République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Option : Analyse des Equations aux dérivées partielles et applications

Présentée par

Meghnafi Mustapha

Etude d'une classe de problèmes aux limites quasilinéaires

Soutenue en 2014 devant le jury composé de :

Président	Mohammed Bouchekif	Professeur	Université de Tlemcen
Examinateur	Mahdi Boukrouche	Professeur	Université de Saint Etienne France
Examinateur	Mouffak Benchohra	Professeur	Université de Sidi Bel Abbès
Examinatrice	Djamila Hadj Slimane	Professeur	Université de Tlemcen
Examinateur	Azzedine Lansari	M. C. "A"	Université de Tlemcen
Invité	Abdelkader Lakmeche	Professeur	Université de Sidi Bel Abbès
Directeur de thèse	Mohammed Derhab	Professeur	Université de Tlemcen

Année Universitaire : 2013-2014

Remerciements

Les premiers pas dans la recherche se font rarement seuls et sans aide ni soutien. Mon cas ne fait pas exception et je tiens ici à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Ensuite, je voudrais remercier mon directeur de thèse, le Professeur Mohammed Derhab, pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité, ses compétences scientifiques, son sens de l'orientation et ses qualités humaines notamment, sa patience et sa rigueur sans faille dans la direction de ce travail.

Je tiens à remercier, en cette occasion propice, le Professeur Mahdi Boukrouche qui a accepté de revoir et juger mon travail, ses remarques et ses conseils m'ont été très utiles. Je le remercie encore une fois de m'avoir accueilli durant mes stages annuels dans le laboratoire de mathématiques de Saint- Etienne, ICJ actuellement. c'est un homme de grandes qualités humaines et scientifiques, il est toujours disponible et serviable. sa gentillesse et sa patience envers ses étudiants et ses collègues le distinguent de toute autre personne de son environnement . C'est donc un grand honneur pour moi de le retrouver dans le jury de ma thèse.

Je remercie vivement Monsieur Mohammed Bouchekif, Professeur à l'université deTlemcen, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Que Monsieur Mouffak Benchohra, Professeur à l'université de Sidi Belabès trouve ici l'expression de mes remerciements pour l'intéret qu'il a porté à ce travail. Je le remercie sans cesse pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie vivement Madame Djamila Hadj Slimane, Professeur à l'université de Tlemcen et Monsieur Azzedine Lansari Maître de Conférences à l'université de Tlemcen d'avoir accepté de participer au jury

Je remercie vivement Monsieur Abdelkader Lakmeche, Professeur à l'université de Sidi Belabès, de bien vouloir participer au jury.

Je remercie enfin mes parents, qui m'ont toujours soutenu dans mes études.

Table des matières

Introduction générale

L'objet de cette thèse est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives pour les problèmes aux limites quasilinéaires du type

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = g\left(u\right) \text{ dans } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Concernant le cas $p = 2$, l'opérateur $p-$Laplacian $u \longmapsto -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)'$ est un opérateur linéaire, contrairement au cas $p \neq 2$, cet opérateur est un opérateur elliptique non linéaire.

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour l'étude les problèmes du type (0.1), citons entre autres la méthode variationnelle, la méthode du degré topologique, la methode du tir et la méthode de quadrature qui est notre méthode de travail dans cette thèse.

Cette méthode a été considéré pour la première fois Z. Opial en 1961 (voir [42]), puis par T. W. Laetsh en 1971 (voir [36]) et après par J. Smoller et A. G. Wasserman en 1989 (voir [58]).

Concernant les problèmes aux limites faisant intervenir l'opérateur $p-$ Laplacian, cette méthode a été considéré pour la première fois par M. Otani en 1984 (voir [46]).

Les problèmes aux limites faisant intervenir le $p-$Laplacian joue un rôle important dans certaines applications physiques telles que l'élasticité non linéaire, les problèmes de réaction-diffusion, la glaciologie, la mécanique non-Newtonienne, les fluides dilatants et les fluides pseudo-plastiques.

Cette thèse est organisée comme suit

Dans le premier chapitre, on décrit la méthode de quadrature qui va nous permettre de détecter les solutions positives des problèmes aux limites du type (0.1)

Le chapitre deux est consacré à l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) + c \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence et la multiplicité des solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) - c \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [25] .

Le chapitre quatre est consacré à l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \mu - f\left(u\right) \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{0.4}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction $p-$convexe c'est-à-dire

$$\forall p > 1,\ \forall u > 0,\ \left(p-2\right) f'\left(u\right) - uf''\left(u\right) < 0.$$

et satisfaisant certaines conditions.

Le cinquième chapitre est consacré au nombre exact des solutions positives du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda\left(u^q + u^{-\alpha}\right) \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{0.5}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$, $q > 0$ et $0 \leq \alpha < 1$ sont des paramètres réels positifs.

Le problème (0.5) a été étudié par Zhongli.Wei [63] pour le cas $p = 2$. Le but de ce chapitre est de généraliser les résultats obtenus par Zhongli Wei.

Chapitre 1

Méthode de quadrature

Introduction

Dans ce chapitre on présente une méthode de quadrature qui va nous permettre d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives des problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = g\left(u\right) \text{ dans } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1.1 Régularité des solutions

Definition 1.1 *On entend par solution classique du problème* (1.1), *toute fonction* $u \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ *telle que*

i) $\varphi_p \circ u'$ *est de classe* $C^1\left([0,1]\right)$,

ii) u *est vérifie le problème* (1.1),

iii) $u\left(x\right) \geq 0$, *pour tout* $x \in [0.1]$.

Lemme 1.1 *Soit* u *une solution du problème* (1.1), *alors*

i) u *est de classe* $C^2\left([0,1]\right)$ *si* $1 < p \leq 2$,

ii) u *est de classe* $C^2\left([0,1]\right) \diagdown Z$ *si* $p > 2$,

où

$$Z = \left\{ u \in C^1\left([0,1]\right) : u'\left(x\right) = 0 \text{ et } x \in [0,1] \right\}.$$

Preuve. Voir la proposition 2.1 dans [47]. ■

1.2 Condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions positives

L'objet de cette partie est de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions positives pour le problème (1.1).

Pour cela on a besoin de donner quelques notations et définitions.

On note par

$$S^{+}=\left\{u\in C^{1}\left([0,1]\right):u>0\text{ dans }\left(0,1\right),\,u\left(0\right)=u\left(1\right)=0\text{ et }u'\left(0\right)=E\geq 0\right\}.$$

Soit A^{+} le sous ensemble de S^{+} constitué par les fonctions u satisfaisant :
i) $u'(0)=E>0$,
ii) u est symétique par rapport à $\frac{1}{2}$,
iii) La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

On note par B^{+} le sous ensemble de S^{+} constitué par les fonctions u satisfaisant :
i) $u'(0)=0$,
ii) u est symétique par rapport à $\frac{1}{2}$,
iii) La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $(0,1)$.

On note aussi par $s_{+}(p,E)$ le premier zéro positif de l'équation

$$E^{p}-p'G(u)=0,$$

où $G(u)=\int_{0}^{u}g(s)\,ds$.

Maintenant on définit pour tout $E\geq 0$ et $p>1$ l'application temps T_{+} par

$$T_{+}(p,E)=\int_{0}^{s_{+}(p,E)}\frac{du}{\left[E^{p}-p'G(u)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

On note par

$$D^{+}=\left\{E\geq 0:T_{+}(p,E)<+\infty\right\}$$

Alors on a le résultat suivant

Théorème 1.1 *i) Le problème (1.1) admet une solution dans A^{+}si et seulement si, il existe $E>0$ tel que $E\in D^{+}$ et $T_{+}(p,E)=\frac{1}{2}$ et dans ce cas la solution est unique.*

ii) Le problème (1.1) admet une solution dans B^{+} si et seulement si $T_{+}(p,0)=\frac{1}{2}$ et dans ce cas la solution est unique.

Preuve. Voir le théorème 5 dans [1]. ■

Chapitre 2

Sur le nombre exact des Solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = au^{p-1} - bu^{2p-2} + c \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

Les problèmes du type (2.1) on fait l'objet de nombreux travaux dans les cas unidimensionnel et multidimensionnel.

Dans [10], A. Ambrosetti et G. Mancini ont considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u - f(u) - h(x) \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1_λ}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, $f(0) = f'(0) = 0$, $sf''(s) > 0$ pour $s \neq 0$, $f'(s) \to \pm\infty$ quand $s \to \pm\infty$ et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ de frontière assez régulière $\partial\Omega$. On note par λ_1 et λ_2 la première et la deuxième valeur propre de l'opérateur laplacien Δ.

Les auteurs ont montré que si h est suffisament petit et $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$, le problème (1_λ) admet exactement trois solutions. De plus si λ_2 est simple et h petit, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2 + \varepsilon$, le problème (1_λ) admet exactement cinq solutions.

Dans [8], A. Ambrosetti a considéré le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u - f(u) + h(x) \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2_λ}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, $f(0) = f'(0) = 0$, $sf''(s) > 0$ pour $s \neq 0$,

$\lim\limits_{s\to\pm\infty}\frac{f(s)}{s}=+\infty$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $C^{0,\nu}$ et $h\in C^{0,\nu}(\Omega)$. On note par λ_k la $k^{\text{ième}}$ valeur propre de l'opérateur laplacien Δ.

L'auteur a montré que si $h=0$ et $\lambda>\lambda_1$, le problème (2_λ) admet exactement deux solutions l'une positive u_1 et l'autre négative u_2. De plus si $\lambda>\lambda_1$ avec $\lambda\neq\lambda_k$, alors il existe $\varepsilon_\lambda>0$ tel que si $\|h\|_{L^2}\leq\varepsilon_\lambda$, le problème (2_λ) admet deux solutions.

Dans [52], B. Ruf a considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^3-\lambda u+h(x) \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3_λ}$$

où λ est une constante positive, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ suffisament régulier et h est une fonction donnée.

L'auteur a utilisé la théorie de singularité au sens de H. Whitney et R. Thom pour donner une description complète de la structure des solutions pour le problème (3_λ). Il a indiqué que si $h=0$ et si $\lambda>0$, alors le problème (3_λ) admet seulement trois solutions qui sont $u=0$, $u_1=\sqrt{\lambda}$ et $u_2=-\sqrt{\lambda}$.

Dans [15], H. Berestycki a considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''=\lambda u-f(u) \text{ dans } (0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{4_λ}$$

où λ est un paramètre réel et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et vérifie $f(0)=f'(0)=0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{f(r)}{r}=+\infty$ et la fonction $r\mapsto\dfrac{f(r)}{r}$ est strictement croissante sur $(0,+\infty)$.

Sous ces hypothèses, l'auteur a montré les résultats suivants

- Si $\lambda<\lambda_1$ avec λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $u\mapsto -u''$, alors le problème (4_λ) n'admet que la solution triviale $u=0$.
- Si $\lambda_1<\lambda\leq\lambda_2$ avec λ_2 la seconde valeur propre de l'opérateur $u\mapsto -u''$, le problème (4_λ) admet exactement deux solutions $u=0$ et u_1 avec u_1 strictement positive.

L'auteur a montré que si on change f en $-f$ et si $\lambda<\lambda_1$, le problème (4_λ) admet exactement deux solutions $u=0$ et u_1 avec u_1 strictement positive.

Dans [29], M. Guedda et L. Veron ont considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))'=\lambda\varphi_p(u)-f(u) \text{ dans } (0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

où $\varphi_p(y)=|y|^{p-2}y$, $y\in\mathbb{R}$, $p>1$, λ est un paramètre réel et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 impaire telle que la fonction $r\mapsto g(r)=\dfrac{f(r)}{\varphi_p(r)}$ est croissante sur $(0,+\infty)$ avec $\lim\limits_{r\to 0}g(r)=0$ et $\lim\limits_{r\to+\infty}g(r)=+\infty$.

En utilisant la méthode de quadrature, les auteurs ont montré les résultats suivants

- Si $\lambda<\lambda_1$ avec λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $u\mapsto-(\varphi_p(u'))'$, alors le problème (5_λ) n'admet que la solution triviale $u=0$,

· Si $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$ avec λ_2 la seconde valeur propre de l'opérateur $u \mapsto -(\varphi_p(u'))$, le problème (5_λ) admet exactement deux solutions $u = 0$ et u_1 avec u_1 strictement positive.

L'objet de ce travail est de montrer que les résultats obtenus concernant les solutions positives pour le problème (5_λ) sont différents de ceux qui ont été obtenus par M. Guedda et L. Veron si on remplace la fonction f par une fonction de la forme $b\varphi_p^2(u) - c$ avec b et c deux constantes strictement positives.

Le plan du chapitre est le suivant. Premièrement, on énonce les résultats principaux de ce chapitre. Deuxièment, on donne quelques résultats préliminaires et enfin, on démontre les résultats principaux de ce chapitre.

2.1 Théorème principal

Théorème 2.1 *On suppose que $a > 0$ et $b > 0$. Alors on a les résultats suivants*

(A) Si $1 < p \leq 2$, alors pour tout $c > 0$, le problème (2.1) admet une unique solution positive qui appartient à A^+.

(B) Si $p > 2$ et $a \geq \left(\frac{p-1}{P}\right)(2k(p))^p$, où

$$k(p) = \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}} \text{ converge pour tout } p > 2,$$

alors le problème (2.1) n'admet aucune solution positive.

(C) Si $p > 2$ et $a < \left(\frac{p-1}{P}\right)(2k(p))^p$, alors il existe un réel $c_* > 0$ tel que

i) Si $c > c_*$, le problème (2.1) n'admet aucune solution positive,

ii) Si $c \leq c_*$, le problème (2.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.1 *Considérons l'équation en $s > 0$:*

$$E^p - p'\left(\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} + cs\right) = 0, \tag{2.2}$$

où $p > 1$, $E > 0$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $a > 0$, $b > 0$ et c sont des paramètres réels.

Alors il existe un réel positif

$$E_*(p,c) = \left[\frac{p}{p-1}\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right)\right]^{\frac{1}{p}} \text{ où } \alpha = \left(\frac{a + \sqrt{a^2+4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

tel que

i) Si $E > E_*(p,c)$*, l'équation (2.2) n'admet aucune solution positive,*

ii) Si $E = E_*(p,c)$*, l'équation (2.2) admet une unique solution positive* $s_+(p,c,E_*) = \alpha$*,*

iii) Si $E < E_*(p,c)$*, l'équation (2.2) admet une solution positive* $s_+ = s_+(p,c,E) \in (0,\alpha)$*.*

De plus

1) La fonction $E \to s_+(p,c,E)$ *est de classe* C^1 *dans* $]0, E_*(p,c)[$ *et on a*

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) = \frac{(p-1)\ E^{p-1}}{a\ s_+^{p-1}(p,c,E) - b\ s_+^{2p-2}(p,c,E) + c} > 0,\ \forall E \in \left]0, E_*(p,c)\right[.$$

2) $\lim\limits_{E \to 0^+} s_+(p,c,E) = 0^+$

3) $\lim\limits_{E \to E_*} s_+(p,c,E) = \alpha$

Preuve. Pour tout $p > 1$ et $E > 0$, considérons la fonction

$$s \mapsto \psi(p,c,E,s) = E^p - p'\left(\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} + cs\right)$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,c,E,s) = -p'\left(as^{p-1} - bs^{2p-2} + c\right).$$

L'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,c,E,s) = 0, \text{ admet une unique solution positive } \alpha,$$

de plus

$$\lim_{s \to 0} \psi(p,c,E,s) = E^p \text{ et } \lim_{s \to +\infty} \psi(p,c,E,s) = +\infty$$

Alors on a le tableau de variations suivant

s	0	α	$+\infty$
$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,c,E,s)$	$-$		$+$
$\psi(p,c,E,s)$	$E^p \searrow$	$E^p - p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right)$	$\nearrow +\infty$

Alors on a

i) Si $E > E_*(p,c) = \left[\frac{p}{p-1}\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right)\right]^{\frac{1}{p}}$, l'équation (2.2) n'admet aucune solution positive

ii) Si $E = E_*(p,c)$, l'équation (2.2) admet une unique solution positive α

iii) Si $E < E_*(p,c)$, l'équation (2.2) admet dans l'intervalle $(0,\alpha)$ une unique solution positive $s_+ = s_+(p,c,E)$ qui satisfait

$$E^p - \frac{p}{p-1}\left[\frac{a}{p}s_+^p(p,c,E) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c,E) + cs_+(p,c,E)\right] = 0,\ \forall E \in \left]0, E_*(p,c)\right[\quad (2.3)$$

1) Pour tout $p > 1$ et $c > 0$, considérons la fonction

$$(E, s) \mapsto \psi(E, s) = E^p - p' \left(\frac{a}{p} s^p - \frac{b}{2p-1} s^{2p-1} + cs \right)$$

définie dans $\Omega_+ = (0, E_*) \times (0, \alpha)$, donc $\psi \in C^1(\Omega_+)$ et

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(E, s) = -p' \left(a s^{p-1} - b s^{2p-2} + c \right) < 0 \text{ dans } \Omega_+.$$

On observe que pour tout $0 < E < E_*$ et $c > 0$, $s_+(p, c, E)$ appartient à l'intervalle $(0, \alpha)$ et satisfait

$$\psi(E, s_+(p, c, E)) = 0. \tag{2.4}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction

$$E \mapsto s_+(p, c, E) \text{ est de classe } C^1\left((0, E_*), \mathbb{R}^+\right).$$

En dérivant par rapport à E l'égalité (2.3), on obtient

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p, c, E) = \frac{(p-1) E^{p-1}}{a\ s_+^{p-1}(p, c, E) - b s_+^{2p-2}(p, c, E) + c} > 0, \ \forall p > 1, \forall c > 0 \text{ et } \forall E \in]0, E_*[\,.$$

2) Pour tout $p > 1$ fixé et $c > 0$, la fonction définie dans $(0, E_*)$ par : $E \mapsto s_+(p, c, E)$ est strictement croissante et de plus $s_+(p, c, E) \in (0, \alpha)$.

Alors les deux limites

$$\lim_{E \to 0^+} s_+(p, c, E) = l_0 \text{ et } \lim_{E \to E_*} s_+(p, c, E) = l_* \text{ existent et sont finies et on a } 0 \leq l_0 < l_* \leq \alpha.$$

D'autre part, pour tout $p > 1$ et $c > 0$, la fonction $(E, s) \to \psi(E, s)$ est continue dans $[0, E_*(p, c)] \times [0, \alpha]$.

La fonction $E \mapsto s_+(p, c, E)$ est continue dans $(0, E_*)$ et satisfait la relation (2.4).

Par passage à la limite quand E tend vers 0^+, on obtient

$$0 = \lim_{E \to 0^+} \psi(E, s_+(p, c, E)) = \psi(0, l_0).$$

Donc l_0 est un zéro qui appartient à $[0, \alpha]$ de l'équation $\psi(0, s) = 0$.

Résolvons cette dernière équation par rapport à l_0, on obtient

$$\lim_{E \to 0^+} s_+(p, c, E) = 0^+$$

Ainsi par passage à la limite dans (2.4) quand E tend vers E_*, on obtient

$$0 = \lim_{E \to E_*} \psi(E, s_+(p, c, E)) = \psi(E_*, l_*),$$

donc l_* est un zéro qui appartient à $[0, \alpha]$ de l'équation $\psi(E_*, s) = 0$.

Résolvons cette dernière équation par rapport à l_*, on obtient

$$\lim_{E \to E_*} s_+(p,c,E) = \alpha$$

■

Maintenant pour tout $p > 1$, $c > 0$ et $E \in]0, E_*[$, on définit l'application temps T_+ par

$$T_+(p,c,E) = \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Lemme 2.2 *Pour tout $p > 1$ et $c > 0$, on a*

1) $\lim_{E \to 0^+} T_+(p,c,E) = 0^+$

2) $\lim_{E \to E_*} T_+(p,c,E) = \begin{cases} +\infty & si\ 1 < p \leq 2, \\ (p')^{\frac{-1}{p}} J_+(p,c) & si\ p > 2, \end{cases}$.

où

$$J_+(p,c) = \int_0^{\alpha} \frac{du}{[F(\alpha) - F(u)]^{\frac{1}{p}}} \text{ et } F(u) = \int_0^u f(t)\,dt = \frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu.$$

Preuve. Pour tout $p > 1$ et $c > 0$ et $E < E_*$, on a

1)

$$T_+(p,c,E) = \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{p}} \times$$

$$\times \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\ s_+^p(p,c,E) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c,E) + c\ s_+(p,c,E)\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_+(p,c,E)\quad dt}{\left[\left(\frac{a}{p}\ s_+^p(p,c,E)(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c,E)(1-t^{2p-1}) + c\ s_+(p,c,E)(1-t)\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_+^{p-1}(p,c,E)(1-t^{2p-1}) + \frac{c(1-t)}{s_+^{p-1}(p,c,E)}\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{E \to 0^+} T_+(p,c,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \lim_{E \to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_+^{p-1}(p,c,E)(1-t^{2p-1}) + \frac{c(1-t)}{s_+^{p-1}(p,c,E)}\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \lim_{E \to 0^+} \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_+^{p-1}(p,c,E)(1-t^{2p-1}) + \frac{c(1-t)}{s_+^{p-1}(p,c,E)}\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= 0^+\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned} T_+(p,c,E) &= \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'F(u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{E\to E*} T_+(p,c,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \lim_{E\to E*} \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{\left[F(\alpha) - F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Comme α est racine double de l'équation

$$F(\alpha) - F(u) = 0,$$

alors on peut écrire

$$F(\alpha) - F(u) = (\alpha - u)^2 \phi(u), \text{ avec } \phi(\alpha) \neq 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \lim_{E\to E*} T_+(p,c,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{(\alpha - u)^{\frac{2}{p}} (\phi(u))^{\frac{1}{p}}} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 < p \leq 2, \\ (p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,c) & \text{si } p > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Lemme 2.3 *L'application $E \mapsto T_+(p,c,E)$ est strictement croissante sur $(0, E_*)$.*

Preuve. On a

$$T_+(p,c,E) = \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{p}} \times$$

$$\int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(s_+^p(p,c,E) - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(s_+^{2p-1}(p,c,E) - u^{2p-1}\right) + c\ \left(s_+(p,c,E) - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{p}}\ \tilde{T}_+(s_+(p,c,E)),$$

où

$$\tilde{T}_{+}\left(s_{+}\left(p,c,E\right)\right)=\int_{0}^{s_{+}(p,c,E)}\frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(s_{+}^{p}(p,c,E)-u^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s_{+}^{2p-1}(p,c,E)-u^{2p-1}\right)+c\ \left(s_{+}(p,c,E)-u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

On a

$$\frac{\partial T_{+}}{\partial E}\left(p,c,E\right)=\frac{\partial s_{+}}{\partial E}\left(p,c,E\right)\times\frac{d\ \tilde{T}_{+}\left(s_{+}\left(p,c,E\right)\right)}{d\ s_{+}\left(p,c,E\right)}.$$

Posons $s:=\ s_{+}\left(p,c,E\right)$

$$\begin{aligned}\frac{d\ \tilde{T}_{+}\left(s\right)}{d\ s}&=\frac{d}{ds}\int_{0}^{s}\frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(s^{p}-u^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)+c\ \left(s-u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\&=\frac{d}{ds}\int_{0}^{1}\frac{s}{\left[\frac{a}{p}s^{p}\ \left(1-t^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}s^{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+cs\ \left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt\\&=\frac{1}{p}\int_{0}^{s}\frac{H\left(p,c,s\right)-H\left(p,c,u\right)}{s\left[\frac{a}{p}\ \left(s^{p}-u^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)+c\ \left(s-u\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du,\end{aligned}$$

où

$$H\left(p,c,u\right)=\left(p-1\right)\left(\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}+cu\right).$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,u\right)=\left(p-1\right)\left(bu^{2p-2}+c\right)>0,\forall u>0.$$

Comme H est strictement croissante par rapport à u, il en résulte que

$$H\left(p,c,s\right)-H\left(p,c,u\right)>0.$$

Par suite

$$\frac{d\ \tilde{T}_{+}\left(s\right)}{d\ s}>0.$$

Comme $\frac{\partial s_{+}}{\partial E}\left(p,c,E\right)>0$, on obtient

$$\frac{\partial T_{+}}{\partial E}\left(p,c,E\right)>0,\ \forall p>1\text{ et }\forall E\in\left(0,E_{*}\right).$$

C'est-à-dire l'application $E\mapsto T_{+}\left(p,c,E\right)$ est strictement croissante. ■

Lemme 2.4 *Pour tout $p>2$, on a*

(1) $\lim\limits_{c\to0^{+}}J_{+}\left(p,c\right)=a^{\frac{-1}{p}}k\left(p\right),$

(2) $\lim\limits_{c\to+\infty}J_{+}\left(p,c\right)=0^{+},$

(3) L'application $c\mapsto J_{+}\left(p,c\right)$ est strictement décroissante.

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned}
J_+(p,c) &= \int_0^{\alpha} \frac{du}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \int_0^{\alpha} \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \int_0^{1} \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) + c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to 0^+} J_+(p,c) &= \lim_{c\to 0^+} \int_0^{1} \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) + c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= a^{\frac{-1}{p}} \int_0^{1} \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= a^{\frac{-1}{p}} k(p).
\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to+\infty} \left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}\left(1-t^{2p-1}\right) + c\alpha^{1-p}(1-t)\right] \\
&= \lim_{c\to+\infty} \alpha^{p-1}\left[\frac{\frac{a}{p}(1-t^p)}{\alpha^{p-1}} - \frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right) + c\alpha^{2-2p}(1-t)\right] \\
&= \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b}\right)\left[-\frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right) + \frac{4b^2c(1-t)}{\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)^2}\right].
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{c\to+\infty} \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b}\right) = +\infty$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to+\infty} \left[\frac{a}{p}(1-t^p)\frac{2b}{a+\sqrt{a^2+4bc}} - \frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right) + \frac{4b^2c(1-t)}{\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)^2}\right] \\
&= -\frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right) + b(1-t) > 0, \text{ pour tout } t\in(0,1)
\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{c\to+\infty} \left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}\left(1-t^{2p-1}\right) + c\alpha^{1-p}(1-t)\right] = +\infty.$$

Par suite
$$\lim_{c\to+\infty} J_+(p,c) = 0^+$$

(3) On a
$$\begin{aligned} J_+(p,c) &= \int_0^\alpha \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) + c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)(1-t^{2p-1}) + \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2+4bc}}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Alors
$$\frac{\partial J_+}{\partial c}(p,c) = \frac{-1}{p}\int_0^1 \frac{\frac{-b}{(2p-1)\sqrt{a^2+4bc}}(1-t^{2p-1}) + \left[\frac{2ab\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)+4b^2c}{\sqrt{a^2+4bc}\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)^2}\right](1-t)}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)(1-t^{2p-1}) + \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2+4bc}}(1-t)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt$$

$$= \frac{b}{p\sqrt{a^2+4bc}}\int_0^1 \frac{\left[\frac{1}{(2p-1)}(1-t^{2p-1}) - (1-t)\right]dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2+4bc}\right)(1-t^{2p-1}) + \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2+4bc}}(1-t)\right]^{\frac{p+1}{p}}}$$

Posons
$$L(t,p) = \frac{1}{(2p-1)}\left(1-t^{2p-1}\right) - (1-t).$$

On a
$$\frac{\partial L}{\partial t}(t,p) = 1 - t^{2p-2} > 0, \text{ pour tout } t \in (0,1),$$

Comme
$$L(0,p) = \frac{2-2p}{2p-1} < 0 \text{ et } L(1,p) = 0,$$

on obtient que
$$L(t,p) < 0, \text{ pour tout } t \in (0,1).$$

Ainsi
$$\frac{\partial J_+}{\partial c}(p,c) < 0, \text{ pour tout } p > 2 \text{ et } c > 0.$$

C'est-à-dire l'application $c \mapsto J_+(p,c)$ est strictement décroissante. ■

2.3 Preuve du théorème principal

Preuve de l'assertion (A)

On suppose que $1 < p \leq 2$ et $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$

D'après les lemmes 2.2 et 2.3, on a

• $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+ (p, c, E) = 0^+$,

• $\lim\limits_{E \to E_*} T_+ (p, c, E) = +\infty$,

• $E \mapsto T_+ (p, c, E)$ est strictement croissante.

Donc l'équation de la variable E, $T_+ (p, c, E) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution positive dans $(0, E_*)$.

Par le théorème (1.1), il résulte que le problème (2.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

Preuve de l'assertion (B)

On suppose que $p > 2$ et $a \geq \frac{p-1}{p} (2k (p))^p$.

D'après les lemmes 2.2 et 2.3, on a

• $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+ (p, c, E) = 0^+$,

• $\lim\limits_{E \to E_*} T_+ (p, c, E) = (p')^{\frac{-1}{P}} J_+ (p, c)$,

• l'application $E \mapsto T_+ (p, c, E)$ est strictement croissante.

Donc l'équation de la variable E, $T_+ (p, c, E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0, E_*)$ si et seulement si $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+ (p, c) \geq \frac{1}{2}$.

Maintenant par le lemme 2.4, on a

• $(p')^{\frac{-1}{P}} \lim\limits_{c \to 0} J (p, c) < \frac{1}{2}$,

• $(p')^{\frac{-1}{P}} \lim\limits_{c \to +\infty} J_+ (p, c) = 0$,

• l'application $c \mapsto J_+ (p, c)$ est strictement décroissante.

Donc il n'existe aucun réel $c > 0$ tel que $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+ (p, c) \geq \frac{1}{2}$ et par suite l'équation de la variable E, $T_+ (p, c, E) = \frac{1}{2}$ n'admet aucune solution positive.

Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que le problème (2.1) n'admet aucune solution positive.

Preuve de l'assertion (C)

On suppose que $p > 2$ et $a < \frac{p-1}{p} (2k(p))^p$.

D'après les lemmes 2.2 et 2.3, l'équation de la variable E, $T_+ (p, c, E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $]0, E_*]$ si et seulement si $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+ (p, c) \geq \frac{1}{2}$.

Maintenant par le lemme 2.4, on a

• $(p')^{\frac{-1}{P}} \lim\limits_{c \to 0^+} J_+ (p, c) > \frac{1}{2}$,

• $(p')^{\frac{-1}{P}} \lim\limits_{c \to +\infty} J_+ (p, c) = 0$,

• l'application $c \mapsto J_+ (p, c)$ est strictement décroissante.

Donc il existe un réel $c_* > 0$ tel que

• $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+ (p, c) < \frac{1}{2}$, pour tout $c > c_*$,

- $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p, c_*) = \frac{1}{2}$,
- $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p, c) > \frac{1}{2}$, pour tout $c < c_*$.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p, c, E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $]0, E_*]$ si et seulement si $c \leq c_*$. Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que
i) Si $c > c_*$, le problème (2.1) n'admet aucune solution positive,
ii) Si $c \leq c_*$, le problème (2.1) admet une unique solution positive et de plus elle est A^+.

Chapitre 3

Sur le nombre des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec quotas constant

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' &= a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) - c \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

Les problèmes du type (3.1) ont été étudiés par plusieurs auteurs.

Dans [20], les auteurs ont étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' = au - bu^2 - c \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u > 0 \text{ dans } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1_c}$$

où a, b et c sont des paramètres réels positifs.

En utilisant la méthode de quadrature, ils ont montré les résultats suivants

- Si $a \leq \lambda_1 = \pi^2$, alors le problème (1_c) n'admet aucune solution positive.
- Il existe $c_0 = c_0\left(a,b\right)$ tel que si $c > c_0$, alors le problème (1_c) n'admet aucune solution positive.
- Si $\pi^2 < a < 3\pi^2$ et $c < c_1 = \min\left\{\frac{3\left(a-\pi^2\right)^2}{32b}, \frac{3\left(3a+\pi^2\right)\left(a-\pi^2\right)}{64b}, \frac{6\pi^2}{b}\right\} = \frac{3\left(a-\pi^2\right)^2}{32b}$, alors le problème (1_c) admet au moins une solution positive.
- Si $\pi^2 < a < 2\pi^2$ et $c < c_1$, alors alors le problème (1_c) admet au moins deux solutions positives.

