

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BAKR BELKAID- TLEMCCEN

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



Mémoire pour l'obtention du diplôme de magistère

Option: *Seismic risk and Earthquake Engineering*

THEME

CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA FISSURATION DANS LES STRUCTURES EN BETON PAR LA METHODE X-FEM

Présenté par : *Mr RAHMANI Abdallah Yacine*

Devant le Jury composé de :

N. BOUMECHRA	Professeur	UABB- Tlemcen	Président
K.MEFTAH	Maître de conférences A	UABB-Tlemcen	Examineur
N. MEDDANE	Maître de conférences B	UABB- Tlemcen	Examinatrice
Z. BENADLA	Maître de conférences B	UABB-Tlemcen	Examinatrice
M. MATALLAH	Maître de conférences A	UABB- Tlemcen	Encadreur

Remerciements

J'exprime ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à mon encadreur Dr Matallah Mohammed pour m'avoir proposé un sujet intéressant et pour la confiance qu'il m'a accordée.

J'exprime toute ma gratitude à Mr Nadir Boumechra pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie aussi Docteur N. Meddane et Docteur Z. Benadla, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les examinatrices de cette contribution.

Je remercie également Mr. Benoit Prabel de CEA SACLAY, France pour sa contribution qui a consistée à apporter son expérience et ses conseils.

Enfin, à ma famille, mes parents, ma sœur et mes frères, mes proches et mes amis.

RÉSUMÉ

La rupture dans les structures en béton est caractérisée par l'initiation et la propagation de fissures, les processus de dégradation fortement non linéaires prennent lieu initialement dans la « process zone » notée souvent (FPZ). Pour modéliser ces processus, les modèles continus peuvent être utilisés, basée sur la plasticité ou la mécanique de l'endommagement ou un couplage entre les deux mécanismes. Cependant, la phase finale de la fissuration caractérisée par l'ouverture et la propagation d'une fissure macroscopique ne peut pas être décrite par des modèles continus car les champs de déplacement ne sont plus continus à travers la fissure. Par conséquent, la description correcte de la rupture du béton nécessite une approche différente qui combine un modèle continu capable de reproduire la phase initiale et une autre stratégie visant à représenter les fissures d'une manière explicite, c'est à dire la discontinuité de déplacement capable de reproduire la phase finale. Ceci est l'objectif principal de ce modeste travail.

Dans une approche combinée, une attention particulière est portée à l'emplacement où les fissures s'amorcent pour des structures initialement non fissurées en utilisant l'approche OUVFISS développée par Matallah et al [30]. La propagation de la fissure est ensuite automatiquement déterminée en utilisant une approche discontinue basée sur la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). Les calculs numériques réalisés par le logiciel CAST3M sont validés par comparaison avec les résultats expérimentaux.

MOTS-CLÉS :

Fissuration, X-FEM, Béton, Mécanique de la rupture, Modèle cohésif.

ABSTRACT

From a macroscopic point of view, failure within concrete structures is characterized by the initiation and propagation of cracks, where highly nonlinear degradation processes take place in the fracture process zone. To model these processes, continuum models can be used, based either on plasticity and/or damage mechanics. Yet, continuous models can not be applied to model crack propagation, because displacements field are no longer continuous across the crack. Hence, a proper model for concrete fracture requires a different approach, one that combines a continuous softening model with a strategy to represent cracks, i.e. displacement discontinuities. This is the main goal of the present work.

In a combined approach, A particular attention is turned to the investigation of crack initiation using OUVFISS [30] approach. The crack propagation is therefore automatically determined using discrete crack approach based on the extended finite element method (X-FEM). The resulting computational framework is validated by comparison with experimental observations.

KEYWORDS:

Cracks, X-FEM, Concrete, Fracture mechanics, Cohesive crack.

ملخص

من وجهة نظر عينية (ميكروسكوبية)، هناك انهيارات في البنيات الخرسانية تتميز بالظهور الابتدائي للتشققات في مناطق معينة و من ثم تبدأ في الانتشار ، حيث تنشأ اهتراءات بصفة لا خطية في منطقة عملية الكسر التي عادة ما يرمز لها بـ (FPZ)، مما يطرح العديد من التساؤلات. لمحاكاة هذا السلوك ، نماذج استمرارية يمكن ان تستخدم ، إما في شكل دراسة المرونة أو باستعمال نظرية التلف للأوساط المستمرة . في حين أن، النماذج الاستمرارية لا يمكن تطبيقها لمحاكاة انتشار التشققات و ذلك لأن الانتقالات ليست مستمرة خلال التشقق و عليه تم اللجوء مؤخرا إلى نموذج آخر يقوم على ربط نموذج تلف مستمر مع إستراتيجية (عدم استمرارية الانتقال) لتمثيل التشققات بشكلها الظاهر ، وهذا ما كان هدف عملنا المتواضع.

في دراسة مركبة (مستمر/ لا مستمر)، انتشار التشققات يحدد أليا باستعمال نموذج غير مستمر بالاعتماد على طريقة العناصر المحدودة الممتدة (XFEM). مع تسليط الضوء على تحديد الأماكن التي تبدأ فيها التشققات باستخدام إجراء النمذجة (OUVFISS)[30]. مقارنة مع الملاحظات التجريبية تم تقييم النتائج المحصل عليها.

الكلمات المفتاحية:

التشققات، خرسانة، ميكانيكا التشقق، نموذج التشقق المتناسك.

Table des matières

Liste des figures.....	i
Liste des tableaux.....	iv
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1

Chapitre 1 :

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE.....	3
1.1. PHÉNOMÈNE DE FISSURATION DANS LE BÉTON	4
1.2. LES DIFFÉRENTES APPROCHES DE MODELISATION DE LA FISSURATION.....	5
1.2.1. APPROCHES CONTINUES.....	5
1.2.1.1. <i>La mécanique d'endommagement</i>	<i>5</i>
1.2.2. APPROCHES DISCONTINUES.....	6
1.2.2.1. <i>La mécanique de la rupture</i>	<i>6</i>
1.2.2.2. <i>Modèles de zones cohésives</i>	<i>11</i>
1.2.2.3. <i>Propagation des fissures.....</i>	<i>13</i>
1.3. MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE FISSURATION.....	15
1.3.1. MÉTHODES DE REMAILLAGE.....	15
1.3.2. MÉTHODE D'ÉLIMINATION D'ÉLÉMENTS.....	15
1.3.3. MÉTHODES SANS MAILLAGE.....	15
1.3.4. MÉTHODES DES ÉLÉMENTS FINIS ÉTENDUE (X-FEM)	16
1.3.5. MÉTHODES DES ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE	16
1.4. CONCLUSION	17

Chapitre 2 :

APPROCHES CONTINUES	18
2.1. COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU BÉTON	19
2.2. DIFFÉRENTS MODÈLES CONTINUS POUR MODÉLISER LE BÉTON	20
2.2.1. MODÈLES BASÉS SUR LA THÉORIE DE L'ÉTAT LOCAL.....	20
2.2.1.1. <i>Modèles d'endommagement isotropes</i>	<i>20</i>
2.2.1.2. <i>Modèles microplans</i>	<i>23</i>
2.2.2. LA MISE EN OEUVRE NUMÉRIQUE ET LE PROBLÈME DE LOCALISATION.....	25
2.2.3. FORMULATIONS NON-LOCALES EN MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT	25
2.2.4. EVALUATION DES OUVERTURES DE FISSURES	26
2.3. EXEMPLE D'APPLICATION	28
2.4. CONCLUSION	30

Chapitre 3 :

APROUCHES DISCONTINUES	31
3.1. REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	32
3.2. FORMULATION STANDARD DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS ÉTENDUE.....	34
3.2.1. APPROXIMATION DU DÉPLACEMENT	35
3.2.2. L'ENRICHISSEMENT HEAVISIDE (SAUT DE DÉPLACEMENT)	37
3.2.3. L'ENRICHISSEMENT CRACK-TIP (LES FONCTIONS SINGULIÈRES)	39
3.2.4. LES ÉQUATIONS DISCRÈTES D'ÉQUILIBRE	40
3.3. FORMULATION DE LA MÉTHODE XFEM POUR UN MODÈLE COHÉSIF	43
3.3.1. LA LOI DE SÉPARATION (LOI COHÉSIVE).....	44
3.3.2. LES ÉQUATIONS DISCRÈTES D'ÉQUILIBRE	44
3.4. L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE	46
3.5. AMÉLIORATIONS DE LA MÉTHODE XFEM.....	46
3.5.1. LA MÉTHODE LEVEL-SET	46
3.5.2. LE CAS TRIDIMENSIONNEL.....	47
3.5.3. LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE XFEM.....	48
3.6. EXEMPLES D'APPLICATIONS	49
3.6.1. EXEMPLE D'UNE BARRE FISSURÉE (1D)	49
3.6.1.1. <i>La méthode des éléments finis classique</i>	50
3.6.1.2. <i>La méthode des éléments finis étendue standard</i>	51
3.6.1.3. <i>La méthode des éléments finis étendue avec un modèle cohésif</i>	54
3.6.2. ANALYSE ÉLASTIQUE LINÉAIRE D'UNE PLAQUE MULTI- FISSURÉE (2D)	60
3.6.3. ANALYSE NON-LINÉAIRE D'UNE ÉPROUVETTE EN BÉTON MULTI-FISSURÉE (2D)	63
3.7. CONCLUSION	65

Chapitre 4 :

PASSAGE CONTINUE-DISCONTINUE (OUVFISS/XFEM)	66
4.1. L'AVANTAGE DU PASSAGE CONTINUE/DISCONTINUE	67
4.2. EXEMPLES D'APPLICATIONS	67
4.2.1. EXEMPLE DE TRACTION. ÉPROUVETTES BI-ENTAILLÉES.....	68
4.2.2. PIÈCE EN L	73
4.3. L'EFFET D'ÉCHELLE DANS LES STRUCTURES EN BÉTON	75
4.3.1. EXEMPLE DE LA FLEXION. CALCULS DE STRUCTURES INITIALEMENT NON FISSURÉES	77
4.4. CONCLUSION	84

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	85
ANNEXE : LE CODE CAST3M DE SIMULATION	87
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	114

Liste des figures

Fig.1.1. Développement de fissuration dans une éprouvette en béton.	4
Fig.1.2. Fissure dans un milieu continu : a) en 2D, b) en 3D.	7
Fig.1.3. Les trois modes fondamentaux de rupture.	7
Fig.1.4. Système de coordonnées pour l'analyse du champ de contrainte en pointe de fissure.	8
Fig.1.5. La variation de FIC.	8
Fig.1.6. Comportement de différents matériaux en présence d'une fissure.	10
Fig.1.7. Contour-J d'intégration.	11
Fig.1.8. Représentation de la zone cohésive.	12
Fig.1.9. Séparation du comportement du béton en traction en une partie contrainte-déformation et une partie contrainte-ouverture de fissure (Hillerborg, 1983).	13
Fig.1.10. L'angle de propagation de fissure.	14
Fig.2.1. Le comportement non linéaire du béton en traction.	19
Fig.2.2. Comportements élémentaires en traction et en compression (Mazars [36]).	23
Fig.2.3. Compression cyclique. Modèle microplan (Bazant et Oh [38]).	24
Fig.2.4. Géomètre de l'éprouvette étudiée.	28
Fig.2.5. Les deux types de maillage utilisés dans le test.	29
Fig.2.6. Les ouvertures des fissures au pic de la charge.	29
Fig.2.7. Le trajet des fissures a la fin du chargement.	30
Fig.3.1. Représentation d'un domaine fissuré.	34
Fig.3.2. La stratégie de l'enrichissement XFEM.	36
Fig.3.3. Une barre soumise a un effort réparti $f(x)$.	37
Fig.3.4. Discrétisation éléments finis d'une barre fissurée.	37
Fig.3.5. Représentation d'une discontinuité par les fonctions de type Heaviside (1D).	38
Fig.3.6. Représentation de vecteur normal et tangentiel d'un point x^* sur l'interface d'une fissure.	38
Fig.3.7. Système de coordonnées pour l'analyse du champ de contrainte en pointe de fissure.	39
Fig.3.8. Une fissure arbitraire et les axes locale des pointes.	40
Fig.3.9. Représentation d'un corps fissuré (zone cohésive).	43
Fig.3.10. La zone cohésive (Zoom).	43
Fig.3.11. La force cohésive sur les lèvres.	44
Fig.3.12. Partitionnement triangulaire des éléments discontinus.	47
Fig.3.13. La stratégie level-set.	47
Fig.3.14. Représentation d'une fissure en 3D.	48
Fig.3.15. Les nœuds « carrés » sont enrichis par les fonctions singulières (enrichissement géométrique).	49

Fig.3.16. Barre pré-fissurée soumise à une charge P.	50
Fig.3.17. Discrétisation EF classique de la barre.	50
Fig.3.18. Les fonctions de forme EF classique.	50
Fig.3.19. Discrétisation de la barre par la XFEM standard.	51
Fig.3.20. Modélisation de fissure avec un modèle cohésif.	54
Fig.3.21. Discrétisation XFEM avec un modèle cohésif.	54
Fig.3.22. Géométrie de la plaque fissurée.	61
Fig.3.23. Conditions aux limites et chargement	61
Fig.3.24. Maillage de la structure.	62
Fig.3.25. les contraintes dans la plaque pour chaque propagation.	63
Fig.3.26. Maillage de l'éprouvette	64
Fig.3.27. Localisation des fissures	64
Fig.3.28. Réponse globale de l'éprouvette bi-entaillée.	64
Fig.3.29. Développement des contraintes et déformations de l'éprouvette.	65
Fig.4.1. les types d'éprouvette testés.	68
Fig.4.2. Ouvertures des fissures des éprouvettes par OUVFISS.	69
Fig.4.3. Localisation des fissures.	69
Fig.4.4. Développement des contraintes de l'éprouvette symétrique.	70
Fig.4.5. Développement des contraintes de l'éprouvette avec entailles décalées.	70
Fig.4.6. Détermination de l'ouverture de la fissure.	71
Fig.4.7. Courbe Force-ouverture de l'éprouvette bi-entaillée (type 2).	71
Fig.4.8. Réponse globale de l'éprouvette bi-entaillée (type 2).	71
Fig.4.9. Courbe Force-ouverture de l'éprouvette bi-entaillée (type 1).	72
Fig.4.10. Réponse globale de l'éprouvette bi-entaillée (type 1).	72
Fig.4.11. Les dimensions en millimètres et les conditions aux limites de la pièce en L [86].	73
Fig.4.12. Trajet de la fissuration.	74
Fig.4.13. Champ de contrainte de la pièce étudiée.	74
Fig.4.14. Trajet de fissuration selon Unger et Meshke et al.[87.88]	75
Fig.4.15. Réponse contraintes (N/mm ²)- Déformation (‰) en compression pour des différentes géométries Vonk.[85].	76
Fig.4.16. L'hétérogénéité et l'effet d'échelle [89].	76
Fig.4.17. Le volume de la FPZ par rapport au volume de la structure.	77
Fig.4.18. Géométrie de la poutre étudiée.	78
Fig.4.19. Photo de l'essai de flexion trois points Yassir Alam [84].	78

Fig.4.20. L'ouverture de fissure de la poutre D1.	79
Fig.4.21. L'ouverture de fissure de la poutre D2.	80
Fig.4.22. L'ouverture de fissure de la poutre D3.	80
Fig.4.23. Localisation de la fissure.	80
Fig.4.24. Réponses globales des trois poutres.	81
Fig.4.25. Courbes FORCE-OUVERTURE de la poutre D1.	81
Fig.4.26. Courbes FORCE-OUVERTURE de la poutre D2.	82
Fig.4.27. Courbes FORCE-OUVERTURE de la poutre D3.	82
Fig.4.28. L'ouverture de la fissure dans la poutre D1.	82
Fig.4.29. L'ouverture de la fissure dans la poutre D2.	83
Fig.4.30. L'ouverture de la fissure dans la poutre D3.	83
Fig.4.31. Photo des poutres après l'essai Yassir Alam [84].	83
Fig.4.32. Les courbes contrainte nominale-ouverture des trois poutres	84

Liste des tableaux

Tab.3.1. Les valeurs semi-analytique de K_I [83] pour chaque propagation.	62
Tab.3.2. la tolérance sur les valeurs de K_I .	62
Tab.4.1. Géométrie de l'éprouvette	68
Tab.4.2. Paramètres représentatifs d'un matériau de type béton pour la pièce en L.	73
Tab.4.3. L'hauteur de la poutre : petite, moyenne, grande.	78
Tab.4.4. Paramètres représentatifs d'un matériau de type béton.	79

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La conception des structures en béton consiste essentiellement à assurer un degré de sécurité acceptable permettant de réduire les risques relatifs aux défaillances, aux catastrophes et aux pertes de vie. Afin de mener à bien le calcul de ces structures, il est nécessaires de connaître la réponse de ce matériau aux diverses sollicitations. En effet, les ouvrages en béton sont pleines de défauts dus à des pores, des vides et des fissures de retrait, qui peuvent engendrer des propagations de macro-fissures lorsque la structure est en service. Les travaux déjà nombreux sur le comportement du béton s'accordent à mettre en évidence l'extrême complexité de ce matériau.

Pour décrire le phénomène de fissuration dans ce matériau, on peut utiliser soit des modèles continus ou La fissure est représentée par une zone de matériau totalement dégradée, qui reste continue au sens de la mécanique des milieux continus où bien des modèles discontinus et dans ce cas la fissure est représentée explicitement par une discontinuité de déformation ou de déplacement mais, il a été constaté qu'il est difficile de prendre en compte, avec un seul modèle, tous les mécanismes observés. Alors, faire cohabiter ces deux types de descriptions dans une approche globale pour bénéficier de leurs avantages combinés pourrait faciliter le travail des ingénieurs souvent confrontés aux limitations des modèles de rupture utilisés séparément.

Les modèles continus d'endommagement et/ou de la plasticité sont bien adaptés à la modélisation de la phase initiale de la rupture (initiation de fissuration). Les modèles discontinus ne permettent pas de modéliser un endommagement diffus, mais représentent bien la phase finale de la rupture. De plus, si on utilise une méthode numérique puissante comme la méthode X-FEM, elle permet de connaître l'ouverture des fissures qui est une information importante pour les études de durabilité.

L'objectif du présent mémoire est de proposer une approche combinée (continue/discontinue) pour étudier à la fois l'initiation et la propagation de fissuration dans les structures en béton. Pour déterminer l'emplacement où les fissures s'amorcent (l'initiation) on utilise la procédure OUVFISS [30], et pour modéliser la propagation des fissures, une approche discontinue basée sur la méthode des éléments finis étendue (XFEM) a été utilisée.

La rédaction de ce document est organisée de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons d'abord le phénomène de fissuration dans le béton. On va voir comment les macro-fissures se forment, se propagent produisant la rupture de la

structure. Ensuite, on va présenter les différentes approches existantes pour étudier ce phénomène telles que les approches continues, les approches discontinues et le passage continue-discontinue qui est l'objectif de ce travail. On présente aussi, un survol des méthodes numériques adaptées pour modéliser le problème de fissuration telle que la méthode des éléments finis classique et la méthode des éléments finis étendue (XFEM).

Le deuxième chapitre fait état de quelques travaux antérieurs et actuels sur la modélisation de fissuration utilisant des approches continues pour le béton en particulier. Nous passons en revue quelques difficultés liées à la numérisation des comportements adoucissants qui conduisent à des problèmes de dépendance du maillage lors de la discrétisation. Enfin nous présentons quelques propositions pour surmonter, totalement ou en partie, ces difficultés. Nous nous intéressons particulièrement à la procédure OUVFISS développée par Matallah et Laborderie [30].

Le troisième chapitre expose la formulation variationnelle de la méthode des éléments finis étendue (XFEM) pour étudier le problème de fissuration d'une manière discontinue, c'est en effet, cette méthode moderne que nous avons choisie, elle est implémentée dans le logiciel de calcul CAST3M. Au vu des avantages qu'elle présente pour la simulation numérique de propagation de fissure. On va voir que cette méthode offre un cadre naturel pour la mécanique de rupture et pour les modèles de zone cohésive. Après la mise en oeuvre numérique de ces deux approches dans le cadre de la XFEM, ce chapitre se termine par une étude comparative visant à évaluer la cohérence entre la méthode MEF classique, XFEM standard et la méthode XFEM utilisant un modèle cohésif dans un cas simple d'une barre (1D), et deux exemples (2D) pour vérifier que le logiciel CAST3M traite correctement les cas de multi-fissuration.

Le quatrième chapitre est consacré à la construction de l'approche continue-discontinue c.-à-d. de mettre un passage entre la procédure OUVFISS et la méthode XFEM pour modéliser la fissuration dans les structures comme suit :

- La méthode OUVFISS est utilisée pour initier la fissuration si on a des structures saines.
- La méthode XFEM est utilisée pour modéliser d'une manière explicite la fissure et sa propagation jusqu'à la rupture totale de la structure.

Nous proposons quelques exemples d'applications et aussi, nous validons quelques résultats numériques utilisant le logiciel CAST3M par confrontation à des résultats réels d'essais expérimentaux. On clôt ce chapitre par l'étude de l'effet d'échelle dans des structures simples.

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

1

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord un phénomène très important et l'un des modes principaux de ruine des structures en béton : la fissuration. On va voir comment les macro-fissures se forment, se propagent produisant la rupture de la structure.

Ensuite, on va présenter les différentes approches existantes pour étudier ce phénomène telles que les approches continues, les approches discontinues et le passage continue-discontinue qui est l'objectif de ce travail.

On présente aussi, une description des méthodes numériques adaptées pour modéliser le problème de fissuration telle que la méthode des éléments finis classique et la méthode des éléments finis étendue (XFEM)...

1.1. PHÉNOMÈNE DE FISSURATION DANS LE BÉTON

Les structures en béton sont pleines des défauts dus à des pores, des vides et des fissures de retraits. Si on a une éprouvette rectangulaire soumise à un chargement de traction jusqu'à sa rupture (Fig.1.1). On peut voir qu'avant l'application du chargement, l'éprouvette comprend déjà un certain nombre de microfissures (Fig.1.1.a).

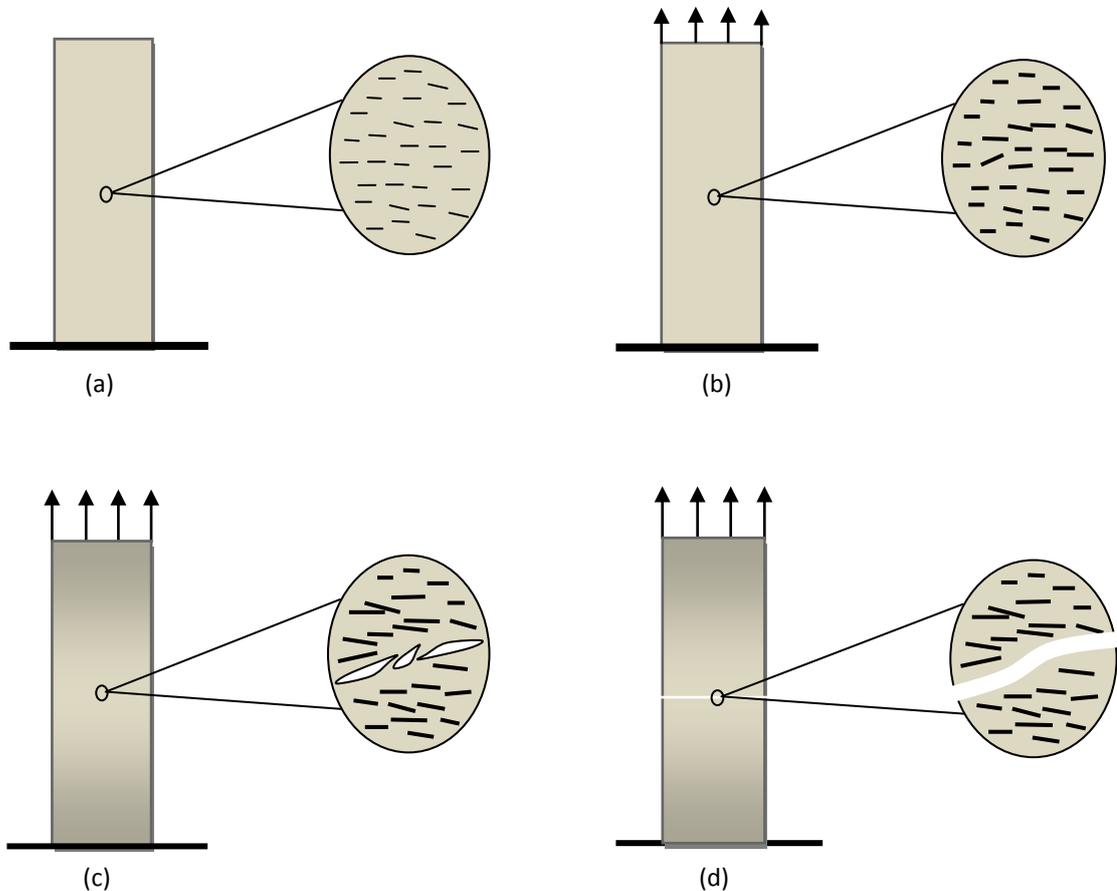


Fig.1.1. Développement de fissuration dans une éprouvette en béton : (a) éprouvette avant le chargement, (b) propagation des microfissures, (c) formation d'une zone de localisation, (d) rupture de l'éprouvette.

Après avoir atteint un certain niveau de chargement, les microfissures se propagent (Fig.1.1.b) jusqu'à ce que certaines coalescent dans une zone de plus grandes déformations appelée zone de localisation (Fig.1.1.c).

L'éprouvette est complètement rompue lorsqu'une fissure macroscopique traverse l'éprouvette au niveau de la zone de localisation (Fig.1.1.d).

1.2. LES DIFFÉRENTES APPROCHES DE MODELISATION DE LA FISSURATION

Il y a principalement deux approches pour représenter la fissuration des structures : des approches décrivant la rupture de manière continue (modèle d'endommagement, modèle élasto-plastique endommageable, ...) et ceux décrivant la rupture de manière discontinue (modèle de zone cohésive, la mécanique de rupture, ...). Une autre alternative est l'approche mixte qui permet de profiter des avantages de chaque approche.

1.2.1. APPROCHES CONTINUES

Pour le béton la progression de l'endommagement due à des coalescences des microfissures, se traduit le plus souvent par un comportement non-linéaire adoucissant. Alors, les approches continues¹ permettent une modélisation non-linéaire de ce matériau, ici les macro-fissures ne sont pas considérées comme des discontinuités mais des zones totalement dégradées et les dégradations sont prises en compte par l'intermédiaire de variables internes. Ces variables agissent sur les caractéristiques mécaniques et par conséquent, sur le comportement du matériau à l'échelle macroscopique.

La mécanique d'endommagement :

La mécanique de l'endommagement ne fait intervenir les microfissures qu'au travers d'un concept d'homogénéisation. En même temps, elle décrit leur évolution de façon macroscopique, tout en restant dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

A partir des travaux de Kachanov [1] en 1958, qui a introduit une variable d'endommagement pour décrire la détérioration des matériaux par son effet sur les caractéristiques élastiques, sous sollicitation unidimensionnelle, cette notion par la suite été généralisée sur la base de la thermodynamique des processus irréversible (Lemaître et Chaboche [2]).

Dans Lemaître et Chaboche [2], l'endommagement est représenté comme la conséquence d'une diminution de la section utile d'un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau suffisamment grand pour qu'il puisse être considéré comme homogène et suffisamment petit pour qu'il puisse être considéré comme un point matériel.

L'endommagement qui est décrit par une variable scalaire D (endommagement isotrope), représente la diminution de la section utile S_u par rapport à la section totale S en un point de la structure et donc :

¹ Nous nous intéressons ici uniquement aux modèles continus isotropes.

$$D = 1 - \frac{S_u}{S} = \frac{S - S_u}{S} = \frac{S_{endo}}{S} \quad (1.1)$$

Et par conséquent la contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D) \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.2)$$

Avec $\underline{\underline{C}}$ le tenseur d'élasticité du matériau sain, $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont les tenseurs des contraintes et des déformations de ce matériau.

La valeur de la variable D varie entre 0 pour le matériau non endommagé et 1 lorsque celui-ci est complètement endommagé mais pour laquelle reste à postuler une loi d'évolution. Sur la base de cette théorie, de nombreux modèles ont été développés. Selon l'objectif à atteindre lors de la modélisation et lors de l'établissement des hypothèses.

La mécanique de l'endommagement est appropriée pour représenter l'initiation de la fissuration à partir de microfissures mais aussi d'autres modes de ruine comme le fluage, par exemple.

L'application des modèles continus décrivant le comportement de ce matériau lors de calculs par éléments finis se heurte en général à des difficultés de dépendance du maillage lors de la discrétisation. L'analyse devient de ce fait inobjective. Un des procédés adoptés pour éviter cette difficulté consiste en l'utilisation d'approches dites non-locales [3]. Le concept de non-localité a permis d'ouvrir une nouvelle voie pour le développement de ces modèles.

1.2.2. APPROCHES DISCONTINUES

Au contraire de l'approche continue, l'approche discontinue suppose l'existence d'une ou plusieurs macro-fissures présentes dans le matériau de part et d'autre où les déplacements, déformations et contraintes sont discontinus. Parmi ces modèles on trouve la mécanique de rupture qui remonte aux travaux de Griffith [4] (1921), et les modèles dits cohésifs qui sont considérés comme une amélioration de la théorie de Griffith remontant aux travaux de Dugdale [5] (1960).

1.2.2.1. La mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture est l'ensemble des théories permettant de décrire le comportement des structures, qui ont une discontinuité géométrique. Souvent cette discontinuité représentée par une ligne dans un milieu en deux dimensions est une surface (exemple S dans Fig.1.2) en 3D.

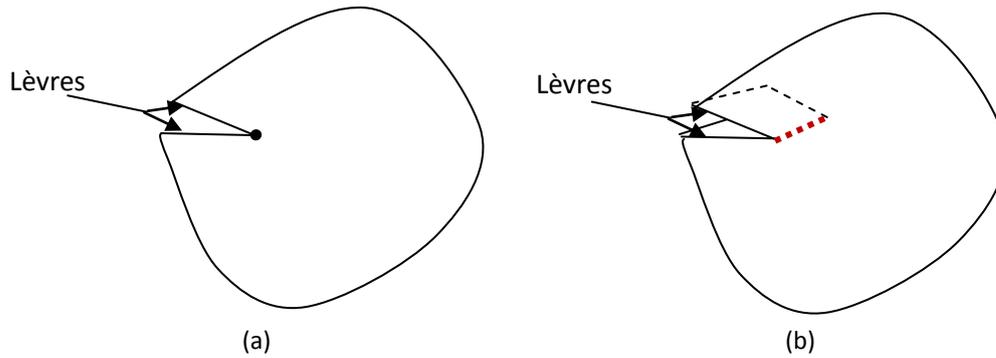


Fig.1.2. Fissure dans un milieu continu : a) en 2D, b) en 3D

Irwin et Williams [6,7] ont identifié trois façons dont un corps fissuré pourrait être chargé :

Mode d'ouverture (mode I), glissement dans le plan (mode II) et glissement anti-plan (mode III).

Le mode I est le plus important parce qu'il contrôle souvent la rupture.

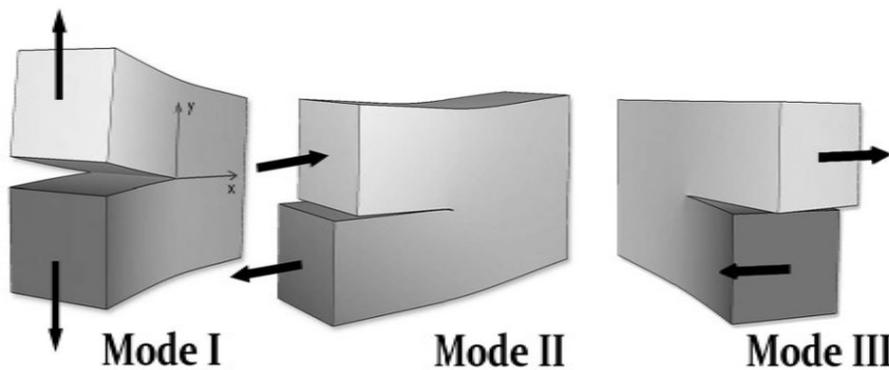


Fig.1.3. Les trois modes fondamentaux de rupture.

a. Approche d'intensité des contraintes

La solution de Westergaard-Irwin-Williams [6, 8] pour les contraintes et les déplacements au voisinage de la pointe de la fissure est donnée par :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (1.3)$$

Où σ_{ij} est le tenseur de contrainte, K est le facteur d'intensité de contrainte, Il dépend de la longueur de la fissure, de la géométrie et des forces appliquées, r est la distance radiale de la fissure, et f_{ij} est une fonction de θ , l'angle du plan de la fissure. Les deux paramètres r et θ sont définis dans (Fig.1.4).

La figure1.5 représente la variation de la contrainte devant la pointe de la fissure, la solution de Westergaard et al.[8] implique que les contraintes approchent l'infini si r tend vers zéro (la

singularité), le facteur d'intensité de contrainte K est donc un constant qui permet de mesurer la singularité des contraintes à r et θ donnés.

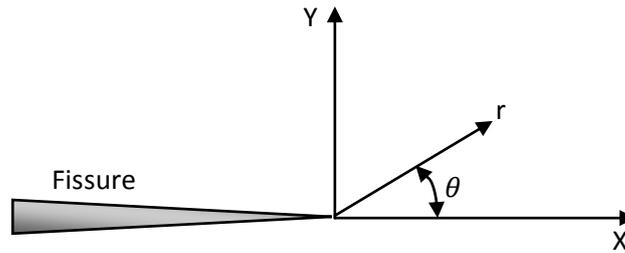


Fig.1.4. Système de coordonnées pour l'analyse du champ de contrainte en pointe de fissure.

$$K_I = \sigma_{app} \sqrt{\pi a} \quad (1.4)$$

Avec : σ_{app} la contrainte appliquée à la structure, a la longueur de la fissure.

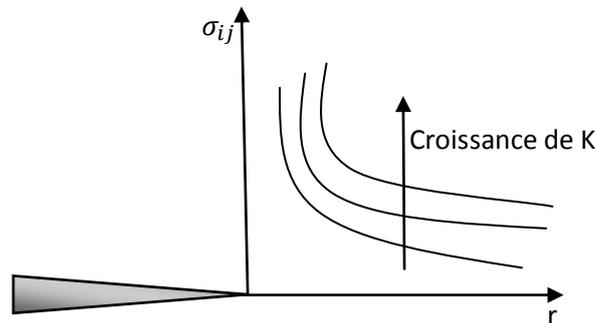


Fig.1.5. La variation de FIC.

La remarque la plus importante de l'analyse de Westergaard et al.[8, 6] c'est que toutes les neuf composantes du tenseur de contrainte, ainsi que toutes les composantes du tenseur des déformations, sont entièrement définies par un seul constant, K autrement dit, si K est connu pour une situation donnée, toutes les contraintes et les déformations à la proximité de la pointe de la fissure peuvent être calculées à partir de l'équation (1.3).

b. Approche énergétique

La propagation de fissure est un phénomène d'énergie selon la théorie de Griffith [3]. L'énergie consommée c'est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Griffith [4] a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

b.1. Le taux de restitution d'énergie

Noté G , le taux de restitution d'énergie [4] représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité, il correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p

pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a à une autre où la fissure est propagée d'une longueur da :

$$\begin{cases} G = \frac{\partial W_p}{\partial A} & (1.5) \\ W_p = W_e + W_{ext} & (1.6) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_e = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon & (1.7) \\ W_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot u & (1.8) \end{cases}$$

Où W_e représente l'énergie de déformation élastique, W_{ext} l'énergie potentielle des forces extérieures f , et ∂A l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

Irwin [6] a montré que les approches énergétiques et celles basées sur l'intensité de contrainte sont équivalentes, en utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie avec les facteurs d'intensité de contrainte :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} E' = E & \text{en contrainte planes} \\ E' = \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en déformation planes} \end{cases} \quad (1.10)$$

Où E est le module de Young et ν le coefficient de poisson. K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte (I et II respectivement).

Toutes les analyses ci-dessus, pour la mécanique de la rupture ne sont strictement valables que pour des matériaux isotropes, qui se comportent d'une manière parfaitement linéaire élastique. Quand il y a une petite quantité de déformation plastique à la pointe de la fissure la mécanique linéaire de rupture (LEFM) donne une bonne approximation du comportement de ces matériaux.

Selon le type de matériau et de structure, une zone présentant un comportement non-linéaire peut se développer devant la pointe de la fissure. La mécanique non-linéaire de la rupture tient compte de cette zone plastique lors de l'étude de la stabilité de la fissure. La figure 1.6 résume les différents comportements que peuvent avoir les matériaux en présence d'une fissure [9].

Dès que la taille de la zone plastifiée, qui se forme à l'extrémité de la fissure devient importante, l'application de la mécanique linéaire de rupture ne peut décrire réellement le comportement du matériau, pour cela il est important de connaître la taille de la zone plastifiée en utilisant des

approches telle que l'approche d'Irwin [10], qui conduit à des corrections du facteur d'intensité de contrainte K , cette approche arrive à des résultats proches de la taille de la zone plastifiée.

