République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

————————————

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID- TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE LICENCE EN MATHEMATIQUES

Option : Equations différentielles

Sous le thème

Equations différentielles ordinaires

Présenté par : Gheziel Mama et Bendahma Amina

Encadré par M.MESSIRDI BACHIR

Année Universitaire

2012-2013

Dédicaces:

Nous dédions ce modeste travail à :

Nos chers parents.

Nos frères et soeures.

Nos grandes familles.

Et à tous ceux qui nous ont aidées et encouragées pour finir ce travail.

Remerciements

Nous tenons, à exprimer notre reconnaissance et notre profonde gratitude à Monsieur MESSIRDI BACHIR, Maître de conférence au Département de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Tlemcen qui nous a, tout au long de ces travaux, conseillées, soutenues, le plus souvent dirigées sans jamais rechigner de son temps combien précieux et ce après nous avoir proposées ce judicieux thème de recherche.

De même que nous sommes obligées de la disponibilité, de la compétence ainsi que de la dévotion avec lesquelles nos professeurs YEBEDRI MOUSTAFA, DIB MOHAMED et BOUGUIMA ont exercé leur métier, nous enrichissant sans cesse et nous permettant de valoriser nos efforts durant ce dernier semestre.

Table des Matières

Partie I

Introduction

On peut diviser le monde des équations différentielles (EDO) en deux:

le monde familier, qui correspond en gros aux équations linéaires, et le monde étrange.

Le monde familier:

La plus simple:

$$x' = ax.$$

Plus généralement,

$$x' = a(t)x + b(t),$$

ou bien

$$x' = Ax$$

en dimension supérieure. La caractéristique principale : on exprime les solutions avec des formules.

Le monde étrange:

Exemple 0.1 *loi de la dynamique et loi de la graviation(Newton).ceci permet de modéliser le système solaire par une EDO.Cette EDO est non linéaire: on peut résoudre le problème des deux corps (ce qu'a fait Newton), mais pas au-delà. Exemples de solutions complexes (animation). Hors de portée de ce cours...*

requins et sardines (Volterra 1920). En l'absence d' interractions

$$X' = ax$$

et

$$y' = -by;$$

le nombre de rencontres est proportionnelle à xy, *on obtient*

$$x' = ax - cxy$$

$$y' = -by + dxy$$

On ne peut pas résoudre, mais on sait néanmoins décrire le comportement qualitatif des *solutions. Et déjà, dire qu'elles éxistent!*

Exemple 0.2 *Petites oscillations du pendule. On ne sait pas résoudre l'équation*

$$y'' = \sin(y)$$

.on peut linéariser, et éspérer que l'équation linéarisée décrit le comportement des petites oscillations, mais comment le justifier?

La forme la plus générale d'une équation différentielle ordinaire (en abrégé EDO) est

$$F(t, u, u', ..., u^{(k)}) = 0.$$

où u est une fonction inconnue de la variable réelle t à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement dans un espace de Banach $X, u', ..., u^{(k)}$ désignent les dérrivées successives de u, et F est une fonction donnée, supposée <<régulière>>(on précisera comment par la suite) sur $I \times U \times U^1$ $\times ... \times U^k$ où I est un intèrvalle ouvert de $\mathbb{R}$,$U, U^1, ..., U^k$ sont des ouverts connexes de X.On ne s'intéressera dans ce cours qu'à des équations différentielles résolues, pour lesquelles il éxiste une fonction G, régulière sur $I \times U \times U^1 \times ... \times U^{k-1}$ telle que

$$F(t, u, u', ..., u^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow u^{(k)} = G(t, u, u', ..., u^{(k-1)}).$$

On observe de plus que

$$u^{(k)} = G(t, u, u', ..., u^{(k-1)}) \Leftrightarrow U' = \mathbf{G}(t, U),$$

$$U := \begin{pmatrix} u \\ u' \\ . \\ . \\ . \\ u^{(k-1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(t,U) := \begin{pmatrix} 0 & I & ... & 0 \\ & & & . \\ & . \ . \ . & . \ . \ . & . \\ & & & . \\ & & & I \\ 0 & ... & & 0 \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ G(t,u,u',...,u^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

la fonction $\mathbf{G}$ étant évidemment aussi régulière que G. On supposera donc sans perte de généralité $k = 1$.

Désormais, on considère une équation dite d'ordre 1, de la forme

$$\frac{du}{dt} = f(t,u)$$

où u est une fonction inconnue de la variable réelle t à valeurs dans un espace de Banach X, et f est une fonction donnée sur $I \times U$, ouvert connexe non vide de $\mathbb{R} \times X$.

Lorsque f ne dépend pas de t, l'équation différentielle est dite autonome.

Remarque 0.1 *On peut toujours se ramener, par une astuce, à une équation non autonome. En effet, il suffit de considérer l'équation étendue*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t,u) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette approche, parfois utile, est malgré tout artificielle. Il faut savoir étudier directement certaines propriétés des équations dites à coefficients variables, où f dépend vraiment de t. Ce sera le cas au moins dans les deux premiers chapitres.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

Définition 1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $F : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application . On appelle solution de l'équation différentielle*

$$y' = F(t, y) \tag{1.1}$$

tout couple (J, y) où $J \subset I$ est un sous intervalle de I et y une fonction dérivable défine sur J telle que

$$\forall t \in J,\ y'(t) = F(t, y(t)).$$

Remarque 1.1 _ *On peut tout à fait étendre ces définitions au cas où F est définie sur un ouvert quelconque de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.*

Remarque 1 _ *L'équation* 1.1) *est appelée du premier ordre car elle ne fait intervenir que les dérivées premières de la fonction inconnue.*

_ *La forme la plus générale d'une équation différentielle est :*

$$F(t, y, y') = 0,$$

mais nous ne traiterons pas ce cas ici. Notons que le théorème des fonctions implicites, permet de se ramener au cas résolu dans un certain nombre de cas.

Définition 1.2 *(solution maximale) [1]*

On dit que (J, y) *est une solution maximale de* 1.1) *s'il n'éxiste pas de solution* $(\hat{J}, \hat{y})$ *vérifiant* $J \subsetneq \hat{J}$ *et* $\hat{y}|_J = y$.

Définition 1.3 *Toute solution* (J, y) *de* 1.1) *définie sur l'intervalle* $J = I$ *tout entier est dite* ***globale****.*

1.0.1 Un outil indisponsable

la théorie des équations différentielles utilise abondamment le lemme (ou l'inégalité) de Gronwall. Ce chapitre introductif est l'occasion de le rappeler.Parfois, on appelle (à tort) lemme de Gronwall le fait suivant : si une fonction u à valeurs dans $\mathbb{R}$.de classe C^1, satisfait une inégalité différentielle du type :

$$u'(t) \leq b(t) + a(t)u(t) \text{ , pour tout } t \in [0, T]$$

alors

$$u(t) \leq e^{\int_0^t a(s)ds} u(0) + \int_0^t b(\tau) e^{\int_\tau^t a(s)ds} d\tau, \text{ pour tout } \ t \in [0, T] \,.$$

En effet, l'inégalité différentielle implique

$$\tfrac{d}{dt}(e^{-\int_0^t a(s)ds} u(t)) \leq e^{-\int_0^t a(s)ds} b(t),$$

et donc par intégration entre 0 et t on obtient immédiatement l'inégalité annoncée. Le lemme de Gronwall est un peu plus subtil, puisqu'il suppose une inégalité intégrale et non une inégalité différentielle (la seconde impliquant la première mais l'iverse est faux). Or les éstimations à priori que l'on obtient en général sont plutôt du type intégral, d'où l'intérêt de ce lemme, dont la preuve est néanmoins élémetaire.

Lemme 1.1 ***(Gronwall)***

si $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^+)$ *est telle qu'il existe* a *et* $b \in C([0, T]; \mathbb{R}^+)$ *avec*

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t \ a(\tau)u(\tau)d\tau, pourtoutt \in [0, T],$$

alors

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t b(\tau)a(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau$$

,pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration:

La seule astuce consiste à majorer l'intégrale du second membre

$$v(t) = \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

par la méthode décrite précédemment.Comme

$$v'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)(b(t) + v(t))$$

par hypothèse, on a donc

$$\frac{d}{dt}(e^{-\int_0^t a(s)ds}v(t)) \leq e^{-\int_0^t a(s)ds}a(t)b(t),$$

d'où après intégration (notons que $v(0) = 0$ par définition):

$$v(t) \leq \int_0^t a(\tau)b(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

En majorant de cette façon $v(t)$ dans l'inégalité de départ, on obtient le résultat.

Cette version du lemme de Gronwall est donnée surtout pour mettre en évidence la méthode de calcul. On pourrait donner une autre version de l'inégalité obtenue, en integrant par parties si b est dérivable :

$$u(t) \leq b(0)e^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b'(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau$$

, pour tout $t \in [0, T]$.

En particulier, si b est constante ($b(t) = k, \forall t \in [0, T]$), on obtient simplement:

$$u(t) \leq ke^{\int_0^t a(s)ds}.$$

En pratique, il est conseillé de refaire rapidement le calcul pour éviter les erreurs.

1.0.2 <<Résolution>> des équations différentielles

Dans le chapitre II, on va s'intéresser à l'éxistence, l'unicité, et la dépendance des solutions par rapport aux <<conditions initiales>> $u(t_0) = u_0$. on (re) verra des résultats essentiellement théoriques, car il y a trés peu d'équations differentielles dont on connait explicitement les solutions, en dehors des équations linéaires à coefficients constants (dont le calcul des solutions se ramène à un calcul de primitive). Le chapitre III sera consacré aux propriétés spécifiques des équations linéaires, en insistant sur le cas à coefficients variables.A partir du chapitre IV, on s'attaquera aux propriétés qualitatives des équations différentielles :sans prétendre résoudre ces équations, on peut en effet obtenir beaucoup d'informations sur le comportement de leurs solutions.(Cette idée générale remonte à Poincré).On étudiera notamment l'éxistance et la stabilité de solutions particulières, comme les solutions stationnaires et les solutions périodiques (qui jouent un grand rôle dans les applications).

Chapitre 2

Problème de Cauchy général

2.0.3 Définitions et notations

On note $E = \mathbb{R}^N, N \geq 1$ et $x = (x_1, ..., x_N)$ un élément de E. Sa norme $||x||_E$ sera l'une des normes usuelles sur $\mathbb{R}^N$ (on rappelle que toutes les normes sont équivalentes sur E).

Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : D \to E$ une fonction continue. Pour tout $(t, x) \in D$, on notra

$$f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_N(t, x))$$

où chaque fonction f_i est continue de D dans $\mathbb{R}$. la notation (a, b) recouvre tous les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b],]a, b], [a, b[,]a, b[$. de même , on utilisera par exemple la notation $(a, b]$ pour ne pas préciser la nature de l 'intervalle en a.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations differentielles ordinaires (notée en abrégé EDO)du premier ordre, sous forme normale (ou résolue):

$$x'(t) = f(t, x) \tag{2.1}$$

Commençons par préciser la notion de solution pour ce type d'équation:

Définition 2.1 *Une solution de* 2.1*est un couple* (φ, J) *où* J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ *est une fonction dérivable sur* J *à valeurs dans* E *telle que* $(t, \varphi(t)) \in D$ *pour tout* $t \in J$ *et*

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi(t)), \forall t \in J, \forall i = 1, ..., N.$$

On remarque tout de suite que, f et φ étant deux fonctions continues sur J et φ est de classe C^1 sur$J$.($\varphi \in C^1(J)$).

2.0.4

Exemple 2.1 *pour*

$$N = 2, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et

$$f(t,x) = M(t)x = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(t,x) = M(t)x = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$ sont des fonctions réelles continues, l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ est appelée équation linéaire du premier ordre.

Exemple 2.2 *Pour*

$$N = 1,\ f(t,x) = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$$

où $a(t), b(t)$ sont des fonctions continues et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$,l'EDO 2.1 est une équation de Bernoulli.

Exemple 2.3 *L'équation*

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

pour laquelle

$$N = 1, f(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

où $a(t), b(t)$ *et* $c(t)$ *sont trois fonctions continues, l'EDO* 2.1 *est une équation , de Riccati.Le problème* 2.1 *peut avoir de nombreuses solutions sur un intervalle donné. Par exemple, pour*$N = 1$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *et* $f(t, x) \equiv 1$, *l'EDO*

$$x'(t) = 1,$$

admet $\varphi(t) = t + c$ *comme solution sur* $\mathbb{R}$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.*On introduit la notion de problème de Cauchy:*

Définition 2.2 *Soit* $(t_0, x_0) \in D$.*Résoudre le problème de Cauchy:*

$$x'(t) = f(t, x),$$

$$x(t_0) = x_0$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) *où* J *est un intrvalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0 *et* φ *une fonction dérivable (en fait* C^1*) de* J *dans* E *telle que* $(t, \varphi(t)) \in D$ *pour tout* $t \in J$,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t) \tag{2.2}$$

pour tout $t \in J$ *et*

$$\varphi(t_0) = x_0$$

En intégrant l'EDO du problème de Cauchy 2.2 entre t_0 *et* t *et compte tenu de la condition* $x(t_0) = x_0$, *on obtient :*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \tag{2.3}$$

où

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds = (\int_{t_0}^{t} f_1(s, \varphi(s)ds, ..., \int_{t_0}^{t} f_N(s, \varphi(s))ds).$$

Réciproquement, toute fonction φ vérifiant(2.3) est bien une solution C^1 de (2.2)

Nous utiliserons souvent l'équivalence entre les deux formulations(2.2) et (2.3) dans la suite du chapitre.

En reprenant l'exemple précédent du problème de cauchy, on voit que si l'on ajoute à l'équation(1.1) la condition $x(0) = 0$, on doit fixer la constante c et l'unique solution définie sur $\mathbb{R}$ est $\phi(t) = t$. Nous verrons plus tard cependant que ce n'est pas toujours aussi simple et que sans hypothèses supplémentaires, notamment sur la fonction f, l'unicité de la solution n'est pas assurée en général pour le problème de cauchy.

Les formulations(2.1) et(2.2) bien que ne faisant intervenir que la dérivée première de $x(t)$, recouvrent en fait une large classe de problèmes. En effet, il est souvent possible de mettre sous la forme 2.1 des EDO dans lesquelles apparaissent des dérivées à un ordre quelconque. Considérons pour simplifier que les fonctions $x(t)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ie:$N = 1$). soit D un ouvert de$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ avec $p \geq 1$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En notant $x^{(k)}(t)$ la derivée k–ème de $x(t)$, toute équation différentielle ordinaire du p–ème ordre associée à f qui s'écrit :

$$x^{(p)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(p-1)}(t)), \tag{2.4}$$

peut se mettre sous la forme(2.1) .

Notons en effet

$$x_1(t) = x(t) \text{ et } x_{i+1}(t) = x^{(i)}(t)$$

pour $i = 1, ..., p-1$ et introduisons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ et } F(t, X) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_p(t) \\ f(t, x_1(t), ..., x_{p(t)}) \end{pmatrix}$$

L'EDO 2.4 devient alors :

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

Le problème de Cauchy correspondant à l'équation ci-dessus s'obtient en ajoutant une condition du type $X(t_0) = X_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$. Ceci correspond à la donnée de $x(t_0), x'(t_0), ..., x^{(p-1)}(t_0)$.

Nous allons introduire maintenant la notion de solution approchée. Ces solutions ne seront en général pas aussi régulières que les solutions exactes dont nous venons de parler.

Définition 2.3 *On dira qu'une fonction ϕ à valeus dans E est C^1par morceaux sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ si:*

1.ϕ est continue sur $\mathbb{R}$

2.Il existe un ensemble fini $S = \{t_1, \ldots, t_p\}$ de points de J° tels que ϕ soit C^1 sur $J \setminus S$ et $\lim_{t\to t_i^+} \phi'(t)$ et $\lim_{t\to t_i^-} \phi'(t)$ existent mais ne coïncident pas forcément.

Nous avons alors :

Définition 2.4 *soit $\varepsilon > 0$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On dira que $\phi \in C(J)$ est une solution $\varepsilon-$approchée de 2.1 si :*

1. $(t, \phi(t)) \in D, \ \ \forall t \in J$.

2. ϕ est C^1 par morceaux sur J (on note S les points où ϕ' n'est pas définie).

3. $||\phi'(t) - f(t, \phi(t)||_E \leq \varepsilon, \ \ \forall t \in J\backslash S$.

2.0.5 Existence locale de solutions :

Historiquement, il a été d'abord démontré que le problème de Cauchy (2.2) admettait localement une solution unique. Ce résultat, que nous le démontrerons plus loin, nécessite une hypothèse plus forte que la simple continuité sur la fonction f. En introduisant une suite de solutions approchées, le mathématicien italien Peano en s'appuyant sur un résultat d'Ascoli a démontré :

Théorème 2.1 *soit $(t_0, x_0) \in D$ et soit $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $C = \{|t - t_0| \leq a$, $||x - x_0|| \leq b\}$ soit inclus dans D. On note*

$$M = \sup_{(t,x)\in C} ||f(t, x)||_E$$

et

$$\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une solution $\varepsilon-$approchée ϕ du problème de cauchy sur (2.2) l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Définition 2.5 *Un ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ définies sur un intervalle réel I et à valeurs dans E,est dit uniformément équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que:*

$$||f(t) - f(\check{T})||_E \leq \varepsilon \ \forall f \in F$$

et

$$\forall t, \check{T} \in I, |t - \check{T}| \leq \delta_\varepsilon.$$

Nous aurons besoin également du:

Lemme 2.1 *(Ascoli)*

soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans E, muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{t \in I} ||f(t)||_E.$$

Alors tout sous ensemble $\mathcal{F}$ de $C(I)$, borné et uniformément équicontinu est relativement compact.