Dans [43], les auteurs ont considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = au - bu^2 - c\theta(x) \text{ dans } \Omega, \\ u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2_c}$$

où a, b et c sont des paramètres réels positifs, Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ avec un bord $\partial\Omega$ de classe C^2 et $\theta : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \alpha < 1$, strictement positive sur Ω avec $\max_{x\in\overline{\Omega}} \theta(x) = 1$ et $\theta(x) = 0$ sur $\partial\Omega$.

En utilisant un argument de perturbation basé sur le théorème des fonctions implicites, ils ont montré les résultats suivants

- Si $a \leq \lambda_1$, où λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec les conditions de Dirichlet, alors le problème (2_c) n'admet aucune solution positive.
- Si $a > \lambda_1$, alors il existe un réel $c_0(a,b)$ tel que si $c < c_0(a,b)$, le problème (2_c) admet une solution positive.
- Si $a > \lambda_1$, alors il existe un réel $c_1(a,b)$ tel que si $c > c_1(a,b)$, le problème (2_c) n'admet aucune solution positive.
- Si $b > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, le problème (2_c) admet exactement deux solutions positives pour $0 \leq c < c_2$, exactement une solution positive pour $c = c_2$ et n'admet aucune solution positive pour $c > c_2$.

Dans [44] , les auteurs ont étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = au^{p-1} - u^{\gamma-1} - c\, h(x) \text{ dans } \Omega, \\ u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3_c}$$

où Δ_p désigne l'opérateur $p-$Laplacien défini par $\Delta_p u := div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$, $p > 1$, $\gamma > p$, a et c sont deux constantes positives, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec un bord $\partial\Omega$ de classe $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ et connexe (si $N = 1,$ on suppose que Ω un interval ouvert borné) $h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $h(x) \geq 0$ pour $x \in \Omega$, $h(x) \neq 0$, $\max_{x\in\overline{\Omega}} h(x) = 1$ et $h(x) = 0$ sur $\partial\Omega$.

En utilisant le principe du maximum et la méthode des sous et sur solution, ils ont montré les résultats suivants

- Si $a \leq \lambda_1(p)$, où $\lambda_1(p)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta_p$ avec des conditions de Dirichlet, le problème (3_c) n'admet aucune solution positive.
- Si $a > \lambda_1(p)$ et c assez grand, alors le problème (3_c) n'admet aucune solution positive.
- Si $a > \lambda_1(p)$, alors il existe $c_0(a) > 0$ tel que si $0 < c < c_0(a)$, le problème (3_c) admet une solution positive u de classe $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfait $u(x) \geq \left(\frac{c\, h(x)}{\lambda_1(p)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.
- Si $a > \lambda_1(p)$, alors il existe $c_1(a) \geq c_0(a)$ tel que pour $0 < c < c_1(a)$, le problème (3_c) admet un maximal des solutions positives et pour $c > c_1(a)$, le problème (3_c) n'admet aucune solution positive.
- Si $c > c_1$, le problème (3_c) n'admet aucune solution positive.

Dans [6], les auteurs ont étudié l'existence des solutions positives faibles du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= am(x)\, u^{p-1} - bu^{\gamma-1} - ch(x) \text{ dans } \Omega, \\ u &> 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4_c}$$

où Δ_p désigne l'opérateur $p-$Laplacien défini par $\Delta_p := div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p > 1$, $\gamma > p$, a et c sont des constantes positives, Ω est domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, avec $\partial\Omega$ de classe $C^{1,\beta}$, $0 < \beta < 1$ et connexe. le poinds m satisfait $m \in C(\Omega)$ et $m(x) \geq m_0 > 0$ pour tout $x \in \Omega$, $\|m\|_\infty = l < \infty$ et $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $h(x) \geq 0$ pour $x \in \Omega$, h ne s'annule pas dans $\overline{\Omega}$, $\max_{x\in\overline{\Omega}} h(x) = 1$ et $h(x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$.

En utilisant le principe du maximum et la méthode des sous et sur solutions, ils ont montré les résultats suivants

· Si $a \leq \lambda_1$, où λ_1 est la première valeur propre du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda m(x)\, |u|^{p-2}\, u \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors le probleme (4_c) n'admet aucune solution positive

· Si $a > \lambda_1$ et $c > \dfrac{(al)^{\frac{\gamma-1}{\gamma-p}} \displaystyle\int_\Omega m(x)dx}{b^{\frac{p-1}{\gamma-p}} \displaystyle\int_\Omega h(x)dx}$, alors le problème (4_c) n'admet aucune solution positive.

· Si $a > \dfrac{\lambda_1(p)}{m_0}$, où $\lambda_1(p)$ est la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta_p$ avec des conditions de Dirichlet, alors il existe $c_0(a, m_0) > 0$ tel que si $0 < c < c_0(a)$, alors le probleme (4_c) admet une solution positive u telle que $u(x) \geq \left(\dfrac{ch(x)}{\lambda_1(p)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

L'objet de ce chapitre est d'amélliorer et de généraliser les résultats obtenus dans [20] .

Notre chapitre est divisé en trois parties. Dans la première, on énonce le résultat principal. La deuxième partie est consacrée à quelques résultats préliminaires et dans la dernière partie, on démontre le résultat principal de ce chapitre.

Proposition 3.1 *Si $a \leq \lambda_1(p)$, alors le problème (3.1) n'admet aucune solution positive, où $\lambda_1(p)$ est la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien.*

Preuve. Soit u une solution positive du problème (3.1). Multiplions l'équation dans (3.1) par u, on obtient

$$-\left(|u'|^{p-2}\, u'\right)' u = au^p - bu^{2p-1} - cu.$$

Par suite

$$-\int_0^1 \left(|u'(x)|^{p-2}\, u'(x)\right)' u(x)\, dx = \int_0^1 \left(au^p(x) - bu^{2p-1}(x) - cu(x)\right) dx.$$

On a
$$-\int_0^1 \left(\left|u'(x)\right|^{p-2} u'(x)\right)' u(x)\,dx = \int_0^1 \left|u'(x)\right|^p dx,$$
il en résulte que
$$\int_0^1 \left|u'(x)\right|^p dx = \int_0^1 \left(au^p(x) - bu^{2p-1}(x) - cu(x)\right) dx. \tag{3.2}$$
En utilisant l'inégalité
$$\int_0^1 \left|u'(x)\right|^p dx \geq \lambda_1(p) \int_0^1 u^p(x)\,dx. \tag{3.3}$$
Alors d'après (3.2) et (3.3), on obtient
$$\lambda_1(p) \int_0^1 u^p(x)\,dx \leq \int_0^1 \left(au^p(x) - bu^{2p-1}(x) - cu(x)\right) dx.,$$
c'est-à-dire
$$(a - \lambda_1(p)) \int_0^1 u^p dx \geq b \int_0^1 u^{2p-1}(x)\,dx + c \int_0^1 u(x)\,dx.$$
Comme $u > 0$ sur $(0, 1)$, $b > 0$ et $c > 0$, on obtient que si $a \leq \lambda_1(p)$, le problème (3.1) n'admet aucune solution positive. ■

Proposition 3.2 *Si $a > 0$, $b > 0$ et $c > \frac{a^2}{4b}$, alors le problème (3.1) n'admet aucune solution positive.*

Preuve. Soit u une solution positive du problème (3.1) et on suppose que $c > \frac{a^2}{4b}$

Pour tout $u > 0$, on pose
$$f(u) = au^{p-1} - bu^{2p-2} - c.$$
L'étude des variations de la fonction f montre que f est strictement négative. Donc par le principe du maximum le problème (3.1) n'admet aucune solution postive. ■

Maintenant on s'interesse à l'existence des solutions positives pour tout $a > \lambda_1(p)$, $b > 0$ et $c < \frac{a^2}{4b}$, alors on a les résultats suivants

3.1 Résultats principaux

Théorème 3.1 *On suppose que $a > \lambda_1(p)$, $b > 0$ et $0 < c < c_* = \left(\frac{2p-1}{p^2}\right) \frac{a^2}{4b}$. Alors on a*

(A) Si $1 < p \leq 2$ et $a > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$, alors il existe un réel $c_0 \in (0, c_*)$ tel que

i) Si $c < c_0$, le problème (3.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

ii) Si $c = c_0$, le problème (3.1) admet exactement deux solutions positives, une dans A^+ et l'autre dans B^+.

(B) Si $1 < p \leq 2$ *et* $\lambda_1(p) < a \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$ *et* $c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$ *alors le problème (3.1) admet deux solutions positives et de plus elles sont dans* A^+.

(C) Si $p > 2$ *et* $a \geq \dfrac{2^{p+1}}{(p-1)^{p-1}}\beta^p\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right)$, *où* $\beta(.,.)$ *est la fonction Béta d'Euler définie par*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \text{ pour tout } x > 0 \text{et } y > 0,$$

alors le problème (3.1) n'admet aucune solution positive.

(D) Si $p > 2$ et $\lambda_1(p) < a \leq \min\left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), 2^p m^p(p)\right]$, où m est défini par

$$m(p) = (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}},$$

alors, le problème (3.1) admet exactement deux solutions positives et de plus elles sont dans A^+.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.1 *Considérons l'équation en* s *dans* $\mathbb{R}_+$

$$E^p - p'\left(\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} - cs\right) = 0 \tag{3.4}$$

où $p > 1$, $E \geq 0$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $a > \lambda_1(p)$, $b > 0$ *et* $0 < c < \frac{a^2}{4b}$ *sont des paramètres réels. Alors, il existe un réel positif*

$$E_*(p,c) = \left[\frac{p}{p-1}\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right)\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{où } \alpha = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0,$$

tel que

1) Si $E > E_*(p,c)$, *l'équation (3.4) n'admet aucune solution positive,*

2) Si $E = E_*(p,c)$, *l'équation (3.4) admet une unique solution positive* $s_+(p,c,E) = \alpha$,

3) Si $E \in [0, E_*(p,c)[$, *l'équation (3.4) admet une solution positive* $s_+ = s_+(p,c,E)$.
De plus

4) La fonction $E \to s_+(p,c,E)$ *est de classe* C^1 *dans* $]0, E_*(p,c)[$ *et on a*

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) = \frac{(p-1)\ E^{p-1}}{a\ s_+^{p-1}(p,c,E) - b\ s_+^{2p-2}(p,c,E) - c} > 0,\ \forall E \in]0, E_*(p,c)[$$

Preuve. Si $E = 0$, on a

$$\frac{a}{p}s^{p-1} - \frac{b}{2p-1}s^{2p-2} - c = 0.$$

Cette équation admet deux racines s_1 et s_2 pour tout $c < \left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}$ où

$$\begin{aligned} s_1 &= \left((2p-1)\left(\frac{\frac{a}{p} - \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - \frac{4bc}{2p-1}}}{2b}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &= s_+\left(p, c\right), \end{aligned}$$

et

$$s_2 = \left((2p-1)\left(\frac{\frac{a}{p} + \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - \frac{4bc}{2p-1}}}{2b}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Donc on prend s_1 qui est le premier zéro positif et le note $s_+\left(p, c\right)$.

Supposons maintenant que $E > 0$. Pour tout $p > 1$ et $0 < c < \left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}$, considérons la fonction Ψdéfinie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$s \to \Psi\left(p, E, s, c\right) = E^P - p'\left(\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} - cs\right)$$

On a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}\left(p, E, s, c\right) = -p'\left(as^{p-2} - bs^{2p-2} - c\right)$$

Cette dernière équation admet deux racines distinctes réelles

$$\gamma = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{et } \alpha = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Alors, on a le tableau de variations suivant

s	0		γ		α		$+\infty$
$\frac{\partial \psi}{\partial S}\left(p, c, E, s\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\psi\left(p, c, E, s\right)$	E^p	$\nearrow$	$\Psi(\gamma)$	$\searrow$	$E^p - p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau, il résulte que

1) Si $E^p - p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right) > 0$, c'est-à-dire $E > E_*\left(p, c\right) = \left[\frac{p}{p-1}\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right)\right]^{\frac{1}{p}}$, l'équation (3.4) n'admet aucune solution positive,

2) Si $E^p - p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right) = 0$, c'est-à-dire $E = E_*(p, c)$, l'équation (3.4) admet une unique solution positive $s_+(p, c, E_*) = \alpha$,

3) Si $E^p - p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + c\alpha\right) < 0$, c'est-à-dire $E < E_*(p, c)$, l'équation (3.4) admet une unique solution positive $s_+ = s_+(p, c, E) \in (\gamma, \alpha)$ qui satisfait

$$E^P - \frac{p}{p-1}\left[\frac{a}{p}s_+^p(p, c, E) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p, c, E) - cs_+(p, c, E)\right] = 0, \tag{3.5}$$

pour tout $E \in [0, E_*[$

4) En dérivant l'équation (3.5) par rapport à E, on obtient

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p, c, E) = \frac{(p-1)\ E^{p-1}}{a\ s_+^{p-1}(p, c, E) - b\ s_+^{2p-2}(p, c, E) - c} > 0, \text{ pour tout } E \in (0, E_*(p, c)).$$

■

Lemme 3.2 *Pour tout $p > 1$ et $0 < c < \left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}$, on a*

1) $\lim_{E\to 0^+} s_+(p, c, E) = s_+(p, c)$

2) $\lim_{E\to E_*} s_+(p, c, E) = \alpha$

Preuve. 1) Supposons que

$$\lim_{E\to 0^+} s_+(p, c, E) = l_0.$$

Par passage à la limite quand E tend vers 0^+ dans (3.5), on obtient

$$\frac{a}{p}l_0^p - \frac{b}{2p-1}l_0^{2p-1} - cl_0 = 0.$$

Donc l_0 est un zéro de l'équation

$$\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-2} - cs = 0,$$

alors

$$l_0 = \left[(2p-1)\left(\frac{a}{p} \pm \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - \frac{4bc}{2p-1}}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Comme la fonction $E \to s_+(p, c, E)$ est strictement croissante, il résulte que

$$\begin{aligned}\lim_{E\to 0^+} s_+(p, c, E) &= \left[(2p-1)\left(\frac{a}{p} - \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - \frac{4bc}{2p-1}}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &= s_+(p, c)\end{aligned}$$

2) La fonction $E \rightarrow s_+(p,c,E)$ est strictement croissante et comme $s_+(p,c,E) < \alpha$.

Alors $\lim\limits_{E \to E_*} s_+(p,c,E) = l_*$ existe et est finie.

Pour tout $p > 1$ et $c \in (0,c_*)$, la fonction $(E,s) \longmapsto \Psi(p,E,s,c)$ est continue dans $(0,E_*) \times [\gamma,\alpha]$.

La fonction $E \longmapsto s_+(p,c,E)$ est continue dans $(0,E_*(p,c))$ et satisfait

$$\Psi(p,E,s_+(p,c,E),c) = 0,$$

c'est-à-dire

$$E^P = \frac{p}{p-1}\left[\frac{a}{p}s_+^p(p,c,E) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c,E) - cs_+(p,c,E)\right]. \tag{3.6}$$

Par passage à la limite quand E tend vers E_* dans (3.6), on obtient

$$\Psi(p,E_*,l_*,c) = 0.$$

Donc l_* est un zéro appartenant à $]\gamma,\alpha]$ de l'équation

$$\Psi(p,E_*,s_+(p,c,E),c) = 0.$$

Résolvons cette dernière équation par rapport à l_*, on obtient

$$\lim_{E \to E_*} s_+(p,c,E) = \alpha$$

■

Maintenant, pour tout $p > 1$, $0 < c < c_*$ et $E \in (0,E_*)$, on définit l'application temps T_+ par :

$$T_+(p,c,E) = \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

On définit aussi pour tout $p > 1$ et $0 < c < c_*$, l'application

$$h_+(p,c) = \int_0^{s_+(p,c)} \frac{du}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Lemme 3.3 *pour tout $p > 1$ et $0 < c < c_*$, on a*

1) $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p,c,E) = h_+(p,c)$

2) $\lim\limits_{E \to E^*} T_+(p,c,E) = \begin{cases} +\infty & si\ 1 < p \leq 2, \\ J_+(p,c) & si\ p > 2, \end{cases}$

où

$$J_+(p,c) = (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{[F(\alpha) - F(u)]^{\frac{1}{p}}} \text{ et } F(u) = \frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu.$$

Preuve. Pour tout $p > 1$ et $0 < c < \left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}$, on a

1)

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to 0^+} T_+(p,c,E) &= \lim_{E\to 0^+} \int\limits_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \lim_{E\to 0^+} \int\limits_0^1 \frac{s_+(p,c,E)\,dt}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c,E)\,t^p - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c,E)\,t^{2p-1} - cs_+(p,c,E)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \int\limits_0^1 \frac{s_+(p,c)}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-1} - cs_+(p,c)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\
&= \int\limits_0^{s_+(p,c)} \frac{du}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= h_+(p,c)\,.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
T_+(p,c,E) &= \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'F(u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_+(p,c,E)}{\left[F(s_+(p,c,E)) - F(s_+(p,c,E)\,t)\right]^{\frac{1}{p}}}dt..
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to E*} T_+(p,c,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \lim_{E\to E*} \int_0^1 \frac{s_+(p,c,E)}{\left[F(s_+(p,c,E)) - F(s_+(p,c,E)\,t)\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{\alpha}{\left[F(\alpha) - F(\alpha t)\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^\alpha \frac{du}{\left[F(\alpha) - F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

comme α est une racine double de l'équation $F(\alpha) - F(u) = 0$, alors on peut écrire

$$F(\alpha) - F(u) = (\alpha - u)^2\,\psi(u)\,,\ \text{avec}\ \psi(\alpha) \neq 0.$$

par suite

$$\lim_{E\to E*} T_+(p,c,E) = (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^\alpha \frac{du}{(\alpha-u)^{\frac{2}{p}} (\psi(u))^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 < p \leq 2, \\ J_+(p,c) & \text{si } p > 2. \end{cases}$$

■

Lemme 3.4 *Pour tout $p > 2$, on a*

1) $\lim\limits_{c\to 0^+} J_+(p,c) = a^{\frac{-1}{p}} m(p)$

2) $\lim\limits_{c\to c_*} J_+(p,c) = a^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right)$

3) l'application $c \longmapsto J_+(p,c)$ est strictement croissante.

Preuve. Pour tout $p > 2$, on a
1)

$$J_+(p,c) = (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^\alpha \frac{du}{[F(\alpha) - F(u)]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^\alpha \frac{dt}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Alors

$$\lim_{c\to 0^+} J_+(p,c) = (p')^{\frac{-1}{P}} \lim_{c\to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= a^{\frac{-1}{p}} (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= a^{\frac{-1}{p}} m(p).$$

2)

$$\lim_{c \to c_*} J_+(p,c) = (p')^{\frac{-1}{P}} \lim_{c \to c_*} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{P}} \lim_{c \to c_*} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{4p-2}(1-t^{2p-1}) - \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= a^{\frac{-1}{p}} \ (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(t-t^p) + \frac{1}{2p}(t^{2p-1}-t)\right]^{\dfrac{1}{p}}}$$

$$= \left(\frac{2}{a(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right).$$

3) on a

$$J_+(p,c) = \int_0^\alpha \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

En faisant le changement de variable $u = \alpha t$, on obtient

$$J_+(p,c) = \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Comme $\alpha = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, alors

$$J_+(p,c) = \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)(1-t^{2p-1}) - \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Donc

$$\frac{\partial J_+}{\partial c}(p,c) = \frac{-1}{p} \int_0^1 \frac{\left[\frac{b}{(2p-1)\sqrt{a^2-4bc}}(1-t^{2p-1}) - \left(\frac{2ab\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)-4b^2c}{\sqrt{a^2-4bc}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)^2}\right)(1-t)\right]dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)(1-t^{2p-1}) - \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}(1-t)\right]^{\frac{p+1}{p}}}$$

$$= \frac{-b}{p\sqrt{a^2-4bc}} \int_0^1 \frac{\left[\frac{1}{(2p-1)}(1-t^{2p-1}) - (1-t)\right]dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)(1-t^{2p-1}) - \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}(1-t)\right]^{\frac{p+1}{p}}}.$$

Posons
$$L(t,p)=\frac{1}{(2p-1)}\left(1-t^{2p-1}\right)-(1-t),$$
on a
$$\frac{\partial L}{\partial t}(t,p)=1-t^{2p-2}>0,\text{ pour tout }t\in(0,1).$$
Comme
$$L(0,p)=\frac{2-2p}{2p-1}<0\text{ et }L(1,p)=0,\text{ on obtient que }L(t,p)<0,\text{ pour tout }t\in(0,1).$$
Ainsi
$$\frac{\partial J_+}{\partial c}(p,c)>0,\text{ pour tout }p>2\text{ et }c<c_*.$$
C'est -à -dire l'application $c\longmapsto J_+(p,c)$ est strictement croissante. ∎

Lemme 3.5 *pour tout $p>1$, on a*

i) $\lim_{c\to0^+}s_+(p,c)=0^+$

ii) $\lim_{c\to c_*}s_+(p,c)=\left[\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{p-1}}$

iii) $\frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c)=\frac{s_+(p,c)}{as_+^{p-1}(p,c)-bs_+^{2p-2}(p,c)-c}>0,\ \forall c\in(0,c_*)$

Preuve. Pour tout $p>1$, on a

i)
$$\lim_{c\to0^+}s_+(p,c)=\lim_{c\to0^+}\left[(2p-1)\left(\frac{\frac{a}{p}-\sqrt{\frac{a^2}{p^2}-\frac{4bc}{2p-1}}}{2b}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}$$
$$=0^+.$$

ii)
$$\lim_{c\to c_*}s_+(p,c)=\lim_{c\to\left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}}\left[(2p-1)\left(\frac{\frac{a}{p}-\sqrt{\frac{a^2}{p^2}-\frac{4bc}{2p-1}}}{2b}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}$$
$$=\left[\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

iii) On a
$$\frac{a}{p}s_+^p(p,c)-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)-cs_+(p,c)=0.$$
En dérivant cette dernière équation par rapport à c, on obtient que
$$\frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c)=\frac{s_+(p,c)}{as_+^{p-1}(p,c)-bs_+^{2p-2}(p,c)-c}>0,\text{ pour tout }c\in(0,c_*).$$

∎

Lemme 3.6 *Pour tout $p>1$, on a*

i) $\lim\limits_{c\to 0} h_+(p,c) = \frac{p}{2(p-1)}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}.$

ii) $\lim\limits_{c\to c_*} h_+(p,c) = \begin{cases} +\infty & si\ 1<p\leq 2, \\ a^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\beta\left(\frac{1}{p},\frac{p-2}{p}\right) & si\ p>2. \end{cases}$

iii) l'application $c\longmapsto h_+(p,c)$ et strictement croissante sur $(0,c_*)$.

Preuve. On a

$$h_+(p,c)=\int_0^{s_+(p,c)}\frac{du}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

En faisant le changement de variable $u=s_+(p,c)\,t$, on obtient

$$h_+(p,c)=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{s_+(p,c)}{\left[-\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-1}-cs_+(p,c)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt.$$

Comme

$$\frac{a}{p}s_+^p(p,c)-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)-cs_+(p,c)=0,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} h_+(p,c)&=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{s_+(p,c)\,dt}{\left[\left(\frac{\frac{a}{p}s_+^p(p,c)-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)}{s_+(p,c)}\right)s_+(p,c)\,t-\frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p+\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-1}\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(t-t^p)+\frac{b}{2p-1}s_+^{p-1}(p,c)\left(t^{2p-1}-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

i) Comme $\lim\limits_{c\to 0^+} s_+(p,c)=0^+$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{c\to 0^+}h_+(p,c)&=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}t-\frac{a}{p}t^p\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &=\left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{dt}{[t-t^p]^{\frac{1}{p}}} \\ &=\left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\pi}{(p-1)\sin\frac{\pi}{p}} \\ &=\frac{p}{2(p-1)}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

ii) Comme $\lim\limits_{c\to c_*} s_+(p,c) = \left(\frac{2p-1}{2p}\left(\frac{a}{b}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to c_*} h_+(p,c) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(t-t^p)+\frac{a}{2p}(t^{2p-1}-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= a^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(t-t^p)+\frac{1}{2p}(t^{2p-1}-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{si } 1<p\le 2, \\ a^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \beta\left(\frac{1}{p},\frac{p-2}{p}\right) & \text{si } p>2. \end{cases}
\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}
h_+(p,c) &= \int_0^{s_+(p,c)} \frac{du}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int\limits_0^1 \frac{s_+(p,c)\,dt}{\left[\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\right)t-\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}t^{2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int\limits_0^1 \frac{s_+(p,c)}{\left[tF(s_+(p,c))-F(s_+(p,c)\,t)\right]^{\frac{1}{p}}}dt,
\end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial h_+}{\partial c}(p,c) = (p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c) \times \int\limits_0^1 \frac{L(t,s_+(p,c))}{p\left[tF(s_+(p,c))-F(s_+(p,c)\,t)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt,$$

où

$$\begin{aligned}
L(t,s_+(p,c)) :\ &= t\ \left[pF(s_+(p,c))-s_+(p,c)\,f(s_+(p,c))\right]+ \\
&\quad -\left[pF(s_+(p,c)\,t)-s_+(p,c)\,tf(s_+(p,c)\,t)\right].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}(t,s_+(p,c)) &= -s_+^2(p,c)\left[(p-2)\,f'(s_+(p,c)\,t)-s_+(p,c)\,tf''(s_+(p,c)\,t)\right] \\
&= -2(p-1)^2\,bs_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-3}<0, \text{ pour tout } t\in(0,1).
\end{aligned}$$

Comme

$$L(0,s_+(p,c)) = L(1,s_+(p,c)) = 0,$$

on obtient

$$L\left(t, s_+\left(p, c\right)\right) < 0, \text{ pour tout } t \in \left(0, 1\right).$$

Comme

$$\frac{\partial s_+}{\partial c}\left(p, c\right) < 0,$$

il résulte que

$$\frac{\partial h_+}{\partial c}\left(p, c\right) > 0, \text{ pour tout } p > 1 \text{ et } c \in \left(0, c_*\right).$$

C'est -à -dire $h_+\left(p, .\right)$ est strictement croissante. ■

Lemme 3.7 *L'application* $E \longmapsto T_+\left(p, \lambda, E\right)$ *admet un unique point critique* E^*.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} T_+\left(p, c, E\right) &= \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(s_+^p(p,c,E) - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(s_+^{2p-1}(p,c,E) - u^{2p-1}\right) - c\ \left(s_+(p,c,E) - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \check{T}_+\left(p, c, s\right), \end{aligned}$$

où

$$s := s_+\left(p, c, E\right) \text{ et } \check{T}_+\left(p, c, s\right) = \int_0^s \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(s^p - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1} - u^{2p-1}\right) - c\ \left(s - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

On a

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}\left(p, c, E\right) = \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p, c, E\right) \times \frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}\left(p, c, s\right).$$

Comme $\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p, c, E\right) > 0$, alors pour étudier les variations de T_+, il suffit d'étudier les variations de $\check{T}_+$.

Maintenant on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}\left(p, c, s\right) &= \frac{d}{ds}\int_0^s \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(s^p - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1} - u^{2p-1}\right) - c\ \left(s - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{d}{ds}\int_0^1 \frac{s}{\left[\frac{a}{p}s^p\ \left(1 - t^p\right) - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1}\left(1 - t^{2p-1}\right) - cs\ \left(1 - t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\ &= \frac{1}{p}\int_0^s \frac{H\left(p, c, s\right) - H\left(p, c, u\right)}{s\left[\frac{a}{p}\ \left(s^p - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1} - u^{2p-1}\right) - c\ \left(s - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}du, \end{aligned}$$

où
$$H\left(p,c,u\right)=\left(p-1\right)\left(\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right).$$
Et par suite, on a
$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,u\right)&=\left(p-1\right)\left(bu^{2p-2}-c\right),\\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\left(p,c,u\right)&=2\left(p-1\right)^2bu^{2p-3}>0,\text{ pour tout }u>0,\\ H\left(p,c,0\right)&=0\text{ et}\lim_{u\to+\infty}H\left(p,c;u\right)=+\infty,\\ \frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,0\right)&=\left(1-p\right)c<0\text{ et}\lim_{u\to+\infty}\frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,u\right)=+\infty.\end{aligned}$$
Alors il existe deux réels $s_1=\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}$ et $s_2=\left(\frac{(2p-1)c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}$ tels que
$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,u\right)&<0\text{ dans }\left(0,s_1\right),\\ \frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,s_1\right)&=0,\\ \frac{\partial H}{\partial u}\left(p,c,u\right)&>0\text{ dans }\left(s_1,+\infty\right),\\ H\left(p,c,u\right)&>0\text{ dans }\left(s_2,+\infty\right),\\ H\left(p,c,s_2\right)&=0,\end{aligned}$$
et
$$H\left(p,c,u\right)<0\text{ dans }\left(0,s_2\right).$$
Par suite, on obtient
$$\begin{aligned}\frac{\partial\check{T}_+}{\partial s}\left(p,c,s\right)&<0,\text{ pour tout }s\in\left(0,s_1\right),\\ \frac{\partial\check{T}_+}{\partial s}\left(p,c,s\right)&>0,\text{ pour tout }s\in\left(s_2,+\infty\right).\end{aligned}$$
D'après ce qui précède on obtient
$$\forall p>1,\ \forall\ 0<c<\frac{2p-1}{p^2}\left(\frac{a^2}{4b}\right),\text{ il existe }s_*\in\left[s_1,s_2\right]\text{ tel que }\frac{\partial\check{T}_+}{\partial s}\left(p,c,s_*\right)=0.$$
Maintenant, on va montrer l'unicité du point critique s_* pour cela on va calculer la dérivée seconde de $\check{T}_+$ par rapport à s.

On a
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{T}_+}{\partial s^2}\left(p,c,s\right)=&\frac{p+1}{p^2}\int_0^s\frac{\left[H\left(p,c,s\right)-H\left(p,c,u\right)\right]^2du}{s^2\left[\frac{a}{p}\left(s^p-u^p\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c\left(s-u\right)\right]^{\frac{2p+1}{p}}}\\ &+\frac{1}{p}\int_0^s\frac{\Psi\left(p,c,s\right)-\Psi\left(p,c,u\right)}{s^2\left[\frac{a}{p}\left(s^p-u^p\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c\left(s-u\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du,\end{aligned}$$

où

$$\Psi(p,c,u) = \frac{(p-1)(p-2)}{2p-1} bu^{2p-1} + p(p-1)u.$$

On a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(p,c,u) = (p-1)(p-2)bu^{2p-2} + p(p-1)$$

Alors si $p \geq 2$, on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(p,c,u) > 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s) > 0.$$

Maintenant, on suppose que $1 < p < 2$, on a

$$s^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s) + s\frac{\partial \tilde{T}_+}{\partial s}(p,c,s) = \frac{p+1}{p^2} \int_0^s \frac{[H(p,c,s) - H(p,c,u)]^2 du}{\left[\frac{a}{p}(s^p - u^p) - \frac{b}{2p-1}(s^{2p-1} - u^{2p-1}) - c(s-u)\right]^{\frac{2p+1}{p}}}$$
$$+ \frac{1}{p}\int_0^s \frac{g(s) - g(u)}{\left[\frac{a}{p}(s^p - u^p) - \frac{b}{2p-1}(s^{2p-1} - u^{2p-1}) - c(s-u)\right]^{\frac{p+1}{p}}} du,$$

où

$$g(u) = (p-1)^2 \left(\frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + cu\right).$$

Comme

$$g'(u) = (p-1)^2 \left(bu^{2p-2} + c\right) > 0.$$

Alors, il résulte que

$$s^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s) + s\frac{\partial \tilde{T}_+}{\partial s}(p,c,s) > 0, \text{ pour tout } s \in (s_1, s_2).$$

Si s_* est un point critique, alors $\frac{\partial \tilde{T}_+}{\partial s}(p,c,s_*) = 0$ et par suite

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s_*) > 0.$$

Ceci montre que $\tilde{T}_+$ est strictement convexe dans (s_1, s_2), donc s_* est un point critique unique de l'application $\tilde{T}_+$. Par suite E^* est un point critique unique de l'application T_+. ■

Lemme 3.8 *Pour tout $p > 1$, on a*

1) $\lim\limits_{c \to 0^+} T_+(p,c,E^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}$

2) L'application $c \longmapsto T_+(p,c,E^*)$ est strictement croissante.

