REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN –

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Perturbations, Moyennisation et Applications aux Biomathématiques (PeMAB)

Sur le Thème**:**

Sur les problèmes de Cauchy pour les équations différentielles floues

Présenté par :

Melle : Chamkha Fatima Zohra.

Devant le jury composé de :

Présidente : Mme. Hadj Slimane Prof. Université de Tlemcen

Examinateur : Mr. M.Menouer Prof. Université de Tlemcen

Encadreur : Mr. M.Derhab Prof. Université de Tlemcen

Année universitaire : 2012 2013

Remerciements

Tout d'abord Je remercie mon Dieu qui m'a donné la volonté,
la patience et surtout la santé durant toutes
mes années d'étude.

Je tiens en tout deuxième lieu à exprimer ma profonde
gratitude à mon encadreur **Mr. M.DERHAB** pour
son orientation, ses conseils ainsi
que ses précieuses directions.

J'exprime ma profonde et respectueuse gratitude à
Madame *J.Hadj Slimane* qui m'a fait l'honneur
d'accepter de présider le jury.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à *Mr.* **M.MENOUER**
pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner
ce travail et faire partie du jury.

J'exprime également ma gratitude à Mr. **MEBKHOUT** et Mr.***K.YADI***
mon professeur et responsable de notre option
Pe. M. A. B et tous mes enseignants.

Enfin, merci à tous et pour tous.

Dédicaces

À

- Mes chers parents
- Mes chers frères et mes sœurs,
- Toute ma famille,
- Mes fidèles amies.
- Tous les étudiants du 2éme Master Mathématiques PeMAB
- Tous ceux qui me sont chers,
- Tous ceux qui ont sacrifié leur temps pour la science,
- Tous ceux qui utilisent la science pour le bien et la prospérité de l'humanité,
- Tous ceux qui militent pour une humanité solidaire et prospère.

Chamkha Fatima Zohra.

Sur les problèmes de Cauchy pour les équations différentielles floues

CHAMKHA FATIMA ZOHRA

Table des Matières

2

Introduction

La théorie des sous-ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite. Elle a été développée par Lotfi Zadeh en 1965 afin de représenter mathématiquement l'incertitude et l'imprécision relative à certaines classes d'objets et sert de fondement à la logique floue, la théorie des ensembles flous est en fait selon Zadeh est le formalisme le plus adapté pour décrire de manière qualitative les variables linguistiques.

La théorie des ensembles flous et plus exactement la logique floue a de nombreuses applications. En 1978, la société danoise F. L. Smith réalise le contrôle d'un four à ciment. C'est la première véritable application industrielle de la logique floue. A la fin des années 80, plusieurs applications commencent à immerger au Japon, cette théorie a été utilisée dans l'industrie, le traitement des eaux, les grues populaires, les métros, les systèmes de ventilation et de climatisation. A partir des années 90, le champ d'application est devenu trés vaste. Cette théorie a été utilisée dans l'électroménager (laves-linges, aspirateurs,...), les systèmes audio-visuels (appareils de photo autofocus, caméscopes à stabilisateur d'image, photocopieurs,...), l'automobile (suspension, climatisation,...), la robotique, le contrôle des procédés complexes, l'évaluation sensorielle (industrie agro-alimentaire, textile,...), le traitement du signal (son, image,...), la géographie (voir [4]), la mesure de la pauvreté dans certains pays (voir [8]),....

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré a la théorie des ensembles flous et l'arithmétique floue. Le second chapitre, on donne quelques définitions et résultats concernant l'analyse floue et le dernier chapitre est consacrée aux équations différentielles floues.

Les résultats de ce mémoire se trouvent dans [2].

Chapitre 1

Les sous ensembles flous

Les sous-ensembles flous (ou parties flous) ont été introduits afin de modéliser la représentation humaine des connaissances, et ainsi améliorer les performances des systèmes de décision qui utilisent cette modélisation.

Définition 1.0.1 Dans la théorie des ensembles classique il n'ya que deux situations acceptables pour un élément ,appartenir ou ne pas appartenir à un sous ensemble, le mérite de zadeh a été tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée permettre des graduation dans l'appartenance d'un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous-ensemble.

Soit X un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de X , un sous-ensemble flou A de X est défini par sa fonction d'appartenance u_A, telle que

$$\begin{array}{lll} u_A & X \to & [0,1] \\ & x \mapsto & u_A(x) \end{array}$$

ou u_A représente le degré d'appartenance avec lequel x appartien à l'ensemble flou A.

Remerque 1.0.2 Cette fonction d'appartenance est l'équivalent de la fonction caractéristique d'un ensemble classique.

Exemple 1.0.3 Conséderons l'expression "jeune". Dans le contexte "une personne jeune" peut être modélisée en utilisant les ensembles flous

L'ensemble flou A est défini par

$$\begin{array}{llll} u_A & [0,100] & & \to [0,1] \\ & x & & \mapsto u_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } & 0 \le x \le 25 \\ \frac{40-x}{25} \text{ si } & 25 < x \le 40 \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \end{array}$$

L'âge 1 est certainement jeune et 100 non jeune

Exemple 1.0.4 Conséderons l'expression linguistique suivante "un nombre réel voisin de 0" cette expression peut être définie par l'ensemble suivant

$$\begin{array}{lll} u_A & \mathbb{R} & \to [0,1] \\ & x & \mapsto u_A(x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

Exemple 1.0.5 La fégure 1.1 montre graphiquement la différence entre un ensemble classique et un ensemble flou

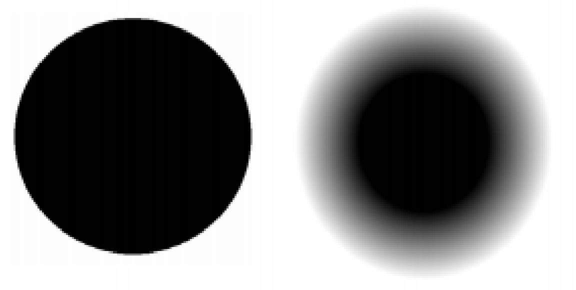

Fig 1.1 la déférence entre l'ensemble classique et l'ensemble floue. .

Exemple 1.0.6 Rappelons que un ensemble net(classique) peut être défini par un fonction caractéristique

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \quad\quad x \in A \end{cases}$$

Pour une compagnie aérienne l'ensemble des jeunes voyageurs sera constitué de tout les voyageurs ayant un âge $\leq$ 25 ans. On a associe le nombre 1 à tout élément appartient à cette ensemble et le nombre 0 à tout élément n'appartient pas à cet ensemble.

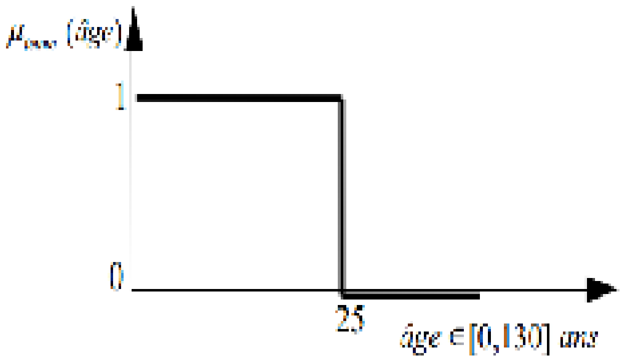

Fig1.2 : Définition nette de Voyageur jeune"

Exemple 1.0.7 Introduitsant la notion fondamentale d'appartenance graduée (le degré d'appartenance peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1) autorisant certains éléments à appartenir plus ou moins à une ensemble donné ; cet ensemble est alors qualifié de « flou ».

Par exemple, pour la police des airs et des frontières la catégorie de « voyageur jeune » sera plutôt défini le sous-ensemble flou représenté par la figure1.3

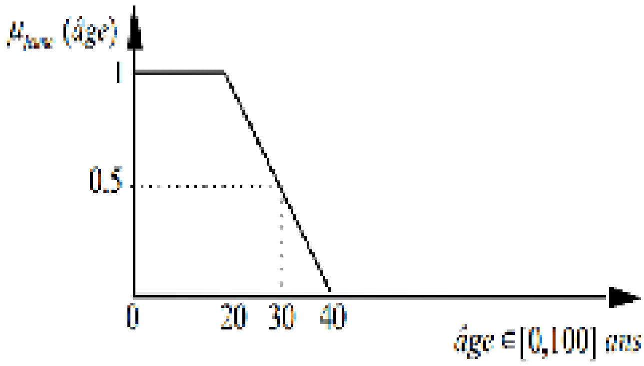

Figure1.3 Définition floue d'un"Voyageur jeune ":

Avec cette modélisation, les personnes de moins de 20 ans seront considérée comme tout à fait jeune (degré= 1) : elles définissent les prototypes de cette classe flou , un voyageur ayant 30 ans comme plusou moins jeune (degré= 0.5) .par contre, la personne n'appartient plus à la catégorie jeun dés que son âge dépasse 40 ans (degré=0).

$$u_{jeune}(x) \begin{cases} 1 \quad \text{si} \ \ x \leq 20 \\ 0.5 \quad \text{si} \ 20 \leq x < 40 \\ 0 \ \text{si} \quad x \succeq 40. \end{cases}$$

Soit X un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de X , un sous-ensemble flou A de X est défini comme l'ensemble des couples:

$$A = \{(x, u_A(x)), x \in X\} \text{ avec } u_A \colon X \to [0,1]$$

tell que A de X est caractérisé par une fonction d'appartenance $u_A(x)$ (degré d'appartenance) qui à chaque point x de X fait corespondre un réel dans l'intervalle $[0,1]$.

1.1 Les caractéristiques d'un sous ensemble floue

Un sous-ensemble flou s'il est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance, à partir d'une telle fonction un certain nombre de caractérisations des sous-ensembles flous peuvent être étudié.

- **Support**

Le support d'un ensemble flou A de X, noté $supp(A)$ est defini par

$$\sup p(A) = \{x \in X, u_A(x) > 0\}$$

- **Noyau**

Lenoyau d'un sous-ensemble flous A de X noté par $noy(A)$ est defini par

$$noy(A) = \{x \in X, u_A(x) = 1\}$$

- **α-Coupe**

Une α-coupe de A est le sous ensemble classique noté A_α est defini par

$$A_\alpha = \{x \in X, u_A(x) \succeq \alpha\}$$

1.2 Opérations sur les ensembles flous

Etant donné que le concept de sous ensemble flou peut être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les sous ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsque on est à faire à des fonction d'appartenance à valeur 0 ou 1. On présente ici les opérations les plus couramment utilisé.

- **Egalité**

Deux sous ensembles flous Aet B de X sont égaux si

$$\forall x \in X, u_A(x) = u_B(x)$$

Exemple 1.2.1 L'ensemble flou de petit B

$$B = \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{3,0.9\}, \{4,0.6\}, \{5,0.4\}, \{6,0.3\} \\ , \{7,0.2\}, \{8,0.1\} \{9,0\}, \{10,0\} \end{array} \right\}$$

L'ensemble flou aussi petit A

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{3,0.9\}, \{4,0.6\}, \{5,0.4\}, \{6,0.3\} \\ , \{7,0.2\}, \{8,0.1\} \{9,0\}, \{10,0\} \end{array} \right\}$$

A$(x) = B(x)$

Note: Si A$(x) = B(x)$ n'est pas satisfaite pour un élément $x \in X$ alors on dit que A n'est pas égal B.

- **Complément**

Le complémentaire d'un sous ensemble flou Ade X noté A^cest défini par

$$u_{A^C}(x) = 1 - u_A(x)$$

Exemple 1.2.2 Soit A l' ensemble des enfants petites

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{2,1\}, \{3,0.9\}, \{4,0.6\}, \{5,0.4\} \\ \{6,0.3\}, \{7,0.2\}, \{8,0.1\} \{9,0\}, \{10,0\} \end{array} \right\}$$

L'ensemble flou A^cdes enfants n'est pas petites

$$A^c = \left\{ \begin{array}{c} \{1,0\}, \{2,0\}, \{3,0.1\}, \{4,0.4\}, \\ \{5,0.6\} \{6,0.7\}, \{7,0.8\}, \{8,0.9\}, \{9,1\}, \{10,1\} \end{array} \right\}$$

Avec les définitions usuelles des opérateurs flous, on a trouvons toujours la propriété de commutativité, distributivité et associativité des opérateurs classiques. Cependant, relevons deux exceptions notables :

1. En logique flou, le principe du tiers exclu est contredit:$A \cup \bar{A} \neq X$,autrement dit $u_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$

2. En logique flou, un élément peut appartenir à A et non A en même temps :$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, autrement dit $u_{A \cap \bar{A}}(x) \neq 0$. Les autres proprietés sont conservé notament

$$(A^c)^c = A, X^c = \emptyset \text{ et } \emptyset^c = X.$$

- **Inclusion**

Soit A et B deux sous-ensembles flous de$X$, A est inclus dans B $(A \subset B)$ est défini par

$$(A \subset B) \iff \forall x \in X \quad u_A(x) \leq u_B(x)$$

- **Union**

L'Union de deux sous-ensembles flou A et B $(A \cup B)$ est défini par

$$u_{A \cup B}(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\}$$

Exemple 1.2.3

1. L' union des ensembles A et B:

$$A(x) = 0.6 \quad et \quad B(x) = 0.4 \qquad (\mathrm{A} \cup B)(x) = \max\{0.6, 0.4\} = 0.6$$

2. L'union de" A" et de "B":

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{2,1\}, \{3,0.9\}, \{4,0.2\}, \{5,0.5\}, \{6,0.8\}, \\ \{7,1\}, \{8,1\} \{9,0,7\}, \{10,0,4\}, \{11,0.1\}, \{12,0\} \end{array} \right\} \\ B &= \left\{ \begin{array}{c} \{1,0\}, \{2,0\}, \{3,0\}, \{4,0.2\}, \{5,0.5\}, \{6,0.8\}, \\ \{7,1\}, \{8,1\} \{9,0,7\}, \{10,0,4\}, \{11,0.1\}, \{12,0\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{l'union} \quad \text{flou} = [A \cup B] = \left\{ \begin{array}{c} \{1,1\}, \{2,1\}, \{3,0,9\}, \{4,0.6\}, \{5,0.5\}, \{6,0.8\}, \{7,1\}, \\ \{8,1\} \{9,0,7\}, \{10,0,4\}, \{11,0.1\}, \{12,0\} \end{array} \right\}$$

- **L'intersection**

L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B $(A \cap B)$ est défini par

$$u_{A \cap B}(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\}$$

Exemple 1.2.4

1. L'intersection des ensembles A et B:

$$A(x) = 0.6 \quad et \quad B(x) = 0.4 \qquad (A \cap B)(x) = \min\{0.6, 0.4\} = 0.4$$

2. L'intersection flou de" A" et de "B":

$$[A \cap B] = \left\{ \begin{array}{c} \{1,0\}, \{2,0\}, \{3,0\}, \{4,0.2\}, \{5,0.4\}, \{6,0.3\}, \{7,0.2\}, \\ \{8,0.1\} \{9,0\}, \{10,0\}, , \{11,0\}, \{12,0\} \end{array} \right\}$$

1.3 Les nombres floues

Les nombres flous généralisent les nombres réels classiques, et en général les nombres flous est un sous ensemble des réels qui à quelques propriétés additionnels.

