
Recherche de forme de structures membranaires tendues par minimisation de fonctionnelles

Rabah BOUZIDI*

* *GeM - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique*
2 rue de la Houssinière – B.P. 92208, F-44322 Nantes Cedex 3
Rabah.Bouzidi@univ-nantes.fr

RÉSUMÉ. Cette étude s'intéresse aux méthodes de conception architecturale des structures à base de membranes textiles ; plus particulièrement, à la recherche de formes atteintes par des membranes tendues discrétisées en éléments finis triangulaires. Nous présentons dans un premier temps les approches utilisées pour la recherche de forme des membranes. Ensuite, une méthode basée sur la recherche de forme par minimisation de fonctionnelle est présentée. La fonctionnelle considérée est une densité d'énergie due à une tension uniforme et isotrope sur la surface de la membrane, augmentée d'une énergie de régularisation. Le pilotage de la solution est effectué en imposant des conditions aux limites cinématiques sur les bords de la membrane. La résolution du problème de minimisation est réalisé à l'aide de la méthode du gradient conjugué. L'étude prend en compte les instabilités de la membrane lorsque celle-ci présente des directions de compression.

ABSTRACT. This study focuses on architectural design methods of structures based textile membranes. Specifically, the attained shapes by stretched membranes discretized into triangular finite elements are considered. First, we present the approaches used in form finding, then a method based on functional minimization is proposed. The considered functional is a energy density per unit area due to uniform and isotropic tension augmented by regularization energy. Minimization is performed using the conjugate gradient method. The study is extended to manage correctly of the instabilities of the membrane when it presents compressive stresses.

MOTS-CLÉS : Membrane, Recherche de forme, Architecture, Textile, Conception assistée.

KEYWORDS: Membrane, form finding, Architecture, Textile, Aided design.

1. Introduction

La recherche de forme des structures s'organise autour de deux grands axes : "l'optimisation des structures" et la "recherche de forme" (Kai-Uwe Bletzinger, 2005). La littérature concernant la recherche de forme est abondante ; le lecteur pourra trouver quelques études proches de celle proposées ici dans [(Maurin Bernard, 1998), (Kai-Uwe Bletzinger, 2001), (Bonet J., 2001)]. Le premier axe s'intéresse à la recherche de la forme initiale de la structure moyennant un critère cinématique ou de résistance. Le cadre de l'étude est souvent restreint aux cas des petites transformations. La recherche de forme, quant à elle, s'intéresse à la forme finale que peut atteindre une structure au regard des chargements qui lui sont appliqués. La première méthode est générale et s'applique à toute sorte de structure sous forme de problème inverse. Tandis que la seconde est réservée spécifiquement aux structures faites de membranes et de cables tendues sujettes aux grandes transformations. La formulation de cette dernière conduit à une minimisation de fonctionnelle sous forme de problème direct. Il convient de distinguer clairement les objectifs de ces deux approches.

Les structures membranaires sont caractérisées par le fait que lorsqu'elles sont sollicitées, elles prennent des formes qui les mettent en tension pure sans flexion. Le matériau est ainsi utilisé de façon optimale. Ce phénomène de tension pure des membranes est induit par les conditions d'équilibre local.

La recherche de forme des structures minces s'appuie sur deux méthodes bien connues : le modèle du film de savon qui se formule à l'aide du critère de surface minimale et pour lequel les contraintes se résument en une tension isotrope et uniforme. L'autre approche s'appuie sur les modèles de chaînes suspendues utilisée principalement dans les constructions en maçonnerie. Cette dernière méthode utilise le fait que la géométrie optimale est symétrique par rapport aux efforts de traction et de compression. Une des célèbres réalisations basées sur cette approche est la maquette funiculaire d'Antonio Gaudi pour l'église la Colonia Güell.

2. Le modèle membrane

La membrane est représentée dans son plan par une surface gauche passant par son plan médian. La membrane occupe le domaine S au temps t_0 et le domaine s au temps t ($t > t_0$), avec $S, s \subseteq R^2$). Les vecteurs \vec{X} et \vec{x} marquent les positions de la même particule appartenant à S et s . Ces coordonnées, connues sous le nom de coordonnées Lagrangian pour $(X_i, i = 1, 2, 3)$, et Eulérienne pour $(x_i, i = 1, 2, 3)$, sont liées par une transformation bijective. On introduit les coordonnées curvilignes (ξ^1, ξ^2) pour décrire la surface de la membrane, la troisième dimension n'est pas représentée géométriquement mais prise en compte à travers l'épaisseur notée ξ^3 , ($h/2 \leq \xi^3 \leq h/2$) et supposée uniforme.

Cette description suppose une membrane très fine et l'épaisseur h intervient comme propriété "matérielle" de la membrane et non comme grandeur cinématique.