3) $T_+(p,c,E^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{a}{p}-\frac{b}{p}s_+^{p-1}(p,c,E^*)-cs_+^{1-p}(p,c,E^*)\right]^{-\frac{1}{p}}$,

pour tout $0<c<\min\left(c_*,\dfrac{a^2}{(p+1)^2 b}\right)$

Preuve.

1) Pour tout $p>1$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0^+} T_+(p,c,E^*) &= \int_0^{s_*}\frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\ &= (p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{s_*}\frac{du}{\left[\frac{a}{p}s_*^p-\frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1}-cs_*-\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\ &= (p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{1}\frac{s_*dt}{\left[\frac{a}{p}s_*^p(1-t^p)-\frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1}(1-t^{2p-1})-cs_*(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}\\ &= (p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{1}\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p)-\frac{b}{2p-1}s_*^{p-1}(1-t^{2p-1})-cs_*^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned}$$

On a $s_1<s_*<s_2$ et comme $\lim\limits_{c\to 0^+}s_1=\lim\limits_{c\to 0^+}s_2=0^+$ et $\lim\limits_{c\to 0^+}cs_1^{1-p}=\lim\limits_{c\to 0^+}cs_2^{1-p}=0^+$ il résulte que

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0^+} T_+(p,c,E^*) &= (p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^1\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p)\right]^{\frac{1}{p}}}\\ &= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}\\ &= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}\beta\left(\frac{1}{p},1-\frac{1}{p}\right)\\ &= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

2) Pour tout $p>1$, $c\in(0,c_*)$ et $E\in(0,E_*)$, on a

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,c,E)=(p')^{\frac{-1}{p}}\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E)\int_0^{s_+(p,c,E)}\frac{H(p,c,s_+(p,c,E))-H(p,c,u)}{ps_+(p,c,E)[F(s_+(p,c,E))-F(u)]^{\frac{p+1}{p}}}du. \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T_+}{\partial c}(p,c,E) = (p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c,E) \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{H(p,c,s_+(p,c,E)) - H(p,c,u)}{ps_+(p,c,E)[F(s_+(p,c,E)) - F(u)]^{\frac{p+1}{p}}} du + \tag{3.8}$$

$$+ (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{s_+^2(p,c,E) - u^2}{ps_+(p,c,E)[F(s_+(p,c,E)) - F(u)]^{\frac{p+1}{p}}} du.$$

D'aprés (3.7) et (3.8), on a

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c,E) \times \frac{\partial T_+}{\partial E}(p,c,E) + \frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) \times \frac{\partial T_+}{\partial c}(p,c,E) \\ & = (p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{s_+^2(p,c,E) - u^2}{ps_+(p,c,E)\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{p+1}{p}}} du. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) > 0 \text{ et } \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{s_+^2(p,c,E) - u^2}{ps_+(p,c,E)\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{p+1}{p}}} du. > 0,$$

il résulte que pour tout $p > 1$, $c \in (0, c_*)$ et $E \in (0, E_*)$, on a

$$-\frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c,E) \times \frac{\partial T_+}{\partial E}(p,c,E) + \frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) \times \frac{\partial T_+}{\partial c}(p,c,E) > 0.$$

Comme $\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,c,E^*) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial T_+}{\partial c}(p,c,E^*) > 0.$$

C'est-à-dire l'application $c \longmapsto T_+(p,c,E^*)$ est strictement croissante.

3) On a

$$\begin{aligned} T_+(p,c,E^*) &= \int_0^{s_*} \frac{du}{\left[(E^*)^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{s_*} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}s_*^p - \frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1} - cs_* - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_*}{\left[\frac{a}{p}s_*^p(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1}(1-t^{2p-1}) - cs_*(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} dt \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_*^{p-1}(1-t^{2p-1}) - cs_*^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

$$= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right) - \frac{b}{2p-1} s_+^{p-1}\left(p,c,E^*\right)\left(1-t^{2p-1}\right) - c s_+^{1-p}\left(p,c,E^*\right)(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Comme $1 - t^{2p-1} \leq \dfrac{2p-1}{p}\left(1-t^p\right)$, $1 - t \leq 1 - t^p$, pour tout $t \in [0,1)$ et

$\frac{a}{p} - \frac{b}{2p-1} s_+^{p-1}\left(p,c,E^*\right) - c s_+^{1-p}\left(p,c,E^*\right) > 0$, pour tout $0 < c < \min\left(c_*, \dfrac{a^2}{(p+1)^2 b}\right)$,

on obtient que

$$T_+\left(p,c,E^*\right) \leq \left[\frac{a}{p} - \frac{b}{p} s_+^{p-1}\left(p,c,E^*\right) - c s_+^{1-p}\left(p,c,E^*\right)\right]^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left(1-t^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{a}{p} - \frac{b}{p} s_+^{p-1}\left(p,c,E^*\right) - c s_+^{1-p}\left(p,c,E^*\right)\right]^{-\frac{1}{p}}.$$

■

3.3 Preuve des résultats principaux

Preuve de l'assertion (A)

Supposons que $1 < p \leq 2$ et $a > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \lambda_1(p)$.

D'aprés les lemmes 3.3 et 3.7, on a

• $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p,c,E) = h_+(p,c)$,

• $\lim\limits_{E \to E_*} T_+(p,c,E) = +\infty$,

• l'application $E \longmapsto T_+(p,c,E)$ admet un point critique E^*.

Maintenant d'aprés le lemme 3.6, ona

• $\lim\limits_{c \to 0} h_+(p,c) < \frac{1}{2}$,

• $\lim\limits_{c \to c_*} h_+(p,c) > \frac{1}{2}$,

• l'application $c \longmapsto h_+(p,c)$ est strictement croissante.

Alors il existe un réel $c_0 < c_*$ tel que

• $h_+(p,c) < \frac{1}{2}$, pour tout $c \in (0, c_0)$,

• $h_+(p,c_0) = \frac{1}{2}$,

• $h_+(p,c) > \frac{1}{2}$, pour tout $c \in (c_0, c_*)$.

Donc l'équation de la variable réelle E, $T_+(p,c,E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $[0, E_*[$. Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que

i) Si $c < c_0$, le problème (3.1) admet une unique solution positive, de plus elle est dans A^+,

ii) Si $c = c_0$, le problème (3.1) admet exactement deux solutions positives, une dans B^+ et l'autre dans A^+.

Preuve de l'assertion (B)

Supposons que $1 < p \leq 2$ et $\lambda_1(p) < a \leq \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$.

Comme $\left(\dfrac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}} < s_+(p,c,E^*) < \left(\frac{(2p-1)c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}$ et si on a

$c < \min\left(\dfrac{a^2}{(p+1)^2 b}, \dfrac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, on obtient que

$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\dfrac{a}{p} - \dfrac{b}{p}s_+^{p-1}(p,c,E^*) - cs_+^{1-p}(p,c,E^*)\right]^{-\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}$ alors d'après le lemme 3.8, il résulte que , $T_+(p,c,E^*) < \dfrac{1}{2}$ et d'après les lemmes 3.3 et 3.7, l'équation de la variable réelle E, $T_+(p,c,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $[0, E_*(p,c))$ si et seulement si $0 < c < \min\left(\dfrac{a^2}{(p+1)^2 b}, \dfrac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$ et d'après le Théorème (1.1), il résulte que si $c < \min\left(\dfrac{a^2}{(p+1)^2 b}, \dfrac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, le problème (3.1) admet exactement deux solutions positives, de plus elle sont dans A^+.

Preuve de l'assertion (C)

Supposons que $p > 2$ et $a \geq \dfrac{2^{p+1}}{(p-1)^{p-1}}\beta^p\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right)$.

D'aprés le lemme 3.4 et 3.6, on a

- $\lim\limits_{c\to 0} h_+(p,c) < \frac{1}{2}$,
- $\lim\limits_{c\to c_*} h_+(p,c) \leq \frac{1}{2}$,
- l'application $c \longmapsto h_+(p,c)$ est strictement croissante,
- $\lim\limits_{c\to 0} J_+(p,c) < \frac{1}{2}$,
- $\lim\limits_{c\to c_*} J_+(p,c) \leq \frac{1}{2}$
- l'application $c \longmapsto J_+(p,c)$ est strictement croissante.

Donc l'équation de la variable réelle E, $T_+(p,c,E) = \frac{1}{2}$ n'admet aucune solution positive dans $[0, E_*[$.

Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que le problème (3.1) n'admet aucune solution positive.

Preuve de l'assertion (D)

Supposons que $p > 2$, $a \leq \min\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p),\ 2^p m^p(p)\right)$ et

– $0 < c < \min\left(\dfrac{a^2}{(p+1)^2 b}, \dfrac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$.

Dans ce cas par les lemmes 3.4 et 3.6, il résulte que si $a \leq \min\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p),\ 2^p m^p(p)\right)$, on a $h(p,c) > \dfrac{1}{2}$ et $J(p,c) > \dfrac{1}{2}$ et comme $\left(\dfrac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}} < s_+(p,c,E^*) < \left(\frac{(2p-1)c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}$ et si on supposons que

$$0 < c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right), \text{ on obtient que}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{a}{p} - \frac{b}{p}s_+^{p-1}(p,c,E^*) - cs_+^{1-p}(p,c,E^*)\right]^{-\frac{1}{p}} < \tfrac{1}{2}.$$

Alors d'après le lemme 3.8, on obtient que $T_+(p,c,E^*) < \dfrac{1}{2}$.

Ainsi par le Théorème (1.1), il résulte que le problème (3.1) admet deux solutions positives de plus elles sont dans A^+.

Chapitre 4

Sur le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité p-concave

Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques résultats concernant le nombre exact de solutions positives d'une certaine classe de problemes aux limites du type

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \mu - f\left(u\right) \text{ dans } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait les hypothèses suivantes

(H1) $f \in C\left(\mathbb{R}_+\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

(H2) $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{\varphi_p(u)} = a$ où $a \in [0, +\infty[$.

(H3) $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{\varphi_p(u)} = b$ où $b \in \left]0, +\infty\right]$.

(H4) $\forall p > 1$, $\forall u > 0$, $(p-2) f'\left(u\right) - uf''\left(u\right) < 0$.

(H5) $\lim\limits_{u \to 0^+} uf'\left(u\right) = 0^+$

(H6) $u \mapsto \dfrac{f\left(u\right)}{\varphi_p\left(u\right)}$ est strictement croissante.

Les problèmes aux limites avec une non linéarité $p-$ convexe ont été étudiés par plusieurs auteurs

Dans [12], F. Ammar Khodja a étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' = u^2 - \mu \text{ dans } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1_μ}$$

où $\mu \in R$. En utilisant la méthode de quadrature, il a montré qu'il existe un réel μ_0 tel que

i) Si $\mu_0 < \mu < 0$, le problème (1_μ) admet exactement deux solutions positives,

ii) Si $\mu = \mu_0$, ou bien $0 \leq \mu \leq \mu_0$, le problème (1_μ) admet exactement une solution positive,

iii) Si $\mu > \mu_0$, le problème (1_μ) n'admet aucune solution positive.

Dans [53], B. Ruf et S. Solimini ont considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' = g(u) - \mu \text{ dans } (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2_μ}$$

où $g \in C^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{s \to -\infty} g'(s) < +\infty$ et $\lim\limits_{s \to +\infty} g'(s) = +\infty$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

En utilisant les méthodes variationnelles, ils ont montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu > \mu_k$, le problème (2_μ) admet au moins k solutions distinctes.

Dans [55], C. Scovel a considéré le problème (2_μ) avec $g(u) = 6u^2$, il a montré que pour tout $k \geq 1$, il existe $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_k$ tels que pour tout $\mu > \mu_k$, le problème (2_μ) admet au moins k solutions distinctes.

Dans [51], M. Ramaswamy et P. N. Srikamth ont étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = u^k - \mu \text{ dans } B, \\ u > 0 \quad \text{dans } B, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial B, \end{cases} \tag{3_μ}$$

où B est la boule unité dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ et $\mu > 0$, ils ont montré que si $1 < k < \dfrac{N+2}{N-2}$, alors il existe un réel $\mu_* > 0$ tel que

i) Si $\mu > \mu_*$, le problème (3_μ) n'admet aucune solution positive,

ii) Si $\mu \leq \mu_*$, le problème (3_μ) admet au moins une solution.

Dans [65], Xiaomin Zheng a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) - \mu h \text{ dans } \Omega, \\ u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4_μ}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $\mu > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait les hypothèses suivantes

i) $f(0) = 0$.

ii) $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u} = +\infty$.

iii) $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est croissante.

Sous des hypohèses sur h il a montré que si μ est assez large, le problème (4_μ) n'admet aucune solution positive.

Dans [3], I. Addou et A. Benmezai ont étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = |u|^p + \mu \text{ dans } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5_μ}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $p > 1$.

En utilisant la méthode de quadrature, ils ont déterminé le nombre de solutions positives de (5_μ) .

Dans [24], Nous avons étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(u) + \mu \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{6_μ}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu < 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait aux hypothèses (H_1)-$(H5)$

En utilisant la méthode de quadrature, nous avons montré les résultats suivants

Supposons $p > 1$, $\mu < 0$ et f satisfait $(H1)$-$(H5)$

(A) Si l'une des conditions suivantes est vérifiée

i) $a < b \leq \lambda_1(p)$, où

ii) $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) \leq a < b$.

Alors pour tout $\mu < 0$, le probleme (6_μ) n'admet aucune solution positive.

(B) Si l'une des conditions suivantes est vérifiée

i) $a \leq \lambda_1(p) < b \leq \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$, où

ii) $\lambda_1(p) < a < b \leq \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$.

Alors pour tout $\mu < 0$, le probleme (6_μ) admet exactement une solution positive et de plus elle est dans A^+.

(C) Si $a < \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) < b$, alors il existe $\mu_*(p,a,b) < 0$ tel que

i) Si $\mu < \mu_*(p,a,b)$, le probleme (6_μ) n'admet aucune solution positive.

ii) Si $\mu = \mu_*(p,a,b)$, le probleme (6_μ) admet une unique solution positive et de plus elle est dans B^+.

iii) Si $\mu > \mu_*(p,a,b)$, le probleme (6_μ) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

L'objet de ce chapitre est de montrer que les résultats obtenus pour le problème (6_μ) sont différents de ceux que nous avons obtenus dans [24] si on change la fonction $p-$convexe $f + \mu$ par une fonction $p-$concave $-\mu - f$ où $\mu < 0$.

Notre chapitre est divisé en quatre parties. Dans la première, on énonce le résultat principal de ce chapitre. Dans la deuxième, on énonce et on démontre quelques résultats préliminaires. Dans la troisième, on démontre notre résultat principal et dans la dernière partie, on donne quelques exemples.

4.1 Théorème principal

Théorème 4.1 *Supposons $p > 1$, $\mu > 0$ et f satisfait $(H1)$-$(H6)$*

(A) Si $1 < p \leq 2$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.1) admet une unique solution positive de plus elle est dans A^+.

(B) On suppose $p > 2$ et on pose par définition :

$$m(p) := \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{1}{p}t^p - \frac{1}{p} + 1 - t\right)^{\frac{1}{p}}},$$

alors on a

i) Si $a \geq 2^p m^p(p)$ et $b > 0$, alors pour tout $\mu > 0$, le probleme (4.1) n'admet aucune solution positive,

ii) Si $b \leq 2^p m^p(p)$ et $a \geq 0$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.1) admet une unique solution positive de plus elle est dans A^+.

(C) On suppose $p > 2$ et $a < 2^p m^p(p) < b$, alors il existe un réel $\mu_*(p,a,b) > 0$ tel que

i) Si $\mu > \mu_*(p,a,b)$, le probleme (4.1) n'admet aucune solution positive,

ii) Si $\mu \leq \mu_*(p,a,b)$, le probleme (4.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 4.1 *Considérons l'équation en $s \in \mathbb{R}_+$*

$$E^p - p'(\mu s - F(s)) = 0, \tag{4.2}$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$, $\mu > 0$, $E > 0$ et $F(s) := \int_0^s f(t)\,dt$.

Soit α l'unique racine de l'équation $\mu - f(s) = 0$.

Alors il éxiste un réel $E_*(p,\mu) = \left[\frac{p}{p-1}(\mu\alpha - F(\alpha))\right]^{\frac{1}{p}}$ tel que

1) Si $E > E_*(p,\mu)$, l'équation (4.2) n'admet aucune solution positive,

2) Si $E = E_*(p,\mu)$, l'équation (4.2) admet une unique solution positive $s_+(p,\mu,E_*) = \alpha$,

3) Si $E < E_*(p,\mu)$, l'équation (4.2) admet une unique solution positive $s_+ = s_+(p,\mu,E)$ appartient à $(0,\alpha)$.

4) La fonction $E \mapsto s_+(p,\mu,E)$ est de classe C^1 dans $(0, E_*(p,\mu))$ et on a

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\mu,E) = \frac{(p-1)E^{p-1}}{\mu - f(s_+(p,\mu,E))} > 0,\ \forall p > 1,\ \forall \mu > 0 \text{ et}]\,0, E_*(p,\mu)[\,.$$

5) $\lim\limits_{E \to 0^+} s_+(p,\mu,E) = 0^+$

6) $\lim\limits_{E \to E_*} s_+(p,\mu,E) = \alpha$.

Preuve. pour tout $E > 0$, $p > 1$ et $\mu > 0$, considérons la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$s \to \psi(p, \mu, E, s) = E^P - p'(\mu s - F(s)).$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p, \mu, E, s) = -p'(\mu - f(s))$$

Comme la fonction $s \to \mu - f(s)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de plus elle est continue, alors l'équation $\mu - f(s) = 0$ admet une unique solution positive qu'on note α.

De plus on a

$$\lim_{s \to 0} \psi(p, \mu, E, s) = E^p \text{ et } \lim_{s \to +\infty} \psi(p, \mu, E, s) = +\infty.$$

Alors on a le tableau de variations suivant

s	0	α	$+\infty$
$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p, \mu, E, s)$	$-$		$+$
$\psi(p, \mu, E, s)$	$E^p \searrow$	$E^p - \frac{p}{p-1}[\mu\alpha - F(\alpha)] \nearrow$	$+\infty$

Par suite, on a

1) Si $E^p - \frac{p}{p-1}[\mu\alpha - F(\alpha)] > 0$, c'est-à-dire $E > E_*(p, \mu) = \left[\frac{p}{p-1}(\mu\alpha - F(\alpha))\right]^{\frac{1}{p}}$, l'équation(4.2) n'admet aucune solution positive.

2) Si $E^p - \frac{p}{p-1}[\mu\alpha - F(\alpha)] = 0$, c'est-à-dire $E = E_*(p, \mu)$, l'équation(4.2) admet une unique solution positive $s_+(p, \mu, E_*) = \alpha$

3) Si $E^p - \frac{p}{p-1}[\mu\alpha - F(\alpha)] < 0$, c'est-à-dire $E < E_*(p, \mu)$, l'équation (4.2) admet dans l'intervalle $(0, \alpha)$ une unique solution positive $s_+ = s_+(p, \mu, E)$ qui satisfait

$$E^p - \frac{p}{p-1}[\mu s_+(p, \mu, E) - F(s_+(p, \mu, E))] = 0, \forall E \in]0, E_*(p, \mu)[. \tag{4.3}$$

4) En dérivant l'équation (4.3) par rapport à E, on obtient

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p, \mu, E) = \frac{(p-1)E^{p-1}}{\mu - f(s_+(p, \mu, E))} > 0, \forall p > 1, \forall \mu > 0 \text{ et } \forall E \in]0, E_*(p, \mu)[.$$

5) Pour tout $p > 1$ fixé et $\mu > 0$, la fonction définie dans $(0, E_*)$ par : $E \mapsto s_+(p, \mu, E)$ est strictement croissante et de plus $s_+(p, \mu, E) \in (0, \alpha)$.

Alors les deux limites

$$\lim_{E \to 0^+} s_+(p, \mu, E) = l_0 \text{ et } \lim_{E \to E_*} s_+(p, \mu, E) = l_* \text{ existent et sont finies et on a } 0 \leq l_0 < l_* \leq \alpha.$$

Pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, la fonction $(E, s) \to \psi(E, s)$ est continue dans $[0, E_*(p, \mu)] \times [0, \alpha]$.

La fonction $E \mapsto s_+(p, \mu, E)$ est continue dans $(0, E_*)$ et satisfait l'équation

$$\psi(E, s_+(p, \mu, E)) = 0. \tag{4.4}$$

Par passage à la limite dans(4.4) quand E tend vers 0^+, on obtient

$$0 = \lim_{E\to 0^+} \psi\left(E, s_+\left(p,\mu,E\right)\right) = \psi\left(0, l_0\right).$$

Donc l_0 est un zéro qui appartient à $[0,\alpha]$ de l'équation $\psi\left(0,s\right) = 0$.

Résolvons cette dernière équation par rapport à l_0, on obtient que

$$\lim_{E\to 0^+} s_+\left(p,\mu,E\right) = 0^+.$$

Ainsi par passage à la limite dans (4.4) quand E tend vers E_*, on obtient

$$0 = \lim_{E\to E_*} \psi\left(E, s_+\left(p,\mu,E\right)\right) = \psi\left(E_*, l_*\right),$$

donc l_* est un zéro appartient à $[0,\alpha]$ de l'équation $\psi\left(E_*,s\right) = 0$.

Résolvons cette dernière équation par rapport à l_*, on obtient que

$$\lim_{E\to E_*} s_+\left(p,\mu,E\right) = \alpha.$$

Maintenant on définit pour tout $p > 1$, $\mu > 0$ et $E \in \left]0, E_*\left(p,\mu\right)\right[$, l'application temps T_+ par

$$T_+\left(p,\mu,E\right) = \int\limits_0^{s_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\mu u - F\left(u\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

■

Lemme 4.2 *pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, on a*

i) $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+\left(p,\mu,E\right) = 0^+$,

ii) $\lim\limits_{E\to E_*} T_+\left(p,\mu,E\right) = \begin{cases} +\infty & si\ 1 < p \leq 2, \\ J_+\left(p,\mu\right) & si\ p > 2, \end{cases}$

où

$$J_+\left(p,\mu\right) = \left(p'\right)^{-\frac{1}{p}} \int_0^\alpha \frac{du}{\left[\mu\alpha - F\left(\alpha\right) - \mu u + F\left(u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

iii) La fonction $E \mapsto T_+\left(p,\mu,E\right)$ est strictement coissante sur $\left(0, E_*\right)$.

Preuve. Pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, on a

i)

$$T_+\left(p,\mu,E\right) = \int\limits_0^{s_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\mu u - F\left(u\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Comme $s_+(p,\mu,E)$ est un zéro de l'équation (4.3), il résulte que

$$\begin{aligned}
T_+(p,\mu,E) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^{s_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[\mu s_+(p,\mu,E) - F(s_+(p,\mu,E)) - \mu u + F(u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{F(s_+(p,\mu,E)t)}{s_+^p(p,\mu,E)} - \frac{F(s_+(p,\mu,E))}{s_+^p(p,\mu,E)} + \frac{\mu(1-t)}{s_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{t^pF(s_+(p,\mu,E)t)}{\left(ts_+(p,\mu,E)\right)^p} - \frac{F(s_+(p,\mu,E))}{s_+^p(p,\mu,E)} + \frac{\mu(1-t)}{s_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) = (p')^{-\frac{1}{p}} \lim_{s_+(p,\mu,E)\to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{t^pF(s_+(p,\mu,E)t)}{\left(ts_+(p,\mu,E)\right)^p} - \frac{F(s_+(p,\mu,E))}{s_+^p(p,\mu,E)} + \frac{\mu(1-t)}{s_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Par l'hypothèse (H_2) et en utilisant la règle de l'Hôspital, on obtient

$$\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) = 0^+.$$

ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to E*} T_+(p,\mu,E) &= \lim_{E\to E*} \int_0^{s_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'(\mu u - F(u))\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \times \\
&\lim_{E\to E*} \int_0^1 \frac{s_+(p,\mu,E)\,dt}{\left[\mu s_+(p,\mu,E) - F(s_+(p,\mu,E)) - \mu s_+(p,\mu,E)\,t + F(s_+(p,\mu,E)\,t)\right]^{\frac{1}{p}}}. \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{\alpha dt}{\left[\mu\alpha - F(\alpha) - \mu\alpha t + F(\alpha t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^\alpha \frac{du}{\left[(\mu\alpha - F(\alpha)) - (\mu u - F(u))\right]^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

Comme α est racine double de l'équation :

$$(\mu\alpha - F(\alpha)) - (\mu u - F(u)) = 0,$$

alors on peut écrire

$$(\mu\alpha - F(\alpha)) - (\mu u - F(u)) = (\alpha - u)^2\,\phi(u)\,.\text{avec } \phi(0) \neq 0 \text{ et } \phi(\alpha) \neq 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{E\to E*} T_{+}(p,\mu,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{(\alpha-u)^{\frac{2}{p}}(\phi(u))^{\frac{1}{p}}} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } 1<p\leq 2, \\ J_{+}(p,\mu) & \text{si } p>2. \end{cases}\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}T_{+}(p,\mu,E) &= \int_0^{s_{+}(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'(\mu u - F(u))\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{s_{+}(p,\mu,E)\,du}{\left[\mu s_{+}(p,\mu,E) - F(s_{+}(p,\mu,E)) - \mu s_{+}(p,\mu,E)\,t + F(s_{+}(p,\mu,E)\,t)\right]^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{+}}{\partial E}(p,\mu,E) &= \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\partial s_{+}}{\partial E}(p,\mu,E)\times \\ &\times \int_0^1 \frac{H(\mu,s_{+}(p,\mu,E)) - H(\mu,s_{+}(p,\mu,E)\,t)}{\left[\mu s_{+}(p,\mu,E) - F(s_{+}(p,\mu,E)) - \mu s_{+}(p,\mu,E)\,t + F(s_{+}(p,\mu,E)\,t)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt,\end{aligned}$$

où

$$H(\mu,u) = p(\mu u - F(u)) - u(\mu - f(u))$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\mu,u) = -(p-1)f(u) + uf'(u) + (p-1)\mu > 0, \text{ d'après } (H_6).$$

D'après les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_5), on a

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{\partial H}{\partial u}(\mu,u) = (p-1)\mu > 0.$$

et en utilisant l'hypothèse (H_4), on obtient

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u}(\mu,u) = -\left[(p-2)f'(u) - uf''(u)\right] > 0.$$

Donc il résulte que $\frac{\partial H}{\partial u}(\mu,u) > 0$, pour tout $\mu>0$ et $u>0$.

Comme H est strictement croissante par rapport à u, il résulte que

$$H(\mu,s_{+}(p,\mu,E)) - H(\mu,s_{+}(p,\mu,E)\,t) > 0, \text{ pour tout } \mu>0 \text{ et } t\in(0,1).$$

Comme $\frac{\partial s_{+}}{\partial E}(p,\mu,E) > 0$, alors on obtient que

$$\frac{\partial T_{+}}{\partial E}(p,\mu,E) > 0, \text{ pour tout } p>1,\ \mu>0 \text{ et } E\in(0,E_*).$$

■

Lemme 4.3 *Pour tout $p > 2$, on a*

i) $\lim\limits_{\mu\to 0^+} J_+(p,c) = a^{\frac{-1}{p}} m(p)$,

ii) $\lim\limits_{\mu\to +\infty} J_+(p,c) = b^{\frac{-1}{p}} m(p)$,

où

$$m(p) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{1}{p}t^p - \frac{1}{p} + 1 - t\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

iii) L'application $\mu \mapsto J_+(p,\mu)$ est strictement décroissante.

Preuve. Pour tout $p > 2$, on a

i)

$$\begin{aligned} J_+(p,\mu) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^\alpha \frac{du}{[\mu\alpha - F(\alpha) - \mu u + F(u)]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{\alpha dt}{[\mu\alpha - F(\alpha) - \mu\alpha t + F(\alpha t)]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{\mu(1-t)}{\alpha^{p-1}} + \frac{F(\alpha t)}{\alpha^p} - \frac{F(\alpha)}{\alpha^p}\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Comme $\mu = f(\alpha)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_+(p,\mu) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{F(\alpha t)}{\alpha^p} - \frac{F(\alpha)}{\alpha^p} + (1-t)\frac{f(\alpha)}{\alpha^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[t^p\frac{F(\alpha t)}{(\alpha t)^p} - \frac{F(\alpha)}{\alpha^p} + (1-t)\frac{f(\alpha)}{\alpha^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

Quand μ tend vers 0^+, α tend vers le zéro de l'équation $f(u) = 0$

Comme $u = 0$ est l'unique zéro de l'équation $f(u) = 0$, on obtient que α tend vers 0^+.

D'après l'hypothèse (H_2) et en utilisant la rêgle de l'Hôspital, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\mu\to 0^+} J_+(p,\mu) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}t^p - \frac{a}{p} + a(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}t^p - \frac{1}{p} + (1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}} m(p). \end{aligned}$$

ii) Quand μ tend vers $+\infty$, α tend vers $+\infty$ et d'après l'hypothèse (H_3) et en utilisant la rêgle de l'Hôspital, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu\to+\infty} J_+(p,\mu) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{b}{p}t^p - \frac{b}{p} + b(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= b^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}t^p - \frac{1}{p} + (1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= b^{\frac{-1}{p}} m(p).
\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}
J_+(p,\mu) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^\alpha \frac{du}{[\mu\alpha - F(\alpha) - \mu u + F(u)]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{\alpha dt}{[\mu\alpha(1-t) + F(\alpha t) - F(\alpha)]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\partial J_+}{\partial\mu}(p,\mu) = (p')^{-\frac{1}{p}} \times \int_0^1 \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}[p\mu\alpha(1-t)+pF(\alpha t)-pF(\alpha)-\alpha\mu(1-t)-\alpha t f(\alpha t)+\alpha f(\alpha)]-\alpha^2(1-t)\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}}{p[\mu\alpha(1-t)+F(\alpha t)-F(\alpha)]^{\frac{p+1}{p}}} dt$$

$$= (p')^{-\frac{1}{p}} \times \int_0^1 \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\left[p\mu\alpha - pF(\alpha)+\alpha f(\alpha)-p\mu\alpha t+pF(\alpha t)-\alpha\mu+\alpha\mu t-\alpha t f(\alpha t)-\alpha^2 f'(\alpha)+\alpha f'(\alpha)\alpha t\right]dt}{p[\mu\alpha(1-t)+F(\alpha t)-F(\alpha)]^{\frac{p+1}{p}}}$$

$$= (p')^{-\frac{1}{p}} \times \int_0^\alpha \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\left[\left((p-1)\mu\alpha-pF(\alpha)+\alpha f(\alpha)-\alpha^2 f'(\alpha)\right)-\left((p-1)\mu u-pF(u)+uf(u)-\alpha f'(\alpha)u\right)\right]du}{p\alpha[\mu\alpha-F(\alpha)-\mu u+F(u)]^{\frac{p+1}{p}}}$$

$$= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^\alpha \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}L(u)}{p\alpha[\mu\alpha-F(\alpha)-\mu u+F(u)]^{\frac{p+1}{p}}} du,$$

où

$$L(u) := (p-1)\mu\alpha - pF(\alpha) + \alpha f(\alpha) - \alpha^2 f'(\alpha) - (p-1)\mu u + pF(u) - uf(u) + \alpha f'(\alpha)u.$$

On a

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u} = -(p-1)\mu + (p-1)f(u) - uf'(u) + \alpha f'(\alpha)$$

$$L'(0) = -(p-1)\mu + \alpha f'(\alpha) \text{ et } L'(\alpha) = 0$$

Comme

$$\frac{\partial^2 L(u)}{\partial u^2} = (p-2)f'(u) - uf''(u) < 0 \text{ et } L'(\alpha) = 0,$$

alors

$$L'(u) < 0, \text{ pour tout } u \in (0,\alpha).$$

Maintenant comme
$$L(\alpha) = 0,$$
alors il resulte que
$$L(u) < 0, \text{ pour tout } u \in (0, \alpha)$$
et par conséquent
$$\frac{\partial J_+}{\partial \mu}(p, \mu) < 0, \text{ pour tout } p > 1 \text{ et } \mu > 0.$$

■

4.3 Preuve du théorème principal

Preuve de l'assertion (A)

On suppose que $1 < p \leq 2$.

