

Table des matières

1	Une trichotomie pour les s.a.a	3
1.1	A propos des systèmes asymptotiquement autonomes (s.a.a) . . .	3
1.2	Trichotomie de Poincaré-Bendixson pour les s.a.a.	5
1.3	Lemmes préliminaires	6
1.4	Preuve du théorème de Thieme	13
1.5	Corollaire du théorème de Thieme	14
2	Application à un modèle pour les MST	17
2.1	Modèle $S - I - R$ avec perte d'immunité ($S - I - R - S$) . . .	17
2.2	Application du Théorème de Thieme	19
A	Notions de base et introduction	23
A.1	Stabilité de l'origine pour un système linéaire	23
A.2	Système autonome	24
A.2.1	Concepts de stabilité	24
A.2.2	Approximation linéaire d'un système	25
A.2.3	Cycles limites	25
A.3	Système non autonome	26
A.4	Ensembles ω -limite et α -limite	27

Chapitre 1

Une trichotomie pour les s.a.a

Nous présentons dans ce chapitre, le plus important dans ce mémoire, des systèmes d'équations différentielles non autonomes particulièrement intéressants car leurs champs tendent, lorsque le temps va à l'infini, vers des systèmes limites autonomes. Il s'agit, comme déjà expliqué dans l'introduction, de comparer le comportement asymptotique des solutions des premiers avec celui des seconds. En particulier, si le système limite est planaire, on se propose de détailler le travail de H. R. Thieme sur l'établissement d'un théorème type Poincaré-Bendixson dans ce cas de figure en se basant sur l'article [7]. Rappelons que pour un système de dimension 2 autonome, la trichotomie de Poincaré-Bendixson prévoit trois types de comportements asymptotiques possibles pour une solution, i.e. trois types d'ensembles ω -limites : point d'équilibre, cycle limite, "une chaîne fermée" formée par des équilibres reliés par des orbites hétéroclines.

1.1 A propos des systèmes asymptotiquement autonomes (s.a.a)

Considérons les systèmes différentiels dans \mathbb{R}^n ,

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = g(y), \tag{1.2}$$

où le point sur les variables désigne la dérivation par rapport à t . Le système (1.1) est dit *asymptotiquement autonome* (s.a.a.) de *système limite* (1.2), si $f(t, x) \rightarrow g(x)$, quand $t \rightarrow \infty$ localement uniformément en x dans \mathbb{R}^n i.e. sur tout sous ensemble compact de \mathbb{R}^n contenant x . Pour simplifier, on suppose que f et g sont des fonctions continues et localement lipschitziennes

en x . Toutes les solutions sont sensées exister pour tous les temps positifs. Rappelons que l'ensemble ω -limite $\omega(t_0, x_0)$ d'une solution positive bornée x de (1.1), satisfaisant $x(t_0) = x_0$, est défini de la manière suivante (voir aussi l'Annexe) :

$y \in \omega(t_0, x_0) \Leftrightarrow y = \lim_{j \rightarrow +\infty} x(t_j)$ pour une certaine suite $t_j \rightarrow +\infty$ quand $j \rightarrow +\infty$.

Le comportement asymptotique des solutions du problème de départ (1.1) n'est cependant pas toujours décrit par le comportement asymptotique du problème autonome (1.2). En voici un exemple. Nous omettrons exprès les détails des calculs.

Coexistence des orbites périodiques et des cycles homoclines

Le système autonome de dimension cinq suivant est un système planaire asymptotiquement autonome :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_3 x_5 - (r + x_1 + (1 - r)^2) x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 x_3 x_5 + (r + x_1 + (1 - r)^2) x_1, \\ \dot{x}_3 = -x_4 x_5, \\ \dot{x}_4 = -x_3 x_5, \\ \dot{x}_5 = -x_5^2, \\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec les conditions initiales,

$$x_3(0) = 1, x_4(0) = 0, x_5(0) = 1.$$

En effet, les trois dernières variables étant indépendantes des deux premières, on résoud le sous-système en x_3, x_4 et x_5 , puis on "injecte" les solutions $x_3(t), x_4(t)$ et $x_5(t)$ dans le sous-système formé par les deux premières équations pour obtenir le système non autonome

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_3(t) x_5(t) - (r + x_1 + (1 - r)^2) x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 \cdot x_3(t) x_5(t) + (r + x_1 + (1 - r)^2) x_1. \end{cases} \quad (1.4)$$

On trouve

$$x_5(t) = \frac{1}{1+t}, x_3(t) = \cos(\ln(1+t)), x_4(t) = \sin(\ln(1+t)).$$

En passant aux coordonnées polaires $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$, le système (1.4) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = r \frac{1}{t+1} \cos(\ln(1+t)) \\ \dot{\theta} = r(1 + \cos \theta) + (1 - r)^2, \end{cases} \quad (1.5)$$

1.2. TRICHOTOMIE DE POINCARÉ-BENDIXSON POUR LES S.A.A. 5

dont le système limite est :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = r(1 + \cos \theta) + (1 - r)^2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le comportement asymptotique de (1.5) est différemment de (1.6), on le décrit comme suit :

D'une part, les orbites de l'équation limite sont le centre $(0, 0)$ et tous les cercles centrés en $(0, 0)$ à l'exception du cercle de rayon 1 qui est en fait une orbite homocline reliant l'équilibre $(-1, 0)$ à lui-même. D'autre part, la solution de (1.5), est donnée par

$$r(t) = r(0) \exp \sin(\ln(t + 1)),$$

dont la limite quand $t \rightarrow +\infty$ n'est pas constante si $r(0) \neq 0$. Les orbites de (1.5) sont en outre comprises entre les cercles de rayons $r(0)e^{-1}$ et $r(0)e$.

1.2 Trichotomie de Poincaré-Bendixson pour les s.a.a.

En 1956, Markus [6] présente une série de théorèmes dont la généralisation suivante du théorème de Poincaré-Bendixson aux s.a.a.

Théorème 1.2.1 (Un "Poincaré-Bendixson" pour les s.a.a.) [6]

Soit $n = 2$ et ω l'ensemble ω -limite d'une solution bornée positive x de (1.1). Alors, soit ω contient des points d'équilibre de (1.2), soit ω est la réunion d'orbites périodiques de (1.2).

Le théorème 1.2.1 est souvent appliqué pour prouver que les solutions de certains modèles en dynamique de population (notamment en théorie du chemostat) convergent vers un équilibre [3]. Ce théorème était un point de départ à la recherche des solutions presque périodiques des EDO asymptotiquement autonomes dans le plan [9, 5]. Le problème qui se pose est dit *Problème Limite Inverse* et s'exprime comme suit :

Problème 1.2.2 *Supposons que les équilibres de (1.2) sont isolés et que n'importe quelle solution de (1.2) converge vers l'un des équilibres de (1.2). Est-ce que toute solution de (1.1) converge aussi vers l'un des équilibres de (1.2) ?*

En 1994, H.R.Thieme [7] étend le résultat du théorème 1.2.1 à un résultat de trichotomie des ensembles limite du type Poincaré-Bendixson.