Définition 1.3.1 [2]Considérons un sous-ensemble flou défini par $u :\longrightarrow [0,1]$, on dit que u est un nombre flou s'il satisfait les propriétés suivantes:

1. u est normal i.e $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}$ tell que $u(x_0) = 1$
2. u est convexe flou i.e $(u(tx + (1-t)y)) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ $\forall t \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$
3. u est semi continue superieurement dans $\mathbb{R}$ i.e $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0$, $|x - x_0| < \sigma$ alors $\mu(x) - \mu(x_0) < \varepsilon$,
4. u est à support compact i.e $cl\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$ est compact telle que on not par $cl(A)$ l'ensemble fermé de A

On not par $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des nombres flous.

Exemple 1.3.2 L'ensemble flou $u \longrightarrow [0,1]$

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^3 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ (2-x)^3 \quad \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

est un nombre flou

voir [Fig 1.3]

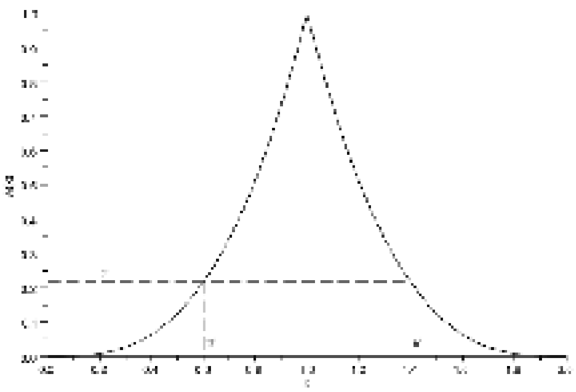

Fig 1.4 Exemple de nombre flou et leur ensemble $\alpha -$ coup

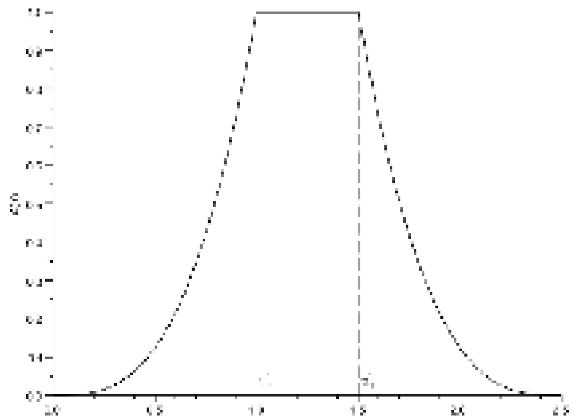

Fig 1.5Exemple de nombre flou et leur noyau

Exemple 1.3.3

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^3 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ (2.5 - x)^3 \quad \text{si} \quad 1.5 < x \leq 2.5 \\ 0 \quad \text{si} \quad x > 2.5 \end{cases}$$

voir [Fig 1.5]

Exemple 1.3.4 L'ensemble flou représenté dans la Figure1.6 n'est pas un nombre floue car n'est pas convexe flou

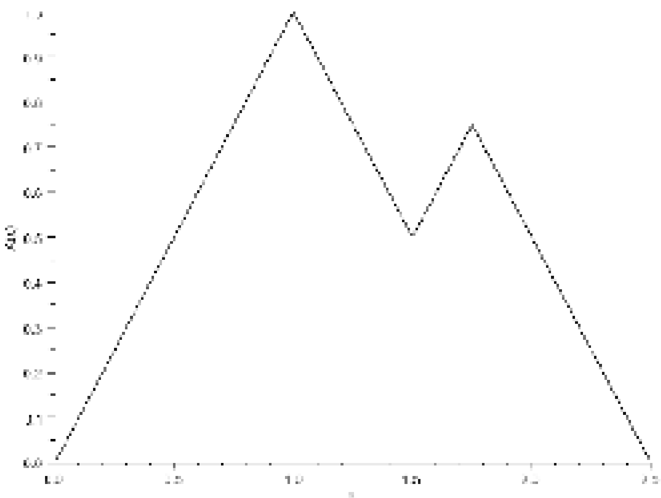

Fig 1.6 Exemple d'un ensemble flou qui n'est pas un nombre floue

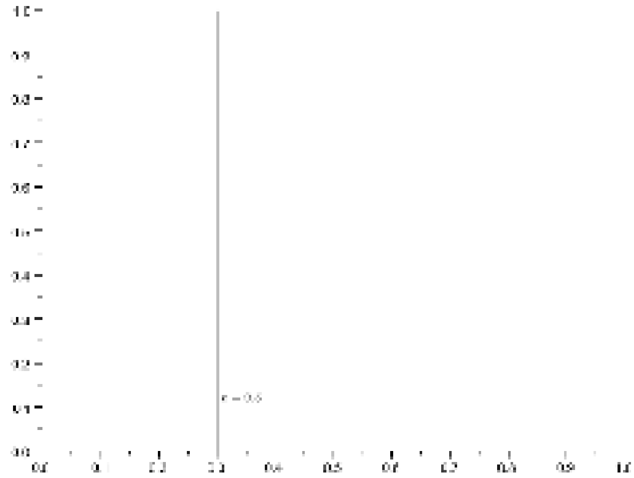

Fig 1.7 Exemple de singleton nombre flou

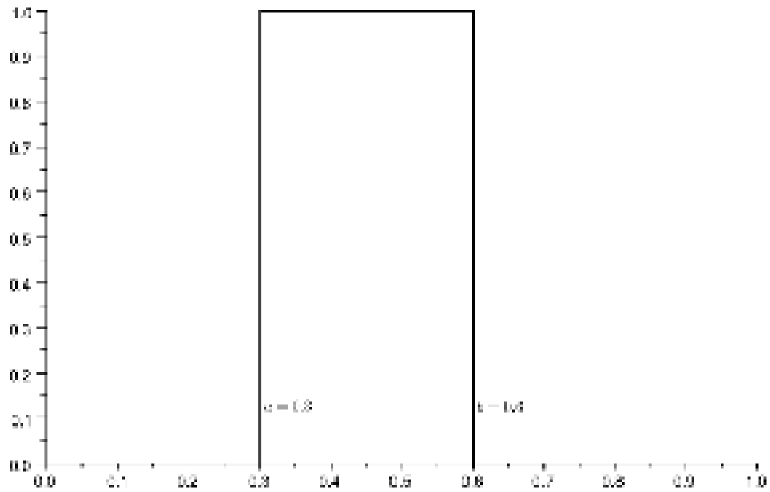

Fig 1.8 Exemple d'un intervalle fermé interprété comme nombre flou

Remerque 1.3.5 Tout nombre réel est un nombre flou i.e.$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

$$\mathbb{R} = \left\{ \chi_{\{x\}}; x \ \in \mathbb{R} \right\}$$

$\chi_{\{x\}}$: est le singleton nombre flou pour tout $x \in \mathbb{R}$ (voir Fig1.7) ,

Aussi les nombres flou généralisent les intervalles fermés, si on note I l'ensemble de tout les les Intervalles réels alors $I \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tel que:

$$I = \left\{ \chi_{[a,b]}; [a, b] \in \mathbb{R} \right\}$$

voir [Fig 1.2]

Le théoreme suivant est connu par le théoreme de Staking

Théorème 1 (théoréme de staking) [2] Si $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est un nombre flou et u_r est le $r-coupe$ de u alors, ona :

i. u_r est l'intervalle fermé $u_r = [u_r^-, u_r^+]$ $\forall r \in (0,1]$,

ii. si $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$, alors $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$,

iii. pour toute suite croissante (r_n) telle que $\lim r_n = r$ avec $r \in (0,1]$, on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} u_{r_n} = u_r$$

,

iv. pour tout suite décroissante (r_n) telle que $\lim r_n = 0$ avec $r \in (0,1]$, on a

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} u_{r_n}} = u_0.$$

Remarque 1.3.6 Les extrémités de l'ensemble r-coupe u_r sont donnés par

$$u_r^- = \inf u_r \text{ et } \quad u_r^+ = \sup u_r,$$

par suite

$$u_r = \left[u_r^-, u_r^+\right]$$

1.3.1 L_R nombres flous

Les L_R nombres flous ont une importance dans la théorie des ensembles flous.

Définition 1.3.8 [2] Soient $L, R : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues et croissantes vérifiant $L(0) = R(0)$, $L(1) = R(1)$ et soient $a_0^- \leq a_1^- \leq a_1^+ \leq a_0^+$ des nombres réels, l'ensemble flou $u \to [0,1]$ est un $L-R$ nombre flou si

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_0^- \\ L\left(\dfrac{x - a_0^-}{a_1^- - a_0^-}\right) & \text{si } a_0^- \leq x < a_1^- \\ 1 & \text{si } a_1^- \leq x < a_1^+ \\ R\left(\dfrac{a_0^+ - x}{a_0^+ - a_1^+}\right) & \text{si } a_1^+ < x \leq a_0^+ \\ 0 \text{ si} & a_0^+ \leq x \end{cases}$$

Symboliquement, nous écrivons $u = (a_0^-, a_1^-, a_1^+, a_0^+)_{L\_R}$ tell que $\left[a_1^-, a_1^+\right]$ est le noyau de u et si on a pose $\underline{a} = a_1^- - a_0^-$ et $\bar{a} = a_0^+ - a_1^+$.

Remarque 1.3.9 On montre que si u est un L-R nombre flou alors l'ensemble r- coupe est donné par

$$u_r = \left[a_0^- + L^{-1}(r) .\underline{a}, a_0^+ - R^{-1}(r) .\bar{a}\right].$$

Nombre flou trapézoïdal

Définition 1.3.10 Comme cas particulier, on obtient les nombres flous trapézoïdaux si L et R sont des fonctions linaires. Les nombres flous trapézoïdaux peuvent être représentés par le quadruple $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ $a \leq b \leq c \leq d$ (voir figure1.9).

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si a} \leq x < b \\ 1 \quad \text{si} \quad b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c} \text{ si } c < \ x \leq d \\ 0 \ \text{ si } \quad d \leq x. \end{cases}$$

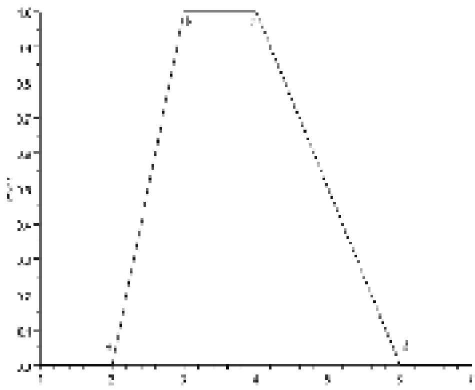

Fig 1.9 Exemple de nombre flou trapézoïdal

Dans ce cas les points extrémales de l'ensemble α- coupe sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_r^- &= a + r(b-a) \\ u_r^+ &= d - r(d-c) \end{aligned}$$

Nombre flou triangulaire

Définition 1.3.11 Si $b = c$ dans la représentation (a, b, c, d),le nombre flou est appelé nombre flou triangulaire alors un triplet $(a, b, c,) \in \mathbb{R}^3$ $a \leq b \leq c$ est suffisant pour représenter les nombres flous triangulaires.

On considère $L, R : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $L(x) = R(x) = x^2$, soit $b = c$ et $\underline{a} = 1, \bar{a} = 2$, alors $L - R$ nombre flou déterminé par la définition

$$u_r = \left[\sqrt{r}, 3 - 2\sqrt{r}\right]$$

Définition 1.3.12 La forme réprésenté dans la figur1.10

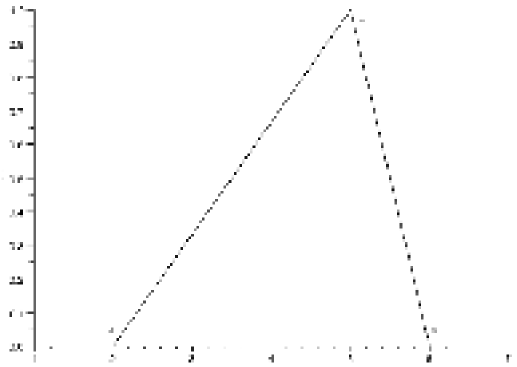

Fig 1.10 Exemple de nombre flou triangulaire

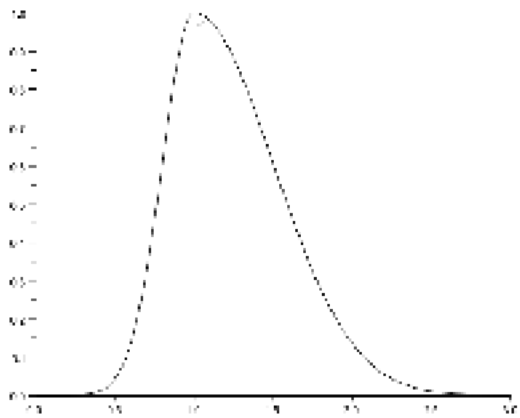

Fig 1.12 Exemple de nombre flou de Gausse

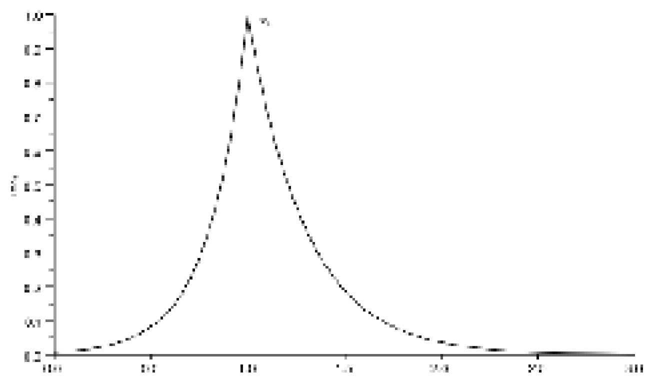

Fig 1.13 Exemple de nombre flou exponentiel

Nombre flou de Gauss

Le nombre flou de Gausse est défini par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 - a\sigma_l \\ \dfrac{(x-x_1)^2}{2\sigma_r^2} & \text{si } x_1 - a\sigma_l \leq x < x_1 \\ \dfrac{(x_1-x)^2}{2\sigma_r^2} & \text{si } x_1 \leq x < x + a\sigma_r \\ 0 \ \text{si} & x_1 + a\sigma_r \leq x. \end{cases}$$

voir Fig 1.12

Telle que x_1 est le noyau du nombre flou, et $a > 0$.

Nombre flou exponentiel

Le nombre flou exponentiel est donné par :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 - a\tau_l \\ e^{\dfrac{x-x_1}{\tau_l}} & \text{si } x_1 - a\tau_l \leq x < x_1 \\ e^{\dfrac{x_1-x}{\tau_r}} & \text{si } x_1 \leq x < x + a\tau_r \\ 0 \ \text{si} & x_1 + a\tau_r \leq x, \end{cases}$$

avec x_1 est le noyau du nombre flou et $a > 0$

voir Fig 1.13

1.4 Arithmetique floue

Nous commençons notre discussion sur l'arithmétique floue par le principe de l'extension de Zadeh.