D'après le lemme 4.2, on a

- $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p, \mu, E) = 0^+$.
- $\lim\limits_{E \to E_*} T_+(p, \mu, E) = +\infty$.
- La fonction $E \mapsto T_+(p, \mu, E)$ est strictement croissante sur $(0, E_*)$.

Alors l'équation de la variable E, $T_+(p, \mu, E) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution positive dans $(0, E_*)$.

Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que le problème (4.1) admet une unique solutioin positive de plus elle est dans A^+.

Preuve de l'assertion (B)

i) Supposons que $p > 2$, $a \geq 2^p m^p(p)$ et $b \in]0, +\infty]$

D'après le lemme 4.2, on a

- $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p, \mu, E) = 0^+$
- $\lim\limits_{E \to E_*} T_+(p, \mu, E) = J_+(p, \mu)$
- La fonction $E \mapsto T_+(p, \mu, E)$ est strictement croissante sur $(0, E_*)$.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p, \mu, E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0, E_*)$ si et seulement si $J_+(p, \mu) \geq \frac{1}{2}$.

Maintenant par le lemme 4.3, on a

- $\lim\limits_{\mu \to 0^+} J_+(p, \mu) \leq \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\mu \to +\infty} J_+(p, \mu) < \frac{1}{2}$
- La fonction $\mu \mapsto J_+(p, \mu)$ est strictement décroissante sur $(0, +\infty)$.

Donc il n'éxiste pas de réel $\mu > 0$ tel que $J_+(p, \mu) \geq \frac{1}{2}$ et par suite l'équation de la variable E, $T_+(p, \mu, E) = \frac{1}{2}$ n'admet aucune solution positive.

Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que le problème (4.1) n'admet aucune solution positive.

ii) Supposons que $p > 2$, $b \leq 2^p m^p(p)$ et $a \in [0, +\infty[$

D'après le lemme 4.2, on a

- $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p, \mu, E) = 0^+$..

- $\lim\limits_{E \to E_*} T_+(p,\mu,E) = J_+(p,\mu)$.
- La fonction $E \mapsto T_+(p,\mu,E)$ est strictement croissante sur $(0,E_*)$.

  Alors l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0,E_*)$ si et seulement si $J_+(p,\mu) \geq \dfrac{1}{2}$.

  Maintenant par le lemme 4.3, on a
- $\lim\limits_{\mu \to 0^+} J_+(p,\mu) > \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\mu \to +\infty} J_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$
- La fonction $\mu \mapsto J_+(p,\mu)$ est strictement décroissante sur $(0,+\infty)$.

  Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution positive dans $(0,E_*)$ pour tout $\mu > 0$.

  Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que le problème (4.1) admet une unique solution positive et cette solution est dans A^+.

Preuve de l'assertion (C)

Supposons que $p > 2$ et $a < 2^p m^p(p) < b$.

Par le lemme 4.2, l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution dans $(0,E_*)$ si et seulement si $J_+(p,\mu) \geq \dfrac{1}{2}$.

- Maintenant par le lemme 4.3, on a
- $\lim\limits_{\mu \to 0^+} J_+(p,\mu) > \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\mu \to +\infty} J_+(p,\mu) < \dfrac{1}{2}$
- La fonction $\mu \mapsto J_+(p,\mu)$ est strictement décroissante sur $(0,+\infty)$.

Alors il est existe un unique réel $\mu_*(p,a,b) > 0$ tel que

- $J_+(p,\mu) > \dfrac{1}{2}$, pour tout $\mu < \mu_*(p,a,b)$,
- $J_+(p,\mu_*(p,a,b)) = \dfrac{1}{2}$,
- $J_+(p,\mu) < \dfrac{1}{2}$, pour tout $\mu > \mu_*(p,a,b)$.

  Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0,E_*)$ si et seulement si $\mu \leq \mu_*(p,a,b)$.

  Ainsi par le thèoreme (1.1), il résulte que

i) Si $\mu > \mu_*(p,a,b)$, le problème (4.1) n'admet aucune solution positive.

ii) Si $\mu \leq \mu_*(p,a,b)$, le problème (4.1) admet une unique solution positive de plus elle est dans A^+.

4.4 Exemples

Dans cette section, on donne quelques exemples pour illustrer nos résultats.

Exemple 1
Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \mu - \left(u^p + au^{p-1}\right) \text{ dans } (0,1)\,, \\ u\,(0) = u\,(1) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $p > 1$, $\varphi_p\,(y) = |y|^{p-2}\, y$, $a \geq 0$ et $\mu > 0$.
Pour tout $u > 0$, on pose

$$f\,(u) = u^p + au^{p-1}.$$

On a
- $\cdot$ $f \in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+\right)$.
- $\cdot$ $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{f\,(u)}{u^{p-1}} = a$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f\,(u)}{u^{p-1}} = +\infty$.
- $\cdot$ $\forall u > 0$ et $\forall p > 1$, $(p-2)\, f'\,(u) - uf''\,(u) = -pu^{p-1} < 0$.
- $\cdot$ $\lim\limits_{u\to 0^+} uf'\,(u) = \lim\limits_{u\to 0^+} \left(pu^p + a\,(p-1)\, u^{p-1}\right) = 0$.
- $\cdot$ $u \longmapsto \frac{f(u)}{\varphi_p(u)}$ est strictement croissante.

Donc par le théorème (4.1), il résulte que
(i) On suppose que $1 < p \leq 2$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.5) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.
(ii) On suppose que $p > 2$, alors on a
Si $a \in [0, 2^p m^p(p)[$, alors il existe $\mu_*\,(p,a) < 0$ tel que
- $\cdot$ Si $\mu > \mu_*\,(p,a)$, le problème (4.5) n'admet aucune solution positive.
- $\cdot$ Si $\mu \leq \mu_*\,(p,a)$, le problème (4.5) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

(iii) Si $a \in [2^p m^p(p), +\infty[$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.1) n'admet aucune solution positive.

Exemple 2
Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \mu - (\dfrac{2a}{\pi} u^{p-1} Arc\tan u + au^{p-1}) \text{ dans } (0,1)\,, \\ u\,(0) = u\,(1) = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

où $p \geq 2$, $\varphi_p\,(y) = |y|^{p-2}\, y$, $a > 0$ et $\mu > 0$.
pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f\,(u) = \frac{2a}{\pi} u^{p-1} Arc\tan u + au^{p-1}.$$

On a
- $\cdot$ $f \in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+\right)$.
- $\cdot$ $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{f\,(u)}{u^{p-1}} = a$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{f\,(u)}{u^{p-1}} = 2a$.
- $\cdot$ $\forall u > 0$ et $\forall p \geq 2$, on a
  $(p-2)\, f'\,(u) - uf''\,(u) = \dfrac{2a}{\pi\left(1+u^2\right)^2} \left((2-p)\, u^2 - p\right) < 0$

$\cdot \lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{au^{p-1}\left[2(p-1)(1+u^2)\,Arc\tan u + 2u + \pi(p-1)(1+u^2)\right]}{\pi(1+u^2)}.$
$= 0$

$\cdot\ u \longmapsto \frac{f(u)}{\varphi_p(u)}$ est strictement croissante.

Donc par le théorème (4.1), il résulte que

(i) Si $p = 2$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.6) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

(ii) Maintenant on suppose $p > 2$, alors on a les résultats suivants

· Si $a \in [2^p m^p(p), +\infty[$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.6) n'admet aucune solution positive.

· Si $a \in]0, 2^{p-1}m^p(p)]$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.6) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

· Si $a \in]2^{p-1}m^p(p), 2^p m^p(p)[\ <$, alors il existe un réel $\mu_*(p,a) < 0$ tel que

· Si $\mu > \mu_*(p,a)$, le problème (4.6) n'admet aucune solution positive

· Si $\mu < \mu_*(p,a)$, le problème (4.6) admet exactement une solution positive de plus cette solution est dans A^+

Exemple 3

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \mu - (e^u - 1 + au^{p-1}) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

où $1 < p \leq 2$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $a \geq 0$ et $\mu > 0$.

pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(u) = e^u - 1 + au^{p-1}.$$

On a

$\cdot\ f \in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) \cap C(\mathbb{R}_+)$.

$\cdot \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = \begin{cases} a \text{ si } 1 < p < 2 \\ 1 + a \text{ si } p = 2 \end{cases}$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty.$

$\cdot\ \forall u > 0$ et $\forall p \leq 2$, on a
$(p-2) f'(u) - uf''(u) = (p - 2 - u) e^u < 0.$

$\cdot \lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} u\left(e^u + a(p-1)u^{p-1}\right) = 0.$

Donc par le théorème (4.1), il résulte que pour tout alors $\mu > 0$, le problème (4.7) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

Exemple 4

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \mu - (-\ln(1 + u^{p-1}) + au^{p-1}) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

où $p > 1$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $a \geq 1$ et $\mu > 0$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(u) = au^{p-1} - \ln\left(1 + u^{p-1}\right).$$

On a

· $f \in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+\right)$.

· $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = a - 1$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = a$.

· $\forall u > 0$ et $\forall p > 1$, $(p-2)\, f'(u) - u f''(u) = -\dfrac{(p-1)^2\, u^{2p-3}}{\left(1 + u^{p-1}\right)^2} < 0$.

· $\lim\limits_{u \to 0^+} u f'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} u^{p-1} \left(a - \dfrac{p-1}{1 + u^{p-1}}\right) = 0$.

· $u \longmapsto \frac{f(u)}{\varphi_p(u)}$ est strictement croissante.

Donc par le théorème (4.1), il résulte que

(i) On suppose que $1 < p \leq 2$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.8) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

(ii) On suppose que $p > 2$, alors on a les résultats suivants

· Si $a \in [1 + 2^p m^p(p), +\infty[$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.8) n'admet aucune solution positive.

(iii) Si $a \in [1, 2^p m^p(p)]$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (4.8) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

· Si $a \in]2^p m^p(p), 1 + 2^p m^p(p)[$, alors il existe un réel $\mu_*(p, a) > 0$ tel que

· Si $\mu \leq \mu_*(p, a)$, le problème (4.8) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+

· Si $\mu > \mu_*(p, a)$, le problème (4.8) n'admet aucune solution positive.

Chapitre 5

Nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaires avec une non linéarité singulière

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda\left(u^q + u^{-\alpha}\right) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$, $q > 0$ et $0 \leq \alpha < 1$ sont des paramètres réels.

Les problèmes du type (5.1) ont fait l'objet de nombreux travaux.

Dans [19], les auteurs ont considéré le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u & = & u^{-\gamma_1} + \mu u^{\gamma_2} \text{ dans } \Omega \\ u & > & 0 \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1_μ}$$

où $\mu \geq 0$, $0 < \gamma_1 < 1$ et $\gamma_2 > 0$.

Les auteurs ont montré que le problème (1_μ) admet au moins une solution pour tout $\mu \geq 0$ et $0 < \gamma_2 < 1$. De plus si $\gamma_2 \geq 1$, alors il existe μ^* tel que le problème (1_μ) admet au moins une solution si $\mu \in [0, \mu^*)$ et pas de solutions si $\mu > \mu^*$.

Dans [28] , les auteurs ont étudié l'existence et la multiplicité des solutions radiales pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{-\delta} \ + \ u^q \text{ dans } B_r\ (0), \\ u > 0 \qquad\qquad \text{dans } B_r\ (0), \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } B_r\ (0), \end{cases} \tag{1_δ}$$

où $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p > 1$, $p - 1 < q \leq \frac{N(p-1)+p}{N-p}$ et $B_r(0)$ est la boule de centre 0 et de rayon r et $\partial B_r(0)$ est la frontière de la boule.

Ils ont montré l'existence d'un nombre réel r^* tel que

i) Si $r < r^*$, le problème (1_δ) admet au moins deux solutions radiales,

ii) Si $r > r^*$, le problème (1_δ) n'admet aucune solution radiale.

Dans [7] , Agarwal et O'Regan ont montré que le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u'' = \delta\left(u^{-\alpha} + u^{\beta} + 1\right) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = a > 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{2_δ}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$ sont des paramètres réels, admet une solution positive si

$0 < \delta < \dfrac{(\beta+1)(1-\alpha)a^2}{2\left[(\beta+1)a^{1-\alpha} + (1-\alpha)a^{\beta+1} + (1-\alpha)(\beta+1)a\right]}$.

Dans [63] , Zhongli. Wei a étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' = \lambda\left(u^q + ku + u^{-m}\right) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1_λ}$$

où λ, k, q et m sont des paramètres réels positifs tels que q et m satisfont l'une des conditions suivantes

(H_1) $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$ et $1 < q < +\infty$,où

(H_2) $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ et $1 < q < 1 + \left[\frac{1+m}{2(3m-1)}\right] \times \left[(3-5m) + \sqrt{(3-5m)^2 + 8(3m-1)(1-m)}\right]$

Il a montré le résultat suivant

Supposons que (H_1) ou (H_2) est satisfaite, alors il existe un réel $\lambda^* > 0$ tel que

i) Si $\lambda > \lambda^*$, le problème (1_λ) n'admet aucune solution positive,

ii) Si $\lambda = \lambda^*$, le problème (1_λ) admet une unique solution positive,

iii) Si $\lambda < \lambda^*$, le problème (1_λ) admet exactement deux solutions positives.

Le but de ce chapitre est d'amélliorer et de généraliser les résultats obtenus dans [63] .

Notre chapitre est divisé en trois parties. Dans la première, on énonce les résultats principaux de ce chapitre . La deuxième partie est consacrée à quelques résultats préliminaires et dans la dernière partie, on démontre nos résultats principaux.

5.1 Résultats principaux

Théorème 5.1 *On suppose que $p > 1$, $\lambda > 0$, $q > 0$ et $0 \leq \alpha < 1$, alors on a les résultats suivants*

(A) Si $0 < q < p - 1$, alors pour tout $\lambda > 0$, le problème (5.1) admet une unique solution positive et de plus cette solution est dans A^+.

(B) Si $q = p - 1$, alors il existe un réel $\lambda_* = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)^p$ tel que

i) Si $\lambda \geq \lambda_*$, le problème (5.1) n'admet aucune solution positive,

ii) Si $\lambda < \lambda_*$, le problème (5.1) admet exactement une solution positive et de plus elle est dans A^+.

(C) Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,
(H_1) $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{P+1}$ *et* $p-1 < q < +\infty$*,ou*
(H_2) $\frac{1}{p+1} \leq \alpha < 1$ *et*

$$p-1 < q < p-1+\frac{1}{2}\left[\frac{p-1+\alpha}{(p+1)\alpha-1}\right]\times$$
$$\times\left[(p+1)-(2p+1)\alpha+\sqrt{\left[(p+1)-(2p+1)\alpha\right]^2+4p(1-\alpha)\left[(p+1)\alpha-1\right]}\right],$$

alors il existe un réel $\lambda_{**} > 0$ *tel que*
i) Si $\lambda > \lambda_{**}$*, le problème (5.1) n'admet aucune solution positive,*
ii) Si $\lambda = \lambda_{**}$*, le problème (5.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans* A^+*,*
iii) Si $\lambda < \lambda_{**}$*, le problème (5.1) admet exactement deux solutions positives et de plus elles sont dans* A^+*.*

5.2 Lemmes préliminaires

Lemme 5.1 *Considérons l'équation en* $s > 0$

$$E^p - \lambda p'\left(\frac{1}{q+1}s^{q+1}+\frac{1}{1-\alpha}s^{1-\alpha}\right)=0, \tag{5.2}$$

où $p > 1$, $q > 0$, $\lambda > 0$, $0 \leq \alpha < 1$ *et* $E > 0$ *sont des paramètres réels.*

Alors pour tout $E > 0$*, l'équation* (5.2) *admet une unique solution positive* $s_+ = s_+(p,\lambda,E)$*. De plus cette solution vérifie les relations suivantes*

1) La fonction $E \longmapsto s_+(p,\lambda,E)$ *est de classe* C^1 *dans* $(0,+\infty)$ *et on a*

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\lambda,E)=\frac{(p-1)\ E^{p-1}}{\lambda\left(s_+^q(p,\lambda,E)+\ s_+^{-\alpha}(p,\lambda,E)\right)}>0,\ \forall E\in(0,+\infty).$$

2) $\lim\limits_{E\to 0^+} s_+(p,\lambda,E) = 0^+$

3) $\lim\limits_{E\to +\infty} s_+(p,\lambda,E) = +\infty$

Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E > 0$, on considère la fonction Ψ définie par

$$s \longmapsto \Psi(p,\lambda,E,s) = E^p - \lambda p'\left(\frac{s^{q+1}}{q+1}+\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,\lambda,E,s) = -\lambda p'\left(s^q + s^{-\alpha}\right) < 0,\ \forall s > 0.$$

La fonction $s \longmapsto \Psi(p,\lambda,E,s)$ est strictement décroissante et de plus

$$\lim_{s\to 0^+}\Psi(p,\lambda,E,s) = E^p \text{ et } \lim_{s\to+\infty}\Psi(p,\lambda,E,s) = -\infty.$$

Alors, il résulte que l'équation (5.2) admet une unique solution positive $s_+ = s_+(p,\lambda,E)$ satisfaisant l'équation suivante

$$E^p - \lambda p'\left(\frac{1}{q+1}s_+^{q+1}(p,\lambda,E)+\frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha}(p,\lambda,E)\right)=0. \tag{5.3}$$

1) En dérivant par rapport à E l'équation (5.3), on obtient la relation suivante

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\lambda,E)=\frac{(p-1)\ \ E^{p-1}}{\lambda\left(s_+^q(p,\lambda,E)+\ s_+^{-\alpha}(p,\lambda,E)\right)}>0,\ \forall E\in(0,+\infty).$$

2) La fonction $E\longmapsto s_+(p,\lambda,E)$ est strictement croissante dans $]0,+\infty[$ et de plus $s_+(p,\lambda,E)\in(0,+\infty)$, alors $\lim\limits_{E\to 0^+}s_+(p,\lambda,E)=l$ existe et est finie.

Par passage à la limite quand E tend vers 0^+dans (5.3), on obtient

$$\frac{1}{q+1}l^{q+1}+\frac{1}{1-\alpha}l^{1-\alpha}=0.$$

Résolvons cette dernière équation par rapport à l, on obtient que $l=0$, c'est-à-dire

$$\lim_{E\to+\infty}s_+(p,\lambda,E)=0^+.$$

3) Supposons que $\lim\limits_{E\to+\infty}s_+(p,\lambda,E)=l<+\infty$

Par passage à la limite quand E tend vers $+\infty$ dans (5.3), on obtient

$$+\infty=\lambda p'\left(\frac{1}{q+1}l^{q+1}+\frac{1}{1-\alpha}l^{1-\alpha}\right)<+\infty,$$

d'où la contradiction et par suite

$$\lim_{E\to+\infty}s_+(p,\lambda,E)=+\infty.$$

Maintenant pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $E>0$, on définit l'application temps T_+ par

$$T_+(p,\lambda,E)=\int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{du}{\left[E^p-\lambda p'\left(\frac{1}{q+1}u^{q+1}+\frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Lemme 5.2 *pour tout $p>1$ et $\lambda>0$, on a*

1) $\lim\limits_{E\to 0^+}T_+(p,\lambda,E)=0^+$

2) $$\lim_{E\to+\infty}T_+(p,\lambda,E)=\begin{cases}0 & si\ q>p-1,\\ \left(\dfrac{p-1}{\lambda}\right)^{\dfrac{1}{p}}\frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}} & si\ q=p-1,\\ +\infty & si\ q<p-1.\end{cases}$$

Preuve. Pour tout $p>1$ et $\lambda>0$, on a

$$T_+(p,\lambda,E)=\int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{du}{\left[E^p-\lambda p'\left(\frac{1}{q+1}u^{q+1}+\frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

D'aprés l'égalité (5.3), on a

$$\begin{aligned}
T_+(p,\lambda,E) &= (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \times \\
&\times \int_0^{s_+(p,\lambda,E)} \frac{du}{\left[\left(\frac{1}{q+1}s_+^{q+1}(p,\lambda,E)+\frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha}(p,\lambda,E)\right)-\left(\frac{1}{q+1}u^{q+1}+\frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{q+1}s_+^{q+1-p}(p,\lambda,E)\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha-p}(p,\lambda,E)\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\lambda,E) &= (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \times \\
&\times \lim_{E\to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{q+1}s_+^{q+1-p}(p,\lambda,E)\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha-p}(p,\lambda,E)\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{E\to 0^+} s_+^{1-\alpha-p}(p,\lambda,E) = +\infty,$$

alors

$$\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\lambda,E) = 0^+$$

2) Vu que

$$\begin{aligned}
&\lim_{E\to+\infty}\left[\frac{1}{q+1}s_+^{q+1-p}(p,\lambda,E)\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha-p}(p,\lambda,E)\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right] \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{si } q > p-1 \\ \frac{1}{p}\left(1-t^p\right) & \text{si } q = p-1 \\ 0^+ & \text{si } q < p-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{E\to+\infty} T_+(p,\lambda,E) = \begin{cases} 0 & \text{si } q > p-1 \\ \left(\dfrac{p-1}{\lambda}\right)^{\dfrac{1}{p}} \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}} & \text{si } q = p-1 \\ +\infty & \text{si } q < p-1. \end{cases}$$

■

Lemme 5.3 *Pour tout $p > 1$, $q \leq p-1$ et $\lambda > 0$, on a*

L'application $E \longmapsto T_+(p,\lambda,E)$ est strictement croissante sur $(0,+\infty)$.

Preuve. soit $p > 1$ et $\lambda > 0$ on a

$$\begin{aligned} T_+ (p, \lambda, E) &= \int_0^{s_+(p,\lambda,E)} \frac{du}{\left[E^p - \lambda p' \left(\frac{1}{q+1}u^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{q+1}s_+^{q+1-p}(p,\lambda,E)(1-t^{q+1}) + \frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha-p}(p,\lambda,E)(1-t^{1-\alpha})\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \check{T}_+ (p, \lambda, s_+ (p, \lambda, E)), \end{aligned}$$

où

$$\check{T}_+ (p, \lambda, s_+ (p, \lambda, E)) = \int_0^1 \frac{sdt}{\left[\frac{1}{q+1}s_+^{q+1}(p,\lambda,E)(1-t^{q+1}) + \frac{1}{1-\alpha}s_+^{1-\alpha}(p,\lambda,E)(1-t^{1-\alpha})\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Posons $s := s_+ (p, \lambda, E)$, alors

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p, \lambda, E) = (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial E}(p, \lambda, E) \times \frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p, \lambda, s).$$

Un calcul simple montre que

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p, \lambda, s) = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{\left(\frac{p-1-q}{q+1}\right)s^{q+1}(1-t^{q+1}) + \left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)s^{1-\alpha}(1-t^{1-\alpha})}{\left[\frac{1}{q+1}s^{q+1}(1-t^{q+1}) + \frac{1}{1-\alpha}s^{1-\alpha}(1-t^{1-\alpha})\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt.$$

Donc

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p, \lambda, s) > 0$$

Comme $\frac{\partial s_+}{\partial E}(p, \lambda, E) > 0$, on obtient

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p, \lambda, E) > 0.$$

■

Lemme 5.4 *Pour tout $p > 1$, $q > p - 1$ et $\lambda > 0$, on a*

l'application $E \longmapsto T_+ (p, \lambda, E)$ admet un unique point critique E^*.

Preuve.
D'après le lemme (5.2), on a

$$\lim_{E\to 0^+} T_+ (p, \lambda, E) = \lim_{E\to+\infty} T_+ (p, \lambda, E) = 0^+,$$

ceci montre que l'application $E \longmapsto T_+(p,\lambda,E)$ admet au moins un point critique E^*

D'autre part, on a

$$T_+(p,\lambda,E) = (\lambda p')^{\frac{-1}{p}} \check{T}_+(p,\lambda,s),$$

où

$$s := s_+(p,\lambda,E) \text{ et } \check{T}_+(p,\lambda,s) = \int_0^1 \frac{sdt}{\left[\frac{1}{q+1}s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) + \frac{1}{1-\alpha}s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

$\check{T}_+$ atteint un maximum en s_* si et seulement si T_+ atteint un maximum en E^*

Aussi d'aprés le lemme 5.1, il suit que

$$\lim_{s\to 0^+} \check{T}_+(p,\lambda,s) = \lim_{s\to+\infty} \check{T}_+(p,\lambda,s) = 0.$$

Alors $\check{T}_+$ admet au moins un point critique s_*.

Pour montrer l'unicité du point critique, on trouve premièrement pour tout $\lambda > 0$, une intervalle compacte qui contient tout les points critiques possibles de $\check{T}_+$ et on montre que l'application $\check{T}_+(p,\lambda,.)$ est strictement concave dans $I(\lambda)$. ■

Lemme 5.5 *Pour tout $p > 1$et $q > p-1$, il existe deux réels $0 < s_1 < s_2$ tels que*

$$\check{T}'_+(p,\lambda,s) > 0 \text{ pour tout } 0 < s < s_1 \text{ et } \check{T}'_+(p,\lambda,s) < 0 \text{ pour } s > s_2.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,\lambda,s) &= \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{\left(\frac{p-1-q}{q+1}\right)s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) + \left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)}{\left[\frac{1}{q+1}s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt \\ &= \frac{1}{p}\int_0^s \frac{H(p,s)-H(p,u)}{s\left[F(s)-F(u)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du,\end{aligned}$$

où

$$H(p,u) = \left(\frac{p-1-q}{q+1}\right)u^{q+1} + \left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)u^{1-\alpha}$$

et

$$F(u) = \frac{1}{q+1}u^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}.$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,u) = (p-1-q)\,u^q + (p-1+\alpha)\,u^{-\alpha},$$

et

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(p,u) = q\,(p-1-q)\,u^{q-1} - \alpha\,(p-1+\alpha)\,u^{-\alpha-1} < 0, \forall u > 0.$$

D'autre part on a

$$H(p,0)=0,\ \lim_{u\to+\infty} H(p,u)=-\infty,$$

et

$$\lim_{u\to+0^+}\frac{\partial H}{\partial u}(p,u)=+\infty,\quad \lim_{u\to+\infty}\frac{\partial H}{\partial u}(p,u)=-\infty.$$

Donc, il existe deux nombres réels $s_1=\left(\frac{p-1+\alpha}{q+1-p}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}$ et $s_2=\left[\left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{q+1}{q+1-p}\right)\right]^{\frac{1}{q+\alpha}}$ tels que

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial u}(p,u)>0 \text{ dans } (0,s_1),\\ &\frac{\partial H}{\partial u}(p,s_1)=0,\\ &\frac{\partial H}{\partial u}(p,u)<0 \text{ dans } (s_1,+\infty)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&H(p,u)>0 \text{ dans } (0,s_2),\\ &H(p,u)<0 \text{ dans } (s_2,+\infty),\\ &H(p,s_2)=H(p,0)=0.\end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,\lambda,s)>0, \text{ pour tout } s\in(0,s_1),$$

et

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,\lambda,s)<0, \text{ pour tout } s\in(s_2,+\infty).$$

D'aprés ce qui précède on a

$$\forall p>1, \forall q>p-1 et\ \forall\lambda>0, \text{il existe } s_*\in(s_1,s_2) \text{ telque } \frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,\lambda,s_*)=0.$$

■

Lemme 5.6 *Pour $q>1$, $0\leq\alpha<1$, $s>0$ et $0<t<1$, on a*

l'application $t\longmapsto G(s,t)$ est strictement croissante.
où

$$G(s,t)=\frac{s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)}{\frac{s^{q+1}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)}.$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}G(s,t)=\frac{H_1(s,t)}{\left[\frac{s^{q+1}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^2},$$

où

$$H_1(s,t) = \left[(q+1)\, s^{q+1} t^q + (1-\alpha)\, s^{1-\alpha} t^{-\alpha}\right] \left[\frac{s^{q+1}}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) + \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right] +$$

$$+ \left[s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) + s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]\left[s^{q+1}t^q + s^{1-\alpha}t^{-\alpha}\right]$$

$$= \frac{q+\alpha}{(q+1)(1-\alpha)} s^{q+2-\alpha} t^{-\alpha} J_1(t).$$

Avec

$$J_1(t) = (1-\alpha) - (q+1)\, t^{q+\alpha} + (q+\alpha)\, t^{q+1}.$$

Alors pour $t \in (0,1)$, on a

$$J_1'(t) = -(q+1)(q+\alpha)\, t^{q+\alpha-1}\left(1-t^{1-\alpha}\right) < 0,$$

comme

$$J_1(0) = 1-\alpha > 0 \ et \ J_1(1) = 0$$

il résulte que

$$J_1(t) > 0, \text{ pour } 0 < t < 1.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t} G(s,t) > 0, \text{ pour } s > 0 \text{ et } t \in (0,1).$$

C'est-à-dire l'application $t \longmapsto G(s,t)$ est strictement crissante. ■

Lemme 5.7 *Si l'une des conditions* (H_1)*ou* (H_2) *est verifiée, alors on a*

1) $\left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right) s_*^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{1-t^{1-\alpha}}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}} dt = \left(\frac{q+1-p}{q+1}\right) s_*^{q+1} \int_0^1 \frac{1-t^{q+1}}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}} dt.$

2) $\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p,\lambda,s_*) < 0.$

Preuve. 1) Comme s_* est point critique, alors

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,\lambda,s_*) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{p-1-q}{q+1}\right) s_*^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right) + \left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right) s_*^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)}{\left[F(s_*) - F(s_*t)\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt = 0.$$

D'où

$$\left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right) s_*^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{1-t^{1-\alpha}}{\left[F(s_*)-F(s_*t)\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt = \left(\frac{q+1-p}{q+1}\right) s_*^{q+1} \int_0^1 \frac{1-t^{q+1}}{\left[F(s_*)-F(s_*t)\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt.$$

2) D'apès un calcul simple, on trouve que

$$\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p,\lambda,s)=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{(p-1-q)\,s^q\left(1-t^{q+1}\right)+(p-1+\alpha)\,s^{-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$-\ \frac{p+1}{p^2}\int_0^1\frac{\left[s^q\left(1-t^{q+1}\right)+s^{-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]\left[\frac{p-1-q}{q+1}s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]}{[F(s)-F(st)]^{\frac{2p+1}{p}}}dt$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{\left[(p-1+\alpha)\,s^{-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)+(p-1-q)\,s^q\left(1-t^{q+1}\right)\right]}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$-\frac{p+1}{p^2}\int_0^1\frac{\left[\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}s^{-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)+\frac{p-1-q}{q+1}s^q\left(1-t^{q+1}\right)\right]\left[s^{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+s^{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]}{[F(s)-F(st)]^{\frac{2p+1}{p}}}dt$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^1\left[(p-1+\alpha)\,s^{-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)+(p-1-q)\,s^q\left(1-t^{q+1}\right)\right][F(s)-F(st)]^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}dt+$$

$$-\frac{p+1}{p^2}\int_0^1\left[\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}s^{-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)+\frac{p-1-q}{q+1}s^q\left(1-t^{q+1}\right)\right]G(s,t)\,[F(s)-F(st)]^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}dt$$

$$=\frac{(p-1+\alpha)}{p}s^{-\alpha}\int_0^1\frac{1-t^{1-\alpha}}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+\frac{(p-1-q)}{p}s^q\int_0^1\frac{1-t^{q+1}}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$-\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)s^{-\alpha}\int_0^1\frac{\left(1-t^{1-\alpha}\right)G(s,t)}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$
$$+\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right)s^q\int_0^1\frac{\left(1-t^{q+1}\right)G(s,t)}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt.$$

Comme $t\longmapsto G(s,t)$ strictement croissante alors

$$\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p,\lambda,s)<\left[\frac{p-1+\alpha}{p}s^{-\alpha}\int_0^1\frac{\left(1-t^{1-\alpha}\right)dt}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}+\frac{p-1-q}{p}s^q\int_0^1\frac{\left(1-t^{q+1}\right)dt}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}+\right.$$

$$-\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)s^{-\alpha}\int_0^1\frac{G(s,0)\left(1-t^{1-\alpha}\right)}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$\left.+\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right)s^q\int_0^1\frac{G(s,1)\left(1-t^{q+1}\right)}{[F(s)-F(st)]^{\frac{p+1}{p}}}dt\right]$$