Définition 1.2.3 Soit p, q deux points d'équilibre hyperboliques de (1.2). On dit que p est enchainé à q , on note $p \rightarrow q$, s'il existe un élément x tel que $x \neq p, x \neq q$ et $\omega(x) = \{q\}, \alpha(x) = \{p\}$. Une chaîne est une famille de points hyperboliques $p_j, j = 1 \dots k$ telle que $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_k$. Si $p_k = p_1$, la chaîne est dite **cyclique** ou **fermée**.

Pour les notions d'ensembles ω et α -limites, on renvoie le lecteur à l'Annexe. On énonce alors le théorème principal de ce travail.

Théorème 1.2.4 (Thieme) [7]

Soit $n = 2$ et Ω l'ensemble ω -limite d'une solution positive bornée x de (1.1). Supposons qu'il existe au plus un nombre fini de points d'équilibre de (1.2) dans un voisinage suffisamment petit de Ω . Alors, on distingue trois possibilités :

- (i) Ω est formé d'un point d'équilibre de (1.2).
- (ii) Ω est la réunion d'orbites fermées de (1.2) et éventuellement de centres de (1.2) entourés par des orbites périodiques de (1.2) contenues dans Ω .
- (iii) Ω contient des points d'équilibre de (1.2) qui sont cycliquement enchainés l'un à l'autre dans Ω par des orbites de (1.2).

Ce théorème donne une réponse au problème 1.2.2 à travers un important corollaire de type Dulac que nous citerons plus tard.

1.3 Lemmes préliminaires

Pour établir le théorème de Thieme, nous aurons besoin de démontrer une série de lemmes préliminaires qui se trouvent tous dans [7]. Commençons par introduire les notations et définitions suivantes.

Notations 1.3.1 Un sous-ensemble Y de \mathbb{R}^n est dit f -positivement invariant (g -positivement invariant) si toute solution de (1.1) (de (1.2)) qui part d'un point de Y reste dans Y pour tous les temps ultérieurs. De même, les orbites des solutions de (1.1) (de (1.2)) seront dites des f -orbites (g -orbites). L'ensemble ω -limite d'une f -orbite (g -orbite) sera noté ω_f -limite (ω_g -limite). On parlera aussi de g -point d'équilibre, etc...

Définition 1.3.2 Soit Y un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Un sous ensemble g -invariant M de Y est dit **sous-ensemble compact isolé g -invariant de Y** s'il existe un ouvert U tel qu'il n'y ait pas de compact g -invariant \widetilde{M} tel que $M \subset \widetilde{M} \subset U \cap Y$ autre que M . L'ouvert U est dit un g -voisinage isolant de M dans Y .

Si $Y = \mathbb{R}^n$, un sous ensemble compact isolé g -invariant de Y est dit simplement un **ensemble compact isolé g -invariant**.

Le premier lemme, que nous ne démontrons pas, est un résultat de type Butler-McGehee pour des s.a.a. Nous donnons d'abord à titre indicatif l'énoncé du fameux théorème de Butler-McGehee pour un système autonome,

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.7)$$

F de classe C^1 .

Théorème 1.3.3 (Butler-McGehee) [4]

Soit γ une trajectoire bornée de (1.7) et soit K son ensemble ω -limite. Supposons que $p \in K$ est un point hyperbolique de (1.7). Si K n'est pas réduit à p , alors K rencontre la variété stable et la variété instable de p en des points autres que p .

Lemme 1.3.4 Soit (s, x) , $s \geq t_0$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que (s, x) admet une f -orbite positive pré-compacte et on note $\Omega := \omega_f(s, x)$.

Soit M un ensemble g -invariant tel que $M \cap \Omega \neq \emptyset$ et $\Omega \not\subset M$. Supposons que $M \cap \Omega$ est un sous-ensemble compact isolé g -invariant de Ω .

Alors, M possède une variété stable non vide et une variété instable non vide dans Ω dans le sens suivant : il existe $u \in \Omega \setminus M$ avec $\omega_g(u) \subset M$. De même, il existe $w \in \Omega \setminus M$ dont la g -orbite est complètement contenue dans Ω et dont l'ensemble α_g -limite est contenu dans M .

L'élément u peut être choisi tel que sa g -orbite positive est arbitrairement proche de M . L'élément w peut être choisi tel que sa g -orbite négative est arbitrairement proche de M .

A partir d'ici, nous supposons $n = 2$.

Lemme 1.3.5 a) Soit γ_0 une g -orbite périodique et M la région fermée délimitée par γ_0 . Si M n'est pas un ensemble compact isolé g -invariant, alors n'importe quel voisinage suffisamment petit de M contient une g -orbite périodique qui entoure M .

b) Soient γ_1, γ_2 deux g -orbites périodiques telles que γ_1 est entourée par γ_2 . Soit M l'anneau fermé délimité par γ_1 et γ_2 . Si M n'est pas un ensemble compact isolé g -invariant, alors n'importe quel voisinage suffisamment petit de M contient une g -orbite périodique qui se trouve à l'intérieur de γ_1 ou à l'extérieur de γ_2 . (voir Fig.1.1).

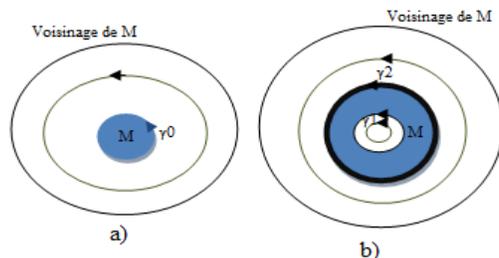


FIG.1.1

Preuve. *a)* Soit U un voisinage ouvert de M . Puisque M n'est pas un ensemble compact isolé g -invariant, U contient un sous-ensemble N (dépendant de U) compact g -invariant contenant M . Soit $x \in N \setminus M$. Ainsi, la g -orbite γ de x est contenue dans N .

Si U est choisi assez petit, $U \setminus M$ ne contient aucun g -point d'équilibre. Autrement, nous obtiendrions une suite de g -points d'équilibre approchant γ_0 . Ceci impliquerait que l'orbite fermée γ_0 elle-même contiendrait un g -point d'équilibre. Ce qui est impossible. D'où les ensembles ω_g -limite et α_g -limite de x sont des g -orbites périodiques contenues dans $N \subset U$, d'après le théorème classique de Poincaré-Bendixson.

Si U est choisi assez petit, la continuité du flot induit par (1.2) force ces g -orbites périodiques à entourer M avec la même orientation que γ_0 . D'une part, si $\omega_g(x) \neq \gamma_0$ et $\alpha_g(x) \neq \gamma_0$ alors M est entourée par au moins deux g -orbites périodiques (voir Fig.1.2). D'autre part, si $\omega_g(x) = \gamma_0$ (ou si $\alpha_g(x) = \gamma_0$) alors forcément $\alpha_g(x) \neq \gamma_0$ (respectivement $\omega_g(x) \neq \gamma_0$) (voir Fig.1.3). En effet, si ce n'est pas le cas, l'orbite γ se croiserait (voir Fig.1.4). Ceci prouve l'assertion (a).