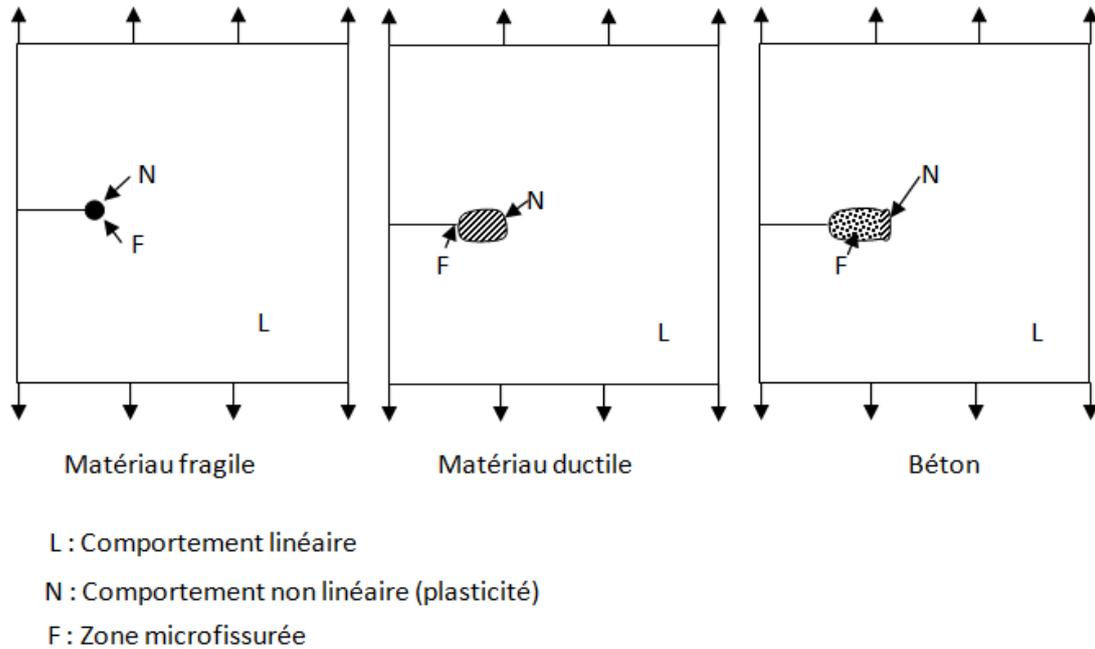


Fig.1.6. Comportement de différents matériaux en présence d'une fissure [9].

b.2. Modèle d'Irwin

Le modèle d'Irwin [10] s'applique aux conditions de contraintes planes, le matériau est supposé être parfaitement plastique et obéit au critère de Tresca, et avec :

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \text{ lorsque la sollicitation est au mode I } (\theta = 0)$$

On écrit alors :

$$\sigma_{yy} = \sigma_E \Rightarrow r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 \quad (1.11)$$

La zone plastique au fond de la fissure est en fait plus étendue car le matériau doit supporter localement une surface supplémentaire. Alors, D'après Irwin la structure se comporte comme si elle contenait une fissure de longueur effective a_{eff} égale :

$$a_{eff} = a + r_E \quad (1.12)$$

C. L'intégrale de contour J

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie

Eshelby et al [11]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connus, on peut citer l'intégrale J de Rice [12].

Pour l'intégrale de Rice, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne, le contour C est un contour ouvert (Fig.1.7), orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

$$J = \int_{\Gamma} \left(W_e(\varepsilon)n_1 - \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (1.13)$$

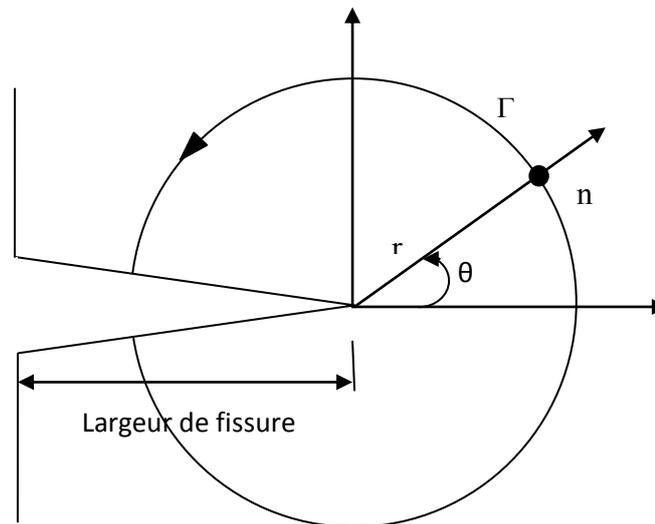


Fig.1.7. Contour-J d'intégration.

Où W_e est la densité d'énergie de déformation élastique telle que $\sigma_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon_{ij}}$, u est le vecteur déplacement en un point M du contour C avec la normale n tournée vers l'extérieur et σ représente le champ de contraintes.

L'intégrale- J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle (pour la LEFM) :

$$J = -\frac{\partial W_p}{\partial A} = G \quad (1.14)$$

1.2.2.2. Modèles de zones cohésives

Les modèles cohésifs ont d'abord été utilisés pour étendre la compréhension des processus de rupture. Ainsi ils ont été introduits par Dugdale [5] (description de la plasticité à proximité de la pointe de fissure (plasticité parfaite)) et par Barenblatt [13] (loi Traction vs. Ouverture pour la décohésion des réseaux atomiques) afin de caractériser les champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure dans les solides élastiques linéaires. Hillerborg [14] fut le

premier à proposer plusieurs formes de loi cohésive et à en étudier l'influence sur les résultats de calcul par éléments finis.

Les modèles de zone cohésive (CZM pour *cohesive zone models*) peuvent être considérés comme une amélioration de la théorie de Griffith (mécanique linéaire de la rupture) quant à son incapacité à décrire d'une part l'initiation de fissures (en l'absence de fortes singularités géométriques), et d'autre part à prendre en compte la présence des *zones de microfissurations* se développant en amont de la pointe de fissure. En effet dans le cas des matériaux quasi-fragiles comme le béton, cette *zone* (encore appelée *fracture process zone*) dans laquelle le matériau subit des dommages adoucissants, a une taille non négligeable par rapport aux dimensions de la structure considérée.

Les modèles cohésifs reposent sur l'hypothèse que la *zone de microfissuration* peut être décrite comme une interface fictive le long de laquelle le champ de déplacement peut admettre des discontinuités, tout en continuant à transmettre des efforts. Cette *zone cohésive* constitue alors une zone de transition entre le matériau sain et le matériau rompu (Fig.1.8).

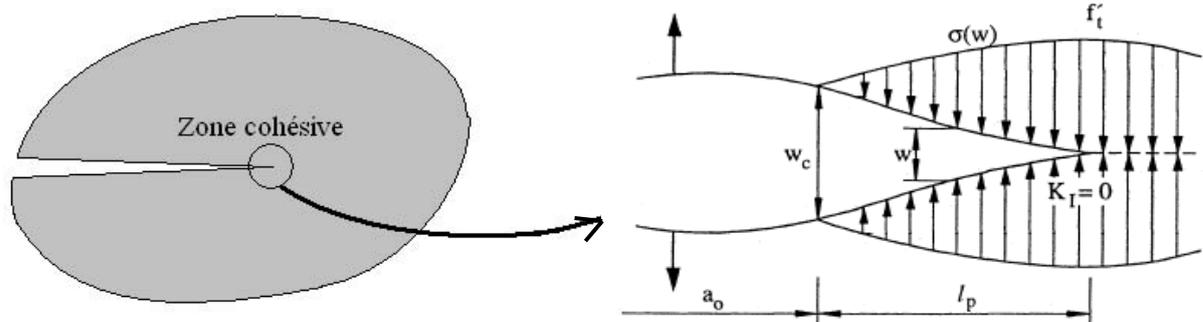


Fig.1.8. Représentation de la zone cohésive.

Parmi les modèles proposés, le modèle de Hillerborg *et al* [15], est le plus utilisé. Ce modèle prend en compte l'énergie dissipée par microfissuration au voisinage de la pointe de fissure. Nous en donnons une brève description dans ce qui suit.

Considérons une éprouvette soumise à la traction simple. Lors de la phase du début du chargement, le comportement est presque linéaire jusqu'à la résistance maximale f_t . Dans cette phase, les contraintes et les déformations sont uniformes dans l'éprouvette. La relation charge-déplacement peut donc être représentée par une courbe contrainte-déformation. Lors de la phase adoucissante, les déformations se localisent dans une zone où apparaissent les microfissures et

dans laquelle se développera la fissure. La relation charge-déplacement peut être représentée par une relation entre la contrainte et l'ouverture de la fissure.

Le comportement est donc séparé en deux parties (Fig.1.9), relation contrainte-déformation lors de la phase de charge et relation contrainte-ouverture de la fissure lors de la phase adoucissante.

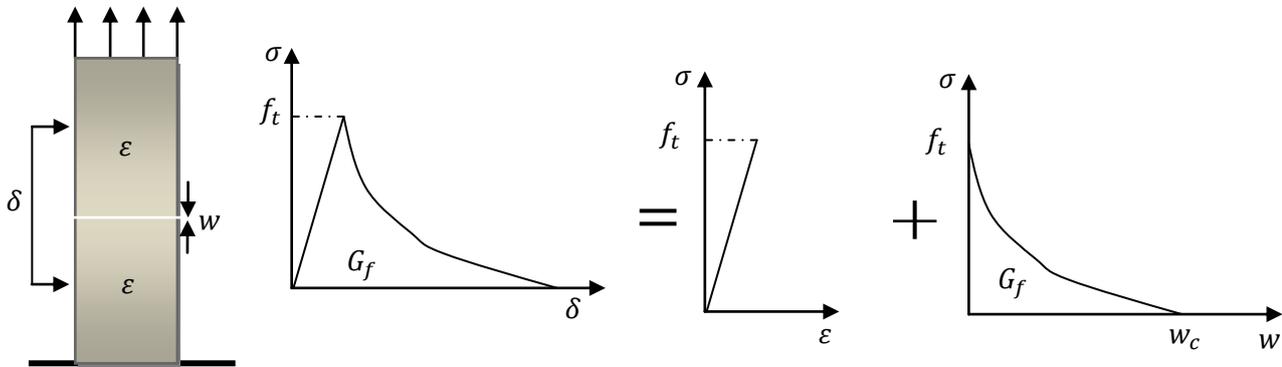


Fig.1.9. Séparation du comportement du béton en traction en une partie contrainte-déformation et une partie contrainte-ouverture de fissure (Hillerborg, 1983 [15]).

Durant l'essai de traction jusqu'à séparation complète, l'énergie absorbée dans la zone cohésive est :

$$S \int_0^{w_c} \sigma dw = S G_f \quad (1.15)$$

Où S est la section de la barre. w_c est l'ouverture de fissure qui correspond à la situation de décharge complète ($\sigma = 0$) et G_f est l'aire sous la courbe $\sigma - w$ (Fig. 1.9). Cette quantité est donc l'énergie de rupture de l'éprouvette.

Les propriétés du matériau sont entièrement définies par la connaissance de f_t , la résistance maximale en traction, de E , le module élastique et de G_f , l'énergie de rupture. Ces quantités peuvent être liées par une notion de longueur caractéristique l_{ch} définie par :

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^2} \quad (1.16)$$

qui est donc aussi une caractéristique du matériau, mais sans signification physique directe. La courbe $\sigma - w$ est déterminée par un essai de traction simple et la valeur de G_f est déterminée par des essais de flexion sur des poutres entaillées (Hillerborg, 1985)[16].

1.2.2.3. Propagation des fissures

Afin de prévoir le comportement du matériau fissuré, il reste à postuler une loi d'évolution pour la propagation de la fissure, tout comme il est nécessaire de postuler une loi d'évolution pour la variable d'endommagement D en mécanique de l'endommagement. Pour la mécanique de rupture, l'approche est toute différente de la mécanique de l'endommagement qui est continue et où la non-linéarité vient plus simplement de la dépendance de la loi d'évolution de D des déplacements et contraintes. Le modèle le plus commun pour la rupture instable est simplement de postuler qu'elle se produit quand le facteur d'intensité de contrainte K dépasse une certaine valeur critique K_c , appelée ténacité (valeur expérimentale), qui dépend du matériau et de l'environnement.

Pour le cas où le matériau est chargé en mode I , la propagation suit l'axe de la fissure. Alors que pour un chargement en mode mixte (mode I et mode II par exemple) en plus d'un critère de propagation de fissure il est nécessaire de déterminer la direction de propagation. Plusieurs critères sont proposés pour déterminer cette direction comme le critère de la contrainte circonférentielle maximale Erdogan et Sih [17]. Le principe de cette méthode dit que la fissure se propage dans la direction où la contrainte tangentielle égale à Zéro.

La contrainte tangentielle au voisinage de la pointe de la fissure s'écrit comme suit :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{k_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{k_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (1.17)$$

Si on pose que $\sigma_{r\theta} = 0$ on peut écrire :

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{k_I}{k_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{k_I}{k_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (1.18)$$

θ_c C'est l'angle de la propagation de la fissure dans les coordonnées locales de la pointe de la fissure. k_I Et k_{II} sont les facteurs d'intensité des contraintes en mode I et mode II respectivement.

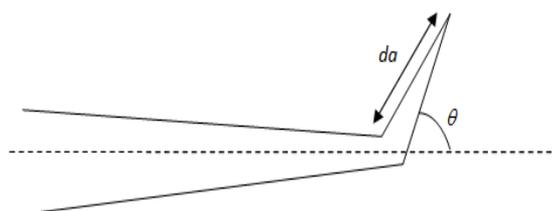


Fig.1.10. L'angle de propagation de fissure.

Pour la modélisation par zone cohésive (MZC), deux approches peuvent être utilisées pour évaluer la propagation de la fissure. La première approche est de mesurer la contrainte principale à la pointe de la fissure, La propagation de la fissure se passe alors quand la contrainte principale atteint la résistance à la traction du matériau. La deuxième approche consiste à utiliser un critère qui évalue le facteur d'intensité de contrainte pour le mode I (K_I), la fissure se propage alors dans les conditions de chargement qui fait K_I zéro à la pointe de la fissure [18].

1.3. MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE FISSURATION

La modélisation des discontinuités représente toujours un défi d'un point de vue numérique. Si on veut modéliser les fissures par la méthode des éléments finis classique (MEF), le maillage EF doit se conformer avec la géométrie de la fissure, de plus, afin de déterminer le vrai champ de contrainte et de déformation autour de la pointe de la fissure, on a besoin de raffiner le maillage dans cette zone. De nombreuses méthodes ont été proposées et développées pour surmonter cette difficulté :

1.3.1. Méthodes de remaillage

Une technique de remaillage est traditionnellement utilisée pour modéliser la fissuration dans le cadre de la méthode des éléments finis standard (Swenson et Ingraffea 1988 [20]), lorsque un remaillage se fait au voisinage de la fissure pour aligner les bords de l'élément avec les lèvres de la fissure, cela devient assez lourd dans le cas d'une évolution quasi-statique ou bien une propagation dynamique des fissures, où à chaque fois on a un nouveau maillage, alors tous les calculs doivent être répétés plusieurs fois, ces algorithmes de remaillage sont souvent complexes et délicats à mettre en œuvre.

1.3.2. Méthode d'élimination d'éléments

La méthode de l'élimination d'éléments est l'une des méthodes les plus simples pour simuler les problèmes de propagation des fissures. Dans cette méthode, les discontinuités ne sont pas modélisées explicitement, mais on attribue une valeur proche de zéro au module de Young des éléments satisfaisant un critère de rupture donné. Cette méthode dépend fortement de la taille de maillage (Beissel et al. [21], Song et al. [22]).

1.3.3. Méthode sans maillage

Afin d'améliorer les solutions fournies par la méthode des éléments finis, une méthode numérique appelée méthode sans maillage a été développée [24], Elle est basée sur la résolution de la forme

faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin comme en éléments finis mais par contre l'approximation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de nœuds est réparti dans le domaine et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux nœuds qui l'entourent et non de l'appartenance à un certain élément fini. En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet ensemble de nœuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un nœud sur l'approximation du déplacement en un certain point si la ligne joignant ce nœud et ce point est coupée par la fissure.

1.3.4. Méthode des éléments finis étendue (X-FEM)

Belytschko et Black [25] ont introduit une nouvelle méthode pour modéliser les fissures et leur propagation par des éléments finis avec un minimum de remaillage. Par cette méthode une fissure arbitraire alignée avec le maillage peut être représentée par l'intermédiaire des fonctions d'enrichissement. L'idée essentielle de cette méthode est d'ajouter des fonctions d'enrichissement des pointes (crack-tip) dans l'approximation, qui contient un champ de déplacement discontinu. La même technique développée par Fleming et al. [26] pour introduire l'enrichissement dans la méthode « Galerkin element-free » [27]. La méthode utilise la propriété de la partition de l'unité des éléments finis qui a été développée par Melenk et Babuska [28], à savoir que la somme des fonctions de forme doit être l'unité.

La méthode a ensuite été améliorée par Möes et al. [29] et Dolbow [31] et appelée méthode des éléments finis étendus (**XFEM** : **eXtended Finite Element Method**). La nouvelle méthodologie a permis de représenter entièrement la fissure de manière indépendante du maillage et construit le rapprochement enrichi de l'interaction de la géométrie de la fissure avec le maillage. Donc l'idée principale de la méthode des éléments finis étendus consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par : des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure. Cela permet une représentation fidèle des phénomènes physiques ayant lieu en fond de fissure, et des fonctions discontinues localisées le long de la fissure pour prendre en compte la discontinuité du champ de déplacement autour de la fissure (Elle prend en compte la géométrie de la fissure).

1.3.5. Méthodes des éléments de frontière

La Méthode des éléments de frontière a été largement utilisée spécialement en mécanique de la rupture [23]. Une telle méthode est intéressante car elle a juste besoin de la limite du domaine à

mailler qui se traduit par une plus petite matrice de rigidité, bien complète et non symétrique, par rapport la FEM. Une telle propriété permet à la BEM (Boundary Element Method) de gérer les problèmes de la propagation des fissures sans remaillage. La BEM a été utilisé par de nombreux chercheurs pour modéliser la propagation des fissures.

Cette méthode exprime le problème de référence de façon intégrale. Elle suppose que l'on connaisse à ce type de problème des solutions analytiques qui correspondent à des conditions aux limites particulières (appelées aussi fonctions de Green). Celles-ci sont utilisées dans des cas particuliers afin d'obtenir une équation intégrale de frontière. Seul le bord (et les lèvres de la fissure) sont discrétisés, ce qui constitue le principal avantage de la méthode. Elle n'est applicable que sur des cas simples, car l'introduction de non linéarités suppose la connaissance des fonctions de Green associées, ou la discrétisation du volume (ce qui revient à renoncer au principal avantage de la méthode).

1.4. CONCLUSION

Le béton, comme le témoigne cette discussion, est un matériau très complexe. Pour modéliser le processus de fissuration dans ce matériau on a besoin de modéliser les deux phases : l'initiation et la propagation des fissures. La prise en compte des deux phases de rupture par L'utilisation d'un seul modèle (continu ou bien discontinu) est très difficile. Dans les deux chapitres suivants on va présenter les avantages et les inconvénients des modèles continus et discontinus utilisés séparément.

APPROCHES CONTINUES

2

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à la modélisation de fissuration utilisant un modèle d'endommagement continu classiquement utilisé pour le matériau béton.

Souvent les calculs éléments finis menés avec ce type de modèle local d'endommagement conduisent à une dépendance sévère des résultats au maillage employé (problème de localisation). Il est donc nécessaire d'incorporer au modèle local des informations supplémentaires (on parle alors de modèle non local).

Enfin, Pour étudier le processus de fissuration dans les structures en béton, on utilise la procédure OUVFISS développée par Matallah et La borderie [30]. Cette approche est ensuite proposée comme une solution pour l'initiation des fissurations.

2.1. COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU BETON

L'une des caractéristiques importantes du béton est son comportement différent en traction et en compression (un comportement dissymétrique): il est beaucoup plus résistant en compression. C'est la raison pour laquelle il est souvent considéré comme ayant une résistance nulle en traction lors des calculs réglementaires de structures. Ce comportement, en traction et en compression, est fortement influencé par les mécanismes internes d'altérations qui conduisent à une perte de raideur. Il est certain que tenir compte de ces mécanismes permettrait de décrire l'évolution progressive des dégradations dans ce matériau.

Lors d'un essai en traction, le comportement de ce matériau se divise en deux phases :

- Dans la première phase, le comportement est élastique linéaire avec une légère perte de raideur juste avant d'atteindre la contrainte maximale (f_t dans Fig.2.1).
- Dans la deuxième phase (phase adoucissante), après atteinte de la contrainte maximale, il est observé une chute presque brutale de la contrainte pouvant être supportée par l'éprouvette, cette chute se prolonge ensuite d'une façon moins accentuée.

Une autre propriété importante du béton qui est essentielle en génie civil, c'est l'effet d'échelle. Celui-ci se manifeste par une dépendance de la contrainte nominale maximale, couramment évaluée à partir de la charge maximale supportée par une structure, vis-à-vis de l'échelle des structures. Les observations expérimentales montrent que cette contrainte diminue avec l'augmentation de la taille de la structure (Bazant et Ozbolt [3]; Biolzi et al. [33]).

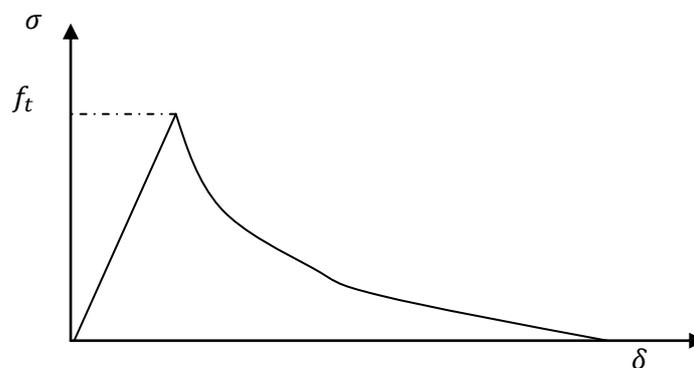


Fig.2.1. Le comportement non linéaire du béton en traction.

2.2. DIFFÉRENTS MODÈLES CONTINUS POUR MODÉLISER LE BÉTON

2.2.1. MODÈLES BASÉS SUR LA THÉORIE DE L'ÉTAT LOCAL

Plusieurs modèles dans le cadre des approches continues sont proposés dans la littérature pour modéliser le comportement du béton, ces modèles sont basés sur la théorie de l'état local.

La théorie de l'état local repose sur le postulat suivant : chaque point de matériau peut être considéré comme un sous-système thermodynamique en équilibre et ce sous-système est caractérisé par des variables observables et des variables internes. On peut en citer les modèles suivants :

- 1- Modèles d'endommagement
- 2- Modèles plastiques
- 3- Modèles élastoplastique-endommageable
- 4- Modèles micromécaniques.

2.2.1.1. Modèles d'endommagement isotropes

En mécanique d'endommagement, la façon la plus simple de décrire la dégradation des matériaux est de supposer que l'endommagement est isotrope. On considère alors une variable scalaire d'endommagement.

Du point de vue mécanique, on peut définir cette variable d'endommagement (noter D), comme le rapport entre la surface endommagée S_{endo} et la surface saine S (la surface initiale) d'un élément de volume représentatif.

$$D_n = \frac{S_{endo}}{S} = 1 - \frac{S_{eff}}{S} \quad (2.1)$$

D_n : C'est l'endommagement associé à la direction \vec{n} . Variant de $D_n = 0$ pour le matériau non endommagé à $D_n = 1$ lorsque celui-ci est complètement endommagé. Pour un endommagement isotrope $D_n = D \forall \vec{n}$.

Et selon Mazars et al. [34], un volume de matériau endommagé et sujet à la contrainte σ , montre la même réponse que le matériau vierge soumis à la contrainte effective $\tilde{\sigma}$, où :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.2)$$

La mesure de l'endommagement à travers le concept de contrainte effective a été appliquée à plusieurs problématiques, dont celle d'une rupture ductile (Lemaitre et Chabouche [2]). En se qui concerne ce dernier cas, on peut donner une définition de l'endommagement en se reportant à la variation du module de Young E , on peut donc écrire :

$$\sigma = \tilde{E} \varepsilon_e \text{ et } \tilde{\sigma} = E \varepsilon_e \quad (2.3)$$

\tilde{E} est le module de Young endommagé, on obtient donc :

$$\tilde{\sigma} = \frac{E}{\tilde{E}} \sigma = \frac{\sigma}{1-D} \rightarrow D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (2.4)$$

Et du point de vue thermodynamique des milieux continus, l'énergie libre permet de définir les efforts thermodynamiques (ou dissipatifs). L'état du matériau est caractérisé par les variables d'état. L'expression la plus simple d'énergie libre couplant élasticité et endommagement est :

$$\Psi = \frac{1}{2} (1-D) \{ (2\mu \text{tr}[\varepsilon \cdot \varepsilon] + \lambda (\text{tr}[\varepsilon])^2) \} \quad (2.5)$$

Où μ et λ sont les coefficients de Lamé du matériau non endommagé. $\underline{\underline{\varepsilon}}$ désigne le tenseur d'ordre deux des petites déformations et D est la variable scalaire d'endommagement.

La loi de comportement donnant la relation contrainte-déformation est donnée par :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1-D) \{ (2\mu \varepsilon + \lambda (\text{tr}[\varepsilon]) I_d) \} \quad (2.6)$$

Où σ est le tenseur d'ordre deux des contraintes et I_d est la matrice unité (d'ordre 2).

La quantité duale associée à la variable d'état d'endommagement est définie comme étant le taux de restitution d'énergie élastique notée Y . Elle est donnée par.

$$Y = - \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \{ (2\mu \text{tr}[\varepsilon \cdot \varepsilon] + \lambda (\text{tr}[\varepsilon])^2) \} \quad (2.7)$$

En rappelant que le matériau est élastique, le taux de dissipation d'énergie s'écrit :

$$\Phi = Y \dot{D} \quad (2.8)$$

La variable thermodynamique Y étant positive, l'inégalité de Clausius-Duhem [35] impose à la vitesse d'endommagement d'être positive ou nulle :

$$\dot{D} \geq 0 \quad (2.9)$$

La donnée d'une fonction seuil d'endommagement de forme générale :

$$f = f(Y, D, \varepsilon, \dots) \quad (2.10)$$

permet de définir une loi d'évolution de l'endommagement qui, dans le cadre des modèles où l'évolution est indépendante du temps, s'écrit sous la forme :

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial Y} \quad (2.11)$$

Où λ est un multiplicateur d'endommagement, avec les conditions de Kuhn-Tucker [35].

$$\dot{\lambda} \geq 0. f \leq 0. \dot{\lambda} f = 0 \quad (2.12)$$

La fonction g est le potentiel d'évolution. Dans un modèle associé, on a $g = f$.

Un modèle d'endommagement scalaire appliqué au béton est proposé par Mazars [36] où on considère que les microfissures sont provoquées par les extensions suivant les directions principales du tenseur de déformations. Dans ce modèle l'évolution de l'endommagement est pilotée par une déformation équivalente définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (2.13)$$

Où $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ sont les parties positives des composantes des déformations principales. La loi d'évolution de l'endommagement est de forme générale :

$$D = f(\tilde{\varepsilon}) = \begin{cases} = 0 & \text{si } \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_{D0} \\ \neq 0 & \text{si } \tilde{\varepsilon} > \varepsilon_{D0} \end{cases} \quad (2.14)$$

Où ε_{D0} est le seuil initial d'endommagement. Ce seuil évolue avec la progression de l'endommagement.

L'endommagement D est exprimé sous forme de partition entre deux quantités : un endommagement de traction D_T et un endommagement de compression D_C . La relation donnant l'endommagement s'écrit sous la forme linéaire :

$$D = \alpha_t D_T + \alpha_c D_C \quad (2.15)$$

où α_t et α_c sont des coefficients dépendant de l'état actuel de déformation (Saouridis [37]) tels que :

$$\alpha_t + \alpha_c = 1 \quad (2.16)$$

$$\alpha_t = 1 \text{ en traction pure}$$

$$\text{et } \alpha_c = 1 \text{ en compression pure}$$

Les lois d'évolution pour les deux quantités d'endommagement D_T et D_C sont définies par:

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_i)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_i}{\exp [B_i (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D0})]} \quad (2.17)$$

Où A_i et B_i sont des paramètres dépendant du matériau avec l'indice $i = t$ pour la traction et $i = c$ pour la compression.

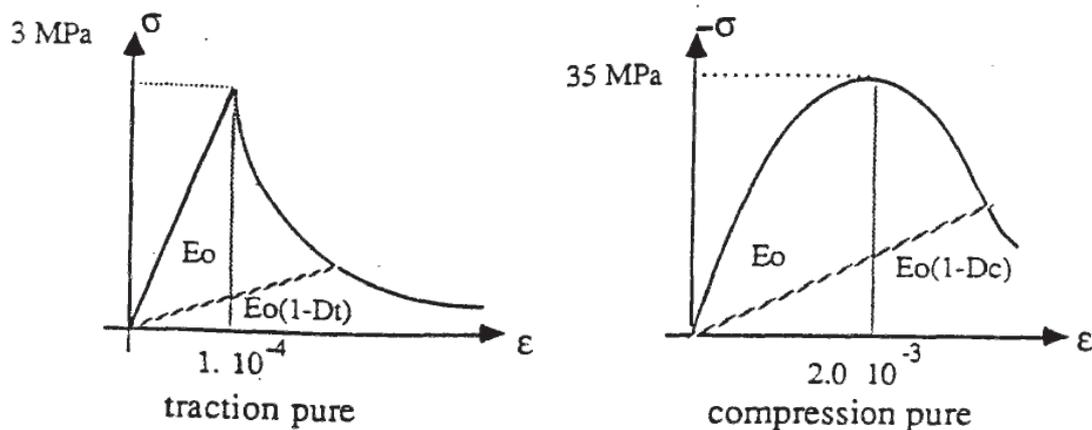


Fig.2.2. Comportements élémentaires en traction et en compression (Mazars [36]).

2.2.1.2. Modèles microplans

Les approches micromécaniques sont considérées comme étant des approches indirectes. Le comportement est déduit de l'observation des mécanismes au niveau fin de la structure du matériau. Dans cette section, le modèle microplan est brièvement décrit.

Dans le modèle microplan, les propriétés du matériau sont représentées séparément dans des plans de différentes orientations (Bazant et Oh, 1985 [38]). Ces plans sont appelés microplans. Chaque plan est défini par sa normale \vec{n} , et sur chacun il existe des composantes de contraintes et de déformations. Les composantes des déformations sont définies comme étant les projections des déformations macroscopiques du milieu sur ces plans.

Les contraintes macroscopiques sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Et le comportement à l'échelle du microplan est donné par des relations entre contraintes et déformations de la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_v &= f_v(\varepsilon_v) \\ \sigma_D &= f_D(\varepsilon_D) \\ \sigma_T &= f_T(\varepsilon_T) \\ \sigma_N &= f_N(\varepsilon_N)\end{aligned}\quad (2.18)$$

Où σ_T et ε_T sont les vecteurs des composantes tangentielles, σ_N et ε_N sont les composante normale du microplan, σ_D et ε_D sont les vecteurs des composantes déviatoriques et ε_v est la déformation volumique définie par :

$$\varepsilon_v = \frac{\text{tr}[\varepsilon]}{3}\quad (2.19)$$

Avec ε le tenseur des déformations macroscopiques.

Le passage à l'échelle de la structure est effectué à partir de l'équilibre des contraintes entre le niveau microscopiques et le niveau macroscopique (Bazant et Oh [38]). Un exemple de réponse obtenue à l'aide du modèle microplan sur une éprouvette du béton sous sollicitation en compression avec retour de chargement est illustré sur (Fig.2.3).

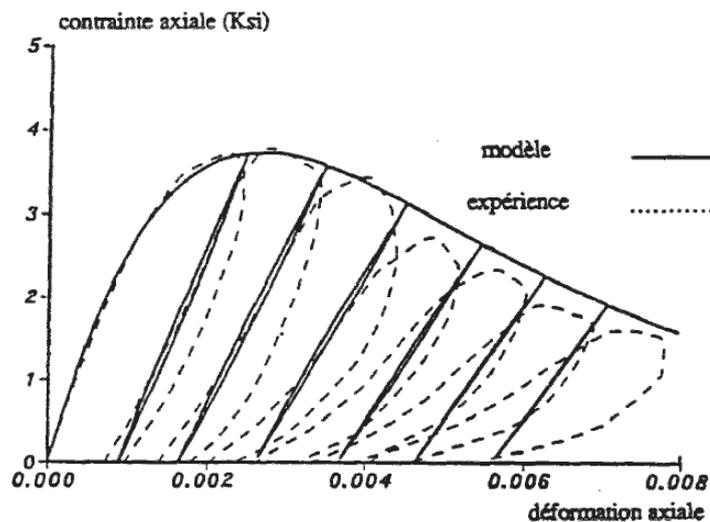


Fig.2.3. Compression cyclique. Modèle microplan (Bazant et Oh [38]).

2.2.2. LA MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE ET LE PROBLÈME DE LOCALISATION

Malgré l'étendue du cadre de la modélisation en mécanique de l'endommagement qui offre un large champ d'action et un outil commode pour décrire la dégradation et l'altération des matériaux endommageables. Les modèles d'endommagement sont confrontés à des problèmes de mise en œuvre numérique : forte dépendance au maillage qui conduit à des résultats difficilement exploitables. Cette dépendance est liée à la localisation et à la bifurcation qui sont dues au comportement adoucissant.

En général, le caractère adoucissant, favorise les instabilités dues à la localisation des déformations. En effet, théoriquement, les équations aux dérivées partielles gouvernant l'évolution du matériau changent de nature. En statique, le problème d'équilibre est caractérisé par une perte d'ellipticité conduisant à l'existence d'une infinité de solutions (Benallal et al. [39]).

2.2.3. FORMULATIONS NON-LOCALES EN MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT

Afin de surmonter les difficultés liées au comportement adoucissant, des recherches ont mené à un enrichissement des relations de comportement. Cet enrichissement a été effectué soit en introduisant une longueur interne (ou longueur caractéristique), soit en introduisant les gradients des déformations plastiques dans le cas des modèles plastiques (Lasry et Belytchko [40]; Sluys, De Borst et Mühlhaus [41]).

En mécanique de l'endommagement, on propose de décrire la formulation de la théorie non-locale de l'endommagement introduite par Pijaudier-Cabot Et Bazant [42] et appliquée par la suite à d'autres modèles déjà existants.

Une approche non-locale consiste à considérer que, dans les relations de comportement, les quantités gouvernant le mouvement et l'évolution dans un solide dépendent de la moyenne de leurs quantités duales sur un certain volume représentatif du matériau centré au point matériel considéré. Ainsi, dans la théorie non-locale de l'endommagement, l'idée est d'utiliser le concept non-local uniquement pour les variables qui contrôlent l'endommagement et non pour les contraintes et les déformations dans les relations de comportement.

Cette formulation non-locale a par ailleurs été adaptée au modèle de MAZARS. Dans la formulation non-locale adoptée (Saouridis [37] ; Saouridis et Mazars [43]), la fonction d'évolution de l'endommagement (2.14) a été remplacée par :

$$D = f(\tilde{\varepsilon}) \neq 0 \quad \text{si } \tilde{\varepsilon} > \varepsilon_{D0} \quad (2.20)$$

Où la fonction f est identique à celle définissant l'endommagement dans l'équation (2.17). La quantité $\tilde{\varepsilon}$ qui est une déformation équivalente moyenne est définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\int_{\Omega} g \tilde{\varepsilon} d\Omega}{\int_{\Omega} g d\Omega} \quad (2.21)$$

Où g est une fonction de Gauss définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \exp\left[\left(\frac{-2x}{l_D}\right)^2\right] & \text{si } x \leq 2l_D \\ g(x) = 0 & \text{si } x > 2l_D \end{cases} \quad (2.22)$$

L'échelle du volume représentatif est limitée par $2l_D$, où l_D est la longueur caractéristique qui est approximée à $3d_a$, où d_a est le diamètre maximum de l'agrégat dans le béton.

Toujours dans le cadre de la modélisation du comportement du béton, le modèle microplan a aussi été adapté en formulation non-locale. Cette formulation a été introduite dans (Bazant et Ozbolt [3]) où le concept microplan a été couplé au concept non-local. Comme dans (Pijaudier-Cabot et Bazant [42]), seules les variables gouvernant le comportement adoucissant ont été reformulées en écriture non locale.

Il y a d'autres modèles utilisant une formulation non-locale ont été développés de façon similaire que le modèle précédent. Citons par exemple les travaux illustrés dans (Saanouni et al. [44]) et (Murakami et al. [45]).

2.2.4. EVALUATION DES OUVERTURES DE FISSURES

Concernant les modèles basés sur des approches continues, le calcul d'ouvertures de fissures passe obligatoirement par des méthodes de post traitement adaptées aux modèles utilisés [30].

Dans un modèle basé sur une approche continue, on suppose que la fissure se localise dans une bande de largeur h sur laquelle, on considère que les microfissures sont uniformément distribuées.

La dissipation de l'énergie est constante, et donnée par la formule suivante :

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(\varepsilon) du \quad (2.23)$$

Avec, du est le saut de déplacement.

Le saut de déplacement au niveau de la fissure est calculé comme étant le produit de la déformation de rupture ε^f et la largeur de la bande h .

$$\delta u = h. \delta \varepsilon^f \quad (2.24)$$

Lors d'un calcul par élément fini, on peut estimer les déformations des ouvertures de fissures à partir des contraintes anélastiques.

$$\sigma_{ij}^{in} = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij} \quad (2.25)$$

Les contraintes effectives sont calculées à partir des déformations élastiques :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.26)$$

Le tenseur de déformation d'ouverture de fissure est donnée par :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij}^{in} \quad (2.27)$$

L'ouverture normale à la direction de la fissure δ_n est donnée par :

$$\delta_n = n_i \delta_{ij} n_j \quad (2.28)$$

Avec :

δ_{ij} : Le tenseur de déplacement au niveau de la fissure.