Alors

$$\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p,\lambda,s_*) < \left[\frac{p-1+\alpha}{p}s_*^{-\alpha}\int_0^1 \frac{(1-t^{1-\alpha})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+\right.$$

$$+\frac{p-1-q}{p}s_*^q\int_0^1 \frac{(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$-\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{p-1+\alpha}{1-\alpha}\right)s_*^{-\alpha}\int_0^1 \frac{G(s_*,0)(1-t^{1-\alpha})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$\left.+\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right)s_*^q\int_0^1 \frac{G(s_*,1)(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt\right].$$

Comme s_* est un point critique, alors

$$\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p,\lambda,s_*) < \frac{(q+1-p)(1-\alpha)}{p(q+1)}s_*^q\int_0^1 \frac{(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$+\frac{p-1-q}{p}s_*^q\int_0^1 \frac{(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt$$

$$-\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right)s_*^q\int_0^1 \frac{G(s_*,0)(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt+$$

$$+\frac{p+1}{p^2}\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right)s_*^q\int_0^1 \frac{G(s_*,1)(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt.$$

Finalement

$$\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p,\lambda,s_*) < -\frac{1}{p^2}\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right)\ s_*^q\ K\times\int_0^1 \frac{(1-t^{q+1})}{[F(s_*)-F(s_*t)]^{\frac{p+1}{p}}}dt$$

où

$$K = p(q+\alpha)-(p+1)\left[G(s_*,1)-G(s_*,0)\right].$$

On a

$$G(s,t) = \frac{s^{q+1}(1-t^{q+1})+s^{1-\alpha}(1-t^{1-\alpha})}{\frac{s^{q+1}}{q+1}(1-t^{q+1})+\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}(1-t^{1-\alpha})}$$

$$G(s,0) = \frac{s^{q+1} + s^{1-\alpha}}{\frac{1}{q+1}s^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}s^{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned} G(s,1) &= \lim_{t \to^< 1} G(s,t) \\ &= \frac{(q+1)\,s^{q+1} + (1-\alpha)\,s^{1-\alpha}}{s^{q+1} + s^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Alors

$$K = p(q+\alpha) - (p+1)\left[\frac{(q+1)\,s_*^{q+1} + (1-\alpha)\,s_*^{1-\alpha}}{s_*^{q+1} + s_*^{1-\alpha}} - \frac{s_*^{q+1} + s_*^{1-\alpha}}{\frac{1}{q+1}s_*^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}s_*^{1-\alpha}}\right]$$

$$= p(q+\alpha) - \frac{\frac{(p+1)(q+\alpha)^2}{(1-\alpha)(q+1)}s_*^{2+q-\alpha}}{\left(s_*^{q+1} + s_*^{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{q+1}s_*^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}s_*^{1-\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\frac{p(q+\alpha)}{q+1}s_*^{2+2q} + s_*^{2+q-\alpha}\left[\frac{(q+\alpha)[2p-q-(2p+1)\alpha]}{(q+1)(1-\alpha)}\right] + \frac{p(q+\alpha)}{1-\alpha}s_*^{2-2\alpha}}{\left(s_*^{q+1} + s_*^{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{q+1}s_*^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}s_*^{1-\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\frac{(q+\alpha)}{(q+1)(1-\alpha)}s_*^{2+q-\alpha}\left[2p - q - (2p+1)\,\alpha + p(1-\alpha)\,s_*^{q+\alpha} + p(q+1)\,s_*^{-(q+\alpha)}\right]}{\left(s_*^{q+1} + s_*^{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{q+1}s_*^{q+1} + \frac{1}{1-\alpha}s_*^{1-\alpha}\right)}.$$

Soit

$$K_1 = 2p - q - (2p+1)\,\alpha + p(1-\alpha)\,s_*^{q+\alpha} + p(q+1)\,s_*^{-(q+\alpha)}$$

Comme $s_* \in (s_1, s_2)$, alors

$$K_1 > p(1-\alpha)\left(\frac{p-1+\alpha}{q+1-p}\right) + p(q+1)\left(\frac{1-\alpha}{p-1+\alpha}\right)\left(\frac{q+1-p}{q+1}\right) + 2p - q - (2p+1)\,\alpha$$

$$> p(1-\alpha)\left[\frac{p-1+\alpha}{q+1-p} + \frac{q+1-p}{p-1+\alpha}\right] + (p+1) - (2p+1)\,\alpha + (p-1-q)$$

$$> (p+1) - (2p+1)\,\alpha + \frac{p(1-\alpha)(p-1+\alpha)}{q+1-p} + \left(\frac{q+1-p}{p-1+\alpha}\right)[1-(p+1)\,\alpha].$$

- Si (H_1) est vérifiée, on obtient que $K_1 > 0$
- Maintenant on suppose que (H_2) est vérifiée

Soit $q = (p-1) + z$

$$K_1 > p(1-\alpha)\left(\frac{p-1+\alpha}{z} + \frac{z}{p-1+\alpha}\right) + (p+1) - (2p+1)\alpha - z$$

$$\begin{aligned} &> p(1-\alpha)\left(\frac{(p-1+\alpha)^2 + z^2}{z(p-1+\alpha)}\right) + (p+1) - (2p+1)\alpha - z \\ &> \frac{1}{z(p-1+\alpha)}\left\{\begin{array}{c} p(1-\alpha)\left[z^2 + (p-1+\alpha)^2\right] - z^2(p-1+\alpha) + \\ +z(p-1+\alpha)\left[(p+1) - (2p+1)\alpha\right] \end{array}\right\} \end{aligned}$$

Donc $K_1 > 0$ et par suite

$$\frac{\partial^2 \check{T}_+}{\partial s^2}(p, \lambda, s_*) < 0.$$

Ceci montre que $\check{T}$ strictement concave dans (s_1, s_2), d'où $\check{T}_+$ admet un point critique unique s_* et par suite T_+ admet un unique point critique E^*

■

Remarque : La preuve de ce lemme est une généralisation du lemme 4 dans [63] .

Lemme 5.8 *Pour tout $p > 1$, on a*

1) $\lim_{\lambda \to 0^+} T_+(p, \lambda, E^*) = +\infty.$

2) $\lim_{\lambda \to +\infty} T_+(p, \lambda, E^*) = 0^+.$

3) l'application $\lambda \longmapsto T_+(p, \lambda, E^*)$ est strictement décroissante.

Preuve. Pour tout $p > 1$, on a

1)

$$T_+(p, \lambda, E^*) = \sup_{E>0} T_+(p, \lambda, E) \geq T_+(p, \lambda, E_1),$$

où

$$\begin{aligned} T_+(p, \lambda, E_1) &= (\lambda)^{\frac{-1}{p}} (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_1}{\left[\frac{1}{q+1} s_1^{q+1}(1 - t^{q+1}) + \frac{1}{1-\alpha} s_1^{1-\alpha}(1 - t^{1-\alpha})\right]^{\frac{1}{p}}} dt \\ &= (\lambda)^{\frac{-1}{p}} (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{\left(\frac{p-1+\alpha}{q-p+1}\right)^{\frac{1}{q+\alpha}}}{\left[\frac{1}{q+1}(1 - t^{q+1})\left(\frac{p-1+\alpha}{q-p+1}\right)^{\frac{q+1}{q+\alpha}} + \frac{1}{1-\alpha}(1 - t^{1-\alpha})\left(\frac{p-1+\alpha}{q-p+1}\right)^{\frac{1-\alpha}{q+\alpha}}\right]^{\frac{1}{p}}} dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\lambda\to 0^+} T_+\left(p,\lambda,E_1\right)=+\infty,$$

et par suite

$$\lim_{\lambda\to 0^+} T_+\left(p,\lambda,E^*\right)=+\infty.$$

2) On a

$$T_+\left(p,\lambda,E\right)=\left(\lambda p'\right)^{\frac{-1}{p}} s_+\left(p,\lambda,E\right)\int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{s_+^{q+1}(p,\lambda,E)}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{s_+^{1-\alpha}(p,\lambda,E)}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}},$$

et

$$\begin{aligned}
T_+\left(p,\lambda,E^*\right)&=\left(\lambda p'\right)^{\frac{-1}{p}} s_+\left(p,\lambda,E^*\right)\int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{s_+^{q+1}(p,\lambda,E^*)}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)+\frac{s_+^{1-\alpha}(p,\lambda,E^*)}{1-\alpha}\left(1-t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\
&\leq \left(\lambda p'\right)^{\frac{-1}{p}} s_+\left(p,\lambda,E^*\right)\int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{s_+^{q+1}(p,\lambda,E^*)}{q+1}\left(1-t^{q+1}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\
&=\left(\frac{p'}{q+1}\right)^{\frac{-1}{p}}\lambda^{\frac{-1}{p}} s_+^{\frac{p-1-q}{p}}\left(p,\lambda,E^*\right)\int_0^1\frac{dt}{\left(1-t^{q+1}\right)^{\frac{1}{p}}}\\
&\leq\left(\frac{p'}{q+1}\right)^{\frac{-1}{p}}\lambda^{\frac{-1}{p}} s_1^{\frac{p-1-q}{p}}\left(p,\lambda,E_1\right)\int_0^1\frac{dt}{\left(1-t^{q+1}\right)^{\frac{1}{p}}}\\
&\leq\left(\frac{p'}{q+1}\right)^{\frac{-1}{p}}\lambda^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{p-1+\alpha}{q-p+1}\right)^{\frac{p-1-q}{p(q+\alpha)}}\int_0^1\frac{dt}{\left(1-t^{q+1}\right)^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand λ tend vers $+\infty$, on obtient

$$0\leq\lim_{\lambda\to+\infty}T_+\left(p,\lambda,E^*\right)\leq\left[\left(\frac{p'}{q+1}\right)^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{p-1+\alpha}{q-p+1}\right)^{\frac{p-1-q}{p(q+\alpha)}}\int_0^1\frac{dt}{\left(1-t^{q+1}\right)^{\frac{1}{p}}}\right]\times\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{\frac{-1}{p}}=0,$$

d'où

$$\lim_{\lambda\to+\infty}T_+\left(p,\lambda,E^*\right)=0^+.$$

3) Pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $E>0$, on a

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}\left(p,\lambda,E\right)=\left(\lambda p'\right)^{\frac{-1}{p}}\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p,\lambda,E\right)\int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{H(p,s_+(p,\lambda,E))-H(p,u)}{ps_+(p,\lambda,E)[F(s_+(p,\lambda,E))-F(u)]^{\frac{p+1}{p}}}du \tag{5.4}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_+}{\partial\lambda}\left(p,\lambda,E\right)&=\left(\lambda p'\right)^{\frac{-1}{p}}\frac{\partial s_+}{\partial\lambda}\left(p,\lambda,E\right)\int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{H(p,s_+(p,\lambda,E))-H(p,u)}{ps_+(p,\lambda,E)[F(s_+(p,\lambda,E))-F(u)]^{\frac{p+1}{p}}}du \qquad (5.5)\\
&\quad-\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\lambda^{-1-\frac{1}{p}}\int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{du}{p\left[F\left(s_+\left(p,\lambda,E\right)\right)-F\left(u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

On mélange (5.4) et (5.5), on obtient

$$-\frac{\partial s_+}{\partial \lambda}(p,\lambda,E)\times\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,\lambda,E)+\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\lambda,E)\times\frac{\partial T_+}{\partial \lambda}(p,\lambda,E)$$

$$=-\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\lambda^{-1-\frac{1}{p}}\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\lambda,E)\int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{du}{p\left[F\left(s_+\left(p,\lambda,E\right)\right)-F\left(u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Comme

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\lambda,E)>0 \text{ et } \int_0^{s_+(p,\lambda,E)}\frac{du}{p\left[F\left(s_+\left(p,\lambda,E\right)\right)-F\left(u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}>0$$

il résulte que pour tout $p>1$, $\lambda>0$ et $E>0$, on a

$$-\frac{\partial s_+}{\partial \lambda}(p,\lambda,E)\times\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,\lambda,E)+\frac{\partial s_+}{\partial E}(p,\lambda,E)\times\frac{\partial T_+}{\partial \lambda}(p,\lambda,E)<0.$$

Comme

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,\lambda,E^*)=0,$$

on obtient

$$\frac{\partial T_+}{\partial \lambda}(p,\lambda,E^*)<0.$$

C'est-à-dire la fonction $\lambda\longmapsto T_+(p,\lambda,E^*)$ est strictement décroissante. ■

5.3 Preuve des résultats principaux

Preuve de l'assertion (A)

• Supposons que $0<q<p-1$.

D'après les lemmes 5.2 et 5.3, on a

• $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+(p,\lambda,E)=0^+$.

• $\lim\limits_{E\to +\infty} T_+(p,\lambda,E)=+\infty$.

• La fonction $E\mapsto T_+(p,\lambda,E)$ est strictement croissante sur $(0,+\infty)$.

Alors l'équation de la variable E, $T_+(p,\lambda,E)=\dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0,+\infty)$.

Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que le problème (5.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A^+.

Preuve de l'assertion (B)

• Supposons que $q=p-1$.

D'après les lemmes 5.2 et 5.3, on a

• $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+(p,\lambda,E)=0^+$.

• $\lim\limits_{E\to +\infty} T_+(p,\lambda,E)=\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}$.

- La fonction $E \mapsto T_+(p,\lambda,E)$ est strictement croissante sur $(0,+\infty)$.
  Alors l'équation de la variable E, $T_+(p,\lambda,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0,+\infty)$ si et seulement si $\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}} > \frac{1}{2}$.
  Donc si on pose $\lambda_* = (p-1)\left[\left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)\right]^p$ on obtient que

i) Si $\lambda \geq \lambda_*$, le problème (5.1) n'admet aucune solution positive.
ii) Si $\lambda < \lambda_*$, le problème (5.1) admet exactement une solution positive et de plus elle est dans A^+.

Preuve de l'assertion (C)

- Supposons que (H_1) ou (H_2) est satisfaite.

D'après les lemmes 5.2 et 5.4, on a

- $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+(p,\lambda,E) = 0^+$.
- $\lim\limits_{E\to +\infty} T_+(p,\lambda,E) = 0^+$.
- L'application $E \mapsto T_+(p,\lambda,E)$ admet un unique point critique E^*.
  Alors l'équation de la variable E, $T_+(p,\lambda,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0,+\infty)$ si et seulement si $T_+(p,\lambda,E_*) \geq \frac{1}{2}$.
  Maintenant par le lemme 5.8, il existe un réel $\lambda_{**} > 0$ tel que
- $T_+(p,\lambda,E^*) < \dfrac{1}{2}$, pour tout $\lambda > \lambda_{**}$.
- $T_+(p,\lambda_{**},E^*) = \dfrac{1}{2}$,
- $T_+(p,\lambda,E^*) > \dfrac{1}{2}$, pour tout $\lambda < \lambda_{**}$.
- Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\lambda,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution positive dans $(0,+\infty)$ si et seulement si $\lambda \leq \lambda_{**}$.
  Ainsi par le théorème (1.1), il résulte que

i) Si $\lambda > \lambda_{**}$, le problème (5.1) n'admet aucune solution positive.
ii) Si $\lambda = \lambda_{**}$, le problème (5.1) admet une solution positive et de plus elle est dans A^+.
iii) Si $\lambda < \lambda_{**}$, le problème (5.1) admet exactement deux solutions positives et elles sont dans A^+.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse on a présenté quelques résultats concernant le nombre exact des solutions positives pour certaines classes de problèmes aux limites quasilinéaires du type

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = g\left(u\right) \text{ dans } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, pour $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et g une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Suivant les cas particuliers de la fonction g, on a étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives à ce type de problèmes, en utilisant la méthode de quadrature.

Dans le premier chapitre, on a présenté la méthode de quadrature et on a donné une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions positives au problème considéré.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives pour le problème aux limites (1) dans le cas où $g\left(u\right) = a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) + c$, avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$

Dans le troisième chapitre, on a considéré le cas où $g\left(u\right) = a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) - c$, avec aussi $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

Dans le quatrième chapitre, on a étudié le nombre exact des solutions positives pour le problème (1) dans le cas où $g\left(u\right) = \mu - f\left(u\right)$, avec $\mu > 0$ et f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ $p-$convexe satisfaisant les conditions suivantes.

(H1) $f \in C\left(\mathbb{R}_+\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

(H2) $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{\varphi_p(u)} = a$ où $a \in [0, +\infty[$.

(H3) $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{\varphi_p(u)} = b$ où $b \in]0, +\infty]$.

(H4) $\forall p > 1$, $\forall u > 0$, $(p-2)\, f'\left(u\right) - uf''\left(u\right) < 0$.

(H5) $\lim\limits_{u \to 0^+} uf'\left(u\right) = 0^+$

(H6) $u \mapsto \dfrac{f\left(u\right)}{\varphi_p\left(u\right)}$ est strictement croissante.

Enfin dans le dernier chapitre on a étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives pour le problème (1) dans le cas où $g(u) = \lambda(u^q + u^{-\alpha})$, avec les paramètres réels $\lambda > 0$, $q > 0$ et $\alpha \in [0, 1[$.

Pour les perspectives on propose deux problèmes ouverts

Problème 1

L'étude du nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = a\varphi_p(u) - bf(u) + c \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$

$p-$convexe satisfait les hypothèses précédentes $(H1) - (H6)$

Problème2

L'étude du nombre exact des solutions positives pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda(u^q + u^{-\alpha}) \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\lambda > 0$, $\frac{1}{2p+1} \leq \alpha < 1$ et

$$q > p - 1 + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{p-1+\alpha}{(p+1)\ \alpha - 1}\right] \times\right.$$

$$\left.\times\left[(p+1) - (2p+1)\alpha + \sqrt{[(p+1) - (2p+1)\alpha]^2 + 4p(1-\alpha)[(p+1)\alpha - 1]}\right]\right\}.$$

.

Bibliographie

[1] I. Addou, *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic boundary value problems*, Electron. J. Differential Equations, 21 (1999) 1-27.

[2] I. Addou and A. Benmezai, *Exact number of positive solutions for a class of quasilinear bounadary value*, Dynam. Systems Appl. 8 (1999) 147-180.

[3] I. Addou and A. Benmezai, *Boundary value problems for the one-dimensional $p-$Laplacian with even superlinearity*, Electron. J. Differential Equations, 9 (1999) 1-29.

[4] I. Addou, S. M. Bouguima, M. Derhab and Y. S. Raffed, *On the number of solutions of a quasilinear elliptic class of B.V.P. with jumping nonlinearities*, Dynam. Systems Appl. 7 (4) (1998) 575-599.

[5] I. Addou, S. M. Bouguima, A. Benmezai and M. Derhab, *Exactness results for generalized Ambrosetti-Brezis-Cermi and related one-dimensional elliptic equations*, Electron. J. Differential Equations, 66 (2000) 1-34.

[6] G. A. Afrouzi and S. H. Rasouli, Populations models involving the $p-$Laplacian with indefinite weight and constant yield harvesting, Chaos Solitons Fractals, **31** (2007) 404-408.

[7] R. P. Agarwal and D.O'regan, *A note on existence of nonnegative solutions to singular semi-positone problems,* Nonlinear Anal. 36 (1999) 615-622.

[8] A. Ambrosetti, On the number of solutions of some semilinear elliptic problems, Boll. Unione Mat. Ital. (9) 4 (3) (2011) 313-319.

[9] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, Nonlinear Analysis and semilinear elliptic problems, Cambridge Stud. Adv. Math. 104, Cambridge Univ. press, (2006).

[10] A. Ambrosetti and G. Mancini, Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems, Nonlinear Anal. T. M. A. 3 (5) (1979) 635-645.

[11] A. Ambrosetti and G. Prodi, A primer of Nonlinear Analysis, Cambridge Stud. Adv. Math. 34, Cambridge Univ. press, (1993).

[12] F. Ammar-Khodja, *Une revue et quelques compléments sur la détermination du nombre des solutions de certains problèmes elliptiques semi-linéaires, Thèse Doctorat $3^{\text{ème}}$ Cycle, Université Pierre et Marie Curie*, Paris VI, (1983).

[13] C. Aranda and T. Godoy, Existence and multiplicity of positive solutions for a singular problem associated to the $p-$Laplacian operator, Electron. J. Differential Equations, 132 (2004) 1-15.

[14] D. Arcoya and L. Moreno-Mérida, Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a strongly singular nonlinearity, Nonlinear Anal. T. M. A. 95 (2014) 281-291.

[15] H. Berestycki, Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques, J. Funct. Anal. 40 (1981) 1-19.

[16] A. Callegari and A. Nachman, A nonlinear singular boundary value problem arising in the theory of pseudoplastic fluids, SIAM J. Appl. Math. 38 (1980) 275-281.

[17] A. Cañada, P. Drábek and J. L. Gámez, Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997) 4231-4249.

[18] Wang Chunpeng, Yin Jingxue and Wen Mingfeng, Periodic optimal control for a degenerate nonlinear diffusion equation, Comput. Math. Model. 17 (2006) 364-375.

[19] M. M. Coclite and G. Palmieri, On a singular nonlinear Dirichlet problem, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989) 1315-1327.

[20] A. Collins, M. Gilliland, C. Henderson, S. Koone, L. McFerrin and E. K. Wampler, Population models with diffusion and constant yield harvesting, Rose-Hulman Institute of Technology Undergraduate Math. Journal, 5 (2004).

[21] Y. B. Deng, *Existence of multiple positive solutions for* $-\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} + \lambda u + \mu\ f(x)$, Acta Math. 9 (1993) 311-320.

[22] M. Derhab, *Contribution to quasilinear elliptic problems, Thèse de Doctorat d'Etat*, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2003.

[23] M. Derhab, *Problèmes aux limites quasilinéaires avec nonlinéarités à saut*, Thèse de Magister Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 1997.

[24] M. Derhab and M. Meghnafi, Exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 15 (4) (2008) 15-37.

[25] M. Derhab and M. Meghnafi, On the number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with constant yield harvesting, Commun. Appl. Anal. 17 (1) (2013) 249-272.

[26] Wandi Ding and Suzanne Lenhart, Optimal Harvesting of a spatially explicit fishery model, Nat. Resour. Model. 22 (2009) 173-211.

[27] J. Goddard II, E. k. Lee and R. Shivaji, Population models with nonlinear boundary conditions, Electron. J. Differ. Equ. Conf. 19 (2010) 135-149.

[28] J. Giacomoni and K. Sreeandh, *Multiplicity results for a singular and quasilinear equation, Discret Contin. Dyn.Syst.* (2007) 429-435.

[29] M. Guedda and L. Veron, *Bifurcation phenomena associate to the* $p-$*Laplacian operator*, Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988) 419-431.

[30] Y. Haitao, Multiplicity and asymptotic behavior of positive solutions for a singular semilinear elliptic problem, J. Differential Equations, 189 (2003) 487-512.

[31] J. Hernández and F. J. Mancebo, Singular elliptic and parabolic equations (M. Chipot and P. Quittner, eds.), Handb. Differ. equ. 3, Elsevier (2006) 317-400.

[32] N. Hirano, C. Saccon and N. Shioji, Existence of multiple positive solutions for singular elliptic problems with concave and convex nonlinearities, Adv. Differential Equations, 9, (1-2) (2004) 197-220.

[33] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations,. Russian Math. Surveys 42 (1987) 169-222.

[34] L. S. Kalashnikova, I. N. Taganov and V. P. Volkova, Variational solution of equation of nonlinear mass and energy transfer, Journal of engineering physics, **33** (1977) 1197-1202.

[35] J. Karatson and P. L. Simon, Exact multiplicity for degenerate two-point boundary value problems with $p-$convex nonlinearity, Nonlinear Anal. T. M. A. 52 (6) (2003) 1569-1590.

[36] T. W. Laetsch, The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/1971) 1-13.

[37] P. Lindqvist, Note on a nonlinear eigenvalue problem, Rocky Mountain J. Math. 23 (1999) 281-288.

[38] Zhaoli Liu and Xuemei Zhang, Exact number of solutions of two point boundary value problems involving concave and convex nonlinearities, Nonlinear Anal. 46 (2001) 181-197.

[39] R. A. Mashiyev, G. Alisoy and S. Ogras, Solutions to semilinear $p-$Laplacian Dirichlet problem in population dynamics, Appl. Math. Mech. (English Ed.) 31 (2010) 247-254.

[40] R. Manasevich and F. Zanolin, Time-mappings and Multiplicity of Solutions for the one-dimensional $p-$Laplacian, Nonlinear Anal. T. M. A. 21 (1993) 269-291.

[41] M. Meghnafi, Sur le nombre des solutions positives d'une classe de problèmes aux limites quasilinéaires, mémoire de Magister, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2005.

[42] Z. Opial, Sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle $x'' + f\left(x, x'\right) x' + g\left(x\right) = p\left(t\right)$, Ann. Polon. Math. XI (1961).

[43] S. Oruganti, J. Shi and R. Shivaji, Diffusive logistic equation with constant yield harvesting, I, steady states, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002) 3601-3619.

[44] S. Oruganti, J. Shi and R. Shivaji, Logistic equation with the p-Laplacian and constant yield harvesting, Abstr. Appl. Anal. 9 (2004) 723-727.

[45] S. Oruganti and R. Shivaji, Existence results for cl asses $p-$Laplacian semipositone equations, Bound. Value Probl. (2006) 1-7.

[46] M. Ôtani, A remark on certain nonlinear elliptic equations, Proceedings of the Faculty of Sciences, Tokai University, **19** (1984) 23-28.

[47] M. Ôtani, *On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré type nonlinearities*, Nonlinear Anal. 8 (1984) 1255-1270.

[48] Peter Y. H. Pang, Yifu Wang and Jingxue Yin, Periodic solutions for a class of reaction-diffusion equations with $p-$Laplacian, Nonlinear Anal. Real World Appl.**11** (2010) 323-331.

[49] P. Pucci and J. Serrin, The strong maximum principle revisited, J. Differential Equations, 196 (2004) 1-66.

[50] V. Rădulescu, Combined effects in nonlinear singular elliptic problems with convection, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 53 (2008) 543-553.

[51] M. Ramaswamy and P. N. Srikanth, *on the global set of solutions to a nonlinear O.D.E. theoretical and numerical description*, J. Differential Equations, 65 (1986) 1-48.

[52] B. Ruf, Singularity theory and the geometry of a nonlinear elliptic equation, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 17 (1990) 1-33.

[53] B. Ruf and S. Solimin, *On a class of Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions*, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986) 761-771.

[54] J. SÀnchez and P. Ubilla, *Uniqueness results for the one-dimensional m−Laplacian considering superlinear nonlinearities*, Nonlinear Anal. T. M. A. 54 (2001) 927-938.

[55] C. Scovel, *Geometry of somme nonlinear differential opeators*, ph. thesis, Courant Institute, New York Univ. (1984).

[56] P. L. Simon, Exact multiplicity of positive for a class of singular semilinear equations, Differ. Equ. Dyna. Syst. 17 (1 and 2) (2009) 147-161.

[57] J. A. Smoller and A. G. Wassermann, *Global bifurcation of steady-state solutions*, J. Differential equations 39 (1981) 269-290.

[58] J. A. Smoller and A. G. Wasserman, On the monotonicity of the time-map, J. Differential Equations 77 (1989) 287-303.

[59] K. M. Sundaram and G. Nath, Flow and heat transfer for a power-law electrically conducting fluid flowing betwen parallel plates under trasverse magnetic field with viscous dissipation, Proc. Indian Acad. Sci Math. Sci. 83 A (1976) 18-201.

[60] Kazuaki Taira, Introduction to Diffusive logistic equations in population dynamics, Korean, Comput. Appl. Math. 9 (2002) 289-347.

[61] Y. Wang, Y. Wang and J. Shi, Exact multiplicity of solutions to a diffusive logistic equation with harvesting, Appl. Math. Comput. 216 (2010) 1531-1537.

[62] S. Yijing, W. Shaoping and L. Yiming, Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems, J. Differential Equations, 176 (2001) 511-531.

[63] Zhongli Wei, *Exact number of solutions for singular Dirichlet boundary value problems*, Rocky Mountain J. Math. 35 (6) (2005) 2113-2128.

[64] N. Yebari and A. Zertiti, *Existence of non- negative solutions for nonlinear equations in the semi - position case*, Electron. J. Differ. Equ. Conf. 14 (2006) 249-254.

[65] Xiaomin Zheng, *Un résultat de non-existence de solution positive pour une équation elliptique*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire 2 (7) (1990) 91-96.

[66] M. Zhu, Uniqueness Results through a Priori Estimates I. A Three Dimensional Neumann Problem, J. Differential Equations, 154 (1999) 284-317.

Abstract

The objectif of this thesis is to study the existence and multiplicity of positive solutions for a certains classes of quasilinear boundary value problems.
This thesis is divided on five chapters.
In the first chapter, we present the quadrature method. The second chapter is devoted to the exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems. The third chapter is concerned to the number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with constant yield harvesting. The fourth chapter is devoted to the exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems with **p**-concave nonlinearity. Finally in the chapter five, we study the exact number for a class of quasilinear boundary value problems with a singular nonlinearity.

Key words: p-Laplacian, positive solutions, time-mapping approach, **p**-concave function, singular nonlinearity.
AMS subject Classification : 34B15-34C10.

Résumé

L'objet de Cette thèse est l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions positives pour certaines classes de problèmes aux limites quasilinéaire.
Cette thèse est divisée en cinq chapitres.
Dans le premier chapitre, on présente la méthode de quadrature. Le deuxième chapitre est consacré au nombre exact de solutions positives d'une certaine classe de problèmes aux limites quasilinéaire. Le troisième chapitre est consacré au nombre des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaire avec quotas constant. Le quatrième chapitre est consacré au nombre exact de solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaire avec une nonlinéarité **p**-concave. Finalement dans le cinquième chapitre on étudie le nombre exact de solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilinéaire avec une nonlinéarité singuliere.
Mots clés : p-Laplacian, solutions positives, application temps, nonlinéarité **p**-concave , nonlinéarité singulière.
Classification subjective AMS : 34B15-34C10.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هودراسة وجود و تعدد الحلول الموجبة لبعض أصناف من المسائل الحدية الشبه خطية.
هذه الأطروحة مقسمة الى خمسة فصول
في الفصل الأول' نقدم طريقة التربيع. الفصل الثاني مخصص لدراسة عدد الحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدية شبه الخطية. الفصل الثالث مخصص لدراسة عدد الحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدية شبه خطية مع حصاد ثابت. الفصل الرابع مخصص لدراسة عدد الحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدية شبه خطية مع طرف ثان **p** مقعر وأخيرا في الفصل الخامس ندرس عدد الحلول الموجبة لصنف من المسائل الحدية شبه خطية مع طرف ثان معتل.
الكلمات المفتاحية :
p-Laplacian' الحلول الموجبة' تطبيق الزمني' دالة- **p** مقعرة' غير خطية معتلة.
Classification subjective AMS : 34B15-34C10.

Publications

INTERNATIONAL PUBLICATIONS (USA)

Communications on Applied Nonlinear Analysis
Volume 15(2008), Number 4, 15–37

Exact Number of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Boundary Value Problems[1]

Mohammed Derhab
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences
B.P. 119 Tlemcen, 13000, Algérie.
derhab@yahoo.fr

Mustapha Megnafi
Centre Universitaire de Béchar
B. P. 417 Béchar, 08000, Algérie.
megnafi2002@yahoo.fr

Communicated by Johnny Henderson
(Received May 2008; Accepted July 2008)

Abstract

Using time-mapping approach, we study the exact number of positive solutions of the following quasilinear boundary value problem

$$\begin{aligned} &-(\varphi_p(u'))' = f(u) + \mu \text{ in } (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0, \end{aligned}$$

where $p > 1$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $(\varphi_p(u'))'$ is the one dimensional $p-$Laplacian, μ is a strictly negative real parameter and f is a p-convex function.

Key words: $p-$Laplacian; positive solutions; time-mapping approach; $p-$convex function

AMS Subject Classification: 34B15, 34C10

[1]Research partially supported by a MESRS-DRS grant B0202007003

1 Introduction

The purpose of this work is to study the existence and uniqueness of positive solutions of the following quasilinear boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = f\left(u\right) + \mu \text{ in } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu < 0$ and $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is a p-convex function.

Several authors have been interested in problem (1) including higher dimensions under several assumptions. Let us recall some of them.