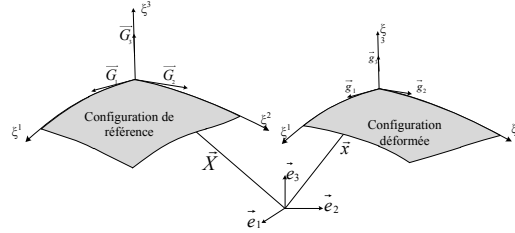


Figure 1. Transformation du repère matériel.

On note la base curviligne $\vec{G}_\alpha = \vec{X}_{,\xi_\alpha}$ dans la configuration initiale, et $\vec{g}_\alpha = \vec{x}_{,\xi_\alpha}$ la base transformée dans la configuration actuelle. Le tenseur métrique de la configuration initiale est défini par $G_{ij} = \vec{G}_i \cdot \vec{G}_j$ et celui de la configuration actuelle par $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$. Le tenseur des déformation de Green-Lagrange se calcul par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \quad [1]$$

Le matériau est supposé hyper-élastique et gouverné par le potentiel élastique quadratique de Saint-Venant - Kirchhoff définissant la densité surfacique de l'énergie de déformation Ψ^{int} , telle que :

$$\Psi^{int} = \frac{h}{2} C^{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad [2]$$

Le comportement est supposé élastique avec $C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{klij}$ et les constantes élastique sont données par $C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk})$. λ et μ sont les constantes de Lamé.

3. Méthodes de recherche de forme

3.1. Méthode de surface minimale

Une membrane tendue de façon uniforme et isotrope entre des bords fixes prend une forme qui minimiserait sa surface. D'un point de vue pratique, de telles membranes sont réalisées à l'aide de films de savon. La tension surfacique assure une rétraction du film tant que la surface du film n'a pas atteint sa valeur minimale. La

méthode de surface minimale consiste à rechercher la forme de la membrane qui rendrait minimale sa surface totale s :

$$s = \int_s ds = \int_S J dS \quad [3]$$

J est de la déterminant du tenseur $\mathbf{F} = \mathbf{x}, \mathbf{X}$. s la surface de la configuration actuelle et S la surface de la configuration initiale. La condition de stationnarité de la surface s'écrit :

$$\delta s = \int_S \delta J dS = J \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} dS = 0 \quad [4]$$

3.2. Méthode des travaux virtuels d'un champ de contraintes imposé

On cherche la forme atteinte par la membrane lorsque celle-ci est tendue par un champ de contrainte connu, représenté par le tenseur de Cauchy σ et imposé en tout point de la membrane. Le champ de contrainte étant connu, on cherche le champ position \mathbf{x} qui placerait la structure en position d'équilibre sous l'effet du champ de contrainte. Le principe des travaux virtuels permet d'écrire la forme variationnelle de l'équilibre :

$$\delta w = h \int_s \sigma : \delta \mathbf{u},_x ds \quad [5]$$

Avec $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. On montre que :

$$\delta \mathbf{u},_x = \delta \mathbf{u},_X \cdot \mathbf{X},_x = \delta \mathbf{x},_X \cdot \mathbf{X},_x = \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

Il s'ensuit que lorsque le champ de tension σ est isotrope $\sigma = \tau \mathbf{I}$:

$$\delta w = h\tau \int_s \mathbf{I} : \delta \mathbf{u},_x ds = h\tau \int_S \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} dS \quad [6]$$

On retrouve l'équation issue de la condition de surface minimale établie dans la formule [4]. On peut définir un pseudo potentiel hyperélastique Π^s dont le minimum traduit la condition d'équilibre de la surface.

$$\Psi^s = h\tau s \quad [7]$$

Ce résultat montre l'équivalence, dans le cas d'un champ de contrainte isotrope, de l'approche par surface minimale et celle des travaux virtuels.

4. Régularisation des méthodes de recherche de forme

Le problème de la recherche de forme consiste à trouver le champ position \mathbf{x} qui rendrait minimal Ψ_s pour tout déplacement $\delta\mathbf{x}$. Cette méthode présente la particularité d'être singulière pour des degrés de liberté s'inscrivant dans le plan de la membrane. Afin d'éviter la dégénérescence du maillage il convient de régulariser le problème en limitant les déplacements dans le plan de la membrane. Il existe plusieurs méthodes qui permettent de régulariser le problème. L'une d'elles consiste à projeter les déplacements obtenus à chaque itération suivant la normale à la membrane. Dans notre cas, nous avons adjoint à la quantité à minimiser Ψ_s , l'énergie de déformations de la membrane Π^{int} . Ceci permet de maintenir la structure du maillage tant qu'on est loin de la forme optimale. Néanmoins, à l'approche de la solution, cette énergie doit être désactivée afin que la forme obtenue ne soit pas déviée par l'énergie élastique de la membrane.

