République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Aboubekr BELKAID – Tlemcen.

U.A.B.B

Mémoire de Master
en Mathématiques

Spécialité : *Analyse des Equations aux Dérivées Partielles et applications.*

Thème : *Sur les semi-groupes stochastiques.*

Présenté par : Melle Fatima Zohra TCHOUAR

Devant le Jury :

Président : M. Mohammed BOUCHEKIF, Professeur, UABB-Tlemcen.

Examinateurs : M. Sidi-Mohammed BOUGUIMA, Professeur, UABB-Tlemcen.
M. Karim YADI, Maître de Conférences, UABB-Tlemcen.

Rapporteur : M. Hacen DIB, Professeur, UABB-Tlemcen.

Année Universitaire 2012-2013

Dédicaces

Avant de dédier ce travail, je tiens à remercier ALLAH tout puissant pour tout le courage, la patience et la force qu'il m'a donnés pour accomplir ce modeste travail.

Je dédie ce mémoire à …

A ma très chère mère… Ta prière et ta bienveillance m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Merci pour tout ton amour, ta tendresse et ton soutien.

A la mémoire de mon Père… Rien au monde ne vaut les efforts fournis pour mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A mes chers frères Sofiane, Oussama, Aimen, Ryad et Anes… Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A mon fiancé Merwan… Ta gentillesse, ton soutien moral et matériel, m'ont permis de réussir mes études. Sans ton aide, tes conseils et tes encouragements ce travail n'aurait vu le jour.

A mes chères amies Sarra, Nayla, Nesrine, et Ghizlen… En témoignage de l'amitié qui nous unie et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

A mes belles sœurs et leurs adorables filles… A ma grand-mère… A mes beaux-parents… A mes cousins et cousines… Et à tous les membres de la famille.

A mes collègues et amies du département Fatiha, Zahia, Anwar, Amine et bien d'autres…A tous les professeurs qui ont assuré ma formation.

Remerciements

Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries. Je suis reconnaissante aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de ce mémoire.

Mais tout d'abord, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à mon professeur M. Hacen DIB, qui a encadré mon travail tout au long de ces mois. Sa bonne humeur, sa disponibilité et ses conseils m'ont bien soutenue dans les moments de difficultés. J'ai grandement apprécié son enseignement et cela depuis le premier cours qu'il nous a donné, j'ai beaucoup appris à ses côtés. J'en suis aussi très reconnaissante pour l'intérêt qu'il a toujours porté aux idées que je lui présentais, les enrichissant de son intuition débordante.

Professeurs M. Mohammed BOUCHEKIF et M. Sidi-Mohammed BOUGUIMA m'ont fait le plaisir d'être mes enseignants durant mon cursus à l'université, ils m'ont aidée à faire mes premiers pas en E.D.P et m'ont permis de se développer dans ce fascinant domaine. Je leur témoigne mes plus sincères remerciements pour tous les efforts qu'ils ont fournis pour la réussite de ma formation.

Et concernant ce mémoire, je remercie vivement M. BOUCHEKIF de m'avoir honorée d'être président du jury, et aussi M. BOUGUIMA d'avoir accepté d'examiner ce travail. Je vous en suis reconnaissante pour le temps que vous avez sacrifié à sa lecture.

M. Karim YADI, Maître de conférences, je vous remercie infiniment pour la patience que vous aurez pour la lecture de ce mémoire, et pour tout le temps que vous lui consacrerez. Vos remarques et vos suggestions me seront très pertinentes.

Mes profonds remerciements s'étendent également à notre chef de département M. Miloud MEBKHOUT pour son accueil, son aide, sa patience et son soutien tout au long de ces années.

Je tiens aussi à saisir cette occasion pour adresser mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseigné et qui par leurs compétences m'ont soutenue dans la poursuite de mes études.

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction

Avant de définir ce qu'est un semi-groupe, nous allons situer l'importance de cette notion dans certains domaines des mathématiques pures et appliquées. Bien sûr, cela ne peut être pleinement réalisé que lorsque nous aurons une définition claire et une théorie développée. En général, les semi-groupes peuvent être utilisés pour résoudre un grand nombre de problèmes appelés *équations d'évolution*. L'utilisation de cet outil a connu une longue histoire en commençant par les travaux de Feller, Hille et Yosida. Ces types d'équations apparaissent dans de nombreuses disciplines, notamment la physique avec l'équation de la chaleur, la chimie, la biologie, l'ingénierie et même l'économie. Il s'agit généralement d'un problème de valeur initiale pour une équation différentielle qui peut être ordinaire ou partielle. Quand nous regardons l'évolution d'un système dans le cadre des semi-groupes nous le décomposons en étapes de *transition* (i.e. le système évolue d'un état A à un état B, puis de l'état B à l'état C et ainsi de suite...). La théorie des semi-groupes linéaires est très bien développée. Ce document met l'accent sur une catégorie particulière : les semi-groupes d'opérateurs linéaires fortement continus, plus précisément les semi-groupes *stochastiques*, agissant sur l'espace $L^1(X, \Sigma, \mu)$. De tels semi-groupes ont été intensivement étudiés, car ils jouent un rôle particulier dans les applications. Les semi-groupes stochastiques sont, dans la plupart des cas concrets, générés par des équations aux dérivées partielles (équations de *diffusions*). Les équations de ce type apparaissent également dans la théorie des processus stochastiques, la théorie des systèmes dynamiques et en dynamique des populations. Le livre de Lasota et Mackey [2] est une excellente référence pour de nombreux résultats sur ce sujet. Cependant, comme étape préliminaire, nous développerons le concept général d'opérateur de Markov où on écrira une partie des propriétés qui seront utilisées par la suite. Il y a aussi la théorie des semi-groupes non linéaires qui ne sera pas traitée dans ce document.

L'organisation de ce mémoire est la suivante :
-Le chapître 1 contient les notions générales et les définitions d'opérateurs et de semi-groupes de Markov.
-Ensuite, dans les chapîtres suivants nous présentons quelques exemples qui peuvent jouer

le rôle de modèles dans de nombreux domaines d'application, notamment ceux liés aux équations aux dérivées partielles et aux systèmes dynamiques.
-Enfin dans le chapître 6 nous introduisons quelques notions sur les propriétés asymptotiques des semi-groupes de Markov.

Chapître 2

Généralités

Dans ce chapître nous rappelons les principales notions sur les semi-groupes et leurs propriétés nécessaires à la lecture des chapîtres suivants (pour plus de détails voir par exemple [3]).

2.1 Semi-groupes uniformément continus

Tout au long de cette section, $(B, \|.\|)$ désignera un espace de Banach.

Définition 2.1.1 *Une famille $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de B dans B est un semi-groupe uniformément continu si:*

1. $T(0) = I$ *(I est l'opérateur identité sur B).*
2. $T(t+s) = T(t).T(s)$ *pour chaque $t, s \geq 0$ (Propriété de semi-groupe).*
3. $\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(B)} = 0.$

Définition 2.1.2 *L'opérateur linéaire défini par le domaine*

$$D(A) = \left\{ x \in B : \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et tel que

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \qquad , \forall x \in D(A),$$

est appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$.

Dans le cas des semi-groupes uniformément continus, on a $D(A) = B$.

Proposition 2.1.3 *Si $A : B \to B$ est un opérateur borné alors il est générateur d'un semi-groupe uniformément continu, et l'expression de celui-ci est donnée par*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.4 *L'expression* (2.1) *est bien définie puisque la série est convergente par le fait que*

$$\left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \frac{t^n}{n!} \left(\|A\|_{\mathcal{L}(B)} \right)^n$$

$\Longrightarrow$

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \left(\|A\|_{\mathcal{L}(B)} \right)^n = e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(B)}}.$$

2.2 Semi-groupes fortement continus

Nous revenons maintenant à une classe plus large de semi-groupes.

Définition 2.2.1 *Une famille $T(t), 0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de B dans B est un semi-groupe fortement continu si:*

1. *$T(0) = I$ (I est l'opérateur identité sur B).*
2. *$T(t+s) = T(t).T(s)$ pour chaque $t, s \geq 0$ (Propriété de semi-groupe).*
3. *$\forall x \in B$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$.*

Ce type de semi-groupe sera simplement appelé un C_0-semi-groupe.

Proposition 2.2.2 *Si $T(t)$ est un C_0 semi-groupe, alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 0$ telles que:*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq M e^{\omega t} \quad pour \quad 0 \leq t < \infty.$$

Proposition 2.2.3 *Si A est le générateur d'un C_0 semi-groupe alors A est un opérateur fermé à domaine dense.*

Rappelons que si A est un opérateur linéaire, non nécessairement borné, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble des nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ est inversible, i.e. $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur B. La famille

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}, \ \lambda \in \rho(A),$$

d'opérateurs linéaires bornés est appelée la *résolvante* de A.

Nous allons présenter maintenant un théorème très important dans la théorie des semi-groupes. La démonstration n'a pas été présentée, elle est bien détaillée dans [3].

Théorème 2.2.4 *(Hille-Yosida) Un opérateur linéaire A est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contraction $T(t)_{t\geq 0}$ $\left(\|T(t)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq 1\right)$ ssi*

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = B$.*
2. *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.*
3. *$\forall \ \lambda$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > 0, \|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$.*

De plus si A satisfait (1)–(3), alors le semi-groupe correspondant à A est unique, et il est donné par:

$$T(t)\,x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \text{pour } x \in B, \tag{2.2}$$

où A_λ représente les approximations de Yosida, définies par

$$A_\lambda = \lambda A R_\lambda. \tag{2.3}$$

Remarques 2.2.5 1) *L'expression (2.3) peut s'écrire autrement, en effet, en posant $y = R_\lambda x$, alors x satisfait*

$$x = \lambda y - Ay \tag{2.4}$$

et on aura

$$x = \lambda R_\lambda x - AR_\lambda x \quad \text{pour} \quad x \in B. \tag{2.5}$$

En appliquant l'opérateur R_λ à (2.4) et en utilisant le fait que $y = R_\lambda x$, on obtient:

$$y = \lambda R_\lambda y - R_\lambda A y \quad \text{pour} \quad y \in D(A). \tag{2.6}$$

Les équations (2.5) et (2.6) donnent

$$AR_\lambda y = R_\lambda A y \quad \text{pour} \quad y \in D(A). \tag{2.7}$$

L'équation (2.5) donne aussi

$$\lambda AR_\lambda x = \lambda^2 R_\lambda x - \lambda x \quad \text{pour} \quad x \in B.$$

Donc l'opérateur A_λ aura trois formes différentes selon le type de vecteurs auquel on l'applique

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda A R_\lambda \\ A_\lambda &= \lambda^2 R_\lambda - \lambda I \\ A_\lambda &= \lambda R_\lambda A. \end{aligned}$$

2) *L'expression* (2.2) *est bien définie parce que l'opérateur* A_λ *pour chaque* $\lambda > 0$ *fixé est un opérateur borné. En effet, nous avons*

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \left\|\lambda^2 R_\lambda x - \lambda x\right\| \\ &\leq \left\|\lambda^2 R_\lambda x\right\| + \|\lambda x\| \\ &\leq |\lambda| \left(\|\lambda R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| + \|x\| \right) \\ &\leq 2 |\lambda| \|x\| . \end{aligned}$$

3) *L'équation* (2.2) *nous permet la construction du semi-groupe* $T(t)$ *si la résolvante* R_λ *est connue. Il s'avère aussi que la construction de la résolvante lorsque le semi-groupe est donné est encore plus simple. En effet, on peut montrer que*

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x \, dt \qquad pour \quad x \in B, \ \lambda > 0. \tag{2.8}$$

Nous terminons cette section par le théorème suivant:

Théorème 2.2.6 *Soit* $T(t)_{t \geq 0}$ *un semi-groupe de contraction fortement continu sur* B, *dont le générateur est* $(A, D(A))$. *Si* $u(t) = T(t)x$ *pour* $x \in D(A)$ *fixé alors* $u(t)$ *satisfait:*

1. $u(t) \in D(A)$ *pour* $t \geq 0$;
2. $u'(t)$ *existe pour* $t \geq 0$; *et*
3. $u'(t)$ *satisfait l'équation différentielle*

$$u'(t) = Au(t) \qquad pour \quad t \geq 0$$

et la condition initiale $u(0) = x$.

Preuve

i) Pour $t = 0$, les propriétés $(1) - (3)$ sont vérifiées par hypothèses. En effet

$u(0) = x \in D(A)$.

$u'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{u(t) - u(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ existe (car $x \in D(A)$).

$u'(0) = Ax = Au(0)$.

ii) Pour $t > 0$. Soit $t_0 > 0$ fixé, Par la définition de $u(t)$, on a

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = \frac{T(t)x - T(t_0)x}{t - t_0}. \tag{2.9}$$

En remarquant que $T(t) = T(t_0)T(t-t_0)$ pour $t > t_0$, le quotient différentiel (2.9) peut être écrit comme

$$\begin{aligned}\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} &= \frac{T(t_0)T(t-t_0)x - T(t_0)x}{t-t_0} \\ &= T(t_0)\left(\frac{T(t-t_0)x-x}{t-t_0}\right) \quad \text{pour} \quad t > t_0.\end{aligned}$$

Le fait que $x \in D(A)$, la limite de $\dfrac{T(t-t_0)x-x}{t-t_0}$ existe quand $t \to t_0$ et donne Ax. Ainsi la limite de (2.9)quand $t \to t_0$ existe aussi et elle est égale à $T(t_0)Ax$.