In [4], the author consider the boundary value problem:

$$\begin{cases} -u'' = u^2 - \lambda \text{ in } \left(0,1\right), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$.

Using the quadrature method, he obtained a complete description of the solution set of the problem (2).

In [10], the authors studied the following problem:

$$\begin{cases} -u'' = g(u) - \lambda \text{ in } \left(0,\pi\right), \\ u\left(0\right) = u\left(\pi\right) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

where $g \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$, $\lim\limits_{s \to -\infty} g'\left(s\right) < +\infty$ and $\lim\limits_{s \to +\infty} g'\left(s\right) = +\infty$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.

Using variational methods, they show that for any $k \in \mathbb{N}$, there exists $\lambda_k \in \mathbb{R}$ such that for $\lambda > \lambda_k$, problem (3) has at least k distinct solutions.

Prior to the paper mentioned above, C. Scovel [11] obtained the same results as B. Ruf and S. Solimini [10] in the special case where $g(u) = 6u^2$. He proved that for any integer $k \geq 1$, there exists values $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k$ such that for $\lambda > \lambda_k$, problem (3) with $g(u) = 6u^2$ admits at least k distinct solutions.

In [8], the authors studied the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^k - \lambda \text{ in } B, \\ u > 0 \text{ in } B, \\ u = 0 \text{ on } \partial B, \end{cases} \tag{4}$$

where B is the unit in R^N, $N \geq 3$ and $\lambda > 0$. They proved that if $1 < k < \dfrac{N+2}{N-2}$, then there exists $\lambda_* > 0$ such that for $\lambda > \lambda_*$, the problem (4) has no solution and it has at least one solution for $\lambda \leq \lambda_*$.

In [7], the author consider the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = u^k - \lambda h \text{ in } \Omega, \\ u > 0 \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with C^2 boundary, $1 < k < 2^* - 1$, where $2^* = \frac{2N}{N-2}$ if $N > 2$ and $2^* = +\infty$ if $N = 1, 2$ and h is a continuous function from Ω to $\mathbb{R}$ and $\lambda > 0$.

Under general assumption on h, he prove that there exists $\lambda^* > 0$, such that problem (5) has no solution for $\lambda > \lambda^*$.

In [12], the author consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) - \lambda h \text{ in } \Omega, \\ u > 0 \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary and $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function such that $f(0) = 0$, $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ is increasing and $\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$ and $\lambda > 0$.

Under general assumption on h, he show that if λ is great enough, then problem (6) has no solution.

In [1], the authors studied the problem (1) with $f(u) = |u|^p$ and $\mu \in \mathbb{R}$. Using time-mapping analysis, they determine a lower bound for the number of solutions and established their nodal properties.

In [13], the authors consider the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda (u^q - 1) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

where $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$, Ω is a connected and bounded subset of $\mathbb{R}^N$ with boundary $\partial\Omega$ of class $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$ and $0 < p - 1 < q < p^* - 1$, with $p^* = \frac{Np}{N-p}$ if $1 < p < N$, and $p^* = +\infty$ if $p \geq N$.

Using the fibring method, they prove that the problem (7) admits a nontrivial nonnegative solution for all $\lambda > 0$.

Now, we ask the following question:

Do the results concerning positive solutions in [1] remain valid if one replace the function $u \longmapsto |u|^p$ by a more general p-convex function?

The aim of this work is to give an answer to the question cited above.

The paper is organized as follows: In section 2, we state our main result. In section 3, we state the method used to prove our main result. Some preliminary lemmas are the aim of section 4. Section 5 is devoted to the proof of our main result. In section 6, we give some examples to illustrate our results. Finally in section 7 we give an Appendix

2 Main result

We consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = f(u) + \mu \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

where $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu < 0$ and $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfies the following conditions:

(H1) $f \in C(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+^*)$

(H2) $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = a$ where $a \in \mathbb{R}_+$.

(H3) $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = b$ where $b \in \left]0, +\infty\right]$.

(H4) $\lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = 0$.

(H5) $\forall p > 1$, $\forall u > 0$, $(p-2) f'(u) - uf''(u) < 0$.

Remark: The functions f satisfying the hypothesis (H5) are called $p-$convex.

To state our result, define

$$S^+ = \left\{ u \in C^1([0,1]) ; u > 0 \text{ in } (0,1),\ u(0) = u(1) = 0 \text{ and } u'(0) > 0 \right\}$$

Let A^+ be the subset of S^+ composed by the functions u satisfying:

- u is symmetrical about $\frac{1}{2}$.
- The derivative of u vanishes once and only once in $(0,1)$.

Let B^+ be the subset of $C^1([0,1])$ composed by the functions u satisfying:

- $u > 0$ in $(0,1)$ and $u(0) = u(1) = u'(0) = 0$.
- u is symmetrical about $\frac{1}{2}$.
- The derivative of u vanishes once and only once in $(0,1)$.

We denote by $\lambda_1(p)$ the first eigenvalue of the following boundary value problem:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda \varphi_p(u) \text{ in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

We have

$$\lambda_1(p) := (p-1) \left(2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \right)^p = (p-1) \left(\frac{2\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}} \right)^p$$

The main result of this work is:

Theorem 2.1 *Assume that $p > 1$, $\mu < 0$ and f satisfies (H1)-(H5).*

(A) If one of the following conditions holds:

(i) $a < b \leq \lambda_1(p)$, or

(ii) $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) \leq a < b$.

Then, for each $\mu < 0$, problem (8) admits no positive solution.

(B) If one of the following conditions holds:

(i) $a \leq \lambda_1(p) < b \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$, *or*

(ii) $\lambda_1(p) < a < b \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$.

Then for each $\mu < 0$, *problem* (8) *admits a unique positive solution and it belongs to* A^+.

(C) If $a < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) < b$, *then there exists* $\mu_*(p,a,b) < 0$ *such that:*

- *If* $\mu < \mu_*(p,a,b)$, *problem* (8) *admits no positive solution,*
- *If* $\mu = \mu_*(p,a,b)$, *problem* (8) *admits a unique positive solution and it belongs to* B^+,
- *If* $\mu > \mu_*(p,a,b)$, *problem* (8) *admits a unique positive solution and it belongs to* A^+.

3 Time-mapping approach

In this section we introduce the well-know time mapping approach (see for instance [1]-[5]).

Consider the following boundary value problem:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = g(u) \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

where $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Define $G(s) := \int_0^s g(t)\,dt$

For any $E \geq 0$ and $p > 1$, let

$$X_+(p,E) = \left\{ s > 0;\ E^p - \frac{p}{p-1} G(\zeta) > 0,\ \forall\ \zeta,\ 0 < \zeta < s \right\}$$

and

$$S_+(p,E) = \begin{cases} 0 \text{ if } X_+(p,E) = \emptyset \\ \mathrm{Sup} X_+(p,E) \text{ otherwise} \end{cases}$$

Let

$$D = \{E \geq 0;\ 0 < S_+(p,E) < +\infty \text{ and } g(S_+(p,E)) > 0\}$$

and we define the following time-map

$$T_+(p,E) = \int_0^{S_+(p,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1} G(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du$$

We now state the following well know theorem without proof (See for instance [5]).

Theorem 3.1 *Assume that $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $E \geq 0$ and $p > 1$. Then:*

- *Problem(9) admits a solution $u \in A^+$ satisfying $u'(0) = E$ if and only if $E \in D \cap (0, +\infty)$ and $T_+(p, E) = \frac{1}{2}$. In this case the solution is unique and its sup-norm is equal to $S_+(p, E)$.*
- *Problem(9) admits a solution $u \in B^+$ if and only if $0 \in D$ and $T_+(p, 0) = \frac{1}{2}$. In this case the solution is unique and its sup-norm is equal to $S_+(p, 0)$.*

4 Preliminary lemmas

Lemma 4.1 *Consider the equation in $s \in \mathbb{R}_+$:*

$$E^p - \frac{p}{p-1}(F(s) + \mu s) = 0 \tag{10}$$

where $F(s) := \int_0^s f(t)\,dt$, $p > 1$, $\mu < 0$ and $E \geq 0$.

Then for any $E \geq 0$, equation (10) admits a unique positive zero $r_+(p, \mu, E)$. Moreover

i) $\forall\ E \geq 0,\ f(r_+(p, \mu, E)) + \mu > 0.$

ii) The function $E \mapsto r_+(p, \mu, E)$ is C^1 in $(0, +\infty)$ and

$$\frac{\partial r_+}{\partial E}(p, \mu, E) = \frac{(p-1)E^{p-1}}{f(r_+(p, \mu, E)) + \mu} > 0,\ \forall p > 1,\ \forall \mu < 0 \text{ and } \forall E > 0.$$

iii) $\lim_{E \to 0^+} r_+(p, \mu, E) = r_+(p, \mu, 0)$.

iv) $\lim_{E \to +\infty} r_+(p, \mu, E) = +\infty$.

Proof: The proof of this lemma is similar to that of Lemma 4.1 in [3] or Lemma 8 in [1]. So, it is omitted. □

Now, we are ready, for any $p > 1$, $\mu < 0$ and $E \geq 0$, to compute $X_+(p, \mu, E)$ as defined in section 3.

In fact

$$X_+(p, \mu, E) =]0, r_+(p, \mu, E)[$$

Then

$$S_+(p, \mu, E) = r_+(p, \mu, E)$$

On other hand, we have

$$\begin{aligned} D &= \{E \geq 0,\ 0 < S_+(p, \mu, E) < +\infty \text{ and } f(S_+(p, \mu, E)) + \mu > 0\} \\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

By lemma 4.1, we have

$$\lim_{E\to 0^+} S_+\left(p,\mu,E\right) = S_+\left(p,\mu,0\right) \tag{11}$$

$$\lim_{E\to +\infty} S_+\left(p,\mu,E\right) = +\infty \tag{12}$$

and

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}\left(p,\mu,E\right) = \frac{\left(p-1\right)E^{p-1}}{f\left(S_+\left(p,\mu,E\right)\right)+\mu} > 0,\ \forall p>1,\ \forall\mu<0 \text{ and } \forall E>0. \tag{13}$$

At present, we define, for any $p>1$, $\mu<0$ and $E>0$, the time-map T_+ by:

$$T_+\left(p,\mu,E\right) = \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1}\left(F\left(u\right)+\mu u\right)\right]^{-\frac{1}{p}} du$$

and for any $p>1$ and $\mu<0$, the application h_+ by:

$$h_+\left(p,\mu\right) = \int_0^{S_+(p,\mu)} \left[-\frac{p}{p-1}\left(F\left(u\right)+\mu u\right)\right]^{-\frac{1}{p}} du \tag{14}$$

where $S_+\left(p,\mu\right) := S_+\left(p,\mu,0\right)$.

Proposition 4.2 *If u is a positive solution of problem (8), then $u\in A^+\cup B^+$.*

Proof: The proof of proposition 4.2 is established in the Appendix. □

Lemma 4.3 *For any $p>1$ and $\mu<0$, we have:*

i) $\lim_{E\to 0^+} T_+\left(p,\mu,E\right) = h_+\left(p,\mu\right)$

ii) $\lim_{E\to +\infty} T_+\left(p,\mu,E\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1\left(p\right)}{b}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } b\in\mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{if } b=+\infty \end{cases}$

iii) The function $E\mapsto T_+\left(p,\mu,E\right)$ is strictly decreasing on $\left(0,+\infty\right)$.

Proof: Let $p>1$ and $\mu<0$ be fixed.

i) We have

$$\begin{aligned}\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) &= \lim_{E\to 0^+} \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1}(F(u)+\mu u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\ &= \lim_{E\to 0^+} \int_0^1 S_+(p,\mu,E)\left[E^p - \frac{p}{p-1}(F(S_+(p,\mu,E)t) + \mu S_+(p,\mu,E)t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\ &= \int_0^1 S_+(p,\mu)\left[-\frac{p}{p-1}(F(S_+(p,\mu)t) + \mu S_+(p,\mu)t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\ &= \int_0^{S_+(p,\mu)} \left[-\frac{p}{p-1}(F(u)+\mu u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\ &= h_+(p,\mu)\end{aligned}$$

ii) We distinguish two cases:

Case $b \in \mathbb{R}_+^*$

Since $S_+(p,\mu,E)$ is a zero of the equation (10), it follows that

$$T_+(p,\mu,E) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \left[F(S_+(p,\mu,E)) + \mu S_+(p,\mu,E) - F(u) - \mu u\right]^{-\frac{1}{p}} du$$

Using the change of variable $u = S_+(p,\mu,E)\,t$, we obtain

$$\begin{aligned}T_+(p,\mu,E) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \times \\ &\times \int_0^1 \left[\frac{F(S_+(p,\mu,E)) + \mu S_+(p,\mu,E) - F(S_+(p,\mu,E)t) - \mu S_+(p,\mu,E)t}{S_+^p(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt\end{aligned} \tag{15}$$

Let us rewrite (15) as

$$T_+(p,\mu,E) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{F(S_+(p,\mu,E))}{S_+^p(p,\mu,E)} - \frac{F(S_+(p,\mu,E)t)}{S_+^p(p,\mu,E)} + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$

By (12), it follows that

$$\lim_{E\to+\infty} T_+(p,\mu,E)$$
$$= \lim_{S_+(p,\mu,E)\to+\infty} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{F(S_+(p,\mu,E))}{S_+^p(p,\mu,E)} - \frac{F(S_+(p,\mu,E)\,t)}{(S_+(p,\mu,E)\,t)^p} t^p + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$

Now by the assumption (H3) and using l'Hôpital's rule, we obtain

$$\lim_{S_+(p,\mu,E)\to+\infty} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{F(S_+(p,\mu,E))}{S_+^p(p,\mu,E)} - \frac{F(S_+(p,\mu,E)\,t)}{(S_+(p,\mu,E)\,t)^p} t^p + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$
$$= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{b}{p} - \frac{b}{p} t^p\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$
$$= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 [1-t^p]^{-\frac{1}{p}} dt$$
$$= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Case $b = +\infty$

By the assumption (H3), we have

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$$

Then for all $A_1 > 0$, there exists $A_2 > 0$ such that

$$f(u) > A_1 u^{p-1}, \text{ for all } u > A_2 \tag{16}$$

Let $t \in (0,1)$, we have

$$\begin{aligned}
&\frac{F\left(S_{+}\left(p,\mu,E\right)\right)-F\left(S_{+}\left(p,\mu,E\right)t\right)}{S_{+}^{p}\left(p,\mu,E\right)}\\
&=\frac{\int\limits_{S_{+}(p,\mu,E)t}^{S_{+}(p,\mu,E)} f\left(u\right)du}{S_{+}^{p}\left(p,\mu,E\right)}\\
&=\int\limits_{t}^{1}\frac{f\left(S_{+}\left(p,\mu,E\right)\tau\right)}{S_{+}^{p-1}\left(p,\mu,E\right)}d\tau\\
&> A_{1}\int\limits_{t}^{1}\tau^{p-1}d\tau,\text{ for all } S_{+}\left(p,\mu,E\right)> A_{2}\\
&=\frac{A_{1}}{p}\left(1-t^{p}\right)
\end{aligned}$$

Therefore for all $S_{+}\left(p,\mu,E\right) > A_{2}$, we have

$$\begin{aligned}
T_{+}\left(p,\mu,E\right) &\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{A_{1}}{p}\left(1-t^{p}\right)+\frac{\mu\left(1-t\right)}{S_{+}^{p-1}\left(p,\mu,E\right)}\right]^{-\frac{1}{p}}dt\\
&\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{A_{1}}{p}\left(1-t^{p}\right)+\frac{\mu\left(1-t\right)}{A_{2}^{p-1}}\right]^{-\frac{1}{p}}dt
\end{aligned}$$

Now letting $A_{1}\rightarrow+\infty$, we obtain

$$\lim_{E\rightarrow+\infty}T_{+}\left(p,\mu,E\right)=0$$

iii) Differentiating (15) with respect to E, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{+}}{\partial E}\left(p,\mu,E\right) &= \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\partial S_{+}}{\partial E}\left(p,\mu,E\right)\times\\
&\times\int\limits_{0}^{1}\frac{H\left(\mu,S_{+}\left(p,\mu,E\right)\right)-H\left(\mu,S_{+}\left(p,\mu,E\right)t\right)}{\left[F\left(S_{+}\left(p,\mu,E\right)\right)+\mu S_{+}\left(p,\mu,E\right)-F\left(S_{+}\left(p,\mu,E\right)t\right)-\mu S_{+}\left(p,\mu,E\right)t\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt
\end{aligned}\tag{17}$$

where

$$H\left(\mu,u\right)=pF\left(u\right)-uf\left(u\right)+\left(p-1\right)\mu u$$

We have

$$\frac{\partial H}{\partial u}\left(\mu,u\right)=\left(p-1\right)f\left(u\right)-uf'\left(u\right)+\left(p-1\right)\mu$$

By the assumptions (H1), (H2) and (H4), it follows that

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{\partial H}{\partial u}(\mu, u) = (p-1)\,\mu < 0 \tag{18}$$

and by the assumption (H5), we have

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(\mu, u) = (p-2)\, f(u) - u f''(u) < 0 \tag{19}$$

Then by (19) and (18), it follows that

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\mu, u) < 0, \text{ for all } \mu < 0 \text{ and } u > 0$$

Which implies that

$$H(\mu, S_+(p, \mu, E)) - H(\mu, S_+(p, \mu, E)\, t) < 0, \text{ for all } \mu < 0 \text{ and } t \in (0,1)$$

Hence, the integral in (17) is negative and by (13), it follows that

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p, \mu, E) < 0, \text{ for all } p > 1,\ \mu < 0 \text{ and } E > 0.$$

□

Lemma 4.4 *For all $p > 1$, we have*

i) $\dfrac{\partial S_+}{\partial \mu}(p, \mu) = -\dfrac{S_+(p, \mu)}{f(S_+(p, \mu)) + \mu}$

ii) $\lim\limits_{\mu \to -\infty} S_+(p, \mu) = +\infty$

iii) $\lim\limits_{\mu \to 0^-} S_+(p, \mu) = 0^+$

Proof: Let $p > 1$ be fixed.

i) Since

$$F(S_+(p, \mu)) + \mu S_+(p, \mu) = 0$$

it follows that

$$\frac{\partial S_+}{\partial \mu}(p, \mu) = -\frac{S_+(p, \mu)}{f(S_+(p, \mu)) + \mu}$$

ii) We have

$$F\left(S_+\left(p,\mu\right)\right)+\mu S_+\left(p,\mu\right)=0$$

Dividing this equation by $S_+\left(p,\mu\right)$, we obtain

$$\frac{F\left(S_+\left(p,\mu\right)\right)}{S_+\left(p,\mu\right)}=-\mu$$

when μ tends to $-\infty$, it follows that

$$\frac{F\left(S_+\left(p,\mu\right)\right)}{S_+\left(p,\mu\right)} \text{ tends to } +\infty$$

Therefore, by the hypothesis (H3), we obtain

$$\lim_{\mu\to-\infty} S_+\left(p,\mu\right)=+\infty$$

iii) We have

$$F\left(S_+\left(p,\mu\right)\right)+\mu S_+\left(p,\mu\right)=0$$

when μ tends to 0^-, $S_+\left(p,\mu\right)$ tends to the zero of the following equation:

$$F\left(u\right)=0 \tag{20}$$

Since $u=0$ is the only zero of the equation (20), we obtain

$$\lim_{\mu\to 0^-} S_+\left(p,\mu\right)=0^+$$

□

Lemma 4.5 *For all $p>1$, we have*

i) $$\lim_{\mu\to-\infty} h_+\left(p,\mu\right)=\begin{cases} \dfrac{p}{2\left(p-1\right)}\left(\dfrac{\lambda_1\left(p\right)}{b}\right)^{\dfrac{1}{p}} & \text{if } b\in\mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{if } b=+\infty \end{cases}$$

ii) $$\lim_{\mu\to 0^-} h_+\left(p,\mu\right)=\begin{cases} +\infty & \text{if } a=0 \\ \dfrac{p}{2\left(p-1\right)}\left(\dfrac{\lambda_1\left(p\right)}{a}\right)^{\dfrac{1}{p}} & \text{if } a\in\mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

iii) The function $\mu\mapsto h_+\left(p,\mu\right)$ is strictly increasing on $\left(-\infty,0\right)$.

Proof:

i) We distinguish two cases:

Case $b \in \mathbb{R}_+^*$

Using the change of variable $u = S_+(p,\mu)\,t$ in (14), we obtain

$$h_+(p,\mu) = \int_0^1 \frac{S_+(p,\mu)}{\left[-\dfrac{p}{p-1}\left(F\left(S_+(p,\mu)\,t\right) + \mu S_+(p,\mu)\,t\right)\right]^{\dfrac{1}{p}}}\,dt$$

Since

$$F\left(S_+(p,\mu)\right) + \mu S_+(p,\mu) = 0$$

it follows that

$$h_+(p,\mu) = \int_0^1 S_+(p,\mu)\left[-\frac{p}{p-1}\left(F\left(S_+(p,\mu)\,t\right) - F\left(S_+(p,\mu)\right)t\right)\right]^{-\dfrac{1}{p}} dt \tag{21}$$

Let us rewrite (21) as

$$h_+(p,\mu) = \int_0^1 \left[-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F\left(S_+(p,\mu)\,t\right)}{\left(S_+(p,\mu)\,t\right)^p}t^p - \frac{F\left(S_+(p,\mu)\right)}{S_+^p(p,\mu)}t\right)\right]^{-\dfrac{1}{p}} dt$$

Now by the assertion ii) of lemma 4.4, we have

$$\lim_{\mu\to-\infty} h_+(p,\mu) = \lim_{S_+(p,\mu)\to+\infty} \int_0^1 \left[-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F\left(S_+(p,\mu)\,t\right)}{\left(S_+(p,\mu)\,t\right)^p}t^p - \frac{F\left(S_+(p,\mu)\right)}{S_+^p(p,\mu)}t\right)\right]^{-\dfrac{1}{p}} dt$$

Then from (H3) and using l'Hôpital's rule, we obtain

$$\begin{aligned}
&\lim_{S_+(p,\mu,E)\to+\infty} \int_0^1 \left[-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F\left(S_+(p,\mu)\,t\right)}{\left(S_+(p,\mu)\,t\right)^p}t^p - \frac{F\left(S_+(p,\mu)\right)}{S_+^p(p,\mu)}t\right)\right]^{-\dfrac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{p}{p-1}\left(\frac{b}{p}t^p - \frac{b}{p}t\right)\right]^{-\dfrac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\dfrac{1}{p}} \int_0^1 \left[t - t^p\right]^{-\dfrac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\dfrac{1}{p}} \frac{\pi}{(p-1)\sin\dfrac{\pi}{p}}
\end{aligned}$$

Case $b = +\infty$

By the assumption (H3), we have

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$$

Then for all $C_1 > 0$, there exists $C_2 > 0$ such that

$$f(u) > C_1 u^{p-1}, \text{ for all } u > C_2$$

Let $t \in (0,1)$, we have

$$\begin{aligned}
&\frac{F(S_+(p,\mu))\,t - F(S_+(p,\mu)\,t)}{S_+^p(p,\mu)} \\
&= \frac{t \int_0^{S_+(p,\mu)} f(u)\,du - \int_0^{S_+(p,\mu)t} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu)} \\
&< \frac{\int_0^{S_+(p,\mu)} f(u)\,du - \int_0^{S_+(p,\mu)t} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu)} \\
&= \frac{\int_{S_+(p,\mu)t}^{S_+(p,\mu)} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu)} \\
&= \int_t^1 \frac{f(S_+(p,\mu)\,\tau)}{S_+^{p-1}(p,\mu)} d\tau \\
&> C_1 \int_t^1 \tau^{p-1} d\tau, \text{ for all } S_+(p,\mu) > C_2 \\
&= \frac{C_1}{p}(1-t^p)
\end{aligned}$$

Therefore for all $S_+(p,\mu) > C_2$, we have

$$\begin{aligned}
h_+(p,\mu) &\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{C_1}{p}(1-t^p)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{C_1}{p}(1-t^p)\right]^{-\frac{1}{p}} dt
\end{aligned}$$

Now letting $C_1 \to +\infty$, we obtain

$$\lim_{\mu \to -\infty} h_+(p,\mu) = 0$$

ii) In a similar manner as in i), we prove ii).

iii) Differentiating (21) with respect to μ, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_+}{\partial \mu}(p,\mu) &= \frac{\partial S_+}{\partial \mu}(p,\mu)\times \\ &\times \int_0^1 \frac{L(t,S_+(p,\mu))}{p\left[-\frac{p}{p-1}\left(F(S_+(p,\mu)t)-F(S_+(p,\mu))t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt\end{aligned} \tag{22}$$

where

$$L(t,S_+(p,\mu)) := t\left[pF(S_+(p,\mu)) - S_+(p,\mu)f(S_+(p,\mu))\right] - \left[pF(S_+(p,\mu)t) - S_+(p,\mu)tf(S_+(p,\mu)t)\right]$$

We have

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}L(t,S_+(p,\mu)) = -S_+^2(p,\mu)\left[(p-2)f'(S_+(p,\mu)t) - S_+(p,\mu)tf''(S_+(p,\mu)t)\right]$$

By the assumption (H5), it follows that

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}L(t,S_+(p,\mu)) > 0 \text{ for all } t\in(0,1)$$

and since $L(0,S_+(p,\mu)) = L(1,S_+(p,\mu)) = 0$, we obtain

$$L(t,S_+(p,\mu)) < 0 \text{ for all } t\in(0,1)$$

Hence, the integral in (22) is negative and by the assertion i) of lemma 4.4, it follows that

$$\frac{\partial h_+}{\partial \mu}(p,\mu) > 0, \text{ for all } p>1 \text{ and } \mu<0.$$

□

5 Proof of theorem 2.1

Proof of Assertion (A)

(i) Assume that $a < b \le \lambda_1(p)$. By lemma 4.3, we have

- $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) = h_+(p,\mu)$
- $\lim\limits_{E\to +\infty} T_+(p,\mu,E) \geq \frac{1}{2}$
- The function $E \mapsto T_+(p,\mu,E)$ is strictly decreasing on $(0,+\infty)$.

  So, the scalar equation in the variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admits no solution in $[0,+\infty[$.

  Therefore, by theorem 3.1, it follows that problem (8) admits no positive solution for all $\mu < 0$.

(ii) Assume that $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) \leq a < b$. By lemma 4.3, we have

- $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) = h_+(p,\mu)$
- $\lim\limits_{E\to +\infty} T_+(p,\mu,E) < \frac{1}{2}$
- The function $E \mapsto T_+(p,\mu,E)$ is strictly decreasing on $(0,+\infty)$.

  So, it follows that the scalar equation in the variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admits a solution in $[0,+\infty[$ if and only if $h_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$.

  Or, by lemma 4.5, we have

- $\lim\limits_{\mu\to -\infty} h_+(p,\mu) < \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\mu\to 0^-} h_+(p,\mu) \leq \frac{1}{2}$
- The function $\mu \mapsto h_+(p,\mu)$ is strictly increasing on $(-\infty,0)$.

  So, there is no μ in $(-\infty,0)$ such that $h_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$. Therefore, by theorem 3.1, it follows that problem (8) admits no positive solution for all $\mu < 0$.

Proof of Assertion (B)

(i) Assume that $a \leq \lambda_1(p) < b \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$. By lemma 4.3, it follows that the scalar equation in the variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admits a solution in $[0,+\infty[$ if and only if $h_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$.

Now, by lemma 4.5, we have

- $\lim\limits_{\mu\to -\infty} h_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{\mu\to 0^-} h_+(p,\mu) > \frac{1}{2}$
- The function $\mu \mapsto h_+(p,\mu)$ is strictly increasing on $(-\infty, 0)$.

  Therefore, the equation in the variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admits a unique solution in $(0,+\infty)$ for all $\mu < 0$.

  Thus, by theorem 3.1, it follows that for all $\mu < 0$, problem (8) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

(ii) In a similar manner as in (i), we prove (ii).

Proof of Assertion (C)

- Assume that $a < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) < b$. By lemma 4.3, it follows that the scalar equation in the variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admits a solution in $[0,+\infty[$ if and only if $h_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$.

  Now, by lemma 4.5 there exists a unique $\mu_*(p,a,b) < 0$ such that:

- $h_+(p,\mu) < \frac{1}{2}$, for all $\mu < \mu_*(p,a,b)$,
- $h_+(p,\mu_*(p,a,b)) = \frac{1}{2}$,
- $h_+(p,\mu) > \frac{1}{2}$, for all $\mu > \mu_*(p,a,b)$.

  Therefore, the equation in the variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admits a solution in $[0,+\infty[$ if and only if $\mu \geq \mu_*(p,a,b)$.

  Thus, by theorem 3.1, it follows that

- If $\mu < \mu_*(p,a,b)$, problem (8) admits no positive solution,
- If $\mu = \mu_*(p,a,b)$, problem (8) admits a unique positive solution and it belongs to B^+,
- If $\mu > \mu_*(p,a,b)$, problem (8) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

6 Examples

In this section we give some examples to illustrate our results.

6.1 Example 1

Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = u^p + au^{p-1} + \mu \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

where $p > 1$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $a \geq 0$ and $\mu < 0$.
For all $u \in \mathbb{R}_+$, let us set

$$f(u) = u^p + au^{p-1}$$

We have

- $f \in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+\right)$
- $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = a$ and $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$
- $\lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} \left(pu^p + a(p-1)u^{p-1}\right) = 0$
- $\forall u > 0$ and $\forall p > 1$, $(p-2) f'(u) - uf''(u) = -pu^{p-1} < 0$

Therefore, by theorem 2.1, it follows that:

(i) If $a \in \left[0, \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right[$, then there exists $\mu_*(p,a) < 0$ such that:

- If $\mu < \mu_*(p,a)$, problem (23) admits no positive solution,
- If $\mu = \mu_*(p,a)$, problem (23) admits a unique positive solution and it belongs to B^+,
- If $\mu > \mu_*(p,a)$, problem (23) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

(ii) If $a \in \left[\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), +\infty\right[$, then for all $\mu < 0$, problem (23) admits no positive solution.

6.2 Example 2

Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \dfrac{2a}{\pi} u^{p-1} Arc\tan u + au^{p-1} + \mu \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{24}$$

where $p \geq 2$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $a > 0$ and $\mu < 0$.
For all $u \in \mathbb{R}_+^*$, let us set

$$f(u) = \frac{2a}{\pi} u^{p-1} Arc\tan u + au^{p-1}$$

We have

- $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R}_+)$
- $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = a$ and $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = 2a$
- $$\lim_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim_{u \to 0^+} \frac{au^{p-1}\left(2(p-1)\left(1+u^2\right) Arc\tan u + 2u + \pi(p-1)\left(1+u^2\right)\right)}{\pi(1+u^2)} = 0$$
- $\forall u > 0$ and $\forall p \geq 2$, we have
$$(p-2) f'(u) - uf''(u) = \frac{2a}{\pi(1+u^2)^2}\left((2-p)u^2 - p\right) < 0$$

Therefore, by theorem 2.1, it follows that:

(i) If $a \in \left]0, \dfrac{\lambda_1(p)}{2}\right]$ or $a \in \left[\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), +\infty\right[$, then for all $\mu < 0$, problem (24) admits no positive solution.

