1} o\phi . d\gamma\left(d\phi\left(\nabla\alpha o\phi\right) - \frac{|d\phi|^2}{2}\nabla\alpha o\phi\right).$$

Finally we infer that

$$\tau_F\left(\gamma o\phi\right) = 2\alpha^{-1} o\phi . F'(\alpha^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}) d\gamma\left(d\phi\left(\nabla\alpha o\phi\right) - \frac{|d\phi|^2}{2}\nabla\alpha o\phi\right)$$

$$+ f d\gamma\left(\tau_F\left(\phi\right)\right) + F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right) d\gamma o d\phi\left(\nabla f\right).$$

Lemma 2 *Let ϕ be an F-harmonic map from an m-dimensional Riemannian manifold (M,g) $(m \geq 2)$ into the Euclidean unit sphere (S^n, can) $(n \geq 2)$.*

Then for any $v \in R^{n+1} - \{0\}$ and any $t_o \in R$ we have

$$\frac{d}{dt} E_F\left(\gamma_t^v o\phi\right)_{t=t_o} =$$

$$-2\frac{sht_o}{|v|}\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi . F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi . \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(|d\phi|^2 |\overline{v} o\phi|^2 - |d\phi_v|^2\right) dv_g$$

$$-\int_M \alpha_{t_o}^2 o\phi . F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi\left(\nabla f_{t_o}\right), \overline{v} o\phi\rangle dv_g$$

where $f_{t_o} = \dfrac{F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}$, $\gamma^* can = \alpha_{t_o}^2 can$

and

$$\alpha_{t_o} = \frac{|v|}{\phi_v sht_o + |v|\, cht_o}.$$

Proof Recall that the first variation formula of the F-energy is given by

$$\frac{d}{dt} E_F\left(\gamma_t^v o\phi\right)_{t=t_o} = -\int_M \left\langle \tau_F\left(\gamma_{t_o}^v o\phi\right), \overline{v} o\left(\gamma_{to}^v o\phi\right)\right\rangle dv_g.$$

By Lemma 1 and the fact that ϕ is F-harmonic we get

$$\frac{d}{dt} E_F\left(\gamma_t^v o\phi\right)_{t=t_o} =$$

$$-\int_M 2\alpha_{t_o} o\phi.F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left\langle (\nabla\alpha_{t_o} o\phi)^T - \frac{|d\phi|^2}{2}\nabla\alpha_{t_o} o\phi, \overline{v} o\phi\right\rangle dv_g$$

$$-\int_M F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi\left(\nabla f_{t_o}\right), \overline{v} o\phi\rangle dv_g$$

and since (see [19])

$$\nabla\alpha_{t_o}^v = -\frac{\left(\alpha_{t_o}^v\right)^2}{|v|} sht_o \overline{v} \tag{2}$$

we have

$$\langle\nabla\alpha_{t_o} o\phi, \overline{v} o\phi\rangle = -\frac{\left(\alpha_{t_o}^v\right)^2}{|v|} sht_o \left|\overline{v} o\phi\right|^2. \tag{3}$$

Now let $(e_1, ..., e_m)$ be an orthogonal basis on M

$$\left\langle (\nabla\alpha_{t_o} o\phi)^T, \overline{v} o\phi\right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle\nabla\alpha_{t_o} o\phi, d\phi(e_i)\rangle\langle\overline{v} o\phi, d\phi(e_i)\rangle$$

$$= -\frac{sht_o}{|v|}\left(\alpha_{t_o} o\phi\right)^2 \sum_{i=1}^m \langle\overline{v} o\phi, d\phi(e_i)\rangle^2$$

$$= -\frac{sht_o}{|v|}\left(\alpha_{t_o} o\phi\right)^2 \left|d\phi_v\right|^2.$$

Hence

$$\frac{d}{dt}E_F\left(\gamma_t^v o\phi\right)_{t=t_o} =$$

$$-2\frac{sht_o}{|v|}\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi.F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\left|\overline{v} o\phi\right|^2 - \left|d\phi_v\right|^2\right) dv_g$$

$$-\int_M \alpha_{t_o}^2 o\phi.F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi\left(\nabla f_{t_o}\right), \overline{v} o\phi\rangle dv_g.$$