De la même manière, si $t < t_0$, on écrit $T(t_0) = T(t)T(t_0-t)$ et par conséquent,

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} = T(t)\left(\frac{T(t_0-t)x-x}{t_0-t}\right) \quad \text{pour} \quad t < t_0.$$

Notons que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(B)} \leq Me^{\omega t_0}$ si $t < t_0$. Ainsi la limite de (2.9) quand $t \to t_0$ sera toujours égale à $T(t_0)Ax$. D'autre part

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} - T(t_0)Ax\right\| &\leq \left\|\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} - T(t)Ax\right\| + \|T(t)Ax - T(t_0)Ax\| \\ &\leq \left\|T(t)\left(\frac{T(t_0-t)x-x}{t_0-t}\right) - T(t)Ax\right\| \\ &\quad + \|T(t)Ax - T(t_0)Ax\|.\end{aligned}$$

Comme $T(t)$ est un opérateur de contraction alors

$$\left\|\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} - T(t_0)Ax\right\| \leq \underbrace{\left\|\frac{T(t_0-t)x-x}{t_0-t} - Ax\right\|}_{\substack{\downarrow\, t \to t_0 \\ 0}} + \underbrace{\|T(t)Ax - T(t_0)Ax\|}_{\substack{\downarrow\, t \to t_0 \\ 0}}.$$

Ainsi l'existence de la dérivée $u'(t_0)$ est prouvée.

iii) Ecrivons encore l'équation (2.9)sous la forme

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} = \frac{T(t-t_0)T(t_0)x - T(t_0)x}{t-t_0} \quad \text{pour } t > t_0.$$

Or la limite du quotient différentiel sur le côté gauche existe quand $t \to t_0$,par conséquent la limite sur le côté droit existe aussi quand $t \to t_0$,et on obtient

$$u'(t_0) = AT(t_0)x,$$

qui prouve que $T(t_0)x \in D(A)$ et que $u'(t_0) = Au(t_0)$. ■

2.3 Opérateurs de Markov

Considérons un ensemble X, Σ une σ-algèbre de sous-ensembles de X et μ une mesure sur Σ, posons $L^1(X,\Sigma,\mu) = L^1$. Nous définissons alors un opérateur de Markov comme suit.

Définition 2.3.1 *Soit (X,Σ,μ) un espace mesuré. Tout opérateur linéaire $P : L^1 \to L^1$ satisfaisant*

1. *$Pf \geq 0$ pour $f \geq 0$, et*
2. *$\|Pf\|_1 = \|f\|_1$, pour $f \geq 0$,*

est appelé opérateur de Markov.

Exemple 2.3.2 *Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $X = \{1, 2, 3, ...n\}$. Considérons alors $\Sigma = \wp(X)$ et μ la mesure de comptage; qui est définie sur la $\sigma-$algèbre de toutes les parties de X par*

$$\mu(S) = \text{le nombre d'éléments de } S.$$

Dans ce cas-là l'espace $(L^1(X,\Sigma,\mu), \|.\|_1)$ n'est autre que $(\mathbb{R}^n, \|.\|_{1^*})$ et ses fonctions sont représentées par des vecteurs x où $\|x\|_{1^*} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. On définit aussi dans cet espace:

- *La positivité d'un vecteur comme suit*

$$\forall x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n, \quad (x \geq 0 \implies x_i \geq 0, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n).$$

- *La positivité d'une matrice comme suit*

$$\forall A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R}), \quad (A \geq 0 \implies a_{ij} \geq 0, \ \forall\ 1 \leq i,j \leq n).$$

- *La norme d'une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ par*

$$\|A\|_{1^*} = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

Considérons l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\to Px = Ax \quad \text{où } A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Pour que P soit un opérateur de Markov il faut qu'il vérifie les deux conditions:

1. *$Px \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, i.e.*

$$\forall\ i = 1...n,\ (Px)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0, \quad \forall\ x_i \geq 0;$$

prenons $x = \left(0, ...0, \overset{k}{1}, 0, ..., 0\right)$ *alors pour $j = k$ on aura*

$$a_{ik} \geq 0,\ \forall\ i, k = 1...n.$$

2. *$\|Px\|_{1^*} = \|x\|_{1^*}$ pour $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, i.e.*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ i.e \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j &= x_j \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

En conclusion, A est une matrice Markovienne ssi

$$\begin{cases} a_{ik} \geq 0,\ \forall\ i, k = 1...n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \forall\ j = 1...n. \end{cases}$$

Les opérateurs de Markov ont de nombreuses propriétés que nous allons citer ci-dessous. En premier lieu on note que si $f,\ g \in L^1$, alors

$$Pf\,(x) \geq Pg\,(x) \text{ lorsque } \quad f\,(x) \geq g(x); \tag{2.10}$$

ceci découle de la définition; étant donné que $f \geq g \implies f - g \geq 0 \implies P\,(\,f - g) \geq 0 \implies P\,(f) \geq P\,(g)$. Tout opérateur vérifiant (2.10) est dit *monotone.*

Notation 2.3.3 *Pour la suite, on aura besoin de la notation suivante:*
$f^+(x) = \max(0, f(x))$.
$f^-(x) = \max(0, -f(x))$.
Dans ce la on remarque bien que: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ *et* $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Proposition 2.3.4 *Si* (X, Σ, μ) *est un espace mesuré et si* P *est un opérateur de Markov, alors pour chaque* $f \in L^1$, *on a les propriétés suivantes:*

1. $(Pf(x))^+ \leq Pf^+(x)$.
2. $(Pf(x))^- \leq Pf^-(x)$.
3. $|Pf(x)| \leq P|f(x)|$.
4. $\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1$.

Preuve 1. Ces inégalités sont simples à démontrer. Pour obtenir (1), notons qu'à partir de la définition de f^+ et f^-, il s'en suit que

$$\begin{aligned} (Pf)^+ &= \left(Pf^+ - Pf^-\right)^+ \\ &= \max\left(0, Pf^+ - Pf^-\right) \\ &\leq \max(0, Pf^+) = Pf^+. \end{aligned}$$

L'inégalité (2) est obtenue de la même manière.
2. L'inégalité (3) se déduit à partir de (1) et (2), en effet:

$$\begin{aligned} |Pf| &= (Pf)^+ + (Pf)^- \\ &\leq Pf^+ + Pf^- \\ &= P(f^+ + f^-) \\ &\leq P|f|. \end{aligned}$$

3.Enfin en intégrant (3) sur tout X, on obtient

$$\begin{aligned} \|Pf\|_1 &= \int_X |Pf(x)| \ \mu(dx) \\ &\leq \int_X P|f(x)| \ \mu(dx) \\ &= \int_X |f(x)| \ \mu(dx) = \|f\|_1. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.5 *L'inégalité* (4) *est très importante, et tout opérateur qui la satisfait est appelé opérateur de contraction.*

Par la proposition (2.3.4), il est facile de montrer le résultat suivant:

Proposition 2.3.6 *Si $Pf = f$ alors $Pf^+ = f^+$ et $Pf^- = f^-$.*

Preuve Notons qu'à partir de $Pf = f$ on a:

$$f^+ = (Pf)^+ \leq Pf^+ \qquad \text{et} \qquad f^- = (Pf)^- \leq Pf^-;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \int\limits_X \left[Pf^+(x) - f^+(x)\right] \mu(dx) + \int\limits_X \left[Pf^-(x) - f^-(x)\right] \mu(dx) \\
= & \int\limits_X \left[Pf^+(x) + Pf^-(x)\right] \mu(dx) - \int\limits_X \left[f^+(x) + f^-(x)\right] \mu(dx) \\
= & \int\limits_X P|f(x)|\, \mu(dx) - \int\limits_X |f(x)|\, \mu(dx) \\
= & \;\|P|f|\|_1 - \||f|\|_1 .
\end{aligned}$$

Cependant la propriété de contraction implique que

$$\|P|f|\|_1 - \||f|\|_1 \leq 0.$$

Et on a par l'hypothèse, les deux intégrandes $Pf^+(x) - f^+(x)$ et $Pf^-(x) - f^-(x)$ sont non négatifs, donc la dernière inégalité n'est vraie que si

$$Pf^+(x) = f^+(x) \text{ et } Pf^-(x) = f^-(x).$$

■

Définition 2.3.7 *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Toute fonction $f \in D(X, \Sigma, \mu)$ où $D(X, \Sigma, \mu)$ est défini par*

$$D = D(X, \Sigma, \mu) = \left\{ f \in L^1(X, \Sigma, \mu) : f \geq 0 \text{ et } \|f\|_1 = 1 \right\}$$

est appelée une densité.

2.4 Semi-groupes de Markov (Stochastiques)

Définition 2.4.1 *Soit* (X, Σ, μ) *un . Une famille d'opérateurs linéaires* $T(t) : (L^1(X), \|.\|_1) \to (L^1(X), \|.\|_1)$, $t \geq 0$ *qui satisfait:*

1. $T(0) = I$ *(*I *désigne l'opérateur identité sur* $L^1(X)$*).*
2. $T(t+s) = T(t).T(s)$.
3. $\forall f \in L^1(X), \lim\limits_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_1 = 0$.
4. $T(t)$ *un opérateur de Markov pour chaque* t *fixé.*
   est appelée semi-groupe de Markov ou Stochastique.

Le théorème suivant va nous donner une condition nécessaire et suffisante sur la résolvante du générateur pour que le semi-groupe qu'il engendre soit de Markov.

Théorème 2.4.2 *Soit* A *le générateur d'un semi-groupe de contraction* $T(t)_{t\geq 0}$*. Ce semi-groupe est de Markov ssi l'opérateur* λR_λ *est un opérateur de Markov pour chaque* λ *fixée.*

Preuve

1) Montrons d'abord que si λR_λ est de Markov, alors $T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov.

- Pour voir cela, notons d'abord qu'on a

$$e^{tA_\lambda} f = e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 R_\lambda} f \tag{2.11}$$

où

$$e^{t\lambda^2 R_\lambda} f = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \lambda^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n f. \tag{2.12}$$

De plus, pour tout $f \geq 0$, $\lambda R_\lambda f \geq 0$ et par récurrence$(\lambda R_\lambda)^n f \geq 0$. Ainsi pour $\lambda, t \geq 0$,(2.12) implique que

$$e^{t\lambda^2 R_\lambda} f \geq 0,$$

et (2.11) implique que

$$e^{tA_\lambda} f \geq 0.$$

Pour conclure montrons d'abord qu'une limite dans L^1 d'une fonction positive est positive.

En effet: Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives de L^1qui converge vers g dans L^1. Pour montrer que g est positive, on montre que $g^- = 0$.
Considérons alors

$$\begin{aligned}
\|g_n - g\|_1 &= \int_X |g_n - g| \ \mu(dx) \\
&= \int_{\{g\geq 0\}} |g_n - g\ | \,\mu(dx) + \int_{\{g\leq 0\}} |g_n - g\ | \,\mu(dx) \\
&\geq \int_{\{g\leq 0\}} |g_n - g\ | \,\mu(dx) \\
&= \int_{\{g\leq 0\}} g_n \ \mu(dx) + \int_{\{g\leq 0\}} -g \ \mu(dx) \\
&\geq \int_{\{g\leq 0\}} -g \ \mu(dx) \quad (\text{Car } g_n \geq 0) \\
&= \int_{\{g\leq 0\}} |g| \ \mu(dx) \\
&= \int_{\{g\leq 0\}} \left(g^+ + g^-\right) \ \mu(dx) \\
&= \int_{\{g\leq 0\}} g^- \ \mu(dx) \quad \left(\text{car } g^+ = 0 \text{ sur } \ \{g \leq 0\}\ \right) \\
&= \int_X g^- \ \mu(dx) \quad \left(\text{car } g^- = 0 \text{ sur } \ \{g \geq 0\}\ \right).
\end{aligned}$$

Et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $\|g^-\|_1 = 0$ donc $g^- = 0$ $p.p.$
Finalement (2.2) implique que $T(t)\,f \geq 0$ puisque c'est une limite dans L^1 d'une suite positive.

- Notons encore que si on a

$$\int_X (\lambda R_\lambda)\, f(x)\ \mu(dx) = \int_X f(x)\ \mu(dx) \quad \forall\ f \in L^1,\ f \geq 0,\ \lambda \geq 0,$$

alors on a aussi

$$\begin{aligned}\int\limits_X (\lambda R_\lambda)^2 f(x)\ \mu(dx) &= \int\limits_X (\lambda R_\lambda)(\lambda R_\lambda f)(x)\ \mu(dx) = \int\limits_X (\lambda R_\lambda f)(x)\ \mu(dx)\\ &= \int\limits_X f(x)\ \mu(dx)\,;\end{aligned}$$

et on déduit facilement que

$$\int\limits_X (\lambda R_\lambda)^n f(x)\ \mu(dx) = \int\limits_X f(x)\ \mu(dx)\,. \tag{2.13}$$

Maintenant considérons

$$\begin{aligned}\int\limits_X e^{t\lambda^2 R_\lambda} f(x)\ \mu(dx) &= \int\limits_X \sum_{n\geq 0} \frac{t^n\lambda^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n f(x)\ \mu(dx)\\ &= \sum_{n\geq 0} \int\limits_X \frac{t^n\lambda^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n f(x)\ \mu(dx)\\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{t^n\lambda^n}{n!} \int\limits_X (\lambda R_\lambda)^n f(x)\ \mu(dx)\\ \text{Par (2.13)} \qquad &= \sum_{n\geq 0} \frac{t^n\lambda^n}{n!} \int\limits_X f(x)\ \mu(dx)\\ &= e^{\lambda t} \int\limits_X f(x)\ \mu(dx)\,.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\int\limits_X T(t) f(x) \mu(dx) = \int\limits_X \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R_\lambda} f(x)\ \mu(dx)\,;$$

et puisque

$$\begin{aligned}\left|e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R_\lambda} f(x)\right| &\leq \left|e^{-\lambda t} e^{t\lambda}\right| |f(x)|\\ &\leq |f(x)|\,,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int\limits_X T(t) f(x) \mu(dx) &= \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_X e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R_\lambda} f(x)\ \mu(dx)\\ &= \int\limits_X f(x)\ \mu(dx)\,.\end{aligned}$$

2) A présent le sens inverse, si $T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov alors λR_λ est un opérateur de Markov.