1.4.1 Principe d'extension de Zadeh

Définition 1.4.2 (Principe d'extension de Zadeh) [2] Soit $f : X \to Y$,ou X et Y sont deux ensembles quelconques, alors on peut prolongé f à une fonction $F : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ (fonction flou) avec $v = F(u)$ telle que

$$v(y) = \begin{cases} \sup\{u(x) : x \in X,\ f(x) = y\} & \text{si } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Nous appelons la fonction F l'extension de Zadeh de f.

Théorème 2 [2] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ le prolongement de f .Etant donné $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on peut déterminer $v = F(u)$ par ses ensembles de niveau.

$$v_r = F(u_r), \forall r \in [0,1],$$

c'est à dire

$$v_r^- = \inf \{f(x)\, x \in u_r\},$$

et

$$v_r^+ = \sup \{f(x)\, x \in u_r\}.$$

Définition 1.4.3 Soit $f : X \times Y \to Z$ une fonction et soit $F : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Z)$ le prolongement de f et soit $w = F(u,v)$, alors

$$w(z) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in X, y \in Y.} \{\min \{u(x), v(y)\},\ f(x,y) = z\}, \text{si } f^{-1}(z) \neq \varnothing \\ 0 \ \text{ si non} \end{cases}$$

Théorème 3 [2] Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$le prolongement de f et $w = F(u,v)$ alors l'ensemble de niveau associer à w est

$$w_r = \{f(x,y)\, | x \in u_r, y \in v_r\}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

c'est à dire si $w_r = [w_r^-, w_r^+]$, alors on a

$$w_r^- = \inf \{f(x,y)\, | x \in u_r, y \in v_r\},$$

et

$$w_r^+ = \sup \{f(x,y)\, | x \in u_r, y \in v_r\}.$$

1.4.2 La somme de deux nombres flous et la multiplication d'un nombre réel par un nombre flou

Définition 1.4.5 [2] Soientt u, v deux nombres flous, et λun nombre réel, alors on defini la somme de deux nombres flous et la multiplication d'un nombre réel par un nombre flou respectivement par

$$(u+v)_r = \{x + y\, | x \in u_r, y \in v_r\} = u_r + v_r,$$

et

$$(\lambda.u)_r = \{\lambda.x\, | x \in u_r\} = \lambda.u_r.$$

avec $u_r + v_r$ est la somme de deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\lambda.u_r$ est le produit usuel d'un réel par un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple1.4.6 Soient u et v deux nombres flous triangulaires avec $u = (1,2,3), v = (2,3,4)$.

1.
$$u_r = [1 + r, 3 - r] \text{ et } v_r = [2 + r, 4 - r] .$$

Par suite

$$(u + v)_r = \{x + y \,|x \in u_r, y \in v_r\} = [3 + 2r, 7 - 2r] ,$$

et par conséquent
$$u + v = (3, 5, 7) .$$

2. On a

$$(2.u)_r = \{2.x \,|x \in u_r\} = [2 + 2r, 6 - 2r]$$

Par suite
$$2.u = (2, 4, 6)$$

De même
$$(-2.u)_r = \{-2.x \,|x \in u_r\} = [-6 + 2r, -2 - 2r] .$$

Par suite
$$-2.u = (-6, -4, -2) .$$

Proposition 1.4.7

1. L'addition des nombres flous est associative et Commutative

$$u + v = v + u \text{ et } u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

2. Le singleton flou $0 = \varkappa_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est un élément neutre

$$u + 0 = 0 + u = u,$$

3. Aucun élément $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}/\mathbb{R}$ Possède un opposé dans $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a.b \geq 0$ et $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, ona

$$(a + b) .u = (a.u) + (b.u) ,$$

5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, ona

$$\lambda. (u + v) = \lambda.u + \lambda.v,$$

6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, ona$(\lambda.\mu) .u = \lambda. (\mu.u)$.

Remarque 1.4.8 La condition $a.b \geq 0$ est nécessaire dans la propriété (4) comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.4.9 Soit u le nombre flou suivant

$$u = (1, 2, 3) .$$

Alors

$$(2 - 1) .u = (2 - 1) (1, 2, 3) = (1, 2, 3) ,$$

et

$$2.u - u = (2, 4, 6) + (-3, -2, -1) = (-1, 2, 5) .$$

1.4.3 Le produit de deux nombres flous

Définition 1.4.11 [2] Soit u,$v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, alors $w = u.v$ est defini par

$$w_r^- = \inf \{x.y \,| x \in u_r, , y \in v_r \} ,$$

et

$$w_r^+ = \sup \{x.y \,| x \in u_r, , y \in v_r \} .$$

On peut montré que

$$(u.v)_r^- = \min \left\{ \ \left(u_r^-.v_r^-\right), \left(u_r^-.v_r^+\right), \left(u_r^+.v_r^-\right), \left(u_r^+.v_r^+\right) \ \right\} ,$$

et

$$(u.v)_r^- = \max \left\{ \ \left(u_r^-.v_r^-\right), \left(u_r^-.v_r^+\right), \left(u_r^+.v_r^-\right), \left(u_r^+.v_r^+\right) \ \right\} .$$

Exemple 1.4.12 Soit $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ avec $u = (0, 2, 4, 6)$ et $v = (2, 3, 8)$.

u est un nombre flou trapézoïdale sont ensemble $r - coupe$ est donné par:

$$\begin{cases} u_r^- = a + r (b - a) = 2.r, \\ u_r^+ = d - r (d - c) = 6 - 2.r. \end{cases}$$

et $v = (2, 3, 8)$ est un nombre flou triangulaire sont ensemble $r - coupe$ est donné par:

$$\begin{cases} v_r^- = 2 + r, \\ v_r^+ = 8 - 5.r. \end{cases}$$

Alors

$$(u.v)_r^- = \min \{2r. (2 + r) , 2r (8 - 5r) , (6 - 2r) (2 + r) , (6 - 2r) (8 - 5r)\} = 2r. (2 + r) ,$$

et

$$(u.v)_r^+ = \max \{2r. (2 + r) , 2r (8 - 5r) , (6 - 2r) (2 + r) , (6 - 2r) (8 - 5r)\} = (6 - 2r) (8 - 5r) .$$

1.4.4 La Différence des nombres flous

Définition 1.4.14(La différence de Hukuhara) [2] Soient u et v deux nombres flous. S'il existe un nombre flou w telle que

$$u = v + w,$$

alors la différence de Hukuhara ($H - diff\acute{e}rence \ominus_H$) existe et de plus elle est définie par:

$$u \ominus_H v = w.$$

Remarque 1.4.15 Si $u \ominus_H v$ existe alors sont $r - coupe$ est donée par

$$[u \ominus_H v]_r = \left[u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\right].$$

Définition 1.4.16 (La différence généralisée de Hukuhara) [2] Soient u et v deux nombres flous.S'il existe un nombre flou w telle que

$$u = v + w,$$

Où

$$v = u - w,$$

alors la différence généralisée de Hukuhara ($gH - diff\acute{e}rence$) est définie par :

$$u \ominus_{gH} v = w.$$

Remarque 1.4.17 Pour tout $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, ona

$$[u \ominus_{gH} v]_r = \left[\min\left\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\right\}, \max\left\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\right\}\right].$$

Chapitre 2

Analyse floue

2.1 L'espace métrique des nombres flous

- Soit K l'ensemble de tous les sous ensembles non vides convexes compacts de $\mathbb{R}^n$et $A \in K$

  La distance entre l'ensemble A et un point x de $\mathbb{R}^n$ est definie par

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\}.$$

- Soient A et B deux élements de K. Les séparations de Hausdorff de B à A et de A à B respectivement sont définies

$$\begin{aligned} d_H^*(B, A) &= \sup \{d(b, A) : b \in B\}, \\ d_H^*(A, B) &= \sup \{d(a, B) : a \in A\}. \end{aligned}$$

- Soient A et B deux élements de K.La distance de Hausdorff est définie par

$$d_H(A, B) = \max \{d_h^*(B, A), d_h^*(A, B)\}.$$

Remarque 2.1.1 Soient $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. La distance de Hausdorff-est donnée par

$$d_H(A, B) = \max \{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Maintenant on va définir l'espace métrique des nombres flous.
Définition 2.1.2 L'application $D_\infty : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} D_\infty(u, v) &= \sup_{r \in [0,1]} \max \left\{ \left| u_r^- - v_r^- \right|, \left| u_r^+ - v_r^+ \right| \right\} \\ &= \sup_{r \in [0,1]} \{d_H(u_r, v_r)\}, \end{aligned}$$

où $u_r = [u_r^-, u_r^+]$, $v_r = [v_r^-, v_r^+] \in \mathbb{R}$ est appelée distance de Hausdorff entre les nombres flous.

Définition 2.1.3 Soit $1 \leq p < \infty$, on défini la D_p distance entre les deux nombres flous u et v par :

$$\begin{aligned} D_p(u,v) &= \left(\int_0^1 d_H(u_r, v_r)^p \, dr\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 \max\left\{\left|u_r^- - v_r^-\right|, \left|u_r^+ - v_{r2}^+\right|\right\}^p dr\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On a les résultat suivant

Théorème 4 [2]

1. $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ est un espace métrique.
2. $D_\infty(u+w, v+w) = D_\infty(u,v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ c'est-à-dire D_∞ est invariant par translation.,
3. $D_\infty(k.u, k.v) = |k| \, D_\infty(u,v) \;\; \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $k \in \mathbb{R}$,
4. $D_\infty(u+v, w+e) \leq D_\infty(u,w) + D_\infty(v,e) \quad \forall u, v, e, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

preuve : 1.Montrons que$(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$.

1.1) Soient u et v deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned} D_\infty(u,v) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{|u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \max\left\{|u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\right\} = 0, \text{ pour tout } r \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow |u_r^- - v_r^-| = 0 \text{ et } |u_r^+ - v_r^+| = 0, \text{ pour tout } r \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow u_r^- = v_r^- \text{ et } u_r^+ = v_r^+, \text{ pour tout } r \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow u = v. \end{aligned}$$

1.2) Soient u et v deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned} D_\infty(u,v) &= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|u_r^- - v_r^-\right|, \left|u_r^+ - v_r^+\right|\right\} \\ &= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|v_r^- - u_r^-\right|, \left|v_r^+ - u_r^+\right|\right\} \\ &= D_\infty(v,u). \end{aligned}$$

1.3) Soient u, v et w trois éléments quelconques de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned}
D_\infty(u,v) &= \sup_{r\in[0,1]} \max\{|u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\} \\
&\leq \sup_{r\in[0,1]} \max\{|u_r^- - w_r^-| + |w_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - w_r^+| + |w_r^+ - v_r^+|\} \\
&\leq \sup_{r\in[0,1]} \max\{|u_r^- - w_r^-|, |w_r^+ - v_r^+|\} + \sup_{r\in[0,1]} \max\{|w_r^- - v_r^-|, |w_r^+ - v_r^+|\} \\
&= D_\infty(u,w) + D_\infty(w,v).
\end{aligned}$$

En conclusion $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ est un espace métrique.

2. Soient u, v et w trois éléments de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a :

$$\begin{aligned}
D_\infty(u+w, v+w) &= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|u_r^- + w_r^- - v_r^- - w_r^-\right|, \left|u_r^+ + w_r^+ - v_r^+ - w_r^+\right|\right\} \\
&= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|u_r^- - v_r^-\right|, \left|u_r^+ - v_r^+\right|\right\}, \\
&= D_\infty(u,v).
\end{aligned}$$

3. Soients u et v deux éléments de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
D_\infty(k.u, k.v) &= \sup_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|k.u_r^- - k.v_r^-\right|, \left|k.u_r^+ - k.v_r^+\right|\right\}, \\
& |k|\, D_\infty(u,v).
\end{aligned}$$

4. Soients u, v, e et w quètre éléments quelconques de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned}
D_\infty(u+v, w+e) &\leq D_\infty(u+v, w+v) + D_\infty(w+v, w+e) \\
&\leq D_\infty(u,w) + D_\infty(v,e).
\end{aligned}$$

■

En utulisant une preuve similaire à celle de la proposition précédente , on montre que

Proposition 2.1.4 Soit $1 \leq p < \infty$, alors on a

1. $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ est un espace métrique.
2. $D_p(u+w, v+w) = D_p(u,v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ c'est à dire D_p est invariante par translation.
3. $D_p(k.u, k.v) = |k|\, D_p(u,v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ $k \in \mathbb{R}$
4. $D_p(u+v, w+e) \leq D_p(u,w) + D_p(v,e)$ $\forall u, v, e, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

Théorème 5 [2] $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ est un espace métrique complet.
preuve : 1. Pour montre que $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ est un espace métrique complet il faut montre que toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$est convergente vers un élément de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy d'élément de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a
$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N$ tell que
$\forall p, q \in N, (p > q > N(\varepsilon)) \implies D_\infty(u_p, u_q) < \varepsilon,$
c'est à dire
$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N$ tell que
$\forall p, q \in N, (p > q > N(\varepsilon)) \implies \sup\limits_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|(u_p)_r^- - (u_q)_r^-\right|, \left|(u_p)_r^+ - (u_q)_r^+\right|\right\} < \varepsilon,$

ce qui entraint que
$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N$ tell que $\forall p, q \in N, (p > q > N(\varepsilon)) \implies \left|(u_p)_r^- - (u_q)_r^-\right| < \varepsilon,$
et $\left|(u_p)_r^+ - (u_q)_r^+\right| < \varepsilon$, pour tout $r \in [0, 1]$

Par suite les suites réelles $\left((u_n)_r^-\right)_n$ et $\left((u_n)_r^+\right)_n$ sont de Cauchy pour tout $r \in [0, 1]$, donc elles convergent dans $\mathbb{R}$ vers u_r^- et u_r^+ pour tout $r \in [0, 1]$,

Comme $(u_r)_n^- < (u_r)_n^+$ pour tout $n \in N$ et tout $r \in [0, 1]$, alors par passage à la limite $u_r^- < u_r^+$, pour tout $r \in [0, 1]$.

Par conséquant $M_r = [u_r^-, u_r^+]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Il nous reste à montrer que M_r est un r coupe. Pour cela, on montre que M_r vérifie les hypothèses du théorème de Negoita,Ralescu.