We set

$$g(t) = \int_M \alpha_t^2 o\phi.F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\langle d\phi\left(\nabla f_t\right), \overline{v} o\phi\rangle dv_g.$$

Lemma 3

$$g(t) =$$

$$\int_M \alpha_t^3 o\phi.F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})\left|d\phi\right|^2\langle d\phi\left(\nabla\left(\alpha_{t_o} o\phi\right)\right), \overline{v} o\phi\rangle dv_g$$

$$+\int_M \alpha_t^2 o\phi.\left(F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})\alpha_t^2 o\phi - \frac{F'(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\frac{\phi_v}{|v|}\left|d\phi\right|^2 dv_g.$$

Proof First, we compute ∇f_t

$$\nabla f_t = \frac{F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}\left(\alpha_t o\phi.\left|d\phi\right|^2\nabla\left(\alpha_t o\phi\right)+\alpha_t^2 o\phi.\left\langle\nabla d\phi, d\phi\right\rangle\right)$$

$$-\frac{F'(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2}F''\left(\frac{\left|d\phi\right|^2}{2}\right)\left\langle\nabla d\phi, d\phi\right\rangle$$

$$= \frac{F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}\alpha_t o\phi\left|d\phi\right|^2\nabla\left(\alpha_t o\phi\right)$$

$$+\left(\frac{F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}\alpha_t^2 o\phi-\frac{F'(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)^2}F''\left(\frac{\left|d\phi\right|^2}{2}\right)\right)\left\langle\nabla d\phi, d\phi\right\rangle.$$

Then

$$g(t)=\int_M \alpha_{t_o}^2 o\phi.F'\left(\frac{\left|d\phi\right|^2}{2}\right)\left\langle d\phi\left(\nabla f_{t_o}\right),\overline{v}o\phi\right\rangle dv_g$$

$$=\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi.F''(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{\left|d\phi\right|^2}{2})\left|d\phi\right|^2\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\alpha_{t_o}o\phi\right)\right),\overline{v}o\phi\right\rangle dv_g$$

$$+\int_M \alpha_{t_o}^2 o\phi.\left(F''(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{\left|d\phi\right|^2}{2})\alpha_{t_o}^2 o\phi-\frac{F'(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)}F''\left(\frac{\left|d\phi\right|^2}{2}\right)\right) \tag{4}$$

$$\times\left\langle d\phi\left(\nabla\left|d\phi\right|^2\right),\overline{v}o\phi\right\rangle dv_g.$$

Let $\{e_1,...,e_m\}$ be a basis of T_xM which diagonalizes $\phi^* can$, we have

$$\left\langle d\phi\left(\nabla\frac{\left|d\phi\right|^2}{2}\right),\overline{v}o\phi\right\rangle = \left\langle\nabla_{e_i}d\phi, d\phi\right\rangle\left\langle\overline{v}o\phi, d\phi(e_j)\right\rangle\left\langle d\phi(e_i), d\phi(e_j)\right\rangle$$

$$= \left\langle\nabla_{e_i}d\phi, d\phi\right\rangle\left\langle\overline{v}o\phi, d\phi(e_j)\right\rangle\phi^* can\left(e_i, e_j\right)$$

$$= \left\langle\nabla_{\overline{v}o\phi}d\phi\left(e_j\right), d\phi\left(e_j\right)\right\rangle$$

$$= \left\langle\nabla_{d\phi(e_j)}\overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right\rangle+\left\langle\left[\overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right], d\phi\left(e_j\right)\right\rangle.$$