- Notons qu'on a d'après (2.8)

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f \ \ dt.$$

Cependant $T(t)f \geq 0$ lorsque $f \geq 0$, implique que $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f \ dt \geq 0$ et par suite $\lambda R_\lambda f \geq 0$.

- Notons encore que :

$$\begin{aligned}
\int_X (\lambda R_\lambda) f(x) \ \mu(dx) \quad &= \quad \int_X \left(\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f(x) \ \ dt \right) \ \mu(dx) \\
\text{(Par Fubini)} \qquad &= \quad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_X T(t) f(x) \ \mu(dx) \right) dt \\
&= \quad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_X f(x) \ \mu(dx) \right) dt \\
&= \quad \int_X f(x) \ \mu(dx) \qquad \left(\text{car} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \ dt = 1 \right).
\end{aligned}$$

■

Chapître 3

Semi-groupes de Markov discrets

Commençons par voir la catégorie des semi-groupes discrets. Pour cela on prend X un ensemble dénombrable, Σ l'ensemble des parties de X $(\Sigma = \wp(X))$ et μ la mesure de comptage définie dans l'exemple (2.3.2). On étudie alors deux cas, le cas où X est un ensemble discret fini, et le cas où il est discret infini.

3.1 Dimension finie

Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $X = \{1, 2, 3, ...n\}$ comme on l'avait mentionné dans l'exemple (2.3.2), l'espace $(L^1(X), \|.\|_1)$ n'est autre que $(\mathbb{R}^n, \|.\|_{1^*})$ où $\|x\|_{1^*} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Considérons l'opérateur défini par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \to & Ax \qquad \text{Où} \qquad A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}). \end{array}$$

On remarque que

$$\|Ax\|_{1^*} = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{1^*} &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|Ax\|_{1^*} \leq \|A\|_{1^*} \|x\|_{1^*}.$$

Ceci veut dire que A est un opérateur borné, et par suite le semi-groupe engendré par A n'est autre que $T(t)x = e^{tA}x$. La question qui se pose est de savoir quand est ce que ce semi-groupe sera de Markov. La réponse sera donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *Le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ engendré par la matrice A est de Markov ssi la matrice A vérifie les conditions suivantes*

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 \quad , \forall\ i,j = 1...n \quad , i \neq j, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad , \forall\ j = 1...n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Preuve

1) Commençons par considérer que $T(t)_{t\geq 0}$ est de Markov, cela veut dire que $T(t)$ est un opérateur de Markov pour chaque $t \geq 0$ fixé.

D'après l'exemple (2.3.2), $T(t) = (e_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ vérifie que pour $t \geq 0$

$$\begin{cases} e_{ij}(t) \geq 0, \ \forall\ i,j = 1...n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij}(t) = 1, \ \forall\ j = 1...n. \end{cases}$$

On sait que

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right)|t = 0 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{tA} - I}{t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\begin{pmatrix} \frac{e_{11}(t) - 1}{t} & \frac{e_{12}(t)}{t} & \cdots & \frac{e_{1n}(t)}{t} \\ \frac{e_{21}(t)}{t} & \frac{e_{22}(t) - 1}{t} & \cdots & \frac{e_{2n}(t)}{t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{e_{n1}(t)}{t} & \frac{e_{n2}(t)}{t} & \cdots & \frac{e_{nn}(t) - 1}{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et puisque les $e_{ij}(t) \geq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij}(t) = 1$ alors $0 \leq e_{ij}(t) \leq 1, \ \forall\ i,j = 1...n$.

Comme pour $i \neq j$, $a_{ij} = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{e_{ij}(t)}{t}\right)$ donc

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \ \forall\ i,j = 1...n.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{e_{1j}(t)}{t}+\cdots+\frac{e_{jj}(t)-1}{t}+\cdots+\frac{e_{nj}(t)}{t}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij}(t)}{t}-\frac{1}{t}\right)=0.\end{aligned}$$

2) Maintenant le sens inverse, supposons que la matrice A vérifie les conditions (3.1), et montrons que $T(t)$ est un opérateur de Markov pour chaque t fixé.
Pour t fixé, écrivons

$$e^{tA}=e^{-sI}e^{sI+At}; \tag{3.2}$$

et choisissons «s» assez grand de tel en sorte que la matrice $(sI+tA)$ soit positive (ceci est possible prenons par exemple $s\geq t\sup\limits_{i}|a_{ii}|$), ceci implique que

$$e^{sI+At}=\sum_{n\geq 0}\frac{(sI+At)^{n}}{n!}\geq 0.$$

Finalement

$$e^{tA}\geq 0.$$

i.e.

$$e_{ij}(t)\geq 0,\ \forall\, i,j=1...n.$$

- Montrons que si une matrice A vérifie $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}=0 \quad ,\forall\ j=1...n\right\}$ alors il en est de même pour A^m , $\forall\ m\geq 1$.

Procédons par récurrence:
*Pour $m=1$, la propriété est vraie.
*Supposons que c'est vrai à l'ordre m et montrons que c'est aussi le cas à l'ordre $m+1$.

On a $A^{m+1}=A^mA$, donc $\left(A^{m+1}\right)_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A^m\right)_{ik}\ a_{kj}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(A^{m+1}\right)_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(A^m\right)_{ik}a_{kj} \qquad (3.3)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(A^m\right)_{ik}\right)a_{kj}=0.\end{aligned}$$

Revenons maintenant à notre démonstration et écrivons

$$T(t) = e^{tA} = I + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} (A)^n .$$

On aura alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_{ij} &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} (A^n)_{ij} \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} (A^n)_{ij} \right)}_{= 0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Passons maintenant à un ensemble discret dénombrable mais infini.

3.2 Dimension infinie

Soient $X = \mathbb{N}^*$, Σ la famille de tous les sous-ensembles de X et μ la mesure de comptage définie dans l'exemple (2.3.2). Dans ce cas l'espace $\left(L^1(X, \Sigma, \mu), \|.\|_1\right)$ devient $\left(l^1(\mathbb{N}^*), \|.\|_{1^*}\right)$ où

$$l^1(\mathbb{N}^*) = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \;\; / \;\; \sum_{n\geq 1} |x_n| < \infty \right\}.$$

Les fonctions de cet espace sont représentées par des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$, et leur norme est définie par

$$\|x\|_{1^*} = \sum_{n\geq 1} |x_n| .$$

La positivité des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ et des matrices $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ est définie comme le cas de dimension finie.

Définition 3.2.1 *Une matrice A est appelée matrice de Kolmogorov si elle vérifie les conditions suivantes*

i) $a_{ij} \geq 0 \;\; \forall \;\; i, j \;\; \geq 1, i \neq j,$

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = 0 \;\; \forall \; j \geq 1.$

Maintenant on considère l'opérateur défini par

$$\begin{array}{ccc} l^1 & \longrightarrow & l^1 \\ x & \longrightarrow & Ax \quad \text{où} \quad A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}\,, \end{array}$$

et on s'intéresse au semi-groupe qu'il engendre, i.e. les solutions des équations

$$x'_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i(t)\,, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.4}$$

Plus précisément on essaye de voir s'il est un semi-groupe de Markov ou non.

Pour cela on étudie séparément le cas où A est une matrice bornée, et ensuite non bornée.

3.2.1 Cas borné

Ce cas-là est similaire au cas de dimension finie, et on a le même résultat parce que comme on va le voir l'hypothèse A bornée fait qu'on peut utiliser les mêmes arguments utilisés avec une matrice
Explicitons d'abord de plus près le fait que $Ax \in l^1, \; \forall \; x \in l^1$.

$$Ax \in l^1, \; \forall \; x \in l^1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left|(Ax)_n\right| < \infty; \tag{3.5}$$

prenons un x particulier, $x = b^k = \left(0, ...0, \overset{k}{1}, 0, ...\right) \in l^1$, alors

$$\left(Ab^k\right)_n = \sum_{j \geq 1} a_{nj} b_j^k = a_{nk}.$$

Ainsi (3.5) donne que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad , \forall x \in l^1.$$

Ensuite le fait que A soit bornée, nécessite que les a_{ij} le soient aussi pour tout $i, j \geq 1$. En effet, puisque A est bornée, alors

$$\left\|Ab^k\right\|_{1^*} \leq \|A\| \cdot \left\|b^k\right\|_{1^*}\,,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \|A\|\,,$$

et par suite

$$|a_{nk}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \|A\| \qquad , \forall n, k \geq 1.$$

D'autre part puisque A est bornée alors d'après la proposition (2.1.3), l'expression du semi-groupe associé est

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

On définit alors pour $x = (x_n)_{n\geq 1}$,

$$(T(t)x)_n = \left(e^{tA}x\right)_n = x_n + \sum_{i\geq 1} \frac{(t)^i}{i!} \sum_{j\geq 1} \left(A^i\right)_{nj} x_j.$$

Théorème 3.2.2 *Le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ engendré par A est de Markov ssi A est une matrice de Kolmogorov.*

Preuve

- On commence par supposer que e^{tA} est de Markov.
  Donc on a que:

  $$\forall \;\; x = (x_n)_{n\geq 1} \quad , x_n \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{tA}x\right)_n \geq 0 \;, \;\; \forall \; n \geq 1;$$

  en prenant alors $x = b^k$, on obtient

  $$\left(e^{tA}\left(b^k\right)\right)_n = \delta_{nk} + t\; a_{nk} + \sum_{i\geq 2} \frac{(t)^i}{i!} \left(A^i\right)_{nk},$$

  et pour $n \neq k$

  $$0 \leq \left(e^{tA}\left(b^k\right)\right)_n = t\; a_{nk} + \sum_{i\geq 2} \frac{(t)^i}{i!} \left(A^i\right)_{nk} \quad , \; \forall \; t \geq 0,$$

  Ainsi, on déduit que

  $$a_{nk} \geq 0, \; \forall \; n \neq k.$$

  D'autre part on a aussi

  $$\forall \;\; x = (x_n)_{n\geq 1} \quad , x \geq 0, \; \left\|e^{tA}x\right\|_{1^*} = \|x\|_{1^*} \;\; , \;\; \forall \; n \geq 1,$$

  avec

  $$\left\|e^{tA}x\right\|_{1^*} = \sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{i\geq 1} \frac{(t)^i}{i!} \sum_{j\geq 1} \left(A^i\right)_{nj} x_j \right) \quad \text{pour } x \geq 0; \qquad (3.6)$$

en prenant encore $x = b^k$, on aura

$$\left\|e^{tA}\left(b^k\right)\right\|_{1^*} = 1 + t\sum_{n\geq 1} a_{nk} + \frac{t^2}{2}\sum_{n\geq 1}\left(A^2\right)_{nk} + \sum_{i\geq 3}\frac{(t)^i}{i!}\sum_{n\geq 1}\left(A^i\right)_{nk} = \left\|b^k\right\|_{1^*} = 1,$$

donc

$$t\sum_{n\geq 1} a_{nk} + \frac{t^2}{2}\sum_{n\geq 1}\left(A^2\right)_{nk} + \sum_{i\geq 3}\frac{(t)^i}{i!}\sum_{n\geq 1}\left(A^i\right)_{nk} = 0, \ \forall\ t \geq 0.$$

Ainsi tous les termes de cette série sont nuls, en particulier

$$\sum_{n\geq 1} a_{nk} = 0, \ \forall\ k \geq 1.$$

Ceci prouve bien que A est de Kolmogorov.

- A présent supposons que A est une matrice de Kolmogorov, et montrons que e^{tA} est de Markov pour chaque t fixé.

  La démonstration est similaire à celle du théorème (3.1.1), on ne va pas la reprendre, on va juste faire remarquer que:
  Le fait que les a_{ij} soient bornés pour tout $i, j \geq 1$, permet de choisir le «s» dans (3.2), et ça explique aussi le fait qu'on peut permuter les séries dans (3.3) et (3.6).

■

3.2.2 Cas non borné

Dans ce cas-là, on prend A une matrice de Kolmogorov quelconque, on note par A^* sa transposée, avec $(A^*)_{ij} = a_{ji}$,$\forall\ i, j \geq 1$ qui agit sur l^∞. L'étude du semi-groupe engendré par A a été faite par Kato [1], qui a établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de Kolmogorov quelconque engendre un semi-groupe de Markov.

On va présenter ce résultat dans le théorème suivant, la preuve est détaillée dans son article [1].