En effet, on a
1. M_r est un intervalle,
2.Soient $0 \le \alpha \le \beta \le 1$, alors on a

$$(u_n)_\alpha^- \le (u_n)_\beta^- \le (u_n)_\beta^+ \le (u_n)_\alpha^+,$$

par passage à la limite on obtient:

$$(u)_\alpha^- \le (u)_\beta^- \le (u)_\beta^+ \le (u)_\alpha^+. \tag{2}$$

3.Soit (r_n) une suite croissante convergent vers r, alors $M_r \subseteq M_{r_n}$ pour tout $n \ge 1$ et par suite

$$M_r \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{r_n}. \tag{3}$$

Montrons maintenant que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{r_n} \subseteq M_r$

comme la suite $(u_n)_r^-$ converge vers u_r^- et $(u_n)_r^+$converge vers u_r^+, alors pour tout $\varepsilon_1 > 0, \exists M_1 \ (\varepsilon_1) \in \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $m \ge M_1 \ (\varepsilon_1)$ona:

$$\left[(u_m)_r^-, (u_m)_r^+\right] \subseteq \left[u_r^- - \epsilon_1 \ u_r^+ + \epsilon_1\right]. \tag{4}$$

Comme $u_m \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, m \geq 1$ est un nombre flou alors on a:

$$(u_m)_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} (u_m)_{r_n} \tag{6}$$

De même comme $(u_m)_{r_n}^{-}$converge vers $u_{r_n}^{-}$ et $(u_m)_{r_n}^{+}$converge vers $u_{r_n}^{+}$ pour tout $\varepsilon_2 > 0, \exists M_2(\varepsilon_2)$ tell que pour $m \geq M_2(\varepsilon_2)$et pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\left[u_{r_n}^{-} + \epsilon_2 \ u_{r_n}^{+} - \epsilon_2\ \right] \subseteq (u_m)_{r_n} \tag{7}$$

Ce qui implique:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[u_{r_n}^{-} + \epsilon_2 \ u_{r_n}^{+} - \epsilon_2\ \right] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (u_m)_{r_n} \tag{8}$$

à partir des ces relation$(4)\,,(6)\,,(8)$, il resulte que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[u_{r_n}^{-} + \epsilon_2 \ u_{r_n}^{+} - \epsilon_2\ \right] \subseteq \left[u_r^{-} - \epsilon_1 \ u_r^{+} + \epsilon_1\ \right]$$

Comme $\varepsilon_1$et ε_2 sont arbitraires, on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{r_n} \subseteq M_r \tag{9}$$

En conclusion d'apres (3) et (9) on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{r_n} = M_r.$$

4. Montrons que$\overline{\cup \overset{\infty}{\underset{n=1}{M_{r_n}}}} = M_0$,

Soit r_n un suite décroissante d'éléments de $[0,1]$, convegente vers 0. Montrons que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{r_n}} \subseteq M_0$$

comme $M_{r_n} \sqsubseteq M_0$on a :

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{r_n}} \subseteq M_0. \tag{10}$$

Montrons maintenant que $M_0 \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{r_n}}$

Comme $(u_m)_0^{-}$converge vers u_0^{-} et $(u_m)_0^{+}$converge vers u_0^{+}, alors pour tout $\varepsilon_3 > 0, \exists M_3(\varepsilon_3) \in \mathbb{N}^*$ tell que pour $m \geq M_3(\varepsilon_3)$ et pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\left[u_{r_n}^{-} + \epsilon_3 \ u_{r_n}^{+} - \epsilon_3\ \right] \subseteq (u_m)_{r_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (u_m)_{r_n}} \tag{12}$$

Soit $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ on a:

$$\left[u^-_{r_n} + \epsilon_1 \ u^+_{r_n} - \epsilon_1 \ \right] \subseteq (u_m)_0$$

Et comme $u_m \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ alors:

$$(u_m)_0 = \overline{\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} (u_m)_{r_n}}$$

De meme pour tout $\epsilon_4 > 0$, $\exists M_4(\varepsilon_4) \in \mathbb{N}^*$ tell que pour tout $m \geq M_4(\varepsilon_4)$ et pour tout $n \geq 1$ on a :

Ce que implique :

$$cl\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \left[(u_m)^-_{r_n}, (u_m)^+_{r_n}\right]\right) \subseteq \overline{\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \left[(u_m)^-_{r_n} - \varepsilon_4, (u_m)^+_{r_n} + \varepsilon_4\right]}$$

Par suite

$$\left[u^-_{r_n} + \epsilon_3 \ u^+_{r_n} - \epsilon_3 \ \right] \subseteq (u_m)_{r_n} \subseteq \overline{\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \left[(u_m)^-_{r_n} - \varepsilon_4, (u_m)^+_{r_n} + \varepsilon_4\right]}$$

Comme ϵ_3 et $\epsilon_4$sont arbitraire alors il resulte que

$$M_0 = \overline{\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} M_{r_n}}$$

En conclusion u est un nombre flou et par conséquent $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ est un espace métrique complet . ■

Remarque 2.1.5 On peut montrer que $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ n'est pas complet pour tout $1 \leq p < \infty$.

2.1.1 Compacité

Définition 2.1.7 Un espace métrique (E, d) est dit localement compact si chaque point de E admet un voisinage compact.

Théorème 6 [2] La boul unité fermée de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ n'est pas compacte.
La boul unité dans $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est définie par

$$\bar{B}(0,1) = \{u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} / \ D_\infty(u, 0) \leq 1\}$$

Soient (q_n) une suite de nombres rationels d'éléments de $[0, 1]$ et (u_n) le suite de nombres flous définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1], \\ q_n & \text{si } \; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-q_n)x + 2q_n - 1 & \text{si } \; \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la α_coupe de u_n est donné par :

$$(u_n)_r = \begin{cases} [0, \dfrac{1}{2}] & r \leq q_n \\ [\dfrac{r+1-2q_n}{2(1-q_n)}, 1] & q_n \leq r. \end{cases}$$

Par suite la distance de Hausdorff entre $(u_n)_r$ et $(u_{n+k})_r$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé (On suppose que $q_n < q_{n+k}$) est donnée par

$$d_h((u_n)_r, (u_{n+k})_r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r < q_n, \\ \frac{r+1-2q_n}{2(1-q_n)} & \text{si } \; q_n \leq r \leq q_{n+k}, \\ \frac{r+1-2q_n}{2(1-q_n)} - \frac{r+1-2q_{n+k}}{2(1-q_{n+k})} & \text{si } \; q_{n+k} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} D_\infty(u_n, u_{n+k}) &= \sup_{r \in [0,1]} d_h((u_n)_r, (u_{n+k})_r) \\ D_\infty(u_n, u_{n+k}) &= \sup_{r \in [q_n, q_{n+k}]} \frac{r+1-2q_n}{2(1-q_n)} \\ &= \frac{q_{n+k}+1-2q_n}{2(1-q_n)} \geq \frac{q_n+1-2q_n}{2(1-q_n)} = \frac{1-q_n}{2(1-q_n)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

C'est à dire
$\exists \; \varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0 / \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \exists \; p_1(n) = n \in \mathbb{N}$ et $\exists \; p_2(n) = n + k \in \mathbb{N}$ telles que on a $p_2(n) > p_1(n) \geq n$ et $D_\infty(u_{p_1(n)}, u_{p_2(n)}) \geq \dfrac{1}{2}$.

C'est à dire la suite (u_n) n'est pas de Cauchy et par conséquent elle est divergente. Ce qui entraîne que boule unité fermée n'est pas séquentiellement compacte et par conséquent elle n'est pas compacte.

Remarque 2.1.8 La boule unité fermée n'est pas compacte par rapport à la topologie D_∞ et par suite chaque boule fermée n'est pas compacte ceci signifie que un point dans $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ne possède pas un voisinage compact et ceci implique également que $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ n'est pas localement compact.

Remarque 2.1.9 La boule $\bar{B}_p(0,1) = \{u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} / \; D_p(u,0) \leq 1\}$ n'est pas un ensemble compact.

2.1.2 Séparabilité

La séparabilité est un autre proprieté importante principalement pour l'approximation, un espace métrique (E, d) est dit séparable si'il contient un sous_ensemble dénombrable et dense.

On a le résultat suivant

Proposition 2.1.11 La boule unité fermée $\bar{B}(0,1) = \{u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} / D_{\infty}(u,0) \leq 1\}$ n'est pas séparable dans $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_{\infty})$.

Pour $t \in [0,1]$, on définie

$$u_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1], \\ t & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-t)x + 2t - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

L'ensemble $r - coupe$ de u_t est donnée par

$$(u_t)_r = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & r \leq t, \\ [\dfrac{r+1-2q_n}{2(1-q_n)}, 1] & t \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Donc la distance de Hausdorffd entre les deux éléments u_t et u_s avec $t < s$ est donnée par:

$$d_h((u_t)_r, (u_s)_r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r < s, \\ \dfrac{r+1-2t}{2(1-t)} & \text{si } t \leq r < s, \\ \dfrac{r+1-2t}{2(1-t)} - \dfrac{r+1-2s}{2(1-s)} & \text{si } s \leq r \leq 1. \end{cases}$$

et par suite

$$D_{\infty}(u_t, u_s) = \sup_{r \in [0,1]} d_h((u_t)_r, (u_s)_r) = \sup_{r \in [t,s]} \frac{r+1-2t}{2(1-t)} \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

Par suite les boules ouvertes $B\left(u_t, \frac{1}{3}\right)$ son disjointes et nondénombrable ansi un sous ensemble dense dénombrable s' il existerait, devrait avoir un élément dans chaque telle boule, ce qui est impossible alors la boule fermée unité n'est pas séparable dans $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_{\infty})$.

Remarque 2.1.12 L'espace métrique $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.

2.1.3 Norme d'un nombre flou

On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rccl} \|\|_{\mathcal{F}}: & \mathbb{R}_{\mathcal{F}} & \rightarrow & \mathbb{R}_{+} \\ & u & \mapsto & \|u\|_{\mathcal{F}}=D_{\infty}(u,0). \end{array}$$

On a le résultat suivant

Théorème 7 [2]$\|.\|_{\mathcal{F}}$ à les proprietés suivantes

i. $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a$\|u\|_{\mathcal{F}}=0 \Longleftrightarrow u=0$

ii. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a $\|\lambda.u\|_{\mathcal{F}}=|\lambda|.\|u\|_{\mathcal{F}}$,

iii. $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $\forall v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a $\|u+v\|_{\mathcal{F}} \leq \|u\|_{\mathcal{F}}+\|v\|_{\mathcal{F}}$,

vi. $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $\forall v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a $|\|u\|_{\mathcal{F}}-\|v\|_{\mathcal{F}}| \leq D_{\infty}(u,v)$,

v. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{2}$ avec $ab \geq 0$ et $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a $D_{\infty}(a.u,b.u)=|b-a|.\|u\|_{\mathcal{F}}$.

preuve : i. Soit $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned} D_{\infty}(u,0)=0 & \Leftrightarrow \sup_{r\in[0,1]} \max\left(\left|u_{r}^{-}\right|,\left|u_{r}^{+}\right|\right)=0 \\ & \Leftrightarrow \max\left(\left|u_{r}^{-}\right|,\left|u_{r}^{+}\right|\right)=0, \text{ pour tout } r \in[0,1] \\ & \Leftrightarrow \left|u_{r}^{-}\right|=0 \text{ et } \left|u_{r}^{+}\right|=0, \text{ pour tout } r \in[0,1] \\ & \Leftrightarrow u_{r}^{-}=u_{r}^{+}=0, \text{ pour tout } r \in[0,1] \\ & \Leftrightarrow u=0. \end{aligned}$$

ii. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda.u\|_{\mathcal{F}} & = D_{\infty}(\lambda.u,0) \\ & = \sup_{r\in[0,1]} \max\left(\left|\lambda u_{r}^{-}\right|,\left|\lambda u_{r}^{+}\right|\right) \\ & = \sup_{r\in[0,1]} |\lambda| \max\left(\left|u_{r}^{-}\right|,\left|u_{r}^{+}\right|\right) \\ & = |\lambda| \sup_{r\in[0,1]} \max\left(\left|u_{r}^{-}\right|,\left|u_{r}^{+}\right|\right) \\ & = |\lambda|\,\|u\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

iii. Soient u et v deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\mathcal{F}} & = D_{\infty}(u+v,0) \\ & \leq D_{\infty}(u,0)+D_{\infty}(v,0) \\ & = \|u\|_{\mathcal{F}}+\|v\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

v Soient u et v deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{F}} &= D_{\infty}(u,0) \\
&= D_{\infty}(u,v) + D_{\infty}(v,0) \\
&= D_{\infty}(u,v) + \|v\|_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \text{ on a } \|u\|_{\mathcal{F}} - \|v\|_{\mathcal{F}} \leq D_{\infty}(u,v). \tag{2.1}$$

De même d'aprés (2.1), on a

$$\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \text{ on a } \|v\|_{\mathcal{F}} - \|u\|_{\mathcal{F}} \leq D_{\infty}(v,u) = D_{\infty}(u,v). \tag{2.2}$$

En conclusion, d'aprés (2.1) et (2.2), il résulte que

$$\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \text{ on a } \left|\|v\|_{\mathcal{F}} - \|u\|_{\mathcal{F}}\right| \leq D_{\infty}(u,v).$$

v Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $ab \geq 0$ et $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$\begin{aligned}
D_{\infty}(a.u, b.u) &= D_{\infty}([b + (a-b)].u, b.u) \\
&= D_{\infty}((a-b).u + b.u, b.u) \\
&= D_{\infty}((a-b).u, 0) \text{ car } D_{\infty} \text{ est invariante par translation.} \\
&= |a-b| . \|u\|_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

■

2.2 Continuité des fonctions à valeurs floues

Définition 2.2.1 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$une fonction. et soit t_0 un point de $[a,b]$.

On dit que f est continue au point t_0 si,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma(\varepsilon) > 0/ \ \forall t \in [a,b]$, la condition $|t - t_0| < \gamma(\varepsilon)$ entraîne que $D_{\infty}(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$.

Remarque 2.2.2 On a f est continue au point t_0 si,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma(\varepsilon) > 0/ \ \forall t \in [a,b]$, la condition $|t - t_0| < \gamma(\varepsilon)$ entraîne que $D_{\infty}(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$,

c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma(\varepsilon) > 0/ \ \forall t \in [a,b]$, la condition $|t - t_0| < \gamma(\varepsilon)$ entraîne que $\sup\limits_{r\in[0,1]} \max\left\{\left|f_r^-(t) - f_r^-(t_0)\right|, \left|f_r^+(t) - f_r^+(t_0)\right|\right\} < \varepsilon$,

Alors,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma(\varepsilon) > 0/ \ \forall t \in [a,b]$, la condition $|t - t_0| < \gamma(\varepsilon)$ entraîne que $\left|f_r^{\pm}(t) - f_r^{\pm}(t_0)\right| < \varepsilon$, pour tout $r \in [0,1]$.

2.2.1 Les nombres flous avec les frontières des ensembles $r - coupe$ continues.

On note par $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{c}$ l'ensemble des nombres flous telles que les frontières des ensembles $r - coupe$ sont continues, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{c} = \left\{ u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} / u_r = \left[u_r^-, u_r^+ \right] \text{ avec } u_r^{\pm} \in C\left[0,1\right] \right\}.$$

Remarque 2.2.4 On peut avoir une fonction $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ discontinue et les fonctions u_r^- et u_r^+ sont continues comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.2.5 Soit u la fonction Caractéristique donné par

$$u\left(x\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } & x \in [a,b] \\ \quad 0 \text{ si non} \end{cases}$$

L'ensemble r-coupe associé cette ensemble flou est donné par:

$$u_r\left(x\right) = [a,b], \text{ pour tout } r \in [0,1].$$

Telle que a, b sont des constant, la fonction caractéristiques est discontinue et l'ensemble $r-$coupe associe est continue .