Démonstration :

Si $\mathcal{F}$ est un ensemble fini, c'est évident. On peut donc supposer que $\mathcal{F}$ contient une suite de fonctions deux à deux distinctes $(f_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

L'uniforme équicontinuité de $\mathcal{F}$ nous assure l'existence de $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$||f(t) - f(\check{T})||_E \leq \frac{\varepsilon}{3}, si|t - \check{T}| \leq \delta_\varepsilon.$$

L'intervalle I étant borné, on peut le recouvrir par un nombre fini d'intervalles ouverts $I_1, ..., I_p$ de longueur inférieure à δ_ε.Dans chacun de ces intervalles, on choisit des réel $t_1, ..., t_p$. La suite $(f_n(t_1))_n$ est bornée dans E. Elle admet donc une sous suite convergente $(f_{n_1}(t_1))_{n_1}$. De la même façon, la suite $(\ f_{n_1}(t_2))_{n_1}$ admet également une sous suite convergente notée $(f_{n_2}(t_2))_{n_2}$.En poursuivant ce procédé d'extraction, on aboutit à la construction de p suites, toutes convergentes $(f_{n_p}(t_i))_{n_p}, i = 1, ..., p$. Notons $\widetilde{f_n} = f_{n_p}$. Pour le ε choisi plus haut, il existe donc un rang N_ε tel que

$$||\widetilde{f}_m(t_i) - \widetilde{f}_n(t_i)||_E \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall i = 1, ..., p, \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

Montrons que $(\widetilde{f_n})_n$ est uniformément convergente sur I. Pour tout $t \in I$, il existe t_i tel que $|t - t_i| \leq \delta_\varepsilon$. Pour $n, m \geq N_\varepsilon$, on a alors:

$$||\widetilde{f}_m(t) - \widetilde{f}_n(t)||_E \leq ||\widetilde{f}_m(t) - \widetilde{f}_n(t_i)||_E + ||\widetilde{f}_m(t_i) - \widetilde{f}_n(t_i)||_E + ||\widetilde{f}_n(t_i) - \widetilde{f}_n(t)||_E$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

Ce qui prouve que $(\widetilde{f_n})_n$ est de Cauchy uniforme.

Théorème 2.2 ***(Ascoli-Peano):***

Soient $(t_0, x_0) \in D$, $a > 0$ *et* $b > 0$ *tels que le cylindre* $C = \{|t - t_0| \leq a, ||x - x_0|| \leq b\}$ *soit inclus dans* D. *On note*

$$M = \sup_{(t,x) \in C} ||f(t, x)||_E$$

et

$$\alpha = \min(a, \frac{b}{M}),$$

alors il existe (au moins) une solution φ *du problème de Cauchy 2.2 sur l'intervalle* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Démonstration:

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0. Pour chaque ε_n, et d'après le théorème précédent, il existe une solution ε_n–approchée du problème 2.2, notée φ_n et définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Toujours d'après la démonstration du théorème précédent , chacune de ces solutions vérifie :

$$||\varphi_n(t) - \varphi_n(\check{T})||_E \leq M|t - \check{T}|, \forall t, \check{T} \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Cette inégalité entraîne d'une part que l'ensemble des termes de la suite $(\varphi_n)_n$ est uniformément équicontinu de $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$. D'autre part, en choisissant $\check{T} = t_0$, on montre que

$$||\varphi_n(t)||_E \leq ||x_0||_E + b$$

pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. C'est à dire que la suite $(\varphi_n)_n$ est uniformément bornée. Les hypothèses du Lemme d'Ascoli sont donc vérifiées et il existe une suite extraite $(\varphi_{n_k})_n$ convergeant vers une fonction continue sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et notée φ.

Posons

$$\begin{cases} \Delta_n(t) = \varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t)) & \text{si } \varphi_n'(t) \text{ existe} \\ \Delta_n(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définittion des solutions $\varepsilon-$approchées,

$$||\Delta_n(t)||_E \leq \varepsilon_n$$

pour tout n et pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. En réecrivant maintenant les solutions sous forme intégrale, on obtient que :

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s) ds.$$

Comme φ_{n_k} converge uniformément vers φ et que f est uniformément continue sur le compact C, $f(t, \varphi_{n_k}(t))$ converge uniformément vers $f(t, \varphi(t))$. Si on ajoute la convergence uniforme de Δ_{n_k} vers 0, on peut passser à la limite dans l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds,$$

ce qui prouve que φ est de classe C^1 sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et est solution du problème de Cauchy 2.2.

On utilisera en général le théorème sous la forme simplifiée suivante :

Corollaire 2.1 *Soit $f \in C(D)$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in D$, il existe un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ sur lequel le problème de Cauchy 2.2 admet une solution.* *A*
de nous intéresser au problème de l'unicité des solutions, voici un exemple simple qui montre qu'un problème de Cauchy peut avoir une infinité de solutions même sur un voisinage arbitrairement petit autour de la condition de Cauchy.

Exemple 2.4 *Le problème de Cauchy*

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, x(0) = 0,$$

où

$$f(x,t) = \sqrt{|x|}$$

est définie et continue sur $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(0, x(0)) \in D$, admet sur $[0,1]$ et pour tout

$0 \leq c \leq 1$ *la solution φ_c définie par :*

$$\varphi_c(t) = \frac{1}{4}(t-c)^2, c \leq t \leq 1, \varphi_c(t) = 0, 0 \leq t < c.$$

2.0.6 Unicité locale des solutions :

On commence par un lemme technique mais qui sera très utile dans la suite :

Lemme 2.2 ***(Gronwall)***

Soit ψ une fonction continue définie sur un intevalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.On suppose qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ et trois constantes positives A, B et C telles que :

$$\psi(t) \leq A + B|\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds| + C|t - t_0|, \forall t \in [a,b].$$

Alors, pour tout $t \in [a,b]$ on a l'estimation :

$$\psi(t) \leq Ae^{B|t-t_0|} + \frac{C}{B}(e^{B|t-t_0|} - 1).$$

Démonstration :

Si $t = t_0$, la conclusion est évidente. Intéressons nous dans un premier temps aux valeurs de t telles que $t_0 < t < b$ et posons :

$$\Psi(r) = \int_{t_0}^{r} \psi(s)ds, \forall r \in [t_0, b].$$

La continuité de ψ entraîne que $\Psi \in C^1([t_0, b])$ et

$$(\Psi(r)e^{-Br})' = (\Psi'(r) - B\Psi(r))e^{-Br} = (\psi(r) - B\int_{t_0}^{r} \psi(s)ds)e^{-Br}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité vérifiée par ψ, que :

$$(\Psi(r)e^{-Br})' \leq e^{-Br}(A + C(r - t_0)), \forall r \in [t_0 - 1).$$

puis, en intégrant cette relation entre t_0 et t, on obtient :

$$\Psi(t)e^{-Bt} \leq \frac{A}{B}(e^{-Bt_0} - e^{-Bt}) + C\int_{t_0}^{t} e^{-Br}(r - t_0)dr$$

.

Une intégration par parties nous permet de calculer le dernier terme :

$$\int_{t_0}^{t} e^{-Br}(r - t_0)dr = \frac{1}{B}e^{B(t-t_0)} - \frac{1}{B} - (t - t_0),$$

ce qui nous permet d'estimer la fonction Ψ comme suit :

$$|\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds| = \Psi(t) \leq \frac{A}{B}(e^{B(t-t_0)} - 1) + \frac{C}{B}(\frac{1}{B}e^{B(t-t_0)} - \frac{1}{B} - (t - t_0)).$$

En combinant cette relation avec l'inégalité donnée dans les hypothèses, on obtient la conclusion du lemme dans le cas $t_0 < t \leq b$. Pour le cas $a \leq t < t_0$, on procède de la même façon mais en posant

$$\Psi(r) = \int_r^{t_0} \psi(s)ds.$$

La bonne propriété qui va assurer l'unicité pour le problème de Cauchy 2.2 est le caractère lipschitzien de la fonction f. Précisons cette notion :

Définition 2.6 *On dira que f est lipschitzienne en x (uniformément par rapport à t), et on notera $f \in Lip(D)$, s'il existe $k > 0$ tel que :*

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)||_E \leq k||x_1 - x_2||_E, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Remarquons que cette notion n'entaîne pas que f est continue sur D comme le prouve l'exemple suivant :

$D = \mathbb{R}^2$,

$$f(t, x) = 1$$

si $t > 0$ et

$$f(t, x) = 0$$

si $t \leq 0$.

En revanche, si f est lipschitzienne au sens classique, c'est à dire s'il existe $k > 0$ tel que :

$$||f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)||_E \leq k(|t_1 - t_2| + ||x_1 - x_2||_E), \forall (t_1, x_1)2, (t_1, x_2) \in D,$$

alors f est en particulier lipschitzienne en x uniformément en t.

L'exercice suivant fournit un exemple simple de fonction lipschitzienne.

Exercice 1 *:Montrer que si $f \in C^1(D)$ ou si $D_x f$ est continue en (t, x), alors f est lipschitzienne en x uniformément par rapport à t sur tout compact convexe K inclus dans D.*

Une application importante du lemme de Gronwall concerne les solutions $\varepsilon-$approchées :

2.0.7 Application 1 (du lemme de Gronwall)

Soit $f \in Lip(D) \cap C(D)$ avec pour constante de Lipschitz $k > 0$. soient φ_1, φ_2 deux solutions respectivement ε_1 et ε_2-approchées de 2.1 sur un même intervalle (a, b)

et telles que, pour un certain $a < t_0 < b$ on ait :

$$||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_E \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1). \tag{2.5}$$

Démonstration :

En reprenant la démonstration du théorème 2.2, on a l'écriture des solutions $\varepsilon-$approchées sous forme intégrale :

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_i(s), s) + \Delta_i(s) ds, i = 1, 2,$$

avec

$$||\Delta_i(s)||_E \leq \varepsilon_i, i = 1, 2.$$

On pose

$$\psi(t) = ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_E$$

et on a

$$\psi(t) \leq ||\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)||_E + \int_{t_0}^{t} ||f(\varphi_1(s), s) - f(\varphi_2(s), s)||_E ds + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t - t_0|.$$

Or, f étant Lipschitzienne en x uniformément en t :

$$||f(\varphi_1(s), s) - f(\varphi_2(s), s)||_E \leq k||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)||_E = k\psi(s).$$

On applique alors l'inégalité du lemme de Gronwall pour obtenir 2.5.

Exercice 2 *Soient φ et ψ deux fonctions continues de*

Exemple 2.5 ***Exercice 3*** *On suppose qu'il existe des constantes positives A, B telles que $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$ et $t_0 \in [a, b]$.*

$$\varphi(t) \leq A + B|\int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s)ds|, \forall t \in [a,b].$$

Montrer qu'alors:

$$\varphi(t) \leq A\exp(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds|).$$

Théorème 2.3 ***(Cauchy-Lipschitz) :***

Soit $f \in C(D) \cap Lip(D)$ et avec les mêmes notations que pour le théorème 2.2, il existe ***une unique*** *solution du problème de Cauchy 2.2 sur l'intervalle $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.*

Démonstration :

Le théorème 2.2 nous assure l'existence d'au moins une solution φ_1 sur l'intervalle considéré. On note φ_2 une éventuelle autre solution et on introduit la fonction continue

$$\psi(t) = ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||_E,$$

définie sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant des solutions du problème de Cauchy, elles s'écrivent, sous la forme intégrale 2.3 :

$$\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))ds, \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha], i = 1, 2$$

.

On obtient en particulier que :

$$\psi(t) = ||\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))ds||_E \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))||_E ds,$$

puis, f étant lipschitzienne en x uniformément en t sur D, il existe $k > 0$ telle que

$$||f(s,\varphi(s)) - f(s,\varphi_2(s))||_E \leq k||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)||_E$$

pour tout $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ce qui nous donne :

$$\psi(t) \leq \int_{t_0}^{t} k|\psi(s)|ds.$$

On conclut ensuite en appliquant le lemme de Gronwall avec $A = 0, B = k$ et $C = 0$.

Introduisons une nouvelle définition:

Définition 2.7 *On dira que f est localement lipschitzienne sur D si pour tout $(t, x) \in D$ il existe une boule $B = \{(t', x') \in D, ||x - x'||_E < \varepsilon, |t - t'| < \varepsilon\} \subset D$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B. On note alors $f \in Lip_{loc}(D)$.*

Remarque 2.1 *Dans cette définition la constante de Lipschitz n'est valable que localement.*

Exercice 4 *Montrer que si $f \in C^1(D)$ alors $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$.Du théorème précédent, on déduit que l'unicité de la solution est en fait globale, ce qui peut se traduire par : lorsque la fonction $f \in Lip_{loc}(D)$ alors les graphes de deux solutions distincts de 2.1 ne peuvent se croiser.*

Théorème 2.4 *Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$ et soient (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de 2.1 telles que $J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$. S'il existe un point t_0 de $J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_2)$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Démonstration:

Les ensembles J_1 et J_2 sont des intervalles. Il en est donc de même de $J = J_1 \cap J_2$ qui est en particulier connexe et non vide puisqu'il contient t_0. On note $I = \{t \in J$ tels que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. Montrons que I est ouvert et fermé dans J ce qui entraînera que $I = J$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues, on en déduit que I est fermé. Soit $t_1 \in I$, notons $x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Alors $(t_1, x_1) \in D$ et selon le théorème 1.3, le problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_1) = x_1,$$

admet une unique solution sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. On en déduit que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur cet intervalle et que $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\subset I$ et donc que I est ouvert.

On considèrera à partir de maintenant que l'on a toujours $f \in Lip_{loc}(D) \cap C(D)$ ou plus simplement $f \in Lip(D) \cap C(D)$, c'est à dire qu'il existe toujours une solution unique pour le problème de Cauchy (2.2)

2.1 Prolongement des solutions locales, solutions maximales :

commençons par poser quelques définitions :

Définition 2.8 *Soit (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de 2.1. On dit que (φ_2, J_2) prolonge (φ_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur J_1.*

Définition 2 ***Définition 2.9*** *Une solution $(\varphi, J\ )$ de 2.1 est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.*

Théorème 2.5 ***(Existence d'une solution maximale)***

Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$. Alors par tout point $(t_0, x_0) \in D$ il passe une unique solution maximale au problème de Cauchy (2.2).

Démonstration:

Considérons l'ensemble S de tous les couples (φ, J) de solutions au problème de Cauchy 2.2. Si (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) sont deux tels couples alors $J_1 \cap J_2$ n'est pas vide car il contient t_0 et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$ d'après le théorème 1.4.

Soit I la réunion de tous les intervalles J. Sur I on peut donc définir la fonction ψ par $\psi \equiv \varphi$ sur J pour tout $(\varphi, J) \in S$. Cette fonction est la solution maximale cherchée.

La question à laquelle nous allons répondre maintenant est :pourquoi une solution maximale, définie sur un intervalle borné, ne peut-elle être prolongée sur un intervalle plus grand?

Théorème 2.6 *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et que $D =]a, b[\times \Omega$. Soient $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$ et $(t_0, x_0) \in D$. Si $(\varphi, (T_-, T_+))$ est une solution maximale du problème de Cauchy (PC), alors on a l'alternative suivante :*

–ou bien $T_+ = b$

–ou bien $T_- < b$ et pour tout compact K de Ω il existe $t < T_+$ tel que $\varphi(t) \notin K$.

–Enoncé analogue pour T_-.

Démonstration:

Supposons que $T_+ < b$ et qu'il existe un compact K tel que $\varphi(t) \in K$ pour tout $t \in (t_0, T_+)$. Alors, comme $f \in C(D)$, il existe $M > 0$ tel que $||f(t,x)||_E \leq M$ pour tout $(t,x) \in [t_0, T_+] \times K$. Soit $(t_n)_n$ une suite croissante tendant vers T_+ et telle que $t_0 < t_n < T_+$ pour tout n. En écrivant la solution φ sous forme intégrale, on obtient que :

$$||\varphi(t_m) - \varphi(t_n)||_E \leq \int_{t_n}^{t_m} ||f(s,\varphi(s))||_E ds \leq M|t_m - t_n|, \forall m > n.$$

La suite $(t_n)_n$ étant de Cauchy, il en est de même pour $(\varphi(t_n))_n$ qui est donc convergente. Notons $x_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n)$. Alors $x_1 \in K \subset \Omega$ et on a donc $(T_+, x_1) \in D$. La solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(T_+) = x_1,$$

admet selon le théorème 1.2 une solution locale qui prolonge φ au dela de T_+. Ceci contredit la maximalité de φ.On procède de façon analogue pour T_-.

Si Ω est borné, ce théorème se traduit par : Le point de $\mathbb{R} \times E$ de coordonées $(t, \varphi(t))$ tend vers un point de la frontière du cylindre $]a,b[\times\Omega$ quand $t \to T_+$ et $t \to T_-$.

2.1.1 Cas particulier des EDO linéaires

Un cas particulier intéressant est celui où f est une application linéaire en x. Considérons I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $N \times N$ fonctions réelles continues :

$$m_{ij} : t \in I \to m_{ij}(t) \in \mathbb{R}.$$

Notons alors $M(t)$ la matrice carrée $N \times N$ dont les coefficients sont les coefficients sont les fonctions $m_{ij}(t)$. On notera $\pounds(E)$ l'espace vectoriel des matrices carrées $N \times N$ dont la norme naturelle est :

$$||M||_{\pounds(E)} = \max_{||x||_E=1} ||Mx||_E.$$

On dira qu'une EDO 2.1 est linéaire si elle s'écrit :

$$x'(t) = M(t)x(t) \tag{2.6}$$

Théorème 2.7 *Si $m_{ij} \in C(I)$ pour tout $i, j = 1, ..., N$, alors pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, le système (2.6) admet une unique solution maximale définie sur I tout entier et telle que $x(t_0) = x_0$.*

Démonstrtion:

Il est clair que

$$f(t, x) = M(t)x$$

est une fonction continue sur $I \times E$. Soit $I(t_0)$ un voisinage compact de t_0 dans I (si $t_0 \in \overset{O}{I}$, on peut choisir un intervalle de la forme $[t_0 - \delta, t_0 + \delta], \delta > 0$, sinon, t_0 est une extremité de I et on peut choisir $[t_0, t_0 + \delta]$ par exemple). Les fonctions a_{ij} étant continues sur $I(t_0)$, la fonction

$$k(t) = ||M(t)||_{\pounds(F)}$$

est elle aussi continue sur $I(t_0)$. On peut alors considérer

$$k = \max_{t \in I(t_0)} k(t)$$

et f est uniformément lipschitzienne en x, de constante de lipschitz k sur $I(t_0) \times E$.Selon le théorème 1.3, il existe une unique solution locale φ au problème de Cauchy considéré. D'autre part, en appliquant l'inégalité de Gronwall 2.5 avec $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_2 = 0$, on obtient l'estimation :

$$||\varphi(t)||_E \leq ||x_0||_E e^{k|t-t_0|}.$$

La solution reste donc bornée sur tout intervalle borné et suivant le théorème 1.6, elle peut donc être prolongée sur I tout entier.