Théorème 3.2.3 [*1*] *Soit A une matrice de Kolmogorov et soit $\lambda > 0$ une constante. Le semi-groupe engendré par A est de Markov sur l^1 ssi l'équation $A^*x = \lambda x$ n'admet pas de solutions non nulles sur l^∞.*

Chapître 4

Semi-groupes de Markov et systèmes dynamiques

Dans ce chapître, on va présenter les semi-groupes qui sont engendrés par des opérateurs différentiels du premier ordre. On traite en premier lieu le cas d'un opérateur affine qui donne naissance à un système dynamique et on donne les conditions que le générateur doit vérifier pour que le semi-groupe soit de Markov. Ensuite on fait de même pour le cas d'un opérateur du premier ordre quelconque.

On va prendre $X = \mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue dx, $\Sigma = \mathcal{B}(X)$ (la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$) et on va travailler sur l'espace $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(X), dx)$ qu'on va simplement noter $L^1(\mathbb{R}^n)$.

4.1 Cas linéaire et affine

On considère l'opérateur $\widetilde{A}$ défini sur $D\left(\widetilde{A}\right) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\widetilde{A}u = -\sum_{i=1}^{n}\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Et on va chercher le semi-groupe engendré par ce dernier, pour cela on fait appel au théorème (2.2.6), qui nous donne l'équation à résoudre pour obtenir l'expression du semi-groupe $T(t)$ sans avoir à montrer son existence par le théorème de Hille-Yosida. Donc posons

$$T(t)f(x) = u(t,x),$$

où u est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \widetilde{A}u(t,x) \\ u(0,x) = f(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \widetilde{A}u(t,x) \iff \frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

C'est une E.D.P linéaire d'ordre 1, donc pour la résoudre on passe par la méthode des systèmes caractéristiques, qui consiste d'abord à chercher les intégrales premières de ce qui suit

$$dt = \frac{dx_1}{b_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j} = \cdots = \frac{dx_i}{b_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \cdots = \frac{dx_n}{b_n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j}.$$

Ces équations vont nous mener à résoudre le système différentiel linéaire suivant

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j(t) + b_1 \\ \vdots \\ \overset{\bullet}{x}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + b_i \\ \vdots \\ \overset{\bullet}{x}_n(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j(t) + b_n \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\overset{\bullet}{x}(t) = \begin{pmatrix} \overset{\bullet}{x}_1(t) \\ \vdots \\ \overset{\bullet}{x}_i(t) \\ \vdots \\ \overset{\bullet}{x}_n(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + b \iff \overset{\bullet}{x}(t) = Ax(t) + b,$$

où

$$b = (b_i)_{1\leq i\leq n} \quad \text{et} \quad A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}.$$

Donc pour trouver les intégrales premières on va résoudre le système

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}(t) = Ax(t) + b \\ x(0) = \alpha \end{cases} \quad \text{où} \quad \alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n}. \tag{4.2}$$

Pour cela on multiplie l'équation (4.2) par le facteur intégrant et on intègre de 0 à t, on obtient alors

$$e^{-tA}.x(t) = \alpha + \int_0^t e^{-As}.b\ ds,$$

donc

$$\begin{aligned}
\alpha &= e^{-tA}.x(t) - \int_0^t \sum_{n\geq 0} \frac{(-sA)^n}{n!}.b\ ds \\
&= e^{-tA}.x(t) + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^t s^n\ ds \right) A^n.b \\
&= e^{-tA}.x(t) + \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} A^n.b.
\end{aligned}$$

Par suite la solution u de notre E.D.P est une fonction quelconque H de toutes ces intégrales premières qui sont données par α. Ainsi

$$u(t,x) = H\left(e^{-tA}.x + \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} A^n.b \right);$$

et pour trouver l'expression de H, on utilise la condition initiale de (4.1) qui va donner pour $t = 0$,

$$u(0,x) = H(x) = f(x);$$

finalement l'expression du semi-groupe est donnée par

$$T(t) f(x) = f\left(e^{-tA}.x + \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} A^n.b \right).$$

Une fois ce semi-groupe trouvé, on se pose encore la question de savoir quand est ce qu'il sera de Markov. Le résultat se présente dans le théorème suivant:

Théorème 4.1.1 *Le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ engendré par l'opérateur $\widetilde{A}$ est de Markov ssi A vérifie la condition $tr(A) = 0$.*

Preuve Pour montrer que $T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov, on montre que $T(t)$ est un opérateur de Markov pour chaque $t \geq 0$ fixé.

i) La première condition est évidente puisque, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f \geq 0$, $T(t) f \geq 0, \quad \forall t \geq 0$.

ii) La deuxième condition est de voir que :

$$\|T(t) f\|_1 = \|f\|_1 , \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) , \ f \geq 0.$$

On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(t) f(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-tA}.x + \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} A^n.b\right) \ dx.$$

Posons le changement de variables

$$y = e^{-tA}.x + \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} A^n.b,$$

donc

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = e^{-tA}$$

$$\left|\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}\right| = \det \ e^{-tA} = e^{tr(-tA)} = e^{-t(tr(A))}.$$

Par suite notre intégrale devient,

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(t) f(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \ e^{t(tr(A))} \ dy.$$

Finalement cette deuxième condition sera vérifiée ssi

$$e^{t(tr(A))} = 1 \qquad \text{i.e.} \qquad tr(A) = 0.$$

■

4.2 Cas non linéaire

A présent on prend le cas d'un opérateur différentiel quelconque défini aussi sur $D(A) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ par

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} F_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Comme dans le cas linéaire, on va chercher directement l'expression du semi-groupe qui est donnée par le théorème (2.2.6), on pose alors

$$T(t) f(x) = u(t, x),$$

où u représente la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) \\ u(0,x) = f(x). \end{cases} \tag{4.3}$$

Dès lors, cette équation va donner

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) \iff \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} F_i(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i},$$

et on aura encore à résoudre une E.D.P d'ordre 1 dont le système caractéristique est le suivant

$$dt = \frac{dx_1}{F_1(x)} = \cdots = \frac{dx_i}{F_i(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{F_n(x)}, \tag{4.4}$$

qui donnera

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}_1(t) = F_1(x) \\ \vdots \\ \overset{\bullet}{x}_i(t) = F_i(x) \\ \vdots \\ \overset{\bullet}{x}_n(t) = F_n(x) \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}(t) = F(x(t)) \\ x(0) = \alpha, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Le système (4.5) représente un problème de Cauchy sous forme autonome, en outre si on suppose que F est localement Lipschitzienne, alors le système (4.5) admet une solution maximale unique sur un intervalle ouvert $\subset \mathbb{R}$, la solution de cette équation différentielle est appelée le flot, on le note ϕ_t. Ce flot vérifie la propriété du semi-groupe donnée par

$$\phi_{t+s}(\alpha) = \phi_t(\phi_s(\alpha)). \tag{4.6}$$

Or on travaille sur les semi-groupes, et comme on va le voir après, le flot va intervenir dans l'expression de ce dernier, donc nous aurons besoin que ce flot soit défini au moins sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$. Pour cela, on utilise un résultat de la théorie qui dit que: si on suppose que F est globalement Lipschitzienne, alors le flot ϕ_t est défini sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Donc la solution de (4.5) est représentée par

$$x(t) = \phi_t(\alpha). \tag{4.7}$$

On sait aussi que si on regarde ϕ_t comme une fonction de α, alors ϕ_t est une fonction bijective, notons ϕ_t^{-1} sa fonction réciproque. Nous aurons alors

$$x = \phi_t(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \phi_t^{-1}(x).$$

Par suite la solution de (4.3) est donnée par

$$u(t,x) = H\left(\phi_t^{-1}(x)\right),$$

où H est une fonction arbitraire. Elle est déterminée par la condition initiale de (4.3), qui va donner à l'instant $t = 0$,

$$u(0,x) = H\left(\phi_0^{-1}(x)\right) = H(x) = f(x),$$

finalement le semi-groupe est donné par

$$T(t) f(x) = f\left(\phi_t^{-1}(x)\right).$$

Remarque 4.2.1 *La propriété de semi-groupe pour $T(t)$ découle de (4.6). En effet, posons*

$$\beta = \phi_s(\alpha).$$

Les expressions (4.6) et (4.7) donnent

$$x(t+s) = \phi_{t+s}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \phi_{t+s}^{-1}(x) \tag{4.8}$$

et

$$\phi_t(\beta) = \phi_t(\phi_s(\alpha)) = \phi_{t+s}(\alpha) = x(t+s);$$

donc

$$\beta = \phi_s(\alpha) = \phi_t^{-1}(x) \Leftrightarrow \alpha = \phi_s^{-1}\left(\phi_t^{-1}(x)\right). \tag{4.9}$$

Par suite (4.8)et (4.9)impliquent que

$$\phi_{t+s}^{-1}(x) = \phi_s^{-1}\left(\phi_t^{-1}(x)\right).$$

Finalement

$$\begin{aligned} T(t+s) f(x) = f\left(\phi_{t+s}^{-1}(x)\right) &= f\left(\phi_s^{-1}\left(\phi_t^{-1}(x)\right)\right) \\ &= T(s) f\left(\phi_t^{-1}(x)\right) \\ &= T(s) T(t) (f(x)). \end{aligned}$$

Et maintenant après avoir trouvé cette expression, on va chercher le résultat voulu, celui de savoir quand est ce que $T(t)$ est de Markov. Pour cela on va séparer le cas de dimension 1 et le cas de dimension supérieure.

4.2.1 Cas scalaire $(n = 1)$

Dans ce cas-là, nous n'avons qu'une seule équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overset{\bullet}{x}(t) = & F(x(t)) \\ x(0) = & \alpha \end{array} \right. \quad \text{où} \quad x, \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } F \text{ une fonction définie sur } \mathbb{R},$$

et l'expression du semi-groupe reste la même

$$T(t) f(x) = f\left(\phi_t^{-1}(x)\right).$$

Le résultat est donné par le théorème suivant:

Théorème 4.2.2 *Le semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$ engendré par A est un semi-groupe de Markov ssi $F(\alpha) = cst, \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$.*

Preuve Tout d'abord il est évident de voir qu'on a

$$T(t) f \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad f \geq 0.$$

Ensuite, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, telle que $f \geq 0$, on a

$$\|T(t) f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\phi_t^{-1}(x)\right) \, dx.$$

Posons

$$y = \phi_t^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \phi_t(y),$$

donc

$$dx = \frac{\partial \phi_t}{\partial y} \, dy;$$

par suite notre intégrale devient

$$\|T(t) f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \, \frac{\partial \phi_t}{\partial y} \, dy.$$

Ainsi la condition

$$\|T(t) f\|_1 = \|f\|_1, \quad \forall \; f \geq 0,$$

implique que

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial y} = 1. \tag{4.10}$$

Maintenant examinons la dérivée de ϕ_t pour voir quand est ce que(4.10) sera vérifiée.

On va supposer que ϕ_t est analytique en t et α, et on va donner son développement de Taylor au point $t=0$.

$$\phi_t(\alpha)=\alpha+t\left(\frac{\partial\phi_t(\alpha)}{\partial t}|_{t=0}\right)+\frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\phi_t(\alpha)}{\partial t^2}|_{t=0}\right)+\sum_{k\geq 3}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\partial^k\phi_t(\alpha)}{\partial t^k}|_{t=0}\right). \quad (4.11)$$

Or on sait que ϕ_t vérifie l'équation

$$\frac{\partial\phi_t(\alpha)}{\partial t}=F(\phi_t(\alpha)), \quad (4.12)$$

donc

$$\frac{\partial^k\phi_t(\alpha)}{\partial t^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[F(\phi_t(\alpha))\right].$$

Pour calculer cette dérivée, on fait appel à la formule de Faà Di Bruno, qui donne la dérivée à n'importe quel ordre pour la fonction composée goh

$$(goh)^{(n)}=\sum_{\sum_{k=1}^n kp_k=n}\left[g^{\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)}oh\right]\prod_{i=1}^n\frac{i}{p_i!}\left[\frac{h^{(i)}}{i}\right]^{p_i}.$$

En l'appliquant à notre fonction et en utilisant (4.12), on obtient

$$(fo\phi_t)^{(n)}=\sum_{\sum_{k=1}^n kp_k=n}\left[f^{\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)}o\phi_t\right].\prod_{i=1}^n\frac{i}{p_i!}\left[\frac{(f(\phi_t))^{(i-1)}}{i}\right]^{p_i},$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi_t(\alpha)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[F(\phi_t(\alpha))\right]=F'(\phi_t(\alpha)).F(\phi_t(\alpha))\\ \frac{\partial^3\phi_t(\alpha)}{\partial t^3} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[F(\phi_t(\alpha))\right]=F''(\phi_t(\alpha)).F^2(\phi_t(\alpha))+\left(F'(\phi_t(\alpha))\right)^2.F(\phi_t(\alpha))\\ \frac{\partial^4\phi_t(\alpha)}{\partial t^4} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left[F(\phi_t(\alpha))\right]= F^{(3)}(\phi_t(\alpha)).F^3(\phi_t(\alpha))+\left(F'(\phi_t(\alpha))\right)^3.F(\phi_t(\alpha))\\ &\qquad +4F''(\phi_t(\alpha)).F'(\phi_t(\alpha)).F^2(\phi_t(\alpha)).\end{aligned}$$

Alors après calcul (4.11) devient

$$\begin{aligned}\phi_t(\alpha)= &\ \alpha+tF(\alpha)+\frac{t^2}{2}\left[F'(\alpha).F(\alpha)\right]+\frac{t^3}{3!}\left[F''(\alpha).F^2(\alpha)+\left(F'(\alpha)\right)^2.F(\alpha)\right]\\ &+\frac{t^4}{4!}\left[F^{(3)}(\alpha).F^3(\alpha)+\left(F'(\alpha)\right)^3.F(\alpha)++4F''(\alpha).F'(\alpha).F^2(\alpha)\right]+....\end{aligned}$$

Ensuite en la dérivant par rapport à α on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\phi_t(\alpha)= &\ 1+tF'(\alpha)+\frac{t^2}{2}\left[\left(F'(\alpha)\right)^2+F''(\alpha)F(\alpha)\right]+\frac{t^3}{3!}\left[4F''(\alpha)F'(\alpha).F(\alpha)\right.\\ &\left.+F''(\alpha).F^2(\alpha)+\left(F'(\alpha)\right)^3\right]+....\end{aligned} \quad (4.13)$$

Ainsi la condition (4.10) et l'équation (4.13) donnent

$$\begin{cases} F'(\alpha) = 0. \\ (F'(\alpha))^2 + F''(\alpha) F(\alpha) = 0. \\ 4F''(\alpha) F'(\alpha) . F(\alpha) + F''(\alpha) . F^2(\alpha) + (F'(\alpha))^3 = 0. \\ \vdots \end{cases} \tag{4.14}$$

Cependant cette infinité d'équations se réduit à une seule

$$F'(\alpha) = 0,$$

qui donne finalement

$$F(\alpha) = cst, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

4.2.2 Cas de dimension supérieure $(n > 1)$

Le résultat est presque le même que dans le cas scalaire, on le résume dans le théorème suivant. Pour la démonstration on a essayé de faire la même chose que le premier cas, i.e. donner le développement de Taylor pour le flot, mais on n'a pas pu aboutir au résultat, c'est pour cela qu'on a adopté une autre approche.