L'ouverture des fissures est calculée en considérant que chaque élément est traversé par une seule fissure, la valeur moyenne du déplacement est :

$$\delta_n = \int_{element} \varepsilon_n^{ouf} dn = \int_{element} n_i \varepsilon_{ij}^{ouf} n_j dn \quad (2.29)$$

n : La direction normale à la fissure.

Cette approche est implémentée dans le code aux éléments finis Cast3M sous le nom "OUVFISS"¹

2.3. EXEMPLE D'APPLICATION

Afin d'illustrer la fiabilité de la méthode OUVFISS, nous mettons en œuvre un modèle d'endommagement isotrope microplan pour simuler par la méthode des éléments finis la rupture d'une éprouvette en béton bi-entaillée dont la géométrie et le chargement (en déplacement imposé) sont détaillés dans la Figure 2.4.

Pour extraire les ouvertures des fissures, la méthode OUVFISS utilisée comme un post traitement après le calcul pas-à-pas.

Dans cet exemple, les éléments finis utilisés sont portés par des mailles rectangulaires à 4 nœuds. On réalise le même calcul sur deux maillages distincts comme dans Fig.2.5.

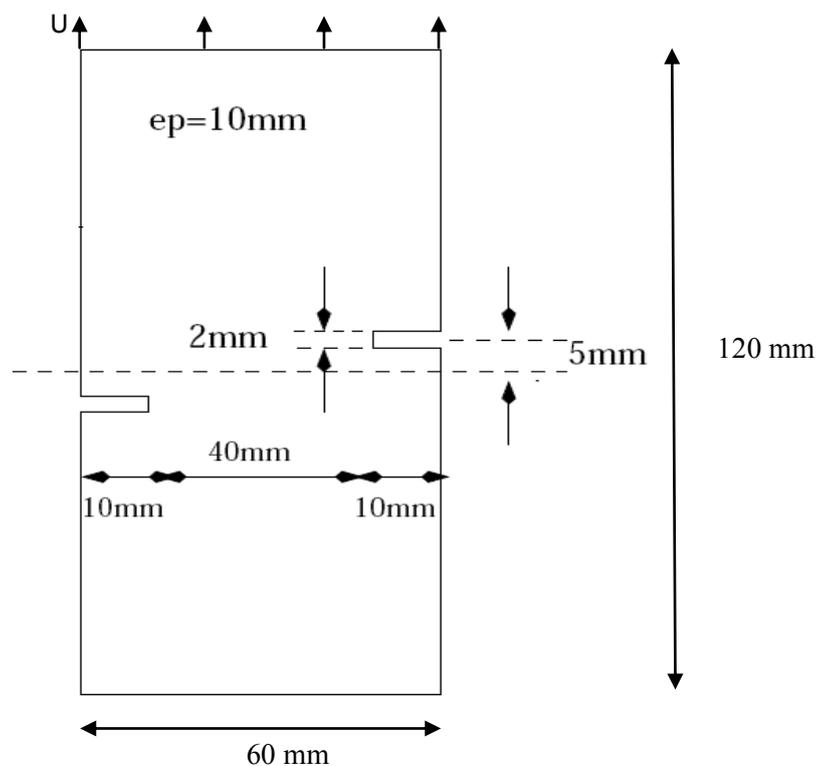
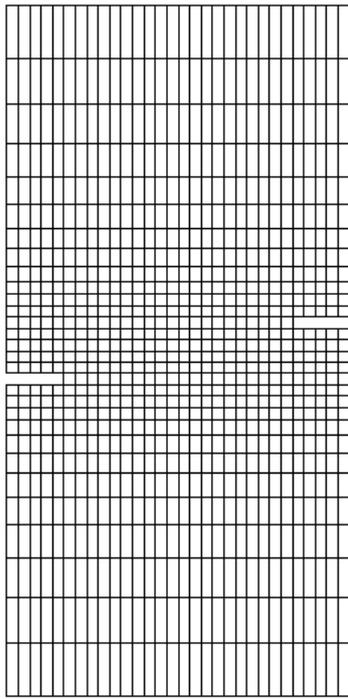
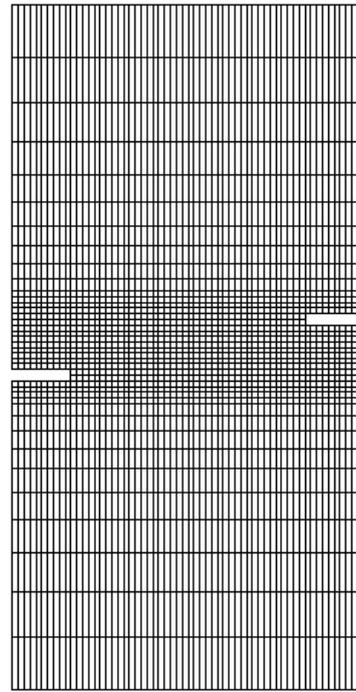


Fig.2.4. Géométrie de l'éprouvette étudiée.

¹ <http://www-cast3m.cea.fr/index.php?page=procedures&procedure=ouvfiiss>



(a) Maillage 1



(b) Maillage 2

Fig.2.5. Les deux types de maillage utilisés dans le test.

Les cartes d'ouvertures de fissure sont tracées au pic de charge, et représentées dans la Fig.2.6

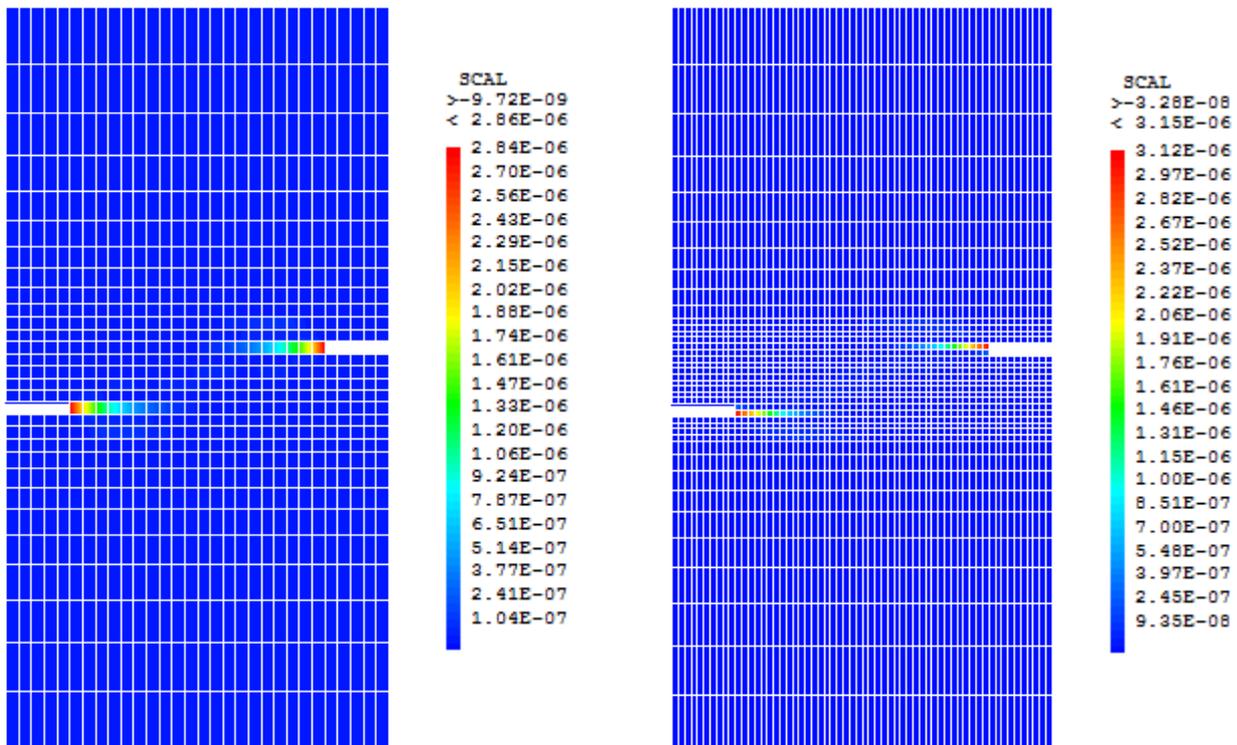


Fig.2.6. Les ouvertures des fissures au pic de la charge.

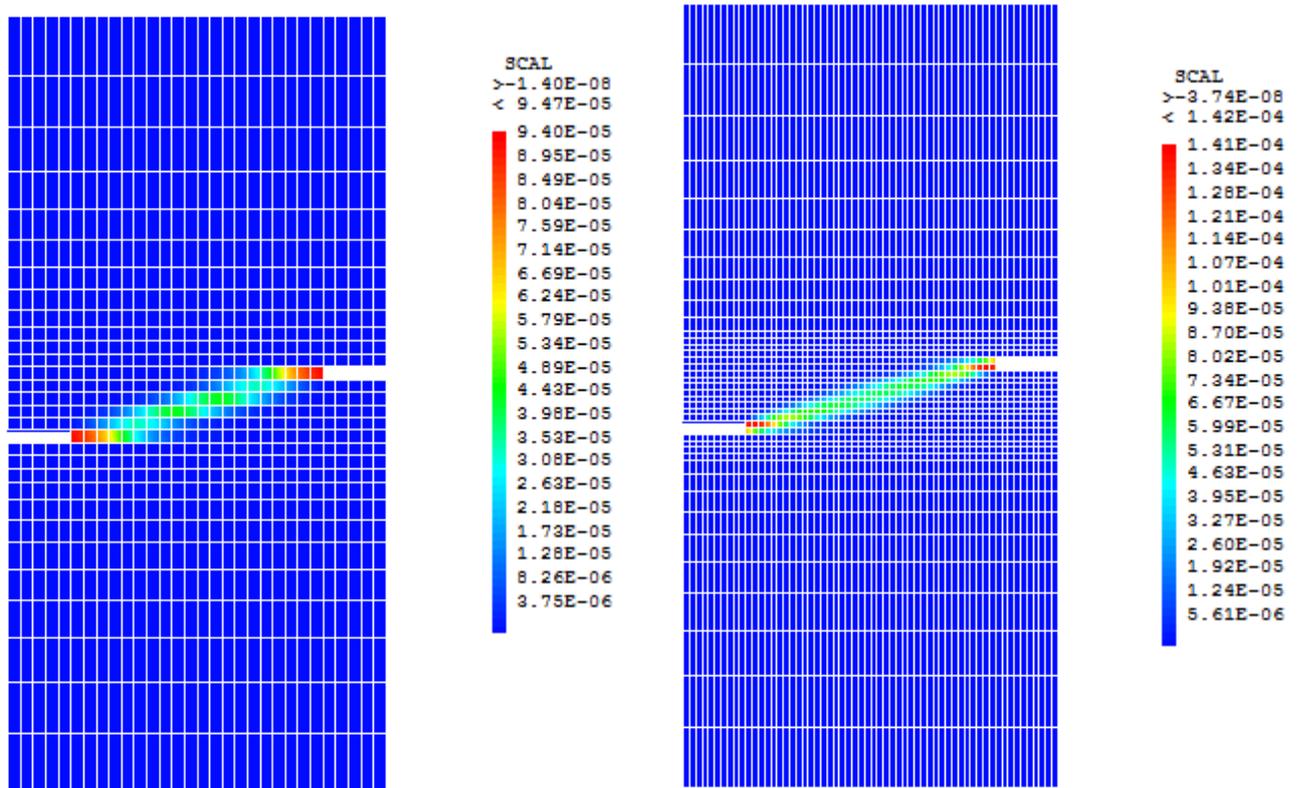


Fig.2.7. Le trajet des fissures a la fin du chargement.

Sur la Figure 2.6 on peut voir que les fissures apparaissent pour les premiers pas du chargement, près des entailles de l'éprouvette pour les deux types, et on peut justifier cette localisation d'endommagement par la concentration des contraintes dans ces régions de la structure. La figure 2.7 représente l'état final de fissuration.

Finalement, les deux figures précédentes (et pour les deux types de maillages indiqués) montrent la capacité de la procédure OUVFISS à décrire avec fiabilité le trajet des fissures, donc dans le chapitre suivant on va utiliser cette procédure pour initier la fissuration des structures.

2.4. CONCLUSION

Pour les modèles continus une fissure peut être considérée comme une zone endommagée fortement localisée. L'apparition et la localisation des zones endommagées dans un solide élastique, endommageable devrait permettre de suivre le développement des fissures sans connaître a priori leur emplacement. La continuité des champs de déplacement et de déformation alors que les fissures sont des discontinuités géométriques est un problème principal pour ce type. Mais cette approche a une grande fiabilité pour prédire les zones où les microfissures sont concentrées si on utilise une procédure post-traitement comme la procédure OUVFISS pour initier les fissures.

APPROCHES DISCONTINUES

3

La fissure dans un milieu continu représente une discontinuité géométrique, et en raison de la présence des concentrations des contraintes à l'extrémité des fissures la discrétisation par éléments finis sur ces extrémités doit être raffinée, nécessitant habituellement un grand nombre d'éléments, en plus de ça, si on veut modéliser la propagation des fissures, il est généralement nécessaire de remailler des larges parties du domaine, afin de s'adapter aux changements de position du front de la fissure, ce qui entraîne des erreurs de projection et un coût de calcul significatif.

Puisque la MEF est pas bien adaptées pour tenir compte de l'évolution des discontinuités, le besoin s'est fait sentir de développer des nouvelles techniques qui ne nécessitent pas de remaillage où les discontinuités évoluent. Et parmi ces méthodes on trouve la méthode XFEM qui est notre objectif.

Dans ce chapitre on va présenter la formulation de la méthode XFEM et ces applications dans le domaine de calcul de structure.

3.1. REVUE DE LA LITTÉRATURE

Belytschko et Black [25] ont introduit une nouvelle méthode pour modéliser les fissures et leur propagation par des éléments finis avec un minimum de remaillage. Par cette méthode une fissure arbitraire alignée avec le maillage peut être représentée par l'intermédiaire des fonctions d'enrichissement. L'idée essentielle de cette méthode est d'ajouter des fonctions d'enrichissement de pointe (crack-tip) dans l'approximation, qui contient un champ de déplacement discontinu. La même technique a été développée par Fleming et al. [26] pour introduire l'enrichissement dans la méthode « Galerkin element-free » [27]. La méthode exploite la propriété de la partition de l'unité des éléments finis qui a été développée par Melenk et Babuska [28], à savoir que la somme des fonctions de forme doit être l'unité.

La méthode a ensuite été améliorée par Möes et al. [29] et Dolbow [31] et appelée la méthode des éléments finis étendus (**X-FEM** : **eXtended Finite Element Method**). La nouvelle méthodologie a permis à la fissure entière d'être représentée de manière indépendante du maillage et construit le rapprochement enrichi de l'interaction de la géométrie de la fissure avec le maillage. Donc l'idée principale de la méthode des éléments finis étendus consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par : des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure. Cela permet une représentation fidèle des phénomènes physiques ayant lieu en fond de fissure, et des fonctions discontinues localisées le long de la fissure pour prendre en compte la discontinuité du champ de déplacement autour de la fissure (Elle prend en compte la géométrie de la fissure).

Ce travail a abouti à un certain nombre de travaux pour résoudre les problèmes bidimensionnels et des plaques (Mindlin-Reissner), en utilisant la X-FEM comme dans Dolbow et al. [46, 47] qui ont présenté une technique pour modéliser des discontinuités arbitraires dans le cadre des éléments finis enrichies. Möes et al. [29] ont étudié la propagation des fissures par cette technique. Sukumar et al. [48] ont étendu la X-FEM pour la modélisation des fissures en trois dimensions

Une méthode des fonctions de niveau (level-set) progressivement évoluée a été utilisée pour localiser l'interface de la fissure, y compris la localisation des fronts des fissures. Stolarska et al. [49] introduit le couplage entre la méthode level-set et la XFEM pour modéliser la propagation des fissures, la même idée de Belytschko et al [50]. En outre, Sukumar et al. [51] décrit la modélisation des trous et des inclusions par la méthode des éléments finis étendus. Möes et al. [52] et Gravouil

et al. [53] ont discuté le modèle mécanique et la mise à jour de la méthode level-set pour la propagation des fissures en 3D, qui est basé sur l'équation d'Hamilton-Jacobi (l'idée de Osher et Sethian [54]).

La modélisation de la propagation des fissures en 2D sous chargement quasi-statique dans les problèmes isotrope et l'interface bi-matériau en utilisant la XFEM est décrite dans Sukumar et Prevost et al. [55, 56] dans laquelle l'application de la propagation des fissures utilisant la XFEM dans un code éléments finis en général est également décrite.

En ce qui concerne les chargements de Fatigue Sukumar et al. [57] ont développé une technique numérique pour la simulation de la propagation des fissures par fatigue en trois dimensions qui couple la méthode des éléments finis étendus avec la méthode de marche rapide (FMM). Chopp et Sukumar [58] ont étendu la méthode à de multiples fissures coplanaires, où toute la géométrie de la fissure a été représentée par une seule fonction de distance signée (level-set) et la fusion des fissures distinctes pourraient être traitée par la FMM, sans nécessité d'une détection de collision ou des procédures de reconstruction de maillage.

Le problème des fissures cohésives a été étudié par Möes et Belytschko et al. [59], Zi et Belytschko [60], et la simulation de la propagation des multi-fissures était l'objectif de plusieurs autres études. Budyn et al. [61] ont présenté une combinaison entre la XFEM et LSM pour modéliser des milieux de comportement linéaire élastique homogènes ou hétérogènes. Zi et al. [62] ont discuté la jonction entre deux fissures et présenté un modèle XFEM numérique pour l'analyse de la propagation et la coalescence des fissures dans les matériaux quasi-fragiles contenant des multi-fissures. Béchet et al. [63] ont proposé un enrichissement géométrique au lieu de l'enrichissement topologique habituel dans lequel un domaine donné serait enrichi, même si les éléments ne touchent pas le front de la fissure.

La précision, la convergence et la stabilité ont été également la cible de Laborde et al. [64] et Chahine et al. [65], qui ont étudié la convergence de la XFEM pour une variété des domaines fissurés. Peters et Hack [66] ont discuté les façons dont une matrice de rigidité singulière peut être évitée en supprimant certains des degrés de liberté. Ventura [67] a montré comment la standard quadrature de Gauss peut être précisément utilisée dans les éléments contenant des discontinuités.

Les problèmes de contact, de plasticité et les grandes déformations ont été toujours considérés comme des difficultés pour le calcul. La modélisation de contact avec la XFEM a d'abord été introduite par Dolbow et al [68, 69] et revisité par Belytschko et al. [70]. Khoei et Nikbakht [71] ont appliqué une formulation valable pour modéliser des problèmes de contact de frottement. L'introduction des termes d'enrichissement plastique dans la méthode XFEM a d'abord été rapportée par Elguedj et al. [72] sur la base des champs de Hutchinson-Rice-Rosengren (RRH) pour représenter les singularités dans l'EPFM (la mécanique de rupture élasto-plastique). De nombreux chercheurs ont présenté une méthode XFEM pour les problèmes de grandes déformations, parmi eux Dolbow et Devan [73], Legrain et al. [74].

Une formulation XFEM Dynamique a été proposée par Belytschko et al. [75], Belytschko et Chen [76] et Zi et al. [77] basée sur la méthode des éléments finis d'enrichissement singulier pour la propagation des fissures élastodynamique. En outre, Réthoré et al. [78] ont proposé une XFEM généralisée pour modéliser la dynamique dans les structures pré-fissurées. Plus tard, Menouillard et al. [79] ont présenté une formulation XFEM explicite par l'introduction d'une matrice de masse regroupée pour des éléments enrichis.

3.2. FORMULATION STANDARD DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS ÉTENDUE

Considérons un domaine Ω (Fig.3.1). Une discontinuité interne est représentée par la courbe Γ_d , une charge de traction \bar{t} est appliquée sur la frontière Γ_t et un déplacement \bar{u} imposé sur Γ_u . La courbe Γ_d a deux frontières Γ_d^+ et Γ_d^- (Fig.3.1). On peut écrire les équations mécaniques en termes de contrainte de Cauchy, comme suit :

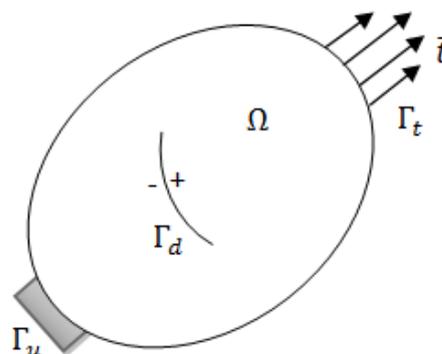


Fig.3.1. Représentation d'un domaine fissuré.

- L'équation d'équilibre :

$$\nabla \sigma + b = 0 \quad (3.1)$$

- Les conditions aux limites sont :

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ dans } \Gamma_t \quad (3.2)$$

$$\sigma \cdot n = 0 \text{ dans } \Gamma_d^+ \quad (3.3)$$

$$\sigma \cdot n = 0 \text{ dans } \Gamma_d^- \quad (3.4)$$

$$u = \bar{u} \text{ dans } \Gamma_u \quad (3.5)$$

Où σ représente le tenseur de contrainte de Cauchy, b : les forces de volume, \bar{t} et \bar{u} sont la contrainte de traction et le déplacement imposé respectivement.

Dans l'élasticité la relation entre les contraintes et les déformations s'écrit comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.6)$$

Où C représente le tenseur d'élasticité.

Et dans le cas des petites déformations et déplacements, la relation entre la déformation et le déplacement s'écrit :

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad (3.7)$$

L'espace des champs des déplacements admissible est :

$$u \in U = \{u/u = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_u; u \text{ est discontinue sur } \Gamma_d\} \quad (3.8)$$

La fonction test est :

$$v \in V = \{v/v = 0 \text{ sur } \Gamma_u; v \text{ est discontinue sur } \Gamma_d\} \quad (3.9)$$

La forme faible de l'équation d'équilibre :

$$\int_{\Omega} [\nabla v : \sigma(u)] d\Omega - \int_{\Gamma_t} v \cdot \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega} v \cdot b d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

3.2.1. APPROXIMATION DU DÉPLACEMENT

Selon Belytschko et Moës et [29], le champ du déplacement admissible et celui de la fonction test de la méthode XFEM s'écrit comme suit :

$$u^h(x) = \sum_{i \in N_{tot}} N_i(x) u_i + \sum_{i \in N_{hea}} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in N_{tip}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_j(x) b_i^j \right) \quad (3.11)$$

$$v^h(x) = \sum_{i \in N_{tot}} N_i(x)v_i + \sum_{i \in N_{hea}} N_i(x)H(x)c_i + \sum_{i \in N_{tip}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_j(x)e_i^j \right) \quad (3.12)$$

Avec :

$N_i(x)$: Les fonctions d'interpolations éléments finis standards.

$H(x)$: La fonction d'enrichissement de type Heaviside représente le 'saut' du déplacement des lèvres.

$F_j(x)$: Fonctions d'enrichissement représentent la singularité au voisinage du front de fissure.

a_i, c_i : Les degrés de liberté supplémentaires associant avec la fonction Heaviside.

b_i^j, e_i^j : Les degrés de liberté supplémentaires associant avec les fonctions singulières.

On peut simplifier l'écriture des équations (3.11 et 3.12) :

$$u^h = u_c^h + u_d^h \quad (3.13)$$

Avec :

$$u_c^h = \sum_{i \in N_{tot}} N_i(x)u_i \quad (3.14)$$

$$u_d^h = \sum_{i \in N_{hea}} N_i(x)H(x)a_i + \sum_{i \in N_{tip}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_j(x)b_i^j \right) \quad (3.15)$$

u_c^h , c'est la partie continue de déplacement global et u_d^h la partie discontinue.

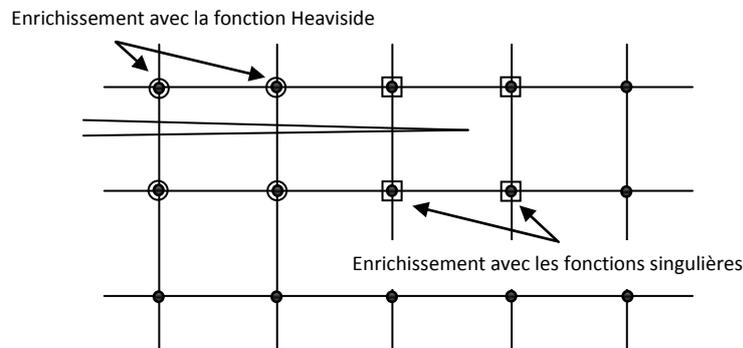


Fig.3.2. La stratégie de l'enrichissement XFEM.

La figure 3.2 montre la stratégie de Belytschko et Moës [29] pour enrichir les nœuds des éléments qui présentent une discontinuité. Les nœuds entourés par un cercle sont des nœuds enrichis par la

fonction Heaviside, et les nœuds entourés par un carré (l'élément qui contient la pointe de la fissure) sont enrichis par des fonctions singulières.

3.2.2. L'ENRICHISSEMENT HEAVISIDE (SAUT DE DÉPLACEMENT)

Si on a une barre (Fig.3.3) soumise à un effort réparti $f(x)$, on veut couper cette barre (fissure) à $L/2$ et on veut déterminer le déplacement de cette barre.

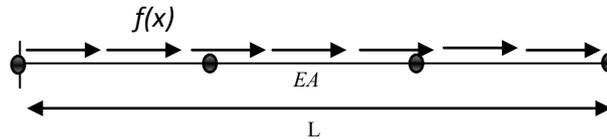


Fig.3.3. Une barre soumise a un effort réparti $f(x)$.

Par la méthode des éléments finis, on va discrétiser la barre en trois éléments finis linéaires (Fig. 3.4.a) avec :

$$u_c^h = \sum_{i \in N_{tot}} N_i(x)u_i \tag{3.16}$$

Et pour tenir compte la fissure on va ajouter deux nœuds (Fig.3.4.b), cela s'appelle « remaillage ».

Et après la résolution de problème on obtient :

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & 0 & 0 \\ k_{32} & k_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{44} & k_{45} \\ 0 & 0 & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

Les déplacements u_1 et u_6 sont nuls (encastrement).

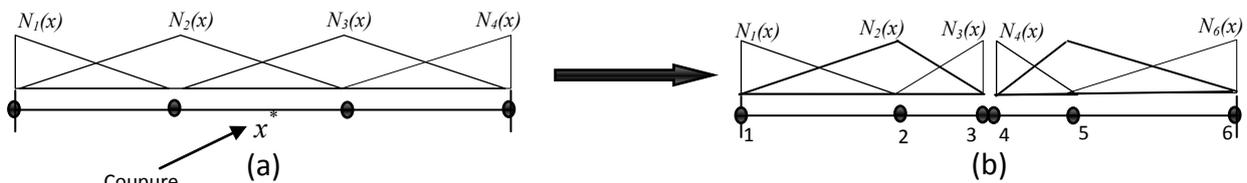


Fig.3.4. Discrétisation éléments finis d'une barre fissurée.

On peut remarquer que dans la formule de la solution il y a deux parties indépendantes :

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} \\ k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

C.-à-d. on peut faire deux calculs séparés pour résoudre chaque sous-problème. Bien sur que la procédure est simple pour une barre (1D), mais si on a une structure complexe en 2D où en 3D la procédure pour remailler le domaine est très difficile et coûteuse. L'idée de Belytschko et al [29],

consiste en une modification au niveau des fonctions de formes pour représentée la discontinuité. Voir (Fig.3.5).

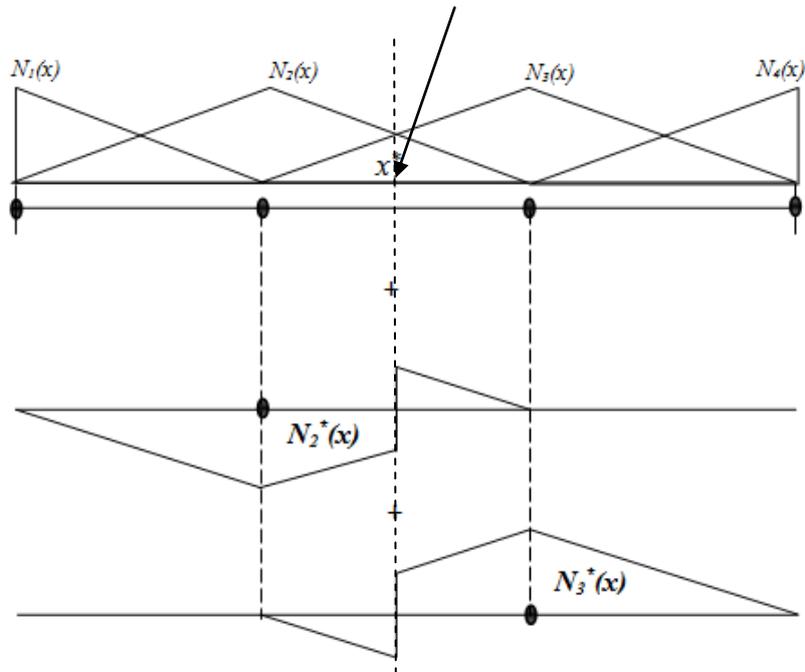


Fig.3.5. Représentation d’une discontinuité par les fonctions de type Heaviside (1D).

Et le déplacement dans ce cas est :

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 N_i(x)u_i + \sum_{j=2}^3 N_j^*(x) a_j \tag{3.19}$$

Et on peut calculer les N_i^* a partir de N_i par :

$$N_i^*(x) = N_i(x) \cdot H(x) \tag{3.20}$$

La fonction $H(x)$ c’est la fonction de discontinuité (Heaviside), donnée par :

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } (x - x^*) \cdot n \leq 0 \\ 1 & \text{si non} \end{cases} \tag{3.21}$$

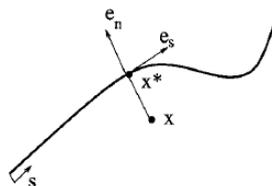


Fig.3.6. Représentation de vecteur normal et tangentiel d’un point x^* sur l’interface d’une fissure [29].

Avec n c’est la normal a partir du point x^* , et x^* c’est la projection du point x sur l’interface de la discontinuité.

Et après l’assemblage on a :

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{22^*} & k_{23} & k_{23^*} \\ k_{2^*2} & k_{2^*2^*} & k_{2^*3} & k_{2^*3^*} \\ k_{32} & k_{32^*} & k_{33} & k_{33^*} \\ k_{3^*2} & k_{3^*2^*} & k_{3^*3} & k_{3^*3^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_2^* \\ u_3 \\ u_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_2^* \\ f_3 \\ f_3^* \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Maintenant on peut remarquer dans la matrice de rigidité globale, que les deux parties sont liées après l'utilisation de ce type de fonctions d'enrichissement.

3.2.3. L'ENRICHISSEMENT CRACK-TIP (LES FONCTIONS SINGULIÈRES)

La solution asymptotique en pointe de fissure est connue en mécanique de la rupture pour les problèmes d'élasticité linéaire bidimensionnelle, dans le cas d'un matériau homogène isotrope et on peut l'utiliser directement (en coordonnées polaires) :

$$u_1 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ k_1 \cos(\delta - \cos\theta) + k_2 \sin \frac{\theta}{2} (\delta + 2 + \cos\theta) \right\} \quad (3.23)$$

$$u_2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ k_1 \sin(\delta - \cos\theta) + k_2 \cos \frac{\theta}{2} (\delta - 2 + \cos\theta) \right\} \quad (3.24)$$

Avec : $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $\delta = 3 - 4\nu$ en contrainte plane.

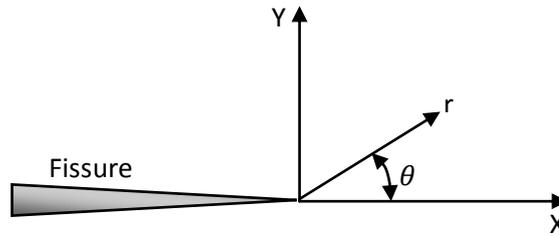


Fig.3.7. Système de coordonnées pour l'analyse du champ de contrainte en pointe de fissure.

A partir de ces deux équations (3.23, 3.24), Fleming et al [26] ont montré que les nœuds au voisinage de la pointe de la fissure doivent être enrichis par les fonctions suivantes :

$$\{F_j(r, \theta)\}_{j=1}^4 \begin{cases} F_1 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \\ F_2 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \\ F_3 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ F_4 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (3.25)$$

Par ces 4 fonctions, on peut obtenir des fonctions de forme représentant la singularité de fond de fissures, en multipliant ces derniers par les fonctions de forme éléments finis classique.

$$u_{tip} = \sum_{i \in N_{tip}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_j(r, \theta) \gamma_i \right) \quad (3.26)$$

Avec, $\gamma_i = a_i, b_i, c_i$

Et pour généraliser la méthode pour un cas arbitraire comme dans (Fig.3.8 : cas d'une fissure interne) on peut écrire :

$$U(x) = \sum_{i \in N_{tot}} N_i(x) u_i + \sum_{i \in N_{hea}} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in N_{tip1}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_i^{j1}(r, \theta) \gamma_i^{j1} \right) + \sum_{i \in N_{tip2}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_i^{j2}(r, \theta) \gamma_i^{j2} \right) \quad (3.27)$$

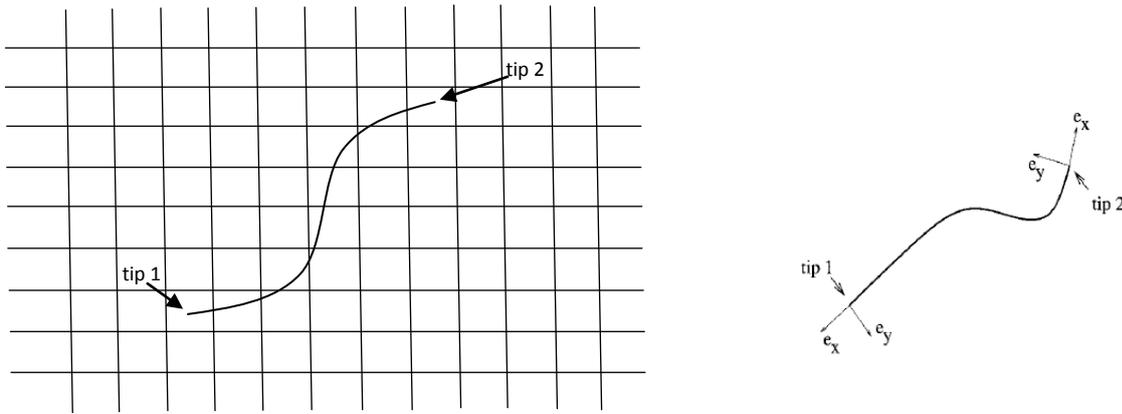


Fig.3.8. Une fissure arbitraire et les axes locale des pointes.

3.2.4. LES ÉQUATIONS DISCRÈTES D'ÉQUILIBRE

On a vu que la forme faible de l'équation d'équilibre d'un corps fissuré (en forme matricielle) s'écrit comme suit :

$$- \int_{\Omega} (\nabla v^T) \sigma(u) d\Omega + \int_{\Gamma_t} v^T \cdot \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} v^T \cdot b d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

Substituant les fonctions (3.11, 3.12) dans l'équation précédente, on obtient :

$$- \int_{\Omega} (B_{stdi}^u v_i + B_{enri}^a c_i + B_{enri}^b e_i^j)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u v_i + N_{enri}^a c_i + N_{enri}^b e_i^j)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{stdi}^u v_i + N_{enri}^a c_i + N_{enri}^b e_i^j)^T b d\Omega = 0 \quad (3.29)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
v_i \left[\int_{\Omega} -(B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{stdi}^u)^T b d\Omega \right] \\
+ c_i \left[\int_{\Omega} -(B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{enri}^a)^T b d\Omega \right] \\
+ e_i^j \left[\int_{\Omega} -(B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{enri}^b)^T b d\Omega \right] = 0 \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Lorsque v_i, c_i, e_i^j sont les variables cibles alors on suppose que ces dernières sont différentes de zéro, donc on a :

$$\int_{\Omega} -(B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{stdi}^u)^T b d\Omega = 0 \quad (3.31)$$

$$\int_{\Omega} -(B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{enri}^a)^T b d\Omega = 0 \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} -(B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{enri}^b)^T b d\Omega = 0 \quad (3.33)$$

Alors on peut écrire :

$$\int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{stdi}^u)^T b d\Omega \quad (3.34)$$

$$\int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{enri}^a)^T b d\Omega \quad (3.35)$$

$$\int_{\Omega} (B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{enri}^b)^T b d\Omega \quad (3.36)$$

Ou bien dans une forme plus compacte :

$$[f_{int}] = [f_{ext}] \quad (3.37)$$

Pour un comportement élasto-statique linéaire le système des équations discrètes écrit comme suit :

$$[K]\{d\} = \{f^{ext}\} \quad (3.38)$$

$\{d\}$, est le vecteur des déplacements nodales, $[K]$ c'est la matrice de rigidité globale et $\{f^{ext}\}$ c'est le vecteur des forces extérieures.