Nous reviendrons largement sur les EDO linéaires dans le chapitre suivant qui leur sera dédié.

2.1.2 Dépendance des solutions en fonction des conditions initiales:

Lorsqu'elle est unique, la solution d'un problème de Cauchy:

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

$$x(\tau) = \xi,$$

peut être vue comme une fonction de la variable t dépendant du paramètre $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times E$. Pour mettre en exergue cette dépendance, on écrira cette solution $\varphi(t, \tau, \xi)$. Noter que l'unicité est fondamentale : si le problème de Cauchy ci-dessus admettait plusieurs solutions, la valeur de $\varphi(t, \tau, \xi)$ ne serait pas définie de façon univoque et on ne pourrait pas parler de fonction!

En considérons alors la fonction φ définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, on peut se poser la question de la régularité de la fonction par rapport à l'ensemble de ses variables.

2.1.3 Continuité en fonction des conditions intiales

Si ψ est une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans E, on notera :

$$T(\psi, \delta) = \{(t, x) \in \overset{0}{I} \times E, ||x - \psi(t)||_E < \delta, \forall t \in \overset{0}{I}\},$$

le tube ouvert centré en $(t, \psi(t))$. On peut alors énoncer le théorème.

Théorème 2.8 *soit $f \in Lip(D) \cap C(D)$ et soit ψ une solution de 2.1 définie sur un intervalle $I = [a, b]$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $T(\psi, \delta) \subset D$ et pour tout $(\tau, \xi) \in T(\psi, \delta)$ il existe une unique solution φ à 2.1 définie sur I et vérifiant $\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi$. En outre, φ est continue sur $V =]a, b[\times T(\psi, \delta)$.*

Démonstration:

Par définition d'une solution de 2.1, l'ensemble $\{(t, \psi(t)), t \in I\} \subset D$. Cet ensemble étant compact et le domaine D étant ouvert, il est possible de trouver $\delta_1 > 0$ tel que $T(\psi, \delta_1) \subset D$.

Choisissons alors $\delta < e^{-k(b-a)}\delta_1$ où k désigne la constante de Lipschitz de f sur D. Pour tout $(\tau, \xi) \in T(\psi, \delta)$,il existe d'après le théorème 1.3 une unique solution locale à l' EDO 2.1 vérifiant $\varphi(\tau) = \xi$. L'estimation de Gronwall 2.5 fournit, sur l'intervallenous d'exercice de $\varphi(., \tau, \xi)$:

$$||\varphi(t, \tau, \xi) - \psi(t)||_E \leq e^{k|t-\tau|}||\xi - \psi(\tau)||_E < \delta_1.$$

Ceci prouve que le point $(t, \varphi(t, \tau, \xi))$ reste à l'intérieur de $T(\psi, \delta_1) \subset D$ et donc, d'après le théorème 1.6, $\varphi(., \tau, \xi)$ peut être prolongée sur tout l'intervalle $[a, b]$.

On peut donc affirmer que toute solution qui passe par un point de $T(\psi, \delta)$ est entièrement contenue dans $T(\psi, \delta_1)$.

2.1.4 Dépendance des solutions en fonction des conditions initiales

Pour montrer la continuité de la fonction φ, nous allons montrer qu'elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur V. Introduisons pour cela la suite $(\varphi_n)_n$ définie de la façon suivante :

$$\varphi_0(t, \tau, \xi) = \psi(t) + \xi - \psi(\tau),$$

$$\varphi_{n+1}(t, \tau, \xi) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_n(s, \tau, \xi))ds, \forall(t, \tau, \xi) \in V, \forall n > 0,$$

et montrons par récurrence qu'elle a les bonnes propriétés. Il est clair que φ_0 est continue sur V et que pour tout n, la continuité sur V. Montrons maintenant que, pour tout $n \geq 1$:

$(t, \varphi_m(t, \tau, \xi)) \in T(\psi, \delta_1)$,

$$||\varphi_m(t, \tau, \xi) - \varphi_{m-1}(t, \tau, \xi)||_E \leq k^m \frac{|t-\tau|^m}{m!}||\xi - \psi(\tau)||_E, \forall 1 \leq m \leq n, \tag{2.7}$$

$$\forall(t, \tau, \xi) \in V.$$

D'une part :

$$||\varphi_0(t,\tau,\xi)-\psi(t)||_E = ||\xi-\psi(\tau)||_E < \delta \leq \delta_1,$$

Ce qui prouve que $(t, \varphi_0(t,\tau,\xi)) \in T(\psi,\delta_1) \subset D$ pour tout $(t,\tau,\xi) \in V$. D'autre part, comme :

$$\psi(t) = \psi(\tau) + \int_\tau^t f(s,\psi(s))ds, \forall t \in [a,b],$$

on obtient que

$$||\varphi_1(t,\tau,\xi)-\varphi_0(t,\tau,\xi)||_E \leq |\int_\tau^t ||f(s,\varphi_0(s,\tau,\xi))\_f(s,\psi(s))||_E ds|$$

$$\leq |\int_\tau^t k||\varphi_0(s,\tau,\xi)-\psi(s)||_E ds|$$

$$= k|t-\tau|||\xi-\psi(\tau)||_E,$$

ce qui est la relation 2.7 pour $n = 1$. On obtient également :

$$||\varphi_1(t,\tau,\xi)-\psi(t)||_E \leq ||\varphi_1(t,\tau,\xi)-\varphi_0(t,\tau,\xi)||_E + ||\varphi_0(t,\tau,\xi)-\psi(t)||_E$$

$$\leq (1+k|t-\tau|)||\xi-\psi(\tau)||_E \leq e^{k|t-\tau|}||\xi-\psi(\tau)||_E \leq \delta_1,$$

ce quio prouve que $(t,\varphi_1(t,\tau,\xi)) \in T(\psi,\delta_1)$ pour tout $(t,\tau,\xi) \in V$. Supposons maintenant que 2.7 soit vérifiée pour un certain rang n. Alors

$$||\varphi_{n+1}(t,\tau,\xi)-\varphi_n(t,\tau,\xi)||_E \leq |\int_\tau^t ||f(s,\varphi_n(s,\tau,\xi))-f(s,\varphi_{n-1}(t,\tau,\xi))||_E ds|.$$

D'après 2.7, $(t,\varphi_n(t,\tau,\xi))$ et $(t,\varphi_{n-1}(s,\tau,\xi))$ sont dans $T(\psi,\delta_1) \subset D$, on peut donc écrire que :

$$|\int_\tau^t ||f(s,\varphi_n(s,\tau,\xi)) - f(s,\varphi_{n-1}(s,\tau,\xi))||_E ds| \leq |\int_\tau^t k||\varphi_n(s,\tau,\xi) - \varphi_{n-1}(s,\tau,\xi)||_E ds|.$$

On utilise l'inégalité de 2.7, pour obtenir :

$$|\int_\tau^t k||\varphi_n(s,\tau,\xi) - \varphi_{n-1}(s,\tau,\xi)||_E ds| \leq |\int_\tau^t k^{n+1}\frac{|s-\tau|^n}{n!}||\xi - \psi(\tau)||_E ds|$$

$$= k^{n+1}\frac{|t-\tau|^{n+1}}{(n+1)!}||\xi - \psi(\tau)||_E.$$

L'inigalité triangulaire fournie :

$$||\varphi_n(t,\tau,\xi) - \psi(t)||_E \leq \sum_{p=1}^{n} ||\varphi_p(t,\tau,\xi) - \varphi_{p-1}(t,\tau,\xi)||_E + ||\varphi_0(t,\tau,\xi) - \psi(t)||_E$$

$$= \sum_{p=0}^{n} k^p \frac{|t-\tau|^p}{p!}||\xi - \psi(\tau)||_E \leq e^{k|t-\tau|}||\xi - \psi(\tau)||_E \leq \delta_1,$$

et la propriété 2.7 est démontrée pour tout $n \geq 1$; On en déduit que, pour tout $n \geq 0$ et tout $m \geq 1$:

$$||\varphi_{n+m}(t,\tau,\xi) - \varphi_n(t,\tau,\xi)||_E \leq \sum_{p=n+1}^{n+m} k^p \frac{|t-\tau|^p}{p!}||\xi - \psi(\tau)||_E$$

$$\leq \delta \sum_{p=n+1}^{n+m} k^p \frac{|b-a|^p}{p!}.$$

La suite $(\varphi_n)_n$ est donc de Cauchy uniforme sur V. Sa limite, notée $\widetilde{\varphi}$ est continue sur V. En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans la relation :

$$\varphi_{n+1}(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi_n(t,\tau,\xi))ds,$$

On obtient que

$$\widetilde{\varphi}(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s,\widetilde{\varphi}(t,\tau,\xi))ds,$$

ce qui prouve que $\widetilde{\varphi} \equiv \varphi$.

Remarquer que dans la démonstration de ce théorème, on a prouvé une nouvelle fois l'éxistence (locale) d'une solution de 2.2.

2.1.5 Différentiabilité en fonction des conditions initiales

Nous allons maintenant étudier la différentiabilité de la solution φ en fonction des conditions initiales (τ, ξ). Nous noterons $D_x f$ la matrice (quand elle existe) :

$$D_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x)... & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(t,x) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(t,x)... & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(t,x) \end{pmatrix}, i = 1, ..., N;$$

Théorème 2.9 *En reprenant les mêmes notations et sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.8 précédent et en supposant de plus que $D_x f$ existe et que $D_x f \in C(D)$, alors $\varphi \in C^1(v)$.*

Démonstration :

Prouver que φ est de classe C^1 est équivalent à prouver que toutes ces dérivées partielles $\vartheta_\varphi/\vartheta t, \vartheta_\varphi/\vartheta_\tau, \vartheta_\varphi/\vartheta_{\xi_1}, ..., \vartheta_\varphi/\vartheta_{\xi_N}$ existent et sont continues sur V. La relation

$$\varphi(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi(t,\tau,\xi))ds,$$

et la continuité de φ assurée par le théorème précédent, nous donne immédiatement l'existence et la contnuité de $\vartheta_\varphi/\vartheta_t$. Montrons que $\vartheta_\varphi/\vartheta_{\xi_1}$ existe et est continue sur V. Pour cela, fixons δ_1 et δ comme dans le théorème précédent et considérons (τ, ξ) un point de $T(\psi, \delta)$. Comme $T(\psi, \delta)$ est un ouvert, si l'on pose $h = (h_1, 0, ..., 0)^T \in E$, alors, pour tout h_1 proche de 0, $\xi_h = \xi + h = (\xi_1 + h_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in T(\psi, \delta)$.

Enfin considérons :

$$\chi_h(t,\tau,\xi) = \frac{\varphi(t,\tau,\xi_h) - \varphi(t,\tau,\xi)}{h_1}.$$

On peut alors énoncer :

Lemme 2.3 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $|h_1| \leq \delta_\varepsilon$ alors pour tout $(\tau,\xi) \in T(\psi,\delta)$, la fonction $\chi_h(.,\tau,\xi)$ est une solution $\varepsilon-$approchée du problème de Cauchy linéaire :*

$$y'(t) = D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi))y(t),$$

$$y(\tau) = e_1,$$

où $e_1 = (1,0,...,0)^T \in E$.

Démonstration du Lemme:

Posons:

$$\theta_h(t,\tau,\xi) = \varphi(t,\tau,\xi_h) - \varphi(t,\tau,\xi).$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall 2.5 à $\varphi(.,\tau,\xi_h)$ et $\varphi(.,\tau,\xi)$, on obtient que :

$$||\theta_h(t,\tau,\xi)||_E \leq ||\theta_h(\tau,\tau,\xi)||_E e^{|t-\tau|} \leq |h_1|e^{(b-a)}. \tag{2.8}$$

Ainsi, θ_h tend uniformement vers 0 sur V quand $h \to 0$. D'autre part, φ étand une solution de 2.1, on déduit que :

$$\theta_h'(t,\tau,\xi) = f(t,\varphi(t,\tau,\xi_h)) - f(t,\tau,\varphi(t,\tau,\xi)).$$

Le Théorème des accroisements finis appliqué à la fonction C^1:

$$F_{t,\tau,\xi,h} : s \in [0,1] \mapsto f(t,(1-s)\varphi(t,\tau,\xi_h) + s\varphi(t,\tau,\xi_h)),$$

nous assure de l'existence de

$$s_1 = s_1(t, \tau, \xi, h) \in [0, 1]$$

tel que :

$$\theta_h'(t, \tau, \xi) = F_{t,\tau,\xi,h}(1) - F_{t,\tau,\xi,h}(0) = F'_{t,\tau,\xi,h}(s_1)$$

$$= D_x f(t, (1 - s_1)\varphi(t, \tau, \xi) + s_1\varphi(t, \tau, \xi))\theta_h(t, \tau, \xi).$$

Cette relation devient :

$$\theta_h'(t, \tau, \xi) = (D_x f(t, \varphi(t, \tau, \xi)) + \Gamma_h(t, \tau, \xi))\theta_h(t, \tau, \xi)). \tag{2.9}$$

si l'on pose :

$$\Gamma_h(t, \tau, \xi) = D_x f(t, (1 - s_1)\varphi(t, \tau, \xi) + s_1\varphi(t, \tau, \xi_h)) - D_x f(t, \varphi(t, \tau, \xi_h)).$$

Les vecteurs $\varphi(t, \tau, \xi)$ et $\varphi(t, \tau, \xi_h)$ étant dans la boule de centre $\psi(t)$ et de rayon δ_1 par convexité il en est de même de$(1 - s_1)\varphi(t, \tau, \xi) + \varphi(t, \tau, \xi_h)$et donc $(t, (1 - s_1)\varphi(t, \tau, \xi) + s_1\varphi(t, \tau, \xi_h)) \in T(\psi, \delta_1)$. Or $\overline{T(\psi, \delta_1)}$ est compacte, inclus dans D et $D_x f$ est continue sur D. Donc $D_x f$ est uniformément continue sur $T(\psi, \delta_1)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{\delta_\varepsilon} > 0$ tel que

$$||D_x f(t, x) - D_x f(t, \widetilde{x})||_F \leq \varepsilon e^{-(b-a)}, \forall x, \widetilde{x} \in E, ||x - \widetilde{x}|| \leq \widetilde{\delta}\varepsilon.$$

Un calcul simple conduit à l'estimation :

$$||(1 - s_1)\varphi(t, \tau, \xi) + s_1\varphi(t, \tau, \xi_h) - \varphi(t, \tau, \xi_h)||_E = |s_1|||\theta_h(t, \tau, \xi)||_E$$

$$\leq |h_1|e^{(b-a)}.$$

En posant $\delta_\varepsilon = \widetilde{\delta_\varepsilon}e^{-(b-a)}$, on obtient donc que :

$$||\Gamma_h(t,\tau,\xi)||_F \leq \varepsilon e^{-(b-a)}, \forall (t,\tau,\xi) \in V, \forall |h_1| \leq \delta_\varepsilon. \tag{2.10}$$

Comme

$$\chi_h = \theta_h/h_1,$$

en rassemblant les estimations 2.8, 2.9 et 2.10, on obtient :

$$||\chi_h'(t,\tau,\xi) - D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi))\chi_h(t,\tau,\xi)||_E \leq \varepsilon, \forall (t,\tau,\xi) \in V, \forall |h_1| \leq \delta_E.$$

Il suffit de vérifier (ce qui est évident) que

$$\chi(t,\tau,\xi) = e_1$$

pour avoir la conclusion du lemme.

Considérons maintenant la solution $\beta(t,\tau,\xi)$ du problème de Cauchy linéaire :

$$y'(t) = D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi))y(t),$$

$$y(\tau) = e_1.$$

D'après le théorème 1.7, cette solution existe pour tout $t \in [a,b]$ et d'après le lemme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_E > 0$ tel que $\chi_h(t,\tau,\xi)$ soit une solution $\varepsilon-$approchée si $|h_1| \leq \delta_E$. En utilisant l'estimation de Gronwall 2.5, on en déduit que :

$$||\chi_h(t,\tau,\xi) - \beta(t,\tau,\xi)||_E \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k(b-a)} - 1),$$

pour tout $(t,\tau,\xi) \in V$. En d'autres termes, $\chi_h(t,\tau,\xi) \to \beta(t,\tau,\xi)$ uniformément sur V. On en conclut que

$$\partial_\varphi/\partial_{\xi_1} = \beta$$

existe et est une fonction continue sur V car c'est la limite uniforme des fonctions χ_h qui sont continues sur V.

Chapitre 3

EQUATIONS LINEAIRES

Dans ce chapitre, on s'intéresse exclusivement aux équations différentielles du type

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t), \tag{3.1}$$

avec $b \in C(I;X)$ et $A \in C(I, \pounds(X))$ (où $\pounds(X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues dans l'espace de Banach X). On dit que sont des équations <<linéaires>> (car $A(t)$est linéaire) avec <<terme source>> (b). On qualifie parfois 3.1 simplement d'équation linéaire (par abus de langage, le terme correct étant plutôt affine).

3.1 Existence globale

D'après le théorème II.3, les solutions de 3.1 sont globales.

Théorème 3.1 *Pour $b \in C(I;X)$ et $A \in C(I;\pounds(X)))$, quel que soit $(t_0, u_0) \in I \times X$, il existe une unique fonction $u \in C^1(I;X)$ solution de 3.1 telle que*

$$u(t_0) = u_O.$$

On peut aussi donner une démonstration de ce théorème en faisant appel au théorème de point fixe unique.

Théorème 3.2 *Soit T un opérateur sur un espace de Banach dont une puissance est contractante. Alors T admet un point fixe unique.*

Démonstration:

Ce resultat est une conséquence facile du théorème de point fixe de Banach-picard.