Pour la preuve du théorème nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 4.2.3 *Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant*

$$\det(I_n + tA) = 1 + t(tr(A)) + O(t^2).$$

Preuve Montrons d'abord que

$$\det(I_n + tA) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i),$$

où les $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ représentent les valeurs propres de A.

Supposons d'abord que A est une matrice diagonalisable, et posons

$$\begin{aligned} p(t) = \det(tI_n - A) \qquad &= \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i) \\ &= t^n \det\left(I_n - \frac{1}{t}A\right), \end{aligned}$$

donc

$$\det(I_n - sA) = s^n p\left(\frac{1}{s}\right) = s^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{s} - \lambda_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (1 - s\lambda_i),$$

finalement pour $s = -t$

$$\det(I_n + tA) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i).$$

Or on sait que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble de toutes les matrices, donc pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une suite de matrices diagonalisables $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers A.

Donc

$$\begin{aligned}
\det(I_n + tA) &= \lim_{m\to\infty} \det(I_n + tA^m) \quad \text{(car le déterminant est une fonction continue)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i^m) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i).
\end{aligned}$$

De cette expression, on tire que

$$\begin{aligned}
\det(I_n + tA) &= \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) \\
&= 1 + t\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) + t^2\left(\sum_{i<k} \lambda_i\lambda_k\right) + ...
\end{aligned}$$

Et on déduit alors

$$\det(I_n + tA) = 1 + t\,(tr\,(A)) + O\left(t^2\right).$$

■

Théorème 4.2.4 *Le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ engendré par A est un semi-groupe de Markov ssi $tr\,(J_F) = 0$, où J_F représente la jacobienne de F.*

Preuve D'après les calculs précédents, l'expression du semi-groupe est donnée par

$$T(t)\,f(x) = f\left(\phi_t^{-1}(x)\right).$$

i) C'est évident qu'on a

$$T(t)\,f \geq 0 \text{ pour tout } f \geq 0, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

ii) Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, telle que $f \geq 0$, on a

$$\|T(t)\,f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\phi_t^{-1}(x)\right)\,dx.$$

Posons

$$y = \phi_t^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \phi_t(y),$$

donc

$$dx = \det\left(J_{\phi_t}(y)\right)\ dy;$$

par suite notre intégrale devient

$$\|T(t) f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ \ \det\left(J_{\phi_t}(y)\right)\ dy.$$

Ainsi la condition

$$\|T(t) f\|_1 = \|f\|_1, \quad \forall\ f \geq 0$$

sera équivalente à

$$\det\left(J_{\phi_t}(y)\right) = 1\ \ ,\ \forall t \geq 0. \tag{4.15}$$

Observons de plus près cette jacobienne. On sait que le flot ϕ_t vérifie la propriété suivante

$$\phi_{t+s}(\alpha) = \phi_t(\phi_s(\alpha)). \tag{4.16}$$

Le calcul de la jacobienne des fonctions de (4.16) donne que

$$J_{\phi_{t+s}}(\alpha) = J_{\phi_t}(\phi_s(\alpha)).J_{\phi_s}(\alpha). \tag{4.17}$$

On pose alors

$$\psi(t,\alpha) = \det\left(J_{\phi_t}(\alpha)\right),$$

avec

$$\psi(0,\alpha) = \det\left(J_{\phi_0}(\alpha)\right) = \det(I_n) = 1. \tag{4.18}$$

Par conséquent l'équation (4.17) implique que

$$\begin{aligned}\psi(t+s,\alpha) = \det\left(J_{\phi_{t+s}}(\alpha)\right) &= \det\left(J_{\phi_t}(\phi_s(\alpha)).J_{\phi_s}(\alpha)\right)\\ &= \det\left(J_{\phi_t}(\phi_s(\alpha))\right).\det\left(J_{\phi_s}(\alpha)\right)\\ &= \psi(t,\phi_s(\alpha)).\psi(s,\alpha)\ .\end{aligned}$$

Et donc

$$\psi(t+s,\alpha) = \psi(t,\phi_s(\alpha)).\psi(s,\alpha)\ .$$

Maintenant à partir de cette équation fonctionnelle, on en déduira l'équation différentielle de ψ,
En effet, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\alpha) = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+h,\alpha)-\psi(t,\alpha)}{h},$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[\psi\left(t+h,\alpha\right)-\psi\left(t,\alpha\right)\right] &= \frac{1}{h}\left[\psi\left(t,\phi_h\left(\alpha\right)\right)\psi\left(h,\alpha\right)-\psi\left(t,\alpha\right)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\begin{array}{c}\psi\left(t,\phi_h\left(\alpha\right)\right)\psi\left(h,\alpha\right)-\psi\left(h,\alpha\right)\psi\left(t,\alpha\right) \\ +\psi\left(h,\alpha\right)\psi\left(t,\alpha\right)-\psi\left(t,\alpha\right)\end{array}\right]\end{aligned}$$

$$=\psi\left(h,\alpha\right)\left[\frac{\psi\left(t,\phi_h\left(\alpha\right)\right)-\psi\left(t,\alpha\right)}{h}\right]+\psi\left(t,\alpha\right)\left[\frac{\psi\left(h,\alpha\right)-1}{h}\right]. \tag{4.19}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial\phi_h\left(\alpha\right)}{\partial h}=F\left(\phi_h\left(\alpha\right)\right),$$

donc le développement de ϕ_h en $h=0$ à l'ordre 1 donne que

$$b=\phi_h\left(\alpha\right)=\alpha+hF\left(\alpha\right)+O\left(h^2\right). \tag{4.20}$$

On déduit alors le développement de $\psi\left(t,\phi_h\left(\alpha\right)\right)$ en $h=0$ à l'ordre 1

$$\psi\left(t,\phi_h\left(\alpha\right)\right)=\psi\left(t,\alpha\right)+h\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi\left(t,\alpha\right)}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial h}+o\left(h^2\right);$$

et par suite

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{\psi\left(t,\phi_h\left(\alpha\right)\right)-\psi\left(t,\alpha\right)}{h}\right]=\lim_{h\to0}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi\left(t,\alpha\right)}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial h}\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi\left(t,\alpha\right)}{\partial\alpha_j}F_j\left(\alpha\right);$$

finalement la limite de (4.19) quand h tend vers 0 est égale à

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(t,\alpha\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(t,\alpha\right)_{|t=0}\right)\ \psi\left(t,\alpha\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi\left(t,\alpha\right)}{\partial\alpha_j}F_j\left(\alpha\right).$$

De plus, (4.20) donne que

$$J_{\phi_h}\left(\alpha\right)=I_n+hJ_F\left(\alpha\right)+O\left(h^2\right),$$

donc

$$\det\left(J_{\phi_h}\left(\alpha\right)\right)=\det\left(I_n+hJ_F\left(\alpha\right)\right)+O\left(h^2\right),$$

et d'après le lemme(4.2.3), on déduit que

$$\det\left(J_{\phi_h}\left(\alpha\right)\right)=1+h\ tr\left(J_F\left(\alpha\right)\right)+O\left(h^2\right),$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(t,\alpha\right)_{|t=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\psi\left(h,\alpha\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\det\left(J_{\phi_h}\left(\alpha\right)\right)-1}{h}=tr\left(J_F\left(\alpha\right)\right),$$

finalement $\psi\left(t,\alpha\right)$ est solution d'une E.D.P

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(t,\alpha\right)=tr\left(J_F\left(\alpha\right)\right).\psi\left(t,\alpha\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi\left(t,\alpha\right)}{\partial\alpha_j}F_j\left(\alpha\right). \tag{4.21}$$

Montrons maintenant que

$$\psi\left(t,\alpha\right)=\det\left(J_{\phi_t}\left(\alpha\right)\right)=1 \iff tr\left(J_F\left(\alpha\right)\right)=0.$$

- Si $\psi\left(t,\alpha\right)=1$ alors (4.21) devient

$$0=tr\left(J_F\left(\alpha\right)\right).$$

- Et puis si $tr\left(J_F\left(\alpha\right)\right)=0$ alors(4.21) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(t,\alpha\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi\left(t,\alpha\right)}{\partial\alpha_j}F_j\left(\alpha\right), \tag{4.22}$$

  c'est une E.D.P d'ordre 1 dont le système caractéristique est le suivant

$$dt=-\frac{d\alpha_1}{F_1\left(\alpha\right)}=-\frac{d\alpha_2}{F_2\left(\alpha\right)}=\cdots=-\frac{d\alpha_n}{F_n\left(\alpha\right)},$$

  c'est le même que(4.4), donc la solution de(4.22) est donnée par

$$\psi\left(t,\alpha\right)=H\left(\phi_{-t}^{-1}\left(\alpha\right)\right)=H\left(\phi_t\left(\alpha\right)\right);$$

  la condition (4.18) implique que

$$1=\psi\left(0,\alpha\right)=H\left(\alpha\right),\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}^n,$$

  finalement

$$\psi\left(t,\alpha\right)=1,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}^n.$$

■

Chapitre 5

Semi-groupes de Markov et EDP d'ordre 2

Dans ce chapître, on va présenter quelques semi-groupes qui sont engendrés par des opérateurs aux dérivées partielles d'ordre deux. En commençant par un cas simple et classique qui est le semi-groupe de la chaleur engendré par le Laplacien, après on généralise à un opérateur élliptique à coefficients constants, ensuite on prend un exemple d'opérateur à coefficients non constants et on termine par un exemple d'opérateur sous elliptique.

5.1 Opérateur de Laplace

On s'intéresse dans cette section au laplacien, en considérant l'équation de la chaleur. Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématiques.

On considère l'espace $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ avec dx la mesure de Lebesgue.

On Pose $A = \Delta$ avec $D(A)$ le domaine du laplacien qui rappelons-le est

$$D(A) = \left\{u \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \Delta u \in L^1(\mathbb{R}^n)\right\} = W^{2,1}(\mathbb{R}^n).$$

Pour trouver l'expression du semi-groupe, on résout l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) = \Delta u(t,x) \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Pour trouver les solutions de cette E.D.P, on va utiliser la transformée de Fourier et calculer les solutions dans l'espace de Fourier et après revenir par transformée inverse. Cependant on sait que la transformation de Fourier n'est pas un isomorphisme de l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$, par contre elle l'est sur l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ (espace de Schwartz) qui est lui-même dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

A présent on se place dans l'espace $S(\mathbb{R}^n)$, et on définit la transformation de Fourier par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} f(x)\ dx.$$

Où $\langle .,.\rangle$ dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. On définit aussi la transformation de Fourier inverse par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\ d\xi.$$

Appliquons cela à notre équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial t} = \widehat{\Delta u(t,x)} \\ \widehat{u}(0,x) = \widehat{f}(x), \end{cases}$$

ainsi

$$\frac{\partial \widehat{u}(t,\xi)}{\partial t} = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u},$$

et on aura

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi).$$

Maintenant on applique la transformée inverse, Ceci est possible vu que $e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$u(t,x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\right) * f\right)(x).$$

Calculons

$$\begin{aligned} I = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\ e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\ d\xi \\ &= \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_j \xi_j - 4\pi^2 t \xi_j^2}\ d\xi_j. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_j \xi_j - 4\pi^2 t \xi_j^2}\ d\xi_j \\ &= e^{\frac{-x_j^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(2\pi\sqrt{t}\xi_j - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_j\right)^2}\ d\xi_j, \end{aligned}$$

posons ensuite

$$Z = 2\pi\sqrt{t}\xi_j - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_j \implies dZ = 2\pi\sqrt{t}\ d\xi_j.$$