Dans notre cas on a :

$$\sigma = C \varepsilon = C \frac{\partial u^h}{\partial x} = C (B_{stdi}^u u_i + B_{enri}^a a_i + B_{enri}^b b_i^j)^T \quad (3.39)$$

Après la substitution de σ dans l'équation (3.30), la matrice $[K]$ écrite comme suit :

$$[k_{ij}^{rs}] = \int_{\Omega^h} (B_i^r)^T C B_j^s d\Omega \quad r, s = u, a, b \quad (3.40)$$

$$[K_{ij}^e] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{uu}] & [k_{ij}^{ua}] & [k_{ij}^{ub}] \\ [k_{ij}^{au}] & [k_{ij}^{aa}] & [k_{ij}^{ab}] \\ [k_{ij}^{bu}] & [k_{ij}^{ba}] & [k_{ij}^{bb}] \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Dans laquelle :

$$B_i^u = B_{stdi}^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$B_i^a = B_{enri}^a = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$B_i^b = B_{enri}^b = \begin{bmatrix} (N_i F_j)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_j)_{,y} \\ (N_i F_j)_{,y} & (N_i F_j)_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Et pour le vecteur de forces extérieures on a :

$$\{f_i^{ext}\} = \{ \{f_i^u\} \{f_i^a\} \{f_i^{b1}\} \{f_i^{b2}\} \{f_i^{b3}\} \{f_i^{b4}\} \}^T \quad (3.45)$$

Avec :

$$f_i^u = f_{stdi}^u = \int_{\Gamma_t} (N_{stdi})^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (N_{stdi})^T b d\Omega \quad (3.46)$$

$$f_i^a = f_{enri}^a = \int_{\Gamma_t} (H \cdot N_{stdi})^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (H \cdot N_{stdi})^T b d\Omega \quad (3.47)$$

$$f_i^{bj} = f_{enri}^{bj} = \int_{\Gamma_t} (F_j \cdot N_{stdi})^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (F_j \cdot N_{stdi})^T b d\Omega \quad (3.48)$$

3.3. FORMULATION DE LA MÉTHODE XFEM POUR UN MODÈLE COHÉSIF

Considérons un domaine Ω , comme indiqué dans (Fig.3.9), contenant une fissure Γ_c . La partie de la fissure à laquelle une loi de cohésion est active est représentée par Γ_{coh} et appelée la **FPZ**. Des forces de traction prescrits, \mathbf{F} , sont imposées sur la frontière Γ_F , des déplacements imposés (supposée égale à zéro pour de simplicité) sont imposées sur Γ_u . Le champ de contrainte à l'intérieur du domaine, σ est liée au chargement externe \mathbf{F} et les tractions de fermeture t^+, t^- dans la zone de cohésion par :

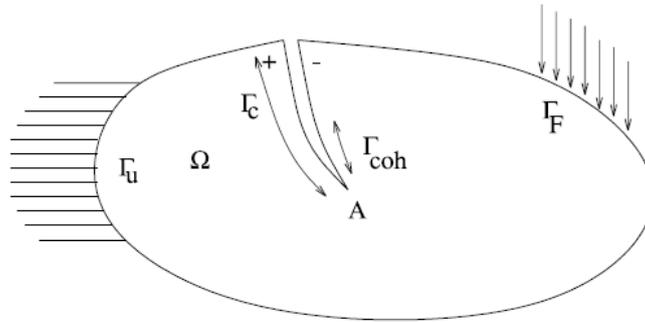


Fig.3.9. Représentation d'un corps fissuré (zone cohésive).

- L'équation d'équilibre :

$$\nabla \sigma + b = 0 \quad (3.49)$$

- Les conditions aux limites sont :

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ dans } \Gamma_t \quad (3.50)$$

$$u = \bar{u} \text{ dans } \Gamma_u \quad (3.51)$$

$$\sigma \cdot n^+ = -\sigma \cdot n^- = t^+ = -t^- = t \text{ sur } \Gamma_{coh} \quad (3.52)$$

L'orientation des normales \mathbf{n}^+ et \mathbf{n}^- sont montré sur (Fig.3.10)

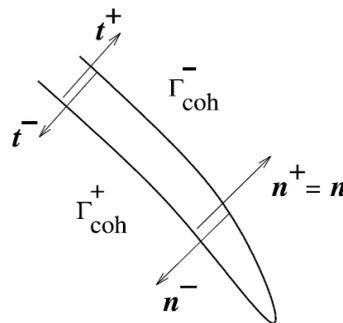


Fig.3.10. La zone cohésive (Zoom).

La relation déplacement-déformation donnée par :

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad (3.53)$$

Dans l'élasticité la relation entre les contraintes et les déformations s'écrit comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.54)$$

Ici, on va définir un nouveau paramètre w qui représente la séparation des lèvres de la fissure dans la frontière Γ_{coh} , ce paramètre mathématiquement définie comme la différence entre les déplacements des lèvres de la fissure : (Fig.3.11)

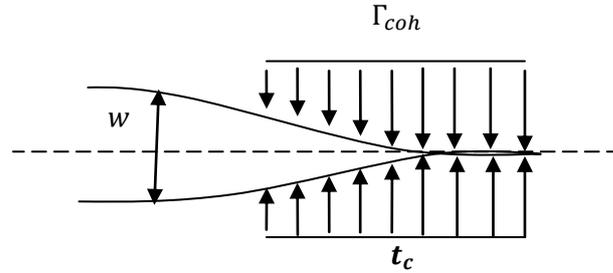


Fig.3.11. La force cohésive sur les lèvres.

$$w = u^- - u^+ \quad (3.55)$$

3.3.1. LA LOI DE SÉPARATION (LOI COHÉSIVE)

Dans le cas d'un problème de zone cohésive, les surfaces de la fissures ne sont pas libres, alors une loi de séparation de ces dernières doit se définir, il y a plusieurs lois cohésives mais pour notre cas on utilise seulement une loi simple comme :

$$t_c = \mathbb{K}w \quad (3.56)$$

Avec \mathbb{K} c'est la pente de la loi, t_c les forces cohésives sur les surfaces de la fissure.

3.3.2. LES ÉQUATIONS DISCRÈTES D'ÉQUILIBRE

Puisque la force cohésive est présente sur les surfaces de la fissure, l'équation d'équilibre sera modifiée pour tenir en compte des tractions cohésives.

Ignorant les forces de volume $b=0$, la forme faible de l'équation d'équilibre devient :

$$\int_{\Omega} [\nabla v : \sigma(u)] d\Omega - \int_{\Gamma_t} v \cdot \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_{coh}^+} v \cdot t_c^+ d\Gamma - \int_{\Gamma_{coh}^-} v \cdot t_c^- d\Gamma = 0 \quad (3.56)$$

Dans un format plus compact :

$$t_c^+ = -t_c^- = t_c \quad (3.57)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla v : \sigma(u)] d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} w \cdot t_c d\Gamma = \int_{\Gamma_t} v \cdot \bar{t} d\Gamma \quad (3.58)$$

On suppose que le domaine est en 2D, et enrichi par deux type de fonctions d'enrichissement, fonction Heaviside et les fonctions de la pointe, de la même manière que la méthode XFEM standard :

$$\int_{\Omega} (\nabla v^T) \sigma(u) d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} w(v)^T \cdot t_c d\Gamma - \int_{\Gamma_t} v^t \cdot \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (3.59)$$

Pour $w(v)^T$, nous l'incorporons comme suit :

$$w(v)^T = v^- - v^+ \quad (3.60)$$

$$w(v)^T = N_{stdi}^{u-} v_i + N_{enri}^{a-} c_i + N_{enri}^{b-} e_i^j - N_{stdi}^{u+} v_i - N_{enri}^{a+} c_i - N_{enri}^{b+} e_i^j \quad (3.61)$$

Alors il reste :

$$w(v)^T = [N_{enri}^{a-} - N_{enri}^{a+}] c_i + [N_{enri}^{b-} - N_{enri}^{b+}] e_i^j \quad (3.62)$$

$$w(v)^T = \tilde{N}_{enri}^a c_i - \tilde{N}_{enri}^b e_i^j \quad (3.63)$$

Substituant les fonctions (3.11, 3.12) dans l'intégrale (3.59):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u v_i + B_{enri}^a c_i + B_{enri}^b e_i^j)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a c_i + \tilde{N}_{enri}^b e_i^j)^T t_c d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u v_i + N_{enri}^a c_i + N_{enri}^b e_i^j)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Réarrangent les termes on a :

$$\begin{aligned} v_i \left[\int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \right] \\ + c_i \left[\int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T t_c d\Gamma \right] \\ + e_i^j \left[\int_{\Omega} (B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^b)^T t_c d\Gamma \right] \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Alors :

$$\int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (3.66)$$

$$\int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T t_c d\Gamma = 0 \quad (3.67)$$

$$\int_{\Omega} (B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^b)^T t_c d\Gamma = 0 \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T t_c d\Gamma \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^b)^T t_c d\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

L'équilibre entre les forces :

$$[f_{int}] = [f_{ext}] \quad (3.70)$$

3.4. L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Pour les éléments coupés par la fissure, il y a un problème d'intégration numérique de l'équation discrète due à la présence des discontinuités du champ de déplacement dans l'élément. L'idée de base de la méthode des éléments finis étendue, c'est la discrétisation du domaine de l'élément a des sub-domaines ou bien le partitionnement des éléments coupés par la discontinuité et cette procédure de partitionnement est proposée dès le début du développement de la méthode (Dolbow,[28]), par exemple pour l'analyse 2D d'un modèle discrétisé en éléments rectangulaires, le partitionnement adopté pour l'implémentation de la méthode des élément finis étendue est en triangle, les éléments concernés étant divisés en triangles (Fig.3.12).

3.5. AMÉLIORATIONS DE LA MÉTHODE XFEM

3.5.1. LA MÉTHODE LEVEL-SET

Comme montré dans (Fig.3.13) l'idée d'Osher et Sethian [54] est de définir une fonction $\varphi(x, t)$ régulière telle que, le sous espace $\varphi(x, t) = 0$ représente l'interface de coupure (fissure). Cette

méthode s'applique aisément aux problèmes de fissuration en 2D. Par exemple pour la figure 3.13 on définit le plan de coupure ϕ à l'aide d'une fonction de niveau (level-set) $lsn(x)$ qui représente la distance normale a la surface on a $\phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / lsn(x) = 0\}$.

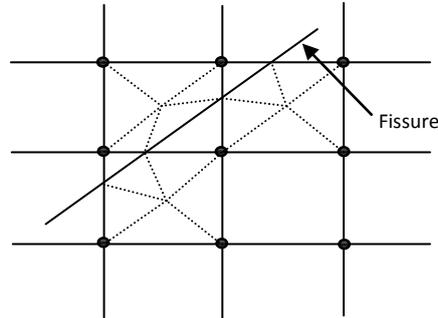


Fig.3.12. Partitionnement triangulaire des éléments discontinus.

Mais il faut une indication de l'endroit où s'arrête la fissure dans son plan et l'idée dans ce cas c'est l'utilisation d'une autre level-set $lst(x)$ qui représente la distance au front de fissure (tangentiellment à la surface) et les deux level-sets forment une base orthonormée en pointe de fissure.

Le lieu de la fissure est défini ainsi : $\phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / lsn(x) = 0, lst(x) = 0\}$. Et finalement on peut définir une base polaire :

$$\begin{cases} r = \sqrt{lsn(x)^2 + lst(x)^2} \\ \theta = \arctan \frac{lsn(x)}{lst(x)} \end{cases} \quad (3.71)$$

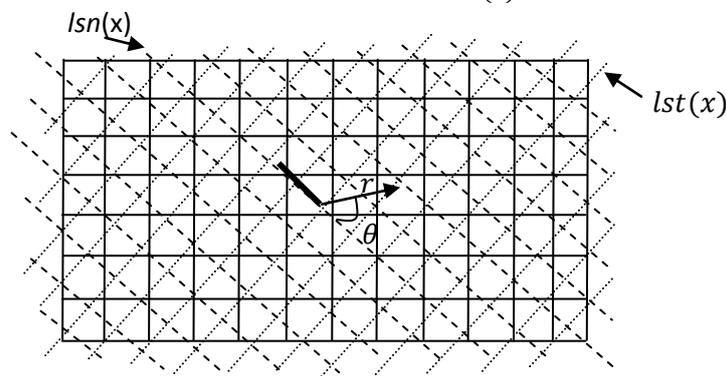


Fig.3.13. La stratégie level-set.

3.5.2. LE CAS TRIDIMENSIONNEL

Le cas de trois dimensions est traité par Sukumar et al. [48] de même manière que le cas en deux dimensions sauf que maintenant le front de la fissure n'est plus composé d'un ensemble de points, mais un ensemble de courbes, et l'approximation de déplacement s'écrit comme suit :

$$U(x) = \sum_{i \in N_{tot}} N_i(x) u_i + \sum_{i \in N_{hea}} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in N_{tip}} N_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_i^j(r, \theta) \gamma_i^j \right) \quad (3.72)$$

Les nœuds N_{hea} sont les nœuds tels que leur support croise avec la fissure, mais pas son front. Notez que le support d'un nœud est maintenant un volume.

Les fonctions d'enrichissement de front $F_i^j(r, \theta)$ sont toujours données par l'équation (3.25) où le couple (r, θ) est défini comme les coordonnées polaires dans le plan $x_1 - x_2$, (voir Fig.3.14). Le plan $x_1 - x_2$ contient x et x^* et l'axe x_2 est aligné avec la normale n à la fissure au x^* .

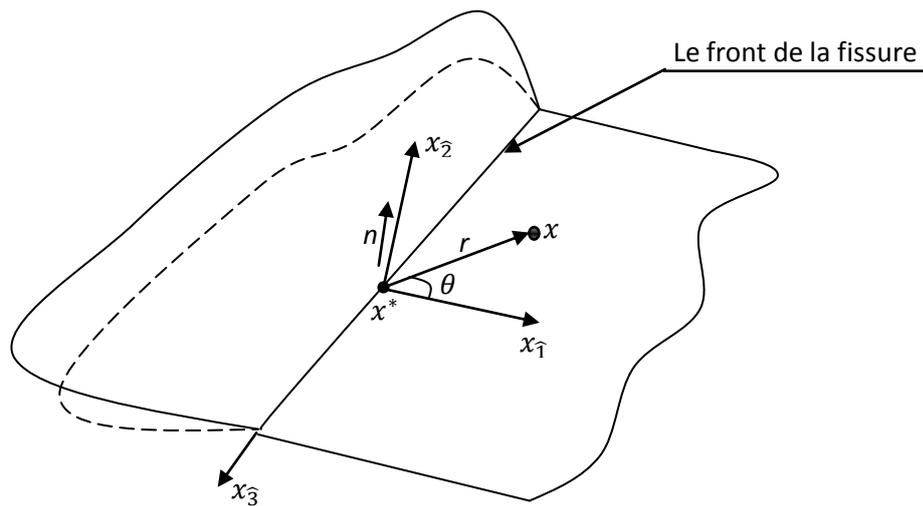


Fig.3.14. Représentation d'une fissure en 3D.

3.5.3. LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE XFEM

Le problème de la convergence est toujours discuté par les auteurs, Dans la plupart des documents susmentionnés seules les approximations par des éléments finis linéaire ont été utilisées dans les approximations de la XFEM et l'interpolation level-set. Well et al. [81] ont utilisés le concept XFEM en visco-plasticité des matériaux avec triangles de 6 nœuds. Mais seulement considérés comme des fissures qui se sont terminées sur un bord d'élément.

Il est bien connu que les éléments d'ordre supérieur offrant une précision importante pour les problèmes suffisamment raffinés. Par exemples les éléments finis quadratique sont les éléments de choix pour la plupart des problèmes élastique statique et quasi-statique cela dû a leur taux élevé de convergence et leur capacité à modéliser les frontalières courbées.

Par ailleurs, les fonctions level-set interpolées par des fonctions de forme quadratique sont capables de décrire des fissures incurvées, et la description des level-set par des éléments finis linéaires est limitée à des fissures linéaires.

Stazi *et al.* [82] étudient la convergence de l'erreur en énergie pour une plaque infinie avec une fissure droite, en mode I , pour des formulations linéaires et quadratiques. Ils remarquent que l'approximation quadratique améliore l'erreur, mais pas le taux de convergence. Béchet *et al.* [63] confirment cette observation et montrent qu'une zone d'enrichissement fixe (Fig.3.15) permet de retrouver un taux de convergence presque optimal. Parallèlement, Laborde *et al.* [64] approfondissent la question et testent les taux de convergence pour les formulations polynomiales d'ordre supérieur.

Dans le cadre de la fissuration par zones cohésives, l'enrichissement par les fonctions singulières n'a plus lieu d'être, et Zi *et al.* proposent de s'affranchir des éléments de transition. Au lieu d'utiliser des fonctions singulières, ils utilisent une fonction signe qui permet de représenter le front de fissure (similaire à un enrichissement Heaviside vis-à-vis de la level set tangente) au sein des éléments contenant le fond de fissure [60].

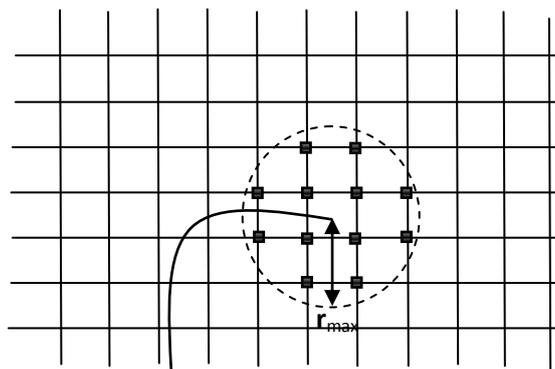


Fig.3.15. Les nœuds « carrés » sont enrichis par les fonctions singulières (enrichissement géométrique).

3.6. EXEMPLES D'APPLICATIONS

3.6.1. EXEMPLE D'UNE BARRE FISSURÉE (1D)

Cet exemple a pour but d'illustrer de manière simplifiée le fonctionnement de la méthode XFEM. Le problème est celui d'une barre (Fig.3.16) soumise à deux charges P en L et $2L$. La barre est coupée en son milieu. Pour le résoudre, nous allons utiliser :

- 1- La méthode des éléments finis classique.
- 2- La méthode des éléments finis étendue standard.

3- La méthode des éléments finis étendue avec un modèle cohésif.

Ce qui nous permettra par la suite de comparer les trois méthodes.

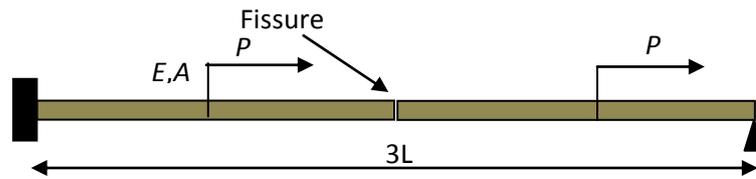


Fig.3.16. Barre pré-fissurée soumise à une charge P.

E, A sont respectivement le module de Young et la section de la barre.

3.6.1.1. La méthode des éléments finis classique :

Pour cette méthode la coupure coïncide avec deux nœuds, et le maillage sera avec 4 éléments comme dans (Fig.3.17) :

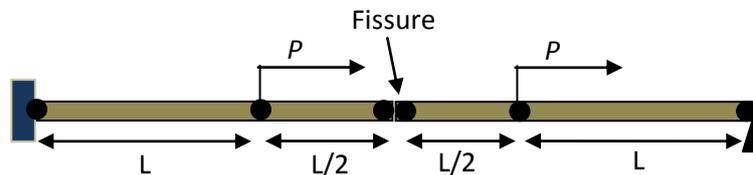


Fig.3.17. Discrétisation EF classique de la barre.

Les degrés de liberté utilisés sont $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$

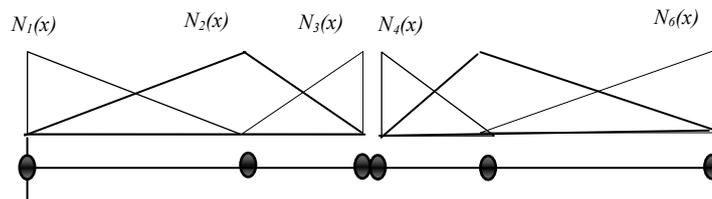


Fig.3.18. Les fonctions de forme EF classique.

Pour cette méthode, la matrice de rigidité standard pour un élément barre s'écrit comme suit :

$$K_s = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour les éléments 1 et 4} \tag{3.73}$$

$$K_s = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ pour les éléments 2 et 3} \tag{3.74}$$

Supposant $EA=1$. On peut réaliser l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires pour la modélisation MEF classique comme suit :

$$K_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Le système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

Après l'application des conditions aux limites :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

Le vecteur de déplacement est :

$$\{U_{MEF}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ P \\ P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

3.6.1.2. La méthode des éléments finis étendue standard :

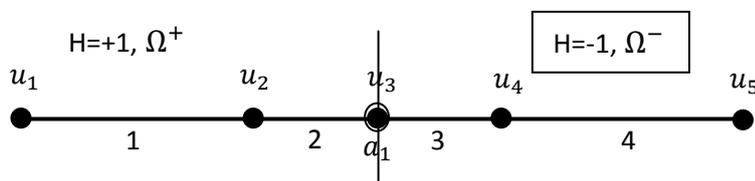


Fig.3.19. Discrétisation de la barre par la XFEM standard.

Pour la méthode X-FEM, les degrés de libertés utilisées sont $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, a_1\}$, où a_1 est le degré de liberté supplémentaire de l'enrichissement de type Heaviside ($H(x)$). On peut désormais calculer les matrices de rigidité élémentaires des éléments de Fig.3.19 par :

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Avec :

$$K_{uu} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{std}^u dx \quad (3.80)$$

$$K_{ua} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{enr}^a dx \quad (3.81)$$

$$K_{au} = \int_0^l (B_{enr}^a)^T D B_{std}^u dx \quad (3.82)$$

$$K_{aa} = \int_0^l (B_{enr}^a)^T D B_{enr}^a dx \quad (3.83)$$

avec : $D = EA$.

L'élément N°1 :

Cet élément est un élément finis standard avec :

$$K_{e1} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

L'élément N°2 :

L'enrichissement Heaviside de cet élément est donné par :

$$H(x) = +1 \text{ pour } x \in \Omega^+ \quad (3.85)$$

$$N_{std}^u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$N_{enr}^a = H \left[\frac{x}{l} \right] = \begin{bmatrix} \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$B_{std}^u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$B_{enr}^a = H \left[\frac{1}{l} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$K_{uu} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{std}^u dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$K_{ua} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{enr}^a dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

On a :

$$K_{au} = K_{ua}^T \quad (3.92)$$

$$K_{aa} = \int_0^l (B_{\text{enr}}^a)^T D B_{\text{enr}}^a dx = \frac{EA}{l} \quad (3.93)$$

Pour cet élément $l = \frac{L}{2}$, alors la matrice de rigidité s'écrit comme suit :

$$K_{e2} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

L'élément N°3 :

L'enrichissement Heaviside de cet élément est donné par :

$$H(x) = -1 \text{ pour } x \in \Omega^- \quad (3.95)$$

$$N_{\text{std}}^u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$N_{\text{enr}}^a = H \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{l} - 1 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$$B_{\text{std}}^u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$B_{\text{enr}}^a = H \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$K_{uu} = \int_0^l (B_{\text{std}}^u)^T D B_{\text{std}}^u dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$K_{ua} = \int_0^l (B_{\text{std}}^u)^T D B_{\text{enr}}^a dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$K_{au} = K_{ua}^T \quad (3.102)$$

$$K_{aa} = \int_0^l (B_{\text{enr}}^a)^T D B_{\text{enr}}^a dx = \frac{EA}{l} \quad (3.103)$$

Avec: $l = \frac{L}{2}$, on a

$$K_{e3} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

L'élément N°4 :

Cet élément est aussi un element fini standard avec :

$$K_{e4} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

On suppose que $\frac{EA}{L} = 1$. La matrice de rigidité globale de cette barre est :

$$K_g^{XFEM} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.106}$$

Après l'application des conditions aux limites le système d'équations devient :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.107}$$

Et le vecteur de déplacement est :

$$\{U_{XFEM}\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ P \\ P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

3.6.1.3. La méthode des éléments finis étendue avec un modèle cohésif :

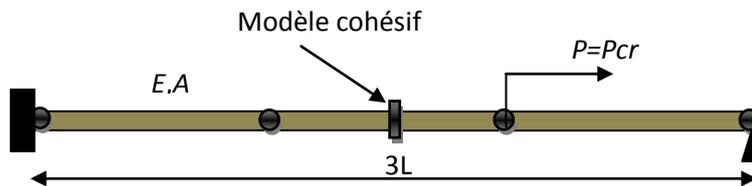


Fig.3.20. Modélisation de fissure avec un modèle cohésif.

Supposons que la barre est déformée sous l'action d'une force incrémentale P , et à certain incrément de cette force $P=P_{cr}$ l'élément perd sa rigidité initiale et atteint une valeur K .

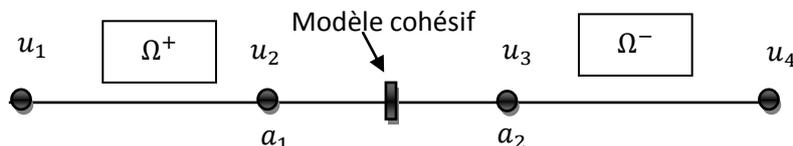


Fig.3.21. Discrétisation XFEM avec un modèle cohésif.

Quelque soit le problème ou bien la forme de la loi cohésive on peut écrire l'équilibre comme suit :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T t_c d\Gamma \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^b)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^b)^T t_c d\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^b)^T \bar{t} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Puisque on a un problème en 1D la discontinuité est forte dans ce cas on utilise seulement l'enrichissement de type Heaviside (saut) pour l'analyse XFEM. Donc l'équation précédente devient :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T \sigma d\Omega \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T t_c d\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

Et lorsque le matériau est linéaire élastique, la loi de comportement s'écrit comme suit :

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) = D\varepsilon = E\varepsilon \quad (3.111)$$

La relation déplacement –déformation est donnée par :

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad (3.112)$$

On suppose que la loi de séparation (loi cohésive) est bilinéaire avec une rigidité réduite \mathbb{K} , donc on définit la loi traction-séparation comme suit :

$$t_c = \mathbb{K}w \quad (3.113)$$

Substituant la loi de comportement et la loi traction-séparation mentionnées précédemment l'équilibre devient :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T D \nabla_s u^h d\Omega \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T D \nabla_s u^h d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T \mathbb{K} w(u^h) d\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Maintenant on peut incorporer les fonctions tests de la XFEM dans l'équation :

$$\left[\begin{array}{c} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T D (B_{stdi}^u u_i + B_{enri}^a a_i) d\Omega \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T D (B_{stdi}^u u_i + B_{enri}^a a_i) d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{enri}^a a_i) d\Gamma \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma \end{array} \right] \quad (3.115)$$

Finalement on a :

$$\left[\begin{array}{cc} \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T D (B_{stdi}^u) d\Omega & \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T D (B_{enri}^a) d\Omega \\ \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T D (B_{stdi}^u) d\Omega & \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T D (B_{enri}^a) d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{enri}^a a_i) d\Gamma \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_j \\ a_j \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \int_{\Gamma_t} (N_{stdi}^u)^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (N_{enri}^a)^T \bar{t} d\Gamma \end{array} \right] \quad (3.116)$$

La matrice de rigidité s'écrit alors comme suit :

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Avec :

$$K_{uu} = \int_{\Omega} (B_{std}^u)^T D B_{std}^u d\Omega \quad (3.118)$$

$$K_{ua} = \int_{\Omega} (B_{stdi}^u)^T D (B_{enri}^a) d\Omega \quad (3.119)$$

$$K_{au} = K_{ua}^T \quad (3.120)$$

$$K_{aa} = \int_{\Omega} (B_{enri}^a)^T D (B_{enri}^a) d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{enri}^a a_i) d\Gamma \quad (3.121)$$

L'élément N°1 :

L'enrichissement Heaviside de cet élément est donné par :

$$H(x) = +1 \text{ pour } x \in \Omega^+ \quad (3.122)$$

$$N_{std}^u = \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] \quad (3.123)$$

$$N_{enr}^a = H \left[\frac{x}{l} \right] = \left[\frac{x}{l} \right] \quad (3.124)$$

$$B_{std}^u = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \quad (3.125)$$

$$B_{enr}^a = H \left[\frac{1}{l} \right] = \left[\frac{1}{l} \right] \quad (3.126)$$

$$K_{uu} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{std}^u dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

$$K_{ua} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{enr}^a dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

On a :

$$K_{au} = K_{ua}^T \quad (3.129)$$

$$K_{aa} = \int_0^l (B_{enr}^a)^T D B_{enr}^a dx + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{enri}^a a_i) d\Gamma = \frac{EA}{l} \quad (3.130)$$

$l = L$, Alors la matrice de rigidité s'écrit comme suit :

$$K_{e1} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

L'élément N°3 :

L'enrichissement Heaviside de cet élément est donné par :

$$H(x) = -1 \text{ pour } x \in \Omega^- \quad (3.132)$$

$$N_{std}^u = \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] \quad (3.133)$$

$$N_{enr}^a = H \left[1 - \frac{x}{l} \right] = \left[\frac{x}{l} - 1 \right] \quad (3.134)$$

$$B_{std}^u = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \quad (3.135)$$

$$B_{enr}^a = H \left[-\frac{1}{l} \right] = \left[\frac{1}{l} \right] \quad (3.136)$$

$$K_{uu} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{std}^u dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

$$K_{ua} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{enr}^a dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

$$K_{au} = K_{ua}^T \quad (3.139)$$

$$K_{aa} = \int_0^l (B_{enr}^a)^T D B_{enr}^a dx + \int_{\Gamma_{coh}} (\tilde{N}_{enri}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{enri}^a a_i) d\Gamma = \frac{EA}{l} \quad (3.140)$$

Avec: $l = L$, on a

$$K_{e3} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

L'élément N°2 :

Pour cet élément la fonction Heaviside a deux valeurs, selon X on a :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x \in \Omega^+ \\ -1 & \text{pour } x \in \Omega^- \end{cases} \quad (3.142)$$

$$N_{std}^u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

$$N_{enr}^a = H \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$B_{std}^u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

$$B_{enr}^a = H \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

$$K_{uu} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{std}^u dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

K_{ij} Évaluée pour les deux cotés de la fissure comme suit :

$$K_{ua} = \int_0^l (B_{std}^u)^T D B_{enr}^a dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$K_{au} = K_{ua}^T \quad (3.149)$$

$$K_{aa} = \int_0^l (B_{\text{enr}}^a)^T D B_{\text{enr}}^a dx + \int_{\Gamma_{\text{coh}}} (\tilde{N}_{\text{enri}}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{\text{enri}}^a a_i) d\Gamma \quad (3.150)$$

$$K_{aa} = \int_0^{l/2} (B_{\text{enr}}^a)^T D B_{\text{enr}}^a dx + \int_{l/2}^l (B_{\text{enr}}^a)^T D B_{\text{enr}}^a dx + \int_{\Gamma_{\text{coh}}} (\tilde{N}_{\text{enri}}^a)^T \mathbb{K} (\tilde{N}_{\text{enri}}^a a_i) d\Gamma \quad (3.151)$$

$$K_{aa} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \left\{ (-2) \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} \mathbb{K} (-2) \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.152)$$

$$K_{aa} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 4 \mathbb{K} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right) \\ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \Big|_{\frac{l}{2}} \quad (3.153)$$

$$K_{aa} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \mathbb{K} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

La matrice de rigidité de l'élément s'écrit alors :

$$K_{e2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} + \mathbb{K} & -\frac{EA}{l} + \mathbb{K} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} + \mathbb{K} & \frac{EA}{l} + \mathbb{K} \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

La matrice de rigidité globale de cette barre est :

$$K_g = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{2EA}{l} + \mathbb{K} & -\frac{EA}{l} + \mathbb{K} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} + \mathbb{K} & \frac{2EA}{l} + \mathbb{K} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

Le système à résoudre s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{2EA}{l} + \mathbb{K} & -\frac{EA}{l} + \mathbb{K} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} + \mathbb{K} & \frac{2EA}{l} + \mathbb{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.157)$$

Pour valider notre résultat avec celui obtenue dans [90], on suppose que $\mathbb{K} = 2$, $\frac{EA}{l} = 1$. Alors le vecteur de déplacement donné par:

$$\{U_{XFEM-CZM}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.57 P \\ 0.92 P \\ 0 \\ -0.21 P \\ 0.286 P \end{Bmatrix} \quad (3.158)$$

On remarque que les résultats de la méthode des éléments finis classique et la méthode XFEM standard donnent un champ de déplacement identique, mais la méthode des éléments finis classique a besoin d'un remaillage ou niveau de la coupure (on ajoute des éléments Fig.3.18) cette coupure était représentée par une discontinuité dans le maillage.

Par contre, pour la méthode XFEM standard et la méthode XFEM avec un modèle cohésif on n'a pas besoin de représenter la fissure sur le maillage, mais sur les fonctions de forme. Ceci n'a pas beaucoup d'intérêt lorsque l'on traite un problème unidimensionnel, mais la méthode devient très utile en 2D et 3D et lorsque l'on veut faire propager une fissure sans remailler de la structure. Il suffit alors de modifier les fonctions de formes et non plus le maillage.

On peut remarquer aussi, que le déplacement des nœuds est diminué lorsqu'on utilise un modèle cohésive qui a le rôle de maintenir la fissure fermée.

3.6.2. ANALYSE ÉLASTIQUE LINÉAIRE D'UNE PLAQUE MULTI- FISSURÉE (2D)

Le but de ce test est de vérifier que le logiciel CAST3M traite correctement les cas de multi-fissuration. Il s'agit d'une plaque 2D contenant deux fissures, chacune composée d'un seul fond.

Plusieurs propagations sont calculées. On vérifie que le facteur d'intensité des contraintes K_I des fissures propagées est correct pour une propagation en

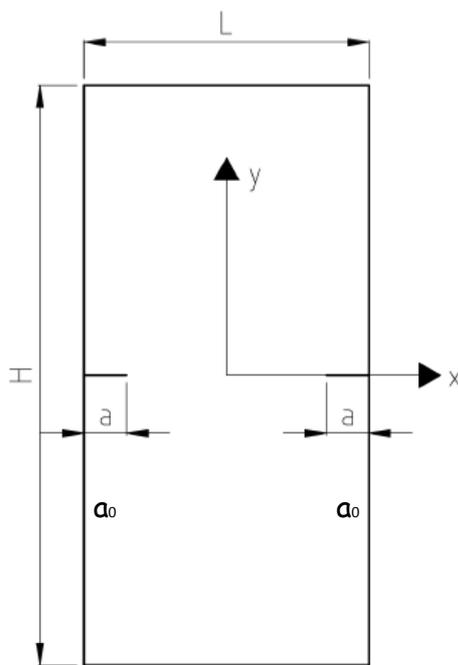


Fig.3.22. géométrie de la plaque fissurée.

mode I.

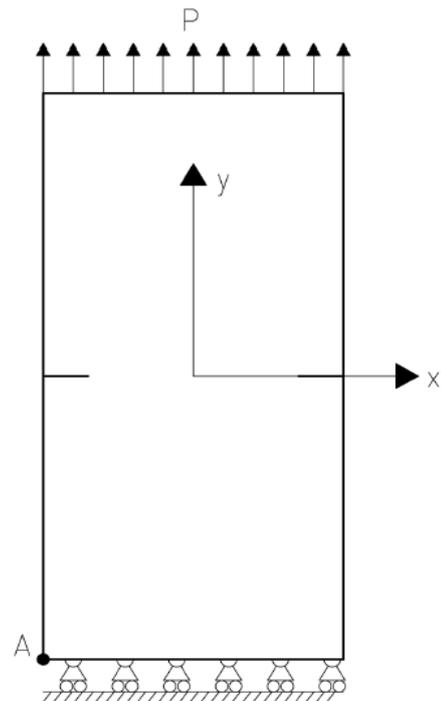


Fig.3.23. Conditions aux limites et chargement.

- Les dimensions géométriques de la plaque fissurée (Fig.3.22):
 Largeur $L=1000\text{mm}$.
 Hauteur $H=2000\text{mm}$.
- Les fissures sont positionnées au milieu de la hauteur de la plaque ($H/2$) avec une longueur initiale des fissures : $a_0=300\text{ mm}$.
- Les propriétés du matériau sont :
 Module de Young $E=206000\text{ MPa}$, Coefficient de Poisson $\nu =0.33$
- Conditions aux limites (Fig.3.23):
 Point A : $u_x = u_y = 0$ et pour les Points de l'extrémité inférieure de la plaque: $u_y = 0$.
- Comme Chargement on applique une pression à l'extrémité supérieure de la plaque:
 $P=1\text{MPa}$.
- Trois propagations sont calculées en imposant une avancée maximale des fissures égale à 30mm .

Trois propagations de la fissure sont calculées. Les deux fissures avancent toujours de la même distance et leurs facteurs d'intensité des contraintes sont toujours égaux entre eux. On peut calculer les facteurs d'intensité des contraintes en utilisant l'équation suivante [83]:

$$K_I = Y \cdot P \cdot \sqrt{a} \quad (3.159)$$

$$Y = 1.99 + 0.76 \cdot \frac{a}{L} - 8.48 \left(\frac{a}{L}\right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{L}\right)^3 \quad (3.160)$$

Par l'équation (3.159), La valeur de K_I attendue est donc la suivante pour chaque fond propagé:

Tab.3.1. Les valeurs semi-analytique de KI [83] pour chaque propagation.

Propagation	$K_I [P_a \sqrt{mm}]$
1	3.7992E+07
2	4.1791E+07
3	4.6316E+07

Le maillage de la structure est très régulier (Fig.3.24). Ce maillage est grossier pour réduire le temps de calcul. Il est plus raffiné dans la zone de propagation de la fissure pour modéliser la concentration des contraintes au bout de la fissure.