Par ailleurs les bords libres de la membrane se rétractent dans le plan de celle-ci jusqu'à ce que sa surface s'annule. Ils doivent être soit fixés soit bordés par ces câbles élastiques empêchant la rétraction de la membrane sur elle-même. Leur énergie de déformation est notée Ψ_c

La fonctionnelle à minimiser quantifie l'énergie potentielle totale de la structure. Elle est de la forme :

$$\Psi_{tot} = \Psi_s + \Psi_{int} + \Psi_c \quad [8]$$

4.1. Relaxation de l'énergie de déformation

Afin de garantir l'évanescence de l'énergie élastique de membrane, nous avons modifié le tenseur des déformations définissant Ψ_{int} par la mise à jour de la configuration de référence à chaque itération. La formule [1] est modifiée en remplaçant le tenseur métrique de référence \mathbf{G} par celui de la configuration obtenue à l'itération $i - 1$:

$$E_{kl}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(g_{kl}^{(i)} - g_{kl}^{(i-1)} \right) \quad [9]$$

Avec $g_{kl}^{(0)} = G_{kl}$. A la convergence, les deux tenseurs métriques $g_{kl}^{(i)}$ et $g_{kl}^{(i-1)}$ tendent l'un vers l'autre, ce qui annule l'énergie de déformation Ψ_{int} , activée dans le seul but de régulariser le problème.

4.2. Principe du minimum de l'énergie potentielle

L'équilibre de la structure est établi par le principe du minimum de l'énergie potentielle totale. La structure se déforme sous l'action du chargement à une position actuelle qui rendrait minimale son énergie potentielle totale. Ce principe suppose l'existence de l'énergie potentielle et que les systèmes des forces interne et externe sont conservatifs. Il exclut de fait les forces dissipatives.

L'énergie potentielle totale Π^{tot} est stationnaire à la configuration d'équilibre \vec{x} . La recherche de la solution se fait soit par des méthodes de minimisation du premier du premier ordre tel que le gradient conjugué, ou bien des méthodes du second ordre telles que les méthodes newtonniennes ou quasi-newtonniennes. Ces méthodes sont basées sur le développement en série de Taylor de l'énergie :

$$\delta\Pi^{tot} = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{1}{2}\delta\vec{U}\frac{\partial^2\Pi^{int}}{\partial\vec{x}^2}\delta\vec{x} + O(\delta\vec{x})^3 \quad [10]$$

$$= \vec{\nabla}\Pi\delta\vec{x} + \frac{1}{2}\delta\vec{x}\mathbf{K}_0\delta\vec{x} + O(\delta\vec{x})^3 \quad [11]$$

Les méthodes du premier ordre recherchent la solution par des algorithmes à directions de descente orientées suivant la direction opposée du gradient du potentiel $\vec{\nabla}\Pi$ ou par des gradients approchés. Ce type d'algorithme converge dans tous les cas vers un minimum lorsque celui-ci existe. l'inconvénient principal de cette méthode est que sa convergence est linéaire.

Les méthodes du second ordre de type quasi-newtonien, sont préférables à celles du premier ordre pour leur convergence quadratique. Néanmoins ces méthodes perdent leur avantage lorsque la matrice de rigidité est mal conditionnée dans le cas d'une perte significative de la rigidité. Dans cette situation, les méthodes de premier ordre prennent un avantage en ce que l'algorithme fonctionne bien, même si les points critiques existent et rendant la matrice de rigidité singulière.

Nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué pour obtenir la position d'équilibre. Cette méthode utilise uniquement le vecteur gradient de l'énergie potentielle totale et ne nécessite pas de traitement spécifique des modes hypostatiques. Les développements numériques sont implémentées dans le code Surface Evolver développé par K. Brakke "<http://www.susqu.edu/brakke/evolver/evolver.html>".

5. Application

A titre d'illustration de la méthode, nous considérons le problème de recherche de forme d'une structure rectangulaire $2l \times 4l$ dans le plan (x, y) . Elle est bloquée aux 8 points d'ancrage et entourée par des cables sur les bords libres. On impose également

à deux lignes de noeuds, $y = l$ et $y = 3l$, de respecter une équation parabolique de la forme $z = 6l * x * (x - 2l)$, avec $l = 0.5m$.

Les données du problème considéré sont les suivantes :

- Pour la membrane : Tension de surface $\tau = 1 Pa$; Module d'Young $5.10^5 Pa$; Coefficient de Poisson 0.3 ; épaisseur $10^{-4} m$.
- Pour les cables : Module d'Young x section $ES = 10N$
- Maillage : 1601 noeuds, 3072 éléments finis triangulaires.

La figure [figure 2] montre le maillage utilisé ainsi que les conditions aux limites en déplacements imposées.