Par hypothèse, il existe un entier k tel que T^k soit contractant et donc admette un point fixe unique u. Alors :

$$T^k(T(u)) = T(T^k(u)) = T(u).$$

Donc $T(u)$ est aussi un point fixe de T^k. à cause de l 'unicité de ce point fixe on a ainsi

$$T(u) = u.$$

De plus, tout point fixe de T étant évidemment un point fixe de T^k. u est l unique point fixe de T.

Démonstration du théorème III.1 :

Pour résoudre le problème de cauchy de donnée ‹‹initiale›› $u(t_0) = u_0$, on cherche u tel que

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds$$

c'est-à-dire de façon équivalente

$$u(t) = v(t) + u(t),$$

avec

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds.$$

Pour simplifie, on suppose (sans perte de généralité, il suffit de translater toutes les fonctions en jeu) $t_0 = 0$. soient α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $[\alpha, \beta] \subset I$. Définissons alors l'opérateur :

$$T : C([\alpha, \beta]; X) \to C([\alpha, \beta]; X)$$

$$v \qquad\qquad \mapsto \quad Tv$$

$$(Tv)(t) = \int_0^{t\prime} (A(s)(v(s)+u_0)+b(s))ds.$$

Quel que soient v et w dans $C([\alpha, \beta]; X)$ on a

$$(Tv)(t) - (Tw)(t) = \int_0^t \ A(s)(v(s) - w(s))ds$$

et donc

$$||(Tv)(t) - (Tw)(t)|| \leq Ct \max_{s\in[0,t]} ||v - w||,$$

avec

$$C := \max_{s\in[\alpha,\beta]} ||A(s)||.$$

Montrons par récurrence que

$$||(T^n v)(t) - (T^n w)(t)|| \leq C^n \ \max_{s\in[0,t]} ||v - w||$$

pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. C'est vrai à l'ordre 1 comme on vient de le voir. Supposons l'inégalité vraie à l'ordre n. Alors

$$||(T^{n+1}v)(t) - (T^{n+1}w)(t)|| = ||T((T^n v)(t)) - T((T^n w)(t))||$$

$$\leq C \int_0^t ||(T^n v)(s) - (T^n w)(s)||ds$$

$$\leq C \max_{s\in[0,t]} ||v - w|| \int_0^t C^n \frac{s^n}{n!} ds$$

d'aprés l'hypothèse de récurrence. En évaluant l'intégrale on obtient immédiatement l'inégalité à l'ordre $n + 1$:

$$||(T^{n+1}v)(t) - (T^{n+1}\omega)(t)|| \leq C_{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}||v - \omega||.$$

Par conséquent, on a

$$||T^n v - T^n \omega|| \leq C^n \frac{(\beta - \alpha)^n}{n!}||v - \omega||$$

quels que soient v et ω. Donc T^n est contractant pour n assez grand et d'aaprès le théorème III.2, T admet un point fixe unique.

3.2 Résolvante

Considérons l'équation différentielle linéaire dans $\pounds(X)$:

$$\frac{dM}{dt} = A(t) \circ M \tag{3.2}$$

D'après le théorème III.1, ses solutions maximales sont globales.

Définition 3.1 *On appelle résolvante de l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

l'application

$$R : I \times I \to \pounds$$

$$(t, t_0) \to R(t, t_0)(X)$$

où

$$t \to R(t, t_0)$$

est la solution du problème de Cauchy pour (3.2) avec la condition initiale

$$R(t_0, t_0) = I_X.$$

On observe que pour tout $u_0 \in X$, l'application

$$u : t \to R(t, t_0)u_0$$

est la solution du problème de Cauchy

pour (3.1) et la condition initiale $u(t_0) = u_0$. Autrement dit, le flot de (3.1) est donné par

$$\phi^{t_0}(t, u_0) = R(t, t_0)u_0.$$

Par construction, R est continûment différentiable par rapport à t. De plus, le lemme II.3(application simple du lemme de Gronwall) montre que R est lipschitzienne par rapport à t_0. Donc en particulier, R est une fonction continue de (t, t_0). Comme l'ensemble des isomorphismes de $\pounds(X)$ est un ouvert et $R(t, t_0) = I_X$ est trivialement un isomorphisme, $R(t, t_0)$ est un isomorphisme pour tout t voisin de t_0. En fait, ceci est vrai pour tout $t \in I$ comme conséquence de la :

proposition 3.1 *La résolvante est telle que*

$$R(t, s) \circ R(s, t_0) = R(t, t_0)$$

quels que soient $t, s, t_0 \in I$.

Démonstration :

Soit $u_0 \in X$ et

$$u(t) = R(t, t_0)u_0.$$

Alors la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d\upsilon}{dt} = A(t)\upsilon$$
$$\upsilon(s) = u(s)$$

n'est autre que u, mais elle s'exprime aussi comme

$$v : t \to v(t) = R(t,s)u(s) = R(t,s) \circ R(s,t_0)u_0.$$

D'où

$$R(t,t_0)u_0 = R(t,s) \circ R(s,t_0)u_0.$$

Ceci étant vrai quel que soit u_0, on en déduit la formule voulue.

Corollaire 3.1 *Pour tout $(t,t_0) \in I \times I, R(t,t_0)$ est un isomorphisme, d'inverse $R(t_0,t)$. De plus, R estcontinûment différentiable comme fonction de deux variables, et ses dérivées partielles satisfons*

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = A(t) \circ R(t,s) et \frac{\partial R}{\partial s}(t,s) = -R(t,s) \circ A(s).$$

Démonstration :

La première partie est conséquence immédiate de la proposition III.1:

$$R(t_0,t) \circ R(t,t_0) = R(t_0,t_0) = I_X et R(t,t_0) \circ R(t_0,t) = R(t,t) = I_X.$$

L'expression de la dérivée partielle de R par rapport à sa première variable découle directement de la définition de R : elle est continue comme composée de fonctions continues (on rappelle que R est continue comme fonction des deux variables). Pour montrer que R est dérivable par rapport à sa seconde variable, on utilise la première partie : comme

$$R(t,s) = R(s,t)^{-1},$$

R est dérivable par rapport à s par composition de $s \to R(s,t)$ et de l'application

$$Isom(X) \to Isom(X)$$

$$M \quad \to \quad M^{-1},$$

dont on sait qu'elle est (continûment) différentiable. Pour exprimer effectivement la dérivée partielle de R par rapport à sa seconde variable, on dérive simplement l'identité

$$R(t,s) \circ R(s,t) = I_X$$

en utilisant l'expression de la dérivée partielle de R par rapport à sa première variable, ce qui donne :

$$\frac{\partial R}{\partial s}(t,s) \circ R(s,t) + R(t,s) \circ A(s) \circ R(s,t) = 0.$$

Comme $R(s,t)$ est un isomorphisme, on en déduit l'expression annoncée.

Attention ! En général, on ne connaît pas explicitement la résolvante.

3.2.1 Cas des équations linéaires autonomes

Si A est indépendant de t, la résolvante de 3.1 s'exprime à l'aide de l'exponentielle, dont on rappelle la

Définition 3 *Pour tout $A \in \pounds(X)$,*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(La série ci-dessus est normalement convergente dans $\pounds(X)$).

Lemme 3.1 *Pour tout $A \in \pounds(X)$, l'application $t \to e^{tA}$ est continûment dérivable (et même de classe C^∞), et*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

.

La démonstration est laissée en exercice. Elle utilise de façon cruciale la propriété de l'exponentielle :

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}.$$

Le lemme III.3 montre que la résolvante de l'équation différentielle linéaire autonome

$$\frac{du}{dt} = Au$$

est donnée par

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

3.2.2

3.2.3 Cas des équations linéaires en dimension finie

Dimension 1.

Les équations différentielles (d'ordre 1) linéaires scalaires, pour lesquelles $X = \mathbb{R}$, se résolvent explicitement : la résolvante de

$$\frac{du}{dt} = a(t)u$$

où l'inconnue u est à valeurs réelles et $a : I \to \mathbb{R}$ est continue est donnée par

$$R(t,s) = e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}.$$

Dimension 2 et plus

Il est tentant de généraliser la formule précédente. Cependant, si les matrices $A(t)$ (ou les endomorphismes) ne commutent pas deux à deux, une telle formule (que l'on se garde volontairement d'écrire) est fausse : ceci est lié au fait que e^{A+B} n'est pas le produit de e^A et e^B lorsque les matrices A et B ne commutent pas .

Tout ce que l'on peut dire est que la résolvante est liée à une base de solutions.

proposition 3.2 *Soit $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ continue, et $R : I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante de*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u, \tag{3.3}$$

c'est-à-dire que pour tout $(t, s) \in I \times I$,

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, s) = A(t)R(t, s) et R(s, s) = I_n.$$

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors les applications $t \to R(t, t_0)e_i$ (pour $i \in \{1, ..., n\}$) forment une famille indépendante de solutions de 3.3, soit $B : t \in I \to B(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont

$u_1(t), ..., u_n(t)$. Alors la résolvante de 3.3 est donnée par

$$R(t, s) = B(t)B(s)^{-1}.$$

Démonstration :

La première partie découle de la définition et du corollaire III.1, qui montre que $R(t, s) \in GL_n(\mathbb{R})$. La preuve de la seconde partie consiste simplement à remarquer que l'application $t \to B(t)B(s)^{-1}$ est solution du même problème de Cauchy que $t \to R(t, s)$.

Remarque 3.1 *On peut aussi montrer que $R(t, s)$ est inversible en vérifiant que son déterminant satisfait une équation différentielle scalaire linéaire (d'ordre 1). C'est l'objet du résultat suivant, parfois appelé formule de Liouville.*

proposition 3.3 *Soit*

$$\Delta(t, s) := d\acute{e}t(R(t, s)).$$

Alors

$$\Delta(t,s) = e^{\int_s^t tr(A(\tau))d\tau}.$$

Démonstration :

C'est un petit calcul qui utilise la différentielle du déterminant, dont on rappelle qu'elle donnée par :

$$d(dét)(M) \cdot H = tr((comM)'H);$$

Par conséquent, la règle de dérivation des fonctions composées montre que :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t,s) = tr((comR(t,s))^t \frac{\partial R}{\partial t}(t,s)).$$

D'où

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t,s) = tr((comR(t,s))^t A(t)R(t,s)) = tr((comR(t,s))^t R(t,s)A(t)) = \Delta(t,s)tr(A(t))$$

d'après la formule

$$(comR)^t R = (détR)I.$$

3.3 Formule de Duhamel

Ce paragraphe est consacré à un résultat très facile à démontrer et néaumoins fondamental.

Il exprime le principe de superposition bien connu selon lequel : la solution générale d'une équation linéaire avec terme source est donnée pr la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation avec terme source.

proposition 3.4 ***(Formule de Duhamel)***

Soit $A \in C(I; \mathcal{L}(X))$ et R la résolvante de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

Soit $b \in C(I; X)$ et ϕ^{t_0} le flot en $t_0 \in I$ de l'équation

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t).$$

Alors pour tout $(t, v) \in I \times X$,

$$\phi^{t_0}(t, v) = R(t, t_0) \cdot v + \int_{t_0}^{t} R(t, s) \cdot b(s) ds.$$

Démonstration :

On vérifie par un calcul facile que l'application

$$t \to \int_{t_0}^{t} R(t, s) \cdot b(s) ds$$

est solution de l'équation avec le terme source b. Comme $t \to R(t, t_0) \cdot v$ est solution de l'équation homogène, la somme des deux est, par linéarité, solution de l'équation avec terme source. De plus elle vaut v à $t = t_0$. Donc c'est l'unique solution cherchée.

3.4 Equations linéaires autonomes

L'objectif ici est d'introduire certains outils utiles dans la suite du chapitre. On commence par le cadre plus élémentaire des équations en dimension finie.

3.4.1 Dimension finie

On considère dans ce paragraphe $A \in M_n(\mathbb{R})$ et l'équation différentielle linéaire homogène associée

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{3.4}$$

On sait que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Que peut-on dire de leur comportement à l'infini? Cela dépend à l'évidence des propriétés de la matrice A, que l'on va pour l'occasion identifier à un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. L'analyse de 3.4 est intimement liée à l'algèbre linéaire, dont voici quelques rappels (pour information le vocabulaire anglophone, lorsqu'il n'est pas intuitif, est donné en note).

Définition 3.2 *Les valeurs propres de A sont les nombres complexes λ pour lesquels le noyeau de $(A - \lambda I)$ est non triviale. Si λ est une valeur propre de A, on dit que l'espace $Ker(A - \lambda I)$ est le sous-espace propre associé. Si k est le plus grand entier tel que*

$$Ker(A - \lambda I)^{k-1} \subset Ker(A - \lambda I)^k$$

avec inclusion stricte,

l'espace $Ker(A - \lambda I)^k$ est applé sous-espace caractéristique se λ.

- La dimension du sous-espace propre $Ker(A - \lambda I)$ est appelée multiplicité géométrrique de λ.

- La dimension du sous-espace caractéristique $Ker(A - \lambda I)^k$ est appelée multiplicité algébrique de λ.

- Lorsque les multiplicités géométriques et algébriques coincident, la valeur propre λ est dite semi-simple.

- lorsque les multiplicités géométriques et algébriques coincident et valent 1, la valeur propre λ est dite simple.

Théorème 3.3 - *Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme caractéristique :*

$$P(\lambda := d\acute{e}t(\lambda i - A).$$

La multiplicité algébrique d'une valeur propre est égale à son ordre comme zéro du polynôme caractéristique.

Les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe et leur somme est $\mathbb{C}^n$.

-***(Cayley-Hamilton)*** *Les valeurs propres de A sont aussi les zéros du polynôme minimal, défini comme le générateur unitaire de l'idéal des polynômes anulateurs de A.*

- Si toute les valeurs propres sont semi simples, les sous-espaces caractéristiques et les sous-espaces propres sont égaux, et la matrice A est diagonalisable.

Pour la démonstration, se repporter à un ouvrage d'algèbre linéaire...

Attention! *Le vocabulaire se télescope un peu car on appelle aussi résolvante de A la matrice $(A - \lambda I)^{-1}$ lorsque λ n'est pas une valeur propre de A. Le terme est donc à manipuler avec précaution.*

Le comportement asymptotique des solutions de 3.4 est donné par le résultat suivant, que l'on donne sur $\mathbb{R}^+$ et qui admet évidemment un analogue sur $\mathbb{R}^-$ (changer t en $-t$ et A en $-A$).

proposition 3.5 *L'application $t \to e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si les valeurs propres de A sont touts de partie réelle négative ou nulle et si les valeurs propres imaginaires pures sont semi-simple. Elle tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.*

Démonstration :

Soit $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de A (avec $p \leq n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$). A chaque valeur propre λ_j on associe le sous-espace caractéristique E_j, et Π_j la projection sur E_j parallèlement à $\oplus_{i \neq j} E_j$. Par définition de E_j, il existe un entier k_j tel que

$$(A - \lambda_j I)^{k_j} \Pi_j = 0,$$

et d'après le théorème III.3, on a

$$I = \sum_{j=1}^{p} \Pi_j.$$

Par suite

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{p} e^{tA}\Pi_j = \sum_{j=1}^{p} e^{t\lambda_j} e^{t(A-\lambda_j I)}\Pi_j = \sum_{j=1}^{p} e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{k_j-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k \Pi_j,$$

ce qui tend bien vers 0 en $+\infty$ si les λ_j sont toutes de partieréelle strictement négative. Par ailleurs, si les λ_j sont de partie réelle négative ou nulle et si les k_j valent tous 1, alors e^{tA} est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Les réciproques sont faciles à vérifier :

-S'il existe λ de partie réelle strictement positive tel que

$$Av = \lambda v$$

pour un vecteur v non nul, alors

$$e^{tA}v = e^{t\lambda}v$$

est non borné.

-Si $\lambda \in i\mathbb{R}$ est une valeur propre non semi-simple, il existe des vecteurs non nuls v et ω tels que

$$Av = \lambda v, \quad A\omega = \lambda\omega + v;$$

On montre par réccurence que

$$A^m\omega = \lambda^m\omega + m\lambda^{m-1}v$$

est de norme supérieure ou égale à $t||v|| - ||\omega||$ pour $t \geq 0$, ce qui est évidemment non borné.

-Enfin, si $\lambda \in i\mathbb{R}$ est une valeur propre même simple,

$$Av = \lambda v$$

avec v non nul entaîne que

$$e^{tA}v = e^{t\lambda}v$$

est de norme égale à $||v||$, ce qui ne tend pas vers 0.