Likewise we get

$$\left\langle\left[\overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right], d\phi\left(e_j\right)\right\rangle = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mid_{t=0}\gamma_t^*\left|d\phi\left(e_j\right)\right|^2$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mid_{t=0}\alpha_t^2\left|d\phi\left(e_j\right)\right|^2$$

and taking account of (1) we obtain that

$$\left\langle \left[\overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right], d\phi\left(e_j\right)\right\rangle = \frac{\phi_v}{|v|}\left|d\phi\left(e_j\right)\right|^2$$

so we infer that

$$\left\langle d\phi\left(\nabla\frac{|d\phi|^2}{2}\right), \overline{v}o\phi\right\rangle = \frac{\phi_v}{|v|}|d\phi|^2 + \left\langle \nabla_{e_j}\overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right\rangle$$

and

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_{e_j}\overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right\rangle &= \nabla_{e_j}\left\langle \overline{v}o\phi, d\phi\left(e_j\right)\right\rangle - \left\langle \overline{v}o\phi, \nabla_{e_j}d\phi\left(e_j\right)\right\rangle \\ &= \nabla_{e_j}\left\langle v, d\phi\left(e_j\right)\right\rangle - \left\langle \overline{v}o\phi, \nabla_{e_j}d\phi\left(e_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle v, \nabla_{e_j}d\phi\left(e_j\right)\right\rangle - \left\langle \overline{v}o\phi, \nabla_{e_j}d\phi\left(e_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle v - \overline{v}o\phi, \nabla_{e_j}d\phi\left(e_j\right)\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Hence

$$\left\langle d\phi\left(\nabla\frac{|d\phi|^2}{2}\right), \overline{v}o\phi\right\rangle = \frac{\phi_v}{|v|}|d\phi|^2. \tag{5}$$

Now set

$$\varphi(t_o) = 2\frac{sht_o}{|v|}\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi.F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\left(-\frac{|d\phi|^2}{2}|\overline{v}o\phi|^2 + |d\phi_v|^2\right)dv_g$$

$$-\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi.F''(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})\frac{|d\phi|^2}{2}\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\alpha_{t_o}o\phi\right)\right), \overline{v}o\phi\right\rangle dv_g$$

and since by (2) we have

$$\left\langle d\phi\left(\nabla\left(\alpha_{t_o}o\phi\right)\right), \overline{v}o\phi\right\rangle = -\frac{sht_o}{|v|}\alpha_{t_o}^2 o\phi\,|d\phi_v|^2$$

we get

$$\begin{aligned}\varphi(t_o) = 2\frac{sht_o}{|v|}\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi.\Bigg[&\left(F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + \alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}F''\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)|d\phi_v|^2 \\ &-F'\left(\alpha_{t_o}^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2}|\overline{v}o\phi|^2\Bigg]dv_g.\end{aligned} \tag{6}$$

or

$$\varphi(t_o) = -2\frac{sht_o}{|v|}\int_M \alpha_{t_o}^3 o\phi.S_g^F\left(\gamma_t^v o\phi\right)dv_g.$$

Proof (of Theorem 1) Recall (see [14]) that for any conformal diffeomorphism γ of the unit sphere S^n there exist an isometry $r \in O(n+1)$, a real number $t \geq 0$ and a vector $v \in R^{n+1} - \{0\}$ such that $\gamma = ro\gamma_t^v$, so it suffices to consider γ_t^v with $t \geq 0$ and $v \in R^{n+1} - \{0\}$.

On the other hand

$$\frac{d}{dt} E_F \left(\gamma_t^v o\phi\right) = \varphi(t) + \chi(t)$$

where

$$\chi(t) = -\int_M \alpha_t^2 o\phi. \left(F''(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})\alpha_t^2 o\phi - \frac{F'(\alpha_t^2 o\phi.\frac{|d\phi|^2}{2})}{F'\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)} F''\left(\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right) \frac{\phi_v}{|v|} |d\phi|^2 \, dv_g$$

and $\varphi(t)$ is given by (6). Now, since the function F is admissible we infer that $\chi(t) \leq 0$. Since the energy stress-tensor $S_g^F(\gamma o\phi) = S_g^F(\gamma_t o\phi)$ of $\gamma o\phi$ is positive (resp. positive defined) by assumption and

$$S_g^F(\gamma_t o\phi) = F'\left(\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}\right)\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2} g$$

$$-\left[F'\left(\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}\right) + \frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2} F''\left(\frac{|d(\gamma_t o\phi)|^2}{2}\right)\right](\gamma_t o\phi)^* can$$

$$= \alpha_t^2 o\phi \left[F'\left(\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2} g - F'\left(\alpha_t^2 o\phi \frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right.$$

$$\left. -\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2} F''\left(\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right]\phi^* can$$

so the tensor

$$F'\left(\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\frac{|d\phi|^2}{2} g - \left(F'\left(\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right) + \alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2} F''\left(\alpha_t^2 o\phi\frac{|d\phi|^2}{2}\right)\right)\phi^* can$$

is positive (resp. positive defined). Consequently $\varphi(t) \leq 0$ (resp. $\varphi(t) < 0$) for any $t \geq 0$ and the proof of Theorem 1 is complete.