La preuve de (b) est similaire. ■

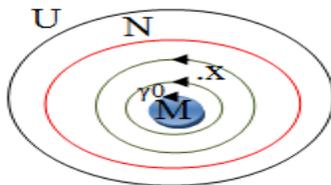


FIG.1.2

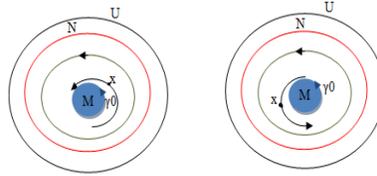


FIG.1.3

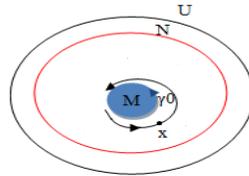


FIG.1.4

Lemme 1.3.6 Soit Ω l'ensemble ω_f -limite d'une f -orbite positive bornée. Alors Ω ne contient pas une g -orbite qui tende vers un cycle g -limite de l'extérieur quand $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. (voir Fig.1.5).

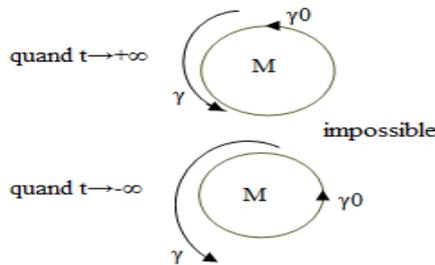


FIG.1.5

Preuve. Supposons par l'absurde que Ω contient une g -orbite γ qui n'est pas périodique mais tend extérieurement vers une g -orbite périodique γ_0 quand $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Soit M la région délimitée par γ_0 . Le lemme 1.3.5 implique que M est un ensemble compact isolé g -invariant. Autrement, il y aurait des g -orbites périodiques arbitrairement proches entourant M qui sont différentes de γ_0 et qui ne permettraient pas à γ_0 d'être approchée de l'extérieur par γ . Le lemme 1.3.4 implique alors qu'il existe deux g -orbites γ_1

et γ_2 à l'extérieur de M telles que $\omega(\gamma_1) \subset M$, $\alpha(\gamma_2) \subset M$. Comme le bord de M est précisément la g -orbite périodique γ_0 , nous avons $\omega(\gamma_1) = \gamma_0 = \alpha(\gamma_2)$, mais ceci ne peut pas se produire sans croisement de γ_1 et γ_2 . (voir Fig.1.6).

■

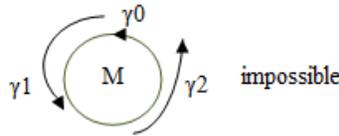


FIG.1.6

Lemme 1.3.7 Soit Ω l'ensemble ω_f -limite d'une f -orbite bornée. Il n'y a aucune g -orbite dans Ω qui relie deux g -orbites périodiques différentes.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle g -orbite γ qui relie deux g -orbites fermées. Dans ce cas, on distingue deux cas possibles :

- Il existe deux g -orbites périodiques distinctes γ_1 et γ_2 non concentriques. Donc, γ relie γ_1 et γ_2 , elle doit s'éloigner de l'une extérieurement et s'approcher de l'autre extérieurement, ce qui contredit le lemme 1.3.6. (voir Fig.1.7).

- Il existe deux g -orbites périodiques γ_1 et γ_2 concentriques telles que γ_1 se trouve à l'intérieur de γ_2 (ou bien le contraire). Donc soit γ s'éloigne de γ_1 extérieurement pour tendre vers γ_2 , soit elle s'approche de γ_1 extérieurement en s'éloignant de γ_2 et cela contredit le lemme 1.3.6. (voir Fig.1.8). ■

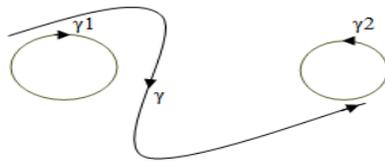


FIG.1.7



FIG.1.8

Lemme 1.3.8 *Il n'y a aucune chaîne $\alpha \rightarrow e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_k \rightarrow \beta$, $k \geq 1$ de g -orbites dans Ω reliant des g -orbites périodiques α , β et des g -points d'équilibre e_j , $j = 1 \dots k$.*

Preuve. Supposons qu'une telle chaîne existe. D'après le lemme 1.3.6, les g -orbites périodiques α et β doivent être approchées de l'intérieur (quand $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$) par les g -orbites les reliant à e_1 et à e_k respectivement. Ceci peut seulement se produire si la chaîne entière est contenue dans les intérieurs de α et de β . En effet, on distingue les trois cas suivant :

- Les deux g -orbites périodiques α , β sont distinctes et non concentriques. L'existence d'une chaîne reliant α à β contredit immédiatement le lemme 1.3.6 car cette liaison se fera extérieurement aux orbites fermées. (voir Fig.1.9).

- Les deux g -orbites périodiques α , β sont distinctes et concentriques i.e. l'orbite α est entourée par β (ou bien α entoure β). Donc, la chaîne considérée est formée par des g -points d'équilibre tous situés nécessairement dans l'anneau formé par α et β . L'orbite hétérocline $\alpha \rightarrow e_1$ s'éloigne extérieurement de α ce qui est en contradiction avec lemme 1.3.6. (voir Fig.1.10).

- Les g -orbites périodiques sont égales i.e. $\alpha = \beta$. Que la chaîne considérée soit à l'intérieur de la région délimitée par α ou à l'extérieur, l'orbite qui s'éloigne de α croisera forcément l'orbite qui s'en approche. Ce qui est impossible. ■

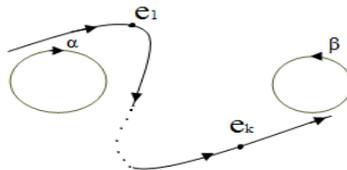


FIG.1.9

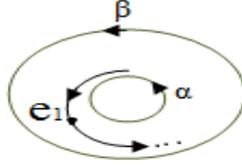


FIG.1.10

Lemme 1.3.9 Soit Y un sous ensemble de \mathbb{R}^2 . Supposons que e est un g -point d'équilibre isolé (isolé dans \mathbb{R}^2), mais que le singleton $\{e\}$ n'est pas un sous-ensemble compact isolé g -invariant de Y . Alors,

(i) Soit tout voisinage suffisamment petit de e contient une g -orbite homocline dans Y reliant e à lui-même.

(ii) Soit tout voisinage suffisamment petit de e contient une g -orbite périodique dans Y entourant e , en particulier, e est un centre. (voir Fig.1.11).

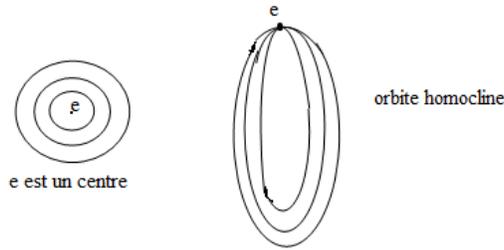


FIG.1.11

Preuve. D'abord nous observons que (i) et (ii) s'excluent. En effet, s'il ya une g -orbite homocline reliant e à lui-même, il existe un voisinage V de e tel que V ne contient pas des g -orbites périodiques entourant e . Donc, il est suffisant de montrer que n'importe quel voisinage de e contient une g -orbite homocline ou une g -orbite périodique.