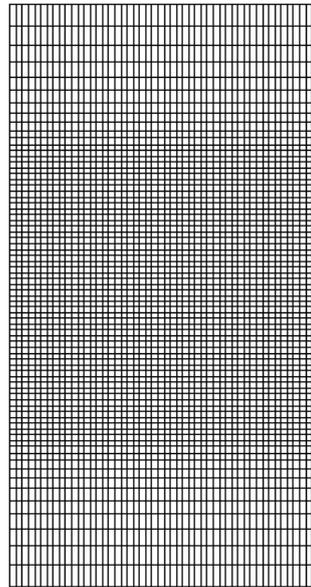


Fig.3.24. Maillage de la structure.

On teste les valeurs de K_I pour les deux fissures après chaque propagation. Pour vérifier si ces valeurs sont correctes, on utilise une tolérance relative égale à 5% pour les valeurs de K_I . Dans cette étude on peut négliger la valeur de K_{II} .

Tab.3.2. la tolérance sur les valeurs de K_I .

Propagation	Fissure	K_I référence $[P_a \sqrt{mm}]$	$K_I [P_a \sqrt{mm}]$	Tolé
1	Gauche	3.7992E+07	3.8043E+07	< 5%
	Droite	3.7992E+07	3.8043E+07	< 5%
2	Gauche	4.1791E+07	4.2106E+07	< 5%
	Droite	4.1791E+07	4.2106E+07	< 5%
3	Gauche	4.6316E+07	4.6616E+07	< 5%
	Droite	4.6316E+07	4.6616E+07	< 5%

Toutes les valeurs testées sont dans les tolérances utilisées. Cela signifie que les procédures X-FEM utilisées dans CAST3M calculent correctement à la fois la position des deux fissures et les level sets. L'erreur obtenue sur les valeurs de K_I est très petite. Alors, Les résultats obtenus sont donc très satisfaisants.

Dans la figure 3.25 on peut voir les développements des contraintes et des déformations pour chaque propagation.

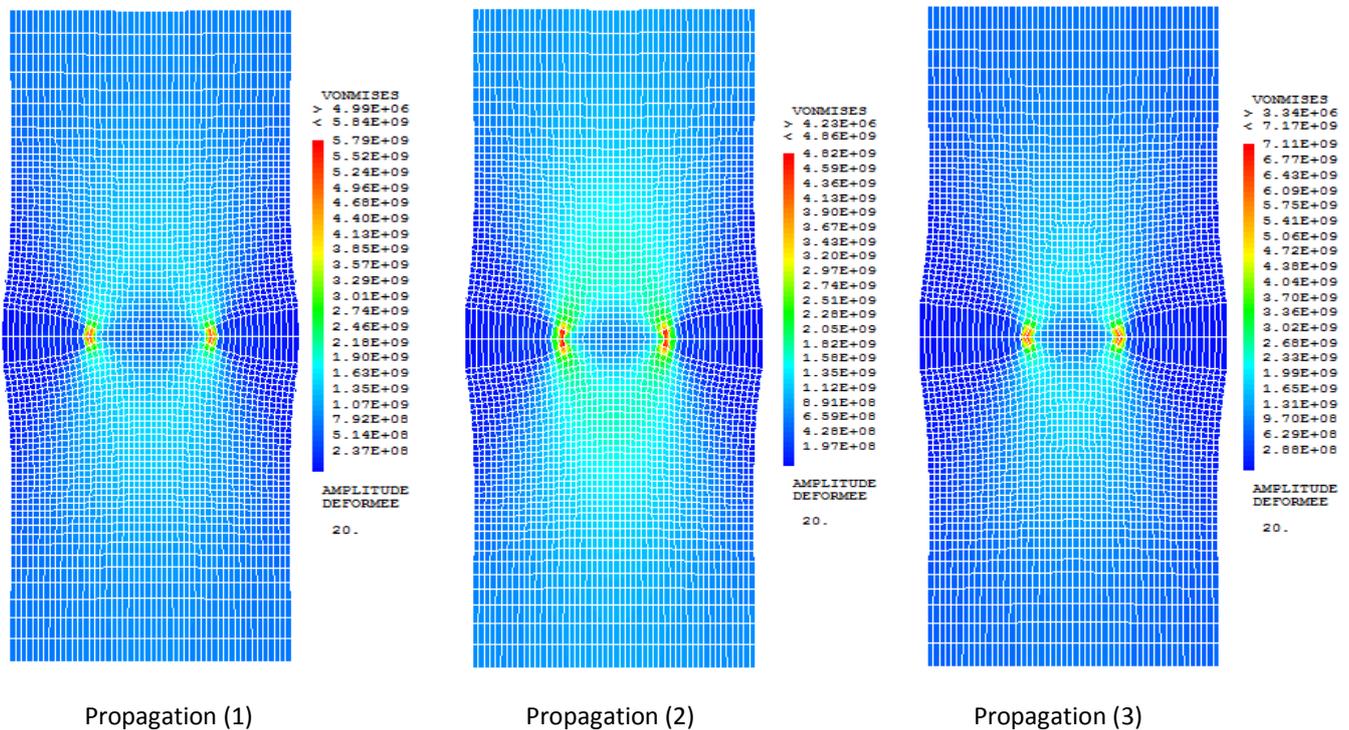


Fig.3.25. les contraintes dans la plaque pour chaque propagation.

3.6.3. ANALYSE NON-LINÉAIRE D'UNE ÉPROUVETTE EN BÉTON MULTI-FISSURÉE (2D)

Dans le matériau béton une zone de microfissuration (FPZ) se développe devant la pointe de la fissure et cette zone a une grande influence sur le comportement de ce matériau, et dans ce cas l'analyse élastique linéaire devient insuffisante. La mécanique non-linéaire de la rupture tient compte de cette zone plastique lors de l'étude de la stabilité de la fissure.

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthode X-FEM pour les analyses non-linéaires, nous mettons en œuvre un modèle d'endommagement isotrope microplan pour simuler par la méthode X-FEM la rupture de la même éprouvette bi-entallée étudiée dans l'exemple du chapitre précédant (Fig.3.26). Mais cette fois ci avec les paramètres suivants :

$$E= 31 \text{ GPa}, \nu=0.2, f_t =3.0 \text{ MPa}, G_f=50 \text{ N/m}.$$

On localise deux fissures, la longueur de la fissure égale à 0.005 m (Fig.3.27).

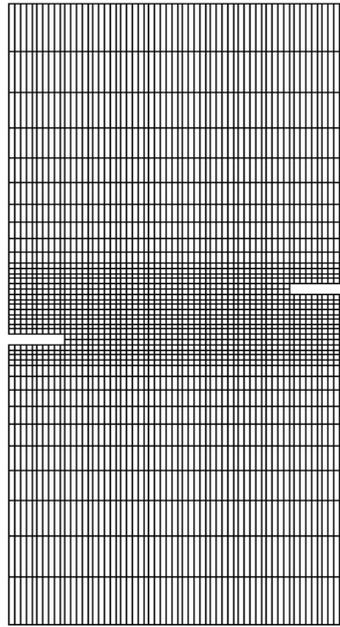


Fig.3.26. Maillage de l'éprouvette.

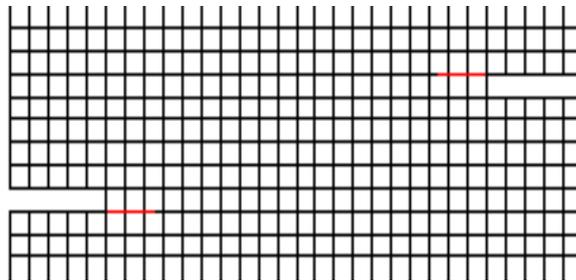


Fig.3.27. Localisation des fissures.

Dix propagations de la fissure sont calculées, Et les deux fissures avancent toujours de la même distance. Les réponses globales ce test sont présentés dans la figure 3.28.

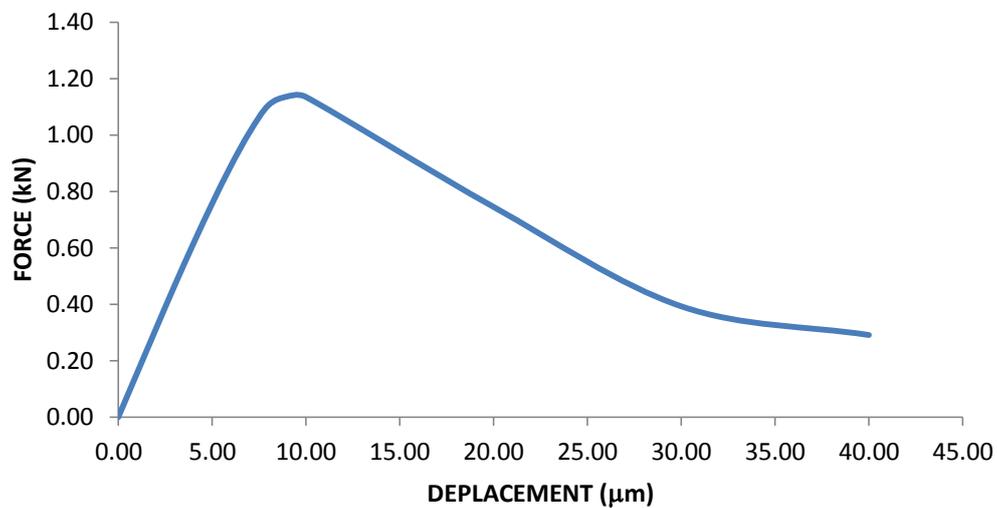


Fig.3.28. Réponse globale de l'éprouvette bi-entallée.

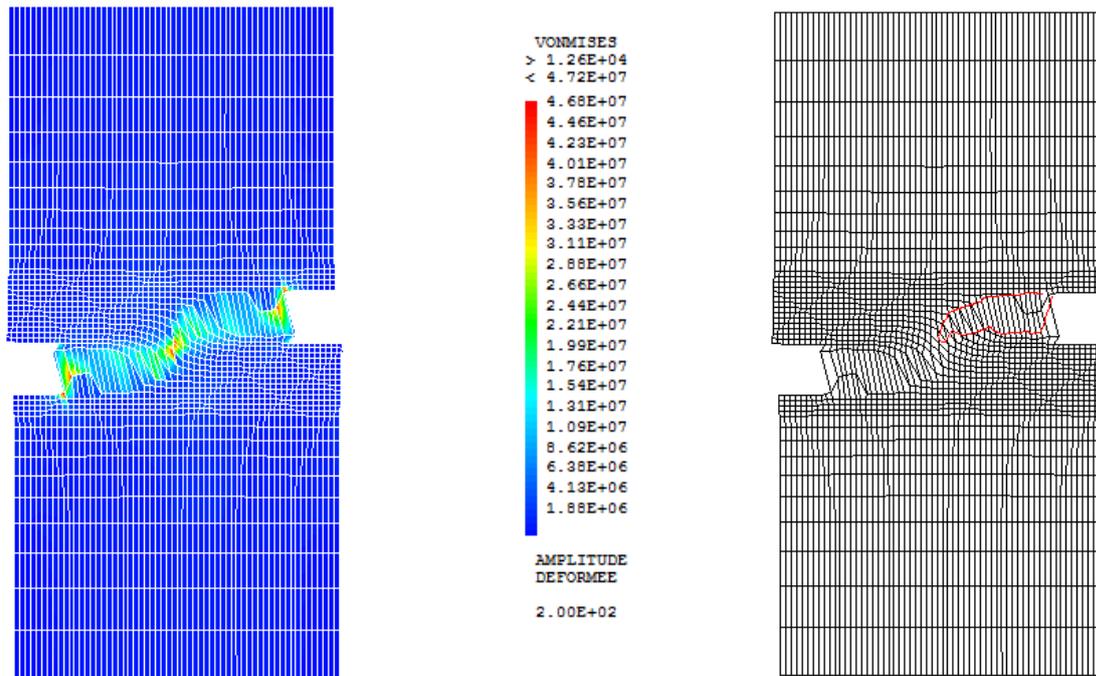


Fig.3.29. Développement des contraintes dans l'éprouvette.

On peut voir que l'utilisation de la méthode X-FEM avec un modèle non-linéaire d'endommagement pour refléter le comportement réel du matériau béton donne des bons résultats. Sur la courbe de la réponse globale (Fig.3.28), cette approche décrit bien le comportement adoucissant de ce matériau.

Dans ce type de test l'expérience montre que les fissures se propagent et se coalisent à certain niveau de chargement et la figure 3.29 montre la capacité de la méthode X-FEM à décrire avec fiabilité le trajet des fissures.

3.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, une présentation de la méthode des éléments finis étendue X-FEM est décrite. En se basant sur cette méthode, la discontinuité est incorporée au sein des éléments au lieu de construire le maillage conforme à la géométrie de la discontinuité. Les relations non linéaires décrivant le comportement entre les deux lèvres de la fissure cohésive ont été présentées dans une formulation X-FEM. La remarque la plus importante dans ce chapitre c'est que les modèles discontinus ne peuvent traiter que les structures pré-fissurées, et l'initiation de fissuration dans ce cas est une tâche très difficile pour ce type de modèles. Alors, dans le chapitre suivant on va utiliser cette méthode pour décrire la phase finale de la rupture (La propagation des fissures).

PASSAGE CONTINUE- DISCONTINUE (OUVFISS/XFEM)

4

Dans ce chapitre, on va présenter une approche mixte continue/discontinue : OUVFISS-XFEM pour modéliser les différentes phases de processus de fissuration dans le matériau béton : initiation de fissures par l'approche continue OUVFISS et propagation explicite de ces dernières par la méthode des éléments finis étendue (X-FEM).

Les résultats de simulation numériques sont confrontés à ceux issus de l'expérimentation

4.1. L'AVANTAGE DU PASSAGE CONTINUE/DISCONTINUE

Les approches continues présentent une continuité des champs de déplacement et de déformation alors que les fissures sont des discontinuités géométriques. Mais cette approche a une grande fiabilité pour prédire les zones où les microfissures sont concentrées (la première phase de processus de fissuration), c.-à-d. l'initiation de ces fissures.

A l'heure Actuelle, les approches discontinues utilisant la méthode XFEM, peuvent traiter seulement les problèmes où il y a des structures pré-fissurées (la deuxième phase de processus de fissuration). Il y a des difficultés pour initier les fissures.

Afin de décrire correctement le processus de fissuration, un passage continue-discontinue est proposé, il consiste à combiner les deux approches précédentes pour profiter des avantages des deux. L'initiation est alors décrite par la méthode OUVFISS utilisant un modèle d'endommagement microplan isotrope, qui nous permet de localiser le lieu où les discontinuités géométriques (les fissures) naissent.

Ensuite, on peut utiliser la méthode XFEM avec le même modèle d'endommagement pour décrire la propagation de la fissure d'une manière explicite. En utilisant l'intégrale-J on peut calculer les valeurs de facteur d'intensité de contraintes K et on le comparons avec la valeur critique K_c (la ténacité de béton), alors on a une propagation de fissure si :

$$\begin{cases} K_I > K_{Ic} & \text{pour un chargement en mode I} \\ K_{eq} > K_c & \text{pour un chargement en mode mixte I et II} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$K_{eq} = \frac{4\sqrt{2} K_{II}^3 (K_I + 3\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2})}{(K_I^2 + 12K_{II}^2 - K_I\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2})^{\frac{3}{2}}} \quad (4.2)$$

La méthode XFEM avec ce critère nous permet de modéliser le processus de fissurations jusqu'à la ruine des structures.

4.2. EXEMPLES D'APPLICATIONS

Afin de présenter ce passage continue/discontinue, deux exemples sont proposés. L'un est celui d'une simple éprouvette bi-entallée soumise a un chargement de traction, mais avec deux configuration selon la distance entre les axes des entailles. Le deuxième est celui d'une pièce en L. Ces deux exemples seront traités avec le code de calcul éléments finis CAST3M, dans lequel une

méthode XFEM en 2D permettant de traiter la non-linéarité efficacement a été introduite à partir des travaux de thèse de Benoit Prabel [19].

4.2.1. Exemple de traction. Éprouvettes bi-entaillées

Type (1) :

Le cas étudié est une éprouvette bi-entaillée soumise à la traction, avec une distance nulle entre les entailles, la configuration et les dimensions sont présentées sur (Tab.4.1 et Fig.4.1.a).

Tab.4.1. Géométrie de l'éprouvette.

L (mm)	b (mm)	b_{ent} (mm)	h_{ent} (mm)	H (mm)	l'angle initial de la fissure (θ)	Δa (mm)
120.0	60.0	10.0	2.0	60.0	0.0	2.0

Le modèle utilisé : MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MICROISO, pour l'analyse non linéaire (OUVFISS et XFEM).

Avec les paramètres suivants :

$$E= 31 \text{ GPa}, \nu=0.2, f_t =3.0 \text{ MPa}, G_f=50 \text{ N/m}.$$

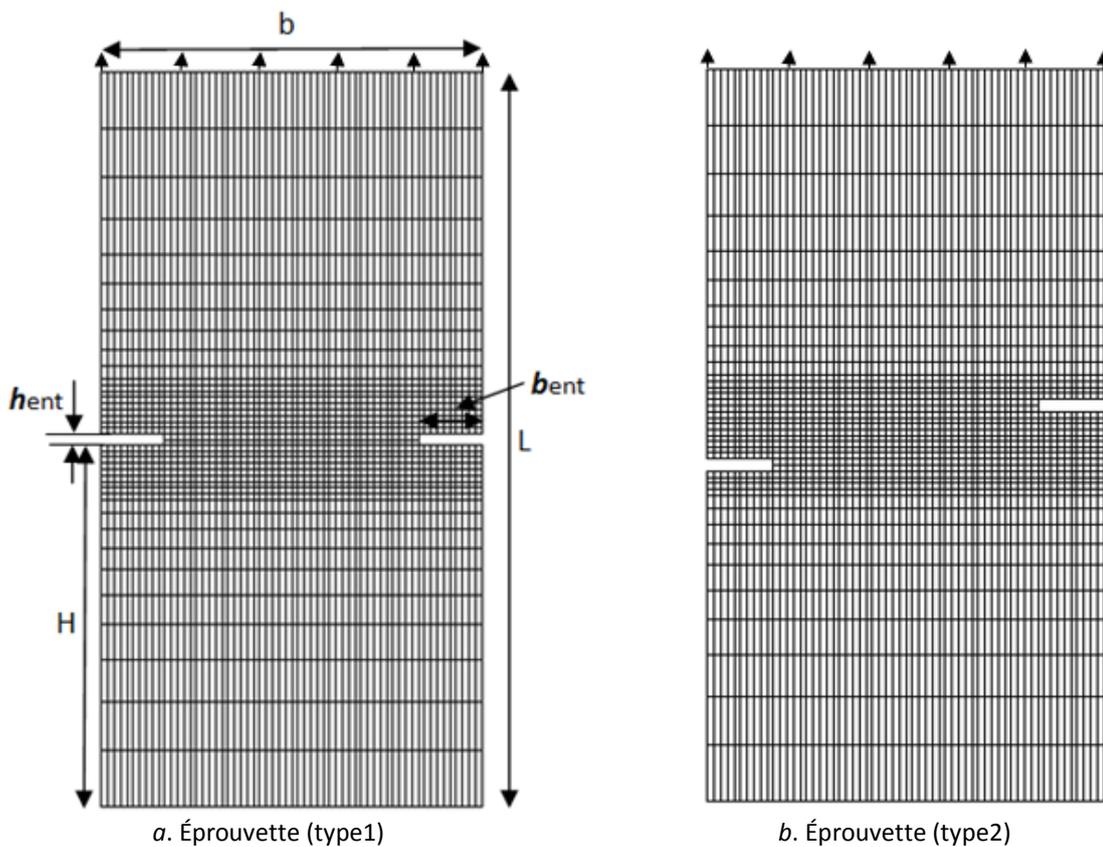


Fig.4.1. les types d'éprouvette testés.

Type (2) :

Pour ce test on utilise la même éprouvette mais cette fois avec une distance entre les axes des entailles : $d_{ent}=10$ mm. (La distance entre l'axe de l'éprouvette et l'axe de l'entaille est de 5mm) voir Fig.4.1.b.

a. La première phase : initiation de fissuration par la procédure OUVFISS

Par la méthode OUVFISS on peut déterminer les zones les plus endommagées (Fig.4.2).

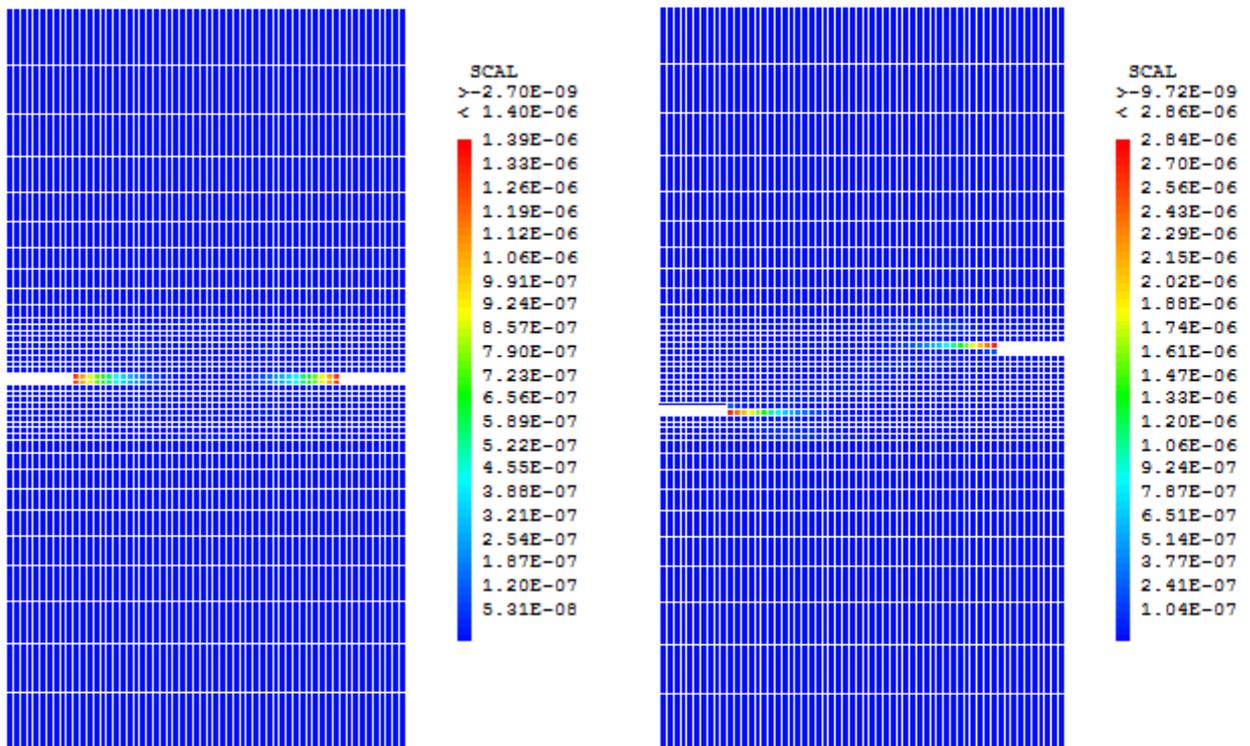


Fig.4.2. Ouvertures des fissures des éprouvettes par OUVFISS.

Après l'analyse OUVFISS, on peut localiser deux fissures, la longueur de chaque fissure est égale à 0.005 m dans les deux cas (Fig.4.3).

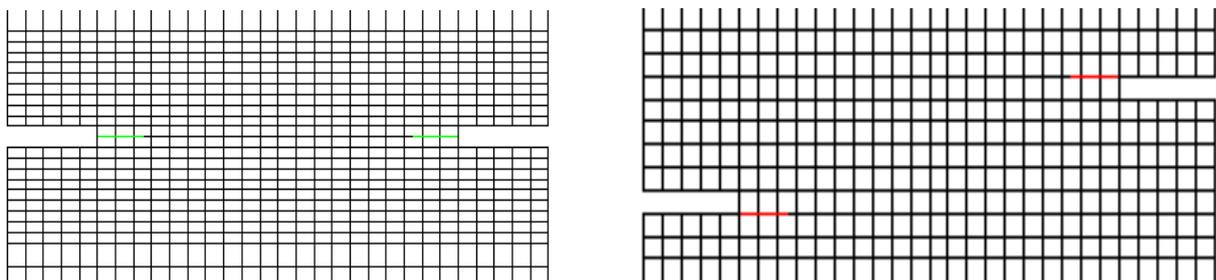


Fig.4.3. Localisation des fissures.

b. La deuxième phase : propagation de fissuration par la méthode XFEM

Par le même modèle non-linéaire utilisé pour l'analyse OUVFISS, on va faire une analyse X-FEM.

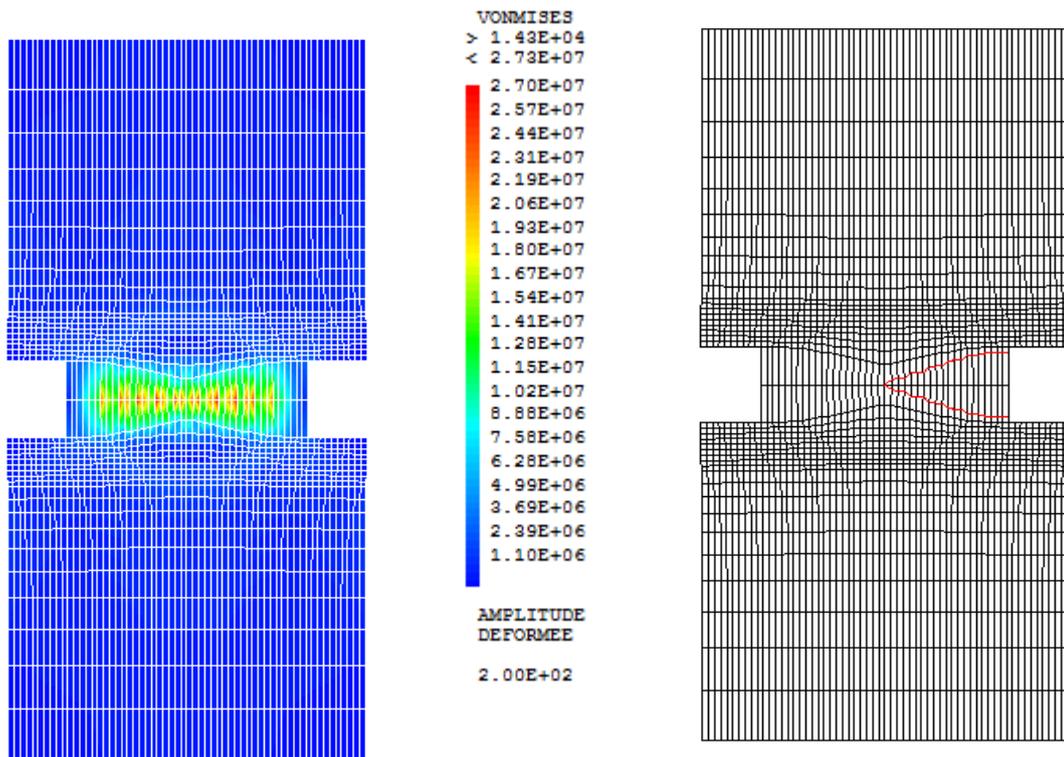


Fig.4.4. Développement des contraintes dans l'éprouvette symétrique.

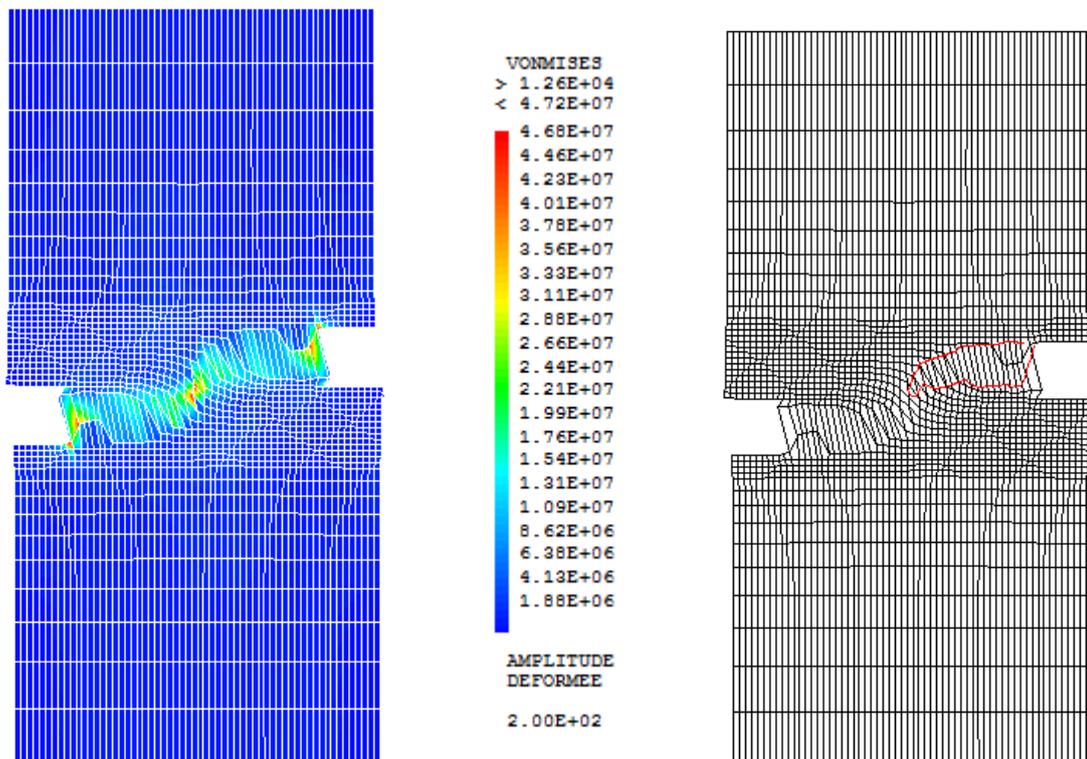


Fig.4.5. Développement des contraintes dans l'éprouvette avec entailles décalées.

Les réponses globales et les réponses "force – ouverture de la fissure" pour les deux tests sont présentées sur les figures suivantes (l'ouverture de la fissure est égale la somme de déplacement de chaque lèvres de la fissure Fig.4.6) :

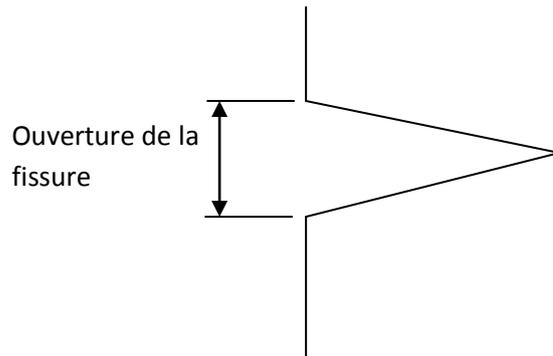


Fig.4.6. Détermination de l'ouverture de la fissure.

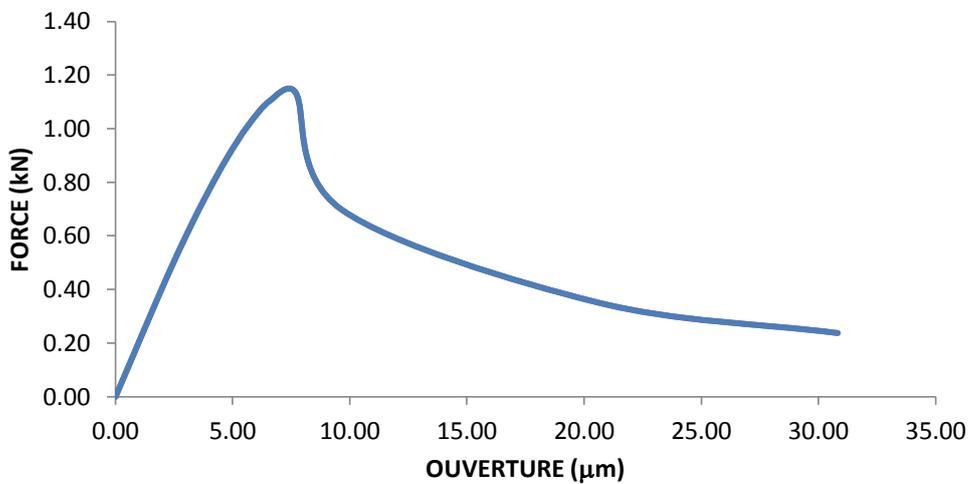


Fig.4.7. Courbe Force-ouverture de l'éprouvette bi-entailée (type 2).

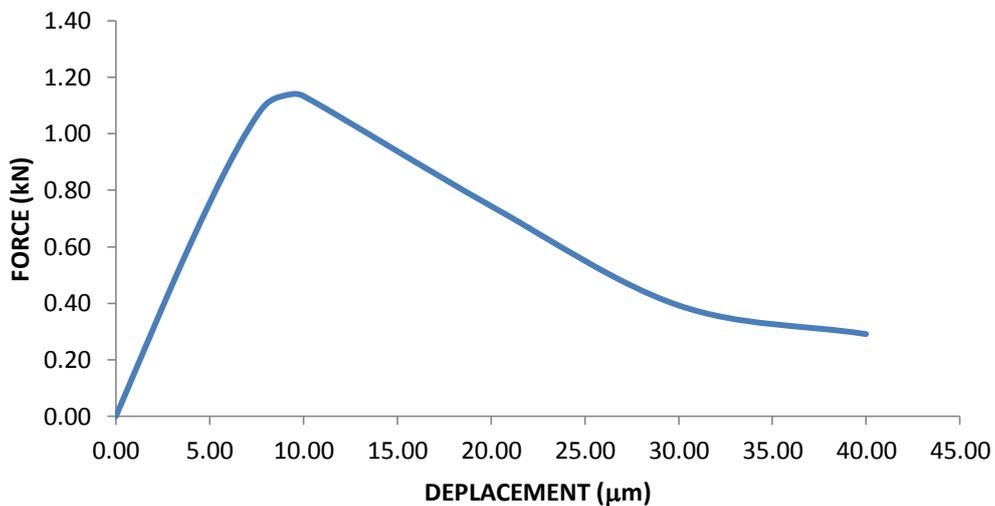


Fig.4.8. Réponse globale de l'éprouvette bi-entailée (type 2).

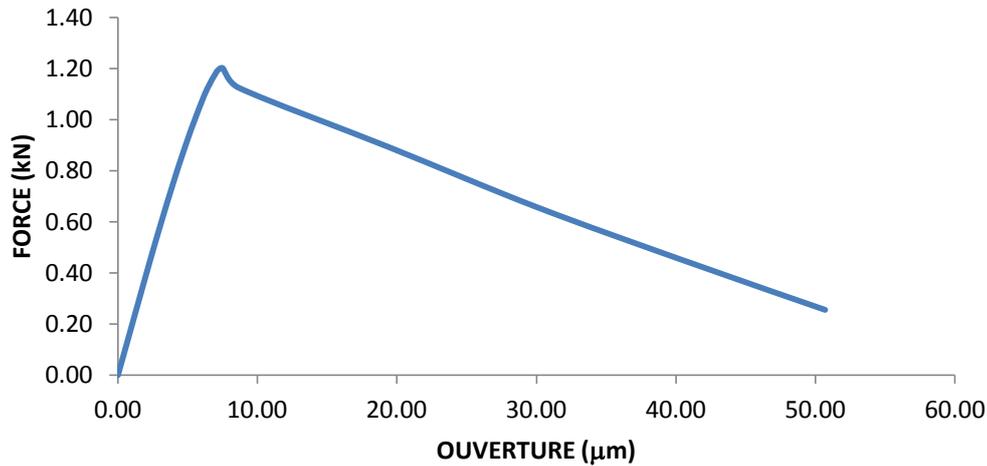


Fig.4.9. Courbe Force-ouverture de l'éprouvette bi-entaillée (type 1).

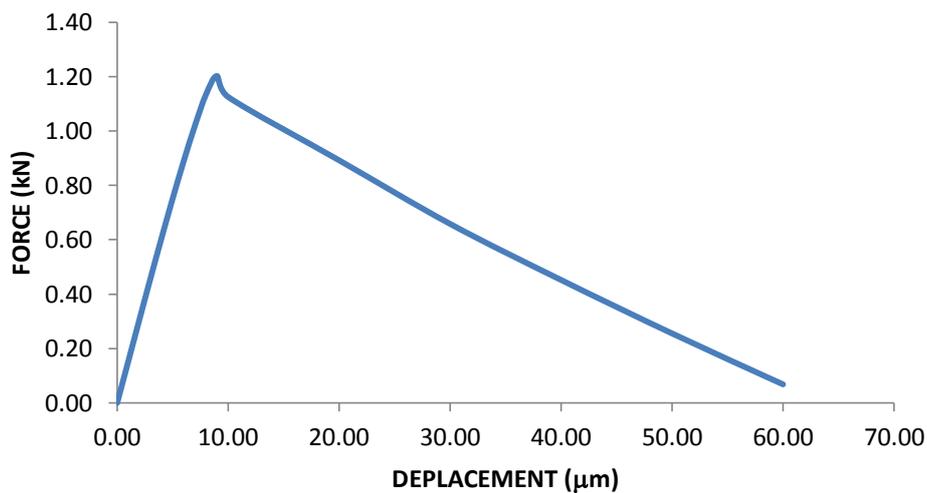


Fig.4.10. Réponse globale de l'éprouvette bi-entaillée (type 1).