References

1. M. Ara, Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. 22 (1999), 243–263.
2. M. Ara, Stability of F-harmonic maps into pinched manifolds, Hiroshima Math. J. 31(2000), 171–181.
3. M. Ara, Instability and nonexistence theorems for F-harmonic maps, Illinois J. Math. 45 (2), (2001), 657-679.
4. M. Benalili, H. Benallal, Nonexistence results of minimal immersions, Mediterr. J. of Math. Vol 2 , 4 , 2005 , p. 471-481.
5. M. Benalili, H. Benallal, Some proprieties of F-harmonic maps (to appear in Lobachevskii Journal of Mathematics Winter 2013)

6. P. Biard, J. Eells, A conservation law for harmonic maps, Lecture in Math. 894 (1981), 1-25.
7. L.F. Cheung, P.F. Leung, Some results on stable p-harmonic maps, Glasgow Math. J. 36 (1994), 77–80.
8. R.W. Brockett, P.C. Park, Kinematic dexterity of robotic mechanisms, Intern. J. Robotics Res., 13 (1994), 1–15.
9. N. Course, f-harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target, New York J. Math., 13 (20007) 423-435.
10. Y.J. Dai, M.Shoji, H. Urakawa, Harmonic maps into Lie groups and homogeneous spaces, Differ. Geom. Appl., 7 (1997), 143–160.
11. Y.X. Dong, S.S. Wei, On vanishing theorems for vector bundle valued p-forms and their applications, Comm. Math. Phys. Vol. 304 (2011), 329-368.
12. S. Dragomir, M. Soret,Harmonic vector fields on compact Lorentz surfaces. Ric. Mat. 61, 1, (2012), 31-45.
13. J. Eells, L.Lemaire, Selected topics in harmonic maps, C.B.M.S. Regional Conf. Series 50, AMS Providence (1983).
14. A. El Soufi, S. Ilias, Immersions minimales, première valeur propre du Laplacien et volume conforme, Math. Annalen275 (1986), pp. 257-267.
15. A. El Soufi, S. Ilias, Une inégalité du type "Reilly" pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique,Commentarii Mathematici Helvetici 67 (1992), pp. 167-181.
16. A. El Soufi, A. Lejeune, Indice de Morse des applications p-harmoniques, C.R.A.S. 315, Serie I (1992), 1189-1192.
17. A. El Soufi, Applications harmoniques, Immersions minimales et transformations conformes de la sphère, Compositio Math. Vol.85, (1993), 281-298.
18. A. El Soufi, Indice de Morse des applications harmoniques de la Sphère, Compositio Math. Vol. 95 (1995), 343-362.
19. A. El Soufi, A. Lejeune, Indice de Morse des applications p-harmoniques, Annales de l'I.H.P., Analyse Non Linéaire Vol. 13 (2) (1996), 229-250.
20. A. El Soufi, R. Petit, Applications harmoniques, applications pluriharmoniques et existence de 2-formes parallèles non nulles, Commentarii Math. Helv. 73 (1998), 1-21.
21. P.F. Leung, On the stability of harmonic maps, Lecture Notes in Math. 949 (1982), 122-129.
22. J.C. Liu, Liouville theorems of stable F-harmonic maps for compact convex hypersurfaces, Hiroshima Math. J. 36 (2006), 221–234.
23. J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, Ann. of Math. 113 (1981), 1–24.
24. H. Takeuchi, Stability and Liouville theorems of p-harmonic maps, Japan. J. Math. 17 (2)(1991), 317–332.
25. Y. L. Xin, Some results on stable harmonic maps, Duke Math. J. 47 (3) (1980), 609–613.