Maintenant, soit V un ouvert contenant e dans son intérieur (par exemple un disque centré en e) et qui ne contient pas d'autre g -point d'équilibre. Comme $\{e\}$ n'est pas un sous-ensemble compact isolé g -invariant de Y , il existe un sous-ensemble invariant M de Y (dépendant de V) tel $\{e\} \subsetneq M \subset V \cap Y$. Par la propriété de trichotomie de Poincaré-Bendixson, M contient une g -orbite périodique dans Y entourant forcément le seul équilibre e ou

une g -orbite homocline dans Y reliant e à lui-même. Comme V , donc aussi M , est arbitrairement petit, alors de tels orbites fermées sont concentriques non isolées arbitrairement proches de e qui sera donc un centre. ■

1.4 Preuve du théorème de Thieme

Supposons par l'absurde que (i), (ii) et (iii) ne sont pas vérifiées. Remarque 1 : *par le lemme 1.3.9, si Ω contient un g -point d'équilibre isolé, ce dernier est nécessairement un ensemble compact isolé g -invariant dans Ω .* Remarque 2 : *On affirme que tout ensemble ω_g -limite et α_g -limite d'une g -orbite contenue dans Ω est une g -orbite périodique ou un g -point d'équilibre.* En effet, si tel n'est pas le cas, par le théorème classique de Poincaré-Bendixson, cet ensemble limite sera formé d'un nombre fini e_1, e_2, \dots, e_k de g -points d'équilibre isolés reliés par des g -orbites contenus dans Ω . D'après la remarque 1, ces équilibres sont des ensembles compacts isolés g -invariants. On applique le lemme 1.3.4 à g plutôt qu'à f . Ces g -points d'équilibre ont des variétés stables et instables dans Ω dans le sens suivant :

$$\exists v_1 \in \Omega \setminus \{e_1\} \text{ tel que } \omega_g(v_1) = \{e_2\} \text{ et } \alpha_g(v_1) = \{e_1\}.$$

$$\exists v_2 \in \Omega \setminus \{e_2\} \text{ tel que } \omega_g(v_2) = \{e_3\} \text{ et } \alpha_g(v_2) = \{e_2\}.$$

On suit le même procédure jusqu'à démontrer qu'il existe $v_k \in \Omega \setminus \{e_k\}$ tel que $\alpha_g(v_k) = \{e_k\}$. D'après le lemme 1.3.4, la g -orbite de v_k reste dans Ω , et comme il existe un nombre fini d'équilibres contenus dans Ω , $\omega_g(v_k)$ est réduit forcément à l'un des équilibres. Ce qui formera une chaîne fermée et contredira notre hypothèse.

A présent, Ω contient un point x qui n'est pas contenu dans une g -orbite périodique, autrement on contredirait le fait que nous avons exclu le cas (ii) du théorème. Nous pouvons par la suite supposer que x n'est ni un centre ni un équilibre relié à lui-même par des g -orbites homoclines dans Ω . Par conséquent, nous pouvons supposer que l'ensemble ω_g -limite de x contient un équilibre e_1 qui n'est ni un centre ni un équilibre relié à lui-même par des g -orbites homoclines dans Ω . Par le lemme 1.3.9 (et la remarque 1), $\{e_1\}$ est un ensemble compact isolé g -invariant. Par le lemme 1.3.4, il existe des g -orbites γ_1 et γ_2 dans $\Omega \setminus \{e_1\}$ avec $\alpha_g(\gamma_2) = \{e_1\} = \omega_g(\gamma_1)$, i.e., il existe une chaîne $\alpha_g(\gamma_1) \rightarrow e_1 \rightarrow \omega_g(\gamma_2)$ dans Ω . D'après la remarque 2, $\omega_g(\gamma_2)$ et $\alpha_g(\gamma_1)$ peuvent être des équilibres ou des g -orbites périodiques. D'une part, les ensembles $\alpha_g(\gamma_1)$ et $\omega_g(\gamma_2)$ ne peuvent être simultanément des orbites périodiques car ceci contredirait le lemme 1.3.6. Quitte à inverser le temps, nous pouvons alors supposer que $\omega(\gamma_2)$ est un point d'équilibre e_2 . Deux cas doivent être considérés séparément :

1^{er} cas : $\alpha_g(\gamma_1)$ est une g -orbite périodique. Ceci signifie que nous avons

une chaîne $\alpha_g(\gamma_1) \rightarrow e_1 \rightarrow e_2$. Par le lemme 1.3.6, $\alpha_g(\gamma_1)$ ne peut être approché "négativement" par γ_1 que de l'intérieur. De ce fait, la chaîne considérée est à l'intérieur de l'orbite périodique $\alpha_g(\gamma_1)$.

Puisque e_2 n'est pas un centre (autrement des g -orbites se couperaient) et (iii) n'a pas lieu, le lemme 1.3.9 implique que $\{e_2\}$ est un ensemble compact isolé g -invariant qui est différent de Ω . Par le lemme 1.3.4, il existe une g -orbite γ_3 dans $\Omega \setminus \{e_2\}$ telle que $\alpha(\gamma_3) = \{e_2\}$. Ainsi nous avons la chaîne $\alpha(\gamma_1) \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \omega(\gamma_3)$. Le lemme 1.3.8 implique que $\omega(\gamma_3)$ ne peut pas être une g -orbite périodique. Par conséquent, $\omega(\gamma_3) = \{e_3\}$. En répétant cet argument nous pouvons construire de grandes chaînes $\alpha(\gamma_1) \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots \rightarrow e_k$. Puisque il y a seulement un nombre fini d'équilibres contenus dans l'ensemble compact Ω , une telle chaîne sera cyclique. C'est une contradiction avec l'hypothèse d'exclusion de (iii).

2^{ième} cas : $\alpha(\gamma_1)$ est réduit à un équilibre e_0 . Ceci signifie que nous avons une chaîne $e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3$. Comme nous avons exclu (iii) et que e_0 ne peut pas être un centre, alors $\{e_0\}$ forme un ensemble compact g -invariant isolé différent de Ω par le lemme 1.3.9. Par le lemme 1.3.4, il existe une g -orbite γ_0 telle que $\omega(\gamma_0) = \{e_0\}$. Si $\alpha(\gamma_0)$ est une g -orbite périodique, nous sommes dans la situation écartée du 1^{er} cas. Par conséquent, $\alpha(\gamma_0)$ est réduit à un équilibre e_{-1} . En répétant ce type d'argument nous pouvons construire des chaînes avec des équilibres $e_{-k} \rightarrow \dots \rightarrow e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow e_2$ qui mèneraient à un contradiction avec l'exclusion de (iii). Par conséquent au moins une des assertions (i), (ii), (iii) doit se réaliser.