Ainsi

$$I_j = \frac{e^{\frac{-x_j^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}} \int_{(D)} e^{-Z^2}\ dz,$$

où (D) représente la droite parallèle à l'axe des x et passant par le point $\left(0, \frac{x_j}{2\sqrt{t}}\right)$. Pour calculer cette intégrale, on utilise le théorème de Cauchy d'analyse complexe sur un contour fermé, on obtient alors

$$\int_{(D)} e^{-Z^2}\ dz = \int_{R} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi},$$

donc

$$I_j = \frac{e^{\frac{-x_j^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}};$$

par suite

$$I = \prod_{j=1}^{n} I_j = \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

Et maintenant on revient à notre espace $L^1(\mathbb{R}^n)$, en utilisant le fait que pour chaque fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite de fonctions de $S(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers cette fonction dans L^1. Finalement le semi-groupe est donné par

$$T(t) f(x) = u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} f(y)\ dy.$$

Maintenant il ne reste plus qu'à vérifier que c'est bien un semi-groupe de Markov:

- Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$,

$$T(t) f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} f(y)\ dy \geq 0$$

- Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|T(t) f\|_1 &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} f(y)\ dy\ dx \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}\ dx\right] f(y)\ dy \qquad \text{(Par Fubini)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ dy\ = \|f\|_1 \qquad \left(\text{car} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}\ dx = (4\pi t)^{\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

5.2 Opérateur elliptique à coefficients constants

Ce qu'on va présenter dans cette section c'est une généralisation du Laplacien. Pour cela on considère la matrice $A_0 = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ symétrique, définie positive, et on pose

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

L'opérateur A défini comme ça, représente un opérateur différentiel elliptique. Le cas du laplacien par exemple est représenté par la matrice $A_0 = I_n$

Pour chercher le semi-groupe qu'il engendre, on pose $D(A) = W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$, et on résout l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \quad \text{où} \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \iff \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Comme le cas du laplacien, on utilise la transformée de Fourier, donc on se place dans $S(\mathbb{R}^n)$, et après on revient à notre espace $L^1(\mathbb{R}^n)$ en exploitant le fait que $\overline{S}(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}(t,\xi)}{\partial t} &= \left(\widehat{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}\right) \\ &= -4\pi^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij} \xi_j\right) \widehat{u}(\xi) \\ &= -4\pi^2 \left(\xi^T A \xi\right) \widehat{u}(\xi), \end{aligned}$$

donc la solution est

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 t\left(\xi^T A_0 \xi\right)} \widehat{f}(\xi).$$

A présent appliquons la transformée de Fourier inverse, ce qui est possible vu que la condition $\xi^T A_0 \xi > 0$ implique $e^{-4\pi^2 t\left(\xi^T A_0 \xi\right)} \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$u(t,x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t\left(\xi^T A_0 \xi\right)}\right) * f\right)(x).$$

Par suite calculons

$$I = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t\left(\xi^T A_0 \xi\right)}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\ e^{-4\pi^2 t\left(\xi^T A_0 \xi\right)}\ d\xi.$$

Notons que $\langle x,\xi\rangle = x^T\xi$. Puisque A_0 est symétrique, définie positive alors A_0 est diagonalisable, donc il existe une matrice orthogonale O telle que

$$A_0 = ODO^T,$$

où D est une matrice diagonale telle que $diag\,(D) = (\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$

Il s'en suit que

$$\xi^T A_0\xi = \left(\xi^T O\right) D \left(O^T\ \xi\right).$$

Après on pose

$$\xi' = O^T\xi \implies \xi'^T = \xi^T O,$$

on aura alors

$$\xi^T A_0\xi = \xi'^T D\xi' = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\xi_j'^2,$$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x^t O\xi'} e^{-4\pi^2 t\left(\xi'^T D\xi'\right)} \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\left|\det\left(O^T\right)\right|}\, d\xi' \quad \text{(car } O \text{ est orthogonale)} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\sum\limits_{j,k=1}^{n} x_k O_{kj}\xi_j'}\ e^{-4\pi^2 t\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\xi_j'^2\right)}\, d\xi'. \end{aligned}$$

Puis on calcule

$$\begin{aligned} I_j &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)\xi_j' - 4\pi^2 t\lambda_j\xi_j'^2}\, d\xi' \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\left[2\pi\sqrt{t\lambda_j}\xi_j' - \frac{i}{2\sqrt{t\lambda_j}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)\right]^2}\ e^{-\frac{1}{4t\lambda_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)^2} d\xi'. \end{aligned}$$

On pose encore le changement de variables

$$Z = 2\pi\sqrt{t\lambda_j}\xi_j' - \frac{i}{2\sqrt{t\lambda_j}}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right) \implies dZ = 2\pi\sqrt{t\lambda_j}\ d\xi_j';$$

l'intégrale devient alors

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{e^{-\frac{1}{4t\lambda_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)^2}}{2\pi\sqrt{t\lambda_j}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-Z^2}\, dZ}_{=\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{4t\lambda_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)^2}}{\sqrt{4\pi t\lambda_j}}; \end{aligned}$$

on simplifie l'expression, en remarquant que

$$A_0 = ODO^T \implies A_0^{-1} = OD^{-1}O^T \ ,$$

où D^{-1} est l'inverse de D, $diag\,(D) = \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)_{1\leq j\leq n}$.

On obtient alors

$$x^t A_0^{-1} x = \left(x^t O\right) D^{-1} \left(O^t x\right),$$

et puis

$$x^T A_0^{-1} x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)^2}{\lambda_j};$$

par suite

$$\begin{aligned} I &= \prod_{j=1}^{n} I_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t\lambda_j}} e^{-\dfrac{1}{4t\lambda_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k O_{kj}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(A_0)}} e^{-\dfrac{x^T A_0^{-1} x}{4t}}; \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned} T(t)\, f(x) &= u(t,x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t\left(\xi^T A_0 \xi\right)}\right) * f\right)(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(A_0)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\dfrac{(x-y)^T A_0^{-1}(x-y)}{4t}} f(y)\ dy. \end{aligned}$$

A présent on vérifie que c'est bien un semi-groupe de Markov:

- Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$, on a bien $T(t) f \geq 0$.
- Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$,

$$\|T(t) f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} T(t) f(x)\ dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(A_0)}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\dfrac{(x-y)^T A_0^{-1}(x-y)}{4t}} f(y)\ dy\ dx$$

posons le changement de variables

$$z = O^T(x-y) \implies dz = \det\left(O^T\right) dx = dx,$$

donc

$$\begin{aligned} (x-y)^T A_o^{-1}(x-y) &= (x-y)^T O D^{-1} O^T (x-y) \\ &= z^T D^{-1} z = \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^2}{\lambda_j}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \|T(t) f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} T(t) f(x)\ dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(A_0)}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j^2}{\lambda_j}}\ dz \right) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \quad \left(\text{car} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j^2}{\lambda_j}}\ dz = (4\pi t)^{n/2}\sqrt{\det(A_0)} \right) \\ &= \|f\|_1 . \end{aligned}$$

5.3 Opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

Cette section porte sur ce qu'on appelle le semi-groupe d'Orstein Uhlenbeck. Dans ce cadre d'étude on va présenter quelques une de ses propriétés et montrer qu'il vérifie bien les conditions d'un semi-groupe de Markov. On va faire notre étude sur $\mathbb{R}$ qui se généralise bien à $\mathbb{R}^n$. A titre d'information ce semi-groupe a une relation avec les solutions de certaines équations différentielles stochastiques.

Dans toute cette section, on va prendre $X = \mathbb{R}$, muni de la mesure gaussienne $d\mu$ définie par $d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y^2}{2}}\ dy$ où dy représente la mesure de Lebesgue.

Définition 5.3.1 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$, *pour* $t \geq 0$, *on définit le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck par*

$$N(t)(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y)\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha_t = e^{-t} \\ \beta_t = \sqrt{1-e^{-2t}} \end{array} \right. . \tag{5.1}$$

On remarque bien que $N(t)(f)$ est bien défini pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$.

Remarque 5.3.2 $N(t)$ *vérifie la propriété de contraction*

$$\|N(t) f\|_1 \leq \|f\|_1 , \ \textit{pour } f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu).$$

En effet, on a

$$|N(t) f(x)| \ \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\alpha_t x + \beta_t y)|\ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dy\ ,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |N(t) f(x)\ | \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\alpha_t x + \beta_t y)|\ \frac{e^{-\frac{y^2+x^2}{2}}}{2\pi} dy\ \ dx;$$

en posant le changement de variables suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y \\ v = -\sqrt{1-e^{-2t}}x + e^{-t}y \end{array} \right. \Leftrightarrow du\ dv = dx\ dy, \tag{5.2}$$

$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2,$$

l'intégrale devient

$$\int_{\mathbb{R}} |N(t) f(x)\ | \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\ \frac{e^{-\frac{v^2+u^2}{2}}}{2\pi} du\ \ dv = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\ \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = \|f\|_1 ,$$

finalement

$$\|N(t) f\|_1 \leq \|f\|_1 .$$

Proposition 5.3.3 $N(t)$ *donné par* (5.1) *défini bien un semi-groupe de Markov.*

Preuve Montrons d'abord que $N(t)$ est un semi-groupe:

i) Pour $t = 0$, on a

$$N(0) f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_0 x + \beta_0 y)\ \frac{e^{-\dfrac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \frac{e^{-\dfrac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dy = f(x).$$

ii) Montrons la propriété de semi-groupe,

$$N(t+s)(f)(x) = N(t)(N_s f)(x) \quad , \forall\ f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu).$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$, on a

$$N(t)(N_s f)(x) = \int_{\mathbb{R}} N_s f(\alpha_t x + \beta_t y)\ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f\left(e^{-(s+t)}x + \left(\sqrt{e^{-2s} - e^{-2(t+s)}}\right)y + \sqrt{1-e^{-2s}}z\right)\ e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}\ dy\ dz;$$

en posant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} u = \left(\sqrt{e^{-2s} - e^{-2(t+s)}}\right)y + \sqrt{1-e^{-2s}}z \\ v = -\sqrt{1-e^{-2s}}y + \left(\sqrt{e^{-2s} - e^{-2(t+s)}}\right)z \end{cases}$$

$$\frac{u^2+v^2}{2} = \left(1 - e^{-2(t+s)}\right)\frac{(y^2+z^2)}{2},$$

$$\frac{D(u,v)}{D(y,z)} = \begin{pmatrix} \sqrt{e^{-2s} - e^{-2(t+s)}} & \sqrt{1-e^{-2s}} \\ -\sqrt{1-e^{-2s}} & \left(\sqrt{e^{-2s} - e^{-2(t+s)}}\right) \end{pmatrix},$$

$$\left|\frac{D(u,v)}{D(y,z)}\right| = e^{-2s} - e^{-2(t+s)} + 1 - e^{-2s} = 1 - e^{-2(t+s)},$$

on obtient

$$N(t)(N_s f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f\left(e^{-(s+t)}x + u\right)\ \frac{e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2\left(1-e^{-2(t+s)}\right)}}}{1-e^{-2(t+s)}} du\ dv.$$

D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2\left(1-e^{-2(t+s)}\right)}}\ dv = \sqrt{2\pi\ \left(1-e^{-2(t+s)}\right)},$$

donc

$$N(t)(N_s f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \left(1-e^{-2(t+s)}\right)}}\int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-(s+t)}x + u\right)\ e^{-\frac{u^2}{2\left(1-e^{-2(t+s)}\right)}} du;$$

encore une fois posons

$$u = \left(\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}\right) y \implies du = \left(\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}\right) dy,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} N(t)(N_s f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-(s+t)}x + \left(\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}\right) y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= (N_{t+s} f)(x). \end{aligned}$$

iii) Montrons que $N(t)$ est fortement continu, i.e.

$$\lim_{t\to 0^+} \|N(t) f - f\|_1 = 0, \ \forall \ f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu).$$

($*$)Commençons par montrer que cela est vrai pour les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact).
Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors on a bien

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha_t x + \beta_t y) = f(x).$$

D'autre part

$$|f(\alpha_t x + \beta_t y)| \leq \sup_{x\in \sup p(f)} |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}, d\mu),$$

donc

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y) \ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \ dy \ = f(x) \ ,$$

par conséquent,

$$\lim_{t\to 0^+} (N(t) f(x) - f(x)) = \lim_{t\to 0^+} \left[\int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y) \ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \ - f(x) \right] = 0,$$

et puisqu'on a aussi

$$\begin{aligned} |N(t) f(x) - f(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y) \ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \ - f(x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(\alpha_t x + \beta_t y)| \ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy + |f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in \sup p(f)} |f(x)| + |f(x)| \ \in L^1(\mathbb{R}, d\mu), \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t\to 0^+} \|N(t)f - f\|_1 = 0 \quad ,\forall\ f \in C_c^\infty.$$

$(*)$A présent on utilise le fait que $\overline{C_c^\infty}(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, d\mu)$, donc pour $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$, il existe $(f_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \|N(t)f - f\|_1 &\leq \|N(t)f - N(t)f_n\|_1 + \|N(t)f_n - f_n\|_1 \\ &\quad + \|f_n - f\|_1; \end{aligned}$$

le fait que $N(t)$ soit un semi-groupe de contraction donne que

$$\|N(t)f - N(t)f_n\|_1 = \|N(t)(f - f_n)\|_1 \leq \|f - f_n\|_1,$$

par suite

$$\|N(t)f - f\|_1 \leq \underset{\substack{\downarrow\ t\to 0^+ \\ 0}}{\|N(t)f_n - f_n\|_1} + \underset{\substack{\downarrow\ n\to\infty \\ 0}}{2\|f_n - f\|_1},$$

d'où la conclusion.

iv) A présent montrons qu'il est de Markov:

1/ Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$, on a bien $N(t)f \geq 0$.