Remarque 2.2.6 Une fonction $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ peut être continue mais les fonctions u_r^- et u_r^+ sont discontinues

2.3 Intégrabilité des fonctions à valeurs floues.

Dans cette partie, on donne quelques résultats concernant la mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions à valeurs floues.

Mesurabilité

Définition 2.3.1 Soient (X, Σ) et (Y, T) deux espaces mesurables avec Σ et T deux $\sigma-$agèbres. Une fonction $f : X \to Y$ est dite mesurable si $f^{-1}(E) \subset \Sigma$, $\forall E \in T$

Définition 2.3.2 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite fortement mesurable si $\forall r \in [0,1]$, les ensembles $f_r\left(x\right)$ définies par $f_r\left(x\right) = \left[f\left(x\right)\right]_r$ sont mesurables.

L'intégrabilité

Définition 2.3.3 Un fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite intégrable bornée si il existe une fonction $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tell que

$$\left\|f\right\|_{\mathcal{F}} \leq h\left(x\right), \forall x \in [a,b],$$

c'est-à-dire

$$\sup \{D_\infty (0, f(x)) \leq h(x)\}, \forall x \in [a,b]$$

Définition 2.3.4(L'intégrale de Aumann) [2] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ une fonction. L'intégrale de Aumann est définie par

$$\left[(FA)\int_a^b f(x)\,dx\right]_r = \int_a^b [f(x)]_r\,dx = \ , r \in [0,1]$$

Définition 2.3.5(L'intégrale de Riemann) [2] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ une fonction à valeurs floues, on dit que f intégrable au sens de Riemann dans $[a,b]$ si $\exists\ I \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ telle que:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0$ telle que pour toute subdivision de l'intervalle $[a,b]$

$$[a,b]\ :d : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b \text{ de norm } v(d) < \sigma$$

telle que pour tout

$$\varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0..n-1,$$

on a

$$D_\infty\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)(x_{i+1} - x_i), I\right) < \varepsilon,$$

Remarque 2.3.6 On note par $I = (FR)\int_a^b f(x)\,dx$ l'intégrale floue de Riemann.

Définition 2.3.7(Intégrale de Henstock) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ et $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, $\varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0..n-1$ et $\sigma(x) > 0$, pour tout $x \in [a,b]$.

la subdivisions $P = (\Delta_n, \varepsilon_i)$ est dite σ fine si

$$\forall i = 0..n-1,\ \varepsilon_i - \sigma(\varepsilon_i) < x_i < \varepsilon_i < x_{i+1} < \varepsilon_i + \sigma(\varepsilon_i).$$

f est dite Henstock intégrable d'intégrale $I \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ si $\forall \varepsilon > 0$ il existe une fonction σ telle que pour toute subdivision P σ fine, on a

$$D_\infty\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)(x_{i+1} - x_i), I\right) < \varepsilon.$$

Si I existe? on dit que f est Henstock intégrable dans $[a,b]$ et on la note par:

$$(FH)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Théorème 8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,est différentiable dans $[a,b]$ alors $f'(t)$ est (FH)intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$f(s) = f(a) + (FH)\int_a^s f'(t)\,dt$$

Proposition 2.3.8 [2] Toute fonction continue à valeurs flou est Aumann intégrable et Riemann intégrable et Henstock intégrable et de plus on a

$$(FA)\int_a^b f(x)\,dx = (FR)\int_a^b f(x)\,dx = (FH)\int_a^b f(x)\,dx.$$

preuve : Comme:

$$\left[(FA)\int_a^b f(x)\,dx\right]_r = \left[\int_a^b f_r^-(x)\,dx, \int_a^b f_r^+(x)\,dx\right], \text{ pour tout } r \in [0,1].$$

Si f est intégrable au sense de Riemann, alors elle est intégrable au sens de Henstock. on a effet si on prend la fonction σ constante dans l'intégrale de Henstock, alors la somme de Riemann s'écrit

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)(x_{i+1}-x_i)\right]_r = \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_r^-(\varepsilon_i)(x_{i+1}-x_i), \sum_{i=0}^{n-1} f_r^+(\varepsilon_i)(x_{i+1}-x_i)\right], \text{ pour tout } r \in [0,1].$$

L'equicontinuité implique l'intégrabilité des fonction f_r^-, f_r^+, alors on a obtient:

$$\left[(FR)\int_a^b f(x)\,dx\right]_r = \left[\int_a^b f_r^-(x)\,dx, \int_a^b f_r^+(x)\,dx\right] = (FA)\int_a^b f(x)\,dx$$

■

Remarque 2.3.9 Si $f; [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est une fonction continue alors on note par $\int_a^b f(x)\,dx$ l'intégrale au sens de Aumann, Riemann et Honstock

On a le résultat suivant

Proposition 2.3.10 On a

1. 1- Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sont deux fonctions intégrables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a:
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$
2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est intégrable et $c \in [a,b]$, on a:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Si $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de signe constant dans $[a,b]$, alors

$$\int_a^b c.f(x)\,dx = c.\int_a^c f(x)\,dx.$$

Remarque 2.3.11 Dans la proposition précédant, la proprieté (3) est en général n'est pas satisfaite si f n'est pas de signe constant. comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.3.12 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue, et soit $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ telle que $f(x) = x$ et $c = (0,1,2)$.

On a

$$\begin{aligned} c.\int_{-1}^1 f(x)\,dx &= (0,1,2)\int_{-1}^1 xdx, \\ &= (0,1,2)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1, \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 c.f(x)\,dx &= \int_{-1}^1 (0,1,2).xdx, \\ &= \int_{-1}^0 (0,1,2).xdx + \int_0^1 (0,1,2).xdx, \\ &= \left[\left(x^2, \frac{1}{2}x^2, 0\right)\right]_{-1}^0 + \left[\left(0, \frac{1}{2}x^2, x^2\right)\right]_0^1, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (0,1,2).xdx &= \left(-1, -\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}, 1\right). \\ &= (-1,0,1). \end{aligned}$$

En conclusion

$$\int_{-1}^1 c.f(x)\,dx \neq c.\int_{-1}^1 f(x)\,dx.$$

2.4 Différentiabilité des fonctions à valeurs floues

2.4.1 La différentiabilité de Hukuhara

Définition 2.4.2 Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on dit que f est différentiable au sens de Hukuhara si pour tout $h > 0$ suffisamment petit la H-différence $f(x+h) \ominus f(x)$ et $f(x) \ominus f(x-h)$ existe , et si il existe un élément $\grave{f}(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ telle que

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x) \ominus f(x-h)}{h} = \grave{f}(x).$$

Le nombre flou $\grave{f}(x)$ s'appelle la dérivée de Hukuhara de f au point x.

Définition 2.4.3 Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,la dérivé de Seikkala de f est définie par/

$$\grave{f}(x)_r = \left[\left(f_r^-(x)\right)', \left(f_r^+(x)\right)' \right]$$

Pour tout $0 \leq r \leq 1$ à condition que $\grave{f}(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

Remarque 2.4.4 Si f_r^-et f_r^+ sont continûment différentiables par rapport à x et uniformément par rapport à $r \in [0,1]$, alors f est Hukuhara différentiable si et seulement si f est Seikkala différentiable et les deus définitions coincede. en effet si f est Hukuhara différentiable on peut écrire

$$\left[\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h}\right]_r = \left[\lim_{h \searrow 0} \frac{f_r^-(x+h) - f_r^-(x)}{h}, \lim_{h \searrow 0} \frac{f_r^+(x+h) - f_r^+(x)}{h}\right], \text{pour tout } r \in [0,1$$

Par suite f est Seikkela différentiable.

Réciproquement si f est Seikkela différentiable alors, $len(f(x))_r = f_r^+(x) - f_r^-(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a,b)$ et $\forall\, r \in [0,1]$ ce qui entraîn que la H différence $f(x+h) \ominus f(x)$ et $f(x) \ominus f(x-h)$ existe et si on prend $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h}$ et $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x) \ominus f(x-h)}{h}$ on a obtient la différentiabilité au sens de Hukuhara.

Proposition 2.4.5 Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,une fonction différentiable au sens de Seikkala alors la fermeture du support de f admet une longeur croissante

preuve : Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,une fonction différentiable au sens de Seikkala par absurde on suppose que la longeur $len(f(x))$ est décroissante dans un voisinage $x \in (a,b)$, alors

$$\grave{f}(x)_0 = \left[\left(f_0^-(x)\right)', \left(f_0^+(x)\right)' \right]$$

comme $len\,(f\,(x)) = f_0^+\,(x) - f_0^-\,(x)$ est décroissante on obtient une contradiction. ■

Exemple 2.4.6
1)-Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, une fonction des nombres flous triangulaires

$$f\,(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))\,.$$

Supposon que f est Hukuhara différentiable et x, y, z sont des fonctions réelles différentiables.

On peut écrire f sous la forme

$$f\,(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } & t < x\,(t) \\ \frac{t - x(t)}{y(t) - x(t)} & \text{si } x\,(t) \leq t < y\,(t) \\ 1 \text{ si } & t = y\,(t) \\ \frac{z(t) - t}{z(t) - y(t)} & \text{si } y\,(t) < t \leq z\,(t) \\ 0 \text{ si } & z\,(t) < t \end{cases}$$

Pour tout $r \in [0, 1]$, le r-coupe de f est donée par

$$\begin{aligned} f_r^-\,(t) &= x\,(t) + r\,(y\,(t) - x\,(t)) \\ f_r^+\,(t) &= z\,(t) - r\,(z\,(t) - y\,(t)) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \grave{f}_r^-\,(t) &= \grave{x}\,(t) + r\,(\grave{y}\,(t) - \grave{x}\,(t)) \\ f_r^+\,(t) &= \grave{z}\,(t) - r\,(\grave{z}\,(t) - \grave{y}\,(t)) \end{aligned}$$

Alors

$$\grave{f}\,(t)_r = [\grave{x}\,(t) + r\,(\grave{y}\,(t) - \grave{x}\,(t))\,, \grave{z}\,(t) - r\,(\grave{z}\,(t) - \grave{y}\,(t))]$$

Alors

$$\grave{f}\,(t) = (\grave{x}\,(t)\,, \grave{y}\,(t)\,, \grave{z}\,(t)) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

Alors si f est Hukuhara différentiable et x, y, z sont des fonctions réelles différentiables,alors $\grave{f}\,(t) = (\grave{x}\,(t)\,, \grave{y}\,(t)\,, \grave{z}\,(t))$ est un nombre flou triangulaire

2)- Soit $f\,(t) = (-e^t, 0, e^t)$. On peut écrire sous la forme triangulaire suivante

$$f\,(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < e^t, \\ \frac{t + e^t}{e^t} & \text{si} \quad -e^t < t < 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0, \\ \frac{e^t - t}{e^t} & \text{si} \quad 0 < t \leq e^t, \\ 0 & \text{si} \quad e^t < t\,. \end{cases}$$

Pour tout $r \in [0,1]$, le r-coupe de f est donée par:

$$\begin{cases} f_r^-(t) = x(t) + r(y(t) - x(t)) = e^t(r-1), \\ f_r^+(t) = z(t) - r(z(t) - y(t)) = e^t(1-r), \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} \grave{f}_r^-(t) = e^t(r-1), \\ \grave{f}_r^+(t) = e^t(1-r), \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} f_r^-(t) = \grave{f}_r^-(t), \\ f_r^+(t) = \grave{f}_r^+(t), \end{cases}$$

Alors $f(t) = \grave{f}(t)$ et

$$-f(t) = \left(-e^t, 0, e^t\right) = \grave{f}(t)$$

3)– Soit $f(t) = (1,2,3)\,e^{-t} = (e^{-t}, 2e^{-t}, 3e^{-t})$.

Supposon que f est Hukuhara différentiable alors on $\grave{f}(t) = (-3e^{-t}, -2e^{-t}, -e^{-t})$ mais $\grave{f} \notin \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Donc f n'est pas Hukuhara différentiable .

L'exemple suivant montre l'incovénient de la différentiabilité au sens de Hukuhara

Exemple 2.4.7 Soit $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $g : (a,b) \to \mathbb{R}_+$ fonction différentiable en $x_0 \in (a,b)$ et soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ définie par $f(x) = c.g(x)$.

- On suppose que $\grave{g}(x) > 0$,alors pour $h > 0$ suffisamment petit on a

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = w(x_0, h) > 0,$$

alors

$$c.g(x_0 + h) = c.g(x_0) + c.w(x_0, h).$$

Par suite la H différence $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ existe

de la même maniére on montre que la H différence $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ existe.

Par suite on peut montre que $\grave{f}(x_0) = c.\grave{g}(x_0)$.

- Maintenant Si on a suppose que $\grave{g}(x) < 0$,alors on ne peut pas montré que les H différence $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ et $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ existe et par suite on peut pas dire que $\grave{f}(x_0)$ existe alors f n'est pas Hukuhara différentiable.

2.4.2 Différentiabilité généralisée

Définition 2.4.9 [2] Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $x_0 \in (a,b)$, on dit que f est fortement differentiable en x_0,si il existe un élément $\grave{f}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ telle que

(i) Pour tout $h > 0$ suffisamment petit $\exists\ f(x_0 + h) \ominus f(x_0), f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ et les limites dans l'espace métrique D)

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = \grave{f}(x_0),$$

où

(ii) Pour tout $h > 0$ suffisamment petit $\exists\ f(x_0) \ominus f(x_0 + h),\ f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$, et les limits

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{(-h)} = \grave{f}(x_0),$$

où

(iii) Pour tout $h > 0$ suffisamment petit $\exists\ f(x_0 + h) \ominus f(x_0), f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ et les limits

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{(-h)} \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{(-h)} = \grave{f}(x_0)$$

où

(iv) Pour tout $h > 0$ suffisamment petit $\exists\ f(x_0) \ominus f(x_0 + h),\ f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$, et les limits

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = \grave{f}(x_0)$$

Remarque 2.4.10 Le cas (i) Correspondant à la differentiabilité au sens

de Hukuhara.

Remarque 2.4.11- Si $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ est différentiable en (a, b) et $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ alors la fonction f définie par $f(x) = c.g(x)$ est fortement différentiable sur (a, b) et $\grave{f}(x) = c.\grave{g}(x)$,$\forall x \in (a, b)$ .En effet si $\grave{g}(x) > 0$ comme nous avons vu au-dessus la fonction f est Hukuhara différentiable et par suite elle est aussi fortement différentiable. De même si $\grave{g}(x) < 0$ alors la différence $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ et $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ existe et le cas (ii) est satisfait de la définition précédente.Enfin si $\grave{g}(x) = 0$ dans ce cas on peut avoir un changement de signe et on applique le cas (iii) où (iv) de la définition précédente.