1.5 Corollaire du théorème de Thieme

Un ensemble X de \mathbb{R}^2 a la propriété de Dulac, s'il ne contient ni g -orbites périodiques, ni une chaîne fermée dans X . Par le lemme 1.3.9, on a le résultat suivant :

Lemme 1.5.1 *Si X a la propriété de Dulac, alors tout g -point d'équilibre isolé dans X (isolé dans \mathbb{R}^2) est un sous ensemble compact isolé g -invariant de X .*

Théorème 1.5.2 *Supposons que tout g -point d'équilibre dans $X \subseteq \mathbb{R}^2$ est isolé et X a la propriété de Dulac. Alors, chaque g -orbite positive bornée dans X et chaque f -orbite positive bornée dans X converge vers un g -point d'équilibre.*

En pratique, une condition suffisante pour que la propriété de Dulac soit vérifiée est donnée par le critère suivant :

Critère 1.5.3 (Dulac) Soient X, Y , et D des sous ensembles de \mathbb{R}^2 , D un ouvert simplement connexe, avec les propriétés suivantes :

- Toute orbite positive bornée de (1.1) dans X a son ensemble ω -limite dans Y .

- Toute orbite périodiques éventuelle de (1.2) dans Y et toute chaîne fermée éventuelle formée par des orbites et des équilibres de (1.2) dans Y est contenue dans D .

- La fonction g est continûment différentiable sur D et il existe une fonction réelle continûment différentiable ρ sur D telle que la divergence de ρg ,

$$\nabla \cdot (\rho g)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho g_1)(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho g_2)(x_1, x_2),$$

est soit strictement positive presque partout sur D soit strictement négative presque partout sur D .

Alors, toute solution positive bornée de (1.2) dans X et toute solution positive bornée de (1.1) dans X converge vers un équilibre de (1.2), quand $t \rightarrow +\infty$.

Chapitre 2

Application à un modèle pour les MST

Les modèles $S-I-R$ sont des modèles classiques en épidémiologie mathématique. Nous présentons dans ce chapitre un modèle sur la transmission des maladies sexuelles en tenant compte de la perte de l'immunité. Ce modèle décrit les maladies sexuellement transmises non mortelles et considère une dépendance complexe de l'incidence des nombres d'individus susceptibles, infectés, et rétablis. Cet étude établie dans [1, 8] nous donne l'opportunité de voir une application des résultats du chapitre précédent.

2.1 Modèle $S - I - R$ avec perte d'immunité ($S - I - R - S$)

On considère un modèle S-I-R-S avec une incidence générale non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - J - \mu S + \rho R, \\ \frac{dI}{dt} = J - (\gamma + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\rho + \mu)R, \\ J = G(S, I, R, N)I, \\ N = S + I + R. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

D'après ce modèle, la population est divisée en trois compartiments S , I et R (voir Fig.2.1).

Λ : taux de recrutement constant de la population susceptible.

μ : taux de mortalité naturel des compartiments S , I , et R respectivement.

γ : taux de guérison.

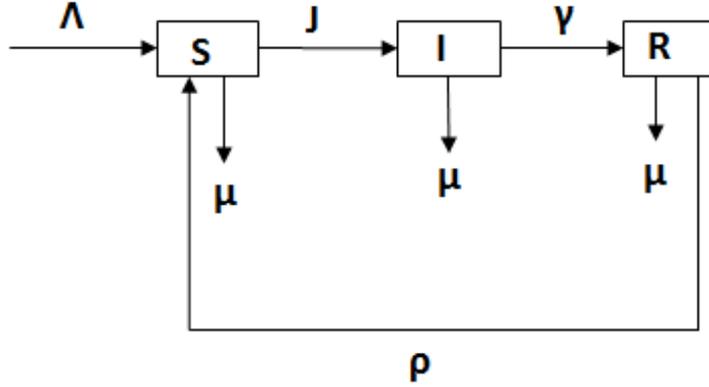


FIG. 2.1 – Schématisation de modèle (2.1)

ρ : taux de perte d'immunité.

On suppose que tous les paramètres Λ , μ , et γ sont strictement positifs excepté le ρ qui peut également être 0.

L'élément N dénote la taille de la partie épidémiologiquement concernée (sexuellement active) de la population.

Les lettres S, I, R dénotent respectivement le nombre des individus susceptibles, infectés et rétablis de la partie concernée de la population.

L'élément J dénote l'incidence, c.-à-d., le taux temporel de nouvelles infections (nombre de cas par unité de temps).

L'élément G , qui décrit la dépendance de l'incidence de (S, I, R) , est une fonction positive continument différentiable de (S, I, R, N) pour $S, I, R \geq 0$ et $N > 0$.

Si $S = 0$,

$$G(0, I, R, N) = 0 \quad (2.2)$$

On dérive N par rapport au temps t , et d'après (2.1) on trouve :

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N. \quad (2.3)$$

On déduit que $N^* := \frac{\Lambda}{\mu}$ est un point d'équilibre *globalement asymptotiquement stable* de (2.3). Donc, la solution $N(t)$ qui part du point initial $N(0) > 0$, est strictement positive et définie pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, l'ensemble $\{N = N^*\}$ est borné et positivement invariant. Toutes les solutions de (2.1) convergent vers $\{N = N^*\}$, c'est-à-dire, $0 \leq S, I, R \leq N^*$ asymptotiquement. Ces solutions sont positivement bornées.

Cherchons les points d'équilibre du système (2.1). On a bien sûr l'équilibre sans maladie $E^0 = (S^0, I^0, R^0)$ avec

$$S^0 = N^*, I^0 = 0, R^0 = 0. \quad (2.4)$$

Tout équilibre endémique $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ satisfait

$$G(S^*, I^*, R^*, N^*) = \gamma + \mu, S^* + I^* + R^* = N, R^* = I^* \frac{\gamma}{\rho + \mu}, \text{ pour } I^* > 0.$$

Posons $q := \frac{\gamma}{\rho + \mu}$. Alors I^* satisfait

$$G(N^* - (1 + q)I^*, I^*, qI^*, N^*) = \gamma + \mu, 0 < I^* < N^*. \quad (2.5)$$

2.2 Application du Théorème de Thieme

Le système autonome (2.1) peut s'écrire comme un système asymptotiquement autonome de dimension 2 en posant $S = N - I - R$,

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = I(G(N(t) - I - R, I, R, N(t)) - \gamma - \mu), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\rho + \mu)R. \end{cases} \quad (2.6)$$

où

$$N(t) = N^* + (N(0) - N^*)e^{-\mu t}.$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient le système limite

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = I(G(N^* - I - R, I, R, N^*) - \gamma - \mu), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\rho + \mu)R. \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous faisons l'hypothèse suivante

$$\left(\frac{\partial G}{\partial S} - \frac{\partial G}{\partial I}\right)(S, I, R, N^*) \geq 0, S, I, R \geq 0, S + I + R = N^*. \quad (2.8)$$

Théorème 2.2.1 *Nous supposons que (2.2), (2.8) et $G(N^*, 0, 0, N^*) \neq \gamma + \mu$ sont vérifiées et $G(S, I, R, N^*)$ est une fonction analytique de (S, I, R) telle que $0 < S, I, R < N^*$. Alors, toute solution de (2.1) de conditions initiales positives telles que $N(0) = S(0) + I(0) + R(0) > 0$ converge vers l'équilibre sans maladie E^0 ou vers un équilibre endémique.*