Définition 3.3 *Une matrice n'ayant pas de valeurs propre imaginaire pure est dite hyperbolique.*

proposition 3.6 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice hyperbolique. Alors les ensembles*

$$E^s = \{\omega \in \mathbb{R}^n ; \lim_{t\to+\infty} e^{tA}\omega = 0\},$$

$$E^u = \{\omega \in \mathbb{R}^n ; \lim_{t\to-\infty} e^{tA}\omega = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par A, appelés respectivement sous-espace stable et sous-espace instable, et il existe des projecteurs Π^u et Π^s commutent avec A tels que $\Pi^u + \Pi^s = I$ satisfaisant les estimations suivantes. En notant $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et

$$\beta = -\max\{\mathrm{Re}\,\lambda < 0 ; \lambda \in \sigma(A)\} et \gamma = \min\{\mathrm{Re}\,\lambda > 0 ; \lambda \in \sigma(A)\},$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes b_ε et c_ε telles que

$$||e^{tA}\Pi^s|| \leq b_\varepsilon e^{-(\beta-\varepsilon)t} \ \forall t \geq 0$$

et

$$||e^{tA}\Pi^u|| \leq c_\varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)t} \ \forall t \geq 0$$

Démonstration :

Le fait que E^s et E^u soient des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par A est évident (rappelons que e^{tA} commute avec A). On va commencer par définir les projecteurs Π^u et Π^s, et on vérifiera ensuite que $E^s = \mathrm{Im}(\Pi^s)$ et $E^u = \mathrm{Im}(\Pi^u)$. On reprend pour cela les mêmes notations que dans la preuve de la proposition III.5. Soient

$$\Pi^s := \sum_{j;\mathrm{Re}\,\lambda_j<0} \Pi_j et \Pi^u := \sum_{j;\mathrm{Re}\,\lambda_j>0} \Pi_j.$$

Noter que ces projecteurs sont bien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: en effet, les valeurs propres non réelles de A sont deux à deux conjuguées, et $\Pi_{j'} = \overline{\Pi_j}$ si $\lambda_{j'} = \overline{\lambda_j}$ donc $\Pi_j + \Pi_{j'}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Comme les Π_j, Π^s et Π^u sont bien des projecteurs commutant avec A. Et comme A n'a pas de valeur propre imaginaire pure on a

$$\Pi^u + \Pi^s = \sum_{j=1}^{p} \Pi_j = I.$$

De plus, on a l'expression explicite :

$$e^{tA}\Pi^s = \sum_{j;\mathrm{Re}\,\lambda_j<0} e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{k_j-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k \Pi^s,$$

d'où, pour $t \geq 0$,

$$||e^{tA}\Pi^s|| \leq p \max_{j\leq p, k\leq k} ||(A-\lambda_j I)^k|| ||\Pi^s|| e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{K} \frac{t^k}{k!}$$

avec

$$K = \max_j k_j - 1.$$

Le dernier terme, polynômial en t, étant majoré par une constante fois $e^{\varepsilon t}$ pour $\varepsilon > 0$, on en déduit l'estimation de $||e^{tA}\Pi^s||$. L'estimation de $||e^{tA}\Pi^s||$ s'obtient exactement de la même manière. On déduit directement de ces estimations les inclusions

$$\mathrm{Im}(\Pi^s) \subset E^s \quad et \quad \mathrm{Im}(\Pi^u) \subset E^u.$$

Réciproquement, soit par exemple $\omega \in E^s$. Comme Π^u commute avec A, il commute aussi avec e^{tA}, donc

$$||\Pi^u \omega|| = ||e^{tA}\Pi^u e^{-tA}\omega|| \leq c_\varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)t} ||e^{-tA}\omega||$$

pour tout $t \leq 0$. En prenant $\varepsilon < \gamma$, le second membre tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$ (pour le dernier terme, on utilise simplement la définition de E^s). Donc $\Pi^u \omega = 0$, c'est à dire que

$$\omega = \Pi^s \omega \in \mathrm{Im}(\Pi^s).$$

Ainsi $E^s \subset \mathrm{Im}(\Pi^s)$. On montre de façon analogue que E^u est inclus dans $\mathrm{Im}(\Pi^u)$.

.

3.4.2 Dimension infinie

Pour simplifier la présentation, on suppose dans ce paragraphe que X est un $\mathbb{C}$-espace de Banach, et que A est un opérateur linéaire et continu sur X, ce que l'on note $A \in \pounds(X)$.

On a vu au paragraphe précédent des résultats sur le comportement de e^{tA} lorsque X est de dimension finie, qui reposent pour une large part sur la réduction des matrices. Lorsque X est de dimension infinie, tout devient plus délicat. Tout d'abord, le spectre de A n'est plus exclusivement constitué de valeurs propres.

Définition 3.4 *On appelle specter de $A \in \pounds(X)$ l'ensemble $\sigma(A)$ des nombres complexes λ tels que $(A - \lambda I_X) \notin Isom(X)$ (ensemble des isomorphismes de X). Le spectre penctuel est inclus dans le spectre : c'est l'ensemble des valeurs propres, c'est à dire des nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $(A - \lambda I_X)$ est non injectif.*

Remarque 3.2 *- L'ensemble des isomorphismes étant un ouvert, l'ensemble résolvant de A :*

$$\rho(A) := \mathbb{C} \backslash \sigma(A)$$

est un ouvert, par continuité de l'application

$$\mathbb{C} \to \pounds(X)$$

$$\rho(A) := \mathbb{C} \backslash \sigma(A)$$

est un ouvert, par continuité de l'application

$$\mathbb{C} \to \pounds(X)$$

$$\lambda \to (A - \lambda I_X).$$

- Le spectre d'un opérateur $A \in \pounds(X)$ est borné :

$$\sigma(A) \subset \{\lambda; |\lambda| \leq |||A|||\}.$$

En effet, si

$$|\lambda| > |||A|||, (A - \lambda I_X)$$

est inversible d'inverse

$$(A - \lambda I_X)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^m} A^m,$$

cette série étant normalement convergente.

Plus précisément, on a

$$\sigma(A) \subset \{\lambda; |\lambda| \leq r_A := \lim |||A^m|||^{\frac{1}{m}}\} \tag{3.5}$$

et

$$\sigma(A) \cap \{\lambda; |\lambda| = r_A\} \neq \varnothing.$$

- Ainsi, $\sigma(A)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.

Attention ! Si A était un opérateur non borné (c'est à dire linéaire mais pas continu), on pourrait encore définir son spectre mais il pourrait être vide ou non borné.

Lemme 3.2 *L'application*

$$R_A : \rho(A) \to \pounds(X)$$

$$\lambda \qquad \to (A - \lambda I_X)^{-1}$$

est holomorphe (c'est à dire dérivable comme fonction de variables complexes).

Théorème 3.4 *Si (B_m) est une famille d'éléments d'un $\mathbb{C}$-espace de Banach ß tel que pour tout $\varphi \in$ß',*

$$\sup_m |\varphi(B_m)| < \infty$$

alors

$$\sup_m ||B_m|| < \infty.$$

Démonstration :

Cela revient simplement à combiner le théorème de Hahn-Banach avec le théorème de Banach-Steihaus : le premier montre en effet que

$$||B_m||_{ß} = ||b_m||_{\pounds(ß';\mathbb{C})}$$

où

$$\langle b_m, \varphi \rangle := \varphi(B_m) \forall \varphi \in ß',$$

et le second dit que

$$\sup_m |\langle b_m, \varphi \rangle| < \infty \quad \forall \varphi \in ß' \quad \Rightarrow \sup_m ||b_m||_{\pounds(ß',\mathbb{C})} < \infty.$$

Grâce à l'astuce mentionnée plus haut (utiliser des formes linéaires continues φ pour revenir dans $\mathbb{C}$), on peut faire passer les résultats classiques de la théorie des fonctions de variable complexe aux fonctions à valeurs dans un algèbre de Banach. En particulier, on a le

Théorème 3.5 *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et ß une algèbre de banach. Si $f : \Omega \to$ß holomorphe elle est analytique, c'est à dire développable en série entière (et réciproquement). De plus, si Γ et Γ sont des lacets homotopes dans Ω, alors*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz.$$

Remarque 3.3 *Dans le cas de l'algèbre ß=£(X) et de la fonction R_A, la première partie de l'énoncé est facile à vérifier. On peut même préciser l'observation faite au lemme III.2 en*

proposition 3.7 *L'application R_A est analytique. De plus, R_A n'admet pas de prolongement analytique en dehors de $\rho(A)$.*

Démonstration :

Pour $\lambda, \lambda_0 \in \rho(A)$, on a

$$R_A(\lambda_0) = (I_X - (\lambda - \lambda_0)R_A(\lambda_0))R_A(\lambda).$$

Par suite, on a

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (R_A(\lambda_0))^{n+1},$$

cette série étant convergente pour

$$|\lambda - \lambda_0| < 1/|||R_A(\lambda_0)|||.$$

Ceci montre que R_A est analytique dans $\rho(A)$. <<Inversement>> si la série ci-dessus converge, alors sa somme est

$$S_A(\lambda) := \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (R_A(\lambda_0))^{n+1} = (I_X - (\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0))^{-1} R_A(\lambda_0).$$

Or

$$R_A(\lambda_0)(A - \lambda I_X) = I_X - (\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0).$$

Donc

$$S_A(\lambda)(A - \lambda I_X) = I_X.$$

On montre de la même façon que

$$(A - \lambda I_X) S_A = I_X.$$

D'où $\lambda \in \rho(A)$ et

$$R_A(\lambda) = S_A(\lambda).$$

Par conséquent, R_A n'admet pas de prolongement analytique en dehors de $\rho(A)$.

Pour s'en convaincre, on fait un raisonnement classique mais un peu acrobatique. Supposons qu'une fonction analytique f prolonge R_A au voisinage d'un point $\underline{\lambda}$ du bord de $\rho(A)$. Par définition, $\underline{\lambda}$ n'appartient pas à l'ouvert $\rho(A)$. Soit $\underline{r}$ le rayon de convergence du développement en série entière de f au point $\underline{\lambda}$. Il existe un point $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \{\lambda; |\lambda - \underline{\lambda}| < \underline{r}/2\}$, et le développement en série entière de f au point λ_0 a un rayon au moins égal à $\underline{r} - |\lambda_0 - \underline{\lambda}| > |\lambda_0 - \underline{\lambda}|$. En particulier, $\underline{\lambda}$ est dans le disque de convergence. Or, f coincide avec R_A au voisinage de λ_0 et son développement en série entière est donc

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (R_A(\lambda_0))^{n+1}.$$

D'après ce qui précède, tous les points du disque de convergence devraient être dans $\rho(A)$, mais ce n'est pas le cas de $\underline{\lambda}$.

Nous sommes maintenant armés pour aborder l'extension de la proposition III.6 en dimension infinie. Comme en dimension finie, on dit d'un opérateur qu'il est hyperbolique s'il n'a pas de spectre imaginaire pur.

Théorème 3.6 *Si A est un opérateur hyperbolique, il existe des projecteurs continus Π^s et Π^u comme dans la proposition III.6.*

3.5 Equations différentielles linéaires à coefficients périodiques

Soit X un espace de Banach (sur$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $A \in C(\mathbb{R}, X)$ périodique de période T. On considère l'équation différentielle linéaire

$$\frac{du}{dt} = A(t)u,$$

et

$$R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Isom(X)$$

sa résolvante :

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, s) = A(t) \circ R(t, s) \text{ } et \text{ } R(s, s) = I_{X.}$$

Définition 3.5 *Quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on appelle l'opérateur*

$$C(s) := R(s + T, s)$$

opérateur de monodromie (au point s).

proposition 3.8 *Les opérateurs de monodromie sont tous conjugués. Pour qu'il existe une solution T-périodique non triviale de l'équation différentielle, il faut et il suffit que 1 soit valeur propre de ces opérateurs.*

Théorème 3.7 ***((Floquet-Lyapunov)***

Si X est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $A \in C(\mathbb{R}, \pounds(X))$ est T-périodique, il existe une application T-périodique $Q : \mathbb{R} \to Isom(X)$ et $B \in \pounds(X)$ telle que u est solution de

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

si et seulement si

$$t \to v(t) := Q(t)u(t)$$

est solution de

$$\frac{dv}{dt} = Bv.$$

Remarque 3.4 *Dans le cadre de ce théorème, on a inversement*

$$u(t) = P(t)v(t),$$

avec

$$P(t) = Q(t)^{-1} = R(t, 0)e^{-tB}.$$

La version réelle du théorème est le

Théorème 3.8 ***(Floquet-lyapunov)****[**?**]*

Si X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $A \in C(\mathbb{R}, \pounds(X))$ est T-périodique, il existe une application $2T$-périodique $Q : \mathbb{R} \to Isom(X)$ et $B \in \pounds(X)$ telle que u est solution de

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

si et seulement si

$$t \to v(t) := Q(t)u(t)$$

est solution de

$$\frac{dv}{dt} = Bv.$$

Définition 3.6 *Les valeurs propres des opérateurs de monodromie sont appelées multiplicateurs caractéristiques. Les nombres μ tels que $e^{\mu T}$ est un multiplicateur caractéristique sont appelés exposants de Floquet.*

Théorème 3.9 *Les solutions de*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si les multiplicateurs caractéristiques sont tous de module inférieure ou égale à 1 sont semi-simple.

Toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.

Considérons maintenant l'équation avec terme source :

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t),$$

avec b périodique de même période que A

proposition 3.9 *Si 1 n'est pas dans le spectre des opérateurs de monodromie de l'équation homogène, l'équation avec terme source admet au moins une solution périodique.*

.

Remarque 3.5 *Lorsque $b \equiv 0$ la solution périodique en question est identiquement nulle !*

Théorème 3.10 *Supposons X de dimension finie. Pour que l'équation*

$$\frac{du}{dt}=A(t)u+b(t)$$

avec A et b périodique de même période, admette une solution périodique, il suffit qu'elle admette une solution brnée sur $\mathbb{R}^+$.

Soit P l'application affine définie par

$$P(v) = R(T,0)(v + \int_0^T R(0,s)b(s)ds),$$

où R est la résolvante de l'équation homogène. Toute solution u de l'équation avec teme source vérifie d'après la formule de Duhamel (itérée), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(nT) = P^n(u_0)$$

où

$$u_0 = u(0).$$

Donc s'il existe une solution bornée, c'est qu'il existe $u_0 \in X$ tel que la suite $P^n(u_0)$ soit bornée.

On va raisonner par l'absurde et montrer que la non existence de solutions périodiques empêche $P^n(u_0)$ d'être bornée. S'il n'y a pas de solution périodique c'est que l'opérateur P n'a pas de point fixe. Autrement dit, le vecteur

$$y := R(T,0)\int_0^T R(0,s)b(s)ds$$

n'appartient pas à

$$E := \mathrm{Im}(I_X - R(T,0)),$$

qui est fermé puisqu'on a supposé l'espace de dimension finie. Donc il existe $\varphi \in E^\perp$ tel que $\varphi(y) \neq 0$ (sinon on aurait $y \in (E^\perp)^\perp = \overline{E} = E$). Par construction ceci implique

$$\varphi(v - R(T,0)v) = 0$$

pour tout $v \in X$,

c'est à dire

$$\varphi(v) = \varphi(R(T,0)v)$$

et donc

$$\varphi(v) = \varphi(R(T,0)^n v)$$

pour tout entier n. Or une récurrence facile montre que

$$P^n(v) = R(T,0)^n v + \sum_{k=0}^{n-1} R(T,0)^k y.$$

On déduit

$$\varphi(P^n(v)) = \varphi(v) + n\varphi(y),$$

ce qui n'est pas borné puisque $\varphi(y) \neq 0$.

Remarque 3.6 *En dimension infinie, la même démonstration fonctionne, à condition de supposer*

$$\overline{\mathrm{Im}(I_X - R(T,0))} = \mathrm{Im}(I_X - R(T,O)).$$

Chapitre 4

EQUATIONS AUTONOMES

On revient maintenant à des équations non-linéaires, supposées autonomes c'est à dire de la forme

$$\frac{du}{dt} = f(u), \tag{4.1}$$

où f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U d'un espace de Banach X dans X. On dit qu'une telle fonction f est un champ de vecteurs. L'étude de l'équation différentielle 4.1 revient à l'étude des champs de vecteurs.

4.1 Champs de vecteurs

Définition 4.1 *On appelle intégrale première d'un champ de vecteur f sur U une fonction $E \in C^1(U, \mathbb{R})$ telle que*

$$dE(u) \cdot f(u) = 0$$

qul que soit $u \in U$.

On dit aussi que E est une intégrale première de l'équation différentielle 4.1.

Par définition, quel que soit $u \in C^1(J; U)$ solution de 4.1, si E est une intégrale première de 4.1 alors $E \circ u$ est indépendant de t.

Exemple 4.1 *Le champ de vecteurs associé à la loi de Newton en mécanique est de la forme*

$$f : (x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (v, F(x)).$$

Lorsque F <<dérive d'un potentiel V>> c'est à dire

$$F = -\operatorname{grad} V,$$

alors l'énergie totale

$$E(x, v) = \frac{1}{2}||v||^2 + V(x)$$

est une intégrale première.

La connaissance des intégrales premières est cruciale pour espérer résoudre explicitement l'équation différentielle; et elle est toujours utile pour montrer des propriétés qualitatives de cette équation.

Définition 4.2 *Un champ de vecteurs f est dit complet si et seulement si touts les solutions maximales de 4.1 sont globales, c'est à dire définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

Attention! La régularité d'un champ de vecteurs n'a rien à voir avec le fait qu'il soit complet ou non, comme le montre l'exemple très simple de l'équation de Riccati, où $X = \mathbb{R}$,

$$f(u) = u^2$$

(donc f est analytique!) et les solutions non triviales <<explosent >> en temp fini.

Pour démontrer qu'un champ de vecteurs est complet, on peut faire appel au

Théorème 4.1 *Supposont que pour tout intervalle ouvert borné J, toute solution $u \in C^1(J; U)$ de*

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

soit à valeurs dans un compact K_J de U. Alors le champ f est complet.

Démonstration :

C'est une conséquence du théorème des bouts (théorème II.2), un peu subtile car le compact K_J peut a priori dépendre dangereusement du diamètre de J. En fait, on va appliquer le théorème des bouts à un système (équivalent) augmenté.

Soit $u \in C(J, U)$ une solution maximale de

$$\frac{du}{dt} = f(u).$$

Alors l'application

$$s \in J \to (u, t) = (u(s), s)$$

est une solution maximale du système augmenté :

$$\frac{du}{ds} = f(u),$$

$$\frac{dt}{ds} = 1.$$

Supposons que $\beta = \sup J$ et $\alpha = \inf J$ soient finis. Choisissons $T > \max(\beta, -\alpha)$.

D'après le théorème II.2, la solution maximale (u, t) du système augmenté doit sortir du compact $K_J \times [-T, T]$. Comme u reste dans K_J, c'est que t sort de l'intervalle $[-T, T]$ et donc de J; ce qui est absurde puisque $t = s \in J$.

Donc l'une au moins des bornes de J est infinie. Et en fait les deux le sont. On s'en convaincre aisément en reprenant la démonstration du théorème des bouts : si on avait par exemple $J =]-\infty, \beta[$ avec $\beta < +\infty$, alors, pour tout $\gamma < \beta$ et $T > \max(\beta, -\gamma)$, la solution $(u, t) \in C^1(]\gamma, \beta[)$ du système augmenté devrait sortir du compact $K_{]\gamma,\beta[} \times [-T, T]$ lorsque $s \nearrow \beta$, ce qui est impossible.

En dimension finie, vérifier les hypothèses de ce théorème revient simplement à trouver des estimations a priori, c'est à dire une majoration des solutions sur les intervalles bornés.