Proposition 2.4.12 [2] Si $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est une fonction définie par un nombre flou triangulaire, alors

1. - Si u est (i) différentiable c'est à dire différentiable au sens de Hukuhara, alors $\grave{u} = (\grave{x}, \grave{y}, \grave{z})$

2. - Si u est différentiable au sens (ii), alors $\grave{u} = (\grave{z}, \grave{y}, \grave{x})$.

preuve : Montrons (2)

Soit $h > 0$ et suppose que $u(t) \ominus u(t+h)$ existe, alors on obtient

$$u(t) \ominus u(t+h) = (x(t) - x(t+h), y(t) - y(t+h), z(t) - z(t+h)).$$

Multiplions l'égalité précédente par $\left(\frac{1}{-h}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} u(t) \ominus u(t+h) . \left(\frac{1}{-h}\right) &= (x(t) - x(t+h), y(t) - y(t+h), z(t) - z(t+h)) . \left(\frac{1}{-h}\right) \\ &= \left(\frac{z(t) - z(t+h)}{(-h)}, \frac{y(t) - y(t+h)}{(-h)}, \frac{x(t) - x(t+h)}{(-h)}\right). \end{aligned}$$

Par passge à la limit on obtient

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \searrow 0} . \frac{u(t) \ominus u(t+h)}{-h} \left(\lim_{h \searrow 0} \frac{x(t) - x(t+h)}{(-h)}, \lim_{h \searrow 0} \frac{y(t) - y(t+h)}{(-h)}, \lim_{h \searrow 0} \frac{z(t) - z(t+h)}{(-h)}\right) \\ &= (\grave{z}, \grave{y}, \grave{x}). \end{aligned}$$

De même, on à

$$\begin{aligned} &\lim_{h \searrow 0} \frac{u(t-h) \ominus u(t)}{(-h)} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{(x(t-h) - x(t), y(t-h) - y(t), z(t-h) - z(t))}{(-h)} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left(\frac{z(t-h) - z(t)}{(-h)}, \frac{y(t-h) - y(t)}{(-h)}, \frac{x(t-h) - x(t)}{(-h)}\right) = (\grave{z}, \grave{y}, \grave{x}) \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Les équations Différentielles floues.

Les équations différentielles floues (EsDF) apparaissent comme manière naturelle pour modélisér la propagation de l'incertitude épistémique dans un environnement dynamique, Il y a plusieurs interprétations d'une équation différentielle floue. La premiere historiquement a été basée sur la dérivée au sens de Hukuhara. L'inconvénient de cette interprétation est que les solutions d'une équation différentielle floue est toujours à un support de longueur croissante. Ce fait implique que le futur comportement d'un système dynamique flou est de plus en plus incertain à temps. Tandis qu'une autre approche interprète les équations différentielles floues par les inclusions différentielles. Les inclusions différentielles et les équation différentielles floues sont deux matières qui sont très intéressantes. Nous travaillerons avec les interprétations basées sur le principe de la différentiabilité au sens de Hukuhara, le principe de **l'extension de Zadeh** et les concepts de forte différentiabilité.

3.1 EsDF sous la différentiabilité de Hukuhara

3.1.1 L'existence et l'unicité d'un solution Hukuhara Différentiable.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue, et considérons le problème à valeur initiale floue (PVIF)

$$\begin{cases} x' = f\left(t, x\left(t\right)\right), \, t \in \mathbb{R}, \\ x\left(t_0\right) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

On a le resultat suivant .

Lemme 3.1.2 [2] Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue, x est solution du probléme initial (3.1) si et seulement si x est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{3.2}$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

preuve : Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue.

1- On suppose que x est solution du probléme initial (3.1)

On a

$$\begin{aligned}
\left[\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds\right]_r &= \left[\int_{t_0}^{t} \left(x_r^-\right)'(s)\, ds, \int_{t_0}^{t} \left(x_r^+\right)'(s)\, ds\right], \\
&= \left[x_r^-(t) - x_r^-(t_0), x_r^+(t) - x_r^+(t_0)\right], \\
&= \left[x(t) \ominus x(t_0)\right]_r, \\
&= \left[(x(t) \ominus x_0)\right]_r.
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = x(t) \ominus x_0. \tag{3.3}$$

D'autre part, on a

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{3.4}$$

Par suite d'aprés (3.3) et (3.4) , on a

$$x(t) \ominus x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Donc

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Inversemment soit x solution de l'équation intégrale (3.2), alors on a

$$x(t+h) = x_0 + \int_{t_0}^{t+h} f(s, x(s))\, ds, \text{ pour tout } h > 0.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{x\left(t+h\right)\ominus x\left(t\right)}{h}=\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t+h}f\left(s,x\left(s\right)\right)ds,$$

Comme

$$\begin{aligned}
& D\left(\int_t^{t+h}f\left(s,x\left(s\right)\right)ds,h.f\left(t,x\left(t\right)\right)\right), \\
= & D\left(\int_t^{t+h}f\left(s,x\left(s\right)\right)ds,\int_t^{t+h}f\left(t,x\left(t\right)\right)ds\right), \\
\leq & \int_t^{t+h}D\left(f\left(s,x\left(s\right)\right),f\left(t,x\left(t\right)\right)\right)ds, \\
\leq & \int_t^{t+h}w\left(f\left(t,x\left(t\right)\right),h\right)ds=h.w\left(f\left(t,x\left(t\right)\right),h\right).
\end{aligned}$$

avec $w(f(t,x(t)),h)$ dénote le module de la continuité de la function $f(t,x(t))$ qui est continue en fonction de $t\in[t_0,t_1]$.

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\searrow 0}D\left(\frac{x\left(t+h\right)\ominus x\left(t\right)}{h},f\left(t,x\left(t\right)\right)\right) \\
= & \lim_{h\searrow 0}D\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f\left(s,x\left(s\right)\right)ds,f\left(t,x\left(t\right)\right)\right) \\
= & \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}D\left(\int_t^{t+h}f\left(s,x\left(s\right)\right)ds,h.f\left(t,x\left(t\right)\right)\right) \\
\leq & \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}h.w\left(f\left(t,x\left(t\right)\right),h\right)=0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{x\left(t+h\right)\ominus x\left(t\right)}{h}=f\left(t,x\left(t\right)\right).$$

C'est à dire

$$x'\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right)\right). \tag{3.5}$$

D'autre part il n'est pas difficile de vérifier

$$x\left(t_0\right)=x_0. \tag{3.6}$$

En concluision d'aprés (3.5) et (3.6), il résulte que x est solution du probléme initial (1.3). ■

Lemme 3.1.3 Soient $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$ avec $p > 0$ et $\overline{B}(x_0, q)$ est la boul fermée de centre x_0 et de rayon q. Supposons que $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est une fonction continue satisfaisant la condition de Lipschitz

$$D(f(t,x), f(t,y)) \leq L.D(x,y), \forall (t,x), (t,y) \in R_0,$$

avec$L > 0$. Alors f est bornée, c'est à dire. il existe $M > 0$ telle que

$$D(f(t,x), 0) \leq M.$$

preuve : D'aprés l'inégalité triangulaire, on a

$$D(f(t,x), 0) \leq D(f(t,x), f(t,x_0)) + D(f(t,x_0), 0).$$

Comme pour tout $t \in [t_0, t_0 + p]$, la fonction réele $D(f(t,x_0), 0)$ est bornée, alors il existe M_1 avec $D(f(t,x_0), 0) \leq M_1$.

Par suite, on a obtient

$$D(f(t,x), 0) \leq L.D(x, x_0) + M_1 \leq L.q + M_1 = M.$$

Alors, f est bornée. ■

Théorème 9 [2] Soient $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$ avec $p, q > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue satisfaisant la condition de Lipschitz

$$D(f(t,x), f(t,y)) \leq L.D(x,y), \forall (t,x), (t,y) \in R_0.$$

avec $L > 0$. Alors, le problème à valeur initiale flou (3.1) à une solution unique définie dans $[t_0, t_0 + k]$, avec $k > 0$

preuve : Soient $K_0 = C([t_0, t_0 + p], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$,et $T : K_0 \to K_0$ un opérateur défini par

$$\begin{aligned} T(x_0)(t) &= x_0, \\ T(x)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \end{aligned}$$

T est bien définie . D'aprés le Lemme (3.1.1) et la condition de Lipschitz(lemme (3.1.1)), on a conclude que f est bornée ,donc T est aussi bornée car on a

$$\begin{aligned} D(T(x)(t), x_0) &= D\left(x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, 0 + x_0\right), \\ &= D\left(\textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, 0\right), \\ &\leq \textstyle\int_{t_0}^{t} D(f(s, x(s)), 0)\, ds, \\ &\leq \textstyle\int_{t_0}^{t} M.ds = M(t - t_0). \end{aligned}$$

Avec $M = \sup_{(t,x)\in R_0} D\left(f\left(t, x\left(t\right)\right), 0\right).$

Soient $d = \min\left\{p, \frac{q}{M}\right\}$ et $K_1 = C\left(\left[t_0, t_0 + d\right], \overline{B}\left(x_0, q\right)\right)$, K_1 est un espace métrique complet avec la distance uniforme D.

Considérons maintenant l'application $T : K_1 \to \ (C\left[t_0, t_0 + d\right], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$.On va appliquer le théorème de point fixe de Banach.

1- Montrons que T est une application de K_1 dans K_1, pour cela on montre que $T\left(x\right)\left(t\right) \in K_1 \ \forall t \in \left[t_0, t_0 + d\right].$

Soit $x \in K_1$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + d]$, on a

$$\begin{array}{rcl} D\left(T\left(x\right)\left(t\right), x_0\right) & \leq & M\left(t - t_0\right), \\ & \leq & M.d \leq q. \end{array}$$

Donc $\forall t \in \left[t_0, t_0 + d\right], T\left(x\right)\left(t\right) \in K_1.$

2- Montrons que T est une application contractante.

Soit $x, y \in K_1$, on a

$$\begin{array}{rcl} D\left(T\left(x\right)\left(t\right), T\left(y\right)\left(t\right)\right) & = & D\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds, x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, y\left(s\right)\right) ds\right) \\ & = & D\left(\int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds, \int_{t_0}^{t} f\left(s, y\left(s\right)\right) ds\right) \\ & \leq & \int_{t_0}^{t} D\left(f\left(s, x\left(s\right)\right), f\left(s, y\left(s\right)\right)\right) ds \\ & \leq & \int_{t_0}^{t} ds.L.D\left(x, y\right) \\ & = & L.\left(t - t_0\right).D\left(x, y\right) \\ & \leq & 2.L.d.D\left(x, y\right). \end{array}$$

Si on suppose $2.L.d < 1$, par exemple si on prendre $k = \min\left\{d, \frac{1}{2.L}\right\}$, alors l'application $T : K_2 \to K_2$ avec $K_2 = C\left(\left[t_0, t_0 + k\right], \overline{B}\left(x_0, q\right)\right)$est contractante. Par suite d'aprés le théorème de point fixe Banach il existe un unique $x^* \in \ K_2$. telle que $T\left(x^*\right) = x^*$, c'est à dire .x^*est solution de l'équation intégrale(3.2) , et par conséquent x^* est solution de le problème à valeur initiale floue (PVIF) (3.1) . ■

Théorème 10 [2] Soient $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}\left(x_0, q\right)$ avec $p, q > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue avec

$$f\left(t, x\right)_r = \left[f_r^-\left(t, x_r^-, x_r^+\right), f_r^+\left(t, x_r^-, x_r^+\right)\right], \text{ pour tout } r \in [0, 1],$$

Si

$$f_r^-\left(t, x_r^-, x_r^+\right) \text{ et } f_r^+\left(t, x_r^-, x_r^+\right), \text{ pour tout } r \in [0, 1].$$

Sont equicontinues c'est à dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$, la condition $\left\|\left(t, x_r^-, x_r^+\right) - \left(t_0, \left(x_0\right)_r^-, \left(x_0\right)_r^+\right)\right\| < \sigma$, entraîne que pour tout $r \in [0, 1]$ $\left|f_r^-\left(t, x_r^-, x_r^+\right) - f_r^+\left(t_0, \left(x_0\right)_r^-, \left(x_0\right)_r^+\right)\right| < \varepsilon,$

Et uniformément Lipschitz par rapport à la deuxième et la troisième variable,

c'est à dire

$$\left| f_r^{\overset{+}{-}}\left(t, x_r^-, x_r^+\right) - f_r^{\overset{+}{-}}\left(t_0, (x_0)_r^-, (x_0)_r^+\right) \right| \leq L.\left(\left| x_r^- - y_r^- \right| + \left| x_r^+ - y_r^+ \right| \right),$$

avec $L > 0$.Pour tout $(t, x), (t, y) \in R_0$ et pour tout $r \in [0, 1]$.

Alors le problème à valeur initiale floue (3.1) admet une solution unique définie dans $[t_0, t_0 + k]$, avec $k > 0$. De plus l'ensemble $r-$coupe de la solution $x_r = [x_r^-, x_r^+]$ est caractérisé par le système des équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} x_r'^- = f_r^-\left(t, x_r^-, x_r^+\right) \\ x_r'^+ = f_r^+\left(t, x_r^-, x_r^+\right) \end{cases}, r \in [0, 1].$$

preuve : Voir [2]. ■

Exemple 3.1.4 On considére le problème à valeur initiale floue suivant

$$(\text{PVIF}) \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = (-1, 0, 1), \end{cases} \tag{3.7}$$

où $f(t, x) = -x + 2e^{-t}(-1, 0, 1)$, et $x = \left(x_0^-, x_1, x_0^+\right)$.

On a

$$\begin{aligned} f(t, x) &= -\left(x_0^-, x_1, x_0^+\right) + \left(-2e^{-t}, 0, 2e^{-t}\right), \\ &= \left(-x_0^+, -x_1, -x_0^-\right) + \left(-2e^{-t}, 0, 2e^{-t}\right), \\ &= \left(-x_0^+ - 2e^{-t}, -x_1, -x_0^- + 2e^{-t}\right). \end{aligned}$$

Tous les composants de f sont continues donc f est continue.

Comme f est un fonction des nombres floues triangulaire, alors l'ensemble $r-$coupe de f est donné par

$$\begin{cases} f_r^- = -x_0^+ - 2e^{-t} + r\left(-x_1 + x_0^+ + 2e^{-t}\right), \\ f_r^+ = -x_0^- + 2e^{-t} - r\left(-x_0^- + 2e^{-t} + x_1\right), \end{cases}.$$

avec

$$\begin{cases} x_r^- = x_0^- + r\left(x_1 - x_0^-\right), \\ x_r^+ = x_0^+ - r\left(x_0^+ - x_1\right). \end{cases}$$

On a $x' = \left(x_0'^-, x_1', x_0'^+\right)$, alors le système (3.7)devient

$$\begin{cases} \left(x_0^-\right)' = -x_0^+ - 2e^{-t}, \\ \left(x_1\right)' = -x_1, \\ \left(x_0^+\right)' = -x_0^- + 2e^{-t}, \\ x(0) = (-1, 0, 1). \end{cases}$$

Maintenant on a montrons que f satisfait la condition de Lipschitz.