Preuve. Nous voulons appliquer le critère de Dulac du chapitre précédent. D'abord, on note que tout ensemble ω -limite Ω d'une solution de (2.6) dans $X = \{(I, R) : I, R \geq 0\}$ est contenu dans la région

$$Y = \{(I, R) : I, R \geq 0, I + R \leq N^*\}.$$

Les équilibres de (2.7) dans Y coïncident avec l'équilibre sans maladie E^0 ou sont contenus dans la région

$$\hat{Y} = \{(I, R) : I, R > 0, I + R < N^*\}.$$

Par hypothèse, G est une fonction analytique. Le membre de gauche de l'égalité (2.5) est une fonction analytique de I^* avec $0 < I^* < N^*$. Ainsi, soit (2.5) a un nombre au plus fini de solutions¹ pour $0 \leq I^* \leq N^*$, soit chaque I^* entre 0 et N^* est une solution. Cette dernière possibilité contredit le fait que $G(0, I, R, N) = 0$. D'où, **il existe un nombre fini d'équilibres de (2.7) dans \hat{Y}** , et puisque \hat{Y} est un ouvert connexe, ils sont isolés parmi tous les équilibres de (2.7) dans \mathbb{R}^2 .

D'après la supposition $G(N^*, 0, 0, N^*) \neq \gamma + \mu$, **le point $(0, 0)$ est aussi isolé parmi les équilibres de (2.7) dans \mathbb{R}^2** . En effet, si on calcule la jacobienne de (2.7)

$$Jac(I, R) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ \gamma & -(\rho + \mu) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} J_{11} &= G(N^* - I - R, I, R, N^*) - \gamma - \mu + I \left(\frac{\partial G}{\partial I} (N^* - I - R, I, R, N^*) \right), \\ J_{12} &= I \frac{\partial G}{\partial R} (N^* - I - R, I, R, N^*), \end{aligned}$$

alors

$$Jac(0, 0) = \begin{pmatrix} G(N^*, 0, 0, N^*) - \gamma - \mu & 0 \\ \gamma & -(\rho + \mu) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Les valeurs propres sont $G(N^*, 0, 0, N^*) - \gamma - \mu \neq 0$ et $-(\rho + \mu) < 0$. D'où $(0, 0)$ est bien un point d'équilibre isolé.

Notons que **toute orbite périodique non-triviale de (2.7) dans Y est contenue dans la région**

$$D = \{(I, R) : 0 < I, R < N^*\},$$

En effet,

¹Une fonction analytique non nulle sur un ouvert connexe ne peut admettre que des zéros isolés [10].

· Sur l'axe des R i.e. $I = 0$, on a à partir de (2.7)

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = 0, \\ \frac{dR}{dt} = -(\rho + \mu) < 0. \end{cases}$$

d'où l'axe des R est invariant et ne peut contenir une orbite triviale périodique.

· Sur l'axe des I i.e. $R = 0$, on a à partir (2.7)

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = I(G(N^* - I, I, 0, N^*) - \gamma - \mu), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I > 0. \end{cases}$$

Donc le champs est rentrant dans la region \mathbb{R}_+^2 au niveau de l'axe des $I \setminus \{0\}$. Comme $I + R \leq N^*$, on a $I, R < N^*$.

De même, **toute chaîne cyclique de (2.7) dans X est contenue dans la région D** . En effet, notons d'abord que l'équilibre sans maladie $(0, 0)$ ne peut pas faire partie d'une chaîne cyclique de (2.7) : toute orbite homocline reliant $(0, 0)$ à lui-même dans X devrait être contenue dans D . Cette orbite devrait tendre vers $(0, 0)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$ ce qui a été écarté par la supposition $G(N^*, 0, 0, N^*) \neq \gamma + \mu$. Si $(0, 0)$ fait partie d'une chaîne fermée dans X , mais n'est pas relié à lui-même par une orbite homocline, il y aurait deux orbites convergeant vers $(0, 0)$, une quand $t \rightarrow -\infty$, l'autre quand $t \rightarrow +\infty$. Les deux orbites relieraient $(0, 0)$ aux équilibres de (2.7) dans D . Par un raisonnement semblable à celui sur les orbites périodiques, ces deux orbites sont contenues aussi dans D . Ceci ne peut pas se produire parce que $G(N^*, 0, 0, N^*) \neq \gamma + \mu$.

On choisit

$$\zeta(I, R) = \frac{1}{IR}$$

dans l'ensemble ouvert borné simplement connexe D . Si g dénote le second membre de (2.7), on a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\zeta g)(I, R) &= \frac{1}{R} \frac{\partial G}{\partial I}(N^* - I - R, I, R) + \frac{\partial}{\partial R} \frac{\gamma}{R} \\ &= \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial G}{\partial S}(N^* - I - R, I, R) + \frac{\partial G}{\partial I}(N^* - I - R, I, R) \right) - \frac{\gamma}{R^2} \\ &< 0 \text{ (voir (2.8)).} \end{aligned}$$

D'après le critère de Dulac, chaque g -orbite positive bornée dans X et chaque f -orbite positive bornée (f dénote le second membre de (2.6)) dans X converge vers le g -point d'équilibre "sans maladie" ou vers un g -point d'équilibre "endémique". le théorème est démontré. ■

Remarque 2.2.2 *Le théorème 2.2.1 ne prétend pas, est ce n'est pas son but donner des conditions pour que la solution converge vers l'un ou l'autre des équilibres.*

Annexe A

Notions de base et introduction

A.1 Stabilité de l'origine pour un système linéaire

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{A.1}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de la matrice A . Considérons le point d'équilibre $x = 0$ du système linéaire (A.1). La stabilité de ce point d'équilibre se lit sur les valeurs propres de la matrice A , c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique est de degré n en λ . Il admet donc s racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicités algébriques $m(\lambda_i)$ satisfaisant

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_s) = n.$$

Par conséquent

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}.$$

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante

des noyaux

$$\text{Ker}(A - \lambda I)^\nu \subseteq \text{Ker}(A - \lambda I)^{\nu+1}$$

soit stationnaire pour $\nu \geq \nu(\lambda)$. Pour toute valeur propre λ de A on a

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Pour ce qui concerne les définitions de la stabilité, voir le paragraphe A.2.

Théorème A.1.1 1. Si $\exists j \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou si $\exists k \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$ alors $x = 0$ est instable.

2. Si $\forall j \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

3. Si $\forall j \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1$ et s'il existe k tel que $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ alors $x = 0$ est stable mais non asymptotiquement stable.

A.2 Système autonome

A.2.1 Concepts de stabilité

Soit

$$\dot{x} = F(x), x \in U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \quad (\text{A.2})$$

où $F(x)$ de classe $C^r, r \geq 1$ un système dynamique. On notera $\phi^t(\cdot)$ le flot correspondant : $\phi^t(x)$ est l'unique solution du système passant par x en $t = 0$ et définie pour tout t .