On peut voir que l'approche continue/discontinue utilisée pour décrire le comportement réel du matériau béton donne des résultats acceptables. Sur les courbes « force-ouverture de la fissure » des exemples précédents, cette approche décrit bien le comportement adoucissant de ce matériau (Fig.4.7 – Fig.4.10).

Dans les courbes de la réponse globale et force-ouverture, on peut remarquer que la relation entre la force et le déplacement est divisée en deux parties :

- Dans la première partie, le comportement est élastique linéaire jusqu'à un chargement maximale, le matériau ne peut pas aller au-delà de ce point.
- Dans la deuxième partie, le déplacement (ou bien l'ouverture de la fissure) continue à augmenter et la charge commence à diminuer jusqu'à la rupture de l'échantillon.

4.2.2. PIÈCE EN L

Ici, nous proposons de montrer la capacité de l'approche (OUVFISS-XFEM) à prédire le trajet de fissuration dans une configuration plus complexe. On considère la pièce en L présentée dans la figure 4.11.

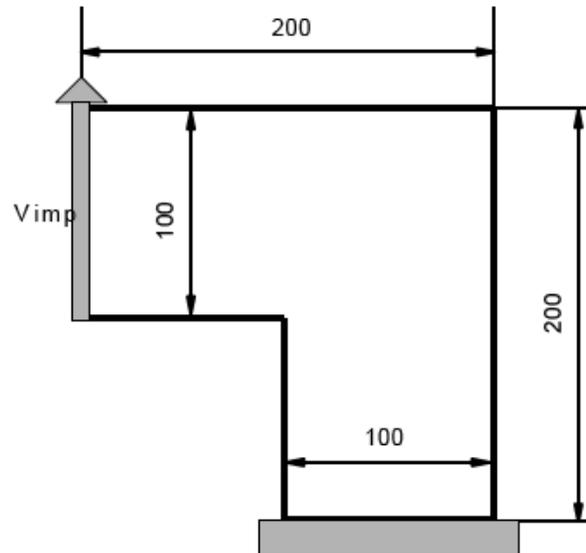


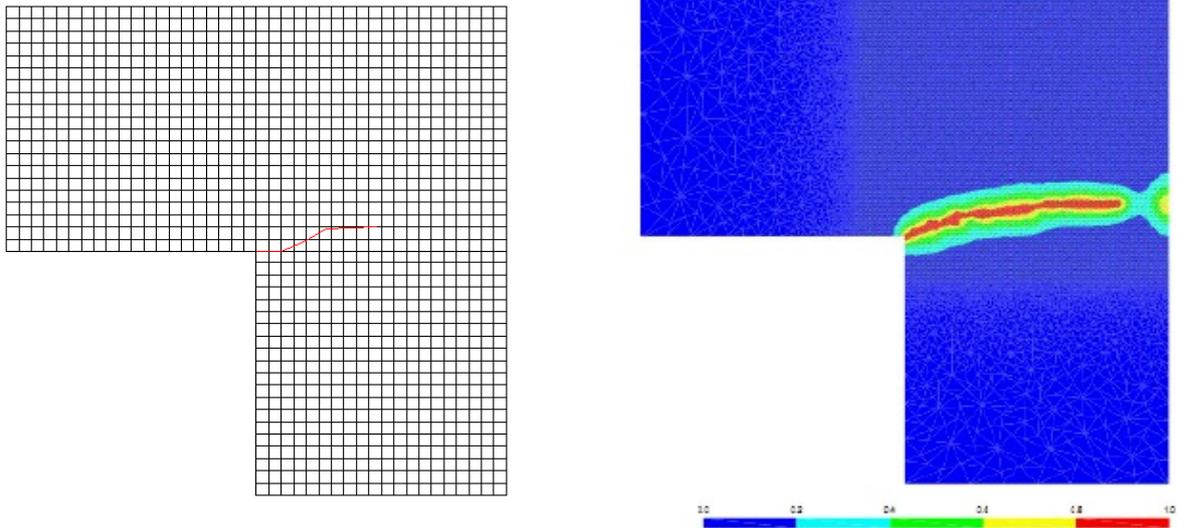
Fig.4.11. Les dimensions en millimètres et les conditions aux limites de la pièce en L [86].

On cherche ici à simuler numériquement les essais menés par Lorentz [86]. Comme le montre la figure 4.11, cette configuration permet de propager la rupture en mode mixte. Les propriétés de matériau utilisées sont présentées dans le tableau suivant :

Tab.4.2. Paramètres représentatifs d'un matériau de type béton pour la pièce en L.

f_c	La résistance de compression	45 MPa
f_t	La résistance de traction	3.0 MPa
E	Module de Young	$30 \cdot 10^3$ MPa
ν	Coefficient de poisson	0.2
G_f	Énergie de rupture	100 N/m

Avec la méthode OUVFISS, on initie la fissure. Nous choisissons un incrément de $\Delta a = 0.015$ m. on obtient le même trajet de fissuration que celui obtenue par Lorentz [86] présenté dans la figure 4.12.



a)- trajet de la fissuration par l'approche OUVFISS/XFEM b)- champ d'endommagement selon Lorentz [86]

Fig.4.12. Trajet de la fissuration.

On remarque également la zone de compression à droite de la structure Fig.4.13 qui est conforme au résultat expérimental.

Sur la même éprouvette en L, nous nous intéressons aux résultats d'Unger et Meshke et al. [87, 88] qui donnent quelques résultats expérimentaux et numériques par la méthode XFEM et un modèle cohésif. La Figure 4.14 montre que notre résultat se trouve à l'intérieur du fuseau des courbes expérimentales. La prédiction du trajet de fissuration par le passage OUVFISS/XFEM est donc acceptable.

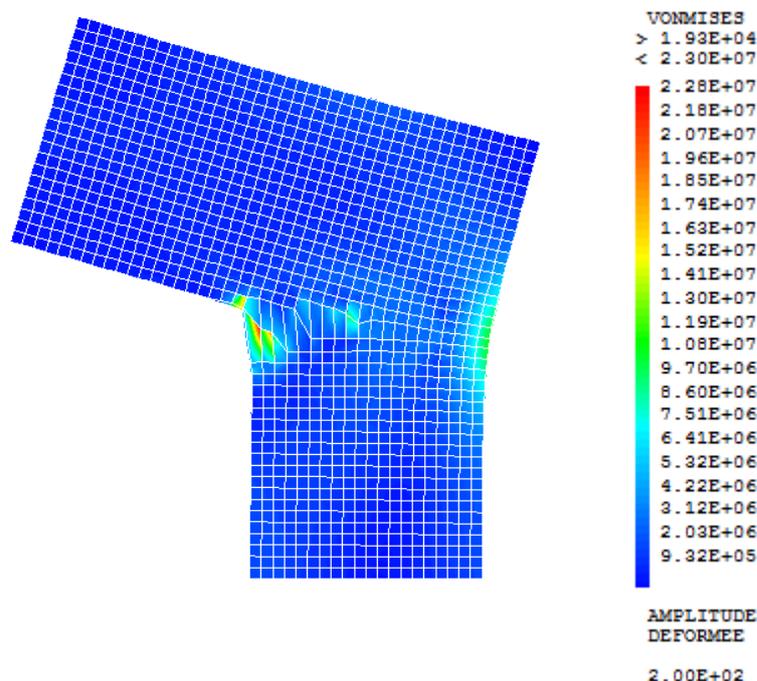


Fig.4.13. Champ de contrainte de la pièce étudiée.

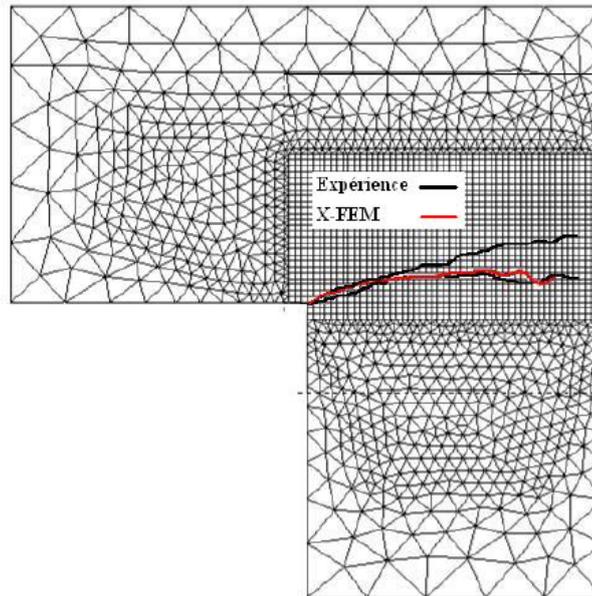


Fig.4.14. Trajet de fissuration selon Unger et Meshke et al.[87.88].

4.3. L'EFFET D'ÉCHELLE DANS LES STRUCTURES EN BÉTON

Souvent la connaissance des caractéristiques du béton se fait au niveau des essais de laboratoire sur des éprouvettes de tailles relativement faibles par rapport aux tailles réelles. Or il se trouve que certaines caractéristiques mécaniques des structures en béton changent quand les tailles de ces structures changent (ex : La contrainte nominale maximale). C'est "l'effet d'échelle".

La contrainte nominale maximale d'une structure en béton est la contrainte maximale dans cette structure calculée en supposant un comportement élastique linéaire. Elle est évaluée à partir de la charge maximale pouvant être supportée par la structure (le pic de la réponse globale pour une analyse non-linéaire).

L'effet d'échelle est mis en évidence par divers types de sollicitations sur des éprouvettes et des structures en béton, que ce soit sous sollicitations uniaxiales ou sous sollicitations multiaxiales (Bazant et Ozbolt [3]; Pijaudier-Cabot et Saouridis [42]).

Lors d'essais uniaxiaux sur des éprouvettes en béton, il apparaît que la contrainte maximale supportée diminue quand la taille de l'éprouvette augmente (Vonk [85]). Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont uniformes dans toutes les éprouvettes, est aussi appelé effet de volume.

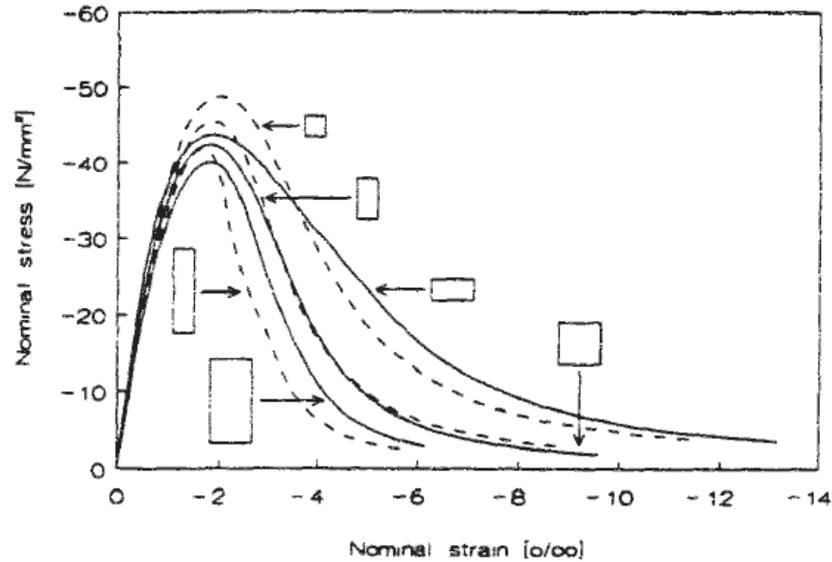


Fig.4.15. Réponse contraintes (N/mm^2)- Déformation (%) en compression pour des différentes géométries Vonk.[85].

L'effet d'échelle peut être expliqué de la façon suivante. Le béton n'est pas un matériau parfaitement homogène. En effet, à l'échelle des granulats, l'hétérogénéité du matériau se manifeste par la présence de micro-défauts, de microfissures et de micro-vides d'orientations quelconques. Sous l'effet d'un chargement, les déformations se localisent rapidement dans les zones où il y a ces défauts. Plus les dimensions d'une structure sont grandes, plus il est probable d'avoir la présence d'une importante proportion de défauts (Fig.4.16).

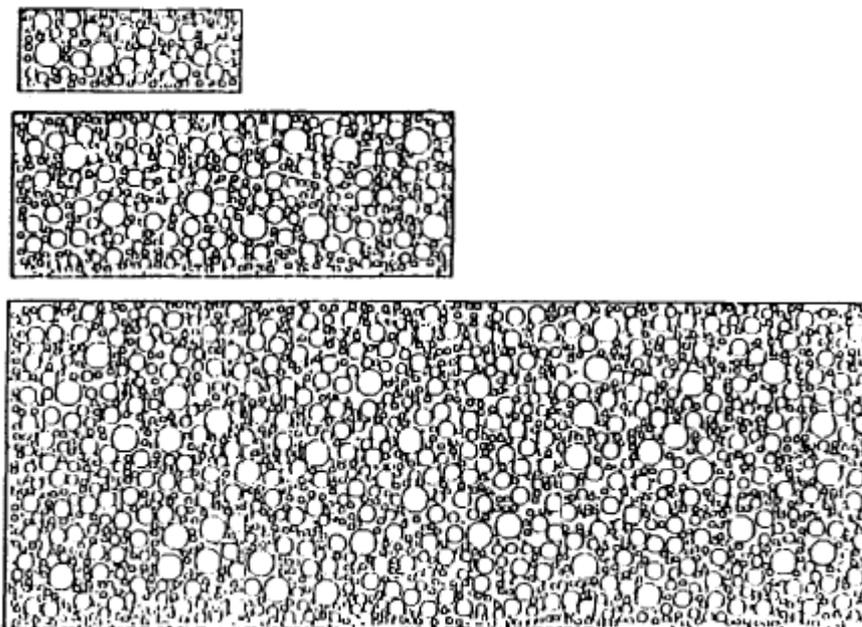


Fig.4.16. L'hétérogénéité et l'effet d'échelle [89].

Alors, on peut dire que la dimension relative entre les zones de microfissuration (FPZ) et la taille de la structure peut certainement expliquer cette propriété.

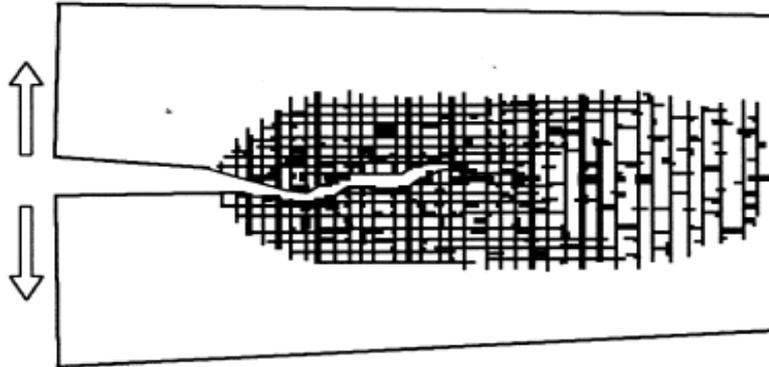


Fig.4.17. Le volume de la FPZ par rapport au volume de la structure.

Le problème d'effet d'échelle le plus complexe est posé pour les matériaux quasi-fragiles comme le béton. On ne peut pas voir l'influence de ce phénomène utilisant des modèles d'endommagement local classiques et alors l'utilisation d'autres modèles (modèles non-locaux, modèles cohésifs) devient nécessaire.

Notre objectif maintenant, est de mettre en évidence la capacité prédictive prévisionnelle de cette propriété par l'approche continue/discontinue décrite dans ce chapitre.

4.3.1. Exemple de la flexion. Calculs de structures initialement non fissurées

Dans le béton, le processus de microfissuration commence dans la plupart des cas à partir d'une surface initialement non fissurée et évolue sur toute l'épaisseur de la structure jusqu'à la rupture complète. Dans ce cas la méthode OUVFISS, quand elle est appliquée au béton, doit être capable de prédire l'initiation et la formation de l'endommagement dans des structures initialement non fissurées.

Un test de flexion sur trois poutres de dimensions différentes sans entailles est présenté. Le modèle utilisé est un modèle d'endommagement microiso (microplan isotrope). L'analyse est effectuée en calculs bidimensionnels et en contraintes planes avec une épaisseur $e_p = 100$ mm.

Ces trois poutres sont testées expérimentalement par ALAM YASIR [84]. La figure 4.18 présente la géométrie des poutres avec les conditions de sollicitations utilisées pour le calcul (les chargements se font à déplacements imposés). Contrairement aux essais de ALAM YASIR, nos poutres sont non entailées afin de tester l'efficacité de la méthode OUVFISS à initier la fissure.

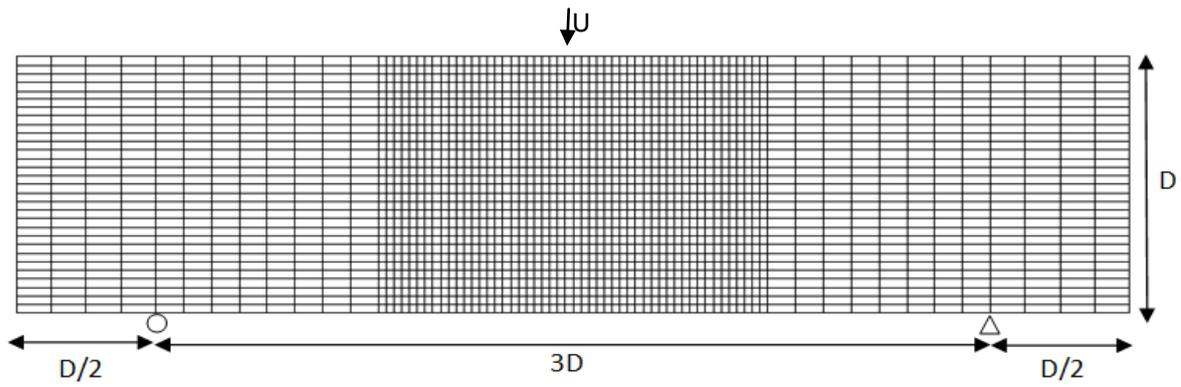


Fig.4.18. Géométrie de la poutre étudiée.

Tab.4.3. L' hauteur de la poutre : petite, moyenne, grande.

La poutre	D (mm)
Petite	100
Moyenne	200
Grande	400

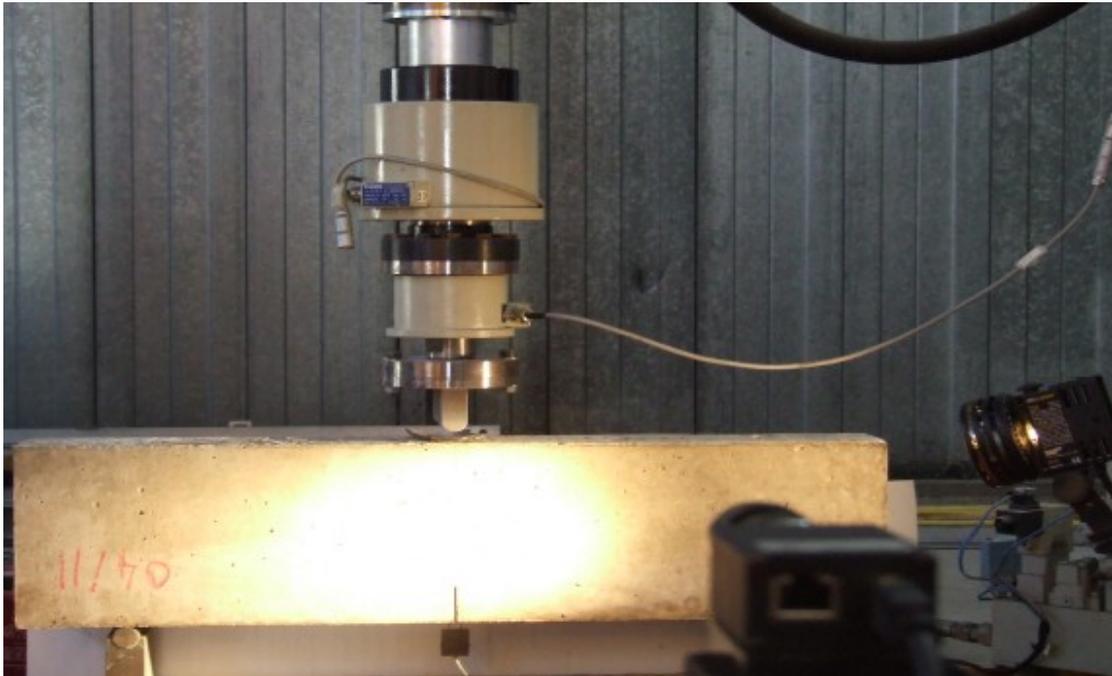


Fig.4.19. Photo de l'essai de flexion trois points Yassir Alam [84].

Les caractéristiques mécaniques du matériau utilisées sont :

Tab.4.4. Paramètres représentatifs d'un matériau de type béton.

f_c	La résistance de compression	45 MPa
f_t	La résistance de traction	3.5 MPa
E	Module de Young	38.10^3 MPa
ν	Coefficient de poisson	0.25
G_f	Énergie de rupture	80 N/m

a. La première phase : initiation de fissuration par la méthode OUVFISS

On établit dans un premier temps une analyse statique non-linéaire utilisant le modèle d'endommagement microiso, ensuite avec la procédure OUVFISS on va localiser le chemin des premières ouvertures sur lequel l'endommagement est total.

La partie centrale de la poutre pour les trois cas doit être suffisamment raffinée tandis que les autres zones situées suffisamment loin de la *process zone*, peuvent être décrites avec une discrétisation plus grossière.

Les trois figures (4.20, 4.21 et 4.22) représentent les ouvertures des fissures au pic de chargement des trois poutres respectivement

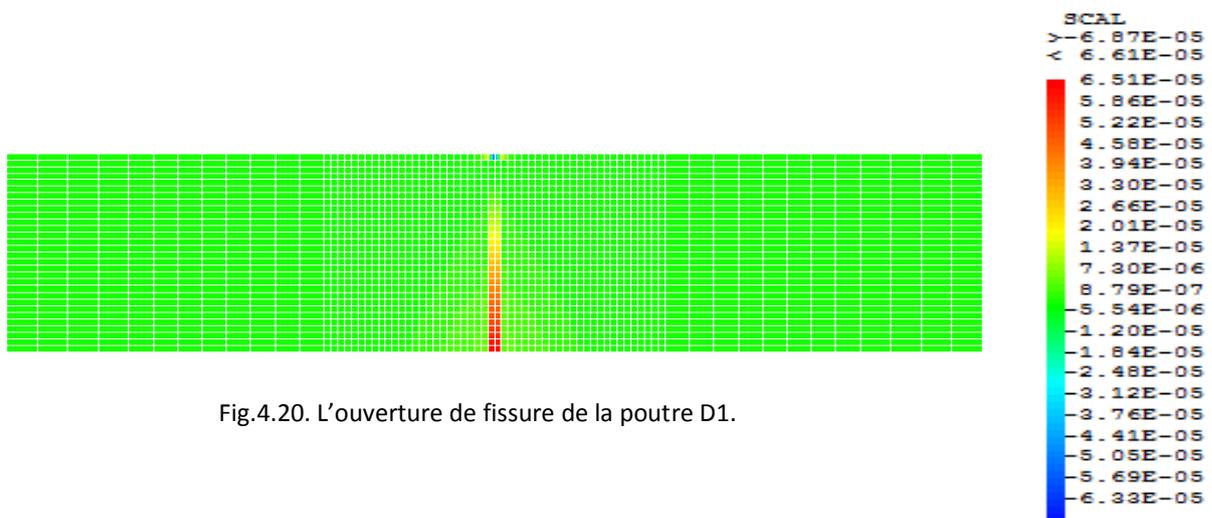


Fig.4.20. L'ouverture de fissure de la poutre D1.

Après l'utilisation de la procédure OUVFISS, on peut localiser des fissures (travail de post-traitement), la longueur de la fissure était dans les trois cas égale au cinquième de la hauteur D de la poutre.

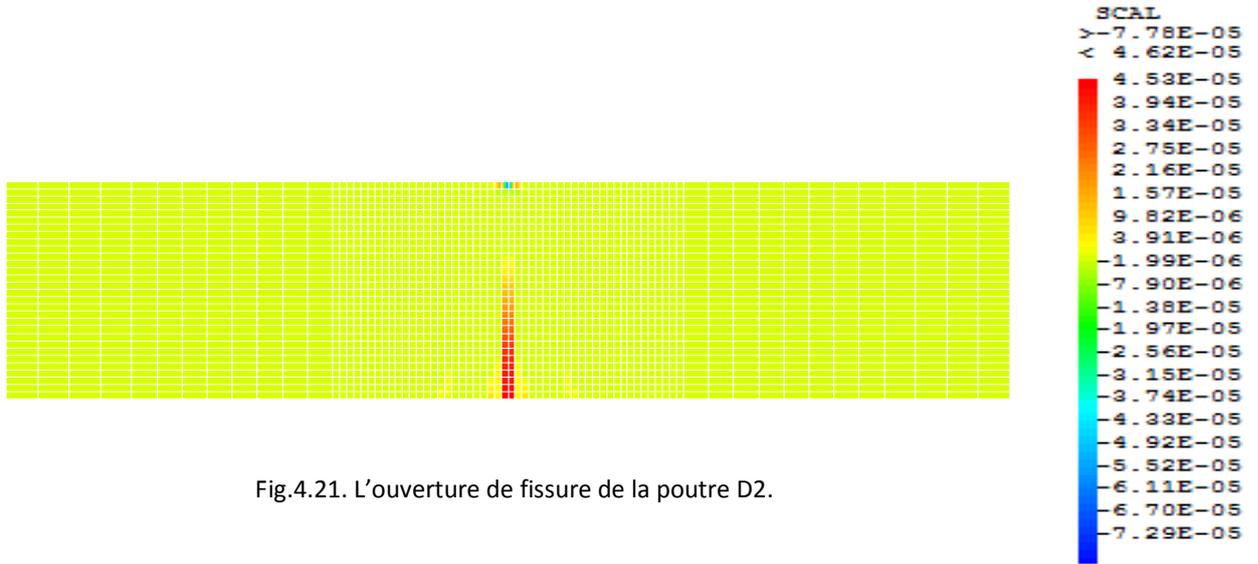


Fig.4.21. L'ouverture de fissure de la poutre D2.

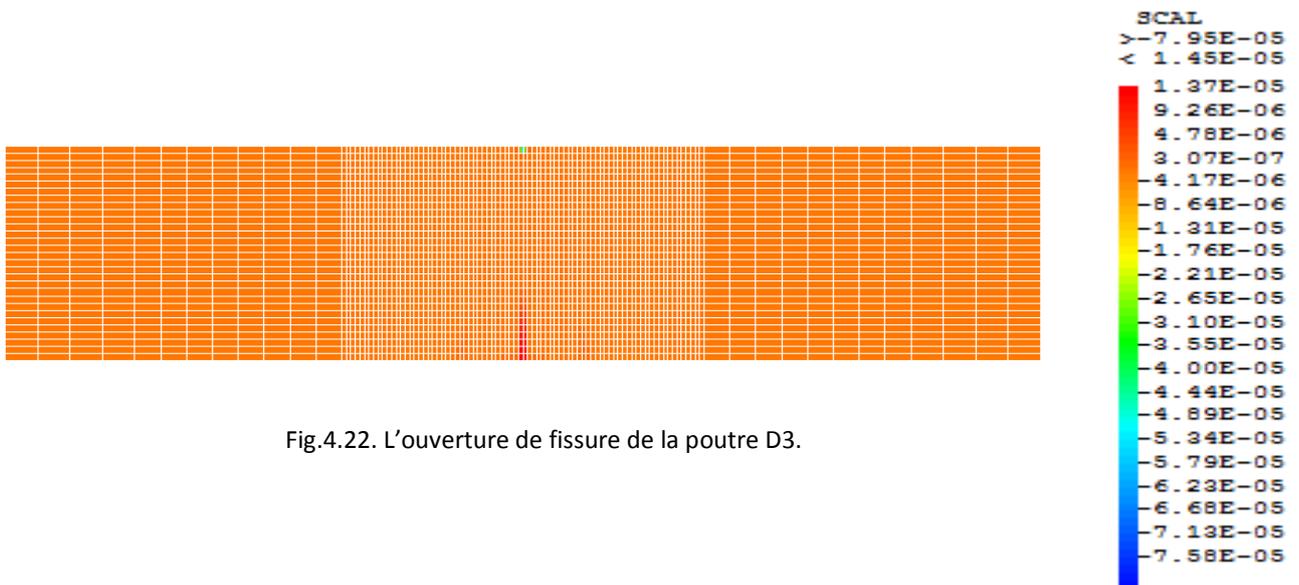


Fig.4.22. L'ouverture de fissure de la poutre D3.

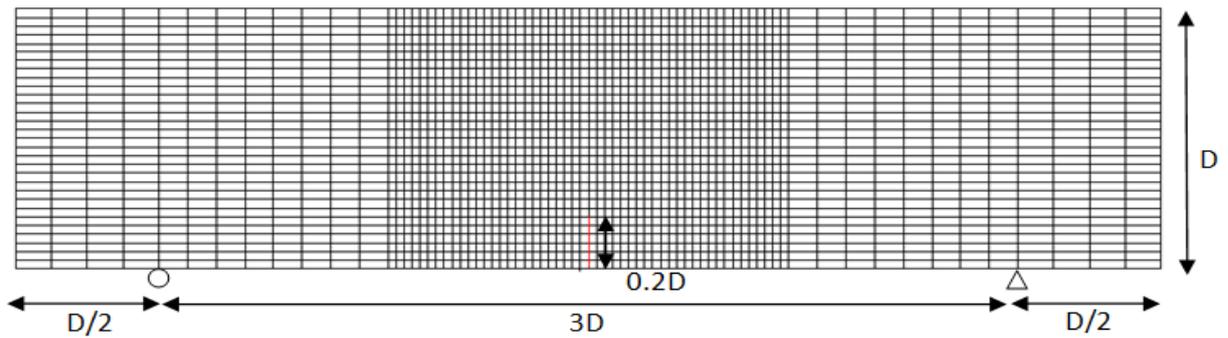


Fig.4.23. Localisation de la fissure.

b. La deuxième phase : propagation de fissuration par la méthode XFEM

Par le même modèle non-linéaire utilisé pour l'analyse OUVFISS, on fait une analyse XFEM sur les trois poutres fissurées (Fig.4.23). Les réponses globales des trois tests sous forme de courbes "force-déplacement" sont superposées et présentées sur (Fig.4.24).

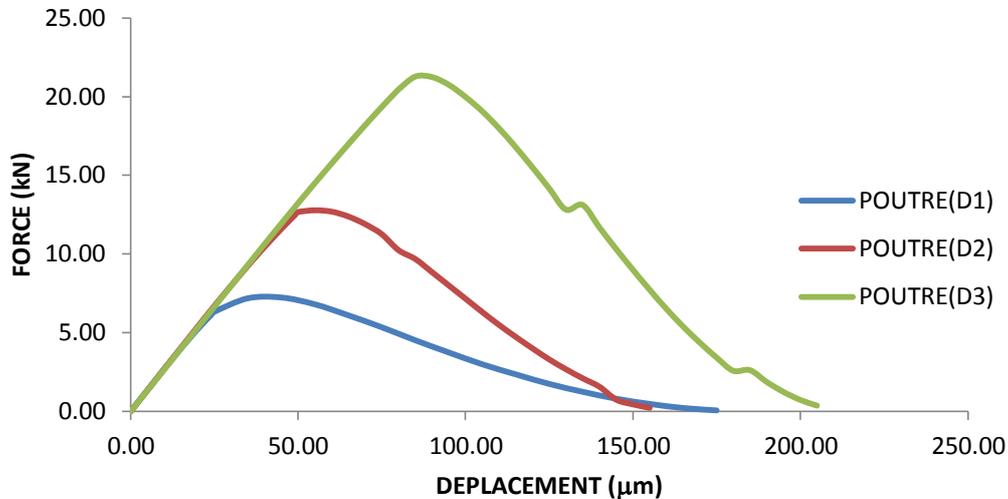


Fig.4.24. Réponses globales des trois poutres.

Pour les trois poutres étudiées chaque courbe de la réponse globale se décompose en trois parties : d'abord une partie croissante "élastique" correspondant aux premiers niveaux de chargement jusqu'à un pic de chargement ou le facteur d'intensité de contrainte K atteint sa valeur critique $K_c = 2 \cdot 10^5 Pa\sqrt{m}$, et dans ce cas la fissure se propage. Au delà de cette partie la résistance des poutres diminue pour chaque incrément de déplacement pour former une partie décroissante (adoucissante) jusqu'à la rupture totale.

Les trois réponses globales "force – ouverture de la fissure" pour les trois poutres sont superposées avec les résultats expérimentaux de Yassir Alam [84] comme suit :

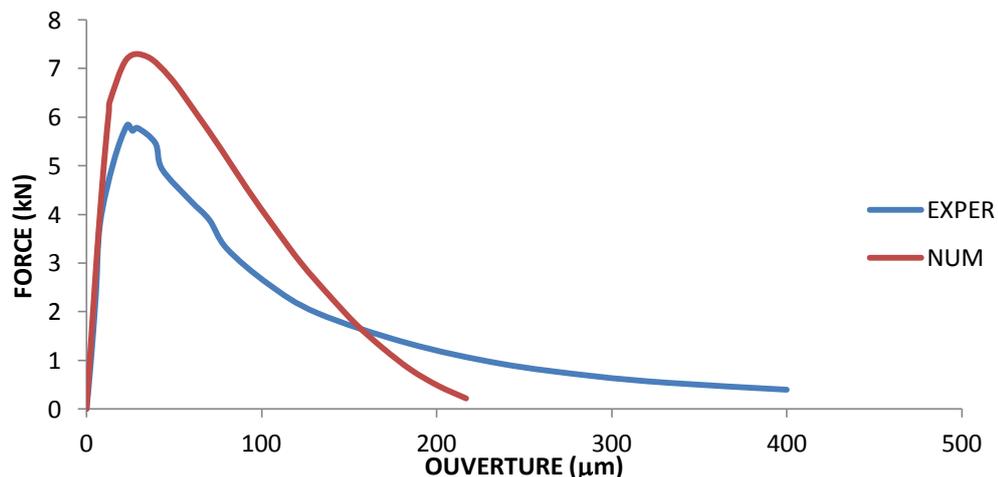


Fig.4.25. Courbes FORCE-OUVERTURE de la poutre D1.

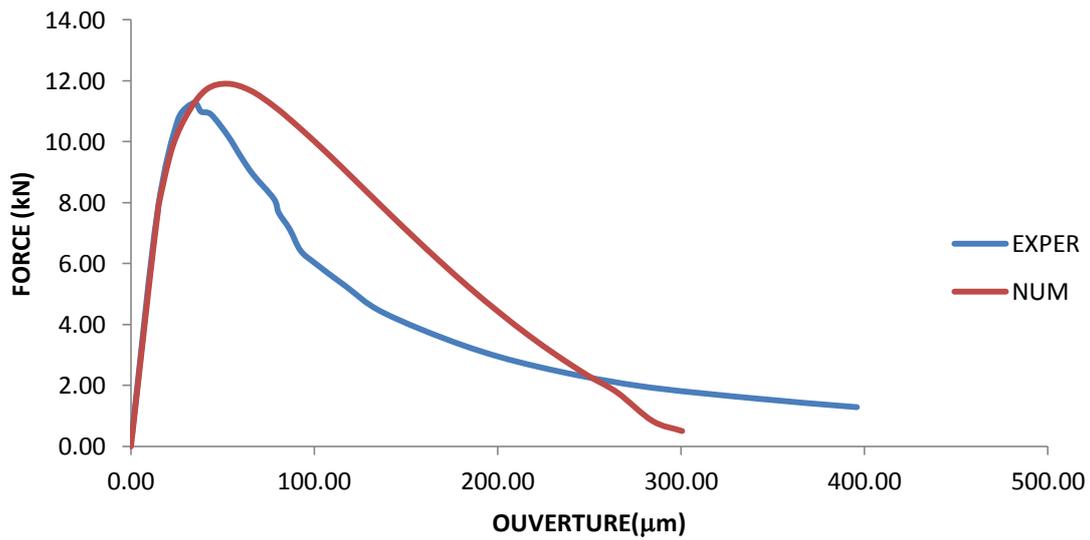


Fig.4.26. Courbes FORCE-OUVERTURE de la poutre D2.

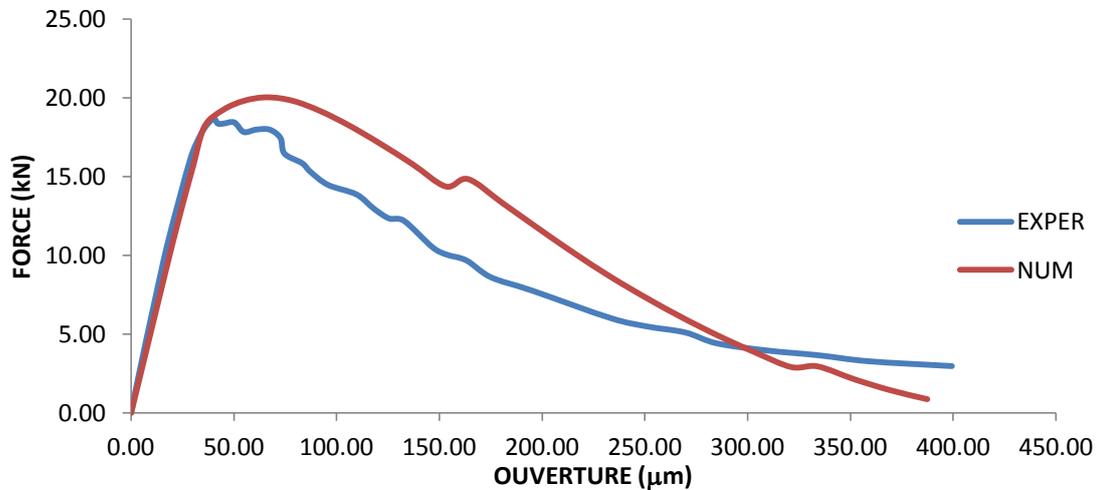


Fig.4.27. Courbes FORCE-OUVERTURE de la poutre D3.