2/ Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} N(t)f(x)\ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y)\ \frac{e^{-\frac{y^2+x^2}{2}}}{2\pi}dy\ \ dx;$$

en faisant le même changement de variables (5.2), notre intégrale devient

$$\begin{aligned} \|N(t)f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} N(t)f(x)\ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)\ \frac{e^{-\frac{v^2+u^2}{2}}}{2\pi}du\ \ dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\ \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du = \|f\|_1. \end{aligned}$$

■

Proposition 5.3.4 *Si on se restreint aux fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors le générateur A du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est donné par*

$$Af = \left(\frac{\partial (N(t) f)}{\partial t}\right)_{|t=0} = \frac{d^2 f}{dx^2} - x\frac{df}{dx}.$$

Preuve $N(t)$ est donné par

$$N(t)(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y)\; e^{-\frac{y^2}{2}}\; dy \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha_t = e^{-t} \\ \beta_t = \sqrt{1-e^{-2t}} \end{array} \right. .$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\alpha_t x + \beta_t y)}{\partial t} &= (\alpha_t' x + \beta_t' y) \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y) \\ &= \left(-\alpha_t x + \frac{1}{\beta_t} y\right) \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y), \end{aligned}$$

et on a aussi:
*$|\beta_t| \leq k_1 \quad , \forall\; t \in]t-\epsilon, t+\epsilon[$, avec ϵ assez petit.
*$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha_t x + \beta_t y)\right| \leq k_2$ car $\quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
Ceci implique que

$$\left|\frac{\partial f(\alpha_t x + \beta_t y)}{\partial t}\right| \leq |x + k_1 y|\, k_2,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (N(t) u)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(\alpha_t x + \beta_t y)}{\partial t}\; e^{-\frac{y^2}{2}}\; dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(-\alpha_t x + \frac{1}{\beta_t} y\right) \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y)\; e^{-\frac{y^2}{2}}\; dy; \end{aligned}$$

faisons une intégration par partie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y)\; e^{-\frac{y^2}{2}}\; dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y)\; e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad + \frac{\beta_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha_t x + \beta_t y)\; e^{-\frac{y^2}{2}}\; dy, \end{aligned}$$

avec

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y)\ e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \ \text{ car } \frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ est à support compact.}$$

Donc

$$\frac{\partial (N(t) u)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(-\alpha_t\ x \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha_t x + \beta_t y)\right)\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy.$$

Passons au calcul de la limite, puisque $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{t \to 0^+} \left(-\alpha_t\ x \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha_t x + \beta_t y)\right) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x);$$

de plus au voisinage de t, on a

$$\left|-\alpha_t\ x \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_t x + \beta_t y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha_t x + \beta_t y)\right| \leq |x k_2 + k_3| \ \in L^1(\mathbb{R}, d\mu),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{\partial (N(t) u)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)\right)\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x), \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

■

Remarque 5.3.5 *Le domaine du générateur $\widetilde{A}$ du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est donné par*

$$D\left(\widetilde{A}\right) = \left\{u \in W^{2,1}(\mathbb{R}, d\mu)\ \ tq\ x \frac{\partial u}{\partial x} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)\right\}.$$

Donc on remarque qu'il contient l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, donc pour définir $\widetilde{A}$ on fait une extension de l'opérateur A défini dans la proposition (5.3.4). *Ainsi*

$$\widetilde{A} u = \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx}\ ,\ \ \forall\ u \in D\left(\widetilde{A}\right).$$

5.4 Opérateur sous-elliptique

Pour finir ce chapître on donne juste un exemple d'un opérateur qui n'est pas elliptique (mais presque), c'est ce qu'on appelle un opérateur sous-elliptique. On travaille sur l'espace $L^1(\mathbb{R}^2, dx\ dy)$ et on prend l'opérateur défini sur $D(A) = W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ par

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

On va chercher l'expression du semi-groupe qu'il engendre. Par le théorème (2.2.6), $T(t)$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x,y) = f(x,y). \end{cases}$$

.

Par les mêmes arguments que précédemment, on se place dans l'espace $S(\mathbb{R}^2)$ et on utilise la transformée de Fourier, ce qui va donner

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}(t,\xi,\eta)}{\partial t} &= \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \\ &= 4\pi^2\xi^2 \widehat{u}(t,\xi,\eta), \end{aligned}$$

donc

$$\widehat{u}(t,\xi,\eta) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{f}(\xi,\eta),$$

par suite la solution est donnée par

$$u(t,x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right) f(x,y).$$

Pour finir calculons cette transformée inverse

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi(x\xi+y\eta)} e^{-4\pi^2\xi^2 t}\ d\xi\ d\eta \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi y\eta} d\eta\right) \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi - 4\pi^2\xi^2 t} d\xi, \end{aligned}$$

sachant que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi y\eta} d\eta = \delta(y),$$

on aura

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi - 4\pi^2\xi^2 t} d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left[2\pi\sqrt{t}\xi - \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right]}\ e^{-\dfrac{x^2}{4t}} d\xi,$$

en faisant un changement de variables, on obtient

$$z = 2\pi\sqrt{t}\xi \implies dz = 2\pi\sqrt{t}d\xi,$$

puis

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi - 4\pi^2\xi^2 t} d\xi = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}}\sqrt{\pi} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}},$$

ce qui donne

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right) = \frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \otimes \delta_y,$$

ainsi

$$u(t,x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \otimes \delta_b\right) f(x-a, y-b)\ da\ db,$$

et finalement

$$\begin{aligned} T(t) f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\dfrac{a^2}{4t}} f(x-a,y)\ da \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{4t}} f(a,y)\ da. \end{aligned}$$

On montre facilement qu'il est un semi-groupe de Markov:

i) Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$, on a bien $T(t) f \geq 0$.

ii) Pour tout $f \in L^1$, telle que $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|T(t) f\|_1 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{4t}} f(a,y)\ da \right) dx\ dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\dfrac{(x-a)^2}{4t}} dx \right) f(a,y)\ da\ dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(a,y)\ da\ dy \qquad \text{car} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{4t}} dx = \sqrt{4\pi t} \right). \end{aligned}$$

Chapitre 6

Stabilité asymptotique

Le problème de la stabilité asymptotique des opérateurs et semi-groupes de Markov a été étudié dans de nombreux papiers (on peut citer par exemple [5], [6],[7],) , à chaque fois on ajoutait de nouvelles conditions pour que le semi-groupe soit asymptotiquement stable. Cette stabilité est en quelque sorte l'étude du comportement asymptotique (quand t tend vers l'infini) des trajectoires des semi-groupes, i.e. pour f fixée on regarde $T(t)f$ et son comportement à l'infini.

6.1 Généralités

Définition 6.1.1 *Une densité f_* est dite invariante pour*

- *Un opérateur de Markov P si $Pf_* = f_*$.*
- *Un semi-groupe de Markov $T(t)_{t\geq 0}$ si $T(t) f_* = f_*$ pour chaque t fixé.*

Remarque 6.1.2 *si $T(t) f_* = f_*$ pour chaque t fixé alors on aura*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t) f_* - f_*}{t} = 0.$$

En d'autres termes, si A représente le générateur du semi-groupe $T(t)$ alors une densité invariante vérifie

$$Af_* = 0.$$

Définition 6.1.3 • *Pour un opérateur de Markov P, $\{P^n\}$ est dit asymptotiquement stable s'il existe une densité f_* invariante telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - f_*\|_1 = 0 \quad pour \quad f \in D.$$

- *Pour un semi-groupe de Markov $T(t)_{t\geq 0}$, on dit qu'il est asymptotiquement stable s'il existe une densité invariante f_* telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \|T(t)f - f_*\|_1 = 0 \quad \textit{pour } f \in D.$$

Remarque 6.1.4 *Il est clair que la stabilité asymptotique du semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ implique la stabilité asymptotique de la suite $T^n(t_0)$ pour un $t_0 > 0$ arbitraire.*

En effet, sachant que $T^n(t_0) = T(nt_0)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n(t_0) f - f_*\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|T(nt_0) f - f_*\|_1 = 0.$$

L'inverse est aussi vrai, i.e, si pour certain $t_0 > 0$, la suite $T^n(t_0)$ est asymptotiquement stable, alors le semi-groupe l'est aussi .

En effet,

$$\|T(t)f - f_*\|_1 = \|T(t)f - T(t)f_*\|_1,$$

et puisque

$$\|T(t+s)f - T(t+s)f_*\|_1 = \|T(t)(T(s)f - T(s)f_*)\|_1 \leq \|T(s)f - T(s)f_*\|_1,$$

alors la fonction $t \to \|T(t)f - T(t)f_*\|_1$ est décroissante.
D'autre part pour $t_n = nt_0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T(t_n) f - f_*\|_1 = 0,$$

ainsi nous avons une fonction positive décroissante qui tend vers 0 sur une sous-suite, ce qui implique que

$$\lim_{t\to+\infty} \|T(t) f - f_*\|_1 = 0.$$

Notons aussi que le f_* de la stabilité asymptotique, s'il existe, est unique.

6.2 Application.

Ce qu'on va présenter dans cette section c'est l'étude de la stabilité de quelques semi-groupes introduits précédemment.

1. On commence par étudier le semi-groupe engendré par une matrice A vérifiant (3.1), dans le cas de dimension 2 et le cas de dimension 3.

(a) **En dimension** 2 **:**
On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \neq 0,$$

et on calcule le semi-groupe qu'elle engendre, qui est donné par

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

On a

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on trouve que

$$A^2 + (\alpha + \beta) A = 0 \implies A^2 = -(\alpha + \beta) A.$$

Donc on déduit la relation de récurrence suivante

$$A^n = (-1)^{n-1} (\alpha + \beta)^{n-1} A,$$

qui implique que

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} (-1)^{n-1} (\alpha + \beta)^{n-1} A \\ &= I - \frac{1}{\alpha + \beta} \left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) A, \end{aligned}$$

qui donne finalement

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) & \frac{-\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) \\ \frac{-\alpha}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) & 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Une fois le semi-groupe trouvé, on cherche les densités invariantes,i.e. on cherche les $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ tel que $\|x^*\|_{1^*} = 1$, qui vérifient

$$e^{tA} x^* = x^* \iff \left(e^{tA} - I_2\right) x^* = 0,$$

$\iff$

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) & \frac{-\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) \\ \frac{-\alpha}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) & -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-t(\alpha+\beta)} - 1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\Longleftrightarrow$

$$\alpha x_1^* - \beta x_2^* = 0.$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Pour que ce point soit une densité, il suffit de prendre $c = \dfrac{1}{\alpha+\beta}$.
Après avoir trouvé les densités invariantes, on va voir s'il en existe celle qui vérifie

$$\lim_{t\to+\infty} \|T(t)x - x^*\|_1 = 0 \quad ,\forall\ x = (x_1, x_2)^T \geq 0, \|x\|_{1^*} = 1.$$

Puisqu'on est en dimension finie alors la limite se calcule terme à terme, ainsi

$$B = \lim_{t\to+\infty} e^{tA} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

On remarque bien que $\det(B) = 0$ donc l'application $x \to Bx$ n'est pas bijective, ainsi on peut affirmer qu'il existe un y tel que pour tout x, y est parallèle à Bx

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}x = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta(x_1+x_2) \\ \alpha(x_1+x_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

Donc on a le résultat recherché

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}x = x^*.$$

Finalement, on conclut que le semi-groupe engendré par une matrice (2×2) vérifiant (3.1) est asymptotiquement stable.