On note $\gamma(x)$ la trajectoire issue de x et $\gamma^+(x)$ la demi trajectoire correspondant aux temps positifs :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \{ \phi^t(x), t \in \mathbb{R} \}, \\ \gamma^+(x) &= \{ \phi^t(x), t \in \mathbb{R}^+ \}. \end{aligned}$$

On dit que \bar{x} est un **point d'équilibre** (fixe, singulier ou critique) du système A.2 si et seulement si $F(\bar{x}) = 0$, et cet équilibre est dit **hyperbolique** si les valeurs propres de la matrice jacobienne $A = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x})$ en \bar{x} sont à partie réelle non nulle. Notons que si on le veut, on peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine 0 par une translation.

Définition A.2.1 Le point d'équilibre \bar{x} est dit stable si $\forall \rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (A.2) on ait

$$\|x_0 - \bar{x}\| < r \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \rho, \forall t \geq 0.$$

Sinon le point d'équilibre est dit *instable*.

Définition A.2.2 Le point d'équilibre \bar{x} est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (A.2) on ait

$$\|x_0 - \bar{x}\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}.$$

Définition A.2.3 *Le point d'équilibre \bar{x} est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

Définition A.2.4 *Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée à la notion de voisinage.*

Si $U = \mathbb{R}^n$ et si un équilibre est stable asymptotiquement pour n'importe quelle condition initiale dans \mathbb{R}^n (i.e. $r > 0$ est quelconque), on dira qu'il est *globalement asymptotiquement stable*.

A.2.2 Approximation linéaire d'un système

Considérons la matrice jacobienne de F évaluée au point \bar{x}

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}),$$

Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{A.3}$$

s'appelle le linéarisé (ou première approximation linéaire) du système non linéaire (A.2) en \bar{x} . L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre $x = \bar{x}$ de (A.2).

Théorème A.2.5 1. *Si $x = 0$ est asymptotiquement stable pour (A.3) (c'est à dire si toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative) alors $x = \bar{x}$ l'est pour (A.2).*

2. *Si $x = 0$ est instable (c'est à dire qu'il existe au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive) pour (A.3) alors $x = \bar{x}$ est instable pour (A.2).*

3. *Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de $x = \bar{x}$.*

A.2.3 Cycles limites

Supposons que $n \geq 2$. Un cycle limite de (A.2) est une *orbite fermée isolée* non triviale solution du système.

Définition A.2.6 *Le système (A.2) possède une orbite périodique (ou bien orbite fermée) C s'il existe un intervalle de temps $[t_0, t_0 + T[$ et un point de départ $x_0 \in C$, tel que en désignant par $x(t)$ la solution de système pour condition initiale $x(t_0) = x_0$, on ait : $x(t) \in C \forall t \in [t_0; t_0 + T[$ et $x(T) = x_0$.*

Définition A.2.7 Soit C un cycle limite de (A.2). C est dit

1. **stable** : si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers C .

2. **instable** : si au moins une trajectoire s'éloigne de C .

Lorsque $n = 2$, le cycle C est dit **semi-stable** si les trajectoires intérieures au cycle convergent vers C et les trajectoires extérieures s'en éloignent ou inversement (C est respectivement **intérieurement stable** ou **extérieurement stable**).

Définition A.2.8 La variété stable d'un point d'équilibre \bar{x} est un ensemble (jamais vide) défini par

$$W^s(\bar{x}) = \{x : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = \bar{x}\},$$

et la variété instable par

$$W^u(\bar{x}) = \{x : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(x) = \bar{x}\}.$$

A.3 Système non autonome

Nous rappelons ici la stabilité pour les systèmes non autonomes, mais nous notons que cette notion n'est pas nécessaire dans ce travail car justement nous passons aux systèmes autonomes dans la théorie des s.a.a.

$$\dot{x} = f(t, x), t \in]\tilde{t}, +\infty[, x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.4})$$

admettant $x = 0$ comme équilibre, i.e. $\forall t > \tilde{t} f(t, 0) = 0$.

Définition A.3.1 L'équilibre $x = 0$ du système (A.4) est dit

1. **stable** si pour tout $t_0 > \tilde{t}$ et pour tout $\rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (A.4) on ait

$$\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \forall t \geq t_0 \quad \|x(t)\| < \rho$$

2. **instable** s'il n'est pas stable.

3. **attractif** si pour tout $t_0 > \tilde{t}$ il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (A.4) on ait

$$\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Il est dit globalement attractif si cette limite est nulle pour toute les solutions.

4. **asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

Si le module ρ ne dépend pas de t_0 , on parle de stabilité uniforme.

A.4 Ensembles ω -limite et α -limite

Définition A.4.1 (Ensembles limites) Soit x un élément de U . L'ensemble ω -limite de x (ou de l'orbite $\gamma(x)$) pour le système autonome (A.2), noté $\omega(x)$, est défini par :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi^s(x), s \geq t\}}.$$

La notation ω signifie que l'on regarde "le futur" de la trajectoire passant par x ; pour le "passé", on définit l'ensemble α -limite en inversant le temps, i.e. $\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\{\phi^s(x), s \leq t\}}$, conformément à l'orientation de l'alphabet grec.

On pourrait aussi définir l'ensemble $\omega(x)$ (et de manière analogue $\alpha(x)$) de la manière suivante :

$\omega(x) = \{y \in U \mid \exists t_n \rightarrow +\infty, \phi^{t_n}(x) \rightarrow y\}$. En d'autres termes $\omega(x)$ est l'ensemble des points adhérents à $\gamma(x)$ au voisinage des temps infinis positifs.

L'ensemble limite de x pour un système non autonome, noté $\omega(t_0, x_0)$, satisfaisant $x(t_0) = x_0$, est défini de la manière suivante :

$y \in \omega(t_0, x_0) \Leftrightarrow y = \lim_{j \rightarrow +\infty} x(t_j)$ pour une certaine suite $t_j \rightarrow +\infty$ quand $j \rightarrow +\infty$.

• $q \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point ω -limite de $p \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow +\infty$ tel que $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$.

• $q \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point α -limite de $p \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow -\infty$ tel que $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$.

L'ensemble $\omega(p)$ est l'ensemble des points ω -limite de p et l'ensemble $\alpha(p)$ est l'ensemble des points α -limite de p .

Exemple A.4.2 Le point q est un point ω -limite de l'orbite p et c'est un point α -limite de l'orbite r (voir Fig.A.1).