Pour les trois poutres un écart observé entre la courbe force-ouverture du calcul et celle de l'expérience d'environ 15% pour la poutre D1 au pic, qui diminue significativement pour les poutres D2 et D3. L'ouverture des fissures sont évaluées par la méthode XFEM, et elles sont représentées respectivement dans les figures 4.28 - 4.30 ci-dessous.

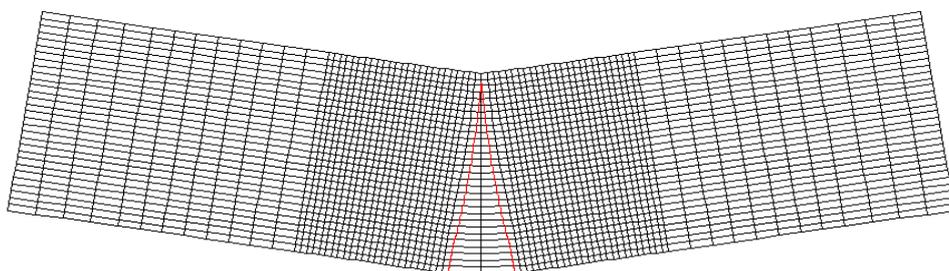


Fig.4.28. L'ouverture de la fissure dans la poutre D1.

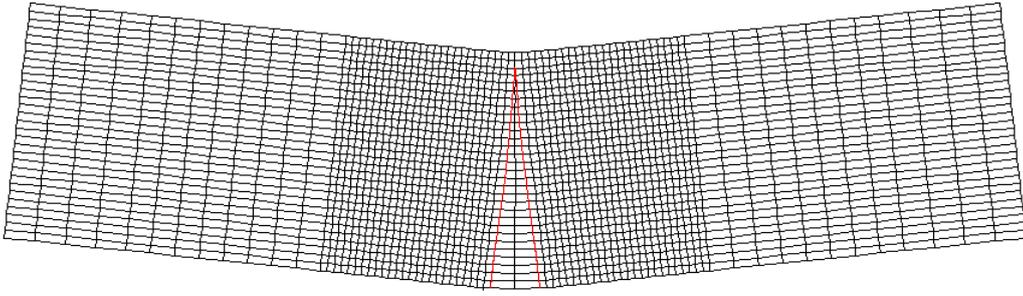


Fig.4.29. L'ouverture de la fissure dans la poutre D2.

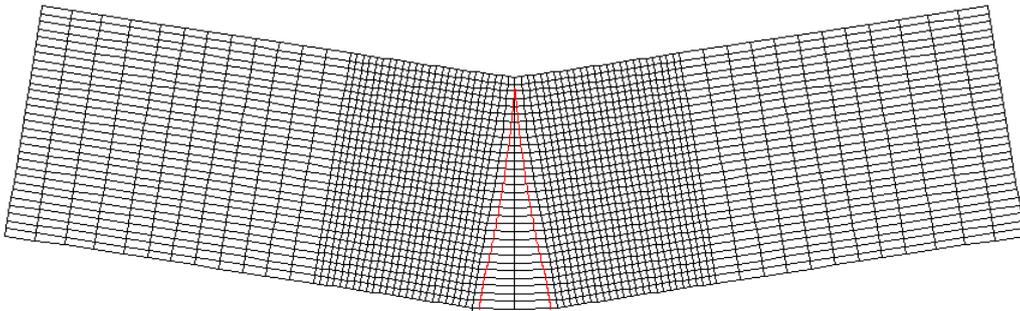


Fig.4.30. L'ouverture de la fissure dans la poutre D3.

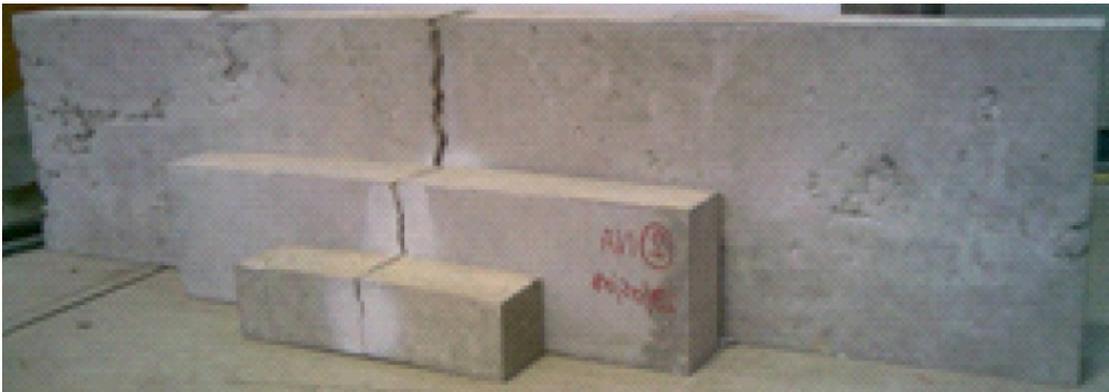


Fig.4.31. Photo des poutres après l'essai Yassir Alam [84].

On remarque pour les trois poutres que les fissures se propagent d'une manière rectiligne en mode I, c'est pour cela qu'on n'a pas besoin d'un critère d'orientation pour déterminer la direction de la propagation de ces fissures.

Pour voir l'effet d'échelle dans cet exemple, Les charges sont évaluées à partir de chaque calcul et la valeur de la contrainte nominale maximale est définie comme dans (Bazant et Ozbolt [3]), par l'expression :

$$\sigma_N = \frac{3 S}{2 b D^2} P \quad (4.3)$$

Avec : P est la charge appliquée, $S = 3D$ et b l'épaisseur de la poutre.

Les contraintes nominales maximales calculées pour les trois poutres, sont présentées et superposées sur (Fig.4.32).

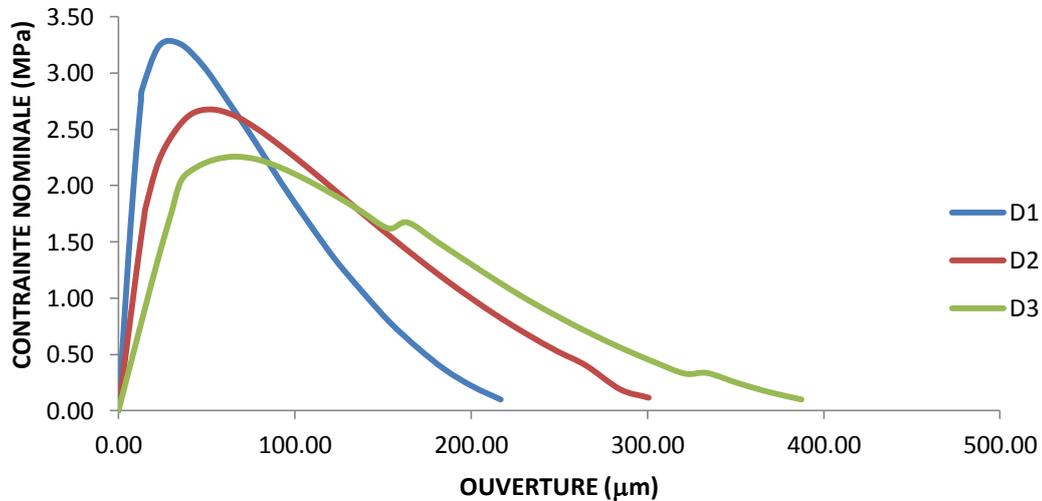


Fig.4.32. Les courbes contrainte nominale-ouverture des trois poutres.

En analysant les trois dernières courbes, nous pouvons dire que lorsque la taille de la structure croît, la contrainte nominale décroît. Et ceci est en accord avec les observations expérimentales de Yassir Alam [84]. Alors, on peut dire que l'approche OUVFISS-XFEM utilisée dans ce chapitre donne une bonne description de l'effet d'échelle des structures

4.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, un passage continu/discontinu (OUVFISS/XFEM) a été développé pour modéliser le phénomène de fissuration, nous avons d'abord cherché à localiser les fissures utilisant la procédure OUVFISS, ensuite par la méthode X-FEM on a étudié la propagation de ces fissures. Pour montrer la capacité de cette approche à décrire les deux phases de fissuration (l'initiation et la propagation) trois exemples tirés de la littérature sont proposés, des résultats obtenus sont validés avec succès et prouvent la capacité du modèle développé à fournir des résultats corrects. Ensuite, la capacité du modèle à décrire l'effet d'échelle a été en particulier vérifiée.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, on a cherché à modéliser le comportement du matériau béton en utilisant une approche continue / discontinue permettant de simuler l'amorçage et la propagation de fissures. Une part importante du travail a été consacrée à l'étude des modèles continus et discontinus de fissuration séparément. On a remarqué que l'utilisation d'un seul modèle n'est pas suffisante pour refléter le comportement réel de ce matériau.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux modèles continus (Les modèles d'endommagement isotrope en particulier), ce type de modèles consiste à représenter l'évolution irréversible de la répartition de défauts microscopiques dans un matériau par celle d'un champ macroscopique moyen, dont le stade ultime correspond à l'apparition de macro fissure(s). Cependant, dans le cas des matériaux adoucissants, cette approche n'est devenue véritablement utilisable (voire physiquement acceptable) en calcul de structure qu'à partir de l'introduction des méthodes de régularisation (encore appelées limiteurs de localisation), visant à pallier le phénomène de localisation qui se traduit lors d'analyses éléments finis par une dépendance sévère des solutions au maillage. Pour surmonter ce problème nous proposons d'utiliser la procédure *OUVFISS* développée par Matallah et Laborderie [30] qui basée sur une approche énergétique. Cette procédure a fait l'objet de plusieurs tests dans ce mémoire et nous donne des bons résultats concernant la détermination du trajet de la fissure. Le maillage de la structure n'a pas une influence sur le résultat et pour notre travail *OUVFISS* a été utilisé pour localiser le lieu où les fissures naissent.

Nous avons ensuite étudié les modèles discontinus tels que la mécanique de la rupture et les modèles cohésifs. Après avoir passé en revue les méthodes modernes présentes dans la littérature, la méthode des éléments finis étendue (XFEM) a été retenue pour la modélisation numérique de fissuration. Ses avantages et son caractère novateur pour traiter les discontinuités sont à l'origine de ce choix. La formulation théorique de cette méthode a été adaptée à l'analyse standard et aux modèles cohésifs. Nous avons évalué sur un exemple unidimensionnel simple la cohérence entre la méthode des éléments finis classique, la méthode XFEM standard et la méthode XFEM utilisant un modèle cohésif. D'autres exemples en 2D ont été proposés pour montrer la capacité de la méthode X-FEM à décrire avec fiabilité le trajet des fissures, finalement

on a remarqué que les modèles discontinus nous permettent de prendre en compte l'adoucissement mais sont incapable de modéliser un endommagement diffus.

Enfin, Nous avons proposé une approche continue / discontinue pour modéliser la fissuration dans le matériau béton, nous avons d'abord cherché à localiser les fissures dans les structures non-fissurées en utilisant la procédure OUVFISS, ensuite on utilise la méthode X-FEM pour simuler les fissures d'une manière explicite et à l'aide de la méthode level-set implémentée dans le logiciel CASTEM on a étudié la propagation de ces fissures dans un cas quasi-statique. Ce passage continue / discontinue a alors été validé par la simulation d'essais mécaniques sur des éprouvettes simples entaillées pour décrire le comportement adoucissant du matériau et pour suivre le trajet de la fissure dont les résultats ont été comparée avec ceux issus de l'expérimentation. On a remarqué que le maillage de la structure a une influence sur les résultats puisque on a besoin d'utiliser des incréments de propagation très petits pour bien décrire le comportement adoucissant présenté par l'expérience, La capacité du modèle à décrire l'effet d'échelle à été en particulier vérifiée. Et notre modélisation numérique a montré un accord favorable avec les observations expérimentales de Yassir Alam [84].

Cependant, au delà de ces performances et malgré ces résultats prometteurs, ce travail présente quelques limites qui rendent nécessaires des développements ultérieurs. Les quelques propositions qui suivent constituent un ensemble des recherches qui semblent souhaitables pour approfondir les connaissances actuelles sur le comportement du béton sous les différentes types de sollicitations.

- Il apparaît de plus comme naturel dans les travaux futurs de devoir étendre ce modèle à une configuration à trois dimensions.
- Un effort particulier devra être fait dans l'avenir pour utiliser des nouvelles formulations d'enrichissement pour tenir compte de la FPZ (process zone) devant la pointe de la fissure pour simuler le comportement du béton dans le cadre de la méthode XFEM utilisant des modèles cohésifs en 2D .
- En complément de ce travail, une modélisation adéquate de l'adhérence acier-béton pour des structures béton armé sous sollicitations statiques ou bien dynamiques semble nécessaire pour mieux décrire la ruine de structures armées.

LE CODE CAST3M DE SIMULATION

On donne ici, le jeu de données utilisé pour modéliser les structures étudiées dans le chapitre précédent (CHAPITRE 04) dans CAST3M.

A.1. L'éprouvette bi-entaillée (TYPE 1)

A.1.1. L'initiation des fissures

OPTI dime 2 elem qua4 mode plan cont;

***MAILLAGE:

DX1=0.002;

DX2=0.01;

N1=20;

N2=40;

N3=60;

N4=10;

N5=9;

N6=9;

**la partie centrale(1)

dens (DX1);

pa1= -0.02 -0.01;

pa2= 0.02 -0.01;

pa3= 0.02 0.01;

pa4= -0.02 0.01;

Da1=D N2 Pa1 Pa2;

Da2=D N1 Pa2 Pa3;

Da3=D N2 Pa3 Pa4;

Da4=D N1 Pa4 Pa1;

S1=Dall Da1 Da2 Da3 Da4;

*trac S1;

** la partie (2)

pb1=-0.03 -0.06;

pb2=0.03 -0.06;

pb3=0.03 -0.01;

pb4=-0.03 -0.01;

Db1=D N3 Pb2 Pb1;

Db3=D N3 Pb3 Pb4;

S2= (regl db3 Db1 'DINI' dx1 'DFIN' dx2);

*trac S2;

** la partie (3)

pc1=-0.03 0.01;

pc2=0.03 0.01;

pc3=0.03 0.06;

pc4=-0.03 0.06;

DC1=D N3 pc2 pc1;

DC3=D N3 pc3 pc4;

S3= (regl DC1 DC3 'DINI' dx1 'DFIN' dx2);

*trac S3;

** la partie (4)

pf8=0.02 0.001;

pf9=0.03 0.001;

DD1=D N4 pf8 pf9;

DD2=D N5 pf9 pc2;

DD3=D N4 pc2 pa3;

DD4=D N5 pa3 pf8;

S4=Dall Dd1 Dd2 Dd3 Dd4;

*trac S4;

** la partie (5)

pf3=-0.03 0.001;

pf4=-0.02 0.001;

DE1=D N4 pf3 pf4;

DE2=D N6 pf4 pa4;

DE3=D N4 pa4 pc1;

DE4=D N6 pc1 pf3;

S5=Dall De1 De2 De3 De4;

*trac S5;

** la partie (6)

pf6=0.03 -0.001;

pf7=0.02 -0.001;

DF1=D N4 pa2 pb3;

```

DF2=D N6 pb3 pf6;
DF3=D N4 pf6 pf7;
DF4=D N6 pf7 pa2;
S6=Dall Df1 Df2 Df3 Df4;
*trac S6;
** la partie (7)
pf1= -0.02 -0.001;
pf2= -0.03 -0.001;
DG1=D N4 pb4 pa1;
DG2=D N5 pa1 pf1;
DG3=D N4 pf1 pf2;
DG4=D N5 pf2 pb4;
S7=Dall DG1 DG2 DG3 DG4;
*trac S7;
surf=S1 et S2 et s3 et s4 et s5 et s6 et s7;
surf1=S2 et S3 et S4 ET S5 et S6 et S7;
elim surf (0.0001);
elim surf1 (0.0001);
trac surf;
*trac surf1;
*****
*** Modeles et materiaux
mod1a=MODE s1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MICROISO;
ft=3.E+6;
fpc1=42E+6;
yg=31.D+9;
gf=50.;
xnu=0.2;
mp1=(0.01*yg);
eps0=ft/yg;
CHAM1=MANU CHML MOD1a BTRA 1. TYPE CARACTERISTIQUES RIGIDITE;
CHAM2=INTG CHAM1 MOD1a ELEM BTRA;
CHH=CHAM2**(1./2.);

```

```

CHAM31= CHH*(FT/ GF) ;

trac cham31 mod1a NCLK;

* definition des models elementaires

*mod1a = MODE s1 MECANIQUE ELASTIQUE PLASTIQUE BETON xq4R;

mod1b = MODE surf1 mecanique elastique isotrope;

* apres cela on assemble

mod1tot = mod1a et mod1b ;

mat1tot=MATE mod1tot YOUN yg NU 0.2D0 BTRA cham31 KTR0 eps0 ALF1 12

      rho 2.5e+3 MP (MP1) FPC FPC1 ;

*****

*** Matrices + CL

Rig1tot = RIGI mod1tot mat1tot;

cl1 = BLOQ 'UX' 'UY' pb1;

cl2 = BLOQ 'UY' DB1;

cl3 = BLOQ 'UY' DC3;

cl1tot = cl1 et cl2 et cl3;

*****

*****

CHSUR=DEPI cl3 1;

evol1=evol manu (prog 0 1)(prog 0 1);

Dess evol1;

CHR1=CHAR evol1 CHSUR Dimp;

*

*----- pas a pas-----*

*

step=1./1000;

list1 = PROG 0. PAS 1.e-6 10.e-6;

*****

***      MISE EN CHARGE AVEC PASAPAS      ***

Ncalc0 = DIME list1;

* Initialisation de la table

TAB1 = TABL;

TAB1.'MODELE'      = mod1tot;

TAB1.'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;

```

```

TAB1.'BLOCAGES_MECANIQUES' = cl1tot;

TAB1.'CHARGEMENT'      = CHR1;

TAB1.'PRECISION' = 1E-05;

TAB1.'PRECISINTER' = 1E-05;

*TAB1.'TEMPS0'      = 0. ;

*TAB1.'PROCESSEURS' = 'MONO';

TAB1.'TEMPS_CALCULES' = list1 ;

TAB1.'TEMPS_SAUVES' = list1 ;

* Resolution non-lineaire *****

PASAPAS TAB1;

*****
*****

MOD1='EXTR' TAB1.MODELE 'ELEM' 'TRI3' 'QUA4' 'TRI6' 'QUA8'

      'CUB8' 'CU20' 'PRI6' 'PR15' 'PYR5' 'PY13' 'TET4' 'TE10';

CHAM1='MANU' 'CHML' MOD1 'SCAL' 1. 'TYPE' 'DEFORMATIONS' 'STRESSES';

CHAM2='INTG' CHAM1 MOD1 'ELEM' 'SCAL';

CHAM3='CHAN' 'STRESSES' MOD1 CHAM2 'CHAN' 'TYPE' 'DEFORMATIONS';

CHH=CHAM3**(1./(VALE DIME));

MAT1='REDU' TAB1.'CARACTERISTIQUES' MOD1;

MAILL1='EXTR' MOD1 'MAILL';

LECT1='INDEX' (TAB1.TEMPS);

N1='DIME' LECT1;

TAB1.OUV='TABLE';

REPETER BOU1 N1;

I=LECT1 . &BOU1;

DEP1='REDU' TAB1.DEPLACEMENTS.I MAILL1;

EPS1='EPSI' TAB1.DEPLACEMENTS.I MOD1;

SIG1='REDU' TAB1.CONTRAINTE.S.I MOD1;

SIG0I='ELAS' EPS1 MOD1 MAT1;

SIGAN=SIG0I - SIG1;

OUF1='ELAS' SIGAN MOD1 MAT1;

TROUF1=(('EXCO' OUF1 'EPXX' 'SCAL')

      +('EXCO' OUF1 'EPYY' 'SCAL')) * CHH;

TAB1.OUV . I=TROUF1;

```

```

I=I+1;

FIN BOU1;

ouvfiss tab1;

I=DIME (TAB1 . TEMPS);

TRAC TAB1 . OUV . (I-1) TAB1.MODELE;

```

A.1.2. Localisation et propagation des fissures (la méthode X-FEM).

```

OPTI dime 2 elem qua4 mode plan cont;
*****
opti rest 'ouvfiss2FS.sauv';
rest;
TRAC TAB1 . OUV . (I-1) TAB1.MODELE;
*****
*** Maillage de la fissure

* longueur et angle de la fissure

a0= 0.005;
alpha01 = 0.;
alpha02 = 0.;

da0 = DX1 / 10.;
na0 = enti (a0 / da0);

dis= 0.020-a0;

thita01 = atg((tan alpha01)*a0/dis);
thita02 = atg((tan alpha02)*a0/dis);
DENS (da0) ;
ypoint1=(dis*(sin thita01));
ypoint1=ypoint1;
p1tip1=(dis*(cos thita01)) ypoint1;
p2tip1=0.020 0;

ypoint2= (-1.)*(dis*(sin thita02));
ypoint2=ypoint2;
p1tip2=-1*(dis*(cos thita02)) ypoint2;
p2tip2=(-1.*0.020) 0;

lcrack10 = (p1tip1 droi na0 p2tip1) coul vert;
lcrack20 = (p1tip2 droi na0 p2tip2) coul vert;

* table (+ pratique pour gérer la propa)
TXFEM = tabl;
TXFEM . 0 = tabl;
TXFEM . 0 . 'POINTE1' = p1tip1;
TXFEM . 0 . 'POINTE2' = p1tip2;
TXFEM . 0 . 'FISSURE_1' = lcrack10;

```

```

TXFEM . 0 . 'FISSURE_2' = lcrack20;

* creation des level set

psi01 phi01 = PSIPHI s1 lcrack10 'DEUX' p1tip1;
psi02 phi02 = PSIPHI s1 lcrack20 'DEUX' p1tip2;

*isolv7= prog (-2.*a0) PAS (a0 / 4.) (2.*a0);
isolv7 = ( prog (-1.*a0) (-5.*dx1) PAS dx1 (-1.*dx1)
          PAS (0.2*dx1) dx1 PAS dx1 (5.*dx1) a0 );
*opti isov lign;
  TRAC (surf et lcrack10) ;
  TRAC (surf et lcrack20 et lcrack10) ;
  TRAC phi01 (s1 et lcrack10) isolv7;
  TRAC psi01 (s1 et lcrack10) isolv7;
  TRAC phi02 (s1 et lcrack20) isolv7;
  TRAC psi02 (s1 et lcrack20) isolv7;
*****
*** Modeles et materiaux
mod1a=MODE s1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MICROISO
xq4R;
mod1b = MODE surf1 mecanique elastique isotrope;
* apres cela on assemble
mod1tot = mod1a et mod1b ;
* enrichissement

Che1X = tabl;
Che1X . 0 = TRIE mod1tot psi01 phi01 'SAUT';
Che1X . 0 = TRIE mod1tot psi02 phi02 'SAUT';

ft=3.5E+6;
fpc1=42E+6;
yg=38.D+9;
gf=100.;
xnu=0.25;
mp1=(0.01*yg);
eps0=ft/yg;
CHAM1=MANU CHML MOD1a BTRA 1. TYPE CARACTERISTIQUES RIGIDITE;
CHAM2=INTG CHAM1 MOD1a ELEM BTRA;
CHH=CHAM2**(1./2.);
CHAM31= CHH*(FT/ GF) ;
trac cham31 mod1a NCLK;
*****
mat1tot=MATE mod1tot YOUN yg NU 0.25D0 BTRA cham31 KTR0 eps0 ALF1 12
          rho 2.5e+3 MP (MP1) FPC FPC1 ;
*****
*** Matrices + CL

Rig1tot = RIGI mod1tot mat1tot;

cl1 = BLOQ 'UX' 'UY' pb1;
cl2 = BLOQ 'UY' DB1;
cl3 = BLOQ 'UY' DC3;

```

```

cl1tot = cl1 et cl2 et cl3;
*****
*****
CHSUR=DEPI cl3 1;
evol1=evol manu (prog 0 1)(prog 0 1);
Dess evol1;
CHR1=CHAR evol1 CHSUR Dimp;
*
*----- pas a pas-----*
*
tdess1 = tabl;
tdess1 . 1 = mot 'MARQ PLUS';
list1 = PROG 0. PAS 1.e-6 10.e-6;
*****
***      MISE EN CHARGE AVEC PASAPAS      ***

Ncalc0 = DIME list1;

* Initialisation de la table
TAB1 = TABL;
TAB1.'MODELE'      = mod1tot;
TAB1.'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;
TAB1.'BLOCAGES_MECANIQUES' = cl1tot;
TAB1.'CHARGEMENT'   = CHR1;
TAB1.'PRECISION' = 1E-05;
TAB1.'PRECISINTER' = 1E-05;
*TAB1.'TEMPS0'      = 0. ;
*TAB1.'PROCESSEURS' = 'MONO';
TAB1.'TEMPS_CALCULES' = list1 ;
TAB1.'TEMPS_SAUVES'  = list1 ;

* Resolution non-lineaire *****
PASAPAS TAB1;
*****
* calcul de l integrale J *****

* J local(1)

SUPTAB = TABL ;
SUPTAB.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB.'PSI' = psi01;
SUPTAB.'PHI' = phi01;
SUPTAB.'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;
SUPTAB.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
SUPTAB.'COUCHE' = 1;
G_THETA SUPTAB;

q7 = (SUPTAB .'CHAMP_THET1');
vq7 = VECT q7 AZUR ;
*   trac vq7 (s1 et lcrack10);
* J local(1)

SUPTAB1 = TABL ;
SUPTAB1.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB1.'PSI' = psi02;

```

```

SUPTAB1.'PHI' = phi02;
SUPTAB1.'FRONT_FISSURE' = p1tip2 ;
SUPTAB1.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
SUPTAB1.'COUCHE' = 1;
G_THETA SUPTAB1;

q7 = (SUPTAB1 . 'CHAMP_THET1') ;
vq7 = VECT q7 AZUR ;
*   trac vq7 (s1 et lcrack20);

*****
**  Calcul des FIC par methode integrale G_THETA (1)  ***
KTAB = TABL;
KTAB .'OBJECTIF' = MOT 'DECOUPLAGE';
KTAB .'PSI' = psi01;
KTAB .'PHI' = phi01;
KTAB .'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;
KTAB .'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
KTAB .'COUCHE' = 1;

G_THETA KTAB;
**  Calcul des FIC par methode integrale G_THETA (2)  ***
KTAB1 = TABL;
KTAB1 .'OBJECTIF' = MOT 'DECOUPLAGE';
KTAB1 .'PSI' = psi02;
KTAB1 .'PHI' = phi02;
KTAB1 .'FRONT_FISSURE' = p1tip2 ;
KTAB1 .'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
KTAB1 .'COUCHE' = 1;

G_THETA KTAB1;
*****
i=1;
KIC=2e5;
repe boucl1 (Ncalc0-1);

K1G = KTAB . 'RESULTATS' . 'I'.(i);
K2G = KTAB . 'RESULTATS' . 'II'.(i);
fact1= 4.*(2.**0.5)*(K2G**3);
fact2=((K1G**2) + (8.*(K2G**2)))**0.5;
Fact3= (K1G**2.)+(12.*(K2G**2.));
Keq=K1G;
si ((abs Keq) >eg (abs KIC));
QUITTER BOUCL1;
finsi;
i=i+1;
fin BOUCL1;
mess '-----';
mess 'K11 de propagation' K1G;
mess 'K21 de propagation' K2G;
mess 'Keq='Keq;
mess 'KIC='KIC;
mess '-----';

```

```

*****
i=1;
KIC=2e5;
repe boucl2 (Ncalc0-1);

    K12G = KTAB1 . 'RESULTATS' . 'I'.(i);
    K22G = KTAB1 . 'RESULTATS' . 'II'.(i);
fact1= 4.*(2.**0.5)*(K22G**3);
fact2=((K12G**2) + (8.*(K22G**2))**0.5;
Fact3= (K12G**2.)+(12.*(K22G**2.));
Keq=K12G;
si ((abs Keq) >eg (abs KIC));
QUITTER BOUCL2;
finsi;
i=i+1;
fin BOUCL2;
mess '-----';
mess 'K12 de propagation' K12G;
mess 'K22 de propagation' K22G;
mess 'Keq='Keq;
mess 'KIC='KIC;
mess '-----';
*****

lcrack11=lcrack10;
lcrack22=lcrack20;
*****
*****
* BOUCLE TEMPORELLE POUR FAIRE PROPAGER LA FISSURE
*****

it1 = 0 ;
nt1 = 5;

REPE BT1 nt1;
it1 = it1 + 1;
saut lign;
mess '*****' it1 '*****';
TITR (chai 'iteration ' it1);

*****
**** propagation élémentaire de fissure

*** Increment et angle de propagation ***
* increment manuel
da1 =0.003;
da2 =1.*0.003;
*** Maillage de la fissure ***

*p1tip1 = p1tip1 plus (da1 0.);
* increment auto
pptip1= poin s1 'PROCH' p1tip1;
pptip2= poin s1 'PROCH' p1tip2;

dx1tip= coor 3 pptip1;
dx2tip= coor 3 pptip2;

```

```

*da1= 1.25*dx1tip;
*da2= 1.25*dx2tip;

*angle
si((abs K2G) <eg (1.E-6*(abs K1G)));
  tet1c = 0.;
sino;
  tet0c = K1G / K2G;
  tet8c = (tet0c**2) + 8.;
  tet1c = tet0c - ( (sign K2G) * (tet8c**0.5));
  tet1c = 2. * (atg (0.25 * tet1c));
  tet1c = 0.;
fins;

si((abs K22G) <eg (1.E-6*(abs K12G)));
  tet1c1 = 0.;
sino;
  tet0c1 = K12G / K22G;
  tet8c1 = (tet0c1**2) + 8.;
  tet1c1 = tet0c1 - ( (sign K22G) * (tet8c1**0.5) );
  tet1c1 = 0.;

fins;

mess 'propagation (1) avec l angle ' tet1c;
mess 'propagation (2) avec l angle ' tet1c1;
*les calculs ont été réalisés sur la pointe p1tip1 et p1tip2

* on recupere la direction du repere local de la fissure (CHPOINT)
ETIP1 = KTAB . 'UTILTET1' . 'DIRECTION1';
ETIP2 = KTAB . 'UTILTET1' . 'DIRECTION2';
list ETIP1;
ETIP11 = KTAB1 . 'UTILTET1' . 'DIRECTION1';
ETIP21 = KTAB1 . 'UTILTET1' . 'DIRECTION2';

* on fait tourner de l'angle critique

DA1VEC = ((cos tet1c) * ETIP1) + ((sin tet1c) * ETIP2);
DA1VEC = da1 * DA1VEC;
list DA1VEC;

DA1VEC1 = ((cos tet1c1) * ETIP11) + ((sin tet1c1) * ETIP21);
DA1VEC1 = da2 * DA1VEC1;

* propagation du front de fissure

*DA2VEC = DA1VEC DEDU 180. (0. 0.) 'ROTA'
* (p1tip1 MANU 'POI1') (p1tip2 MANU 'POI1');

p1tip1 = p1tip1 PLUS DA1VEC;
p1tip2 = p1tip2 PLUS DA1VEC1;

list p1tip1;
list p1tip2;

```

```

lcrack11=(p1tip1 droi lcrack11) coul 'ROUG';
lcrack22=(p1tip2 droi lcrack22) coul 'ROUG';

*****
***** Actualisations ***
** des level set

psi11 phi11 = PSIPHI s1 lcrack11 'DEUX' p1tip1;
psi12 phi12 = PSIPHI s1 lcrack22 'DEUX' p1tip2;

* trac (s1 et lcrack11);
* trac (s1 et lcrack22);
* trac (surf et lcrack11 et lcrack22);

* TRAC phi11 (s1 et lcrack11) isolv7;
* TRAC psi11 (s1 et lcrack11) isolv7;
* TRAC phi12 (s1 et lcrack22) isolv7;
* TRAC psi12 (s1 et lcrack22) isolv7;

*****
* du modele, de la rigidite,... (inutile pour le materiau)
Che1X.it1 = TRIE mod1a psi11 phi11 'SAUT';
Che1X.it1 = TRIE mod1a psi12 phi12 'SAUT';
mod1tot = mod1a et mod1b;
TAB1.'MODELE' = mod1tot;

*** resolution non-lineaire PASaPAS ***
tlast1 = extr TAB1.'TEMPS_CALCULES' (dime TAB1.'TEMPS_CALCULES');
tcalc1 = TAB1.'TEMPS_CALCULES' et (PROG (tlast1 + 1e-5));
Ncalc1 = dime tcalc1;

TAB1.'TEMPS_CALCULES' = tcalc1 ;
TAB1.'TEMPS_SAUVES' = tcalc1 ;

PASAPAS TAB1;
*** a chaque propa il faut une nouvelle table, car le contour change...
SUPTAB = TABL ;
SUPTAB.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB.'PSI' = psi11;
SUPTAB.'PHI' = phi11;
SUPTAB.'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;

SUPTAB.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
SUPTAB.'COUCHE' = 1;

G_THETA SUPTAB;
q7 = (SUPTAB . 'CHAMP_THET1') ;

vq7 = VECT q7 AZUR ;
* trac vq7 (s1 et lcrack11);

SUPTAB1 = TABL ;
SUPTAB1.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB1.'PSI' = psi12;

```

```
SUPTAB1.'PHI' = phi12;
SUPTAB1.'FRONT_FISSURE' = p1tip2 ;
SUPTAB1.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
SUPTAB1.'COUCHE' = 1;
```

```
G_THETA SUPTAB;
q7 = (SUPTAB . 'CHAMP_THET1');
```

```
vq7 = VECT q7 AZUR ;
* trac vq7 (s1 et lcrack22);
```

```
*** Calcul des FIC par methode integrale G_THETA (1) ***
```

```
KTAB = TABL;
KTAB . 'OBJECTIF' = MOT 'DECOUPLAGE';
KTAB . 'PSI' = psi11;
KTAB . 'PHI' = phi11;
KTAB . 'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;
KTAB . 'MODELE' = mod1tot;
KTAB . 'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;
KTAB . 'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
KTAB . 'COUCHE' = 1;
```

```
G_THETA KTAB;
```

```
*
```

```
mess Ncalc1;
```

```
j=0;
```

```
Ncalc2=Ncalc1-1;
```

```
repe boucl2 Ncalc2;
K1G = KTAB . 'RESULTATS' . 'I'.(j);
K2G = KTAB . 'RESULTATS' . 'II'.(j);
si((abs K2G) < eg (1.E-6*(abs K1G)));
tet1c = 0.;
sino;
tet0c = K1G / K2G;
tet8c = (tet0c**2) + 8.;
tet1c = tet0c - ( (sign K2G) * (tet8c**0.5) );
tet1c = 2. * (atg (0.25 * tet1c));
tet1c = 0;
fins;
mess 'angle de propagation' tet1c;
j=j+1;
fin boucl2;
```

```
moy= enti(Ncalc1/2);
```

```
moy1=moy-1;
```

```
j=1;
```

```
repe Boucl4 (Ncalc1 - 1);
```

```
K1G = KTAB . 'RESULTATS' . 'I'.(j);
K2G = KTAB . 'RESULTATS' . 'II'.(j);
```

```

fact1= 4.*(2.**0.5)*(K2G**3);
fact2=((K1G**2) + (8.*(K2G**2)))**0.5;
fact3= (K1G**2.)+(12.*(K2G**2.));
Keq=K1G;

```

```

si ((abs Keq) >eg (abs KIC));
QUITTER BOUCL4;
finsi;
j=j+1;

```

```

fin BOUCL4;

```

```

mess 'le pas' i;
mess 'K1G=' K1G;
mess 'K2G=' K2G;
mess 'Keq=' Keq;
mess 'KIC=' KIC;

```

```

*****

```

```

*** Calcul des FIC par methode integrale G_THETA (1) ***

```

```

KTAB1 = TABL;
KTAB1 .'OBJECTIF' = MOT 'DECOUPLAGE';
KTAB1 .'PSI' = psi12;
KTAB1 .'PHI' = phi12;
KTAB1 .'FRONT_FISSURE' = p1tip2 ;
KTAB1 .'MODELE' = mod1tot;
KTAB1 .'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;
KTAB1 .'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
KTAB1 .'COUCHE' = 1;

```

```

G_THETA KTAB1;

```

```

mess Ncalc1;

```

```

j=0;
Ncalc3=Ncalc1-1;

```

```

repe boucl3 Ncalc3;
K12G = KTAB1 .'RESULTATS' . 'I'.(j);
K22G = KTAB1 .'RESULTATS' . 'II'.(j);
si((abs K22G) <eg (1.E-6*(abs K12G)));
tet1c = 0.;
sino;
tet0c = K12G / K22G;
tet8c = (tet0c**2) + 8.;
tet1c = tet0c - ( (sign K22G) * (tet8c**0.5) );
tet2c = 2. * (atg (0.25 * tet1c));
tet2c = 0;
fins;
mess 'angle de propagation' tet2c;
j=j+1;
fin boucl3;

```

```

moy= enti(Ncalc1/2);