Exemple 4.2 *Le champ de vecteurs de la mécanique*

$$f : (x, \upsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (\upsilon, -\operatorname{grad} V(x))$$

est complet pourvu que V soit une fonction positive.En effet, rappelons que

$$E(x, \upsilon) = \frac{1}{2}||\upsilon||^2 + V(x)$$

est une intégrale première. Si V est positive, si $t \to (x(t), \upsilon(t))$ est une solution de l'équation différentielle associée à f, alors

$$\upsilon(t) = x'(t),$$

d'où

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \upsilon(s)ds,$$

et

$$\frac{1}{2}||\upsilon(s)||^2 \leq E(x(s), \upsilon(s)) = E(x(0), \upsilon(0)),$$

et donc

$$||x(t)|| \leq ||x(0)|| + T\sqrt{2E(x(0), \upsilon(0))}$$

pour $t \in]-T, T[$.

Ainsi la restriction de (x, υ) à tout intervalle borné est à valeurs dans un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^{2n}$.

Donc on peut appliquer le théorème IV.1.

Définition 4.3 *Les trajectoires des solutions maximales de 4.1, c'est à dire les courbes dans X de la forme $\{u(t); t \in J\}$ où $u \in C^1(J; U)$ est une solution maximale de 4.1, sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs f.*

Remarque 4.1 *D'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, les courbes intégrales d'un champ de vecteurs sont deux à deux disjointes!*

4.2 Flot

Les flots locaux ϕ^{t_0} et ϕ^{t_1} d'une équation différentielle autonome 4.1 se déduisent l'un de l'autre par translation. En effet, les applications $t \to \phi^{t_0}(t, v)$ et $t \to \phi^{t_1}(t+t_1-t_0, v)$ sont par définition deux solutions de 4.1 et elle prennentla même valeur v en $t = t_0$, donc elle sont égales.

C'est pourquoi on fixe $t_0 = 0$ une fois pour toutes. On notera désormais

$$\phi_t(v) = \phi^0(t, v).$$

4.2.1 Orbites

Si le champ de vecteurs f est complet, le flot est global, c'est à dire que pour tout $v \in U$, l'appliquation $t \to \phi_t(v)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, l'ensemble

$$\{\phi_t \in C^1(U; U); t \in \mathbb{R}\}$$

muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe commutatif. Eneffet, il contient $I_U = \phi_0$ et en utilisant à nouveau l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz on montre que

$$\phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$$

quels que soient s et t. Cette structure algébrique justifie la définition suivante.

Définition 4.4 *Pour tout $v \in U$ onappelle orbite de v (pour l'équation différentielle 4.1 la courbe intégrale de f passant par v, c'est à dire l'ensemble*

$\{\phi_t(v); t \in J\}$où J est l'intervalle d'existence de ϕ au point v

Bien sûr, les orbites sont deux à deux disjointes.

.

Remarque 4.2 *Si l'on dispose d'une intégrale première E, toute orbite est evidemment incluse dans un ensemble de niveau de E.*

proposition 4.1 *L'orbite d'un point υ est réduite au singleton $\{\upsilon\}$ si et seulement si $f(\upsilon) = 0$.*

Si ce n'est pas le cas et s'il existe $t_0 \neq s_0$ tel que

$$\phi_{t_0}(\upsilon) = \phi_{s_0}(\upsilon)$$

alors $t \to \phi_t(\upsilon)$ est une solution globale périodique et l'orbite de υ est une courbe fermée simple

.

Définition 4.5 *On appelle point stationnaire ou point fixe ou point d'équilibre un point $\upsilon \in U$ dont l'orbite est réduite à $\{\upsilon\}$, ce qui équivaut à ce que le champ de vecteurs s'annule au point υ : on dit aussi que υ est un point singulier du champ de vecteurs.*

Définition 4.6 *On appelle cycle une orbite fermée.*

Définition 4.7 *On appelle orbite hétérocline une courbe intégrale globale $\{\phi_t(\upsilon); t \in \mathbb{R}\}$reliant deux points fixes différents en $+\infty$ et $-\infty$.*

On appelle orbite homocline une orbite $\{\phi_t(\upsilon); t \in \mathbb{R}\}$reliant un même point fixe en $+\infty$ et $-\infty$.

4.2.2 Redressement du flot

Définition 4.8 *On appelle section locale du champ f en un point non singulier y (c'est à dire tel que $f(y) \neq 0$), un ouvert S d'une hypersurface contenant y tel que pour tout $u \in S$, $f(u) \notin T_uS$ (l'espace tangent à S au point u) : on dit que aussi que $f(u)$ est transverse à T_uS.*

En particulier, il existe toujours des sections planes, c'est à dire incluses dans un hyperplan affine. En effet, si $f(y) \neq 0$, il existe un hyperplan (vectoriel) fermé H tel que

$$\mathbb{R}f(y) \oplus H = X.$$

(En dimension infinie, ceci repose sur le théorème de Hahn-Banach) Par continuité de f, l'ensemble $\{u \in U; f(u) \notin H\}$ est ouvert. Donc il existe $r > 0$ tel que pour tout $u \in B(y,r)$ (la boule ouverte de centre y et de rayon r), $f(u) \notin H$. Par conséquent, l'intersection de l'hyperplan affine $y+H$ (dont l'espace tangent en tout point est précisément H) avec $B(y,r)$ est une section locale en y.

Théorème 4.2 ***(de redressement du flot)***

Si

$$\mathbb{R}f(y) \oplus H = X,$$

alors il existe $\tau > 0$ et $r > 0$ tels que

$$S_r := y + H_r$$

avec

$$H_r := \{h \in H; ||h||_X < r\}$$

soit une section locale en y et l'appliquation

$$\Phi :]-\tau, \tau[\times H_r \to \quad ß := \Phi(]-\tau,\tau[\times S_r)$$

$$(t,h) \qquad \to \quad \phi_t(y+h),$$

soit un difféomorphisme. En outre, pour tout $v \in ß$, il existe un unique $t \in]-\tau,\tau[$ tel que $\phi_t(v) \in S_r$.L'ouvert ß est appelé une boîte à flot.

Démonstration :

ON a déjà vu lea première partie. Il s'agit ensuite d'appliquer le théorème d'inversion locale. La fonction Φ est de classe C^1 pour τ et r assez petits. De plus, la différentielle de Φ au point $(0,0)$ est donnée par

$$d\Phi(0,0)\cdot(s,k) = sf(y) + k$$

pour tout $(s,k) \in \mathbb{R} \times H$.

C'est une bijection de $\mathbb{R} \times H$ sur X puisque

$$\mathbb{R}f(y) \oplus H = X,$$

et elle est évidemment continue. Donc sa réciproque est aussi continue d'après le théorème de l'application ouverte : on peut aussi le voir de façon plus <<élémentaire >> (bien qu'il y ait derrière le théorème de Hahn-Banach), en écrivant $H = \ker \varphi$ avec $\varphi \in X'$ tel que

$$\varphi(f(y)) = ||f(y)||^2,$$

de sorte que

$$sf(y) + k = x \Leftrightarrow s = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(y))} f(y).$$

Par conséquent, Φ est un difféomorphisme local, et donc un difféomorphisme de $]-\tau,\tau[\times H_r$ sur son image, quitte à réduire τ et r.

Ceci implique que pour tout $v \in ß$, il existe un unique $(t,h) \in]-\tau,\tau[\times H_r$ tel que

$$\phi_t(y+h) = v,$$

d'où

$$\phi_{-t}(v) = y + h \in S_r.$$

Inversement, si $s \in]-\tau,\tau[$ est tel que

$$\phi_s(v) = y + h' \in S_r,$$

alors

$$v = \phi_{-s}(y + h')$$

et donc $s = -t$ et $h = h'$.

Remarque 4.3 *Le difféomorphisme inverse Φ^{-1} opère un redressement du flot. En effet, l'image réciproque d'un orbite $\{\phi_t(v); t \in]-\tau, \tau[\}$ avec*

$$v = y + h \in S_r$$

n'est autre que le segment de droite $\{(t, h); t \in]-\tau, \tau[\}$.

4.3 Portrait de phases

Définition 4.9 *On appelle portrait de phases d'un champ de vecteurs f, ou de l'équation différentielle associée 4.1, la partition de U en orbites.Obtient des informations sur le portrait de phase ne nécessite pas de phase de savoir résoudre explicitement l'équation différentielle !Le point de départ consiste à repérer les orbite stasionnaire, ce qui revient à résoudre l'équation algébrique*

$$f(v) = 0.$$

On verra plus loin (chapitre V) comment trouver l'allure des orbites au voisinage des points stationnaire (où précisément le théorème de redressement du flot ne s'applique pas!)

Il y a d'autre orbites remarquables à rechercher. La recherche de cycles et d'orbites homocline ou hétérocline est en général non triviale. On verra dans la suite du cours quelques outils pour cela.

4.4

Remarque 4.4 *Si l'on dispose d'une intégrale première E, les orbites sont évidemment incluses dans des ensembles a niveau de E. En dimension finie n, si l'on dispose de $n-1$ intégrales premières indépendantes, les intersections de leurs ensembles ensembles de niveaux forment des courbes, qui fournissent le portrait de phase complet. (C'est une situation idéale et rare!)*

Quoi qu'il en soit, en dimension finie on obtient des informations intéressantes sur l'allure des orbites par une simple étude du signe des composantes du champ de vecteurs.

Les portraits de phase en dimension 1 sont essentiellement triviaux : ils reposent seulement sur le tableau de variations de la fonction f. En dimension supérieure à 3 ils sont difficiles à représenter et d'une grande complexité ... (On en verra une raison profonde avec le théorème de poincaré-Bendixson.)

Il est important de remarquer que le portrait de phases dépend en fait seulement de la direction du champ de vecteurs.

proposition 4.2 *Le portrait de phases d'un champ de vecteurs f. coincide avec le portrait de phases de tout champ de vecteurs de la forme λf ,où $\lambda \in C^1(U; \mathbb{R}^{+*})$.*

Démenstration :

C'est une simple question de changement de paramétrage. Soit $v \in U$ et $u \in C^1(]s_-, s_+[)$ la solution maximale de

$$u'(s) = \lambda(u(s))f(u(s)), \quad u(0) = v.$$

Soit alors

$$T(s) = \int_0^s \lambda(u(\sigma))d\sigma,$$

qui est une fonction strictement croissante puisque λ est par hypothèse à valeurs positives, et soit S la fonction réciproque de T, définie sur

$]t_-, t_+[, \quad$ où

$$t_\pm := \int_0^{s_\pm} \lambda(u(\sigma))d\sigma.$$

On a

$$\frac{d}{dt}u(S(t)) = u'(S(t))\frac{dS}{dt} = \lambda(u(S(t)))f(u(S(t)))\frac{1}{\lambda(u(S(t)))} = f(u(S(t)))$$

et

$$u(S(0)) = u(0) = \upsilon.$$

Donc

$$U = u \circ S$$

est solution du problème de Cauchy :

$$U'(t) = f(U(t)),$$

$$U(0) = \upsilon.$$

De plus, U est maximale. Supposons en effet que l'on puisse prolonger U à $]t_-, t_+ + \varepsilon], \varepsilon > 0$. Prolongeons alors S à $]t_-, t_+ + \varepsilon]$ par

$$S(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda(U(\tau))} > 0.$$

Et on trouve que $U \circ T$ est solution du même problème de Cauchy que u sur l'intervalle $]s_-, s_+ + \eta]$, contenant strictement $]s_-, s_+[$. Cela contrdit le fait que u soit maximale. C'est donc que U est aussi une solution maximale (pour le champ f). Autrement dit, l'orbite de υ sous le champ λf, c'est à dire la courbe

$$\{u(s); s \in]s_-, s_+[\} = \{u \circ S(t); t \in]t_-, t_+[\}$$

est exactement l'orbite de υ sous le champ f.

Remarque 4.5 *Quel que soit le champ de vecteurs* $f \in C^1(U)$, *il existe* $\lambda \in C^1(U;\mathbb{R}^{+*})$ *tel que*

$$g := \lambda f$$

soit complet. En effet, il suffit de poser

$$\lambda(u) := 1/(1 + ||f(u)||^2)$$

car alors

$$g = \lambda f$$

est borné et le théorème IV.1 montre que ce champ g *est complet.*

4.5 Ensemble $\omega-$limite

Dans ce qui suit f est un champ de vecteurs de classe C^1 sur l'espace de Banach X tout entier pour simplifier.

4.5.1 Propriétés générales

Définition 4.10 *Soit* $\upsilon \in X$. *Si l'intervalle* J *de définition de la courbe intégrale de* f *passant par* υ *est tel que* $\sup J = +\infty$, *on appelle ensemble* $\omega-$*limite de* υ *l'ensemble* $L_\omega(\upsilon)$ *les valeurs d'adhérence de* $\{\phi_t(\upsilon)\}$ *lorsque* $t \to -\infty$.

(Ces noms ont été choisi parce que α *et* ω *sont respectivement la première la dernière lettre de l'alphabet grec).*

Exemple 4.3 *-Si* υ *appartient à une orbite hétérocline, alors par définition il existe* υ_- *et* $\upsilon_+ \in U$ *tels que*

$$\lim_{t \to \pm\infty} \phi_t(\upsilon) = \upsilon_\pm.$$

Par conséquent,

$$L_\alpha(\upsilon) = L_\omega(\upsilon) = \gamma.$$

proposition 4.3 *Les ensembles $\omega-$limite et $\alpha-$limite d'un point v sont fermés et invaririants par le flot. Ils sont de plus inclus dans l'ensemble de niveau $\{\omega;\ E(\omega) = E(v)\}$ si E est une intégrale première. Plus généralement, si $F : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et monotone le long des courbes intégrales, les ensembles ω-limite et α-limite sont inclus dans les ensembles de niveau de F.*

Démonstration:

Ces propriétés sont presque contenues dans la définition. Si $\omega \in L_\omega(v)$, il existe une suit t_n tendant vers $+\infty$ telle que $\phi_{t_n}(v)$ tend vers ω. Alors, quel que soit t,

$$\phi_t(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{t+t_n(v)}$$

appartient aussi à $L_\omega(v)$.

Donc cet ensemble est bien invariant par le flot. D'autre part, le complémentaire de l'ensemble ω-limite est par définition l'ensemble des ω tels qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $t_0 > 0$ avec

$$||\phi_t(v) - \omega|| \geq \varepsilon_0$$

pour tout $t \geq t_0$. Or pour un tel ω, on a évidement

$$||\phi_t(v) - z|| \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

pour tout $t \geq t_0$ et pour $z \in B(\omega, \frac{1}{2}\varepsilon_0)$.

Donc le complémentaire de l'ensemble ω-limite est ouvert. Si $F : X \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $t \to F(\phi_t(v))$ soit simplement monotone, alors il existe $a \in [-\infty, +\infty]$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} F(\phi_t(v)) = a.$$

Si $y \in L_\omega(v)$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_{t_n}(v) = y.$$

Par continuité de F, on en déduit

$$a = \lim_{n\to+\infty} F(\phi_{t_n}(v)) = F(y)$$

(en particulier, $|a| < \infty$). Ceci prouve que $L_\omega(v) \subset \{y; F(y) = a\}$.

proposition 4.4 *Soit $v \in X$. Si l'orbite $\{\phi(v)\}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et reletivement compacte, alors $L_\omega(v)$ est compact non vide et connexe.*

Démonstration:

La compacité de $L_\omega(v)$ est quasi-immédiate: c'est un fermé inclus dans le compact

$$\overline{\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}^+\}}$$

.

Il est non vide puisque l'orbite $\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}^+\}$ admet au moins une valeur d'adhérence. La connexite de $L_\omega(v)$ demande un peu plus de travail. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tel que

$$L_\omega(v) \subset U_1 \cup U_2, \quad L_\omega(v) \cap U_i \neq \emptyset$$

Par définition de $L_\omega(v)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc une suite (τ_n) strictement croissante telle que

$$\phi_{\tau_{2n}}(v) \in U_2, \phi_{\tau_{2n+1}}(v) \in U_1.$$

comme l'enssemble $\{\phi_t(v);\ \tau_{2n} \leq t \leq \tau_{2n+1}\}$ est connexe (image d'un connexe par une application continue !), il ne peut être inclus dans $U_1 \cup U_2$. Donc il existe $t_n \in]\tau_{2n}, \tau_{2n+1}[$ tel que $\phi_{t_n}(v) \notin U_1 \cup U_2$. Or la suite $\phi_{t_n}(v)$ admet une valeur d'adhérece $a \in L_\omega(v)$, et cette limite appartient au complémentaire de $U_1 \cup U_2$ (car c'est un fermé). Ceci contredit l'inclusion $L_\omega(v) \subset U_1 \cup U_2$. C'est donc que de tels ouverts U_1 et U_2 n'existent pas, ce qui montre que $L_\omega(v)$ est connexe.

Remarque 4.6 *Inversement, si $L_\omega(v)$ est compact et non vide, l'orbite $\{\phi_t(v);\, t \in \mathbb{R}^+\}$ est relativement compacte, puisqu'elle admet au moins une valeur d'adhérence, et toutes ses valeurs d'adhérence sont incluses dans le compact $L_\omega(v)$.*

4.5.2 Equations dans le plan

Dans $\mathbb{R}^2$, les sections locales "planes" sont des segments de droite, en particulier orientables. De plus, on dispose du

Théorème 4.3 ***(de Jordan)***

Une courbe fermée simple divise le plan en deux régions connexes, l'une bornée et l'autre non bornée.

Grâce à ces deux ingrédients, on peut démontrer le

Théorème 4.4 *Pour un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, tout ensemble ω-limite compact non vide et sans point fixe est un cycle.*

Il existe d'autres versions de ce théorème (sans l'hypothèse <<sans point fixe >> notamment). La démonstration n'est pas difficile mais un peu longue. Elle utilise les résultats préliminaires que voici.