(ii) If $a \in \left]\dfrac{\lambda_1(p)}{2}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right]$, then for all $\mu < 0$, problem (24) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

(iii) If $a \in \left]\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right[$, then there exists $\mu_*(p,a) < 0$ such that:

- If $\mu < \mu_*(p,a)$, problem (24) admits no positive solution,
- If $\mu = \mu_*(p,a)$, problem (24) admits a unique positive solution and it belongs to B^+,
- If $\mu > \mu_*(p,a)$, problem (24) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

6.3 Example 3

Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \exp u - 1 + au^{p-1} + \mu \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

where $1 < p \leq 2$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2} y$, $a \geq 0$ and $\mu < 0$.
For all $u \in \mathbb{R}_+^*$, let us set

$$f(u) = \exp u - 1 + au^{p-1}$$

We have

- $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R}_+)$

- $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{f(u)}{u^{p-1}}=\begin{cases} a \text{ if } 1<p<2 \\ 1+a \text{ if } p=2\end{cases}$ and $\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{f(u)}{u^{p-1}}=+\infty$
- $\lim\limits_{u\to 0^+} uf'(u)=\lim\limits_{u\to 0^+} u\left(\exp u + a(p-1)u^{p-1}\right)=0$
- $\forall u>0$ and $\forall p\leq 2$,we have
  $(p-2)f'(u)-uf''(u)=(p-2-u)\exp u<0$
  Therefore, by theorem 2.1, it follows that:

(i) If $p=2$ and $a\in\left[0,4\pi^2-1\right[$, then there exists $\mu_*(a)<0$ such that:

- If $\mu<\mu_*(a)$, problem (25) admits no positive solution,
- If $\mu=\mu_*(a)$, problem (25) admits a unique positive solution and it belongs to B^+,
- If $\mu>\mu_*(a)$, problem (25) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

(ii) If $a\in\left[4\pi^2-1,+\infty\right[$, then for all $\mu<0$, problem (25) admits no positive solution.

(iii) If $p\in\left]1,2\right[$ and $a\in\left[0,\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\lambda_1(p)\right[$, then there exists $\mu_*(p,a)<0$ such that:

- If $\mu<\mu_*(p,a)$, problem (25) admits no positive solution,
- If $\mu=\mu_*(p,a)$, problem (25) admits a unique positive solution and it belongs to B^+,
- If $\mu>\mu_*(p,a)$, problem (25) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

(iv) If $p\in\left]1,2\right[$ $a\in\left[\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\lambda_1(p),+\infty\right[$, then for all $\mu<0$, problem (25) admits no positive solution.

6.4 Example 4

Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u')\right)'=-\ln\left(1+u^{p-1}\right)+au^{p-1}+\mu \text{ in } (0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{26}$$

where $p>1$, $\varphi_p(y)=|y|^{p-2}y$, $a\geq 1$ and $\mu<0$.
For all $u\in\mathbb{R}_+^*$, let us set

$$f(u)=au^{p-1}-\ln\left(1+u^{p-1}\right)$$

We have

- $f\in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right)\cap C\left(\mathbb{R}_+\right)$

- $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{f(u)}{u^{p-1}}=a-1$ and $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u^{p-1}}=a$

- $\lim\limits_{u\to 0^+} uf'(u)=\lim\limits_{u\to 0^+} u^{p-1}\left(a-\dfrac{p-1}{1+u^{p-1}}\right)=0$

- $\forall u>0$ and $\forall p>1$, $(p-2)f'(u)-uf''(u)=-\dfrac{(p-1)^2u^{2p-3}}{(1+u^{p-1})^2}<0$

Therefore, by theorem 2.1, it follows that:

- If $a\in[1,\lambda_1(p)]$ or $a\in\left[\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\lambda_1(p)+1,+\infty\right[$, then for all $\mu<0$, problem (26) admits no positive solution.

(ii) If $a\in\left]\lambda_1(p),\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\lambda_1(p)\right]$, then for all $\mu<0$, problem (26) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

(iii) If $a\in\left]\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\lambda_1(p),\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\lambda_1(p)+1\right[$, then there exists $\mu_*(p,a)<0$ such that:

- If $\mu<\mu_*(p,a)$, problem (26) admits no positive solution,
- If $\mu=\mu_*(p,a)$, problem (26) admits a unique positive solution and it belongs to B^+,
- If $\mu>\mu_*(p,a)$, problem (26) admits a unique positive solution and it belongs to A^+.

7 Appendix

In this section, we prove proposition 4.2.

We consider the following initial boundary value problem:

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))'=f(u)+\mu, \\ u(x_0)=c,\ u'(x_0)=0, \end{cases} \tag{27}$$

where $p>1$, $0<x_0<1$ and $c>0$.

Let us consider the following set:

$$\widetilde{D}=\left\{c>0:\exists\,\varepsilon>0,\ f(s)+\mu>0,\ \forall\ s\in\,]c-\varepsilon,c[\ \text{and}\ \int\limits_{c-\varepsilon}^{c}[F(c)-F(s)+\mu(c-s)]^{-\frac{1}{p}}ds<+\infty\right\}$$

We have the following result:

Lemma 7.1 *The problem (27) has at most one right locally strictly decreasing (left locally strictly increasing) solution. It exists if and only if* $c\in\widetilde{D}$.

Proof: The proof of this lemma is similar to that of Lemma 1 in [6]. So, it is omitted. □

Remark: It is not difficult to prove that if $f(c)+\mu>0$, then $c\in\widetilde{D}$.

Corollary 7.2 *If $f(c)+\mu>0$, then the local solution of (27) is unique.*

Proof: of proposition 4.2.

Assume that u is a positive solution of (8) such that $u'(0)=E\geq 0$, then it admits at least a maximum value. On the other hand u satisfy the energy equation (see [[5], p. 421])

$|u'(x)|^p = E^p - \dfrac{p}{p-1}\left(F(u(x))+\mu u(x)\right)$, for all $x\in[0,1]$.

From lemma 4.1, the function $s\mapsto E^p-\dfrac{p}{p-1}\left(F(s)+\mu s\right)$ admits a unique positive zero $S_+(p,\mu,E)$. Then the function u admits a unique maximum value in $[0,1]$ and we have

$$\forall x\in\,]0,1[\,,\ u'(x)=0\Rightarrow u(x)=S_+(p,\mu,E)$$

Now, we consider the following initial problem:

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p(u')\right)'=f(u)+\mu, \\ u(x_0)=S_+(p,\mu,E),\ u'(x_0)=0, \end{cases} \tag{28}$$

where $0<x_0<1$.

By the assertion i) of lemma 4.1, we have

$$f\left(S_+(p,\mu,E)\right)+\mu>0, \text{ for all } E\geq 0$$

Let

$$v(x):=u(2x_0-x)$$

v is a solution of (28). According to corollary 7.2, the problem (28) admits a unique solution. Hence the global solution of (28) is unique, which means that $u(x)=v(x)$ for all x. Arguing by contradiction we obtain $x_0=\dfrac{1}{2}$. Assume that $x_0<\dfrac{1}{2}$, then

$$0=u(0)=v(0)=u(2x_0)$$

which is impossible. The assumption $x_0>\dfrac{1}{2}$, leads to a contradiction in a similar way. Then we must have $x_0=\dfrac{1}{2}$. Since $x_0=\dfrac{1}{2}$ and $u(x)=u(1-x)$, therefore the derivative of u vanishes exactly once in $]0,1[$ and u is symmetrical about $\frac{1}{2}$. □

References

[1] I. Addou & A. Benmezai, Boundary value problems for the one-dimensional $p-$Laplacian with even superlinearity, Electronic J. Diff. Eqns. **9** (1999), 1-29.

[2] I. Addou, S. M. Bouguima, M. Derhab & Y. S. Raffed, On the number of solutions of a quasilinear elliptic class of B. V. P. with jumping nonlinearities, Dynamic Syst. Appl. **7 (4)** (1998), 575-599.

[3] I. Addou, S. M. Bouguima, A. Benmezai & M. Derhab, Exactness results for generalized Ambrosetti-Brezis-Cerami and related one-dimensional elliptic equations, Electronic J. Diff. Eqns. **66** (2000), 1-34.

[4] F. Ammar Khodja, Thèse $3^{\text{ème}}$ cycle, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1983).

[5] M. Guedda & L. Veron, Bifurcation phenomena associate to the p-Laplacian operator, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 419-431.

[6] J. Karátson & P. L. Simon, Exact multiplicity for degenerate two-point boundary value problems with $p-$convex nonlinearity, Nonlinear Anal. T. M. A. **52** (2003), 1569-1590.

[7] F. Merle, Sur la non-existence de solutions positives d'équations surlinéaires, C. R. Acad. Sci., Sér. **1**, Math. **6**, (**306**) (1988), 313-316.

[8] M. Ramaswamy & P. N. Srikanth, On the global set of solutions to a nonlinear O. D. E. theoretical and numerical description, J. Biff. Ens. **65** (1986), 1-48.

[9] J. Sánchez & P. Ubilla, Uniqueness results for the one-dimensional m-Laplacian considering superlinear nonlinearities, Nonlinear Anal. T. M. A. **54** (2001), 927-938.

[10] B. Ruf & S. Solimini, On a class of Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), 761-771.

[11] C. Scovel, Geometry of some nonlinear differential operators, ph. D. thesis, Courant Institute, New York Univ., (1984).

[12] Xiaomin Zheng, Un résultat de non-existence de solution positive pour une équation elliptique, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **2 (7)** (1990), 91-96.

[13] N. Yebari & A. Zertiti, Existence of non-negative solutions for nonlinear equations in the semi-positon case, Electronic J. Diff. Eqns., Conference **14** (2006), 249-254.

Communications in Applied Analysis **17** (2013), no. 1, 249–272

ON THE NUMBER OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF QUASILINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH CONSTANT YIELD HARVESTING

MOHAMMED DERHAB[1] AND MUSTAPHA MEGHNAFI[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Sciences
University Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
B.P.119, Tlemcen, 13000, Algeria
E-mail: derhab@yahoo.fr

[2]University of Béchar, Algeria
E-mail: megnafi3000@yahoo.fr

ABSTRACT. Using time-mapping approach, we study the existence and multiplicity of positive solutions for the following boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) - c \text{ in } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases}$$

where $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right)$ represents the logistic growth where $a > 0$ and $b > 0$ and $c > 0$ represents the constant yield harvesting.

AMS (MOS) Subject Classification. 34B15-34C10

1. INTRODUCTION

The purpose of this work is to study the existence and multiplicity of positive solutions of the following quasilinear boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' &= a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) - c \text{ in } (0,1), \\ u &> 0 \text{ in } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) &= 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2} y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ and $c > 0$.

The operator $u \mapsto \left(\varphi_p\left(u'\right)\right)'$ is called the one dimensional p-Laplacian. Equations involving this operator arise in some physical problems and chemical reactions like the study of flow and heat transfer problem under constant heat flux and constant wall temperature conditions in the thermal entrance region of two parallel plates for a power-law non-Newtonian model $\left(\tau\widetilde{a}\left|\frac{du}{dz}\right|^{p-2}\frac{du}{dz}\right)$ electrically conducting fluid in the presence of a uniform transverse magnetic with viscous dissipation, where τ is the shear stress, $\widetilde{a}$ is the half distance between the plates, u represents the axial velocity, z

Received March 10, 2013

is the vertical distance and p represents the index of the power-law, (see [25]) and the mass transfer in systems with chemical transformations or polymerization process, in biological systems, and in special cases of catalytic process, ($p \leq 2$, see [15]).

On the other hand boundary value problems (1.1) generalize those arising in population dynamics, where u represents the density at different points of $(0,1)$ of a biological species; the reproduction of the species follows the logistic growth, a is the growth rate of the biological species, b represents the strife coefficient among the biological species and c represents the rate of harvesting. On the other hand, the presence of the p-Laplace operator $(\varphi_p(u'))'$ points out the diffusive character of the species u, while the Dirichlet boundary conditions means that the domain $(0,1)$ is surrounded by a completely hostile exterior such that any member of the population which reaches the boundary dies immediately, (see [5], [7], [8], [11], [18], [23] and [26]).

Boundary value problems with constant yield harvesting have been studied by several authors. Let us recall some of the past results for (1.1).

In [9], the authors consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} -u'' & = & au - bu^2 - c \text{ in } (0,1), \\ u & > & 0 \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) & = & 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

where a, b and c are a positive constants.

By using the quadrature method, they proved the following results

- If $a \leq \lambda_1 = \pi^2$, then the problem (1.2) admits no positive solution,
- There exists $c_0 = c_0(a,b)$ such that if $c > c_0$, then the problem (1.2) admits no positive solution,
- If $\pi^2 < a < 3\pi^2$ and $c < c_1 = \min\left\{\frac{3\left(a-\pi^2\right)^2}{32b}, \frac{3\left(3a+\pi^2\right)\left(a-\pi^2\right)}{64b}, \frac{6\pi^4}{b}\right\}$, then the problem (1.2) admits at least one positive solution,
- If $\pi^2 < a < 2\pi^2$ and $c < c_1$, then the problem (1.2) admits at least two positive solutions.

In [19], the authors consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u & = & au - bu^2 - ch(x) \text{ in } \Omega, \\ u & > & 0 \text{ in } \Omega, \\ u & = & 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

where a, b and c are a positive constants, Ω is a smooth bounded region with $\partial\Omega$ of class C^2 in $\mathbb{R}^N$ for $N \geq 1$, and $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfies $h(x) > 0$ for $x \in \Omega$, $\max_{x\in\overline{\Omega}} h(x) = 1$, $h(x) = 0$ for $x \in \partial\Omega$ and h belongs to the class $C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ with $0 < \alpha < 1$.

By using a perturbation argument based on implicit function theorem, the authors proved the following results

- If $a \leq \lambda_1$, where λ_1 is the first eigenvalue of $-\Delta$ with Dirichlet boundary conditions, then the problem (1.3) has no positive solution,
- If $a > \lambda_1$, then there exists $c_1(a,b)$ such that if $c > c_1(a,b)$, then the problem (1.3) has no positive solution,
- If $a > \lambda_1$, then there exists $c_0(a,b)$ such that if $c < c_0(a,b)$, then the problem (1.3) has a positive solution,
- If $b > 0$, then there exists $\delta > 0$ such that for $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, the problem (1.3) has exactly two positive solutions $u_1(\cdot, c)$ and $u_2(\cdot, c)$, for $0 \leq c < c_2$, exactly one positive solution $u_1(\cdot, c)$ for $c = c_2$, and no positive solution for $c > c_2$.

In [27] , the authors consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= au - bu^2 - cg(x) \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

where a, b and c are a positive constants, Ω is a smooth bounded region with $\partial\Omega$ of class $C^{2,\alpha}$ in $\mathbb{R}^N$ for $N \geq 1$, and $g \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ with $0 < \alpha < 1$.

By using a theorem about the inversion of differentiable mappings between Banach spaces, they proved that for any $c > 0$ and $g(x) \geq 0$, where is not identically zero for $x \in \overline{\Omega}$, if $\lambda_1 < a < \lambda_2$, then the problem (1.4) has either zero, or one, or two positive solutions. Moreover, there exists $c_2 > 0$ such that the problem (1.4) has at least one positive solution u_1 and at most two positive solutions when $c \in (0, c_2)$, has exactly one positive solution when $c = c_2$ and has no non-negative solution when $c < c_{2.}$

In [20], the authors studied the existence of weak positive solutions of the following problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= au^{p-1} - u^{\gamma-1} - ch(x) \text{ in } \Omega, \\ u &> 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

where Δ_p denotes the p-Laplacian operator defined by $\Delta_p := div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$, $p > 1$, $\gamma > p$, a and c are a positive constants, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, with $\partial\Omega$ of class $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ and connected (if $N = 1$, we assume Ω is a bounded open interval) and $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is a continuous function in $\overline{\Omega}$ satisfying $h(x) \geq 0$ for $x \in \Omega$, h does not vanish identically in $\overline{\Omega}$, $\max_{x \in \overline{\Omega}} h(x) = 1$ and $h(x) = 0$ for $x \in \partial\Omega$.

By using the maximum principle and the method sub-solutions and super-solutions, the authors proved the following results

- If $a \leq \lambda_1(p)$, where $\lambda_1(p)$ is the first eigenvalue of $-\Delta_p$ with Dirichlet boundary conditions, then the problem (1.5) has no positive solution,
- If $a > \lambda_1(p)$ and c is very large, then the problem (1.5) has no positive solution,

- If $a > \lambda_1(p)$, then there exists $c_0(a) > 0$ such that if $0 < c < c_0(a)$, then the problem (1.5) has a positive solution $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ u. Further, this solution u is such that $u(x) \geq \left(\frac{ch(x)}{\lambda_1(p)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ for all $x \in \overline{\Omega}$,
- If $a > \lambda_1(p)$, then there exists $c_1(a) \geq c_0(a)$ such that for $0 < c < c_1(a)$, problem (1.5) has a maximal a positive solution, and for $c > c_1(a)$ problem (1.5) has no positive solution.

In [5], the authors studied the existence of weak positive solutions of the following problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= am(x)\, u^{p-1} - bu^{\gamma-1} - ch(x) \text{ in } \Omega, \\ u &> 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

where Δ_p denotes the p-Laplacian operator defined by $\Delta_p := div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p > 1$, $\gamma > p$, a and c are a positive constants, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, with $\partial\Omega$ of class $C^{1,\beta}$, $0 < \beta < 1$ and connected. The weight m satisfying $m \in C(\Omega)$ and $m(x) \geq m_0 > 0$ for all $x \in \Omega$, also $\|m\|_\infty = l < \infty$ and $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is a $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ function satisfying $h(x) \geq 0$ for $x \in \Omega$, h does not vanish identically in $\overline{\Omega}$, $\max_{x\in\overline{\Omega}} h(x) = 1$ and $h(x) = 0$ for $x \in \partial\Omega$.

By using the maximum principle and the method sub-solutions and super-solutions, the authors proved the following results

- If $a \leq \lambda_1$, where λ_1 is the first eigenvalue of the following Dirichlet Problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda m(x)\, |u|^{p-2}\, u \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

  then the problem (1.6) has no positive solution,
- If $a > \lambda_1$ and $c > \frac{(al)^{\frac{\gamma-1}{\gamma-p}} \int_\Omega m(x)dx}{b^{\frac{p-1}{\gamma-p}} \int_\Omega h(x)dx}$, then the problem (1.6) has no positive solution,
- If $a > \frac{\lambda_1(p)}{m_0}$, where $\lambda_1(p)$ is the first eigenvalue of $-\Delta_p$ with Dirichlet boundary conditions, then there exists $c_0(a, m_0) > 0$ such that if $0 < c < c_0(a)$, then the problem (1.6) has a positive solution u such that $u(x) \geq \left(\frac{ch(x)}{\lambda_1(p)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ for all $x \in \overline{\Omega}$.

In [6], the authors studied the nonexistence of positive solutions for the following quasilinear elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta_{a,p} u &= a_1 v^{p-1} - b_1 v^{\gamma-1} - c \text{ in } \Omega, \\ -\Delta_{a,p} v &= a_1 u^{p-1} - b_1 u^{\gamma-1} - c \text{ in } \Omega, \\ u &> 0 \text{ in } \Omega, \\ v &> \text{ in } \Omega, \\ u = v &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Delta_{a,p}$ denotes the a,p-Laplacian defined by $\Delta_{a,p}z = div\left(a\left|\nabla z\right|^{p-2}\nabla z\right); p>1$, $\gamma > p$; a_1, b_1 and c are positive constants, Ω is a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ with smooth boundary and $a \in L^{\infty}(\Omega)$, $a(x) \geq a_0 > 0$ for all $x \in \Omega$.

The object of this work is to improve and generalize the results obtained in the one dimensional case.

The paper is organized as follows: In section 2, we state our main result. In section 3, we state the method used to prove our main result. Some preliminary lemmas are the aim of section 4. Finally section 5 is devoted to the proof of our main result.

2. MAIN RESULTS

We consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = a\varphi_p\left(u\right) - b\varphi_p^2\left(u\right) - c \text{ in } (0,1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p>1$, $a>0$, $b>0$ and $c>0$.

To state our result, define

$$S^+ = \left\{u \in C^1([0,1]); u>0 \text{ in } (0,1), \ u(0)=u(1)=0 \text{ and } u'(0)>0\right\}.$$

Let A^+ be the subset of S^+ composed by the functions u satisfying:

i) u is symmetrical about $\frac{1}{2}$.
ii) The derivative of u vanishes once and only once in $(0,1)$.

Let B^+ be the subset of $C^1([0,1])$ composed by the functions u satisfying:

i) $u>0$ in $(0,1)$ and $u(0)=u'(0)=u(1)=0$.
ii) u is symmetrical about $\frac{1}{2}$.
iii) The derivative of u vanishes once and only once in $(0,1)$.

From [16] the minimum λ_p of the Rayleigh quotient

$$\frac{\int\limits_0^1 |u'(x)|^p}{\int\limits_0^1 |u(x)|^p}, \ 1<p<+\infty,$$

taken among all real valued functions $u \in C^1([0,1])$ with $u(0)=u(1)=0$ is equal to the first eigenvalue $\lambda_1(p)$ of the equation

$$-\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda\varphi_p\left(u\right), \tag{2.2}$$

and from [22] $\lambda_1(p)$ is expressed by

$$\lambda_1(p) := (p-1)\left(2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}\right)^p = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^p.$$

The main results of this work are

Proposition 2.1. *If $a \leq \lambda_1(p)$, then the problem (2.1) admits no positive solution.*

Proposition 2.2. *If $c > \frac{a^2}{4b}$, then the problem (2.1) admits no positive solution.*

Theorem 2.3. *Assume that $a > \lambda_1(p)$, $b > 0$ and $0 < c < c_* := \left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}$.*

(A) *If $1 < p \leq 2$ and $a > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$, then there exists a real $c_0 \in (0, c_*)$ such that*

(i) *If $c < c_0$, then the problem (2.1) admits a unique positive solution and it belongs to A^+,*

(ii) *If $c = c_0$, then the problem (2.1) admits exactly two positive solutions one belongs to B^+ and the other belongs to A^+.*

(B) *If $1 < p \leq 2$ and $\lambda_1(p) < a \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$ and $c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, then the problem (2.1) admits exactly two positive solutions and they belongs to A^+.*

(C) *If $p > 2$ and $a \geq \frac{2^{p+1}}{(p-1)^{p-1}}\beta^p\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right)$, where $\beta(\cdot,\cdot)$ is the Euler-Beta function defined by*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\ x > 0 \text{ and } y > 0.$$

then the problem (2.1) admits no positive solutions.

(D) *If $p > 2$, $a \leq \min\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p),\ 2^p m^p(p)\right)$ and $0 < c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, where m is defined by*

$$m(p) = (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}},$$

then he problem (2.1) admits exactly two positive solutions and they belongs to A^+.

3. TIME-MAPPING APPROACH

In this section we introduce the well-know time mapping approach (see for instance [1]–[13]).

Consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = g(u) \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

where $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Define $G(s) := \int\limits_0^s g(t)\,dt$.

For any $E \geq 0$ and $p > 1$, let

$$X_+(p,E) = \left\{ s > 0;\ E^p - \frac{p}{p-1} G(\zeta) > 0,\ \forall\, \zeta,\ 0 < \zeta < s \right\},$$

and

$$S_+(p,E) = \begin{cases} 0 \text{ if } X_+(p,E) = \emptyset, \\ \operatorname{Sup} X_+(p,E) \ \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Let

$$D = \{E \geq 0;\ 0 < S_+(p,E) < +\infty \text{ and } g(S_+(p,E)) > 0\},$$

and we define the following time-map

$$T_+(p,E) = \int\limits_0^{S_+(p,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1} G(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du.$$

We now state the following well know theorem without proof (see for instance [13]).

Theorem 3.1. *Assume that $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $E \geq 0$ and $p > 1$. Then*

- *Problem (3.1) admits a solution $u \in A^+$ satisfying $u'(0) = E$ if and only if $E \in D \cap (0, +\infty)$ and $T_+(p,E) = \frac{1}{2}$. In this case the solution is unique and its sup-norm is equal to $S_+(p,E)$.*
- *Problem (3.1) admits a solution $u \in B^+$ if and only if $0 \in D$ and $T_+(p,0) = \frac{1}{2}$. In this case the solution is unique and its sup-norm is equal to $S_+(p,0)$.*

4. PRELIMINARY LEMMAS

Lemma 4.1. *Consider the following equation with $s \in \mathbb{R}_+$:*

$$E^p - p'\left(\frac{a}{p} s^p - \frac{b}{2p-1} s^{2p-1} - cs\right) = 0, \tag{4.1}$$

where $p > 1$, $E \geq 0$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $a > \lambda_1(p)$, $b > 0$ and $0 < c < c_*$ are real parameters. Then there exists a real positive $E_*(p,c) := \left(p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right)\right)^{\frac{1}{p}}$, where $\alpha := \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ such that

(i) *If $0 \leq E \leq E_*(p,c)$, the equation (4.1) admits a unique positive zero $r_+(p,c,E)$,*

(ii) *If $E > E_*(p,c)$, the the equation (4.1)admits no positive zero.*

(iii) *The function $E \mapsto r_+(p,c,E)$ is C^1 in $[0, E_*(p,c))$ and we have for all $p > 1$, $c \in (0, c_*)$ and $E \in [0, E_*(p,c))$,*

$$\frac{\partial r_+}{\partial E}(p,c,E) = \frac{(p-1)\,E^{p-1}}{a r_+^{p-1}(p,c,E) - b r_+^{2p-2}(p,c,E) - c} > 0.$$

(iv) $\lim_{E\to 0^+} r_+(p,c,E) = \left[\frac{(2p-1)}{2b}\left(\frac{a}{p} - \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - \frac{4bc}{2p-1}}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}$.

(v) $\lim_{E\to E_*(p,c)} r_+(p,c,E) = \alpha$.

Proof. The proof is similar to that of Lemma 4.1 in [3]. So, it is omitted. □

We are now ready to compute $X_+(p,c,E)$ for any $p>1$, $c\in(0,c_*)$ and $E\geq 0$, as defined in section 3.

In fact

$$X_+(p,c,E) = (0, r_+(p,c,E)).$$

Also, we have that:

$$S_+(p,c,E) = r_+(p,c,E).$$

On other hand, if we define the function f by

$$f(u) = au^{p-1} - bu^{2p-2} - c \text{ for all } u>0,$$

we have

$$\begin{aligned} D &= \{E\geq 0,\ 0<S_+(p,c,E)<+\infty \text{ and } f(S_+(p,c,E))>0\} \\ &= [0, E_*(p,c)). \end{aligned}$$

By Lemma 4.1, we have

$$\begin{aligned} \lim_{E\to 0^+} S_+(p,c,E) &= \left[\frac{(2p-1)}{2b}\left(\frac{a}{p} - \sqrt{\frac{a^2}{p^2} - \frac{4bc}{2p-1}}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}, \\ \lim_{E\to E_*(p,c)} S_+(p,c,E) &= \alpha, \end{aligned}$$

and for all $p>1$, $c\in(0,c_*)$ and $E\in[0,E_*(p,c))$,

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p,c,E) = \frac{(p-1)E^{p-1}}{aS_+^{p-1}(p,c,E) - bS_+^{2p-2}(p,c,E) - c} > 0. \tag{4.2}$$

Now, we define the time-map T_+ by

$$T_+(p,c,E) = \int_0^{S_+(p,c,E)} \left[E^p - p'F(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du,$$

for any $p>1$, $c\in(0,c_*)$ and $E\in[0,E_*(p,c))$, where

$$F(u) = \frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu,$$

and the application h_+ by

$$h_+(p,c) = \int_0^{S_+(p,c)} \left[-p'F(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \tag{4.3}$$

for any $p>1$, $c\in(0,c_*)$ where $S_+(p,c) := S_+(p,c,0)$.

Proposition 4.2. *If u is a positive solution of problem* (2.1), *then* $u\in A^+\cup B^+$.

Proof. The proof is similar to that of Proposition 4.2 in [10]. So, it is omitted. □

Lemma 4.3. *For any $p>1$ and $0<c<c_*$, we have:*

(i) $\lim_{E\to 0^+} T_+(p,c,E) = h_+(p,c)$.

(ii) $\lim_{E\to E_*(p,c)} T_+(p,c,E) = \begin{cases} +\infty & \text{if } 1<p\le 2, \\ J(p,c) & \text{if } p>2, \end{cases}$ *where*

$$J(p,c) = (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^{\alpha} (F(\alpha)-F(u))^{-\frac{1}{p}}\, du.$$

Proof. Let $p>1$ and $0<c<c_*$ be fixed.

(i) We have

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to 0^+} T_+(p,c,E) &= \lim_{E\to 0^+} \int_0^{S_+(p,c,E)} \left[E^p - p'F(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\
&= \lim_{E\to 0^+} \int_0^1 S_+(p,c,E)\left[E^p - p'F(S_+(p,c,E)\,t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^1 S_+(p,c)\left[-p'F(S_+(p,c)\,t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^{S_+(p,c)} \left[-p'F(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\
&= h_+(p,c).
\end{aligned}$$

(ii) We have

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to E_*(p,c)} T_+(p,c,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \lim_{E\to E_*(p,c)} \int_0^1 \frac{s_+(p,c,E)}{\left[F(s_+(p,c,E)) - F(s_+(p,c,E)\,t)\right]^{\frac{1}{p}}} dt \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{\alpha}{\left[F(\alpha)-F(\alpha t)\right]^{\frac{1}{p}}} dt \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

That is

$$\lim_{E\to E_*(p,c)} T_+(p,c,E) = (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}. \tag{4.4}$$

On the other hand, since $f(\alpha)=0$, then by Taylor's Formula with Lagrange's reminder, there exists a point ζ in the open interval (u,α) such that

$$F(u) = F(\alpha) + \frac{(\alpha-u)^2}{2} f'(\zeta),$$

where

$$f'(\zeta) = (p-1)\,\zeta^{p-2}\left(a - 2b\zeta^{p-1}\right).$$

Which implies that

$$\lim_{u\to\alpha^-}\frac{F(\alpha)-F(u)}{(\alpha-u)^2}=-\frac{f'(\alpha)}{2}.$$

Which means that for each $\varepsilon>0$, there exists $\delta(\varepsilon)>0$ such that for all $u\in(0,\alpha)$, the condition $\alpha-u<\delta(\varepsilon)$ implies that $\left|\frac{F(\alpha)-F(u)}{(\alpha-u)^2}+\frac{f'(\alpha)}{2}\right|<\varepsilon$.

Now, if we choose $\varepsilon>0$ such that $\varepsilon<-\frac{f'(\alpha)}{4}$, then by (4.4), it follows that

$$I_1(p,\alpha,\varepsilon)\le\lim_{E\to E_*(p,c)}T_+(p,c,E)\le I_2(p,\alpha,\varepsilon), \tag{4.5}$$

where

$$I_1(p,\alpha,\varepsilon)=\widetilde{I}_1(p,\alpha,\varepsilon)+\widehat{I}_1(p,\alpha,\varepsilon),$$

with

$$\widetilde{I}_1(p,\alpha,\varepsilon)=(p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{\alpha-\delta(\varepsilon)}\frac{du}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{p}}},$$

and

$$\widehat{I}_1(p,\alpha,\varepsilon)=(p')^{\frac{-1}{p}}\left(-\frac{f'(\alpha)}{2}+\varepsilon\right)^{\frac{-1}{p}}\int_{\alpha-\delta(\varepsilon)}^{\alpha}\frac{du}{[\alpha-u]^{\frac{2}{p}}},$$

and

$$I_2(p,\alpha,\varepsilon)=\widetilde{I}_2(p,\alpha,\varepsilon)+\widehat{I}_2(p,\alpha,\varepsilon),$$

with

$$\widetilde{I}_2(p,\alpha,\varepsilon)=(p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{\alpha-\delta(\varepsilon)}\frac{du}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{p}}},$$

and

$$\widehat{I}_2(p,\alpha,\varepsilon)=(p')^{\frac{-1}{p}}\left(-\frac{f'(\alpha)}{2}-\varepsilon\right)^{\frac{-1}{p}}\int_{\alpha-\delta(\varepsilon)}^{\alpha}\frac{du}{[\alpha-u]^{\frac{2}{p}}}.$$

Now since the integral $\int_{\alpha-\delta(\varepsilon)}^{\alpha}\frac{du}{[\alpha-u]^{\frac{2}{p}}}$ is convergent if and only if $p>2$, then by (4.5), it follows that

$$\lim_{E\to E_*(p,c)}T_+(p,c,E)=\begin{cases}+\infty & \text{if } 1<p\le 2,\\ J(p,c) & \text{if } p>2,\end{cases}$$

where $J(p,c)=(p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{\alpha}\frac{du}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{p}}}$.

□

Lemma 4.4. *For all $p>2$, we have*

(i) $\lim_{c\to 0^+}J(p,c)=a^{\frac{-1}{p}}m(p)$, *where the function m is defined by*

$$m(p)=(p')^{\frac{-1}{P}}\int_0^1\frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p)-\frac{1}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

(ii) $\lim_{c\to c_*}J(p,c)=a^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\beta\left(\frac{1}{p},\frac{p-2}{p}\right)$.