```

```

moy1=moy-1;
j=1;
repe Boucl5 (Ncalc1 - 1);

K12G = KTAB1 . 'RESULTATS' . 'I'.(j);
K22G = KTAB1 . 'RESULTATS' . 'II'.(j);

fact1= 4.*(2.**0.5)*(K22G**3);
fact2=((K12G**2) + (8.*(K22G**2)))**0.5;
fact3= (K12G**2.)+(12.*(K22G**2.));
Keq2=K12G;

si ((abs Keq) >eg (abs KIC));
QUITTER BOUCL5;
fini;
j=j+1;

fin BOUCL5;

mess 'le pas' i;
mess 'K12G=' K1G;
mess 'K22G=' K2G;
mess 'Keq2=' Keq;
mess 'KIC=' KIC;

* i etant l indice de la table de PASAPAS TAB1,
* il faut l'incrémenter avant et apres chaque appel a pasapas

fin BT1;
*****
*****
* quelques tracés *****
K=(Ncalc0-1)+(2*nt1);
list K;
u1i = TAB1 . 'DEPLACEMENTS' . K;
list i;
u1phy = XFEM 'RECO' u1i mod1tot ;
var1i = TAB1 . 'VARIABLES_INTERNES' . K;
sig1i = TAB1 . 'CONTRAINTES' . K;
def1i = ELAS mod1tot sig1i mat1tot;
TRAC var1i mod1tot (DEFO u1phy surf 20.) 'TITR' 'EPSE';
TRAC (exco EPYY def1i) mod1tot (DEFO u1phy surf 20.) 'TITR' 'EPYY';
*****
u0phy = XFEM 'RECO' u1i mod1tot ;
ucrk0u1 ucrk0d1 = XFEM 'FISS' lcrack11 u1i mod1tot ;
def0 = DEFO u0phy surf 200.;
TRAC sig1i mod1tot def0;
def0 = def0 et (DEFO ucrk0u1 lcrack11 200.)
      et (DEFO ucrk0d1 lcrack11 200.);

TRAC def0;
* TRAC defel0 mod1tot lcrack10;
* TRAC svm0 mod1tot (surf et lcrack10);

```

```

*****
*réponse globale
opti sort résXFEM;
ev1=@global tab1 cl3 evol1 FY;
dess ev1;
sort 'EXCE' ev1;
*****
* courbe force ouverture *****
cod1 = prog;
for1 = prog;
ipost = -1;
Npost = k-1;
repe BPOST1 (Npost + 1);
  ipost = ipost + 1;
  u1i = TAB1 . 'DEPLACEMENTS' . ipost;
  cod1i = extr u1i 'UY' pf3;
  cod1 = cod1 et (prog cod1i);
  frea1i = TAB1 . 'REACTIONS' . ipost;
  for1i = extr frea1i 'FY' pc4 ;
  for1 = for1 et (prog for1i);
fin BPOST1;
evfcod1 = EVOL 'VERT' 'MANU' 'ouverture' cod1 'force' for1 ;
opti sort ouverture;
  dess evfcod1 tdess1 'TITR' 'Force - Ouverture';
sort 'EXCE' evfcod1;
*****
opti donn 3;
opti sauv 'calculplaque1.sauv';
sauv;
*****
*@cartoon tab1 modt co4;
*****

```

A.2. Flexion trois points (Poutre D1)

A.2.1. L'initiation des fissures

```

OPTI dime 2 elem qua4 mode plan cont;
*****
***MAILLAGE:

DX1=0.001;
DX2=0.001;

N1=24;
N2=50;

N3=50;
N4=6;
N5=8;

N6=8;

N7=30;

```

N8=4;

**la partie centrale(XFEM)

dens (DX1);

pa1= -0.07 0;

pa2= 0.07 0;

pa3= 0.07 0.08;

pa4= -0.07 0.08;

Da1=D N2 Pa1 Pa2;

Da2=D N1 Pa2 Pa3;

Da3=D N2 Pa3 Pa4;

Da4=D N1 Pa4 Pa1;

S1=Dall Da1 Da2 Da3 Da4;

*trac S1;

Pc1=-0.07 -0.02;

Pc2=0.07 -0.02;

Pc3=0.07 0;

DC1=D N3 Pc1 Pc2;

DC2=D N4 Pc2 Pc3;

DC3=D N3 Pc3 Pa1;

DC4=D N4 Pa1 PC1;

S2=Dall DC1 DC2 DC3 DC4;

*trac S2;

*

surf1=S1 et S2;

elim surf1 (0.0001);

trac surf1;

Pf1=-0.15 -0.02;

Pf2=-0.15 0.08;

DD1=D N6 Pf1 Pc1;

DD2=D N7 Pc1 Pa4;

DD3=D N6 Pa4 Pf2;

DD4=D N7 Pf2 Pf1;

S4=Dall DD1 DD2 DD3 DD4;

*trac S4;

surf3=surf1 et S4;

elim surf3 (0.0001);

*trac surf3;

PG1=0.15 -0.02;

PG2=0.15 0.08;

DG1=D N6 Pc2 PG1;

DG2=D N7 PG1 PG2;

DG3=D N6 PG2 Pa3;

DG4=D N7 Pa3 Pc2;

S5=Dall DG1 DG2 DG3 DG4;

*trac S5;

```
surf4=surf3 et S5;
elim surf4 (0.0001);
*trac surf4;
```

```
PL1=-0.2 -0.02;
PL2=-0.2 0.08;
PL3=0.2 -0.02;
PL4=0.2 0.08;
```

```
DL1=D N8 PL1 Pf1;
DL2=D N7 Pf1 Pf2;
DL3=D N8 Pf2 PL2;
DL4=D N7 PL2 PL1;
S6=Dall DL1 DL2 DL3 DL4;
*trac S6;
```

```
surf5=surf4 et S6;
elim surf5 (0.0001);
*trac surf5;
```

```
DL5=D N8 PG1 PL3;
DL6=D N7 PL3 PL4;
DL7=D N8 PL4 PG2;
DL8=D N7 PG2 PG1;
```

```
S7=Dall DL5 DL6 DL7 DL8;
*trac S7;
```

```
surf6=surf5 et S7;
elim surf6 (0.0001);
trac surf6;
S2=S4 et S5 et S6 et S7;
elim S2 (0.0001);
trac S1;
trac S2;
```

```
DIPIM=0 0.08;
Surf= DIPIM et surf6;
elim Surf (0.0001);
trac surf;
list DIPIM;
```

```
DIOUV=-0.0028 -0.02;
Surf= DIOUV et surf6;
elim Surf (0.0001);
list DIOUV;
trac surf;
list DIOUV;
```

```
*****
```

```
*** Modeles et materiaux
```

```
MOD1a=MODE Surf1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MICROISO;
MOD1b=MODE S2 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MICROISO;
MOD1tot=mod1a et mod1b;
```

```
ft=3.5E+6;
fpc1=45E+6;
yg=38.D+9;
gf=80.;
xnu=0.25;
mp1=(0.01*yg);
```

```

eps0=ft/yg;

CHAM1=MANU CHML MOD1tot BTRA 1. TYPE CARACTERISTIQUES RIGIDITE;
CHAM2=INTG CHAM1 MOD1tot ELEM BTRA;
CHH=CHAM2**(1./2.);
CHAM31= CHH*(FT/ GF) ;
trac cham31 mod1tot NCLK;

MAT1tot=MATE MOD1tot YOUN yg NU 0.25D0 BTRA cham31 KTR0 eps0 ALF1 12
      rho 2.5e+3 MP (MP1) FPC FPC1 DIM3 0.1;

*****
*** Matrices + CL

*Rig1tot = RIGI mod1a mat1tot;

cl1 = BLOQ 'UX' 'UY' PG1;
cl2 = BLOQ 'UY' Pf1;
cl3 = BLOQ 'UY' DIPIM;

cl1tot = cl1 et cl2 et cl3;
*****
*****
CHSUR=DEPI cl3 -1;
evol1=evol manu (prog 0 1)(prog 0 1);
Dess evol1;
CHR1=CHAR evol1 CHSUR Dimp;
*
*----- pas a pas-----*
*

list1 = PROG 0. PAS 5e-6 30.e-5;
K=DIME list1;
*****
***      MISE EN CHARGE AVEC PASAPAS      ***
* Initialisation de la table
TAB1 = TABL;
TAB1.'MODELE'      = mod1tot;
TAB1.'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;
TAB1.'BLOCAGES_MECANIQUES' = cl1tot;
TAB1.'CHARGEMENT'   = CHR1;
TAB1.'PRECISION' = 1E-05;
TAB1.'PRECISINTER' = 1E-05;
*TAB1.'TEMPS0'      = 0. ;
*TAB1.'PROCESSEURS' = 'MONO';
TAB1.'TEMPS_CALCULES' = list1 ;
TAB1.'TEMPS_SAUVES' = list1 ;

PASAPAS tab1;

*****
*****
MOD1='EXTR' TAB1.MODELE 'ELEM' 'TRI3' 'QUA4' 'TRI6' 'QUA8'
      'CUB8' 'CU20' 'PRI6' 'PR15' 'PYR5' 'PY13' 'TET4' 'TE10';
CHAM1='MANU' 'CHML' MOD1 'SCAL' 1. 'TYPE' 'DEFORMATIONS' 'STRESSES';
CHAM2='INTG' CHAM1 MOD1 'ELEM' 'SCAL';
CHAM3='CHAN' 'STRESSES' MOD1 CHAM2 'CHAN' 'TYPE' 'DEFORMATIONS';
CHH=CHAM3**(1./(VALE DIME));
MAT1='REDU' TAB1.'CARACTERISTIQUES' MOD1;
MAILL1='EXTR' MOD1 'MAILL';

```

```

LECT1='INDEX' (TAB1.TEMPS);
N1='DIME' LECT1;
TAB1.OUV='TABLE';
REPETER BOU1 N1;
I=LECT1 . &BOU1;
DEP1='REDU' TAB1.DEPLACEMENTS.I MAILL1;
EPS1='EPSI' TAB1.DEPLACEMENTS.I MOD1;
SIG1='REDU' TAB1.CONTRAINTE.S.I MOD1;
SIG0I='ELAS' EPS1 MOD1 MAT1;
SIGAN=SIG0I - SIG1;
OUF1='ELAS' SIGAN MOD1 MAT1;
TROUF1=(('EXCO' OUF1 'EPXX' 'SCAL')
+('EXCO' OUF1 'EPYY' 'SCAL')) * CHH;
TAB1.OUV . I=TROUF1;
I=I+1;
FIN BOU1;

```

ouvfiss tab1;

```

I=DIME (TAB1 . TEMPS);
TRAC TAB1 . OUV . (I-1) TAB1.MODELE;
n1=dime tab1.temps;
TRAC (exco tab1.variables_internes.(n1 - 1) 'DOM')mod1tot;
*****
ev1=@global tab1 cl3 evol1 FY;
dess ev1;
*
opti donn 3;
opti sauv 'calculouvfissD12.sauv';
sauv;

```

A.2.2. Localisation et propagation des fissures (la méthode X-FEM).

```

OPTI dime 2 elem qua4 mode plan cont;
*****
*****OUVFISS*****
opti rest 'calculouvfissD12.sauv';
rest;
TRAC TAB1 . OUV . (I-1) TAB1.MODELE;
TRAC (exco tab1.variables_internes.(n1 - 1) 'DOM')mod1a;
*****
*****
* la partie XFEM
* initiation par ouvfiSS
*****
*** Maillage de la fissure

* longueur et angle de la fissure

a0= -0.02;

da0 = DX1 / 10.;
na0 = enti (a0 / da0);
p2tip1=0 a0;
p1tip1=0 0;

lcrack10 = (p1tip1 droi na0 p2tip1) coul 'ROUG';

```

```

* table (+ pratique pour gérer la propa)
TXFEM = tabl;
TXFEM . 0 = tabl;
TXFEM . 0 . 'POINTE1' = p1tip1;
TXFEM . 0 . 'FISSURE_1' = lcrack10;

* creation des level set

psi01 phi01 = PSIPHI surf1 lcrack10 'DEUX' p1tip1;

isolv7 = ( prog (-1.*a0) (-5.*dx1) PAS dx1 (-1.*dx1)
          PAS (0.2*dx1) dx1 PAS dx1 (5.*dx1) a0 );
*opti isov lign;
TRAC (surf et lcrack10) ;
TRAC phi01 (surf1 et lcrack10) isolv7;
TRAC psi01 (surf1 et lcrack10) isolv7;

*****
*** Modeles et materiaux
M1= MODE surf1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE ENDOMMAGEMENT MICROISO XQ4R;
mod1b= MODE S2 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;
* apres cela on assemble
mod1tot = m1 et mod1b ;

* enrichissement

Che1X = tabl;
Che1X . 0 = TRIE mod1tot psi01 phi01 'SAUT';
*****
*parametres des matériaux

ft=3.5E+6;
fpc1=42E+6;
yg=38.D+9;
gf=80.;
xnu=0.25;
mp1=(0.01*yg);
eps0=ft/yg;
CHAM1=MANU CHML MOD1tot BTRA 1. TYPE CARACTERISTIQUES RIGIDITE;
CHAM2=INTG CHAM1 MOD1tot ELEM BTRA;
CHH=CHAM2**(1./2.);
CHAM31= CHH*(FT/ GF);
trac cham31 mod1tot NCLK;

*****

mat1tot=MATE mod1tot YOUN yg NU 0.25D0 BTRA cham31 KTR0 eps0 ALF1 12
rho 2.5e+3 MP (MP1) FPC FPC1;
*****
*****
CHSUR=DEPI c13 -1;
evol1=evol manu (prog 0 1)(prog 0 1);
Dess evol1;
CHR1=CHAR evol1 CHSUR Dimp;
*
*----- pas a pas-----*
tdess1 = tabl;

```

```

tdess1 . 1 = mot 'MARQ PLUS';
step=1./1000;
*****

list1 = PROG 0. PAS 1e-6 2.5e-5;
*****

***      MISE EN CHARGE AVEC PASAPAS      ***

Ncalc0 = DIME list1;

* Initialisation de la table
TAB1 = TABL;
TAB1.'MODELE'      = mod1tot;
TAB1.'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;
TAB1.'BLOCAGES_MECANIQUES' = cl1tot;
TAB1.'CHARGEMENT'   = CHR1;
TAB1.'PRECISION' = 1E-05;
TAB1.'PRECISINTER' = 1E-05;
*TAB1.'TEMPS0'      = 0. ;
*TAB1.'PROCESSEURS' = 'MONO';
TAB1.'TEMPS_CALCULES' = list1 ;
TAB1.'TEMPS_SAUVES' = list1 ;

* Resolution non-lineaire *****
PASAPAS TAB1;
*****
*****

* calcul de l integrale J *****

* J local(1)

SUPTAB = TABL ;
SUPTAB.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB.'PSI' = psi01;
SUPTAB.'PHI' = phi01;
SUPTAB.'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;
SUPTAB.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
SUPTAB.'COUCHE' = 1;
G_THETA SUPTAB;

q7 = (SUPTAB . 'CHAMP_THET1') ;
vq7 = VECT q7 AZUR ;
*   trac vq7 (s1 et lcrack10);
*****

** Calcul des FIC par methode integrale G_THETA (1) **
KTAB = TABL;
KTAB.'OBJECTIF' = MOT 'DECOUPLAGE';
KTAB.'PSI' = psi01;
KTAB.'PHI' = phi01;
KTAB.'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;
KTAB.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
KTAB.'COUCHE' = 1;

G_THETA KTAB;
*****

i=1;
KIC=2e5;
repe boucl1 (Ncalc0-1);

K1G = KTAB . 'RESULTATS' . 'I'.(i);
K2G = KTAB . 'RESULTATS' . 'II'.(i);

```

```

fact1= 4.*(2.**0.5)*(K2G**3);

fact2=((K1G**2) + (8.*(K2G**2))**0.5;

Fact3= (K1G**2.)+(12.*(K2G**2.));

*Keq=(fact1*(K1G+(3.*fact2)))/((fact3-(K1G*fact2))**1.5);
si((abs K1C) <eg (abs K1G));
QUITTER BOUCL1;
finsi;
i=i+1;
fin BOUCL1;

mess '-----';
mess 'K11 de propagation' K1G;
*mess 'K21 de propagation' K2G;
*mess 'Keq='Keq;
mess 'K1C='K1C;
mess '-----';
*****

lcrack11=lcrack10;
*****
*****

* BOUCLE TEMPORELLE POUR FAIRE PROPAGER LA FISSURE
*****

it1 = 0 ;
nt1 = 15;

REPE BT1 nt1;
it1 = it1 + 1;
saut lign;
mess '*****' it1 '*****';
TITR (chai 'iteration ' it1);

*****

**** propagation élémentaire de fissure

*** Increment et angle de propagation ***
* increment manuel
da1 =0.005;

*** Maillage de la fissure ***

pptip1= poin s1 'PROCH' p1tip1;
dx1tip= coor 3 pptip1;

*da1= 1.25*dx1tip;
*da2= 1.25*dx2tip;

*angle
si((abs K2G) <eg (1.E-6*(abs K1G)));
tet1c = 0.;
sino;
tet0c = K1G / K2G;
tet8c = (tet0c**2) + 8.;
tet1c = tet0c - ( (sign K2G) * (tet8c**0.5));
tet1c =2. * (atg (0.25 * tet1c));
finsi;
tet1c =0;

```

```

mess 'propagation (1) avec l angle ' tet1c;
*les calculs ont été réalisés sur la pointe p1tip1 et p1tip2

* on recupere la direction du repere local de la fissure (CHPOINT)
ETIP1 = KTAB . 'UTILTET1' . 'DIRECTION1';
ETIP2 = KTAB . 'UTILTET1' . 'DIRECTION2';
list ETIP1;

* on fait tourner de l'angle critique

DA1VEC = ((cos tet1c) * ETIP1) + ((sin tet1c) * ETIP2);
DA1VEC = da1* DA1VEC;
list DA1VEC;

* propagation du front de fissure

p1tip1 = p1tip1 PLUS DA1VEC;

list p1tip1;
lcrack11=(p1tip1 droi lcrack11) coul 'ROUG';

*****
***** Actualisations ***
** des level set

psi11 phi11 = PSIPHI s1 lcrack11 'DEUX' p1tip1;

* trac (s1 et lcrack11);

* trac (surf et lcrack11 );
*   TRAC phi11 (s1 et lcrack11) isolv7;
*   TRAC psi11 (s1 et lcrack11) isolv7;

*****
* du modele, de la rigidite,... (inutile pour le materiau)
Che1X . it1 = TRIE mod1tot psi11 phi11;
*mod1tot = m1 et mod1b;
TAB1.'MODELE'      = mod1tot;

*** resolution non-lineaire PASaPAS ***
tlast1 = extr TAB1.'TEMPS_CALCULES' (dime TAB1.'TEMPS_CALCULES');
tcalc1 = TAB1.'TEMPS_CALCULES' et (PROG (tlast1 + 1e-5));
Ncalc1 = dime tcalc1;

TAB1.'TEMPS_CALCULES' = tcalc1 ;
TAB1.'TEMPS_SAUVES'   = tcalc1 ;

PASAPAS TAB1;

*****
*** a chaque propa il faut une nouvelle table, car le contour change...
SUPTAB = TAB1 ;
SUPTAB.'OBJECTIF' = MOT 'J';
SUPTAB.'PSI' = psi11;
SUPTAB.'PHI' = phi11;
SUPTAB.'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;

SUPTAB.'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
SUPTAB.'COUCHE' = 1;

```

```

G_THETA SUPTAB;
q7 = (SUPTAB . 'CHAMP_THET1') ;

vq7 = VECT q7 AZUR ;
*   trac vq7 (s1 et lcrack11);

*** Calcul des FIC par methode integrale G_THETA (1) ***
KTAB = TABL;
KTAB . 'OBJECTIF' = MOT 'DECOUPLAGE';
KTAB . 'PSI' = psi11;
KTAB . 'PHI' = phi11;
KTAB . 'FRONT_FISSURE' = p1tip1 ;
KTAB . 'MODELE' = mod1tot;
KTAB . 'CARACTERISTIQUES' = mat1tot;
KTAB . 'SOLUTION_PASAPAS' = TAB1;
KTAB . 'COUCHE' = 1;

G_THETA KTAB;
*
mess Ncalc1;

j=0;
Ncalc2=Ncalc1-1;

repe boucl2 Ncalc2;
  K1G = KTAB . 'RESULTATS' . 'I'.(j);
  K2G = KTAB . 'RESULTATS' . 'II'.(j);
  si((abs K2G) <eg (1.E-6*(abs K1G)));
    tet1c = 0.;
  sino;
    tet0c = K1G / K2G;
    tet8c = (tet0c**2) + 8.;
    tet1c = tet0c - ( (sign K2G) * (tet8c**0.5) );
    tet1c = 2. * (atg (0.25 * tet1c));
  fins;
  mess 'angle de propagation' tet1c;
  j=j+1;
fin boucl2;

moy= enti(Ncalc1/2);
moy1=moy-1;
j=1;
repe Boucl4 (Ncalc1 - 1);

  K1G = KTAB . 'RESULTATS' . 'I'.(j);
  K2G = KTAB . 'RESULTATS' . 'II'.(j);

  fact1= 4.*(2.**0.5)*(K2G**3);
  fact2=((K1G**2) + (8.*(K2G**2)))**0.5;
  fact3= (K1G**2.)+(12.*(K2G**2.));
  * Keq=(fact1*(K1G+(3.*fact2)))/((fact3-(K1G*fact2))**1.5);
  si ((abs K1G) >eg (abs K1C));
  QUITTER BOUCL4;
  fins;
  j=j+1;

fin BOUCL4;

```

```

mess 'le pas' i;
mess 'K1G=' K1G;
mess 'K2G=' K2G;
*mess 'Keq=' Keq;
mess 'KIC=' KIC;

*****

* i etant l indice de la table de PASAPAS TAB1,
* il faut l'incrémenter avant et apres chaque appel a pasapas

*it1 = it1 + 1;
*Che1X . it1 = Che1X . (i - 1);
fin BT1;
*****
ev2=@global tab1 cl3 evol1 FY;
dess ev2;
K=(Ncalc0-1)+(2*nt1);

cod1 = prog;
for1 = prog;
ipost = -1;
Npost = k-1;
repe BPOST1 (Npost + 1);
ipost = ipost + 1;
u1i = TAB1 . 'DEPLACEMENTS' . ipost;
cod1i = extr u1i 'UX' DIOUV;
cod1 = cod1 et (prog cod1i);
frea1i = TAB1 . 'REACTIONS' . ipost;
for1i = extr frea1i 'FY' DIPIM ;
for1 = for1 et (prog for1i);
fin BPOST1;
evfcod1 = EVOL 'VERT' 'MANU' 'ouverture' cod1 'force' for1 ;
opti sort ouverture;
dess evfcod1 tdess1 'TITR' 'Force - Ouverture';
sort 'EXCE' evfcod1;
*****
*****
* quelques tracés *****
K=(Ncalc0-1)+(2*nt1);
list K;
u1i = TAB1 . 'DEPLACEMENTS' . K;
list i;
u1phy = XFEM 'RECO' u1i mod1tot ;
var1i = TAB1 . 'VARIABLES_INTERNES' . K;
sig1i = TAB1 . 'CONSTRAINTES' . K;
def1i = ELAS mod1tot sig1i mat1tot;
TRAC var1i mod1tot (DEFO u1phy surf 20.) 'TITR' 'EPSE';
TRAC (exco EPYY def1i) mod1tot (DEFO u1phy surf 20.) 'TITR' 'EPYY';
*****
*****
u0phy = XFEM 'RECO' u1i mod1tot ;
ucr0u1 ucrk0d1 = XFEM 'FISS' lcrack11 u1i mod1tot ;
def0 = DEFO u0phy surf 200.;
TRAC sig1i mod1tot def0;
def0 = def0 et (DEFO ucr0u1 lcrack11 200.)
et (DEFO ucrk0d1 lcrack11 200.);

TRAC def0;
* TRAC defel0 mod1tot lcrack10;
* TRAC svm0 mod1tot (surf et lcrack10);
*****

```

Références bibliographiques

- [1] Kachanovl. M. (1958). "Time of the Rupture Process under Creep Conditions, Bull". SSR Acad. Sci., Division of Technical Sciences, 8, pp. 26-31.
- [2] Lemaitre, J. and Chaboche J. L. (1990). " Mechanics of solid materials", Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Pijaudier-Cabot, G. et Bazant, Z. P. (1987). "Non-local damage theory", Jrn. of Eng. Mech. vol. 113, n° 10, p. 1512-1533.
- [4] A.A. Griffith, (1921). "The phenomena of rupture and flow in solids". Philosophical Transactions of the Royal Society of London A221, 163-198.
- [5] Dugdale, D. (1960). "Yielding of steel sheets containing slits". *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 100 – 104. 3, 69, 70.
- [6] Irwin G.R. (1957). "Analysis of the Stresses and Strains near the End of Crack Traversing a Plate". ASME J. Appl. Mech., 24, pp. 361-364.
- [7] Williams M. L. (1957). "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack". Journal of Applied Mechanics; 24: 109-114.
- [8] H. M. Westergaard (1939). "Bearing pressures and cracks". Trans. ASME, J. Appl. Mech., 6:49-53.
- [9] Patrice, D. (1987). " Modèle numérique du comportement non-linéaire d'ouvrages massif en béton non armé". *École polytechnique fédérale de LAUSANNE*, thèse de doctorat.
- [10] Irwin, G.R. (1960). "Plastic zone near a crack tip and fracture toughness". Proceedings of the 7th Sagamore Conference, New York, USA, p. 63.
- [11] Eshelby, J.D. (1974). "Calculation of energy release rate. In: Prospect of Fracture Mechanics", pp.69–84, Nordhoff, UK.
- [12] Rice, J.R. (1968). "Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks". Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 35 (2), 379–386.
- [13] G. I. Barenblatt. (1959). "The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: General ideas and hypothesis, axially symmetric cracks". Applied Mathematics and Mechanics, 23:622–636.
- [14] Hillerborg, A., Modéer, M. et Petersson, P. -E. (1976). "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements". Cement and concrete research, vol. 6, p. 773-782.
- [15] Hillerborg, A. (1983). "Analysis of a single crack, Fracture Mechanics of concrete", éd. F. H. Wittman, Elsevier Pubs, p. 223-249.
- [16] Hillerborg, A. (1985). "Results of three comparative test series for determining the fracture energy GF of concrete", Materials and structures, RILEM, vol. 18, n° 107, p. 407-413.
- [17] Erdogan, F. & Sih, G. (1963). "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear". Journal of Basic Engineering, 85, 519 – 527. 72, 73.
- [18] Möes N, Belytschko T. (2002). "Extended finite element method for cohesive crack growth". Eng Fract Mech; 69:813–33.
- [19] Prabel, B. (2007). " Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP". l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, thèse de doctorat.
- [20] Swenson D., Ingraffea A. (1988). "Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: theory and applications". Computational Mechanics vol. 3, p. 381-397.
- [21] S.R. Beissel, G.R. Johnson, and C.H. Popelar. (1998)." An element-failure algorithm for dynamic crack propagation in general directions". Engng Fract. Mech., 61(3-4):407- 425.

- [22] J-H Song, H. Wang, and T. Belytschko. (2008). "A comparative study on finite element methods for dynamic fracture". *Comput Mech*, 42(2):239-250.
- [23] Aliabadi, M. H. (1997). "Boundary element formulations in fracture mechanics". *Applied Mechanics Review*, vol. 50, n° 2, p. 83-96.
- [24] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P. (1996). "Meshless methods: an overview and recent developments". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3-47.
- [25] Belytschko T, Black T. (1999) "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing". *Int Numer Meth Eng*; 45(5):601-20.
- [26] Fleming M, Chu YA, Moran B, Belytschko T. (1997). "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields". *Int J Numer Meth Eng*; 40(8):1483-504.
- [27] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. GU. (1994). "Element-free Galerkin methods", *Inter. J. Numer. Meth. Engrg.* 37- 229-256.
- [28] Melenk JM, Babuska I. (1999). "The partition of unity finite element method: basic theory and applications". *Comput Meth Appl Mech Eng*; 139:289-314.
- [29] Moes N, Dolbow J, Belytschko T. (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing". *Int Numer Meth Eng*; 46:131-50.
- [30] Matallah M. et al. (2009). "A practical method to estimate crack opening in concrete structures". *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.
- [31] Dolbow J. (1999) "An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics". PhD thesis, Northwestern University.
- [33] Biolzi, L., Gambarova, P. G., Rosati, G. P. et Schuum, C. (1994). "On fracture and size effect in concrete beams", *Comp.modelling of concrete struc*, éd. H. Mang, N. Bicanic et R. De Borst, Proc. of Euro-C 1994, Int. conf. Austria, vol. 1, p. 53.62.
- [34] Mazars, J. et Waite, D. (1980). "Endommagement mécanique du béton", rapport D.G.R.S.T, n° 78.7.2697 et 78.7.2698.
- [35] Nedjar B., (1995). "Mécanique De l'endommagement. Théorie du Premier Gradient et Application Au Béton", Thèse Doctorat, L'école nationale des Ponts et Chaussées.
- [36] Mazars, J. (1984). "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure", Thèse de doctorat es Science, Université de Paris 6.
- [37] Saouridis, C. (1988). Identification et numérisation objective des comportements adoucissants: une approche multiéchelle de l'endommagement du béton, thèse de Doctorat de l'Université de Paris.
- [38] Bazant, Z. P. et Oh, P. H. (1985). "Microplane model for progressive of concrete and rock", *J. Eng. Mech. ASCE*, vol. 3, p. 559-582.
- [39] Benallal, A., Billardon, R. et Geymonat, G. (1988). "Some mathematical aspects of the damage softening rate problem, cracking and damage", éd. J. Mazars et Z. P. Bazant, "Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 247-258.
- [40] Lasry, D. et Belytschko, T. (1988). "Localization limiters in transient problems". *Int. Journ. Solids Struct.*, 24, p. 581-597.
- [41] Sluys, L. J., De Borst, R. et Mühlhaus, H.-B. (1993). "Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium". *Int. J. Solids Structures*, 30, n° 9, p. 1153-1171.
- [42] Pijaudier-Cabot, G. et Bazant, Z. P. (1987). "Non-local damage theory", *Jrn. of Eng. Mech.* vol. 113, n° 10, p. 1512-1533.

- [43] Saouridis, C, Mazars, J. (1988). "A multiscale approach to distributed damage and its usefulness for capturing structural size effect", éd. J. Mazars et Z. P. Bazant, "Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 391-403.
- [44] Saanouni, K., Chaboche, J. L. et Lesne, P. M. (1988). "Creep crack-growth prediction by a non-local damage formulation", éd. J. Mazars et Z. P. Bazant, "Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 404-414.
- [45] Murakami, H., Kendall, D. M. et Valanis, K. C. (1993). "A non-local elastic damage theory: mesh-insensitivity under strain softening", *Comput. & Struct.*, 48 (3), p. 415-422.
- [46] Dolbow J, Moes N, Belytschko T. (2000). "Discontinuous enrichment infinite elements with a partition of unity method". *Finite Elem Anal Des*; 36(3-4):235-60.
- [47] Daux C, Moes N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T. (2000). "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method". *Int J Numer Meth Eng*; 48:1741-60.
- [48] Sukumar N, Moes N, Moran B, Belytschko T. (2000). "Extended finite element method for three-dimensional crack modeling". *Int J Numer Meth Eng*; 48:1549-70.
- [49] Stolarska M, Chopp DL, Moes N, Belytschko T. (2001). "Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method". *Int J Numer Meth Eng* ; 51:943-60.
- [50] Belytschko, T., Daniel, W.J.T. and Ventura, G. (2002a) "A monolithic smoothing-gap algorithm for contact impact based on the signed distance function". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55, 101-125.
- [51] Sukumar N, Chopp DL, Moes N, Belytschko T. (2001). "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method". *Comput Meth Appl Mech Eng*; 190:6183-200.
- [52] Moës N, Gravouil A, Belytschko T. (2002). "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets part I: mechanical model". *Int J Numer Meth Eng*; 53:2549-68.
- [53] Gravouil A, Moes N, Belytschko T. (2002). "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets part II: level set update". *Int J Numer Meth Eng*; 53:2569-86.
- [54] Osher S, Sethian J. (1988). "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations". *J Comput Phys*; 79(1):12-49.
- [55] Sukumar, N. and Prevost, J.H. (2003) "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method, Part I: Computer implementation". *International Journal of Solids and Structures*, 40, 7513-7537.
- [56] R. Huang, Sukumar and Prevost, J.H. (2003) "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method, Part II: Numerical applications". *International Journal of Solids and Structures*, 40, 7539-7552.
- [57] Sukumar N, Chopp DL, Moran B. (2003). "Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation". *Eng Fract Mech*; 70:29-48.
- [58] Chopp DL, Sukumar N. (2003). "Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method". *Int J Eng Sci*; 41:845-69.
- [59] Moes N, Belytschko T. (2002). "Extended finite element method for cohesive crack growth". *Eng Fract Mech*; 69:813-33.
- [60] Zi G, Belytschko T. (2003). "New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks". *Int J Numer Meth Eng*; 57: 2221-40.
- [70] Mergheim, J., Kuh, E. and Steinmann, P. (2005) "A finite element method for the computational modeling of cohesive cracks". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63, 276-289.

- [61] Budyn E, Zi G, Moes N, Belytschko T. (2004). "A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing". *Int J Numer Meth Eng*; 61:1741–70.
- [62] Zi, G., Song, J.H., Budyn, E., Lee, S.H. and Belytschko, T. (2004) "A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth". *Modeling and Simulations for Material Science and Engineering*, 12, 901–915.
- [63] Béchet E, Minnebo H, Moes N, Burgardt B. (2005). "Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks". *Int J Numer Meth Eng*; 64:1033–56.
- [64] Laborde P, Pommier J, Renard Y, Salaun M. (2005). "High order extended finite element method for cracked domains". *Int J Numer Meth Eng*; 64:354–81.
- [65] Chahine E, Laborde P, Renard Y. (2006). "A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM". *C R Acad Sci Paris, Ser I* ; 342:527–32.
- [66] Peters, M. and Hack, K. (2005) "Numerical aspects of the extended finite element method". *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*, 5, 355–356.
- [67] Ventura G. (2006). "On elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the extended finite element method". *Int J Numer Meth Eng*; 66:761–95.
- [68] Dolbow, J., Moës, N. and Belytschko, T. (2000c) "An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact". *Finite Elements in Analysis and Design*, 36 (3) 235–260.
- [69] Dolbow, J., Moës, N. and Belytschko, T. (2001) "An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 6825–6846.
- [70] Belytschko, T., Daniel, W.J.T. and Ventura, G. (2002a) "A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55, 101–125.
- [71] Khoei AR, Nikbakht M. (2006). "Contact friction modeling with the extended finite element method (X-FEM)". *J Mater Process Technol*; 177:58–62.
- [72] Elguedj T, Gravouil A, Combescure A. (2006). "Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics". *Comput Meth Appl Mech Eng*; 195:501–15.
- [73] Dolbow J, Devan A. (2004). "Enrichment of enhanced assumed strain approximations for representing strong discontinuities: addressing volumetric incompressibility and the discontinuous patch test". *Int J Numer Meth Eng*; 59:47–67.
- [74] Legrain G, Moes N, Verron E. (2005). "Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method". *Int J Numer Meth Eng*; 63:290–314.
- [75] Belytschko T, Hao Chen H, Xu J, Zi G. (2003). "Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment". *Int J Numer Meth Eng*; 58:1873–905.
- [76] Belytschko, T. and Chen, H. (2004) "Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation". *International Journal of Computational Methods*, 1 (1), 1–15.
- [77] Zi G, Chen H, Xu J, Belytschko T. (2005). "The extended finite element method for dynamic fractures". *Shock Vib*; 12:9–23.
- [78] Réthoré J, Gravouil A, and Combescure A. (2005). "A combined space–time extended finite element method". *Int J Numer Meth Eng*; 64: 260–84.
- [79] Menouillard, T., Réthoré, J., Combescure A. and Bung, H. (2006) "Efficient explicit time stepping for the extended finite element method (X-FEM)". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68 (9) 911–939.

- [81] Wells GN, Stuys LJ, de Borst R(2002). "Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium". *Int.Numer. Meth. Eng.* 53(5):1235-1256.
- [82] Stazi F., Budyn É., Chessa J., Belytschko T. (2003). "An extended finite element method with high-order elements for curved cracks". *Computational Mechanics*, vol. 31, pp. 38-48.
- [83] D.Broek, (1982) "Elementary engineering fracture mechanics", Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, The Netherlands.
- [84] Syed Yasir Alam. (2011). "Expérimental study and numerical analysis of crack opening concrete". Doctorat de l'école centrale de Nantes et l'université de Nantes.
- [85] Vonk, R. A. (1993). "A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression", Heron Publication, *Delft University of Technology*, The netherland, vol.38, n°3.
- [86] Lorentz, E. (2008). "Modélisation et simulation numérique de l'endommagement des structure". PhD thesis, Université Paris 6.
- [87] Unger. J. F., Eckardt. S., et Könke, C. (2007). "Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 196, pp. 4087_4100.
- [88] Meschke.G, Dumstorff, P. (2007). "Energy-based modeling of cohesive and cohesionless cracks via X-FEM". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 196, pp. 2338_2357.
- [89] ACI 446.1R-91 (1999). "Fracture Mechanics of Concrete: Concepts, Models and Determination of Material Properties," reported by ACI Committee 446.
- [90] Awais Ahmed. (2009). "Extended Finite Element Method (XFEM) Modeling arbitrary discontinuities and Failure analysis ". mémoire de Master de Université degli Studi di Pavia.