Lemme 4.1 *Si S est une section locale, si (t_n) est une suite croissante telle que*

$$y_n = \phi_{t_n}(v) \in S,$$

alors la suite (y_n) est aussi monotone le long de S, c'est à dire

$$d\acute{e}t(y_{n+1} - y_n, y_n - y_{n-1}) \geq 0.$$

Démonstration :

Il suffit de faire la preuve pour trois points y_0, y_1, y_2. Fixons donc

$$y_0 = \phi_{t_0}(v) \ et \ y_1 = \phi_{t_1}(v)$$

appartenant à S avec $t_0 < t_1$ et $y_0 \neq y_1$. On peut supposer que l'orbite de v ne coupe pas S dans l'intervalle $I := [y_0, y_1]$: si tel était le cas, on remplacerait y_0 par

$$\widetilde{y_0} = \phi_{t_0}(y_1)$$

le premier point appartenant à S en partant de y_1 dans le sens des $t < t_1$, car montrer que y_0, y_1 et

$$y_2 = \phi_t(v), t > t_1$$

sont ordonnés revient à montrer que $\widetilde{y_0}, y_1$ et y_2 le sont.

Soit C la courbe formée de la réunion de I et de $\{\phi_s(v);\ s \in [t_0, t_1]\}$. C'est une courbe fermée, simple grâce à la précaution que l'on a prise et au fait qu'une orbite ne s'intersecte pas elle-même. Donc d'après le théorème IV.3, elle divise le plan en deux composantes connexes.

Soit D celle qui est bornée. Puisque S est une section, le champ f pointe vers le même demi-plan le long de S,et en particulier le long de I. En particulier, il pointe soit vers D soit vers $\mathbb{R}^2 \backslash D$. Quitte à renverser le temps (et échanger y_0 et y_1), on peut supposer qu'on est dans le second cas. Alors D est négativement invariant par le flot, c'est à dire que tout $y \in D$, $\phi_t(y) \in D$ pour $t < 0$. En effet, le flot ne peut sortir ni par I ni par $\{\phi_t(v); t \in [t_0, t_1]\}$. Ceci implique en particulier que $\phi_t(y_1)$ appatient à $\mathbb{R}^2 \backslash D$ pour tout $t > t_1$. De plus, $S \backslash I$ est constitué de deux intervalles I_0 et I_1contenant respectivement y_0 et y_1 dans leur bord. Or on peut joindre tout point de I_0 assez proche de y_0 à $\phi_{-\varepsilon}(y_0)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, point appartenant à D, sans passer par le bord de D, on en déduit que I_0 est dans D. Donc, si $y_2 = \phi_{t_2}(v) \in S$ et $t > t_2, y_2$ appartient nécessairement à I_1.

Corollaire 4.1 *Si S est une section locale, pour tout $v \in U, L_\omega(v) \cap S$ contient au plus un* *point.*

Démonstration :

Supposons que $L_\omega(v) \cap S$ contienne deux points distincts, y_1 et y_2. Soient alors des boîtes à flot disjointes, $V_1 \ni y_1$ et $V_2 \ni y_2$.Comme ces points sont dans $L_\omega(z)$, l'orbite z repasse une infinité de fois dans chacune de ces boîtes, et donc aussi par chacun des intervalles $I_1 = V_1 \subset S$ et $I_2 = V_2 \subset S$. Plus précisément, il existe une suite (t_n), croissante et tendant vers $+\infty$ avec n, telle que $\phi_{t_{2n+1}}(v) \in I_1$ et $\phi_{t_{2n}}(v) \in I_2$. Comme I_1 et I_2 sont disjoints, cesi contredit le lemme IV.1.

Chapitre 5

STABILITE DES SOLUTIONS STATIONNAIRES

On va s'intéresser ici à deux types de stabilité : l'une concernant le comportement asymptotique des

solutions pour les données initiales proches d'une solution stationnaire ; l'autre concernant le portrait de phase autour d'un point fixe lorsqu'on perturbe l'équation (en faisant varier des paramètres par exemple). Dans le premier cas, on parle de stabilité asymptotique (ou de stabilité tout court), que l'on peut étudier grâce à la théorie de Lyapunov. Dans le second cas, on parle de stabilité structurelle, ce qui amène aux notions de variétés stable / instable / centrale et à des problèmes de bifurcations.

5.1 Théorie de Lyapunov

Définition 5.1 *Un point singulier v d'un champ de vecteurs $f \in C^1(U)$ est dit stable s'il existe un voisinage V_0 de v dans U tel que*

i). le flot $\phi_t(\omega)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\omega \in V_0$,

ii).pour tout voisinage W de v dans U, il existe un voisinage $V \subset V_0$ tel que $\phi_t(\omega)$ appartient à W pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\omega \in V$.

Si de plus, on a

iii).pour tout $\omega \in V_0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(\omega) = \upsilon$$

alors le point fixe υ *est dite asymptotiquement stable.*

On dit d'unpoint non stable qu'il est instable.

Concernant la stabilité des équilibres pour les équations linéaires, la proposition III.5 se reformule ainsi.

Théorème 5.1 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Le point 0 est stable pour l'équation*

$$\frac{du}{dt} = Au$$

si et seulement si

i).les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle négative ou nulle,

ii).les valeurs propres imaginaires pures de A sont semi stable

Le point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si

iii). les valeurs propres de A sont toutes de parties réelle strictement négative.

Pour les équations non-linéaire, la stabilité des équilibres est plus délicate à étudier (en dimension finie et a fortiori en dimension infinie). La théorie de Lyapunov repose sur l'existece de fonctions (de Lyapunov !) qui permettent de <<contrôler >> , dans une certaine mesure, le comportement asymptotique des solutions pour des données initiales proches de l'équilibre.

Théorème 5.2 ***(Lyapunov n°1)***

Soit υ *un point d'équilibre du champ* $f \in C^1(U), U$ *étant un ouvert dans un espace de Banach X. On suppose qu'il existe un voisinage* V *de* υ *dans* U *et une fonction* $F \in C^2(V)$, *telle que*

· *le point* υ *est un minimum local de* F, *d'où nécessairement*

$$DF(\upsilon) = 0$$

et de plus il existe $\alpha > 0$ tel que

$$D^2F(v) \geq \alpha Id,$$

·et la fonction F est décroissante le long des orbites issues de V, c'est à dire

$$DF(u) \cdot f(u) \leq 0 \quad \forall u \in V.$$

Alors v est un point d'équilibre stable.

Démonstration :

Soit $\eta_0 > 0$ tel que f soit bornée, disons par M, et lipschitzienne dans la boule $B(v, 2\eta_0) \subset V$. La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz montre que le flot $\phi_t(\omega)$ est défini pour tout $\omega \in B(v, \eta_0)$ et $t \in [0, \tau]$ avec $\tau := \frac{\eta_0}{2M}$.

D'après l'hypothèse sur F et la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe $\eta \leq \eta_0$ tel que

$$F(v+h) - F(v) \geq \frac{\alpha}{4}||h||^2$$

pour tout $h \in X$ avec $||h|| \leq \eta$. Par suite,

$$\inf_{||u-v||=\eta} F(u) \geq F(v) + \frac{\alpha}{4}\eta^2 = m.$$

Par continuité de F,

$$V_n := \{u \in B(v, \eta); F(u) < m\}$$

est un voisinage (ouvert) de v dans U. De plus, si $\omega \in V_n$,

$$F(\phi_t(\omega)) \leq F(\omega) < m$$

pour $t \in [0, \tau]$ et donc $||\phi_t(\omega) - v||$ reste strictement inférieure à $\eta \leq \eta_0$.

En particulier, $\phi_\tau(\omega)$ appartient à $V_n \subset B(v, \eta_0)$. Donc on peut prolonger $\phi_t(\omega)$ à $t \in [\tau, 2\tau]$, et de proche en proche à tout intervalle $[k\tau, (k+1)\tau](k \in \mathbb{N})$,tant en restant dans V_n. en conclusion, pour tout $\omega \in V_n, \phi_t(\omega)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et à valeurs dans V_n.

Définition 5.2 *La fonction F du théorème V.2 est appelée une fonction de Lyapunov.*

Exemple 5.1 *Une intégrale première ayant un minimum locale (au sens stricte de l'énoncé du théorème V.2) en υ est une fonction de Lyapunov !*

Dans les modèles physiques, les fonctions de Lyapunov sont souvent reliée à une énergie.

Remarque 5.1 *En dimension finie, on peut affaiblir l'hypothèse sur F, en demandant que υ soit un minimum local strict sans nécessairement avoir d'estimation de $D^2F(\upsilon)$.*

Si l'on dispose d'une fonction de Lyapunov dotée d'une propriété supplémentaire adéquate, on peut obtenir la stabilté asymptotique de l'équilibre.

Théorème 5.3 ***(Lyapunov n°2)***

Soit υ unpoint d'équilibre du champ $f \in C^1(U), U$ étant un ouvert dans un espace de Banach X. On suppose qu'il existe un voisinage V de υ dans U et une fonction de Lyapunov $F \in C^2(V)$ telle que

·il existe $\beta > 0$ tel que

$$DF(u) \cdot f(u) \leq -\beta(F(u) - F(\upsilon)) \; \forall u \in V.$$

Alors υ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Démonstration :

On sait déjà d'après la preuve du théorème V.2 qu'il existe un voisinage W de υ inclus dans V tel que

$$\phi_t(W) \subset W$$

pour tout $t \geq 0$. L'hypothèse renforcée sur F permet facilement de voir que

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(\omega) = \upsilon$$

pour tout $\omega \in W$. En effet,

$$\frac{d}{dt}(F(\phi_t(\omega)) - F(\upsilon)) = DF(\phi_t(\omega)) \cdot f(\phi_t(\omega)) \leq -\beta(F(\phi_t(\omega)) - F(\upsilon))$$

implique par une intégration immédiate :

$$(F(\phi_t(\omega)) - F(\upsilon)) \leq (F(\omega) - F(\upsilon))e^{-\beta t}.$$

Or

$$F(\phi_t(\omega)) - F(\upsilon) \geq \frac{\alpha}{4}||\phi_t(\omega) - \upsilon||^2$$

par construction de W.

Définition 5.3 *La fonction F du théorème V.3 est applée une fonction de Lyapunov forte.*

Remarque 5.2 *i). Bien sûr, une intégrale première n'est pas une fonction de Lyapunov forte. Cependant, on peut parfois trouver une fonction de Lyapunov forte comme intégrale première d'un système "approché". C'est le cas par exemple pour l'équation du pendule avec amortissement:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0, \;\; k > 0.$$

Soit E l'intégrale première connue pour $k = 0$:

$$E(x, x') = \frac{1}{2}(x')^2 - \cos x.$$

Alors pour une solution du système amorti on a :

$$\frac{d}{dt}E(x(t), x'(t)) = x'(t)(x''(t) + \sin x(t)) = -k(x'(t))^2 < 0$$

pour $x'(t) \neq 0$. La fonction E est donc une fonction de Lyapunov aux points de la forme $(2k\pi, 0)$; ce n'est pas tout à fait une fonction de Lyapunov forte, mais elle parmet de montrer que ces points sont asymptotiquement stables.

ii). Des systèmes admettant une fonction de Lyapunov forte évidente sont les systèmes gradient, de la forme

$$\frac{du}{dt} = -\operatorname{grad} V(u).$$

Si υ est un minimum local strict de V alors V est une fonction de Lyapunov forte au point υ.

Un résultat remarquable de la théorie de Lyapunov, en dimension finie, est l'équivalence de la stabilité asymptotique pour l'équation non linéaire et pour sa version linéarisée au point d'équilibre. Il peut s'énoncer ainsi.

Théorème 5.4 ***(Lyapunov n°3)*** *[3]*

Soit υ un point d'équilibre du champ $f \in C^1(U), U \subset \mathbb{R}^n$.

On suppose que la matrice jaccobienne $Df(\upsilon)$ a toutes ces valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Alors υ est asymptotiqument stable.

On dit aussi en abrégé que la stabilité spectrale (c'est à dire que le spectre du linéarisé est inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda < 0\}$) implique la stabilité non linéaire. C'est un résultat spécifique de la dimension finie, qui équivaut d'après le théorème V.1 à l'assertion suivante. Si υ est un point d'équilibre de f et si 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé autour de ce point d'équilibre :

$$\frac{du}{dt} = Df(\upsilon)u$$

alors υ est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système non linéaire.

Pour démontrer le théorème V.4, on aura besoin du

Lemme 5.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont toutes de partie réelle strictement négative. Alors l'équation*

$$\frac{du}{dt} = Au$$

admet une fonction de lyapunov forte qui est une forme quadratique;

Démonstration :

On commence par "diagonaliser A à ε près", c'est à dire à trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, une matrice $P_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $C_\varepsilon \in M_n(\mathbb{C})$ de norme (subordonnée à la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$) inférieure à ε telle que

$$P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon = D + C_\varepsilon$$

avec D diagonale de coefficients $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ les valeurs pripres de A. Pour cela, il suffit de trigonaliser A de façon particulière : si a est l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on fabrique une base $(e_1, ..., e_n)$ dans laquelle la matrice de a soit une matrice triangulaire supérieure $D + B$, c'est à dire que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$a(e_j) = \lambda_j e_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} e_j,$$

puis on dilate les vecteurs de base en $\widetilde{e}_j = \eta^j e_j$, de sorte que

$$a(\widetilde{e}_j) - \lambda_j \widetilde{e}_j = \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} \eta^{j-i} \widetilde{e}_i.$$

Autrement dit, on a

$$P^{-1} A P = D + C$$

avec P la matrice de vecteurs colonnes $\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_n$ et C la matrice triangulaire supérieure de coefficients $c_{ij} := b_{ij} \eta^{j-i}$ pour $i \leq j - 1$ (et $c_{ij} = 0$ pour $i \geq j$). Cette matrice est de norme inférieure à ε pourvu que $\eta < \min(1, \varepsilon \,/||B||)$.

Soit alors

$$q(u) = u^* Q^* Q u = ||Qu||^2, \qquad Q = P_\varepsilon^{-1}.$$

On a

$$q(0) = 0, \quad Dq(u) \cdot h = u^* Q^* Q h + h^* Q^* Q u, \qquad D^2 q(u) = 2 Q^* Q.$$

Comme Q^*Q est hermitienne définie positive, la fonction q admet bien un minimum local strict en 0 (on a la minoration évidente $Q^*Q \geq \alpha I_n$ avec $\alpha = \min_{||h||=1} ||Qh||^2$). De plus,

$$Dq(u)Au = 2\,\mathrm{Re}(u^*Q^*QAu) = 2\,\mathrm{Re}(u^*Q^*DQu) + 2\,\mathrm{Re}(u^*Q^*CQu).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\mathrm{Re}(u^*Q^*CQu) \leq ||Qu||||CQu|| \leq \varepsilon ||Qu||^2$$

par construction de C. Donc, si $\beta = -\max_j \mathrm{Re}\,\lambda_j$, on a

$$Dq(u)Au \leq -2(\beta - \varepsilon) q(u),$$

ce qui implique que q est une fonction de Lyapunov forte pourvu qu'on ait choisi $\varepsilon < \beta$.

Démonstration [Théorème V.4]

On peut appliquer le lemme V.1 à la matrice jaccobienne $A = Df(v)$.

On a ainsi une forme quadratique

$$q(u) = ||Qu||^2,$$

telle que

$$q(0) = 0, \quad Dq(0) = 0, \quad Dq(0) \geq \alpha I_n$$

et

$$Dq(u)Au \leq -\beta q(u)$$

avec α et $\beta > 0$. Alors

$$F(\omega) = q(\omega - v)$$

définit une fonction de Lyapunov forte pour le champ f; en effet, on a de façon évidente :

$$F(v) = 0, Df(v)(\omega - v) + B(v, \omega) \cdot (\omega - v, \omega - v)$$

où $B(v, \omega)$ est l'application bilinéaire définie par :

$$B(v, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \theta) D^2 f(v + \theta(\omega - v)) d\theta.$$

En particulier, il existe $c > 0$ tel que pour $||\omega - v|| \leq 1$:

$$||B(v, \omega) \cdot (\omega - v, \omega - v)|| \leq c||\omega - v||^2 \leq \frac{2c}{\alpha} ||Q(\omega - v)||^2;$$

Par suite

$$DF(\omega)f(\omega) = 2\,\mathrm{Re}((\omega - v)^* Q^* Q f(\omega))$$

$$= Dq(\omega - v)A(\omega - v) + 2\,\mathrm{Re}((\omega - v)^* Q^* Q B(v, \omega) \cdot (\omega - v, \omega - v))$$

d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$DF(\omega)f(\omega) \leq -\beta F(\omega) + \frac{4c}{\alpha} ||Q|| ||Q(\omega - v)||^3 \leq -(\beta - \frac{4c}{\alpha} ||Q||^2 ||\omega - v||) F(\omega).$$

Pour

$$||\omega - v|| \leq \frac{\alpha\beta}{8c||Q||^2}$$

on a donc

$$DF(\omega)f(\omega) \leq -\frac{\beta}{2} F(\omega).$$

Donc F est une fonction de Lyapunov forte pour f au point v, et l'équilibre v est asymptotiquement stable d'après le théorème V.3.

Pour un "gros" système, il peut parfois être plus facile de trouver une fonction de Lyapunov que de montrer que le système linéarisé a ses valeurs propres sont de partie réelle négative. En dimension infinie, le spectre du linéarisé est encore plus difficile à localiser et il ne suffit pas à prouver la stabilité. La recherche de fonctions de Lyapunov est donc très importante.

5.2 Points fixes hyperboliques

La classification des points fixes pour les équations différentielles linéaires dans le plan montre que les centres (correspondant à une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ avec des valeurs propres imaginaires pures) jouent un rôle particulier, au sens où ils ne sont pas structurellement stables : une modification arbitrairement petite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad en \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $|\alpha| << 1$ modifie dramatiquement le portrait de phase au voisinage de 0! Ces points sont les prototypes de points fixes non hyperboliques.

Définition 5.4 *Un point singulier v du champ f est dite hyperbolique si le spectre de l'opérateur $Df(v)$ n'intersecte pas l'axe imaginaire.*

Les points fixes hyperboliques sont précisément ceux qui sont structurellement stables, au sens topologique du terme.

C'est l'objet du théorème suivant, que nous admettrons;

Théorème 5.5 ***(Hartman-Grobman)***

Si v est un point fixe hyperbolique de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

avec $f \in C^1(U), U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage V de v dans U, un voisinage O de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme h de V sur O tel que le flot $\phi_t(\omega)$ vérifie :

$$h(\phi_t(\omega)) = e^{tDf(v)}h(\omega)$$

pour tout $\omega \in V$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(\omega)$ soit bien défini.