(b) **En dimension** 3
On considère maintenant la matrice A qui vérifie (3.1)

$$A = \begin{pmatrix} -(a_1+a_2) & b_1 & c_1 \\ a_1 & -(b_1+b_2) & c_2 \\ a_2 & b_2 & -(c_1+c_2) \end{pmatrix} \text{ avec } a_i, b_i, c_i \geq 0\ , i = 1, 2.$$

Cette fois-ci , on ne va pas calculer le semi-groupe $T(t)$ engendré par A, vu

les lourds calculs que ça demande, on va adopter une autre approche.
On commence par poser

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \det\begin{pmatrix} -(a_1+a_2) & b_1 \\ a_1 & -(b_1+b_2) \end{pmatrix} = a_1b_2 + a_2(b_1+b_2). \\
\delta_2 &= -\det\begin{pmatrix} -(a_1+a_2) & c_1 \\ a_1 & c_2 \end{pmatrix} = (a_1c_1 + c_2(a_1+a_2)). \\
\delta_3 &= \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ -(b_1+b_2) & c_2 \end{pmatrix} = b_1c_2 + c_1(b_1+b_2).
\end{aligned}$$

Sachant que $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0$, on introduit

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

et on suppose que $\delta \neq 0$, i.e. au moins l'un des $\delta_i \neq 0$, pour $i = 1, 2, 3$.
On va chercher les densités invariantes, i.e. on cherche les $\vartheta^* = (x^*, y^*, z^*)^T$ qui vérifient

$$T(t)\,\vartheta^* = \vartheta^* \quad \text{i.e.} \qquad A\vartheta^* = 0,$$

avec

$$\vartheta^* \geq 0\,, \quad \text{tq } \|\vartheta^*\|_{1^*} = x^* + y^* + z^* = 1.$$

On aura alors

$$\begin{cases} -(a_1+a_2)\,x^* + b_1y^* + c_1z^* = 0 \\ a_1x^* - (b_1+b_2)\,y^* + c_2z^* = 0 \\ a_2x^* + b_2y^* - (c_1+c_2)\,z^* = 0 \end{cases}$$

Sachant que $detA = 0$, et que $\delta \neq 0$, on affirme que ce système se réduit à deux équations

$$\begin{cases} -(a_1+a_2)\,x^* + b_1y^* + c_1z^* = 0 \\ a_1x^* - (b_1+b_2)\,y^* + c_2z^* = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

On conclut alors que l'ensemble des points invariants forme une droite (D) dans l'espace(donnée par les équations (6.2)) ,de vecteur directeur $\overrightarrow{\vartheta^*}$ qu'on va déterminer. Pour cela on laisse z comme paramètre et on cherche x et y, nous avons alors

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{c_1(b_1+b_2) + b_1c_2}{\delta_1} z^* \\
y^* &= \frac{c_2(a_1+a_2) + a_1c_1}{\delta_1} z^*
\end{aligned}$$

Donc tout point de la droite (D) est de la forme

$$\vartheta^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \mu\,\overrightarrow{\vartheta^*},$$

où $\overrightarrow{\vartheta^*}$ représente le vecteur directeur de la droite (D), il est défini par

$$\overrightarrow{\vartheta^*} = \begin{pmatrix} \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Et pour que ces points invariants soient une densité, il faut poser

$$\mu = \delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Ensuite, partons d'un $\vartheta = (x_0, y_0, z_0)^T$ et calculons

$$(x(t), y(t), z(t))^T = T(t)\vartheta.$$

Donc si on pose $u(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, $u(t)$ représente la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au, \\ u(0) = \vartheta = (x_0, y_0, z_0)^T. \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x'(t) = -(a_1 + a_2)x(t) + b_1 y(t) + c_1 z(t) \\ y'(t) = a_1 x(t) - (b_1 + b_2)y(t) + c_2 z(t) \\ z'(t) = a_2 x(t) + b_2 y(t) - (c_1 + c_2)z(t) \end{cases}$$

De cela, on remarque que

$$x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0,$$

donc on obtient l'équation suivante

$$x(t) + y(t) + z(t) = x_0 + y_0 + z_0. \tag{6.3}$$

C'est l'équation d'un plan $(\wp)$ dans l'espace, ce plan représente l'ensemble des points qui contient les trajectoires.
Maintenant pour l'étude de la stabilité de $T(t)$, on démarre d'une densité, i.e. d'un

$$\vartheta = (x_0, y_0, z_0)^T \geq 0, \text{ t.q } x_0 + y_0 + z_0 = 1,$$

et on regarde si

$$\lim_{t\to+\infty} \|T(t)\vartheta - \vartheta^*\|_{1^*} = 0 \text{ }, \forall \text{ } \vartheta = (x_0, y_0, z_0)^T \geq 0, \text{ t.q } x_0 + y_0 + z_0 = 1.$$

Pour cela, on note d'abord que $\overrightarrow{\vartheta}_1$, $\overrightarrow{\vartheta}_2$ définis par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\vartheta}_1 &= (1, 0, -1)^T \\ \overrightarrow{\vartheta_2} &= (0, 1, -1)^T \end{aligned}$$

représentent bien deux vecteurs directeurs du plan

$$(\wp') : x(t) + y(t) + z(t) = x_0 + y_0 + z_0 = 1,$$

puisqu'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ -1 & -1 & \delta_1 \end{vmatrix} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \neq 0. \tag{6.4}$$

Ensuite on note que $\overrightarrow{\vartheta^*} \notin (\wp')$, donc géométriquement la droite (D) et le plan $(\wp')$ s'intersectent en un point qu'on va appeler $\vartheta_s = (x_s, y_s, z_s)^T$.
A présent on va montrer que pour toute courbe dans $(\wp')$ donnée par $(x(t), y(t), z(t))^T$, on a le résultat suivant:

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t), z(t))^T = (x_s, y_s, z_s)^T.$$

Pour faciliter les calculs, on va faire un changement de repère, en considérant les nouveaux vecteurs $\left(\overrightarrow{\vartheta}_1, \overrightarrow{\vartheta_2}, \overrightarrow{\vartheta^*}\right)$. Ceci est possible grâce à (6.4).
Et on va chercher les coordonnées de la courbe $(x(t), y(t), z(t))^T$ dans le nouveau repère, pour cela on pose

$$(x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, -1)\, u(t) + (0, 1, -1)\, v(t) + (\delta_{3,}\delta_2, \delta_1)\, w(t),$$

ceci va donner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ -1 & -1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \delta - \delta_3 & -\delta_3 & -\delta_3 \\ \delta_2 & \delta - \delta_2 & -\delta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pour chercher l'expression de $(u(t), v(t), w(t))^T$, on procède comme suit

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - c_1 & b_1 - c_1 & 0 \\ a_1 - c2 & -b_1 - b_2 - c2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_1 - c2 & -b_1 - b_2 - c2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

et

$$w'(t) = 0.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{tB} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ où } B = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_1 - c2 & -b_1 - b_2 - c2 \end{pmatrix},$$

et

$$w(t) = k, \text{ où } k \text{ est une constante.}$$

Maintenant on va calculer

$$\lim_{t \to +\infty} (u(t), v(t), w(t)).$$

On a

$$\lim_{t \to +\infty} w(t) = k,$$

donc il ne reste plus qu'à calculer

$$\lim_{t \to +\infty} (u(t), v(t)),$$

qui est en fait la $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tB}$. D'ailleurs on va montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tB} = 0.$$

Pour aboutir à ce résultat, on montre que les valeurs propres de B sont de parties réelles strictement négatives.
En effet, montrons que les racines de p_B sont de parties réelles strictement négatives.
On a

$$p_B(\lambda) = \lambda^2 - tr(B)\lambda + \det(B),$$

avec

$$tr(B) = -a_1 - a_2 - c_1 - b_1 - b_2 - c2,$$

et

$$\det(B) = a_1 b_2 + c_2 a_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + c_2 a_2 + c_1 b_1 + c_1 b_2 + b_1 c_2 + a_1 c_1.$$

On remarque que $tr(B) \neq 0$ car sinon $a_1 = a_2 = c_1 = b_1 = b_2 = c2 = 0$ et on aura la matrice nulle, ce qui n'est pas notre cas.

Supposons alors que les racines sont de la forme

$$Z_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \text{ et } Z_2 = \alpha_2 + i\beta_2.$$

On sait qu'ils vérifient

$$\begin{aligned} Z_1 + \ Z_2 &= tr\,(B) \\ Z_1 Z_2 &= \det(B) \end{aligned}$$

Donc on a bien que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(Z_1 + \ Z_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 < 0 \\ \mathrm{Re}\,(Z_1 \ Z_2) &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(Z_1 + \ Z_2) &= \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \mathrm{Im}\,(Z_1 \ Z_2) &= \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\beta_1 = -\beta_2 \Rightarrow \beta_1\,(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \implies (\beta_1 = 0) \curlyvee (\alpha_1 = \alpha_2)\,.$$

Donc si

i.

$$\beta_1 = 0 \implies \beta_2 = 0,$$

$\implies$

$$Z_1 = \alpha_1 \text{ et } \ Z_2 = \alpha_2,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &< 0 \\ \alpha_1\alpha_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$\alpha_1, \alpha_2 < 0.$$

Donc les racines de p_B sont réelles strictement négatives.

ii. Et si

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

alors

$$Z_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \text{ et } \ Z_2 = \alpha_1 - i\beta_1\ ,$$

avec

$$2\alpha_1 < 0.$$

Donc les racines de p_B sont de parties réelles strictement négatives.

De tout cela, on déduit que
$$\lim_{t\to+\infty} e^{tB} = 0.$$

On conclut alors que

$$\lim_{t\to+\infty} \left(u\left(t\right), v\left(t\right), w\left(t\right)\right)^T = (0, 0, k).$$

Et par le biais de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ -1 & -1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)^T &= \lim_{t\to+\infty} \left(u\left(t\right) + \delta_3 w, v\left(t\right) + \delta_2 w, -u\left(t\right) - v\left(t\right) + \delta_1 w\right) \\ &= k\ \left(\delta_3, \delta_2, \delta_1\right)^T, \end{aligned}$$

$$\left(x_s, y_s, z_s\right)^T = \lim_{t\to+\infty} \left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)^T = k\ \left(\delta_3, \delta_2, \delta_1\right)^T.$$

Puisque $\left(x_s, y_s, z_s\right)^T \in (\wp')$,alors on prend $k = \dfrac{1}{\delta}$.
Donc pour toute courbe $\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)^T$ du plan $(\wp')$,on a bien

$$\lim_{t\to+\infty} \left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)^T = \left(x_s, y_s, z_s\right)^T,$$

ainsi on a montré que le semi-groupe engendré par la matrice A est asymptotiquement stable.

2. Comme une deuxième application, on va étudier le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, et voir s'il est asymptotiquement stable ou pas.

   Soit $f \in L^1\left(\mathbb{R}, d\mu\right)$, où $d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y^2}{2}}\ dy$ pour $t \geq 0$, on pose

   $$N\left(t\right)\left(f\right)\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\alpha_t x + \beta_t y\right)\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha_t = e^{-t} \\ \beta_t = \sqrt{1 - e^{-2t}} \end{cases}.$$

   (a) Cherchons les densités invariantes, i.e. cherchons les solutions de

   $$Af_* = 0,$$

cette équation implique que

$$f''_*(x) - x f'_*(x) = 0,$$

et qui donne

$$f_*(x) = c_1 + c_2 \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

Prenons par exemple $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$, alors on a bien

$$f_*(x) = 1 \in L^1(\mathbb{R}, d\mu) \text{ et } \|f_*\|_1 = 1.$$

(b) Regardons si on a

$$\lim_{t\to+\infty} \|N(t) f - f_*\|_1 = 0 \quad \text{pour } f \geq 0, \ \|f\|_1 = 1.$$

Commençons par considérer les $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} f(\alpha_t x + \beta_t y) = f(x),$$

et

$$|f(\alpha_t x + \beta_t y)| \leq \sup f(x) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y) \, e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to+\infty} f(\alpha_t x + \beta_t y) \, e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} [N(t) f(x) - f_*(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y) \, e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \right] - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |N(t) f(x) - f_*(x)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t x + \beta_t y) \, e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy - 1 \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup f(x) + 1 \right) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu). \end{aligned}$$

Finalement

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left[N\left(t\right)f\left(x\right)-f_{*}\left(x\right)\right]=\int_{\mathbb{R}}\lim_{t\to+\infty}\left[N\left(t\right)f\left(x\right)-f_{*}\left(x\right)\right]=0.$$

A présent on utilise le fait que $\overline{C_c^{\infty}}\left(\mathbb{R}\right)=L^1\left(\mathbb{R}\right)$, donc
pour $f\in L^1\left(\mathbb{R}\right)$, il existe $\left(f_n\right)_n\in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_1=0.$
Donc

$$\begin{array}{rcl}\|N\left(t\right)f-f^{*}\|_1 & \leq & \|N\left(t\right)f-N\left(t\right)f_n\|_1+\|N\left(t\right)f_n-f^{*}\|_1\\ & \leq & \begin{array}{ccc}\|N\left(t\right)f_n-f^{*}\|_1 & + & \|f-f_n\|_1\\ \downarrow\ t\to0^{+} & & \downarrow\ n\to\infty\\ 0 & & 0\end{array}\end{array}$$

On conclut alors que le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est asymptotiquement stable.

Chapitre 7

Conclusion

Les semi-groupes de Markov ou stochastiques, un sujet très intéressant et riche en théorie, cependant ce qu'on a constaté en faisant des recherches bibliographiques dans ce travail, c'est qu'il n'existe pas de résultats généraux qui donnent des conditions sur le générateur pour que le semi-groupe engendré soit de Markov, c'est pour cela que dans ce mémoire, on a considéré quelques exemples d'opérateurs très utilisés dans la pratique et on a mis en place des conditions sur chacun d'eux pour savoir s'ils engendrent un semi-groupe de Markov sans avoir à le calculer forcément.

Ensuite nous avons étudié la notion de stabilité asymptotique, qui n'est pas facile à établir pour n'importe quel semi-groupe. On l'a étudiée seulement pour quelques cas. En théorie, on peut trouver des théorèmes qui fournissent des résultats de stabilité mais pour une catégorie restreinte de semi-groupes, on en a cité quelques références dans la bibliographie.

Bibliographie

[1] T. Kato, On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations, J.Math. Soc. Japan 6 (1954), 1–15.

[2] A. Lasota, M. C. Mackey, Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics, Springer Applied Mathematical Sciences 97, New York, 1994.

[3] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer 44, Berlin, New York, 1983.

[4] K. Pichór, R. Rudnicki, M. Tyran-Kamińska, Stochastic semigroups and their applications to biological models, Demonstratio Mathematica.2 (2012), 463-494.

[5] K. Pichór, Asymptotic stability and sweeping of substochastic semigroups, Ann. Polon.Math. 103 (2012), 123–134.

[6] K. Pichór, R. Rudnicki, Continuous Markov semigroups and stability of transport equations, J. Math. Anal. Appl. 249 (2000), 668–685.

[7] R. Rudnicki, On asymptotic stability and sweeping for Markov operators, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 43 (1995), 245–262.