Soient x et $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a

$$D(f(t,x), f(t,y)) = \sup_{r\in[0,1]} \max \left\{ \left| f_r^-(t,x) - f_r^-(t,y) \right|, \left| f_r^+(t,x) - f_r^+(t,y) \right| \right\},$$

par suitepar suite

$$= \sup_{r\in[0,1]} \max \begin{Bmatrix} \left| \left[-x_0^+ - 2e^{-t} + r\left(-x_1 + x_0^+ + 2e^{-t}\right) \right] - \left[-y_0^+ - 2e^{-t} + r\left(-y_1 + y_0^+ + 2e^{-t}\right) \right] \right|, \\ \left| \left[-x_0^- + 2e^{-t} - r\left(-x_0^- + 2e^{-t} + x_1\right) \right] - \left[-y_0^- + 2e^{-t} - r\left(-y_0^- + 2e^{-t} + y_1\right) \right] \right| \end{Bmatrix}.$$

$$= \sup_{r\in[0,1]} \max \begin{Bmatrix} \left| -x_0^+ + y_0^+ + r\left(-x_1 + y_1 + x_0^+ - y_0^+\right) \right|, \\ \left| -x_0^- + y_0^- - r\left(-x_0^- + y_0^- + x_1 - y_1\right) \right| \end{Bmatrix}$$

$$= \sup_{r\in[0,1]} \max \begin{Bmatrix} \left| \left[-x_0^+ + r\left(-x_1 + x_0^+\right) \right] + \left[y_0^+ + r\left(y_1 - y_0^+\right) \right] \right|, \\ \left| \left[-x_0^- - r\left(x_1 - x_0^-\right) \right] + \left[y_0^- - r\left(y_0^- - y_1\right) \right] \right| \end{Bmatrix}$$

$$= \sup_{r\in[0,1]} \max \begin{Bmatrix} \left| -\left[x_0^+ - r\left(x_0^+ - x_1\right) \right] + \left[y_0^+ - r\left(y_0^+ - y_1\right) \right] \right|, \\ \left| -\left[x_0^- + r\left(x_1 - x_0^-\right) \right] + \left[y_0^- + r\left(y_1 - y_0^-\right) \right] \right| \end{Bmatrix}$$

$$= \sup_{r\in[0,1]} \max \left\{ \left| -x_r^+ + y_r^+ \right|, \left| -x_r^- + y_r^- \right| \right\}$$
$$= \sup_{r\in[0,1]} \max \left\{ \left| x_r^- - y_r^- \right|, \left| x_r^+ - y_r^+ \right| \right\}$$
$$= D(x,y).$$

Donc il existe $L = 1 > 0$ telle que f est **Lipschitzienne** ,donc d'aprés le théorème (3.1.1), le problème (3.7)admet un solution unique donée par la résolution de système suivent

$$\begin{cases} \left(x_0^-\right)' = -x_0^+ - 2e^{-t}, \\ (x_1)' = -x_1, \\ \left(x_0^+\right)' = -x_0^- + 2e^{-t}, \\ x(0) = (-1, 0, 1), \end{cases}$$

En effet, on a

$$(x_1)' = -x_1, \text{ ce qui entraîne que } x_1(t) = ce^{-t},$$

et comme

$$x_1(0) = 0 \iff ce^{-t} = 0 \iff c = 0.$$

Alors

$$x_1(t) = 0.$$

Par suite

$$\begin{cases} \left(x_0^-\right)' = -x_0^+ - 2e^{-t}, \\ \left(x_0^+\right)' = -x_0^- + 2e^{-t}. \end{cases} \tag{3.8}$$

On résoudre le système (3.8)

$$\left(x_0^-\right)'' = -\left(x_0^+\right)' + 2e^{-t},$$

ce que entraîne que

$$\left(x_0^-\right)'' = x_0^-$$

L' équation caractéristique est

$$\lambda^2 = 1.$$

Alors

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.$$

Donc la solution est donée par

$$x_0^-(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \tag{3.9}$$

Déterminons c_1 et c_2.

On a

$$\left(x_0^-(t)\right)' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}. \tag{3.10}$$

D'aprés (3.9), (3.10) et les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} x_0^-(0) = c_1 + c_2 = -1, \\ \left(x_0^-(0)\right)' = c_1 - c_2 = -3, \end{cases}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = -2. \end{cases}$$

Alors

$$x_0^-(t) = -2e^t + e^{-t}$$

Déterminons maintenant x_0^+.

Comme

$$\left(x_0^-\right)' = -x_0^+ - 2e^{-t}$$

alors, on a

$$x_0^+ = -\left(x_0^-\right)' - 2e^{-t} = 2e^t - e^{-t},$$

En conclusion la solution général est

$$x(t) = \left(e^{-t} - 2e, 0, 2e^t - e^{-t}\right). \; t \in (0, \infty).$$

3.2 L'interprétation basée sur le principe de l'extension de Zadeh

Sous cette interprétation, un $(PVIF)$ est résolu comme suit : nous examinons l'ODE classique $x' = f(t, x, a)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ avec a est un paramètre qui apparaît dans l'équation donnée qui désigne l'équation différentiel floue considérée et on la résoudre. Puis la solution du $(PVIF)$ est produite en utilisant le principe de l'extension de Zadeh sur la solution classique.

Théorème 11 [2] Soit $f : [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times \overline{B}(a_0, r) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $q, r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

On not par : $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(a_0, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \, | \|a - a_0\| \leq r\}$la boul fermée de centre a_0 et de rayon r.dans $\mathbb{R}^n$,avec $\|.\|$ est la norme euclidienne.

On suppose que f est **Lipschitzienne** par rapport à la deuxième variable c'est à dire il existe $L_1 > 0$ telle que :

$$\|f(t, x, a) - f(t, y, a)\| \leq L_1 \|x - y\| . \tag{3.11}$$

De même f est **Lipschitzienne** par rapport à la troisième variable c'est à dire il existe $L_2 > 0$ telle que :

$$\|f(t, x, a) - f(t, y, a)\| \leq L_1 \|a - b\| .$$

Alors,le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} x' = f(t, x, a), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.12}$$

possède une solution unique. De plus la solution unique dépend continûment par rapport à la condition initiale et des paramètres initiales .

preuve : Voir [2] . ∎

Soit $\overline{f} : [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(a_0, q) \times \overline{B}(a_0, r) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,l'extension de Zadeh de la fonction f.

Définition 3.2.1 Soit A et X_0 deux sous ensembles de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, et soit $\overline{f}$: $[t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(a_0, q) \times \overline{B}(a_0, r) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. On dit que le problème à valeur initiale floue suivant

$$\begin{cases} X' = \overline{f}(t, X, A), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

posséd une solution $X : [t_0, t_0 + p] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, avec X est l'extension de Zadeh de la solution $x : [t_0, t_0 + p] \to \mathbb{R}$ de problème classique (3.12) .

On a le résultat suivante

Théorème 12 [2] Soit $f : [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times \overline{B}(a_0, r) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, avec p, q et r des réeles positive. On suppose que f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable c'est à dire il existe $L_1 > 0$ telle que :

$$\|f(t, x, a) - f(t, y, a)\| \leq L_1 \|x - y\|,$$

de même f est Lipschitzienne par rapport à la troisième variable c'est à dire il existe $L_2 > 0$ telle que :

$$\|f(t, x, a) - f(t, y, a)\| \leq L_1 \|a - b\|.$$

Alors la solution X du problème (3.13) existe et continue.

De plus l'ensemble r-coupe de X est définie par

$$X_r = x(t, (X_0)_r, A_r) = \{x(t, x_0, a) | x_0 \in (X_0)_r, a \in A_r\},$$

où $x(t, x_0, a)$ est l'unique solution de problème classique (3.12).

preuve : D'apré le Théorème (3.2), le problème classique (3.12) posséde une solution unique dépend continument par rapport à x_0 et a. Par suite d'apré le Théorème (1.4.1), l'extension de Zadeh $X(t, X_0, A)$ de $x(t, x_0, a)$ est unique et bien définie et continue.

Alors le r-coupe de X, est donée par (aussi d'apré le Théorème(1.4.1)) :

$$X_r = \{x(t, x_0, a) | x_0 \in (X_0)_r, a \in A_r\}.$$

■

Exemple 3.2.2 Soit $A, X \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,on considére le problème suivant

$$\begin{cases} X' = A.X, \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

où $A = (-3, -2, -1)$ et $X_0 = (1, 2, 3)$,

les r-coupe de A et X sont données par

$$(X_0)_r = \begin{cases} (X_0)_r^- = 1 + r, \\ (X_0)_r^+ = 3 - r, \end{cases},$$

et

$$A_r = \begin{cases} A_r^- = r - 3, \\ A_r^+ = -1 - r. \end{cases}$$

Pour obtenir les solutions de (3.14) ,on considére l'équation différentiell classique suivante

$$\begin{cases} x' = -a.x, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$

La solution de (3.15) est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{-at}$$

la solution $x(t)$ de problèm (3.15) est unique.

Pour tout $r \in [0,1]$, on a

$$X_r = \{x(t, x_0, a) \mid x_0 \in (X_0)_r \text{ et } a \in A_r\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0.e^{At}, \\ &= (1,2,3)\, e^{(-3,-2,-1)t}. \end{aligned}$$

La r-coupe de X est donnée par

$$X_r = \left(X_0.e^{At}\right)_r.$$

D'apré la Définition (1.4.3), on a

$$\begin{aligned} \left(X_0.e^{At}\right)_r^- &= \min\left\{(X_0)_r^- . \left(e^{A_r^- t}\right), (X_0)_r^- . \left(e^{A_r^+ t}\right), (X_r)_r^+ . \left(e^{A_r^- t}\right), (X_r)_r^+ . \left(e^{A_r^+ t}\right)\right\} \\ &= \min\left\{(1+r)\, e^{(r-3)t}, (1+r)\, e^{-(1+r)t}, (3-r)\, e^{(r-3)t}, (3-r)\, .e^{-(1+r)t}\right\} \\ &= (1+r)\, e^{(r-3)t}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(X_0.e^{At}\right)_r^+ &= \max\left\{(X_0)_r^- . \left(e^{A_r^- t}\right), (X_0)_r^- . \left(e^{A_r^+ t}\right), (X_r)_r^+ . \left(e^{A_r^- t}\right), (X_r)_r^+ . \left(e^{A_r^+ t}\right)\right\} \\ &= (3-r)\, .e^{-(1+r)t}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $r \in [0,1]$, on a

$$X(t)_r = \left[(1+r)\, e^{(r-3)t}, (3-r)\, .e^{-(1+r)t}\right]$$

3.3 EsDF sous la la condition de forte différentiabilité

3.3.1 Existence et unicité des solutions sous la différentiabilité fortement généralisé

Lemme 3.3.1 Soit $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et supposon que pour tout $r \in [0,1]$, les fonctions $x_r = [x_r^-, x_r^+]$ sont différentiables avec x_r^- strictement croissante et x_r^+

strictement décroissante,telle que il existe $c_1 > 0$ et $c_2 < 0$ avec $(x_r^-)' \geq c_1$,et $(x_r^+)' \leq c_2$ pour tout $r \in [0,1]$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue, et soit $f_r^-(t)$ et $f_r^+(t)$ les r-coupe de f et supposon que les dérivées partielles $\frac{\partial f_r^-}{\partial r}$ et$\frac{\partial f_r^+}{\partial r}$ sont bornées, pour tout $r \in [0,1]$, et $t \in [a,b]$.

on suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite:

1- $x_1^- < x_1^+$,

2- $x_1^- = x_1^+$ et le noyau de $[f(s)]_1$ est un singleton pour tout $s \in T = [a,b]$.

Alors il existe $h > a$ telle que la différence de Hukuhara

$$x \ominus \int_a^t f(s)\,ds,$$

existe pour tout $t \in [a,h]$

Le résultat suivant concerne l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle flou sous le differentiability généralisé.

Théorème 13 [2] Soient $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(a_0, r)$, avec $p, q >$ et $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $\overline{B}(x_0, q)$ est la boul fermée de centre a_0 et de rayon r.

Supposons que $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est une fonction continue satisfaisant les conditions suivantes :

1. Il existe une constante $L > 0$ telle que
$$D(f(t,x), f(t,y)) \leq L.D(x,y), \forall (t,x), (t,y) \in R_0.$$
2. Soit $[f(t,x)]_r = [f_r^-(t,x), f_r^+(t,x)]$,l'ensembles r- coupe de f , les dérivées partielle par rapport r de $f_r^-, f_r^+ : R_0 \to \mathbb{R}$ sont bornées, et les bornes sont indépendants de $(t,x) \in \mathbb{R}_0$ et $r \in [0,1]$.
3. Les fonctions x_0^- et x_0^+ sont différentiables (en fonctions de r),et il existe $c_1 > 0$ telle que $\left(x_0^-\right)_r \geq c_1$, et il existe $c_2 < 0$ telle que $\left(x_0^+\right)_r \leq c_2$ pour tout $r \in [0,1]$ et l'une des conditions suivantes est satisfaite

a. $x_1^- < x_1^+$.

Théorème 1 *b. $x_1^- = x_1^+$ et le noyau $[f(s)]_1$ est un singleton pour tout $(t,x) \in R_0$ avec $[x]_1$ un singleton.*

Alors le problème à valeur initial floue

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

possède exactement deux solutions définies dans un intervalle $[t_0, t_0 + k]$.

preuve : D'aprés les lemme (3.1.1) et (3.3.1) et le résultat d'existence dans le théorème (3.1.1) on a l'existence d'une solution qu'est différentiable au sens de Hukuhara.

Montrons maintenant l'existence de l'autre solution.

D'abord,d'aprés le lemme (3.3.1) , les conditions (2)et(3) assurer l'existence de la H-différence

$$x_0 \ominus \left(-\int_{t_0}^{t} f\left(t, x\left(t\right)\right) dt\right).$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + c]$, avec $0 < c \leq p$.

Soit $R_1 = [t_0, t_0 + c] \times \overline{B}\left(x_0, q\right)$, $K_0 = C\left([t_0, t_0 + c], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}\right)$ et $Q: K_0 \to K_0$ un opérateur défini par

$$\begin{aligned} Q\left(x_0\right) &= x_0, \\ Q\left(x\right) &= x_0 \ominus \left(-\int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds\right) \end{aligned}$$

Q est bien définie dans$[t_0, t_0 + c]$.

d'apré Lemme (3.1.1) ,et la condition (1)de théorème précédente f est bornée, donc Q est borné et de plus on a

$$\begin{aligned} D\left(Q\left(x\right)\left(t\right), x_0\right) &= D\left(x_0 \ominus \left(-\int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds\right), x_0 \ominus \left(-0\right)\right), \\ &= D\left(\int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right) ds, 0\right), \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D\left(f\left(s, x\left(s\right)\right), 0\right) ds, \\ &\leq \int_{t_0}^{t} M.ds = M\left(t - t_0\right), \end{aligned}$$

avec $M = \sup_{(t,x) \in R_1} D\left(f\left(t, x\left(t\right)\right), 0\right)$.