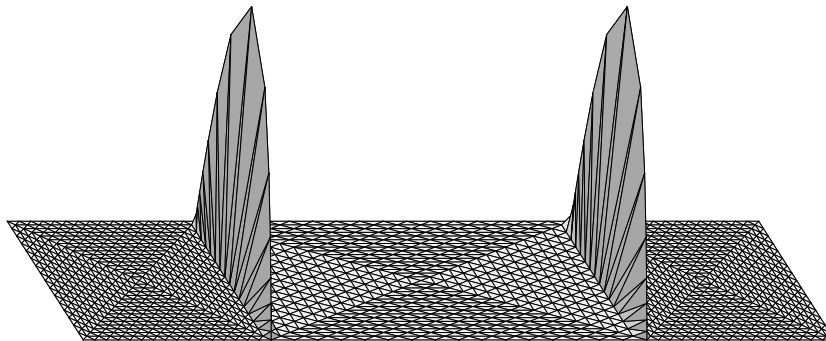


Figure 2. *Maillage initial après chargement en déplacements.*

La figure [figure 3] montre le maillage obtenu par minimisation de la fonctionnelle Π^{tot} sans relaxation de l'énergie de déformation de la membrane Π^{int} . La configuration déformée à ce stade de calcul comporte des plis dus à l'instabilité liée à la compression de la membrane suivant certaines directions.

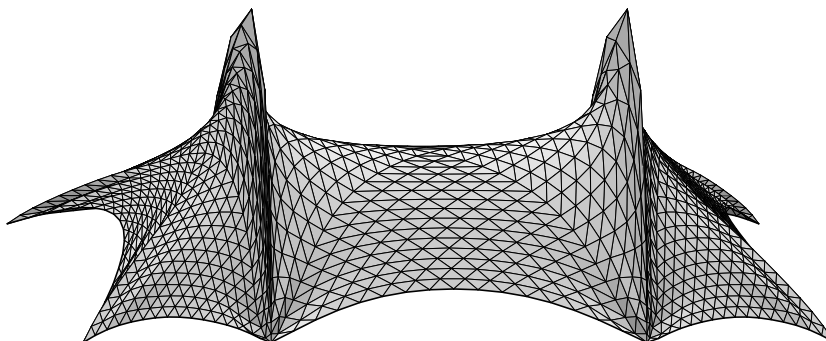


Figure 3. *Maillage déformé avec énergie élastique non relaxée.*

La relaxation de l'énergie de déformation de façon itérative permet de ramener progressivement le champ des contraintes à un champ homogène et isotrope $\sigma = \tau \mathbf{I}$. La figure [figure 4] montre la forme obtenue après relaxation de Π^{int} .

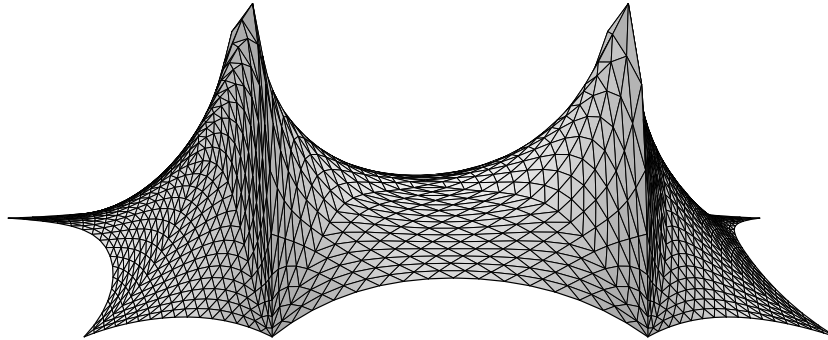


Figure 4. Maillage déformé avec énergie élastique relaxée.

6. Conclusions

Cette étude montre que la méthode proposée ici, qui consiste à relaxer l'énergie élastique de la membrane par actualisation du tenseur métrique de la configuration de référence, est une méthode efficace dans la recherche de forme des structure membranaires. La méthode du gradient conjuguée a également montré son efficacité dans le traitement de modèles hypostatiques ainsi que les instabilités liées aux membranes. En effet le modèle mécanique est une membrane pure sans rigidité de flexion. C'est précisément cette propriété des membranes qui est traduite ici en critère de recherche de forme optimale.

7. Bibliographie

- Bonet J. M. J., « Form finding of membrane structures by the updated reference method with minimum mesh distortion », *Int. Journal of solids and structures*, vol. 38, p. 5469-5480, 2001.
- Kai-Uwe Bletzinger . a., « Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 194, p. 3438-3452, 2005.
- Kai-Uwe Bletzinger E. R., « Structural optimization and form finding of light weight structures », *Computers and structures*, vol. 79, p. 2053-2062, 2001.
- Maurin Bernard R. M., « Structural optimization and form finding of light weight structures », *Computers and structures*, vol. 20, n° 8, p. 712-719, 1998.