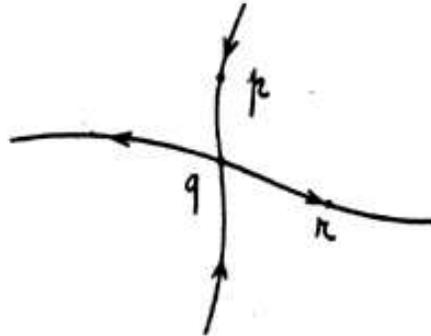
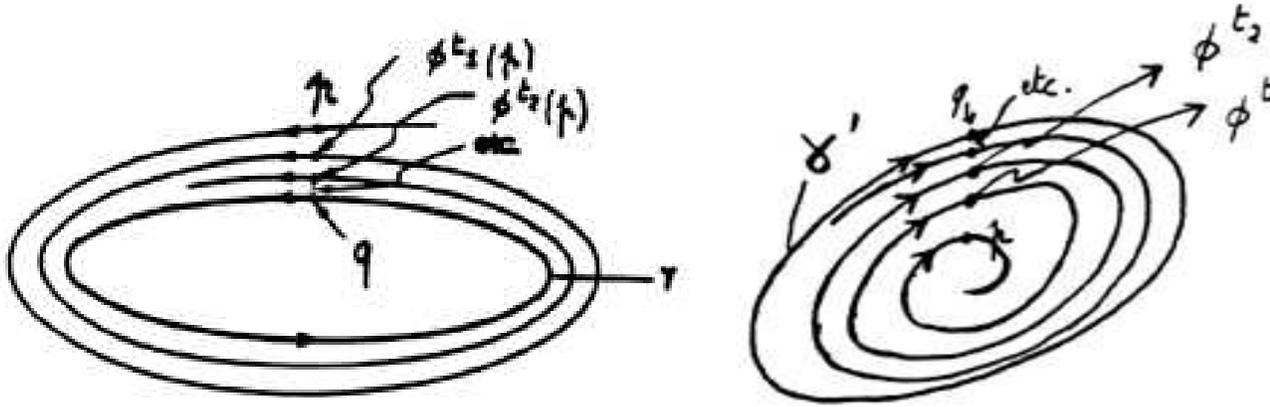


FIG. A.1 – Exemple A.4.2.

Exemple A.4.3 (voir la figure ci-dessous)

Tout point de l'orbite fermée γ est un point ω -limite de l'orbite p , donc l'ensemble $\omega(p)$ est l'orbite γ .

Tout point de l'orbite fermée γ' est un point α -limite de p , donc l'ensemble $\alpha(p)$ est l'orbite γ' .



Remarque A.4.4 1) Dans le cas où $\omega(p)$ est une orbite périodique, soit $\omega(p)$ coïncide avec la trajectoire passant par p , auquel cas $\gamma(p)$ est une orbite périodique, soit la trajectoire passant par p s'enroule autour d'une trajectoire périodique qui sera un cycle limite.

2) S'il existe au plus une trajectoire reliant deux équilibres distincts dans $\omega(p)$, une telle trajectoire s'appelle une orbite hétérocline (voir Fig.A.2). Une trajectoire reliant un équilibre à lui-même s'appelle une orbite homocline (voir FIG.A.3).

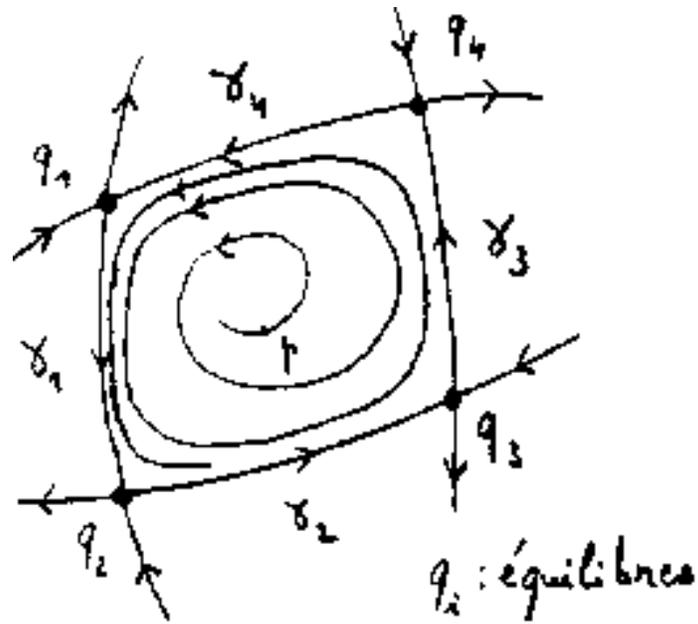


FIG. A.2 - $\omega(p) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$.

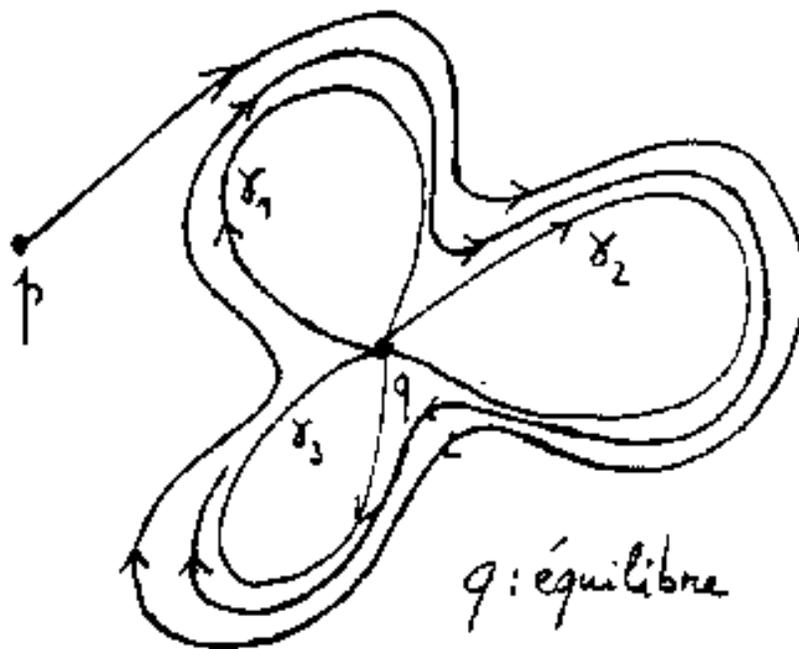


FIG. A.3 - $\omega(p) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \{q\}$.

Bibliographie

- [1] S. P. Blythe, K. L. Cooke, and C. Castillo-Chavez, *Autonomous risk-behavior change, and non-linear incidence rate, in models of sexually transmitted diseases*. Biometrics Unit Technical Report B-1048-M; Cornell University, Ithaca, NY (Preprint).
- [2] J. Bricmont, Introduction à la Dynamique Non Linéaire, *PHYS 2111*. Année académique 2009-2010.
http://www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/math/documents/GLOBAL_2111.pdf
- [3] S. Busenberg and M. Iannelli, *Separable models in age-dependent population dynamics*, J. Math. Biol. **22** (1985), 145-173.
- [4] G. Butler and P. Waltman, *Persistence in dynamical systems*. J. Differ. Equations. **63**, 255-263 (1986).
- [5] R. C. Grimmer, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1968), 109-115.
- [6] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential systems, in Contributions to the theory of Nonlinear Oscillations III* (S. Lefschetz, ed.), 17-29. Annals of Mathematics Studies **36**, Princeton Univ. Press, 1956.
- [7] H. R. Thieme, *Asymptotically autonomous differential equations in the plane*, Rocky MOUNTAIN. J. Math. **24** (1994), 351-380.
- [8] H. R. Thieme and C. Castillo-Chavez, *Asymptotically autonomous epidemic models*, Proc. 3rd Intern. Conf. On Mathematical Population Dynamics(O. Arino, M. Kimmel, eds.).
- [9] W. R. Utz and P. Waltman, *Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 597-601.
- [10] <http://web.univ-pau.fr/~puiseux/enseignement/cours/analyseComplexe/4-analytique.pdf>.