Soit $d = \min\left\{c, \frac{q}{M}\right\}$ et $K_1 = C\left([t_0, t_0 + d], \overline{B}\left(x_0, q\right)\right)$ est un espace métrique complet avec la distance uniforme D.

Considérons maintenant $Q: K_1 \to C\left([t_0, t_0 + d], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}\right)$,on va appliquer le théorème de point fixe de Banach:

1- Montrons que Q est une application de K_1 dans K_1, pour cela on montre que $Q\left(x\right)\left(t\right) \in K_1$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + d]$.

Soit $x \in K_1$,et $t \in [t_0, t_0 + d]$,on a

$$\begin{aligned} D\left(Q\left(x\right)\left(t\right), x_0\right) &\leq M\left(t - t_0\right) \\ &\leq M.d \leq q. \end{aligned}$$

En conclusion pour tout $t \in [t_0, t_0 + d]$ on a $Q\left(x\right)\left(t\right) \in K_1$,

2- Montrons que Q est une application contractante.

Soient x et y deux éléments de K_1, on a

$$\begin{aligned}
D\left(Q\left(x\right)\left(t\right),Q\left(y\right)\left(t\right)\right) &= D\left(x_0 \ominus \left(-\int_{t_0}^{t} f\left(s,x\left(s\right)\right)ds\right), x_0 \ominus \left(-\int_{t_0}^{t} f\left(s,y\left(s\right)\right)ds\right)\right),\\
&= D\left(\int_{t_0}^{t} f\left(s,x\left(s\right)\right)ds, \int_{t_0}^{t} f\left(s,y\left(s\right)\right)ds\right),\\
&\leq \int_{t_0}^{t} D\left(f\left(s,x\left(s\right)\right), f\left(s,y\left(s\right)\right)\right)ds,\\
&\leq \int_{t_0}^{t} dsL.D\left(x,y\right),\\
&= L.\left(t-t_0\right).D\left(x,y\right),\\
&\leq 2.L.d.D\left(x,y\right).
\end{aligned}$$

Si on prend $2.L.d < 1$ donc choisisons $k < \min\left\{d, \frac{1}{2.L}\right\}$, alors Q est contractante.

En conclusion d'apré le théorème de point fixe de Banach il existe un unique point x^* telle que $Q\left(x^*\right) = x^*$,c'est à dire elle est solution de l'équation intégrale(3.2) ,et par suite est une solution du problème à valeur initiale floue (PVIF) (3.1) . ■

3.3.2 Résultats de caractérisation

Nous prolongerons dans cette section le résultat de caractérisation du théorème 9 au cas du differentiability généralisé.

Théorème 14 [2] Soit $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}\left(x_0, p\right), p > 0, x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction continue telle que

$$f\left(t,x\right)_r = \left[f_r^-\left(t, x_r^-, x_r^+\right), f_r^+\left(t, x_r^-, x_r^+\right)\right], r \in [0,1]$$

Et les proprieté suivant satisfait

1. 1-$f_r^{\overset{+}{-}}\left(t, x_r^-, x_r^+\right)$ sont equicontinuos,et uniformément Lipschitz par rapport le deuxième et troisième variable,c'est à dire .

   $$\left| f_r^{\overset{+}{-}}\left(t, x_r^-, x_r^+\right) - f_r^{\overset{+}{-}}\left(t_0, \left(x_0\right)_r^-, \left(x_0\right)_r^+\right) \right| \leq L.\left(\left|x_r^- - y_r^-\right| + \left|x_r^+ - y_r^+\right|\right)$$

   pour tout $\left(t,x\right), \left(t,y\right) \in R_0$ et$\forall r \in [0,1]$

2. Les dérivé partielle par rapport r de $f_r^-, f_r^+ : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sont bornée,les limites étant indépendant de $\left(t,x\right) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, r \in [0,1]$.

3. Les fonction x_0^- et x_0^+ sont différentiable (en fonctions de r),et il existe $c_1 > 0$telle que $\left(x_0^-\right)_r \geq c_1$,et il existe $c_2 < 0$telle que $\left(x_0^+\right)_r \leq c_2$ pour tout $r \in [0,1]$et on a les possibilité suivant :

a. $(x_0)_1^- < (x_0)_1^+$ .Ou

Théorème 2 *b Si $(x_0)_1^- = (x_0)_1^+$ et le noyau $[(t,x,u)]_1$ est composé exactement par un élément pour n'importe $(t,x) \in R_0$ telle que $[x_1]$ et $[u]_1$ est aussi composé exactement par un élément.*

Alors le problème à valeur initial flou

$$x'(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0 \tag{3.16}$$

Est équivalent sur un certain intervalle $[t_0, t_0+k]$ avec l'union des deux EsDO suivantes :

$$\begin{cases} (x_r^-)'(t) = f_r^-(t, x_r^-(t), x_r^+(t)), \\ (x_r^+)'(t) = f_r^+(t, x_r^-(t), x_r^+(t)), \quad .r \in [0,1] \\ x_r^-(t_0) = (x_0)_r^- . (x_0)_r^+ (t_0) = (x_0)_r^+ . \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} (x_r^-)'(t) = f_r^+(t, x_r^-(t), x_r^+(t)), \\ (x_r^+)'(t) = f_r^-(t, x_r^-(t), x_r^+(t)), \quad .r \in [0,1] \\ x_r^-(t_0) = (x_0)_r^- . (x_0)_r^+ (t_0) = (x_0)_r^+ . \end{cases} \tag{3.18}$$

preuve : Voir [2] . ■

3.3.3 Exemple d'une équation différentielle floue sous la condition de forte différentiabilité

Exemple 3.3.5 Soit le $(PVIF)$ suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \\ x(0) = (-1,0,1), \end{cases}$$

où $x = (x_0^-, x_1, x_0^+) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, -x = (-x_0^+, -x_1, -x_0^-)$

1. On suppose que x est différentiable au sens (i), alors $x' = \left((x_0^-)', (x_1)', (x_0^+)'\right)$ et par identification on obtien le systeme suivante

$$\begin{cases} (x_0^-)' = -x_0^+, \\ (x_1)' = -x_1, \\ (x_0^+)' = -x_0^-, \\ x(0) = (-1,0,1). \end{cases} \tag{3.19}$$

La solution du système (3.19) est

$$x(t) = (-e^t, 0, e^t).$$

2. On supposons que x est différentiable au sens (ii), alors $x' = \left(\left(x_0^+\right)', (x_1)', \left(x_0^-\right)'\right)$, et par identification on obtient le système suivante

$$\begin{cases} \left(x_0^-\right)' = -x_0^-, \\ (x_1)' = -x_1, \\ \left(x_0^+\right)' = -x_0^+, \\ x(0) = (-1, 0, 1). \end{cases} \tag{3.20}$$

La solution du système (3.20) est

$$x(t) = \left(-e^{-t}, 0, e^{-t}\right).$$

3.4 Méthodes résolution des équations différentielles floues de premier ordre

3.4.1 La formule de variation de la constante pour les équations différentielles floues

On a d'abord le resultat suivant

Théorème 15 [3] Soient f et g:$(a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux fonctions fortement différentiables telle que f est (i) différentiable et g est (ii)différentiable ou f est (ii) différentiable et g est (i)différentiable sur un intervalle (a,b). Si la H -différence $f(x) - g(x)$ existe pour tout $x \in (a,b)$ alors $f - g$ est fortement différentiable et

$$(f-g)'(x) = f'(x) + (-1)\, g'(x), \text{ pour tout } x \in (a,b).$$

preuve : Soit $x \in [a,b]$

cas I. Supposons que f est (i) différentiable alors $f(x+h) - f(x)$ existe pour tout $h > 0$ et il existe $u_1(x,h)$ telle que

$$f(x+h) = f(x) + u_1(x,h), \tag{3.21}$$

D'autre part g est (ii) différentiable alors il existe $v_1(x,h)$ telle que

$$g(x) = g(x+h) + v_1(x,h). \tag{3.22}$$

D'aprés (3.21) et (3.22), on a

$$f(x+h) + g(x) = f(x) + g(x+h) + v_1(x,h) + u_1(x,h).$$

Comme la H -différence $f(x) - g(x)$ et $f(x+h) - g(x+h)$ existe, on a

$$f(x+h) - g(x+h) = f(x) - g(x) + v_1(x,h) + u_1(x,h).$$

Donc la H -différence$(f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x))$existe et on a

$$(f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x)) = v_1(x,h) + u_1(x,h). \tag{3.23}$$

De même on montre que il existe $u_2(x,h)$ et $v_2(x,h)$ telles que

$$f(x) = f\ (x-h) + u_2(x,h),$$

et

$$g(x-h) = \ g(x) + v_2(x,h),$$

Alors

$$(f(x) - g(x)) - (f(x-h) - g(x-h)) = v_2(x,h) + u_2(x,h) \tag{3.24}$$

Comme

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{u_1(x,h)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{u_2(x,h)}{h} = f'(x),$$

et

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{v_1(x,h)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{v_2(x,h)}{h} = (-1)\, g'(x).$$

Multiplions (3.23) et (3.24) par $\frac{1}{h}$ et par passage a la limite quand $h \searrow 0$, on obtien $f - g$ est (i) différentiable et de plus on a

$$(f-g)'(x) = f'(x) + (-1)\, g'(x), \text{ pour tout } x \in (a,b).$$

cas II. Supposons que f est (ii) différentiable et g est (i)différentiable, alors en utilisant une preuve similaire au cas I on obtient

$$(f-g)'(x) = f'(x) + (-1)\, g'(x), \text{ pour tout } x \in (a,b).$$

■

Théorème 16 [3] Soient f, g:$(a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux fonctions fortement différentiables et supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. $f(x).f'(x) > 0$ et g est (i) différentiable,
2. $f(x).f'(x) < 0$ et g est (ii) différentiable.

Alors $f.g$ est fortement différentiable et on a

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x), \text{ pour tout } x \in (a,b).$$

Théorème 17 [3] Considérons le $(PVIF)$ suivant

$$\begin{cases} y'(t) = a.y(x) + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.25}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $b : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est une fonction continue.

cas I. . Si $a > 0$ alors

$$y(x) = e^{a(x-x_0)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{-a(t-x_0)} dt \right), \tag{3.26}$$

est une solution (i) différentiable pour le problème (9).

cas II. Si $a < 0$ et si la H -différence $y_0 - \int_{x_0}^{x} (-b(t)).e^{-a(t-x_0)} dt$ existe, alors

$$y(x) = e^{a(x-x_0)} \left(y_0 - \int_{x_0}^{x} (-b(t)).e^{-a(t-x_0)} dt \right) \tag{3.27}$$

est une solution (ii) différentiable pour le problème (3.25).

Théorème 3 ***preuve :*** *On considère le problème initial suivant*

$$\begin{cases} y'(t) = a.y(x) + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $b : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est une fonction continue.

On distingue deux cas:

cas I. $a > 0$

Dans ce cas, on a

$$y'(x) = \left(e^{a(x-x_0)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{-a(t-x_0)} dt \right) \right)',$$

d'aprés théorème 16 , on a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \\ &\left(e^{a(x-x_0)}\right)' \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{-a(t-x_0)} dt \right) + \left(e^{a(x-x_0)}\right). \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{-a(t-x_0)} dt \right)', \end{aligned}$$

et d'apré théorème 8, et la formule de Leibnitz, on a

$$\begin{aligned} &= a.e^{a(x-x_0)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{-a(t-x_0)} dt \right) + \left(e^{a(x-x_0)}\right). \left(\left[\int_{x_0}^{x} \partial \frac{\left(b(t).e^{-a(t-x_0)}\right)}{\partial t} dt + b(x_0) \right] \right) \\ &= a.y + \left(e^{a(x-x_0)}\right) \left(b(x) e^{-a(x-x_0)} - b(x_0) + b(x_0) \right) \\ &= a.y + b(x). \end{aligned}$$

Par suite y est solution de problème 9.

***cas II**. $a < 0$.*

On a

$$y'(x) = \left(e^{a(x-x_0)}\left(y_0 - \int_{x_0}^{x} (-b(t)) . e^{-a(t-x_0)} dt\right)\right)'.$$

D'aprés théorème (3.4.1)*, on a*

$$\begin{aligned} &\left(\left(e^{a(x-x_0)}\right)'\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) . e^{-a(t-x_0)} dt\right) + \left(e^{a(x-x_0)}\right) . \left(y_0 - \int_{x_0}^{x} (-b(t)) . e^{-a(t-x_0)} dt\right)'\right) \\ = \;& a.y + \left(e^{a(x-x_0)}\right)\left(b(x)\, e^{-a(x-x_0)}\right). \end{aligned}$$

Par suite y est un solution de problème (3.25)*.* ■

Exemple 3.4.2 Considérons le $(PVIF)$ suivant

$$\begin{cases} y'(x) = (-1) . y(x) + x, \\ y(0) = (1, 2, 3). \end{cases}$$

D'aprés le lemme (3.3.1) la H -différence $y_0 - \int_{x_0}^{x} (-t) . e^t dt$ existe pour tout $x \in (x_0, \infty)$.

Par le théorème (3.4.1),on a

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x}\left(y_0 - \int_{x_0}^{x} (-t) . e^t dt\right) \\ &= \left(e^{-x}, 2e^{-x}, 3e^{-x}\right) + e^{-x}\left(e^x (x-1) + 1\right) \\ &= \left(e^{-x}, 2e^{-x}, 3e^{-x}\right) + \left(e^{-x}, e^{-x}, e^{-x}\right) + (x-1) \\ &= \left(2e^{-x}, 3e^{-x}, 4e^{-x}\right) + (x-1). \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Barnabàs Bede ,Imre J.Rudas L.Bencsik ,First order linear fuzzy differential equations under generalizes differentiability

[2] .Barnabs Bede ,Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic,Studies in Fuzziness and Soft Computing , Springer 2013.

[3] O. Sedaghatfar ,P.Darabi,S.Moloudzadeh, A method for solving first order fuzzy differential equation ,Vol.5,No.3,2013 Article ID IJIM-00250,7 pages

[4] Rolland-May Christiane, la théorie des ensembles flous et son intérêt en géographie. In : Espace géographique. Tome 16, n°1, 1987, pp. 42-50.

[5] Lakshmikantham and R. N. Mohapatra , Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions, CRC Press (2003).

[6] Sabeur El Kostantini, Contribution à la modélisation de la dynamique du comportement d'opérateurs humains, Thèse de Doctorat présentée et soutenue publiquement le 03 décembre 2007 (Université Blaise Pascal) (spécialité informatique).

[7] Sabeur El Kostantini. Introduction à La Logique Floue : Les concepts fondamentaux et applications Cours de logique floue, Mastère de recherche : R.O.G.P., Année Universitaire 2010-2011.

[8] Samuel Ambapour, Théorie des ensembles flous: application à la mesure de la pauvreté au Congo, DT 16/2009, Bureau d'application des méthodes statistiques et informatiques Brazzaville, 38 pages.

[9] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control 8, pp. 338-353 (1965).