(iii) *The function* $c \longmapsto J(p,c)$ *is strictly increasing.*

Proof. Let $p>2$ be fixed.

(i) We have

$$\begin{aligned} J(p,c) &= (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^\alpha \frac{du}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^\alpha \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

This implies that

$$\begin{aligned} \lim_{c\to 0^+} J(p,c) &= (p')^{\frac{-1}{P}} \lim_{c\to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}} (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}} m(p). \end{aligned}$$

(ii) Notice that

$$\begin{aligned} \lim_{c\to c_*} J(p,c) &= (p')^{\frac{-1}{P}} \lim_{c\to c_*} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{P}} \lim_{c\to c_*} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{4p-2}(1-t^{2p-1}) - \frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}} \ (p')^{\frac{-1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(t-t^p) + \frac{1}{2p}(t^{2p-1}-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right). \end{aligned}$$

(iii) We have

$$J(p,c) = \int_0^\alpha \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} - c\alpha\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Again using the change of variables $u=\alpha t$, we obtain

$$J(p,c) = \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1}) - c\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Since $\alpha=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, one has

$$J(p,c)=\int_0^1\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)-\frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}\left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Differentiating this equality with respect to c, we obtain

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J}{\partial c}(p,c)\\
&=\frac{-1}{p}\int_0^1\frac{\frac{b}{(2p-1)\sqrt{a^2-4bc}}\left(1-t^{2p-1}\right)-\left[\frac{2b\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)+\frac{4b^2c}{\sqrt{a^2-4bc}}}{\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)^2}\right](1-t)}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)-\frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}\left(1-t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt\\
&=\frac{-b}{p\sqrt{a^2-4bc}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)^2}\times\\
&\int_0^1\frac{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)^2}{(2p-1)}\left(1-t^{2p-1}\right)-\left(2\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)\sqrt{a^2-4bc}+4bc\right)(1-t)}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)-\frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}\left(1-t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt.
\end{aligned}$$

Then, we have

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J}{\partial c}(p,c)\\
&=A(p,b,c)\int_0^1\frac{L(t,p,c)}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)-\frac{2bc}{a+\sqrt{a^2-4bc}}\left(1-t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt,
\end{aligned}\tag{4.6}$$

where

$$A(p,b,c)=\frac{-b}{p\sqrt{a^2-4bc}\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)^2},$$

and for all $t\in[0,1)$,

$$\begin{aligned}
L(t,p,c)=&\frac{\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)^2}{(2p-1)}\left(1-t^{2p-1}\right)\\
&-\left(2\left(a+\sqrt{a^2-4bc}\right)\sqrt{a^2-4bc}+4bc\right)(1-t).
\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}
L(t,p,c)=&\left(\frac{2a^2-4bc+2a\sqrt{a^2-4bc}}{2p-1}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)\\
&-\left(2a\sqrt{a^2-4bc}+2a^2-4bc\right)(1-t)\\
=&\left(2a\sqrt{a^2-4bc}+2a^2-4bc\right)\left(\left(\frac{1-t^{2p-1}}{2p-1}\right)-(1-t)\right)
\end{aligned}$$

Since

$$2a\sqrt{a^2-4bc}+2a^2-4bc>0,$$

and

$$\left(\frac{1-t^{2p-1}}{2p-1}\right)-(1-t)<0,\ \text{for all } t\in[0,1),$$

we obtain that

$$L(t,p,c)>0,\ \text{for all } t\in[0,1). \tag{4.7}$$

Then by (4.6) and (4.7), it follows that

$$\frac{\partial J}{\partial c}(p,c)<0,\ \text{for all } p>2 \text{ and } 0<c<c_*.$$

Which means that the function $c\longmapsto J_+(p,c)$ is strictly increasing.

□

Lemma 4.5. *For all $p>1$, we have*

(i) $\lim_{c\to 0^+} s_+(p,c)=0^+$.

(ii) $\lim_{c\to c_*} s_+(p,c)=\left[\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{p-1}}$.

(iii) $\frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c)=\frac{s_+(p,c)}{as_+^{p-1}(p,c)-bs_+^{2p-2}(p,c)-c}$, *for all $c\in(0,c_*)$.*

Proof. Let $p>1$ be fixed.

(i) We have

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0^+} s_+(p,c) &= \lim_{c\to 0^+}\left[(2p-1)\left(\frac{\frac{a}{p}-\sqrt{\frac{a^2}{p^2}-\frac{4bc}{2p-1}}}{2b}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\\ &= 0^+.\end{aligned}$$

(ii) Also,

$$\begin{aligned}\lim_{c\to c_*} s_+(p,c) &= \lim_{c\to\left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}}\left[(2p-1)\left(\frac{\frac{a}{p}-\sqrt{\frac{a^2}{p^2}-\frac{4bc}{2p-1}}}{2b}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\\ &= \left[\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

ii) Notice that

$$\frac{a}{p}s_+^p(p,c)-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)-cs_+(p,c)=0,\ \text{for all } c\in(0,c_*).$$

Differentiating this equation with respect to c, we obtain

$$\frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c)=\frac{s_+(p,c)}{as_+^{p-1}(p,c)-bs_+^{2p-2}(p,c)-c},\ \text{for all } c\in(0,c_*).$$

□

Lemma 4.6. *For all $p>1$, we have*

(i) $\lim_{c\to 0} h_+(p,c)=\frac{p}{2(p-1)}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}$.

(ii) $\lim_{c\to c_*} h_+(p,c) = \begin{cases} +\infty \ \text{if } 1 < p \le 2, \\ a^{\frac{-1}{p}} \left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right) \ \text{if } p > 2. \end{cases}$

(iii) *The function* $c \mapsto h_+(p,c)$ *is strictly increasing on* $(0, c_*)$.

Proof. Let $p > 1$ be fixed.

(i) We have

$$h_+(p,c) = \int_0^{s_+(p,c)} \frac{du}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}, \text{ for all } c \in (0, c_*).$$

Using the change of variables $u = s_+(p,c)\,t$, we obtain for all $c \in (0, c_*)$,

$$h_+(p,c) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{s_+(p,c)}{\left[-\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-1} - cs_+(p,c)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}} dt.$$

Since

$$\frac{a}{p}s_+^p(p,c) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c) - cs_+(p,c) = 0, \text{ for all } c \in (0, c_*),$$

it follows that

$$h_+(p,c) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\int_0^1 \frac{s_+(p,c)\,dt}{\left[\left(\frac{\frac{a}{p}s_+^p(p,c) - \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)}{S_+(p,c)}\right) S_+(p,c)\,t - \frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p + \frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-1}\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(t - t^p) + \frac{b}{2p-1}s_+^{p-1}(p,c)\,(t^{2p-1} - t)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Now since $\lim_{c\to 0^+} s_+(p,c) = 0^+$, we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{c\to 0^+} h_+(p,c) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}t - \frac{a}{p}t^p\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[t - t^p\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{(p-1)\sin\frac{\pi}{p}} \\ &= \frac{p}{2(p-1)} \left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(ii) Since $\lim_{c\to c_*} s_+(p,c) = \left(\frac{2p-1}{2p}\left(\frac{a}{b}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$, one has

$$\begin{aligned}\lim_{c\to c_*} h_+(p,c) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(t-t^p\right)+\frac{a}{2p}\left(t^{2p-1}-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}\left(t-t^p\right)+\frac{1}{2p}\left(t^{2p-1}-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \begin{cases} +\infty \text{ if } 1<p\le 2, \\ a^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{2}{(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \beta\left(\frac{1}{p},\frac{p-2}{p}\right) \text{ if } p>2. \end{cases}\end{aligned}$$

(iii) Let $c\in(0,c_*)$, we have

$$\begin{aligned} h_+(p,c) &= \int_0^{s_+(p,c)} \frac{du}{\left[-p'\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_+(p,c)}{\left[\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}(p,c)\right)t-\left(\frac{a}{p}s_+^p(p,c)\,t^p-\frac{b}{2p-1}s_+^{2p-1}t^{2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\ &= \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_+(p,c)}{\left[tF\left(s_+(p,c)\right)-F\left(s_+(p,c)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt.\end{aligned}$$

This means that

$$h_+(p,c) = \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{s_+(p,c)}{\left[tF\left(s_+(p,c)\right)-F\left(s_+(p,c)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt. \tag{4.8}$$

Differentiating (4.8) with respect to c, we obtain

$$\frac{\partial h_+}{\partial c}(p,c) = \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c) \int_0^1 \frac{\widetilde{L}\left(t,s_+(p,c)\right)}{p\left[tF\left(s_+(p,c)\right)-F\left(s_+(p,c)\,t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt, \tag{4.9}$$

where

$$\begin{aligned}\widetilde{L}\left(t,s_+(p,c)\right) := {} & t\left[pF\left(s_+(p,c)\right)-s_+(p,c)\,f\left(s_+(p,c)\right)\right] \\ & -\left[pF\left(s_+(p,c)\,t\right)-s_+(p,c)\,tf\left(s_+(p,c)\,t\right)\right],\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\widetilde{L}}{\partial t^2}\left(t,s_+(p,c)\right) &= -s_+^2(p,c)\left[(p-2)\,f'\left(s_+(p,c)\,t\right)-s_+(p,c)\,tf''\left(s_+(p,c)\,t\right)\right] \\ &= -2\,(p-1)^2\,bs_+^{2p-1}(p,c)\,t^{2p-3}<0, \text{ for all } t\in(0,1),\end{aligned}$$

and since

$$\widetilde{L}\left(0,s_+(p,c)\right) = \widetilde{L}\left(1,s_+(p,c)\right) = 0,$$

we obtain

$$\widetilde{L}\left(t, s_{+}(p, c)\right)>0, \text{ for all } t \in(0,1).$$

Hence the integral in (4.9) is positive and by the assertion (iii) of lemma 4.5, it follows that

$$\frac{\partial h_{+}}{\partial c}(p, c)>0, \text{ for all } p>1 \text{ and } c \in\left(0, c_{*}\right).$$

□

Lemma 4.7. *For all $p>1$ and $c \in (0, c_*)$, the time-map $E \mapsto T_+(p, c, E)$ admits a unique critical point E_1 on $(0, E_*(p, c))$ at which its global minimum value is obtained.*

Proof. Let $p>1$ and $c \in (0, c_*)$ be fixed.

We have

$$\begin{aligned} T_{+}(p, c, E) &= \int_{0}^{s_{+}(p, c, E)} \frac{du}{\left[E^{p}-p^{\prime}\left(\frac{a}{p} u^{p}-\frac{b}{2p-1} u^{2p-1}-c u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(p^{\prime}\right)^{\frac{-1}{p}} \int_{0}^{s_{+}(p, c, E)} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\left(s_{+}^{p}(p, c, E)-u^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s_{+}^{2p-1}(p, c, E)-u^{2p-1}\right)-c\left(s_{+}(p, c, E)-u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

We observe that

$$T_{+}(p, c, E)=\left(p^{\prime}\right)^{\frac{-1}{p}} \check{T}_{+}(p, c, s),$$

where

$$\begin{aligned} s &:= s_{+}(p, c, E) \text{ and } \check{T}_{+}(p, c, s) \\ &= \int_{0}^{s} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\left(s^{p}-u^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c(s-u)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

We have

$$\frac{\partial T_{+}}{\partial E}(p, c, E)=\left(p^{\prime}\right)^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_{+}}{\partial E}(p, c, E) \times \frac{\partial \check{T}_{+}}{\partial s}(p, c, s). \tag{4.10}$$

Since for all $p>1$ and $c \in (0, c_*)$, the function $E \mapsto s_+(p, c, E)$ is strictly increasing on $(0, E_*(p, c))$ then by (4.10), it follows that to study the variations of $E \mapsto T_+(p, c, E)$, it suffices to study those of $\check{T}_+$ with respect to s.

With this in mind, we consider

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{T}_{+}}{\partial s}(p, c, s) &= \frac{d}{ds} \int_{0}^{s} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\left(s^{p}-u^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c(s-u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{d}{ds} \int_{0}^{1} \frac{s}{\left[\frac{a}{p} s^{p}\left(1-t^{p}\right)-\frac{b}{2p-1} s^{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)-cs(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^s \frac{H(p,c,s)-H(p,c,u)}{s\left[\frac{a}{p}\ (s^p-u^p)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c\ (s-u)\right]^{\frac{1}{p}}}du,$$

where

$$H(p,c,u)=(p-1)\left(\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right). \tag{4.11}$$

We have

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,c,u)=(p-1)\left(bu^{2p-2}-c\right). \tag{4.12}$$

By (4.11) and (4.12) and since $p>1$ and $c<c_*=\left(\frac{2p-1}{p^2}\right)\frac{a^2}{4b}$, it follows that there exists two real numbers s_1 and s_2 with

$$s_1=\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}<s_2=\left(\frac{(2p-1)\,c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}<\alpha=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

such that

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,c,u)<0 \text{ on } (0,s_1),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,c,s_1)=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,c,u)>0 \text{ on } (s_1,\alpha),$$

$$H(p,c,u)<0 \text{ on } (0,s_2),$$

$$H(p,c,s_2)=0,$$

and

$$H(p,c,u)>0 \text{ on } (s_2,\alpha).$$

So, it follows that

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,c,s)<0, \text{ for all } s\in(0,s_1),$$

and

$$\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,c,s)>0, \text{ for all } s\in(s_2,+\infty).$$

Hence for all $p>1$ and $c\in(0,c_*)$, there exists $s_*\in[s_1,s_2]$ such that $\frac{\partial \check{T}_+}{\partial s}(p,c,s_*)=0$.

Now, we are going to prove that the time-map $s\mapsto \check{T}_+(p,c,s)$ admits a unique critical point s_*, at which its global minimum value is obtained.

We have

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s)=\frac{p+1}{p^2}\int_0^s \frac{\left[H(p,c,s)-H(p,c,u)\right]^2}{s^2\left[\frac{a}{p}(s^p-u^p)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c\,(s-u)\right]^{\frac{2p+1}{p}}}du$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^s \frac{\Psi(p,c,s)-\Psi(p,c,u)}{s^2\left[\frac{a}{p}(s^p-u^p)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c\,(s-u)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du,$$

where

$$\Psi(p,c,u)=\frac{(p-1)(p-2)}{2p-1}bu^{2p-1}+p(p-1)u.$$

Also note that,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u}(p,c,u)=(p-1)(p-2)bu^{2p-2}+p(p-1)c.$$

We distinguish two cases

Case 1: $p\geq 2$.

In this case we have $\frac{\partial\Psi}{\partial u}(p,c,u)>0$ and consequently $\frac{\partial^2\tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s)>0$.

Case 2: $1<p<2$.

In this case, we have

$$\begin{aligned}
&s^2\frac{\partial^2\tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s)+s\frac{\partial\tilde{T}_+}{\partial s}(p,c,s)\\
&=\frac{p+1}{p^2}\int_0^s\frac{\left[H(p,c,s)-H(p,c,u)\right]^2}{\left[\frac{a}{p}(s^p-u^p)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c(s-u)\right]^{\frac{2p+1}{p}}}du\\
&\quad+\frac{1}{p}\int_0^s\frac{g(s)-g(u)}{\left[\frac{a}{p}(s^p-u^p)-\frac{b}{2p-1}\left(s^{2p-1}-u^{2p-1}\right)-c(s-u)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du,
\end{aligned}$$

where

$$\widetilde{g}(u)=(p-1)^2\left(\frac{b}{2p-1}u^{2p-2}+cu\right).$$

Since

$$\widetilde{g}'(u)=(p-1)^2\left(bu^{2p-2}+c\right)>0,$$

we obtain that

$$s^2\frac{\partial^2\tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s)+s\frac{\partial\tilde{T}_+}{\partial s}(p,c,s)>0,\text{ for all }s\in(s_1,s_2).$$

Since s_* is a critical point, then $\frac{\partial\tilde{T}_+}{\partial s}(p,c,s_*)=0$ and consequently $\frac{\partial^2\tilde{T}_+}{\partial s^2}(p,c,s_*)>0$, which means that the time-map $s\mapsto\tilde{T}_+(p,c,s)$ admits a unique critical point s_*, at which it's global minimum value is obtained and consequently T_+ admits a unique critical point E_1 on $(0,E_*(p,c))$ at which it's global minimum value is obtained. □

Lemma 4.8. *For all $p>1$, we have*

(i) $\lim_{c\to 0^+}T_+(p,c,E_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}$.

(ii) *The function $c\mapsto T_+(p,c,E_1)$ is strictly increasing.*

(iii) $T_+(p,c,E_1)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{a}{p}-\frac{b}{p}S_+^{p-1}(p,c,E_1)-cS_+^{1-p}(p,c,E_1)\right]^{-\frac{1}{p}}$, *for all* $0<c<\min\left(c_*,\frac{a^2}{(p+1)^2b}\right)$.

Proof. Let $p>1$ be fixed.

(i) We have

$$
\begin{aligned}
\lim_{c\to 0^+} T_+(p,c,E_1) &= \int_0^{s_*} \frac{du}{\left[E_1^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{s_*} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}s_*^p - \frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1} - cs_* - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} - cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{1} \frac{s_*}{\left[\frac{a}{p}s_*^p(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1}(1-t^{2p-1}) - cs_*(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}dt \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{1} \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p) - \frac{b}{2p-1}s_*^{p-1}(1-t^{2p-1}) - cs_*^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}
$$

Since $s_1 < s_* < s_2$, $\lim_{c\to 0^+} s_1 = \lim_{c\to 0^+} s_2 = 0^+$, and $\lim_{c\to 0^+} cs_1^{1-p} = \lim_{c\to 0^+} cs_2^{1-p} = 0^+$, we obtain

$$
\begin{aligned}
\lim_{c\to 0^+} T_+(p,c,E_1) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{1} \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{p}\beta\left(\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right) \\
&= \left(\frac{p-1}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{p}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

(ii) Note that

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,c,E) \\
&\quad = (p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial E}(p,c,E) \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{H(p,c,s_+(p,c,E)) - H(p,c,u)}{ps_+(p,c,E)\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du,
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T_+}{\partial c}(p,c,E) \\
&\quad = (p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial s_+}{\partial c}(p,c,E) \int_0^{s_+(p,c,E)} \frac{H(p,c,s_+(p,c,E)) - H(p,c,u)}{ps_+(p,c,E)\left[F(s_+(p,c,E)) - F(u)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du
\end{aligned}
$$

$$+\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^{s_+(p,c,E)}\frac{s_+^2\left(p,c,E\right)-u^2}{ps_+\left(p,c,E\right)\left[F\left(s_+\left(p,c,E\right)\right)-F\left(u\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du.$$

By the previous equality and (4.13), one has

$$-\frac{\partial s_+}{\partial c}\left(p,c,E\right)\times\frac{\partial T_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)+\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)\times\frac{\partial T_+}{\partial c}\left(p,c,E\right)$$
$$=\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)\int_0^{s_+(p,c,E)}\frac{s_+^2\left(p,c,E\right)-u^2}{ps_+\left(p,c,E\right)\left[F\left(s_+\left(p,c,E\right)\right)-F\left(u\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du.$$

Since

$$\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)>0 \text{ and } \int_0^{s_+(p,c,E)}\frac{s_+^2\left(p,c,E\right)-u^2}{ps_+\left(p,c,E\right)\left[F\left(s_+\left(p,c,E\right)\right)-F\left(u\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}du>0,$$

we obtain that

$$-\frac{\partial s_+}{\partial c}\left(p,c,E\right)\times\frac{\partial T_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)+\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)\times\frac{\partial T_+}{\partial c}\left(p,c,E\right)>0. \tag{4.14}$$

Now since $\frac{\partial T_+}{\partial E}\left(p,c,E_1\right)=0$ and $\frac{\partial s_+}{\partial E}\left(p,c,E\right)>0$ for all $E\in\left(0,E_*\left(p,c\right)\right)$, then by (4.14), it follows that

$$\frac{\partial T_+}{\partial c}\left(p,c,E_1\right)>0,$$

which means that the function $c\longmapsto T_+\left(p,c,E_1\right)$ is strictly increasing.

(iii) We have

$$T_+\left(p,c,E_1\right)=\int_0^{s_*}\frac{du}{\left[E_1^p-p'\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$
$$=\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^{s_*}\frac{du}{\left[\frac{a}{p}s_*^p-\frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1}-cs_*-\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}-cu\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$
$$=\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^{1}\frac{s_*}{\left[\frac{a}{p}s_*^p\left(1-t^p\right)-\frac{b}{2p-1}s_*^{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)-cs_*\left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}dt$$
$$=\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^{1}\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right)-\frac{b}{2p-1}s_*^{p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)-cs_*^{1-p}\left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$
$$=\left(p'\right)^{\frac{-1}{p}}\int_0^{1}\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^p\right)-\frac{b}{2p-1}S_+^{p-1}\left(p,c,E_1\right)\left(1-t^{2p-1}\right)-cS_+^{1-p}\left(p,c,E_1\right)\left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Since $1-t^{2p-1}\leq\frac{2p-1}{p}\left(1-t^p\right)$, $1-t\leq1-t^p$, for all $t\in[0,1)$ and $\frac{a}{p}-\frac{b}{2p-1}S_+^{p-1}\left(p,c,E_1\right)-cS_+^{1-p}\left(p,c,E_1\right)>0$, for all $0<c<\min\left(c_*,\frac{a^2}{(p+1)^2b}\right)$, we obtain that

$$\begin{aligned} T_{+}\left(p,c,E_{1}\right) &\leq \left[\frac{a}{p}-\frac{b}{p}S_{+}^{p-1}\left(p,c,E_{1}\right)-cS_{+}^{1-p}\left(p,c,E_{1}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}\int_{0}^{1}\frac{dt}{\left(1-t^{p}\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{1}\left(p\right)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{a}{p}-\frac{b}{p}S_{+}^{p-1}\left(p,c,E_{1}\right)-cS_{+}^{1-p}\left(p,c,E_{1}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

□

5. PROOF OF MAIN RESULTS

Proof of Proposition 2.1. Let u be a positive solution of problem (2.1). Multiplying the equation in (2.1) by u and integrating the resulting equation over $(0,1)$, we obtain

$$\int_{0}^{1}\left|u'\left(x\right)\right|^{p}dx=a\int_{0}^{1}u^{p}\left(x\right)dx-b\int_{0}^{1}u^{2p-1}\left(x\right)dx-c\int_{0}^{1}u\left(x\right)dx.$$

Since

$$\int_{0}^{1}\left|u'\left(x\right)\right|^{p}dx\geq\lambda_{1}\left(p\right)\int_{0}^{1}u^{p}\left(x\right)dx,$$

we obtain

$$\lambda_{1}\left(p\right)\int_{0}^{1}u^{p}\left(x\right)dx\leq a\int_{0}^{1}u^{p}\left(x\right)dx-b\int_{0}^{1}u^{2p-1}\left(x\right)dx-c\int_{0}^{1}u\left(x\right)dx.$$

That is

$$\left(a-\lambda_{1}\left(p\right)\right)\int_{0}^{1}u^{p}\left(x\right)dx\geq b\int_{0}^{1}u^{2p-1}\left(x\right)dx+c\int_{0}^{1}u\left(x\right)dx.$$

Since $u>0$ on $(0,1)$, $b>0$ and $c>0$, we obtain that if $a\leq\lambda_{1}(p)$, the problem (2.1) admits no positive solution. □

Proof of Proposition 2.2. Let u be a positive solution of problem (2.1) and suppose that $c>\frac{a^{2}}{4b}$. It is not difficult to prove that the function f is strictly negative. Then, by the maximum principle (see Theorem 11.1 in [24]), the problem (2.1) admits no positive solution. □

Proof of Theorem 2.3.

Proof of Assertion (A). Assume that $1 < p \leq 2$ and $a > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$.

In this case by Lemma 4.6, there exists a unique real $c_0(a,p) < c_*$ such that $h_+(p,c) < \frac{1}{2}$, for all $c \in (0, c_0(a,p))$, $h_+(p, c_0(a,p)) = \frac{1}{2}$ and $h_+(p,c) > \frac{1}{2}$, for all $c \in (c_0(a,p), c_*)$. So, by Lemmas 4.3 and 4.7, it follows that the scalar equation in the variable E, $T_+(p,c,E) = \frac{1}{2}$ admits a solution in $[0, E_*(p,c))$ if and only if $c \in (0, c_0(a,p)]$. Therefore, by Theorem 3.1, it follows that if $c < c_0(a,p)$, problem (2.1), admits a unique positive solution and it belongs to A^+ and if $c = c_0(a,p)$, problem (2.1), admits exactly two positive solutions one belongs to B^+ and the other to A^+.

Proof of Assertion (B). Assume that $1 < p \leq 2$ and $\lambda_1(p) < a \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$.

Since $\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}} < S_+(p,c,E_1) < \left(\frac{(2p-1)c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}$ and if we choose $c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, we obtain that

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{a}{p} - \frac{b}{p}S_+^{p-1}(p,c,E_1) - cS_+^{1-p}(p,c,E_1)\right]^{-\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}$$

and then by Lemma 4.8, it follows that $T_+(p,c,E_1) < \frac{1}{2}$. Which implies that by Lemmas 4.3 and 4.7, that the scalar equation in the variable E, $T_+(p,c,E) = \frac{1}{2}$ admits a solution in $[0, E_*(p,c))$ if and only if $0 < c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$ and consequently by Theorem 3.1, it follows that if $c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, problem (2.1), admits exactly two positive solutions and they belong to A^+.

Proof of Assertion (C). Assume that $p > 2$ and $a \geq \frac{2^{p+1}}{(p-1)^{p-1}}\beta^p\left(\frac{1}{p}, \frac{p-2}{p}\right)$.

In this case by Lemmas 4.4 and 4.6, we have $h(p,c) < \frac{1}{2}$ and $J(p,c) < \frac{1}{2}$. Then by Lemmas 4.3 and 4.7, it follows that the scalar equation in the variable E, $T_+(p,c,E) = \frac{1}{2}$ admits no solution in $[0, E_*(p,c)[$ and consequently by Theorem 3.1, it follows that the problem (2.1) admits no positive solution for all $c \in (0, c_*)$.

Proof of Assertion (D). Assume that $p > 2$, $a \leq \min\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), 2^p m^p(p)\right)$ and $0 < c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$. In this case by Lemmas 4.4 and 4.6, it follows that if $a \leq \min\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), 2^p m^p(p)\right)$, we have $h(p,c) > \frac{1}{2}$ and $J(p,c) > \frac{1}{2}$.

On the other hand, since $\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}} < S_+(p,c,E_1) < \left(\frac{(2p-1)c}{b}\right)^{\frac{1}{2p-2}}$ and if we choose $0 < c < \min\left(\frac{a^2}{(p+1)^2 b}, \frac{(2p-1)(a-\lambda_1(p))^2}{4b}\right)$, we obtain that

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{a}{p} - \frac{b}{p}S_+^{p-1}(p,c,E_1) - cS_+^{1-p}(p,c,E_1)\right]^{-\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}.$$

Then by Lemma 4.8, it follows that $T_+(p,c,E) < \frac{1}{2}$.

So, it follows that the scalar equation in the variable E, $T_+ (p, c, E) = \frac{1}{2}$ admits exactly two solutions in $[0, E_* (p, c)[$ and consequently by Theorem 3.1, it follows that the problem (2.1) admits exactly two positive solutions in A^+. $\square$

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank the anonymous referee for several comments and suggestions which contributed to improve this paper. This Research was partially supported by a MESRS-DRS grant B02020100075 and PNR project N^0 43/28/2011.

REFERENCES

[1] I. Addou and A. Benmezai, Boundary value problems for the one-dimensional p-Laplacian with even superlinearity, Electronic J. Diff. Eqns. **9** (1999), 1–29.

[2] I. Addou, S. M. Bouguima, M. Derhab and Y. S. Raffed, On the number of solutions of a quasilinear elliptic class of B. V. P. with jumping nonlinearities, Dynamic Syst. Appl. **7** (1998), 575–599.

[3] I. Addou, S. M. Bouguima, A. Benmezai and M. Derhab, Exactness results for generalized Ambrosetti-Brezis-Cerami and related one-dimensional elliptic equations, Electronic J. Diff. Eqns. **66** (2000), 1–34.

[4] G. A. Afrouzi and S. Shakeri, Existence results for a p-Laplacian equation with diffusion, strong Allee effect and constant yield harvesting, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization. **3** (2012), 93–99.

[5] G. A. Afrouzi and S. H. Rasouli, Populations models involving the p-Laplacian with indefinite weight and constant yield harvesting, Chaos, Solitons and Fractals **31** (2007), 404–408.

[6] M. AliMohammady and M. Koozegar, Some Remark on the nonexistence of positive solutions for some a, $P-$Laplacian systems, The Journal of Nonlinear Sciences and Systems **1** (2008), pp. 56–60.

[7] A. Cañada, P. Drábek and J. L. Gámez, Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion, Transactions of the American Mathematical Society, **349** (1997), 4231–4249.

[8] Wang Chunpeng, Yin Jingxue and Wen Mingfeng, Periodic optimal control for a degenerate nonlinear diffusion equation, Computational Mathematics and Modelling, **17** (2006), 364–375.

[9] A. Collins, M. Gilliland, C. Henderson, S. Koone, L. McFerrin and E. K. Wampler, Population models with diffusion and constant yield harvesting, Rose-Hulman Institute of Technology Undergraduate Math. Journal, **5** (2004).

[10] M. Derhab and M. Megnafi, Exact number of positive solutions for a class of quasilinear boundary value problems, Communications on Applied Nonlinear Analysis, **15** (2008), 15–37.

[11] Wandi Ding and Suzanne Lenhart, Optimal Harvesting of a spatially explicit fishery model, Natural Resource Modeling, **22** (2009), 173–211.

[12] J. Goddard II, E. k. Lee and R. Shivaji, Population models with nonlinear boundary conditions, Electronic J. Diff. Eqns., Conference **19** (2010), 135–149.

[13] M. Guedda and L. Veron, Bifurcation phenomena associate to the p-Laplacian operator, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 419–431

[14] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations,. Russian Math. Survey **42** (1987), 169–222.

[15] L. S. Kalashnikova, I. N. Taganov and V. P. Volkova, Variational solution of equation of nonlinear mass and energy transfer, Journal of Engineering Physics, **33** (1977), 1197–1202.

[16] P. Lindqvist, Note on a nonlinear eigenvalue problem, Rocky Mountain Journal of Mathematics **23** (1999), 281–288.

[17] R. A. Mashiyev, G. Alisoy and S. Ogras, Solutions to semilinear p-Laplacian Dirichlet problem in population dynamics, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) **31** (2010), 247–254.

[18] M. G. Neubert, Marine reserves and optimal harvesting, Ecology Letters **6** (2003), 843–849.

[19] S. Oruganti, J. Shi and R. Shivaji, Diffusive logistic equation with constant yield harvesting I, steady states, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3601–3619.

[20] S. Oruganti, J. Shi and R. Shivaji, Logistic equation with the p-Laplacian and constant yield harvesting, Abstract and Applied Analysis **9** (2004), 723–727.

[21] S. Oruganti and R. Shivaji, Existence results for classes p-Laplacian semipositone equations, Boundary Value Problems (2006), 1–7.

[22] M. Ôtani, A remark on certain nonlinear elliptic equations, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. **19** (1984), 23–28.

[23] Peter Y. H. Pang, Yifu Wang and Jingxue Yin, Periodic solutions for a class of reaction-diffusion equations with p-Laplacian, Nonlinear Analysis: Real World Applications **11** (2010), 323–331.

[24] P. Pucci and J. Serrin, The strong maximum principle revisited, J. Differential Equations **196** (2004), 1–66.

[25] K. M. Sundaram and G. Nath, Flow and heat transfer for a power-law electrically conducting fluid flowing betwen parallel plates under trasverse magnetic field with viscous dissipation, Proc. Indian Acad. Sci., **83** A (1976), 18–201.

[26] Kazuaki Taira, Introduction to Diffusive logistic equations in population dynamics, Korean J. Comput. & Appl. Math. **9** (2002), 289–347.

[27] Y. Wang, Y. Wang and J. Shi, Exact multiplicity of solutions to a diffusive logistic equation with harvesting, Applied Mathematics and Computation **216** (2010), 1531–1537.