Ce théorème signifie que l'on peut déformer continûment les orbites au voisinage de υ pour obtenir les orbites du système linéarisé

$$\frac{du}{dt} = Df(\upsilon)(u - \upsilon),$$

et réciproquement. Il ne dit rien sur les propriétés de nature différentielle (tangentes, convexité, etc.) de ces courbes. En particulier, il ne fait pas la distinction entre les différentes sortes noeuds en dimension 2.

Le théorème dit de la variété stable si-après ne fait pas non plus de distinction entre ces points, mais il donne des informations sur les propriétés différentielles des orbites, souvent utiles dans les applications.

Théorème 5.6 ***(de la variété stable locale)***

Si υ est un point fixe hyperbolique de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

(avec $f \in C^1(U), U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$), dont le flot est noté $\phi_t(\omega)$, il existe un voisinage V de υ dans U tel que les ensembles

$$W^s_{loc} = \{\omega \in V; t \to \phi_t(\omega) \in C^1_b(\mathbb{R}^+)\},$$

$$W^u_{loc} = \{\omega \in V; t \to \phi_t(\omega) \in C^1_b(\mathbb{R}^-)\}$$

soient des variétés (à bord) contenant υ, tangentes respectivement à E^s et E^u, les sous espaces stable et instable de $Df(\upsilon)$, au point υ : autrement dit, W^s_{loc} et W^u_{loc} sont des graphes de fonctions différentiables sur des voisinages de υ dans les sous espaces affines $\upsilon + E^s$ et $\upsilon + E^u$ respectivement, dont la différentielle s'annule en υ.

De plus, W^s_{loc} est positivement invariante par le flot, c'est à dire $\phi_t(W^s_{loc}) \subset W^s_{loc}$ pour tout $t \geq 0$, tandis que $\phi_t(W^u_{loc}) \subset W^u_{loc}$ pour tout $t \leq 0$, et on a

$$W^s_{loc} = \{\omega \in V; \lim_{t\to+\infty} \phi_t(\omega) = \upsilon\}, \qquad W^u_{loc} = \{\omega \in V; \lim_{t\to-\infty} \phi_t(\omega) = \upsilon\}.$$

Définition 5.5 *Les ensembles W^s_{loc} et W^u_{loc} sont applés respectivement variété stable locale et variété instable locale.*

Nous allons voir une démonstration du théorème de la variété stable (locale) à l'aide de la méthode de Lyapunov-Schmidt.

Méthode de Lyapunov-Schmidt

Cette méthode permet de résoudre un problème non linéaire du type

$$F(x, \xi) = 0$$

lorsque le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas, c'est à dire lorsque la différentielle de F par rapport à x n'est pas inversible. Plus précisément, considérons F de la forme

$$F(x, \xi) = Bx - G(x, \xi)$$

pour $(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^p$, où X est un espace de Banach, B est un opérateur cntinu dee X dans un autre espace de Banach Z et $G \in C^1(X \times \mathbb{R}^p; Z)$ est telle que

$$G(0, 0) = 0, \quad \partial_x G(0, 0) = 0$$

La méthode de Lyapunov-Schmidt est fondée sur une conséquence du

Théorème 5.7 ***(de l'application ouverte)***

Si B est une application linéaire continue surjective d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y, alors B est ouverte, c'est à dire pour tout ouvert Ω de $X, B(\Omega)$ est un ouvert de Y. Par suite, si B est bijective, son inverse B^{-1} est continu.

5.3 Variétés invariantes

Plus généralement, on peut trouver des variétés invariantes par le flot d'une équation différentielle en séparant de façon arbitraire le spectre de l'équation linéarisé : ceci ne demande plus d'hyperbolicité du point fixe !

De plus, on peut construire des << variétés globales >>, définies comme des graphes de fonctions définies sur des sous espaces entiers (invariants par l'équation linéarisée), à condition que la partie non linéaire du champ de vecteurs soit globalement assez petite.

C'est l'objet du résultat suivant, que l'on admettera mais dont on montrera comment il implique en particulier le théorème V.6.

Théorème 5.8 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n), \upsilon \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$f(\upsilon) = 0,$$

et E^-, E^+ *des sous espaces supplémentaires dans* $\mathbb{R}^n$*, invariants par*

$$A := Df(\upsilon)$$

tels que

$$\sigma(A_{|E^-}) \subset \{\lambda; \operatorname{Re}\lambda \leq -\beta\}, \quad \sigma(A_{|E^+}) \subset \{\lambda; \operatorname{Re}\lambda \geq \gamma\},$$

où $-\beta < \gamma$ *(sans rien supposer a priori sur leur signe). En notant*

$$g(x) = f(x) - Df(\upsilon) \cdot (x - \upsilon),$$

si $||g||_{C_b^1(\mathbb{R}^n)}$ *est assez petit, il existe un unique* $h \in C^1(E^+; E^-)$ *tel que*

$$h(0) = 0, \quad Dh(0) = 0, \quad \sup_{\xi \in E^+} |||Dh(\xi)||| < +\infty,$$

et le graphe de h *:*

$$W^+ := \{\upsilon + \xi + h(\xi); \xi \in E^+\}$$

soit invariant par le flot ϕ de l'équation différentielle

$$u' = f(u).$$

De plus, pour tout

$$\omega = \upsilon + \xi + h(\xi) \in W^+$$

et pour tout $\gamma' > \gamma$ il existe $C > 0$ tel que

$$||\phi_t(\omega) - \upsilon|| \leq Ce^{\gamma' t}||\xi||.$$

Dans cet énoncé, si les deux paramètres β et γ sont strictement positifs, cela implique en particulier que le point fixe est hyperbolique, et la variété obtenue est précisément la variété instable.

Voyons comment en déduire précisément le théorème V.6. Pour fixer les idées, disons qu'il s'applique pour $||g||_{C_b^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$. En général, on ne peut espérer cette inégalité globale. Cependant on peut s'y ramener, quitte à modifier f, et donc aussi g en dehors d'un voisinage de υ. En effet, il existe une boule $B(\upsilon; \eta)$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\sup_{x \in B(\upsilon;\eta)} |||Dg(x)||| \leq \varepsilon/3, d\prime o\grave{u} \sup_{x \in B(\upsilon;\eta)} ||g(x)|| \leq \eta\varepsilon/3$$

par le théorème des acroissements finis. Soit alors $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$, valant identiquement 1 dans $B(\upsilon; \eta/3)$, identiquement 0 en dehors de $B(\upsilon; \eta)$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} ||\chi(x)|| = 1, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |||D\chi(x)||| \leq 2/\eta.$$

(L'existence d'un tel χ, appelé fonction de troncature est laissée en exercice.)

Considérons $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = Df(\upsilon) \cdot (x - \upsilon) + \widetilde{g}(x), \qquad \widetilde{g} := \chi g.$$

Evidemment on a $\widetilde{f} = f$ dans $B(\upsilon;\eta/3)$, et donc en particulier

$$D\widetilde{f}(\upsilon) = Df(\upsilon).$$

De plus

$$|||D\widetilde{g}(x)||| \leq |||D\chi(x)||| \sup_{x \in B(\upsilon;\eta)} ||g(x)|| + |||Dg(x)||| \leq \frac{2}{\eta}\frac{\eta\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Donc le théorème V.8 s'applique à l'équation différentielle

$$u' = \widetilde{f}(u),$$

dont le flot coincide avec celui de

$$u' = f(u)$$

dans $B(\upsilon;\eta/3)$.

Définition 5.6 *Lorsque $\gamma = 0$ dans l'énoncé du théorème V.8, la variété obtenue W^+ est appelée variété centrale-instable (au point υ) et généralement notée W^{cu}. On obtient la variété centrale-stable W^{cs} par renversement du temps ($t \to -t$). On définit alors la variété centrale (au point υ) par*

$$W^c := W^{cu} \cap W^{cs}.$$

Quite à diminuer ε dans l'énoncé du théorème V.8, on peut démontrer que W^c est le graphe d'une fonction de classe C^1 au dessus de

$$E^c := E^{cu} \cap E^{cs}$$

où E^{cu} et E^{cs} désignent naturellement les espaces tangents respectivement à W^{cu} et W^{cs} au point υ. D'après le théorème V.8, si $\omega \in W_c$, pour tout $\alpha > 0$ il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ||\phi_t(\omega) - \upsilon|| \leq Ce^{\alpha t}.$$

autrement dit, les solutions du problème de Cauchy avec donnée initiale dans la variété centrale W_c ne peuvent croître que de façon modérée (tout en restant à valeurs dans W_c du fait de son invariance par le flot).

Attension, on rappelle que le théorème V.8 ne s'applique qu'aux champs de vecteurs dont la partie non linéaire est assez petite dans $\zeta_b^1(\mathbb{R}^n)$. En fait, on peut démontrer (notamment à l'aide d'une troncature comme ci-dessus), l'existence d'une variété centrale locale.

Théorème 5.9 ***(de la variété centrale locale)***

Si υ eest un point fixe de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

(avec $f \in C^1(U), U$un ouvert de $\mathbb{R}^n$), dont le flot est noté $\phi_t(\omega)$, si E^c, le sous espace centrale de $Df(\upsilon)$, c'est à dire la somme des sous espaces caractéristiques associés aux valeurs propres imaginaires pures de $Df(\upsilon)$, est non triviale, il existe un voisinage V de υ dans U et une variété locale W^c_{loc}, tangente à E^c au point υ, c'est à dire que

$$W^c_{loc} = \{\omega = \upsilon + \xi + h(\xi); \xi \in \Theta \subset E^c\},$$

où Θ est un voisinage de 0 dans E^c et $h : \Theta \to E^s \oplus E^u$ (somme des sous espaces caractéristiques associés au valeurs propres de parties réelles respectivement strictement négatives et strictement positives) est telle que

$$h(0) = 0,\ dh(0) = 0,$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

i). Invariance par le flot : $\forall \omega \in W^c_{loc},\ \ \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_t(\omega) \in V \Rightarrow \phi_t(\omega) \in W^c_{loc}.$$

ii). Lieu des orbites globales proches de υ : $\forall \omega \in V$, si $\phi_t(\omega)$ et défini et à valeurs dans V, $\forall t \in \mathbb{R}$, alors $\omega \in W^c_{loc}$

Attension, ce théorèmee ne prétend pas montrer l'unicité de W^c_{loc} : peut exister plusieurs variétés centrales locales, tangentes à E^c et vérifiant les propriétés i) ii). Un exemple très simple est celui du système

$$x' = x^2,$$

$$y' = -y,$$

dont on peut calculer explicitement les solutions et constater que les orbites sont incluses dans les courbes ayant une équation de la forme

$$y = C\exp(1/x),$$

où C est une constante arbitraire. Le portrait de phase montre ansi une infinité de courbes tangentes à l'axe Ox et vérifiant les propriétés i) ii) : ce sont précisément les graphes de toutes les fonctions de la forme

$$x \to \left\{ \begin{matrix} 0 & x \geq 0, \\ C\exp(1/x) & x < 0 \quad , \end{matrix} \right\}$$

5.4 Introduction aux bifurcations

On va s'intéresser ici aux bifurcations dites de co-dimension 1, c'est à dire concernant des champs de vecteurs dépendant d'un paramètre scalaire et dont le portrait de phase (local) change brutalement lorsque le paramètre traverse une valeur critique. D'après le théorème de Hartman-Grobman, ceci ne peut se produire qu'au voisinage d'un point fixe non hyperbolique. Nous allons donc considérer

$$f : U \times \Lambda \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$(u, \lambda) \qquad\qquad \rightarrow f(u, \lambda),$$

de classe ζ^2 , tel qu'il existe $(u_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda$ pour lequel

$$f(u_0, \lambda_0) = 0$$

et le spectre de $Df((u_0, \lambda_0)$(où D désigne la différentielle partielle par rapport à u) intersecte l'axe imaginaire.

Plus précisément, nous allons nous placer successivemant dans les cas les plus simples :

i). La seule valeur propre imaginaire pure de $Df(\ (u_0, \lambda_0)$ est 0;

ii).La jaccobienne $Df((u_0, \lambda_0)$ admet exactement deux valeurs propres imaginaires pures (et donc forcément conjuguées l'une à l'autre).

Sous les hypothèses $\langle\langle$génériques$\rangle\rangle$, le premier cas correspond à la bifurcation élémentaire dite col-noeud, et le second à une bifurcation de Hopf.

5.4.1 Bifurcation col-noeud

Si $Df(u_0, \lambda_0)$ a seulement 0 comme valeur propre imaginaire pure, alors le système augmenté :

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda), \tag{5.1}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

.admet une variété centrale locale en (u_0, λ_0) de dimension 2; Le système réduit sur cette variété est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = g(x, \lambda), \tag{5.2}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

où l'inconnue x est scalaire,

$$g(0, \lambda_0) = 0$$

et

$$\partial_x g(0, \lambda_0) = 0.$$

Supposons en outre que

$$\partial_\lambda g(0, \lambda_0) \neq 0, \;\; \partial_x g((0, \lambda_0) \neq 0.$$

Pour fixer les idées, on supposera ces deux quantités positives. Dans ce cas, pour $\lambda < \lambda_0$, la fonction $g(\cdot, \lambda)$ ne s'annule pas au voisinage de 0, pour $\lambda = \lambda_0$ elle s'annule en deux points de signes opposés. Plus précisément, au voisinage de $(0, \lambda_0)$ dans le plan $\{(0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2\}$, l'ensemble des zéros de g est une courbe, tangente à l'axe Ox en $(0, \lambda_0)$, avec la concavité tournée vers $\lambda > \lambda_0$. le portrait de phase du système 5.2 est particulièrement simple à tracer, car sur les droites d'équation $\lambda =$constante, il se ramène au portrait de phase avec le paramètre (λ) en abscisse, voir la figure V.1.

Le nom de cette bifurcation provient du portrait de phase de l'équation scalaire

$$\frac{dx}{dt} = g(x, \lambda)$$

augmentée d'une équation hyperbolique, par exemple

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

Le portrait de phase du système plan ainsi obtenu est qualitativement le même que celui du système modèle :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \lambda + \lambda_0$$

,

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

5.4.2 Bifurcation de Hopf

On revient maintenant à un champ f tel que

$$f(u_0, \lambda_0) = 0$$

et l'on suppose que $Df((u_0, \lambda_0)$ admet exactement deux valeurs propres imaginaires pures, $\pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre, et donc $Df(u_0, \lambda_0)$ est inversible. Le théorème des fonctions implicites montre donc que l'ensemble des zéros de f voisins de (u_0, λ_0) est paramétré par λ : il existe une fonction u_*, définie et de classe ζ^2 au voisinage de λ_0, telle que

$$u_*(\lambda_0) = u_0$$

et

$$f(\upsilon, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \upsilon = u_*(\lambda);$$

A nouveau le système augmenté 5.1 admet une variété centrale locale en (u_0, λ_0). Elle est ici de dimension 3, et contient nécessairement la courbe de points fixes $\{(u_*(\lambda), \lambda)\}$. le système réduit sur cette variété se ramène à un système plan dépendant du paramètre λ. C'est pourquoi on suppose dans ce qui suit $n = 2$

Théorème 5.10 ***(bifurcation de Hopf)***

On suppose que $Df(u_*(\lambda), \lambda)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées valant $\pm i\omega$ en λ_0 et dont la partie réelle change de signe en λ_0. Alors trois cas sont possibles au voisinage de λ_0 :

i); le point fixe $u_*(\lambda)$ est un centre : le portrait de phase du champ de vecteurs (non linéaire !) $f(\cdot, \lambda)$ est constitué de cycles concentriques;

ii).on a une bifurcation surcritique : pour $\lambda < \lambda_0$, le champ de vecteurs $f(\cdot, \lambda)$ n'admet aucun cycle autour de $u_*(\lambda)$, pour $\lambda > \lambda_0$, il admet exactement un cycle autour (et assez proche) de $u_*(\lambda)$, le diamètre de ce cycle est en $O(\sqrt{\lambda - \lambda_0})$.

iii). on a une bifurcation souscritique : pour $\lambda > \lambda_0$, le champ de vecteurs $f(\cdot, \lambda)$ n'admet aucun cycle autour de $u_*(\lambda)$, et pour $\lambda < \lambda_0$, il admet exactement un cycle autour (et assez proche) de $u_*(\lambda)$; le diamètre de ce cycle est en $O(\sqrt{\lambda_0 - \lambda})$.

La démonstration de ce théorème repose sur la théorie des formes normales, qui sort du cadre de ce cours. Nous nous contenterons d'observer ce qui se passe sur la forme réduite de Poincaré-Andronov :

$$x' = -y + \lambda - x(x^2 + y^2),$$

$$y' = x + \lambda - y(x^2 + y^2).$$

La valeur critique du paramètre est ici évidemment $\lambda = 0$. En passant en coordonnées polaires, ce système se ramène à

$$r' = \lambda r - r^3,$$

$$\theta' = 1,$$

c'est à dire finilement à l'équation scalaire

$$\frac{dr}{d\theta} = \lambda r - r^3.$$

Si $\lambda < 0$ cette équation a un seul point fixe, 0, et si $\lambda > 0$, elle a trois : 0 et $\pm\sqrt{\lambda}$. attention, $\sqrt{\lambda}$ et $-\sqrt{\lambda}$ ne sont pas des points fixes du système du départ, mais $\sqrt{\lambda}$ est précisément le rayon d'un cycle.

Bibliographie

[1] V.Arnold. Equations differentielles ordinaires. *Edition Mir,Moscow, 1974. Champs de vecteurs, groupes à un paramètre, difféomorphismes,flots, systèmes linéaires, stabilités des positions d'équilibre, théorie des oscillations, équations différentielles sur les variétés. Traduit du russe par Djilali Embarek.*

[2] V.Arnold. Chapitres supplementaires de la theorie des equations differentielles ordinaires. *"Mir", Moscow,1984. Translated from the russian by Djilali Embarek, reprint of the 1980 edition.*

[3] Michel Crouzeix and Alain L.Mignot. Analyse numerique des equations differentielles. *Collection mathématique appliquées pour la maitrise. Masson, Paris, 1984.*

,